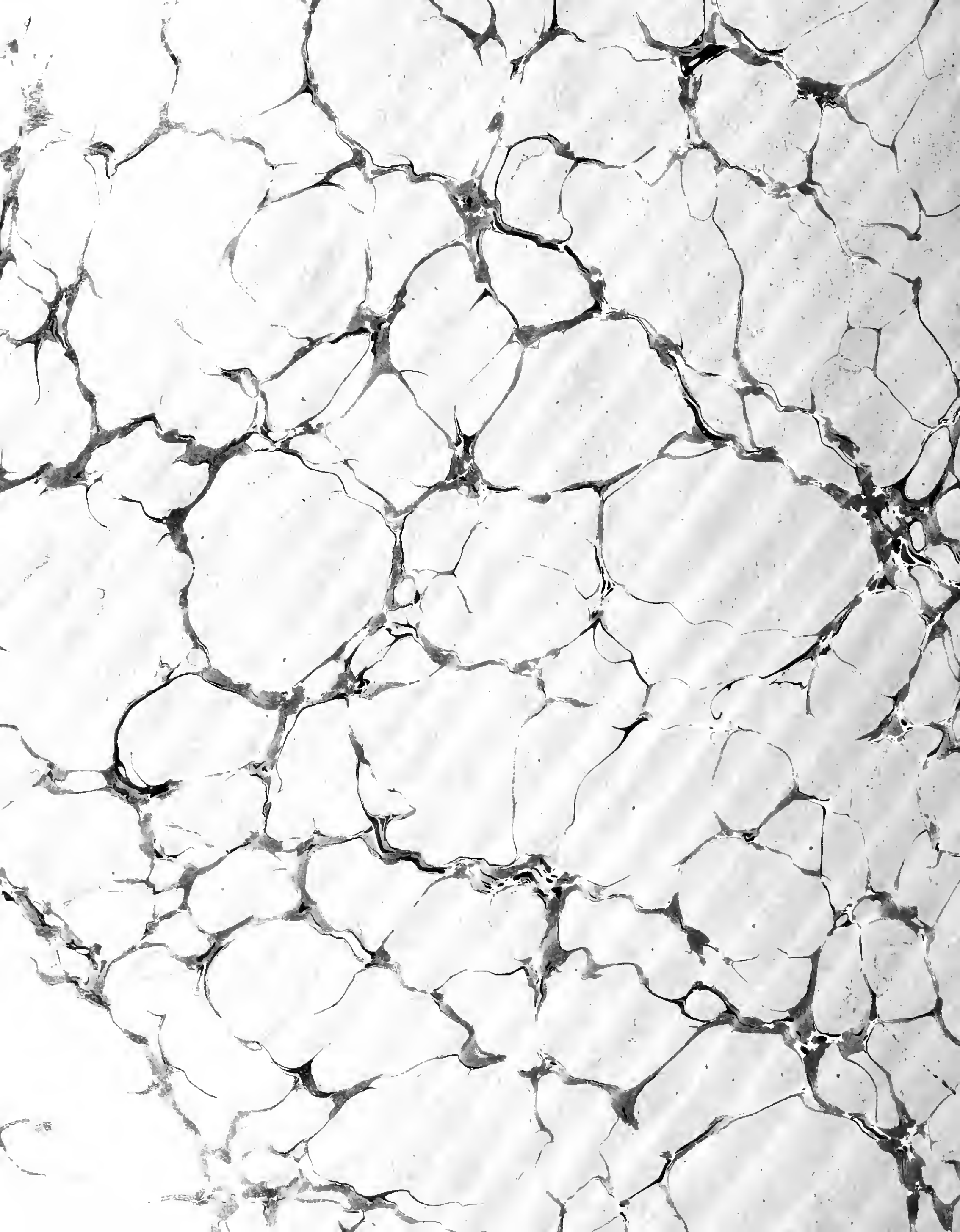

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE,

PAR LÉONARD EULER;

Traduite du latin en français, avec des Notes et des Éclaircissemens,

PAR J. B. LABEY,

Professeur de Mathématiques aux Écoles Centrales du Département de la Seine.

TOME PREMIER.

(Imprimé en 1797.)

A PARIS,

Chez BACHELIER, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes, etc.,

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1835.

AVIS.

On paroiſſoit déſirer, il y a long-temps, une Traduction complette de l'Introduction à l'Analyſe infinitéſimale d'Euler, tant à cauſe de la difficulté de ſe procurer cet Ouvrage devenu rare depuis pluſieurs années, que parce que beaucoup de jeunes Gens qui ſe livrent à l'étude des Mathématiques, n'entendent pas la langue dans laquelle il a été écrit. Je déſire, en publiant aujourd'hui cette Traduction, avoir rempli l'attente & le vœu du Public. Au moins n'ai-je rien négligé pour la rendre la plus claire poſſible, & la mettre à la portée de ceux même qui ne ſauroient que les Éléments ordinaires d'Algèbre. C'eſt dans cette vue que j'ai ajouté quelques éclairciſſements & quelques notes ſur différents endroits de l'Ouvrage, ſoit pour en faciliter l'intelligence, ſoit pour ſuppléer à des démonſtrations, que l'Auteur renvoie quelquefois au Calcul différentiel. Ces notes, étant pour la plupart de ſimples explications, qui ne peuvent intéreſſer que ceux qui ſont moins avancés dans la connoiſſance de l'Analyſe, devoient être placées naturellement au bas des pages, où ſe trouvent les articles, auxquels elles appartiennent;

mais comme les premieres feuilles ont été imprimées, ſans qu'on ait eu cette attention, j'ai été obligé de renvoyer le tout à la fin de l'Ouvrage.

Si le Public accueille favorablement la Traduction que je lui préſente aujourd'hui, & manifeſte le deſir d'avoir dans la même langue les autres Traités du même Auteur, qui font la ſuite de celui-ci, ſavoir, ſon Traité de *Calcul différentiel*, celui de *Calcul intégral*, & même ſa *Théorie du Mouvement des Corps durs*, j'en publierai ſucceſſivement la traduction avec des additions, qui feront connoître les progrès que l'Analyſe a faits depuis l'époque où ces Ouvrages ont paru. En joignant à cette précieuſe collection la Mécanique analytique du C. Lagrange & la Mécanique céleſte que le C. Laplace ſe propoſe de faire bientôt imprimer, on aura en français le corps de Doctrine analytique le plus complet qui ait paru juſqu'ici, & qui réunira ce que l'Analyſe offre de plus ingénieux dans la théorie & de plus ſublime dans l'application.

PRÉFACE DE L'AUTEUR.

J'ai vu ſouvent que les difficultés, qui arrêtent les Commençans, lorſqu'ils ſe livrent à l'étude du Calcul infinitéſimal, viennent en très-grande partie de ce qu'ils veulent s'élever à la connoiſſance de cette nouvelle branche de l'Analyſe, n'ayant encore qu'une teinture aſſez légère de l'Algèbre commune. Il arrive de-là que non-ſeulement ils ſe trouvent arrêtés dès les premiers pas qu'ils font, mais encore qu'ils ſe forment des idées fauſſes de l'infini, dont la vraie notion doit les guider dans leurs opérations & dans l'objet de leurs recherches. Or quoique l'Analyſe infinitéſimale n'exige pas à la rigueur une connoiſſance approfondie de l'Analyſe ordinaire, & de tous les moyens ingénieux qu'on a trouvés juſqu'à préſent pour la perfectionner, on ne peut cependant nier qu'il y ait beaucoup de queſtions dont le développement eſt propre à préparer les eſprits à l'étude de cette ſcience ſublime, & qu'on chercheroit en vain dans la plupart des Traités élémentaires d'Algèbre, ou qui, ſi elles s'y trouvent, y ſont traitées d'une maniere aſſez peu exacte. C'eſt pourquoi je ne doute pas que les matières que j'ai raſſemblées dans les deux Livres qui compoſent cet Ouvrage, ne ſuppléent abondamment à ce défaut. Car non-ſeulement j'ai fait enſorte de ne rien omettre de ce qu'exige abſolument l'Analyſe des infinis, & de l'expoſer avec plus d'étendue & plus de clarté qu'on ne le fait ordinairement; mais j'ai de plus réſolu un aſſez bon nombre de queſtions, qui mettront les Lecteurs à portée de ſe familiariſer inſenſiblement, & en quelque ſorte contre leur attente avec l'idée de l'infini. J'ai auſſi traité par les méthodes de l'Algèbre commune pluſieurs queſtions, qui ſont ordinairement l'objet de l'Analyſe infiniteſimale, afin de rendre plus ſenſible & plus frappant l'accord parfait qu'on remarquera dans la ſuite entre les deux méthodes.

J'ai diviſé ce Traité en deux Livres. Le premier embraſſe ce qui a rapport à l'Analyſe pure. Dans le ſecond je développe pluſieurs queſtions géométriques, dont la connoiſſance m'a paru néceſſaire ; parce qu'ordinairement en traitant de l'Analyſe infinitéſimale, on en fait voir en même temps l'application à la Géométrie. J'ai ſuppoſé par-tout la connoiſſance des premiers Éléments ; & j'ai cru ne devoir expliquer dans ces deux Livres que ce qu'on ne trouveroit pas ailleurs, ou qui du moins y ſeroit traité d'une maniere, qui m'a ſemblé moins avantageuſe, ou bien qui ſuppoſeroit des principes différents des miens.

Je me ſuis ſur-tout étendu dans le premier Livre ſur les fonctions de variables, parce qu'elles ſont l'objet de l'Analyſe infinitéſimale. J'y ai enſeigné la maniere de les transformer, de les décompoſer, & de les réduire en ſéries infinies. J'ai fait l'énumération de pluſieurs eſpeces, auxquelles on doit avoir égard, particulierement dans la haute Analyſe. Je les ai d'abord diviſées en algébriques & en tranſcendantes. Les premieres ſont compoſées de quantités variables combinées entr'elles par les opérations ordinaires de l'Algèbre, & les ſecondes dépendent d'autres opérations, ou des mêmes combinaiſons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois. La ſubdiviſion des fonctions algébriques, qui s'offre la premiere, eſt celle en rationnelles & en irrationnelles. Celles-là peuvent être décompoſées ou en parties plus ſimples, ou en facteurs ; j'ai fourni les moyens de les ramener à cet état de ſimplicité ; & c'eſt une opération dont le Calcul intégral tire un très-grand ſecours. J'ai fait voir enſuite comment, par des ſubſtitutions convenables, on pouvoit donner aux autres une forme rationnelle. Ces eſpeces de fonctions peuvent être converties l'une & l'autre en ſéries infinies. Les fonctions tranſcendantes ſont ſuſceptibles de la même converſion, & même on la leur applique avec le plus grand ſuccès. Tout le monde ſait d'ailleurs de quels progrès la haute Analyſe eſt redevable à la doctrine des ſéries infinies. Auſſi ai-je ajouté quelques Chapitres, où je me ſuis attaché à découvrir les propriétés, & à trouver les ſommes de pluſieurs ſéries infinies, dont quelques-unes paroiſſoient de nature à faire croire preſque qu'elles ne pourroient être trouvées ſans le ſecours du Calcul infiniteſimal. Telles ſont les ſéries, dont les ſommes ſont exprimées ou par les Logarithmes, ou par des arcs de Cercle. Ces ſortes de quantités, qui ſont tranſcendantes, puiſqu'elles ſont repréſentées par la ſurface de l'Hyperbole & du Cercle, font partie des matieres qu'on a coutume de traiter dans l'Analyſe infiniteſimale. Paſſant enſuite des puiſſances aux quantités exponentielles, qui ſont elles-mêmes des puiſſances, dont les expoſants ſont variables, leur développement m'a fourni une idée fort naturelle & à la fois féconde des Logarithmes; d'où il m'a été facile de conclure leurs différents uſages, en même temps que j'ai pu en déduire toutes les ſéries infinies, qui repréſentent ordinairement ces quantités; ce qui m'a donné enfin un moyen très-expéditif de conſtruire les Tables de Logarithmes. Je me ſuis ſemblablement conduit dans l'examen des arcs de Cercle; genre de quantités, qui, quoique très-différent des Logarithmes, leur eſt cependant tellement lié, que lorſqu'une de ces quantités paroît devenir imaginaire, elle ſe change en l'autre. Après avoir rappellé ce que la Géométrie nous apprend ſur la valeur des ſinus

& des cosinus, tant multiples que sous-multiples, j'ai tiré de l'expression du sinus ou du cosinus d'un arc quelconque celle du sinus & du cosinus d'un arc très-petit & presque nul, ce qui m'a conduit à des séries infinies; & comme un tel arc est égal à son sinus, tandis que son cosinus est égal au rayon, j'ai pu, à l'aide des séries infinies, comparer un arc quelconque avec son sinus & son cosinus; & alors il s'est présenté naturellement une si grande variété d'expressions, soit finies soit infinies pour ces sortes de quantités, que pour les connoître à fond, on pourroit se dispenser de recourir au Calcul infinitésimal. De plus, comme les Logarithmes exigent un Algorythme particulier, dont l'usage est très-connu dans toute l'Analyse; j'ai ramené de même les quantités circulaires à une certaine forme de calcul, qui fait qu'on peut les employer aussi commodément que les Logarithmes & les quantités algébriques même. Il n'est pas douteux qu'on en doive retirer le plus grand avantage pour la solution de questions très-difficiles; on sera à portée d'en juger, en jettant les yeux sur quelques Chapitres de ce Livre, & c'est ce que d'ailleurs il seroit possible de prouver par plusieurs essais tirés de l'Analyse des infinis, s'ils n'étoient pas déjà suffisamment connus, & s'ils ne se multiplioient pas de jour en jour. Cette recherche m'a été en particulier d'un grand secours pour décomposer les fonctions fractionnaires en facteurs réels. Ce sujet m'a paru mériter quelques détails, à cause de sa grande utilité dans le Calcul intégral. J'ai examiné ensuite les séries infinies, qui résultent du développement de ces sortes de fonctions, & qui sont connues sous le nom de séries récurrentes. J'ai donné la maniere de les sommer, d'en trouver les termes généraux, & d'en découvrir plusieurs autres propriétés remarquables; & comme je suis arrivé naturellement à ces résultats par une simple

décomposition

décompoſition en facteurs, j'ai voulu voir comment on pouvoit réciproquement convertir en ſéries des produits compoſés d'un certain nombre, & même d'un nombre infini de facteurs. Ce travail m'a non-ſeulement mené à la connoiſſance d'une quantité innombrable de ſéries, mais, parce qu'on pouvoit de cette maniere changer les ſéries en produits compoſés d'une infinité de facteurs, il m'a de plus fait trouver des expreſſions numériques aſſez commodes, à l'aide deſquelles il eſt facile de calculer les Logarithmes des ſinus, des coſinus & des tangentes. La même ſource m'a fourni la ſolution de pluſieurs queſtions, qui regardent la partition des nombres, & qui ſembleroient, ſans ce ſecours, être au-deſſus des forces de l'Analyſe. Cette abondance de matieres auroit pu facilement fournir pluſieurs volumes; mais autant qu'il m'a été poſſible, j'ai voulu être concis, ſans pourtant ceſſer d'être clair, pour laiſſer à l'induſtrie du Lecteur un champ plus vaſte, où il pourra exercer ſes forces & reculer les bornes de l'Analyſe; car je ne crains pas d'avancer, qu'indépendamment des choſes neuves que ce Livre renferme, on y trouvera des ſources où peuvent être puiſées encore un grand nombre de belles découvertes.

J'ai ſuivi la même marche dans le ſecond Livre, où je traite de ce qui a rapport à la Géométrie des Courbes. Mais, avant que de parler des Sections coniques, qui font ailleurs preſque l'unique objet de cette branche des Mathématiques, j'ai donné une théorie des Courbes en général, qu'on pût employer utilement pour en connoître la nature. Je n'ai eu beſoin pour cela que de l'équation de la Courbe, qui m'a ſervi à en déterminer la figure, & à en déduire les principales propriétés. Je crois avoir entiérement rempli mon but, ſur-tout dans les Sections coniques, qui juſqu'ici avoient été traitées par la ſeule Géométrie, ou quelquefois par l'Analyſe, mais d'une maniere trop imparfaite & moins naturelle. Ainſi après avoir déduit de l'équation générale des lignes du ſecond ordre leurs propriétés générales, j'ai ſous-diviſé ces lignes en genres ou eſpeces, examinant ſi elles avoient des branches infinies, ou ſi la courbe entiere étoit renfermée dans un eſpace fini. Mais dans le premier cas, il falloit encore avoir égard au nombre & à la nature de leurs branches, & s'aſſurer ſi elles avoient des aſymptotes rectilignes ou non. J'ai obtenu de cette maniere les trois eſpeces connues de Sections coniques. La premiere eſt l'ellypſe qui eſt renfermée toute entiere dans un eſpace fini; la ſeconde eſt l'hyperbole, dont les quatre branches s'éloignent à l'infini en s'approchant de plus en plus de deux lignes droites; & la troiſieme eſpece eſt la parabole compoſée de deux branches infinies ſans aſymptotes. Je me ſuis conduit d'une maniere ſemblable à l'égard des lignes du troiſieme ordre. Après en avoir expoſé les propriétés générales, je les ai diviſées en ſeize genres, auxquels j'ai rapporté les ſoixante-douze eſpeces de NEWTON; j'ai expoſé ma méthode avec tant de clarté qu'on pourroit, par ſon moyen, diviſer ſans aucune peine toutes les lignes en genres, en paſſant ſucceſſivement d'un ordre au ſuivant. J'en ai fait l'eſſai pour les lignes du quatrieme ordre. Après avoir fini ce que j'avois à dire ſur les ordres des lignes, je retourne à la recherche des affections générales de toutes les lignes. J'explique la méthode de trouver les tangentes des Courbes, leurs normales & leur courbure, qui s'eſtime ordinairement par la grandeur du rayon oſculateur : quoique ces recherches paroiſſent à préſent du reſſort du Calcul différentiel, j'ai cru cependant utile de m'en occuper ici ſans emprunter d'autres ſecours, que celui de l'Algèbre commune, pour faciliter d'autant plus dans la ſuite le paſſage de l'Analyſe des quantités finies à celle des quantités infinies. Je me ſuis auſſi arrêté à l'examen des points d'inflexion, des points de rebrouſſement, des points doubles, ou multiples des Courbes, & j'ai enſeigné la maniere de déduire facilement ces points ſinguliers des équations mêmes. J'avoue cependant qu'il eſt beaucoup plus facile de réſoudre ces problêmes par le moyen du Calcul différentiel. J'ai encore agité la queſtion du point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, où deux arcs, qui ſe terminent en pointe, tournent leur convexité du même côté ; & il me ſemble l'avoir traitée aſſez à fond pour ne laiſſer plus aucun doute ſur cet objet. Enfin j'ai ajouté quelques Chapitres, qui apprennent à trouver des Courbes, qui ſont douées de propriétés particulieres & données ; & j'ai terminé le ſecond Livre par la ſolution de pluſieurs problêmes relatifs à certaines ſections du Cercle. Après avoir ainſi parcouru les différents objets de Géométrie plane, dont la connoiſſance m'a paru utile pour faciliter l'étude de l'Analyſe infinitéſimale, j'ai ajouté en forme d'Appendice une théorie analytique des ſolides & de leur ſurface, & j'ai fait voir comment on pouvoit exprimer la nature d'une ſurface quelconque à l'aide d'une équation entre trois variables. Enſuite, après avoir claſſé les ſurfaces à la maniere des lignes courbes ſuivant le nombre de dimenſions, que forment les variables dans l'équation, j'ai fait voir que la ſeule ſuperficie plane appartenoit au premier ordre. Quant aux ſurfaces du ſecond ordre, je les ai diviſées en ſix eſpeces, eu égard à leurs parties, qui s'étendent à l'infini. On pourra continuer une diviſion ſemblable pour les ordres ultérieurs. J'ai conſidéré auſſi les interſections que forment entr'elles deux ſurfaces ; & comme elles donnent le plus ſouvent des Courbes, qui ne ſont pas ſituées dans un même plan, j'ai indiqué la maniere de les repréſenter par des équations. Enfin j'ai déterminé la poſition des plans tangents, & celle des droites, qui ſont perpendiculaires aux ſurfaces.

Au reſte, comme une grande partie de ces objets a déjà été traitée, j'aurois à m'excuſer de n'avoir pas toujours fait mention honorable de ceux qui m'ont précédé dans ce même genre de travail; mais outre que j'ai voulu me reſſerrer dans l'eſpace le plus étroit poſſible, le détail hiſtorique de chaque problême m'auroit mené trop loin, & auroit groſſi conſidérablement ce Traité. Cependant, comme la plupart des queſtions, qui ont déja été réſolues ailleurs, doivent ici leur ſolution à d'autres principes, je ſerois en droit d'en révendiquer une bonne partie. Quoi qu'il en ſoit, j'eſpere que ces différents objets, & particuliérement ceux qui paroiſſent ici pour la premiere fois, feront quelque plaiſir à ceux qui aiment ce genre d'étude.

TABLE DES CHAPITRES

du Tome premier.

Fin de la Table des Chapitres du Tome premier.

ERRATA du Tome premier.

PAGE 10, lig. 26, *au lieu de* z, *mettez* Z

P. 18, l. 13, *au lieu de* $+q\sqrt{-2t+2\sqrt{(t^2+u^2)}}$, mettez $-q\sqrt{-2t+2\sqrt{(t^2+u^2)}}$;
P. 21, lig. 10, *au lieu de* $\pm vz$, mettez $\pm vz$
Ibid. lig. 19, *au lieu de* $Z+0$, mettez $z+0$,
Ibid. lig. 34, *au lieu de* dans le numérateur que dans le dénominateur, *mettez* dans le dénominateur que dans le numérateur,
P. 26, lig. 24, *au lieu de* égale, *mettez* égalé
P. 29, lig. 8, *au lieu de* quarré de zz, *mettez* quarré zz
Ibid. lig. 13, *au lieu de* de z, mettez z,

P. 36, lig. 7, *au lieu de* $(a+bz)^{m}$, *mettez* $(a+bz)^{\frac{m}{n}}$,

Ibid. lig. 22, *au lieu de* $\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{\frac{m}{n}}$, mettez $\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{\frac{m}{n}}$

P. 41, lig. 7, *au lieu de* $by^{\epsilon}z^{\frac{-\epsilon q}{p}}$, mettez $by^{\epsilon}z^{-\frac{\epsilon q}{p}}$

Ibid. lig. dernière, *au lieu de* bx^{2}, mettez bx^{ϵ}

P. 42, lig. 9, *au lieu de* Cx^{v}, mettez $Cx^{v}+$ &c.
P. 43, lig. 6, *au lieu de* qu'elles, *mettez* quelles
P. 44, lig. 21, *au lieu de* par, *mettez* pour
Ibid. lig. 22, *au lieu de* $+\sqrt{[(exx+fx+g)^2+}$, mettez $\pm\sqrt{[(exx+fx+g)^2+}$
P. 46, lig. 18, *au lieu de nomme*, mettez *se nomme*
P. 49, lig. 6, *au lieu de* Q & R, mettez Q & P.
P. 50, lig. 27, *au lieu de* $6\alpha^4 a$, mettez $5\alpha^4 a$
P. 52, lig. 14, *au lieu de* étoit, *mettez* étant
Ibid. à la marge, *mettez* (l).
P. 54, lig. 11, *au lieu de* $xx-x+1$, mettez $xx-x-1$
Ibid. avant-dernière ligne, *au lieu de* $+$ &c. *mettez* $-$ &c.
Ibid. à la marge, *mettez* (m),

P. 56, lig. 17, *au lieu de* $+\frac{(m-1)}{1}\alpha z^2$, mettez $+\frac{(m-1)}{1}\epsilon z^2$

P. 58, à la marge, *mettez* (n),
P. 64, lig. 13, *au lieu de* ou non, soit, *mettez* ou non. Soit
P. 65, lig. 15, *au lieu de* $z^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{u+\sqrt{(uu+1)}}{\sqrt{(u^3+1)}}\right)$, mettez $z^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{u+\sqrt{(uu+1)}}{\sqrt{(u^3+1)}}\right)$

P. 72, lig. 10, *au lieu de* a^{-zz}, mettez a^{-2z}

P. 76, lig. 28, *au lieu de* la fraction $\frac{p}{q}$, *mettez* la fraction $\frac{q}{p}$.

P. 78, lig. 28, *au lieu de* approchée $2^{\frac{7}{12}}$, *mettez* approchée de $2^{\frac{7}{12}}$.

P. 90, lig. 9, *au lieu de* $+\frac{2}{7\cdot 3^7}$, *mettez* $+\frac{2}{7\cdot 5^7}$

Ibid. lig. 10, *au lieu de* $\frac{2}{3\cdot 7^2}+\frac{2}{5\cdot 7^3}+\frac{2}{7\cdot 7^5}$, *mettez* $\frac{2}{3\cdot 7^3}+\frac{2}{7\cdot 7^5}+\frac{2}{5\cdot 7^7}$
P. 94, lig. 8, *au lieu de* $=z$, mettez $-z$,
P. 95, lig. 4, *au lieu de* $-$ *sin.* $(2z+z)$, mettez $-$ *sin.* $(2y+z)$,
Ibid. lig. 10, *au lieu de sin.* $(y+z)$, mettez *sin.* $(y-z)$,

P. 100, lig. 8, *au lieu de* $v-\frac{}{1.2.3.}$, *mettez* $v-\frac{v^3}{1.2.3.}$

P. 103, lig. 12, *au lieu de* $\sqrt{1}\,.\,\sin.\,z$, mettez $\sqrt{-1}\,.\,\sin.\,z$;
P. 109, lig. 10, 11, 15 & 16, la lettre φ doit être par-tout hors de la parenthèse.
P. 113, lig. 16, *au lieu de* $n + \theta n$, mettez $n + \theta z^n$.
Ibid. lig. 17, *au lieu de* $-2pq\,\cos.\,\varphi$, mettez $-2pqz\,\cos.\,\varphi$
P. 117, lig. 10, *au lieu de* $= 2\left(\frac{x}{i} + \right.$, mettez $2\left(\frac{x}{1} + \right.$
Ibid. lig. 16, *au lieu de* $\frac{4kk\pi\pi xx}{1^4}$, mettez $\frac{4kk\pi\pi xx}{i^4}$
P. 119, lig. 1, *au lieu de* $+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+$, mettez $\frac{z^5}{1.2.3.4.5}-$
P. 132, lig. 16, *au lieu de* $-\frac{1}{(3n-m)^3}+\frac{1}{(5n+m)^3}$, mettez $\frac{1}{(3n+m)^3}+\frac{1}{(5n-m)^3}$
P. 139, lig. 19, *au lieu de* dans cette série, *mettez* dans l'autre série.
P. 140, lig. 21, *au lieu de* $-e^{\pi\sqrt{-b}}$, mettez $-e^{\pi\sqrt{b}}$
P. 141, lig. 3, *au lieu de* $\left(e^{\pi\sqrt{b}}+e^{-\pi\sqrt{-b}}\right)\pi\sqrt{b}$, mettez $\left(e^{\pi\sqrt{b}}+e^{-\pi\sqrt{b}}\right)\pi\sqrt{b}$
P. 192, lig. 3, *au lieu de* $\pm 2^{-1}$, *mettez* $\pm 2^{n-1}$
P. 193, lig. 2, *au lieu de* $= 2^{n+1}$, mettez $= 2^{n-1}$
P. 195, lig. 3, *au lieu de* $2^{n-9}y^{-8}$, mettez $2^{n-9}y^{n-8}$
P. 198, lig. 5, *au lieu de* $-\operatorname{cosec.}\left(\frac{5\pi}{n}+z\right)$, mettez $-\operatorname{cosec.}\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)$
P. 205, lig. 16, *au lieu de* $+\cos.\,(a-z)$, mettez $+\cos.\,(a+z)$.
P. 206, lig. 3, *au lieu de* $\cos.\,3z$, mettez $\cos.\,2z$
P. 207, lig. 28, *au lieu de* $+13+15$, *mettez* $+13+14+15$
P. 218, lig. 15, *au lieu de* $+\frac{1}{7^5}$, *mettez* $+\frac{1}{7^7}$
P. 219, lig. 21, *au lieu de* $S=\frac{1}{2}$, *mettez* $S=\frac{1}{2^n}$
P. 227, lig. 21, *au lieu de* $\frac{1}{7}=\frac{1}{8}$, *mettez* $\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$
P. 269, lig. 22, *au lieu de* plus grande, *mettez* plus petite
P. 279, lig. 22, *au lieu de* $+\omega\gamma$, mettez $+\alpha\gamma$
P. 281, lig. 20, *au lieu de* $(bc+b)$, mettez $(bc+\beta)$
P. 283, lig. 2, *au lieu de* $DEef$, mettez $CEef$
P. 284, lig. 7, *au lieu de* $\frac{\alpha\beta\gamma\varepsilon}{QS}$, mettez $\frac{\alpha\beta\gamma e}{QS}$
P. 311, lig. 2, *au lieu de* $-pzz$, mettez $-rzz$
P. 316, lig. 22, *au lieu de* + &c], *mettez le crochet après* + &c; *qui termine la ligne* 21.
P. 317, lig. 23, *au lieu de* l'exposant de Z, *mettez* l'exposant de z
P. 323, lig. 4, *au lieu de* des fractions, *mettez* des fonctions
P. 337, lig. 11, *au lieu de* $\frac{1}{\left(1-ze^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1-ze^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^i}$, mettez $\frac{1}{\left(1-ze^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^i\left(1-ze^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^i}$
P. 338, lig. 7, *au lieu de* $(1+r-3)$, mettez $(i+r-3)$
Ibid. lig. 8, *au lieu de* $(1+r-4)$, mettez $(i+r-4)$
Ibid. lig. 21, *au lieu de* $i(i+i)$, mettez $i(i+1)$
P. 339, l. 24, *au lieu de* $(i+r-4)(2i-2)(2i-3)$, mett. $(i+r-4)(2i-1)(2i-2)(2i-3)$
P. 343, lig. 20, *au lieu de* $\iota.(\iota+i)$, mettez $\iota.(\iota+1)$.

Nota. Il s'est glissé aussi quelques incorrections de style, que j'ai cru inutile de rapporter ici.

INTRODUCTION

A BONAPARTE.

Citoyen Général,

C'est moins au jeune Héros qui a conquis l'Italie & pacifié le Continent, qu'au Philosophe ami & protecteur éclairé des Sciences & des Arts, que j'adresse cette Traduction. Le goût des Mathématiques, que j'ai été à portée de reconnoître en vous dans un âge moins avancé, & que vous avez conservé au milieu des travaux glorieux qui assurent à votre nom l'immortalité, m'a paru un titre suffisant pour vous en faire l'hommage. En l'agréant, vous mettez le comble à mes vœux, *puisque vous m'offrez l'heureuse occasion de vous exprimer à la fois les sentimens de ma reconnoissance, & ceux d'admiration que je partage avec toute l'Europe.*

LABEY.

AVIS.

INTRODUCTION
A
L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

LIVRE PREMIER,

CONTENANT l'Explication des diverſes ſortes de Fonctions, leur réſolution en Facteurs & leur développement en Séries infinies; avec la théorie des Logarithmes, celle des Arcs de cercle, de leurs Sinus & de leurs Tangentes, & pluſieurs autres Queſtions propres à faciliter l'étude de l'Analyſe infinitéſimale.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fonctions en général.

1. *Une quantité conſtante eſt une quantité déterminée, qui conſerve toujours la même valeur.*

Tels ſont les nombres de toute eſpece, qui conſervent conſtamment la valeur qu'ils ont une fois obtenue. Lorſqu'il s'agit de repréſenter ces ſortes de quantités par des caractères, on ſe ſert des premieres lettres de l'Alphabet $a, b, c,$ &c. A la vérité, dans l'Analyſe ordinaire qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on déſigne ordinairement celles qui ſont connues par les premieres lettres de l'Alphabet, & celles qui ne le ſont pas, par les dernieres; mais c'eſt une diſtinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie; on y enviſage les quantités ſous un autre aſpect particulier, les unes étant considérées comme constantes, & les autres comme variables.

2. *Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'ensuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient. Il en est de la quantité variable, comme du genre & de l'espece à l'égard des individus; on peut la concevoir comme embrassant toutes les quantités déterminées. Au reste, on a coutume de représenter les quantités variables par les dernieres lettres de l'Alphabet z, y, x, &c.

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels & transcendants; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque maniere que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.*

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{aa - zz}$; c^z; &c, sont des fonctions de z.

5. *Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même une infinité de valeurs, & il eſt impoſſible d'en concevoir aucune, dont elle ne ſoit ſuſceptible, puiſque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction $\sqrt{(9 - zz)}$ ne puiſſe donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mettra des nombres réels à la place de z; cependant, en introduiſant pour z des nombres imaginaires, tels que $5\sqrt{-1}$, il n'eſt pas poſſible d'aſſigner une valeur déterminée, qui ne puiſſe être déduite de la formule $\sqrt{(9 - zz)}$. Au reſte, il n'eſt pas rare de rencontrer des expreſſions qui ne ſont que des fonctions apparentes; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conſervent toujours la même valeur, comme z^0; 1^z; $\frac{aa - az}{a - z}$. Ces expreſſions, ſous la forme apparente de fonctions de variables, ſont réellement des quantités conſtantes.

6. *La principale différence des fonctions conſiſte dans la combinaiſon de la variable & des quantités conſtantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par leſquelles les quantités peuvent être compoſées & combinées entr'elles. Ces opérations ſont l'Addition & la Souſtraction; la Multiplication & la Diviſion; l'Élévation aux Puiſſances & l'Extraction des Racines; à quoi il faut ajouter encore la Réſolution des Equations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a pluſieurs autres qu'on nomme tranſcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres ſans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Diſtinguons cependant certaines eſpeces de fonctions; ſavoir, les Multiples $2z$; $3z$; $\frac{3}{5}z$; az, &c. & les Puiſſances de z; comme z^2; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1}; &c, quantités formées par une ſeule opération, & qui, comme celles qui réſultent de la combinaiſon de pluſieurs, ne laiſſent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. *Les fonctions ſe diviſent en algébriques & en tranſcendantes; les premieres ſont formées par des opérations algébriques*

seulement, & les dernieres supposent pour leur formation des opérations transcendantes.

Les multiples & les puissances de z sont donc des fonctions algébriques, ainsi que toutes les expressions, qui n'admettent que les opérations algébriques, dont nous avons parlé ; telle est la quantité $\frac{a + bz^n - c\sqrt{(2z - zz)}}{aaz - 3bz^3}$. Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement ; telle seroit la fonction Z de z, si elle étoit exprimée par l'équation $Z^5 = azz Z^3 - bz^4 Z^2 + cz^3 Z - 1$. Car, quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que Z est égal à une expression composée de la variable z & de constantes, & que par conséquent Z est une fonction quelconque de z. Pour avoir une fonction transcendante, il ne suffit pas qu'il entre dans son expression une opération transcendante, il faut de plus qu'elle affecte la variable ; car si elle n'affectoit que des constantes, la fonction n'en seroit pas moins censée algébrique. Par exemple, si c désigne la circonférence d'un cercle, dont le rayon $= 1$, la quantité c sera bien une quantité transcendante ; cependant ces expressions $c + z$; cz^2 ; $4z^c$, &c. seront des fonctions algébriques de z. Car il importe peu de savoir si ces sortes d'expressions z^c doivent être mises au nombre des fonctions algébriques ou non. Il y a aussi des Géomètres qui ont mieux aimé donner aux puissances de z, dont les exposans étoient des nombres irrationnels, comme $z^{\sqrt{2}}$, le nom de fonctions interscendantes, que celui de fonctions algébriques.

8. *Les fonctions algébriques se subdivisent en rationnelles & en irrationnelles. Dan les dernieres la variable est affectée de radicaux, & dans les premieres elle n'en est point affectée.*

Par conséquent, les fonctions rationnelles n'admettent pas d'autres opérations que l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division & l'Élévation aux Puissances, dont les exposans sont des nombres entiers ; ainsi, les quantités $a+z$; $a-z$; az; $\frac{aa+zz}{a+z}$, az^3-bz^5, &c. sont des fonctions rationnelles de z; mais ces expressions $\sqrt{z}$; $a+\sqrt{(aa-zz)}$; $\sqrt[3]{(a-2z+zz)}$; $\frac{aa-z\sqrt{(aa+zz)}}{a+z}$ en seront des fonctions irrationnelles.

Celles-ci se divisent commodément en explicites & en implicites. Les explicites sont développées au moyen des radicaux; nous en avons donné des exemples, & les implicites dépendent de la résolution des équations. Ainsi Z sera une fonction irrationnelle implicite de z, si elle est représentée par cette équation $Z^7 = azZ^2 - bz^5$. En effet, on ne peut en tirer la valeur explicite de Z, même en admettant les signes radicaux, par la raison que l'Algébre n'est pas encore parvenue à ce degré de perfection.

9. *Les fonctions rationnelles enfin, se divisent en entieres & en fractionnaires.*

Dans celles-là, il n'entre aucune puissance négative de la variable z, ni aucunes fractions qui renferment cette variable dans leurs dénominateurs; d'où il suit que les fonctions fractionnaires sont celles qui ont des dénominateurs affectés de la variable z, ou dans lesquelles se rencontrent des exposans négatifs de cette même variable. Ainsi la formule générale des fonctions entieres sera $a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+$ &c. Car on ne peut imaginer aucune fonction entiere de z, qui ne soit renfermée dans cette expression. Quant aux fonctions fractionnaires, comme plusieurs fractions peuvent toujours être réduites à une seule, elles seront comprises dans la formule

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\text{\&c.}}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\zeta z^5+\text{\&c.}},$$

Remarquez ici que les quantités constantes a, b, c, d, &c. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. soit qu'on les suppose positives ou négatives, entieres ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, &

même transcendantes, ne changent point la nature des fonctions.

10. *Il faut ensuite remarquer principalement la division des fonctions en uniformes & en multiformes.*

La fonction uniforme est celle qui n'obtient qu'une seule valeur déterminée, quelque valeur déterminée qu'on donne à la variable z. La fonction multiforme est celle qui, pour chaque valeur déterminée qu'on met à la place de la variable, donne plusieurs valeurs déterminées. Toutes les fonctions rationnelles soit entieres, soit fractionnaires, sont des fonctions uniformes, parce que ces sortes d'expressions, quelque soit le nombre qu'on substitue à la variable, n'obtiennent qu'une seule valeur; mais les fonctions irrationnelles sont toutes multiformes, à cause de l'ambiguité des signes radicaux, & de la double valeur qu'ils indiquent. Il y a aussi parmi les fonctions transcendantes des fonctions uniformes & multiformes, on peut même admettre des fonctions infinitiformes; tel seroit l'arc de cercle qui répondroit au sinus z, car il y a une infinité d'arcs circulaires qui ont tous le même sinus. Dans ce qui suit nous supposerons que les lettres P, Q, R, S, T, &c. représentent chacune des fonctions uniformes de z.

11. *Une fonction biforme est celle qui, par la substitution d'une valeur déterminée de* z, *reçoit deux valeurs.*

Telles sont les fonctions désignées par les racines quarrées, comme $\sqrt{(2z + zz)}$; car, quelque nombre qu'on substitue à z, on obtiendra pour l'expression $\sqrt{(2z + zz)}$ deux valeurs, l'une positive, l'autre négative. En général, Z sera une fonction biforme de z, si cette quantité est déterminée par l'équation du second degré $Z^2 - PZ + Q = 0$; P & Q étant des fonctions uniformes de z. En effet, $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$; d'où il suit qu'à chaque valeur déterminée de z, répondent deux valeurs déterminées de Z; mais il faut remarquer que l'une & l'autre valeur de Z est à la fois réelle ou imaginaire. D'ailleurs on sait par la théorie des équations, que leur somme $= P$, & que leur produit $= Q$.

12. *Une fonction triforme est celle qui, pour chaque valeur de* z, *reçoit trois valeurs déterminées.*

Ces fonctions dépendent de la résolution des équations du troisieme degré. En effet si P, Q & R sont des fonctions uniformes, & qu'on ait l'équation $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$, Z sera une fonction triforme de z, puisque Z reçoit trois valeurs déterminées pour chaque nombre qu'on substitue à z. Ces trois valeurs de Z seront ou toutes trois réelles, ou l'une seulement sera réelle & les deux autres imaginaires. Au reste leur somme $= P$, celle de leurs produits deux à deux $= Q$, & le produit des trois $= R$.

13. *Une fonction quadriforme de* z *est celle qui, pour une valeur de cette variable, est susceptible de quatre valeurs déterminées.*

Elle est renfermée dans la résolution des équations du quatrieme degré. Car, si P, Q, R & S désignant, comme ci-dessus, des fonctions uniformes, on a l'équation $Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0$, Z sera une fonction quadriforme de z; chaque valeur de z donnant pour Z quatre valeurs déterminées. Or ces quatre valeurs seront toutes réelles, ou deux seront réelles & deux imaginaires, ou elles seront toutes quatre imaginaires; mais leur somme $= P$; la somme de leurs produits deux à deux $= Q$; celle de leurs produits trois à trois $= R$; & le produit de toutes $= S$. Il en sera de même de la nature & de la formation des fonctions de degrés plus élevés.

14. *Donc si* Z *est déterminé par l'équation* $Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4}$, &c. $= 0$; Z *sera une fonction multiforme de* z, *laquelle pour chaque valeur de cette variable, prendra autant de valeurs qu'il y a d'unités dans l'exposant* n.

Il faut faire attention que n doit être un nombre entier; & en général, pour pouvoir juger de quel degré la fonction Z

eſt multiforme, l'équation qui la renferme, doit être rendue rationnelle; alors l'expoſant de la plus haute puiſſance de Z indiquera le nombre cherché de valeurs de Z correſpondantes à chaque valeur de z. Il ne faut pas non plus perdre de vue que les lettres P, Q, R, S, &c. doivent déſigner des fonctions uniformes de z; car, ſi quelqu'une d'entr'elles déſignoit déjà une fonction multiforme de z, la fonction Z fourniroit pour chacune des valeurs de z beaucoup plus de valeurs correſpondantes que ne l'indiqueroit le nombre des dimenſions de Z. Au reſte, s'il doit y avoir des valeurs imaginaires, elles ſeront toujours en nombre pair. Par conſéquent, ſi n eſt un nombre impair, il y aura au moins une des valeurs de Z, qui ſera réelle; & au contraire ſi n eſt pair, il eſt poſſible qu'il n'y en ait aucune de réelle.

15. *Si* Z *eſt une fonction multiforme de* z, *telle qu'elle ne puiſſe jamais obtenir qu'une ſeule valeur réelle, elle ſe rapprochera par ce caractère des fonctions uniformes, & pourra, pour cette raiſon, être rangée parmi ces dernieres.*

Telles ſont les fonctions $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$, &c. car elles n'auront jamais qu'une valeur réelle, toutes les autres étant imaginaires, pourvu que P ſoit une fonction uniforme de z. C'eſt pour cette raiſon que l'expreſſion $P^{\frac{m}{n}}$, toutes les fois que n ſera impair, pourra être miſe au nombre des fonctions uniformes, m étant un nombre pair ou impair; mais ſi n eſt un nombre pair, alors $P^{\frac{m}{n}}$ ou n'aura aucune valeur réelle, ou en aura deux; d'où il ſuit que dans ce dernier cas, les expreſſions telles que $P^{\frac{m}{n}}$ pourront, avec raiſon, être miſes au rang des fonctions biformes; pourvu que la fraction $\frac{m}{n}$ ne ſoit pas réductible à une plus ſimple expreſſion.

16. *Si* y *eſt une fonction quelconque de* z, *réciproquement* z *ſera une fonction de* y.

En

En effet, puiſque y eſt une fonction de z, ſoit uniforme, ſoit multiforme, on aura une équation, par laquelle y ſera donné en z & en conſtantes; mais on pourra réciproquement conclure de la même équation la valeur de z en y & en conſtantes. Donc y étant une quantité variable, la quantité z qui ſera égale à une expreſſion compoſée de y & de conſtantes, ſera une fonction de y. Il ſera facile d'en conclure le degré de la fonction, & il peut ſe faire que y ſoit une fonction uniforme de z, tandis que z ſera une fonction multiforme de y. Par exemple, ſi la valeur de y en z eſt donnée par l'équation $y^3 = ayz - bzz$, y ſera une fonction triforme de z, & z une fonction ſeulement biforme de y.

17. *Si* y *&* x *ſont des fonctions de* z, y *ſera auſſi une fonction de* x, *& réciproquement*, x *une fonction de* y.

Puiſque y eſt une fonction de z, z ſera auſſi une fonction de y: ſemblablement, z ſera une fonction de x. Par conſéquent la fonction de y ſera égale à une fonction de x. Par cette équation la valeur de y ſera donnée en x, & celle de x en y. Il eſt donc évident que y eſt une fonction de x, & que x eſt une fonction de y. A la vérité, le plus ſouvent ces fonctions ne peuvent être repréſentées explicitement, à cauſe de l'imperfection de l'Algèbre; cependant on n'en apperçoit pas moins la réciprocité des fonctions, comme s'il étoit poſſible de réſoudre les équations de tous les degrés. Au reſte les méthodes algébriques nous apprennent que de deux équations; l'une entre y & z, & l'autre entre x & z, on peut par l'élimination de z, en former une troiſième qui exprimera la relation entre x & y.

18. *Enfin on doit diſtinguer des fonctions paires & des fonctions impaires. Une fonction paire de* z *eſt celle qui donne la même valeur, ſoit qu'on prenne pour* z *une valeur déterminée* + k *ou* − k.

Telle eſt la fonction zz; car, ſi l'on ſuppoſe $z = +k$ ou $-k$, il en réſultera toujours pour zz la même valeur, ſavoir $+ kk$. Pareillement les puiſſances z^4, z^6, z^8, & en général toute puiſſance z^m, m étant un nombre pair, ſoit poſitif, ſoit négatif, ſeront des fonctions paires de z. De plus, comme la quantité $z^{\frac{m}{n}}$ peut paſſer pour une fonction uniforme de z, ſi n eſt un nombre impair, il eſt clair que $z^{\frac{m}{n}}$ ſera une fonction paire de z, lorſque m eſt un nombre pair, & que n eſt un nombre impair. Donc toute expreſſion compoſée de telles puiſſances, de quelque maniere que ce ſoit, ſera une fonction paire de z. Ainſi Z ſera une fonction paire de z, ſi on a l'équation $Z = a + bz^2 + cz^4 + dz^6 +$ &c. ou $Z = \frac{a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \&c.}{\alpha + \beta z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \&c}$; de même, en introduiſant des expoſans fractionnaires, Z ſera une fonction paire de z, ſi l'on a $Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{2}{5}} + dz^{\frac{4}{7}}$, &c. ou $Z = a + bz^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{3}} + dz^{-\frac{2}{5}} +$ &c, ou bien $Z = \frac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}}}$. Ces expreſſions étant toutes des fonctions uniformes de z, pourront être appellées fonctions paires uniformes de z.

19. *Une fonction multiforme paire de* z, *eſt celle qui, pour chaque valeur particuliere de* z, *donne pluſieurs valeurs déterminées, & qui reſtent cependant les mêmes, ſoit qu'on faſſe* z $=$ k, *par exemple, ſoit qu'on faſſe* z $= -$ k.

Suppoſons Z une fonction multiforme paire de z, puiſque la nature d'une fonction multiforme conſiſte dans une équation entre Z & z, dans laquelle Z a autant de dimenſions qu'elle renferme de valeurs diſtinctes ; il eſt évident que Z ſera une fonction multiforme paire, ſi dans l'équation qui exprime ſa nature, la variable z a dans tous les termes des dimenſions paires. Ainſi l'équation $Z^2 = aZz^4 + bz^8$ donnera une fonction biforme paire de z ; mais ſi l'on a $Z^3 - az^2Z^2 + bz^4Z - cz^8 = 0$, Z ſera une fonction triforme paire de z; & en général si P, Q, R, S, &c. représentent des fonctions uniformes paires de z, Z sera une fonction biforme paire, si $Z^2 - PZ + Q = 0$, & Z sera une fonction triforme paire de z, si $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$, ainsi de suite.

20. *Donc une fonction paire de* z, *soit uniforme, soit multiforme, sera une expression composée de la variable* z *& de constantes, dans laquelle le nombre des dimensions de* z *est un nombre pair.*

Outre les exemples des fonctions uniformes paires que nous avons donnés, on trouvera encore des exemples des fonctions dont il s'agit, dans les expressions suivantes : $a + \sqrt{(bb - zz)}$; $azz + \sqrt[3]{(a^6 z^4 - bz^2)}$, & $az^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(z^2 + \sqrt{(a^4 - z^4)})}$ &c.

D'où il suit que les fonctions paires peuvent être définies des fonctions de zz.

En effet, si l'on suppose $y = zz$, & que Z soit une fonction de y; en mettant zz à la place de y, Z deviendra une fonction de z, dans laquelle z aura un nombre pair de dimensions. Il faut cependant excepter les cas, où dans l'expression il entreroit des quantités, telles que $\sqrt{y}$, & d'autres, dans lesquelles en faisant $y = zz$, le signe radical disparoîtroit. Car, quoique par exemple, $y + \sqrt{ay}$ soit une fonction de y, cependant en faisant $y = zz$, la même formule ne deviendra pas une fonction paire de z; puisqu'elle devient $y + \sqrt{ay} = zz + z\sqrt{a}$. Mais, ces cas exceptés, la derniere définition des fonctions paires est bonne, & peut même servir à en former.

21. *Une fonction impaire de* z *est celle dont la valeur, en faisant* z *négatif, devient aussi négative.*

Ainsi, on trouvera autant de fonctions impaires de z dans chacune des puissances de z, dont les exposans sont des nombres impairs. Telles sont les quantités z^1, z^3, z^5, z^7, &c. & z^{-1}, z^{-3}, z^{-5}, &c. La puissance $z^{\frac{m}{n}}$ sera encore une fonction impaire, si les deux nombres m & n sont des nombres impairs. En général, toute expression composée de semblables puissances sera une fonction impaire de z, comme $az + bz^3$, $az + az^{-1}$; & $z^{\frac{1}{3}} + az^{\frac{3}{5}} + bz^{-\frac{5}{3}}$, &c. Au reste, la nature & la formation de ces fonctions se reconnoîtront plus facilement par celles des fonctions paires.

22. *Si une fonction paire de* z *est multipliée par* z, *ou par une fonction impaire de cette variable, le produit sera une fonction impaire de* z.

Soit P une fonction paire de z, laquelle, par conséquent, reste la même, si l'on met $-z$ à la place de z. Si dans le produit Pz on met $-z$ au lieu de z, il en résultera la quantité $-Pz$. Donc Pz sera une fonction impaire de z. Soit toujours P une fonction paire de z, & supposons Q une fonction impaire de la même variable, il est clair d'après la définition, que si au lieu de z on écrit $-z$, P reste le même, & que Q devient $-Q$; par conséquent le produit PQ par la substitution de $-z$ au lieu de z, se changera en $-PQ$, c'est-à-dire, qu'il deviendra négatif. Donc PQ est une fonction impaire de z. Ainsi la quantité $a + \sqrt{(aa + zz)}$ étant une fonction paire, & z^3 une fonction impaire, leur produit $az^3 + z^3\sqrt{(aa + zz)}$ sera une fonction impaire de z. Semblablement, $z \times \frac{a + bzz}{\alpha + \beta zz} = \frac{az + bz^3}{\alpha + \beta zz}$ est une fonction impaire. On voit encore par-là que si, des deux fonctions P & Q, dont la premiere P est paire, & la seconde Q impaire, l'une est divisée par l'autre, le quotient $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{Q}{P}$ sera une fonction impaire de z.

23. *Si une fonction impaire est multipliée ou divisée par une fonction impaire, le produit ou le quotient seront des fonctions paires.*

Soient Q & S des fonctions impaires, de maniere qu'en mettant $-z$ à la place de z, Q devienne $-Q$, & que S se change en $-S$, il est clair que ni le produit QS, ni le quotient $\frac{Q}{S}$ ne changent de ſigne par le changement de ſigne de z. Donc le quarré d'une fonction impaire eſt une fonction paire; le cube une fonction impaire; la quatrieme puiſſance une fonction paire; ainſi de ſuite.

24. *Si* y *eſt une fonction impaire de* z, *réciproquement* z *ſera une fonction impaire de* y.

En effet, puiſque y eſt une fonction impaire de z, ſi l'on écrit $-z$ à la place de z, y ſe changera en $-y$. Donc, ſi la valeur de z eſt donnée en y, il faut néceſſairement qu'en mettant $-y$ au lieu de y, z devienne auſſi $-z$, & par conſéquent z ſera une fonction impaire de y. Par exemple, ſi $y = z^3$, y eſt une fonction impaire de z, & de l'équation $z^3 = y$, ou $z = y^{\frac{1}{3}}$, on conclura de même que z eſt une fonction impaire de y; & parceque, ſi $y = az + bz^3$, y eſt une fonction impaire de z, on verra que réciproquement la valeur de z tirée de l'équation $bz^3 + az = y$, eſt une fonction impaire de y.

25. *Si la nature de la fonction* y *eſt exprimée par une équation, telle que dans chacun des termes ſéparément, la ſomme des expoſans de* y *& de* z, *ſoit par-tout un nombre pair ou un nombre impair, dans ce cas,* y *ſera une fonction impaire de* z.

Car ſi dans cette équation on écrit partout $-z$ au lieu de z, & en même temps $-y$ au lieu de y, tous les termes de l'équation ou reſteront les mêmes, ou deviendront tous négatifs. Dans les deux cas, l'équation demeurera la même. D'où il ſuit que $-y$ ſera déterminé par $-z$, de la même maniere que $+y$ l'eſt par $+z$. Par conſéquent, ſi pour z on met $-z$, y deviendra $-y$; c'eſt-à-dire, que y ſera une fonction impaire de z. Ainſi dans les deux équations $y^2 = ayz + bzz + c$; & $y^3 + ayyz = byzz + cy + dz$, y ſera une fonction impaire de z. (a)

26. *Suppoſons que* Z *&* Y *ſoient reſpectivement des fonctions de* z *& de* y; *& que* Y *ſoit déterminé par la variable* y *& par des conſtantes, de la même maniere que* Z *l'eſt par la*

variable z & par des constantes ; alors ces fonctions Y & Z *sont dites des fonctions semblables de* y & *de* z.

Par exemple, si $Z = a + bz + cz^2$ & $Y = a + by + cy^2$, Z & Y seront des fonctions semblables de z & de y. De même dans les fonctions multiformes, si $Z^3 = azzZ + b$, & $Y^3 = ayyY + b$, Z & Y seront des fonctions semblables de z & de y. Il suit de-là que si, à la place de z, on met y, la fonction Z deviendra la fonction Y. Cette similitude des fonctions peut être rendue ainsi, en disant : Y est la même fonction de y, que Z est de z; cette maniere de s'énoncer convient également, soit que les variables dépendent ou ne dépendent pas l'une de l'autre. Par exemple, si on a les deux expressions $ay + by^3$ & $a(y+n) + b(y+n)^3$; on pourra dire : la premiere quantité est la même fonction de y, que la seconde est de $y + n$. C'est surquoi il n'y aura aucun doute, si on fait $z = y + n$. Il en sera de même des fractions $\frac{a + bz + czz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$, & $\frac{azz + bz + c}{\alpha zz + \beta z + \gamma}$, qui sont des fonctions semblables de z & $\frac{1}{z}$. En voilà assez pour mettre à portée de reconnoître la similitude des fonctions, dont l'usage est si fréquent dans la haute Géométrie. L'application que nous en ferons dans la suite, fournira de plus amples éclaircissemens.

CHAPITRE II.

De la Transformation des Fonctions.

27. *On change la forme des fonctions, ou en introduisant une nouvelle variable à la place de la premiere, ou en conservant la même.*

Si l'on conserve la même variable, on ne peut pas dire qu'il y ait de changement proprement dit. Mais toute transformation suppose une autre maniere d'exprimer la même fonction ; c'est ainsi que l'Algèbre nous apprend qu'une même quantité peut prendre différentes formes. On aura une idée de ces sortes de transformations, si, par exemple, au lieu de la fonction $2 - 3z + zz$ on écrit $(1 - z)(2 - z)$, ou $(a + z)^3$ au lieu de $a^3 + 3aaz + 3azz + z^3$, ou $\frac{a}{a-z} + \frac{a}{a+z}$ à la place de $\frac{2aa}{aa-zz}$, ou $\sqrt{(1 + zz)} + z$, à la place de $\frac{1}{\sqrt{(1+zz)}-z}$. Ces expressions, quoique différentes par la forme, reviennent pourtant au même ; néanmoins parmi ces manieres d'exprimer la même quantité, il y en a qui sont plus propres que les autres à remplir le but qu'on se propose ; & c'est pour cette raison qu'il est à propos de choisir celle qui est la plus commode. L'autre transformation, par laquelle on introduit au lieu de la variable z une autre variable y, qui ait avec la premiere un rapport donné, est dite se faire par voie de substitution ; il convient d'y recourir, pour exprimer une fonction, plus briévement & plus commodément ; comme si dans cette fonction de z, $a^4 - 4a^3z + 6aazz - 4az^3 + z^4$, on met y pour $a - z$; on aura une fonction de y beaucoup plus simple, savoir y^4 ; &, si dans la fonction irrationnelle $\sqrt{(aa + zz)}$ on fait $z = \frac{a^2-y^2}{2y}$, la fonction de y, qui en résultera, sera rationnelle & $= \frac{aa+yy}{2y}$. Mais nous remettrons à parler de cette maniere de transformer les fonctions dans le Chapitre suivant, & nous nous contenterons de traiter dans celui-ci de la transformation, qui se fait sans substitution.

28. *Souvent une fonction entiere de z se décompose commodément en ses facteurs, & prend par-là la forme d'un produit.*

Quand une fonction entiere est ainsi décomposée en ses facteurs, on en reconnoît mieux la nature ; car on voit à la simple inspection dans quels cas sa valeur $= 0$. Par exemple, en mettant cette fonction de z, $6 - 7z + z^3$ sous la forme du produit $(1 - z)(2 - z)(3 + z)$, on apperçoit sur le champ qu'elle devient $= 0$ dans trois cas, favoir, lorfque $z = 1$, ou $z = 2$, ou $z = -3$; propriétés, qu'il eût été moins aifé de conclure de la premiere forme $6 - 7z + z^3$. Ces fortes de facteurs, dans lefquels il n'entre aucune puiffance de la variable z, font appellés facteurs fimples, pour les diftinguer des facteurs compofés, qui renferment le quarré, ou le cube, ou une autre puiffance plus élevée de la variable. Ainfi la forme générale des facteurs fimples fera $f + gz$; celle des facteurs doubles, $f + gz + hzz$; celle des facteurs triples, $f + gz + hzz + iz^3$, ainfi des autres. Il eft clair d'ailleurs qu'un facteur double renferme deux facteurs fimples; un facteur triple, trois facteurs fimples, ainfi de fuite. Donc une fonction entiere de z, dans laquelle l'expofant de la plus haute puiffance $= n$, contiendra n facteurs fimples, & par conféquent, le nombre des facteurs, s'il y en a de doubles, ou de triples, fera en même-temps connu.

29. *Les facteurs fimples d'une fonction entiere Z de z fe trouvent, en égalant la fonction Z à zéro, & en cherchant toutes les racines de cette équation; car elles donneront chacune*
(*b*) *autant de facteurs fimples de la fonction Z.*

En effet, foit l'équation $Z = 0$, laquelle ait pour racine $z = f$, $z - f$ fera un divifeur, & par conféquent un facteur de la fonction Z. Ainfi, en déterminant toutes les racines de l'équation $Z = 0$, que je fuppofe être $z = f$, $z = g$, $z = h$; la fonction Z fera décompofée en fes facteurs fimples, & prendra la forme du produit $Z = (z - f)(z - g)(z - h)$, &c: mais il faut obferver que, fi le coëfficient de la plus haute puiffance de z dans Z n'étoit pas l'unité, il
(*c*) faudroit de plus multiplier le produit par ce coëfficient. Par exemple, fi $Z = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} +$ &c, on aura $Z = A(z - f)(z - g)(z - h)$ &c; ou bien fi $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ &c, & que les racines z de l'équation foient f, g, h, i; &c, on aura $Z = A\left(1 - \frac{z}{f}\right)$

$(1 -$

$(1 - \frac{z}{g})(1 - \frac{z}{h})$ &c. Concluons de-là réciproquement que, si l'un des facteurs de la fonction Z est $z - f$ ou $1 - \frac{z}{f}$, la valeur de la fonction se réduit à zéro, si on écrit f à la place de z. Car en faisant $z = f$, un facteur $z - f$ ou $1 - \frac{z}{f}$ de la fonction Z doit s'évanouir, & par suite la fonction Z elle-même.

30. *Les facteurs simples seront donc ou réels ou imaginaires, & si la fonction Z a des facteurs imaginaires, ils seront toujours en nombre pair.*

Car, comme les facteurs simples proviennent des racines de l'équation $Z = 0$, les racines réelles fourniront des facteurs réels, & les racines imaginaires des facteurs imaginaires; mais comme dans toute équation, le nombre des racines imaginaires est toujours pair, il s'ensuit que la fonction Z n'aura aucun facteur imaginaire, ou qu'elle en aura deux, ou quatre, ou six, &c. Si la fonction Z renferme seulement deux facteurs imaginaires, leur produit sera réel, & donnera conséquemment un facteur double réel. Car soit $P =$ au produit de tous les facteurs réels, le produit des facteurs imaginaires sera $\frac{Z}{P}$, & par conséquent réel. Semblablement, si la fonction Z renferme quatre, ou six, ou huit, &c. facteurs imaginaires, leur produit sera toujours réel & égal au quotient de la fonction Z, divisée par le produit de tous les facteurs réels.

31. *Si Q est un produit réel de quatre facteurs simples imaginaires, je dis que ce même produit pourra être resolu en deux facteurs doubles réels.*

Car la fonction Q aura cette forme $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$. Si l'on nie qu'elle puisse être décomposée en deux facteurs doubles réels, elle pourra l'être du moins en deux facteurs doubles imaginaires, qui auront cette forme: $zz - 2(p + q\sqrt{-1})z + r + s\sqrt{-1}$, & $zz - 2(p - q\sqrt{-1})z + r - s\sqrt{-1}$; car on ne peut concevoir d'autres formes

(d) imaginaires, dont le produit soit réel, c'est-à-dire, $= z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$. Or on tirera de ces facteurs imaginaires doubles les quatre facteurs imaginaires simples de Q, comme il suit.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & z-(p+q\sqrt{-1})+\sqrt{(pp+2pq\sqrt{-1}-qq-r-s\sqrt{-1})} \\ \text{II.} & z-(p+q\sqrt{-1})-\sqrt{(pp+2pq\sqrt{-1}-qq-r-s\sqrt{-1})} \\ \text{III.} & z-(p-q\sqrt{-1})+\sqrt{(pp-2pq\sqrt{-1}-qq-r+s\sqrt{-1})} \\ \text{IV.} & z-(p-q\sqrt{-1})-\sqrt{(pp-2pq\sqrt{-1}-qq-r+s\sqrt{-1})} \end{array}$$

Si l'on multiplie l'un par l'autre, le premier & le troisieme de ces facteurs, en faisant, pour abréger, $t = pp - qq - r$, & $u = 2pq - s$, on aura un produit réel, qui sera $= zz - (2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{(t^2+u^2)}})\, z + pp + qq - p\sqrt{2t + 2\sqrt{(t^2+u^2)}}$ $+ \sqrt{(t^2+u^2)} - q\sqrt{-2t + 2\sqrt{(t^2+u^2)}}$; de même le produit du second & du quatrieme facteur sera réel, & $= zz - (2p + \sqrt{2t + 2\sqrt{(t^2+u^2)}})\, z + pp + qq + p\sqrt{2t + 2\sqrt{(t^2+u^2)}} + \sqrt{t^2+u^2}$. Donc le produit pro-

$+ q\sqrt{-2t + 2\sqrt{(t^2+u^2)}}$

posé Q qu'on supposoit n'être pas décomposable en deux facteurs doubles réels, se trouve par le fait décomposé en de tels facteurs.

32. *Quelque soit le nombre de facteurs simples imaginaires, dont une fonction Z de z est composée, on pourra toujours en combiner deux, de maniere qu'il en résulte un produit réel.*

Le nombre des racines imaginaires étant toujours pair, supposons le $= 2n$, d'abord il est clair que le produit de toutes ces racines imaginaires est réel. S'il y a seulement deux racines imaginaires, leur produit sera certainement réel; & s'il y a quatre facteurs imaginaires, leur produit, comme nous venons de le voir, peut être décomposé en deux facteurs doubles de la forme $fz^2 + gz + h$. Quoique la même maniere de démontrer ne s'étende pas aux puissances plus élevées, il paroît cependant hors de doute que cette propriété convient également à un nombre quelconque de facteurs, de sorte qu'à la place de $2n$ facteurs simples imaginaires, on pourra supposer un nombre n de facteurs doubles réels. Donc toute fonction entiere de z pourra être décomposée en facteurs réels, ou simples, ou doubles. Si la vérité de cette proposition n'est pas démontrée ici en toute rigueur, elle acquerra dans la suite un nouveau degré de force, quand nous décomposerons effectivement en facteurs doubles réels les fonctions de cette forme: $a + bz^n$; $a + bz^n + cz^{2n}$; $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n}$, &c. (*Voyez l'art.* 154, *& la note qui y est relative*).

33. *Si une fonction entiere* Z, *en faisant* $z = a$, *prend la valeur* A, *& en faisant* $z = b$, *prend la valeur* B; *en mettant à la place de* z, *des valeurs moyennes entre* a *&* b, *la fonction* Z *peut prendre toutes les valeurs moyennes qu'on voudra, entre* A *&* B.

Puisque Z est une fonction uniforme de z, quelque valeur réelle qu'on donne à z, la fonction Z aura aussi une valeur réelle, & si la quantité Z, dans le premier cas, où $z = a$, prend la valeur A, & dans le second cas où $z = b$, la valeur B, elle ne pourra passer de A à B, qu'en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Donc, si l'équation $Z - A = 0$, & l'équation $Z - B = 0$, ont une racine réelle, l'équation $Z - C = 0$, en aura une aussi, pourvu que C soit renfermé entre A & B. Donc, si les expressions $Z - A$ & $Z - B$ ont un facteur simple réel, l'expression $Z - C$ en aura un aussi, toutes les fois que C sera renfermé entre A & B.

34. *Si dans la fonction entiere* Z *l'exposant de la plus haute puissance de* z *est un nombre impair* $2n + 1$, *la fonction* Z *aura au moins un facteur simple réel.*

La fonction Z aura cette forme $z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} +$ &c. Si l'on fait $z = \infty$, tous les termes disparoîtront devant le premier, & elle deviendra $Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$. Donc $Z - \infty$ aura un facteur simple réel, savoir,

$z - \infty$. Mais si on suppose $z = -\infty$, Z deviendra $(-\infty)^{2n+1} = -\infty$, & par conséquent $Z + \infty$ aura pour facteur simple réel, $z + \infty$. Puis donc que $Z - \infty$ & $Z + \infty$ ont chacun un facteur simple réel, il s'ensuit que $Z + C$ aura un facteur simple réel, pourvu que la valeur de C soit renfermée entre les limites $+\infty$ & $-\infty$; c'est-à-dire, pourvu que C soit un nombre réel quelconque, ou positif, ou négatif. Donc, si $C = 0$, la fonction Z aura un facteur simple réel $z - c$, & la quantité c sera comprise entre $+\infty$ & $-\infty$; c'est-à-dire, sera ou une quantité positive, ou une quantité négative, ou zéro.

35. *Donc une fonction entiere* Z, *dans laquelle l'exposant de la plus grande puissance de* z *est un nombre impair, aura ou un facteur simple réel, ou trois, ou cinq, ou sept, &c.*

Il vient d'être démontré que la fonction Z avoit au moins un facteur simple réel, $z - c$. Supposons qu'elle en ait encore un autre $z - d$, & divisons cette fonction Z, dans laquelle la plus haute puissance de z est z^{2n+1}, par $(z - c)(z - d)$, la plus haute puissance du quotient sera $= z^{2n-1}$, dont l'exposant impair annonce encore un facteur simple réel. Donc, si la quantité Z a plus d'un facteur simple réel, elle en aura ou trois, ou (en continuant de raisonner de la même maniere) cinq ou sept, &c. c'est-à-dire, qu'il y aura un nombre impair de facteurs simples réels; & comme le nombre de tous les facteurs simples $= 2n + 1$, celui des facteurs imaginaires sera pair.

36. *Une fonction entiere* Z, *dans laquelle l'exposant de la plus haute puissance de* z *est un nombre pair* 2n, *aura ou deux, ou quatre, ou six, ou, &c. facteurs simples réels.*

Car supposons que le nombre des facteurs simples réels de Z soit impair & $= 2m + 1$; si on divise la fonction Z par leur produit, la plus haute puissance du quotient sera $= z^{2n-2m-1}$, dont l'exposant est impair. La fonction Z aura donc encore au moins un facteur simple réel. Donc le nombre des facteurs simples réels sera au moins $= 2m + 2$, & par conséquent pair ; & celui des facteurs imaginaires sera également pair. Donc les facteurs simples imaginaires d'une fonction entiere quelconque sont toujours en nombre pair ; comme nous l'avons déja dit.

37. *Si dans la fonction Z l'exposant de la plus haute puissance de z est un nombre pair, & que le terme absolu ou constant soit affecté du signe —, la fonction Z aura au moins deux facteurs simples réels.*

La fonction Z, dont il s'agit ici, aura donc cette forme: $z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \pm \ldots\ldots \pm \kappa z - A$. Si l'on fait $z = \infty$, Z deviendra, comme ci-dessus, $= \infty$, & si l'on fait $z = 0$, Z deviendra $= -A$. Donc $Z - \infty$ aura le facteur réel $z - \infty$, & $Z + A$ le facteur réel $z - 0$, d'où il suit que, 0 étant renfermé entre les limites $-\infty$ & $+A$, $Z + 0$ a un facteur simple réel $z - c$, c étant compris entre les limites 0 & ∞. En faisant ensuite $z = -\infty$, Z devient encore $= \infty$; ainsi $Z - \infty$ aura pour facteur $z + \infty$, & comme $Z + A$ a pour facteur $Z + 0$, il s'ensuit que $Z + 0$ a un facteur simple réel $z + d$, d étant compris entre 0 & ∞; ce qui constate la vérité de la proposition. On voit par-là que si Z est une fonction, telle qu'elle est supposée ici, l'équation $Z = 0$ a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative. Par exemple, l'équation $z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - aa = 0$ a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

38. *Si dans une fonction fractionnaire la variable z a autant ou plus de dimensions dans le numérateur que dans le dénominateur, cette fonction pourra être décomposée en deux parties, l'une qui sera un entier, & l'autre une fraction, dans le numérateur de laquelle la variable z aura moins de dimensions que dans le dénominateur.*

En effet, l'exposant de la plus haute puissance de z étant moindre dans le numérateur que dans le dénominateur, divisons à la maniere ordinaire le numérateur par le dénominateur, jusqu'à ce que nous trouvions au quotient un exposant négatif pour z, & terminons là l'opération de la division, nous aurons un quotient composé d'une partie entiere & d'une fraction, dans le numérateur de laquelle le nombre des dimensions de z sera plus petit que dans le dénominateur; & ce quotient sera égal à la fonction proposée. Prenons, pour exemple, la fonction fractionnaire $\frac{1+z^4}{1+zz}$; en faisant la division, comme on le voit ici :

$$
\begin{array}{l}
zz+1)\; z^4+1 \;\left(zz-1+\frac{2}{1+zz}\right. \\
\quad\quad\quad\underline{z^4+zz} \\
\quad\quad -\,zz+1 \\
\quad\quad \underline{-\,zz-1} \\
\quad\quad\quad\quad +2
\end{array}
$$

Nous trouverons $\frac{1+z^4}{1+zz}=zz-1+\frac{2}{1+zz}$. Ces sortes de fonctions fractionnaires, dans lesquelles la variable z a autant ou plus de dimensions au numérateur qu'au dénominateur, peuvent être appellées, comme en Arithmétique, des fractions improprement dites, pour les distinguer des véritables fractions, dans le numérateur desquelles la variable z a moins de dimensions que dans le dénominateur. Ainsi une fonction fractionnaire improprement dite pourra être résolue en une fonction entiere, & en une fonction fractionnaire proprement dite; & cette résolution se fera par la division ordinaire.

39. *Si le dénominateur d'une fonction fractionnaire est composé de deux facteurs premiers entr'eux, cette fonction pourra être décomposée en deux fractions, dont les dénominateurs soient respectivement égaux à ces deux facteurs.*

Quoique cette décomposition convienne également aux deux especes de fonctions fractionnaires, dont nous venons de parler; nous l'appliquerons particuliérement aux fonctions fractionnaires proprement dites. Ayant donc décomposé le dénominateur de la fonction en ses deux facteurs premiers entr'eux, la fonction proposée se changera en deux autres, qui ſont véritablement fractionnaires, & dont les dénominateurs ſeront reſpectivement égaux à ces deux facteurs; de plus cette réſolution, pourvu qu'il s'agiſſe de véritables fractions, ne pourra s'effectuer que d'une ſeule maniere. Un exemple fera mieux ſentir que le raiſonnement, la vérité de ce que nous avançons; ſoit donc propoſée la fonction fractionnaire, $\frac{1-2z+3zz-4z^3}{1+4z^4}$, dont le dénominateur $1+4z^4$ eſt égal au produit $(1+2z+2zz)(1-2z+2zz)$; cette fraction ſe décompoſera en deux autres, dont l'une aura pour dénominateur $1+2z+2zz$, & l'autre, $1-2z+2zz$. Comme ce ſont de vraies fractions, ſuppoſons, pour les trouver, le numérateur de la premiere $= \alpha+\beta z$, & celui de la ſeconde $= \gamma+\delta z$, nous aurons par hypotheſe, $\frac{1-2z+3zz-4z^3}{1+4z^4} = \frac{\alpha+\beta z}{1+2z+2zz} + \frac{\gamma+\delta z}{1-2z+2zz}$. Ajoutons ces deux fractions, après les avoir réduites au même dénominateur; leur ſomme aura pour

$$\begin{array}{l|c}
\text{Numérateur} & \text{Dénominateur} \\
+\alpha-2\alpha z+2\alpha zz & \\
\quad +\beta z-2\beta zz+2\beta z^3 & 1+4z^4 \\
+\gamma+2\gamma z+2\gamma zz & \\
\quad +\delta z+2\delta zz+2\delta z^3 &
\end{array}$$

Le dénominateur étant donc égal à celui de la fraction propoſée, il eſt néceſſaire de rendre auſſi égaux les numérateurs, ce qui pourra toujours ſe faire, & cela d'une maniere ſeulement, à cauſe qu'il y a préciſément autant de lettres inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que de termes à égaler. Ainſi nous aurons les quatre équations ſuivantes:

I. $\alpha+\gamma=1$ III. $2\alpha-2\beta+2\gamma+2\delta=3$
II. $-2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=-2$ IV. $2\beta+2\delta=-4$

A cauſe de $\alpha+\gamma=1$, & de $\beta+\delta=-2$, les équations II & III donneront $\alpha-\gamma=0$; & $\delta-\beta=\frac{1}{2}$. D'où $\alpha=\frac{1}{2}$; $\gamma=\frac{1}{2}$; $\beta=-\frac{5}{4}$; $\delta=-\frac{3}{4}$; ainſi la fraction

proposée $\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4}$ est transformée en ces deux-ci : $\frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z}{1 + 2z + 2zz} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z}{1 - 2z + 2zz}$. Il est facile de voir que dans tout autre cas la décomposition doit de même réussir, parce qu'il y a toujours autant de lettres inconnues qu'il est nécessaire, pour trouver chaque numérateur. Mais la
(e) théorie ordinaire des fractions nous apprend que cette résolution ne peut avoir lieu que dans les cas où les facteurs du dénominateur sont premiers entr'eux.

40. *La fonction fractionnaire* $\frac{M}{N}$ *pourra donc se résoudre en autant de fractions simples de la forme* $\frac{A}{p - qz}$, *que le dénominateur* N *renferme de facteurs simples, inégaux entr'eux.*

Cette expression $\frac{M}{N}$ représente une fonction fractionnaire quelconque proprement dite, telle que M & N soient des fonctions entieres de z, & que la plus haute puissance de z dans M soit moindre que dans N. Décomposons donc le dénominateur N en ses facteurs simples, & supposons-les inégaux entr'eux, l'expression $\frac{M}{N}$ sera transformée en autant de fractions qu'il y a de facteurs simples dans le dénominateur N, parce que chaque facteur devient le dénominateur d'une fraction partielle. Si donc $p - qz$ est un facteur de N, il sera le dénominateut d'une des fractions partielles, & comme le nombre des dimensions de z doit être plus petit dans le numérateur que dans le dénominateur $p - qz$, le numérateur sera nécessairement une quantité constante. Donc chaque facteur simple $p - qz$ du dénominateur N donnera une fraction simple $\frac{A}{p - qz}$, de maniere que la somme de toutes ces fractions soit égale à la fraction proposée $\frac{M}{N}$.

EXEMPLE.

EXEMPLE.

Soit proposée la fonction fractionnaire $\frac{1+zz}{z-z^3}$; les facteurs simples du dénominateur étant z, $1-z$, & $1+z$, cette fonction se décomposera en ces trois fractions simples $\frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z} = \frac{1+zz}{z-z^3}$, dont il s'agit de déterminer les numérateurs constants A, B & C. Réduisons ces fractions au même dénominateur, $z-z^3$, la somme des numérateurs devra être égale à $1+zz$; d'où naît l'équation . . . . . .

$$\begin{array}{l} A+Bz-Azz=1+zz=1+0z+zz. \\ \quad +Cz+Bzz \\ \qquad\quad -Czz \end{array}$$

Nous tirerons de-là, en comparant les coëfficiens des puissances égales, autant d'équations qu'il y a de lettres inconnues, A, B, C, savoir,

I. $A=1.$

II. $B+C=0.$

III. $-A+B-C=1.$

Donc $B-C=2$; $A=1$; $B=1$, & $C=-1$. La fraction proposée prendra donc cette forme $\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}$. On voit semblablement que, quelque soit le nombre de facteurs simples, inégaux entr'eux, du dénominateur N, la fraction $\frac{M}{N}$ se décomposera toujours en autant de fractions simples; mais, s'il y a quelques facteurs égaux entr'eux, on s'y prendra d'une autre maniere qui sera expliquée ci-après.

41. *Chaque facteur simple du dénominateur* N, *fournissant une fraction simple pour la résolution de la fonction proposée* $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, *il s'agit de faire voir comment la connoissance d'un facteur simple du dénominateur* N *donne celle de la fraction simple correspondante.*

Soit $p - qz$ un facteur ſimple de N, de maniere que $N = (p - qz) S$, & que S ſoit une fonction entiere de z; ſuppoſons la fraction qui dérive du facteur $p - qz$, $= \frac{A}{p - qz}$, & ſoit $\frac{P}{S}$ la fraction qui réſulte de l'autre facteur S du dénominateur, de maniere que (*art.* 39) $\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p - qz) S}$. Donc $\frac{P}{S} = \frac{M - AS}{(p - qz) S}$. Pour que ces fractions ſoient les mêmes, il faut que $M - AS$ ſoit diviſible par $p - qz$, parce que la fonction entiere P eſt égale au quotient de cette diviſion. Mais, ſi $p - qz$ eſt un diviſeur de $M - AS$, cette expreſſion, en faiſant $z = \frac{p}{q}$, doit ſe réduire à zéro. Mettons donc, à la place de z, la valeur conſtante $\frac{p}{q}$ dans M & S, nous aurons $M - AS = 0$. Donc $A = \frac{M}{S}$. Donc, par ce procédé, le numérateur A de la fraction cherchée $\frac{A}{p - qz}$ ſe trouve déterminé. Si, au moyen des facteurs ſimples du dénominateur N, que je ſuppoſe toujours inégaux, on forme de cette maniere toutes les fractions partielles, leur ſomme ſera égale à la fonction propoſée $\frac{M}{N}$.

EXEMPLE.

Si dans l'exemple précédent $\frac{1 + zz}{z - z^3}$, où $M = 1 + zz$ & $N = z - z^3$, on prend z pour le facteur ſimple; alors $S = 1 - zz$ & le numérateur de la fraction ſimple $\frac{A}{z}$ ſera $= \frac{1 + zz}{1 - zz} = 1$, à cauſe de $z = 0$, valeur qui réſulte de l'hypothèſe du facteur ſimple z égale à zéro. De même ſi l'on prend le facteur $1 - z$ du dénominateur, de ſorte que $S = z + zz$, on aura $A = \frac{1 + zz}{z + zz}$ en faiſant le facteur $1 - z = 0$. Donc $A = 1$, & par conſéquent la fraction partielle réſultante du facteur $1 - z$ sera $= \frac{1}{1-z}$. Enfin le troisieme facteur $1 + z$, à cause de $S = z - zz$, & de $A = \frac{1 + zz}{z - zz}$, en faisant $1 + z = 0$, ou $z = -1$, donnera $A = -1$, & la fraction simple $= \frac{-1}{1+z}$. Ainsi en suivant cette regle, on trouve $\frac{1 + zz}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$, comme ci-dessus.

42. *Une fonction fractionnaire de cette forme* $\frac{P}{(p - qz)^n}$, *dont le numérateur* P *ne renferme pas une aussi grande puissance de* z *que le dénominateur* $(p - qz)^n$, *peut être changée en une suite de fractions partielles de cette forme* $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \ldots + \frac{K}{p-qz}$, *dont les numérateurs soient tous des quantités constantes.*

Puisque la plus grande puissance de z dans le numérateur P est plus petite que z^n, elle sera z^{n-1}, & par conséquent P aura cette forme $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots + \kappa z^{n-1}$. Cette suite a un nombre n de termes, & le numérateur de la somme de toutes les fractions partielles, après qu'elles auront été réduites au même dénominateur, doit lui être égal. Ce numérateur sera donc $= A + B(p - qz) + C(p - qz)^2 + D(p - qz)^3 + \ldots + K(p - qz)^{n-1}$. La plus haute puissance de z est ici, comme dans P, z^{n-1}, & il y a autant de lettres inconnues, A, B, C, ... K, (le nombre en est n) qu'il y a de termes correspondants à comparer. Les lettres constantes A, B, C, &c. pourront donc être déterminées, de maniere qu'on ait la fonction fractionnaire $\frac{P}{(p-qz)^n} = \frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p-qz)^{n-3}} + \ldots + \frac{K}{p-qz}$. Nous allons donner un moyen facile de trouver ces numérateurs.

43. *Si le dénominateur* N *de la fonction fractionnaire* $\frac{M}{N}$

a pour facteur $(p - qz)^2$*; on trouvera de la maniere ſuivante les fractions partielles qui réſultent de ce facteur.*

Nous avons montré comment on trouvoit les fractions partielles qui dérivoient des facteurs ſimples, inégaux entr'eux. Suppoſons à préſent qu'il y ait deux facteurs égaux, ou, en les réuniſſant, qu'un facteur du dénominateur N ſoit $(p - qz)^2$. Suivant l'art. précédent, il en réſultera ces deux fractions partielles $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}$. Or ſoit $N = (p - qz)^2 S$, on aura $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz)^2 S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$, $\frac{P}{s}$ déſignant la ſomme de toutes les fractions ſimples qui proviennent du facteur S du dénominateur. Donc on aura $\frac{P}{S} = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2 S}$, & $P = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2}$ = à une fonction entiere. Il faut donc que la quantité $M - AS - B(p-qz)S$ ſoit diviſible par $(p-qz)^2$. Elle le ſera donc d'abord par $p - qz$, & l'expreſſion totale $M - AS - B(p-qz)S$ s'évanouira, ſi l'on fait $p - qz = 0$, ou $z = \frac{p}{q}$. Ecrivons donc par-tout $\frac{p}{q}$ à la place de z; nous aurons $M - AS = 0$, & par conſéquent $A = \frac{M}{S}$, c'eſt à-dire, que la fraction $\frac{M}{S}$ donnera la valeur conſtante de A, en mettant par-tout $\frac{p}{q}$ à la place de z. Cette valeur trouvée, j'obſerve que la quantité $M - AS - B(p-qz)S$ doit être auſſi diviſible par $(p-qz)^2$, ou que $\frac{M-AS}{p-qz} - BS$ doit être encore diviſible par $p - qz$. En faiſant par-tout $z = \frac{p}{q}$, on aura $\frac{M-AS}{p-qz} = BS$, & par conſéquent $B = \frac{M-AS}{(p-qz)S} = \frac{1}{p-qz}\left(\frac{M}{S} - A\right)$; il faut remarquer ici que la quantité $M - AS$ étant diviſible par $p - qz$, on doit faire cette division avant de faire la substitution de $\frac{p}{q}$ à la place de z; ou bien supposé $\frac{M - AS}{p - qz} = T$, on aura $B = \frac{T}{S}$, en faisant $z = \frac{p}{q}$; les numérateurs A & B étant ainsi trouvés, on connoîtra les fractions $\frac{A}{(p - qz)^2} + \frac{B}{p - qz}$, que donne le facteur $(p - qz)^2$ du dénominateur N.

Exemple I.

Soit proposée la fonction fractionnaire $\frac{1 - zz}{zz(1 + zz)}$, & considérons le facteur quarré de zz du dénominateur, nous aurons $S = 1 + zz$, & $M = 1 - zz$; soient les fractions partielles qui en dérivent : $\frac{A}{zz} + \frac{B}{z}$; nous aurons $A = \frac{M}{S} = \frac{1 - zz}{1 + zz}$, le facteur z étant supposé $= 0$. Donc $A = 1$. Ensuite $M - AS = -2zz$, quantité, qui divisée par le facteur simple de z, donne $T = -2z$, & par conséquent $B = \frac{T}{S} = \frac{-2z}{1 + zz}$. Donc, à cause de $z = 0$, $B = 0$; & il ne proviendra du facteur zz du dénominateur que la fraction partielle $\frac{1}{zz}$.

Exemple II.

Soit proposée la fonction fractionnaire $\frac{z^3}{(1 - z)^2(1 + z^4)}$, dont les fractions partielles qui naissent du facteur quarré $(1 - z)^2$, soient $\frac{A}{(1 - z)^2} + \frac{B}{1 - z}$. Ici $M = z^3$, & $S = 1 + z^4$. Par conséquent $A = \frac{M}{S} = \frac{z^3}{1 + z^4} = \frac{1}{2}$, en faisant $1 - z = 0$, ou $z = 1$. Donc $M - AS = z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^4 = -\frac{1}{2} + z^3 - \frac{1}{2}z^4$, quantité, qui divisée par $1 - z$, donne $T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}z^3$, & conséquemment

$B = \frac{T}{S} = \frac{-1-z-zz+z^3}{2+2z^4} =$ (en faiſant $z = 1$) $- \frac{1}{2}$. Les fractions partielles demandées ſont donc $\frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{2(1-z)}$.

44. *Si le dénominateur* N *de la fraction* $\frac{M}{N}$ *renferme un facteur, tel que* $(p-qz)^3$; *on déterminera de la maniere ſuivante les fractions partielles qui naiſſent de ce facteur : ſavoir,* $\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}$.

Soit $N = (p-qz)^3 S$, & ſoit $\frac{P}{S}$ la fraction qui dérive du facteur S, on aura $P = \frac{M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S}{(p-qz)^3}$ = à une fonction entiere. Le numérateur $M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S$ doit donc avant tout être diviſible par $p - qz$; par conſéquent il ſe réduira à zéro, en faiſant $p - qz = 0$, ou $z = \frac{p}{q}$. Alors $M - AS = 0$, & $A = \frac{M}{S}$, en ſuppoſant $z = \frac{p}{q}$. A ayant été déterminé de cette maniere, $M - AS$ ſera diviſible par $p - qz$. Soit $\frac{M-AS}{p-qz} = T$; $T - BS - C(p-qz)S$ ſera encore diviſible par $(p-qz)^2$, & deviendra $= 0$, ſi l'on ſuppoſe $p - qz = 0$. Donc $B = \frac{T}{S}$, en mettant $\frac{p}{q}$ à la place de z. Après avoir trouvé B; $T - BS$ ſera auſſi diviſible par $p - qz$. Suppoſons $\frac{T-BS}{p-qz} = V$; $V - CS$ reſte encore diviſible par $p - qz$. Donc $V - CS = 0$, & $C = \frac{V}{S}$, en faiſant toujours $z = \frac{p}{q}$. Les numérateurs A, B, C ayant donc été ainſi déterminés, on connoîtra les fractions partielles $\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}$, que donne le facteur $(p-qz)^3$ du dénominateur N.

EXEMPLE.

Soit la fraction $\frac{zz}{(1-z)^3\,(1+zz)}$, dont le dénominateur renferme le facteur cubique $(1-z)^3$, qui donne les fractions partielles $\frac{A}{(1-z)^3} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-z}$. Dans ce cas $M = zz$, & $S = 1 + zz$. Donc on aura d'abord $A = \frac{zz}{1+zz} = \frac{1}{2}$, en faisant $1 - z = 0$, ou $z = 1$. Soit fait $T = \frac{M - AS}{1-z}$. Donc $T = \frac{\frac{1}{2}zz - \frac{1}{2}}{1-z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z$, & partant $B = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z}{1+zz} = -\frac{1}{2}$, en faisant $z = 1$. Soit ensuite $V = \frac{T - BS}{1-z} = \frac{T + \frac{1}{2}S}{1-z}$; on aura $V = \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zz}{1-z} = -\frac{1}{2}z$, & par conséquent $C = \frac{V}{S} = \frac{-\frac{1}{2}z}{1+zz} = -\frac{1}{4}$, à cause de $z = 1$. Ainsi les fractions partielles qui naissent du facteur cube $(1-z)^3$ du dénominateur, sont $\frac{1}{2(1-z)^3} - \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{4(1-z)}$.

45. *Si le dénominateur* N *de la fonction fractionnaire a pour facteur* $(p - qz)^n$, *on déterminera de la maniere suivante les fractions partielles qui en résultent, savoir*, $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{K}{p-qz}$.

Soit le dénominateur $N = (p - qz)^n Z$, on trouvera, en raisonnant comme ci-dessus,

1°. $A = \frac{M}{Z}$, z étant $= \frac{p}{q}$. Soit $P = \frac{M - AZ}{p - qz}$; donc

2°. $B = \frac{P}{Z}$, z étant $= \frac{p}{q}$. Soit $Q = \frac{P - BZ}{p - qz}$; donc

3°. $C = \frac{Q}{Z}$, z étant $= \frac{p}{q}$. Soit $R = \frac{Q - CZ}{p - qz}$; donc

4°. $D = \frac{R}{Z}$, z étant $= \frac{p}{q}$. Soit $S = \frac{R - DZ}{p - qz}$; donc

5°. $E = \frac{S}{Z}$, z étant $= \frac{p}{q}$. &c.

Donc, si l'on détermine de cette maniere tous les numérateurs constants A, B, C, D, &c, on aura trouvé toutes les fractions partielles qui naissent du facteur $(p - qz)^n$ du dénominateur N.

Exemple.

Soit proposée la fonction fractionnaire $\frac{1+zz}{z^5(1+z^3)}$. Le facteur z^5 du dénominateur doit donner les fractions partielles $\frac{A}{z^5} + \frac{B}{z^4} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z}$. Pour trouver les numérateurs constants de ces fractions, vous observerez que $M = 1 + zz$, $Z = 1 + z^3$, & $\frac{p}{q} = 0$. Faites donc le calcul suivant :

1°. $A = \frac{M}{Z} = \frac{1+zz}{1+z^3} = 1$, en faisant $z = 0$.

Soit $P = \frac{M - AZ}{z} = \frac{z^2 - z^3}{z} = z - z^2$; donc

2°. $B = \frac{P}{Z} = \frac{z - zz}{1+z^3} = 0$, à cause de $z = 0$.

Soit $Q = \frac{P - BZ}{z} = \frac{z - z^2}{z} = 1 - z$; donc

3°. $C = \frac{Q}{Z} = \frac{1 - z}{1 + z^3} = 1$, à cause de $z = 0$.

Soit $R = \frac{Q - CZ}{z} = \frac{-z - z^3}{z} = -1 - zz$; donc

4°. $D = \frac{R}{Z} = \frac{-1 - zz}{1 + z^3} = -1$, à cause de $z = 0$.

Soit $S = \frac{R - DZ}{z} = \frac{-zz + z^3}{z} = -z + z^2$; donc

5°. $E = \frac{S}{Z} = \frac{-z + zz}{1 + z^3} = 0$, à cause de $z = 0$.

Les fractions cherchées sont donc $\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z}$.

46. *Donc quelle que soit la fonction rationnelle fractionnaire* $\frac{M}{N}$, *en vous y prenant de la maniere suivante, vous la décomposerez en ses parties, & la ramenerez à sa forme la plus simple.*

Cherchez

Cherchez tous les facteurs ſimples ſoit réels, ſoit imaginaires du dénominateur N; traitez ſéparément ceux qui n'ont point leurs pareils, & calculez la fraction partielle qui dérive de chacun par la méthode donnée (*art.* 41.) Si le même facteur ſimple revient deux fois ou davantage, formez de leur produit une puiſſance qui aura la forme $(p - qz)^n$, & cherchez les fractions partielles qui en découlent (*art.* 45). Après avoir ainſi déduit de tous les facteurs ſimples du dénominateur les fractions partielles qui en réſultent, vous en ferez une ſomme qui ſera égale à la fonction propoſée $\frac{M}{N}$; à moins que cette fonction ne fût pas une fraction proprement dite; car alors il faudroit extraire la partie entiere, & l'ajouter à la ſomme des fractions partielles que vous aurez trouvées, pour avoir ſous la forme la plus ſimple la valeur de la fonction $\frac{M}{N}$. Au reſte, il revient au même de chercher les fractions partielles avant ou après l'extraction de l'entier. Car chaque facteur du dénominateur fournira toujours la même fraction partielle, ſoit que vous employiez le numérateur M, ſoit que vous employiez le même numérateur augmenté ou diminué d'un multiple du dénominateur N, comme il eſt aiſé de s'en convaincre à quiconque aura examiné les regles que nous avons données. (*f*)

Exemple.

Qu'il ſoit queſtion d'exprimer de la maniere la plus ſimple la valeur de la fonction $\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$. Prenez d'abord le facteur ſimple unique $1 + z$ du dénominateur, vous aurez $\frac{p}{q} = -1$, $M = 1$, & $Z = z^3 - 2z^4 + z^5$; donc pour déterminer la fraction $\frac{A}{1+z}$, vous aurez $A = \frac{1}{z^3 - 2z^4 + z^5} = -\frac{1}{4}$, à cauſe de $z = -1$, & par conſéquent le facteur $1 + z$ donnera la fraction partielle $-\frac{1}{4(1+z)}$. Prenez ensuite le facteur quarré $(1 - z)^2$, lequel donne $\frac{p}{q} = 1$, $M = 1$, & $Z = z^3 + z^4$. Représentez les fractions partielles qui en résultent par $\frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z}$, vous trouverez $A = \frac{1}{z^3 + z^4} = \frac{1}{2}$, en faisant $z = 1$. Soit $P = \frac{M - \frac{1}{2}Z}{1 - z} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \frac{1}{2}z^3$. Donc $B = \frac{P}{Z} = \frac{1 + z + z^2 + \frac{1}{2}z^3}{z^3 + z^4} = \frac{7}{4}$, à cause de $z = 1$; & les fractions partielles demandées seront $\frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)}$. Enfin le troisieme facteur cubique z^3 donne $\frac{p}{q} = 0$; $M = 1$, & $Z = 1 - z - z^2 + z^3$. Supposez qu'il fournisse ces trois fractions partielles $\frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z}$; vous trouverez d'abord $A = \frac{M}{Z} = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^3} = 1$, en faisant $z = 0$. Soit $P = \frac{M - Z}{z} = 1 + z - zz$; donc $B = \frac{P}{Z} = 1$, à cause de $z = 0$. Enfin, soit $Q = \frac{P - Z}{z} = 2 - zz$; vous trouverez $C = \frac{Q}{Z} = 2$, en faisant toujours $z = 0$. Ainsi la fonction proposée aura pris la forme $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)} - \frac{1}{4(1+z)}$. Il n'y aura point d'entier à ajouter, parce que la quantité, dont il s'agit, est une véritable fraction.

CHAPITRE III.

De la Transformation des Fonctions par Substitution.

46. *Si* y *est une fonction quelconque de* z, *& que* z *soit exprimé par une nouvelle variable* x, y *pourra l'être de même par* x.

Ainsi, supposant que y soit une fonction de z, en introduisant une nouvelle variable x, on represente les deux premieres au moyen de cette troisieme. Par exemple, si $y = \frac{1 - zz}{1 + zz}$ & qu'on fasse $z = \frac{1 - x}{1 + x}$, cette substitution à la place de z donnera $y = \frac{2x}{1 + xx}$. Donc une valeur quelconque déterminée, prise pour x, déterminera celle de y & de z, & fera connoître conséquemment la valeur de y correspondante à celle de z. Si l'on fait, par exemple, $x = \frac{1}{2}$, on aura $z = \frac{1}{3}$, & $y = \frac{4}{5}$; on trouveroit de même $y = \frac{4}{5}$, si dans l'équation $y = \frac{1 - zz}{1 + zz}$, on faisoit $z = \frac{1}{3}$.

Cette introduction d'une nouvelle variable a deux usages. En effet, lorsque l'expression par laquelle y est donnée en z renferme des radicaux, c'est un moyen de s'en débarrasser; ou bien, lorsque l'équation qui exprime la relation entre y & z, est d'un degré trop élevé pour qu'on en puisse tirer une fonction explicite de z égale à y, on introduit une nouvelle variable x, par le moyen de laquelle on puisse exprimer commodément & y & z. On peut donc par-là juger d'avance du grand usage des substitutions; mais la suite en fera mieux sentir encore l'importance.

47. *Si* $y = \sqrt{(a + bz)}$, *on trouvera de la maniere suivante la nouvelle variable* x, *qui rendra rationnelles les valeurs de* y *&* *de* z.

Puiſqu'on ſe propoſe de rendre à la fois y & z une fonction rationnelle de x, il eſt clair qu'on remplira ce but en faiſant $\sqrt{(a + bz)} = bx$. D'abord on aura $y = bx$, & $a + bz = b^2x^2$. Donc $z = bx^2 - \frac{a}{b}$. Ainſi y & z deviennent des fonctions rationnelles de x, lorſque y étant $= \sqrt{(a + bz)}$, on fait $z = bx^2 - \frac{a}{b}$; car alors $y = bx$.

48. *Si* $y = (a + bz)^{\frac{m}{n}}$, *on trouvera de la maniere ſuivante la nouvelle variable* x, *qui rendra rationnelles les valeurs de* y *& de* z.

Soit fait $y = x^m$, $(a + bz)^{\frac{m}{n}}$ deviendra $= x^m$, & par conſéquent $(a + bz)^{\frac{1}{n}} = x$. Donc $a + bz = x^n$, & $z = \frac{x^n - a}{b}$. Donc on aura en x des valeurs rationnelles pour les quantités y & z, en faiſant $z = \frac{x^n - a}{b}$, ce qui donne $y = x^m$. Ainſi quoiqu'on ne pût obtenir ſous une forme rationnelle la valeur de y en z, ni celle de z en y; cependant on eſt venu à bout au moyen d'une ſubſtitution convenable, de rendre ces deux quantités une fonction rationnelle d'une même variable x.

49. *Si* $y = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}}$, *on demande une nouvelle qnantité variable* x *qui rende rationnelles les valeurs de* y *& de* z.

Il eſt évident qu'on ſatisfera à la queſtion, en ſuppoſant $y = x^m$; car alors $\left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}} = x^m$, & par conſéquent $\frac{a + bz}{f + gz} = x^n$, d'où l'on tire $z = \frac{a - fx^n}{gx^n - b}$; ſubſtitution qui donne $y = x^m$.

On voit encore par-là que ſi $\left(\frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}\right)^n = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^m$, on aura pour y & pour z des quantités rationnelles, en ſuppoſant l'une & l'autre formule $= x^{mn}$; car on trouvera

$y = \frac{\alpha - \gamma x^m}{\delta x^m - \varepsilon}$, & $z = \frac{a - f x^n}{g x^n - b}$. Ces cas ne présentent aucune difficulté.

50. *Si* y $= \surd[(a + bz)(c + dz)]$, *on trouvera de la maniere qui suit, la substitution qu'il conviendra d'employer, pour avoir* y *&* z *sous une forme rationnelle.*

Soit fait $\surd[(a + bz)(c + dz)] = (a + bz)x$, on apperçoit facilement qu'il en résulte pour z une valeur rationnelle, parce que la valeur de z est donnée par une équation simple. On aura donc $c + dz = (a + bz)x^2$; d'où $z = \frac{c - axx}{bxx - d}$. Donc $a + bz$ deviendra $= \frac{bc - ad}{bxx - d}$, & à cause de $y = \surd[(a + bz)(c + dz)] = (a + bz)x$, on aura $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$. Donc la fonction irrationnelle $y = \surd[(a + bz)(c + dz)]$ deviendra rationnelle par la substitution de $z = \frac{c - axx}{bxx - d}$; ce qui donnera $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$. Par exemple, si $y = \surd(aa - zz) = \surd[(a + z)(a - z)]$, à cause de $b = + 1$, $c = a$, $d = - 1$, soit fait $z = \frac{a - axx}{1 + xx}$, & on aura $y = \frac{2ax}{1 + xx}$. Toutes les fois donc que la quantité qui est après le signe $\surd$, aura deux facteurs simples réels, la réduction en quantités rationnelles se fera de la maniere qui vient d'être exposée ; mais si les deux facteurs simples sont imaginaires, on s'y prendra comme il suit.

51. *Soit* y $= \surd(p + qz + rzz)$; *on demande quelle valeur on doit substituer à* z, *pour rendre la valeur de* y *rationnelle.*

On peut arriver à ce but de plusieurs manieres, suivant que p & r seront des quantités positives ou négatives. Soit d'abord p une quantité positive, & mettons aa pour p; car quoique p ne soit pas un quarré, l'irrationnalité des quantités constantes ne change rien pour le moment. Soit donc :

I. $y = \surd(aa + bz + czz)$; & supposons $y = \surd(aa + bz + czz)$

$= a + xz$, nous aurons $b + cz = 2ax + xxz$; d'où $z = \frac{b - 2ax}{xx - c}$, & par conséquent $y = a + xz = \frac{bx - axx - ac}{xx - c}$; expressions dans lesquelles z & y sont des fonctions rationnelles de x. Soit maintenant

II. $y = \surd(aazz + bz + c)$; & supposons $\surd(aazz + bz + c) = az + x$, nous aurons $bz + c = 2axz + xx$, & $z = \frac{xx - c}{b - 2ax}$. Donc $y = az + x = \frac{-ac + bx - axx}{b - 2ax}$.

III. Si p & r sont des quantités négatives, alors à moins qu'on n'ait $qq > 4pr$, la valeur de y sera toujours imaginaire; mais si qq est $> 4pr$, l'expression $p + qz + rzz$
(g) pourra être décomposée en deux facteurs; ce qui revient au cas de l'art. précédent. Au reste, il est souvent plus commode de ramener à cette forme: $y = \surd[aa + (b + cz)(d + ez)]$; dans ce cas, pour faire disparoître le radical, on fera $y = a + (b + cz)x$, & on aura $d + ez = 2ax + bxx + cxxz$; d'où $z = \frac{d - 2ax - bxx}{cxx - e}$, & $y = \frac{-ae + (cd - be)x - acxx}{cxx - e}$. Quelquefois il est plus commode de ramener à cette autre forme: $y = \surd[aazz + (b + cz)(d + ez)]$. Dans ce second cas, faites $y = az + (b + cz)x$; vous aurez $d + ez = 2axz + bxx + cxxz$, & $z = \frac{bxx - d}{e - 2ax - cxx}$, & $y = \frac{-ad + (be - cd)x - abxx}{e - 2ax - cxx}$.

Exemple.

Soit donnée cette fonction irrationnelle de z: $y = \surd(-1 + 3z - zz)$; laquelle peut être ramenée à la forme $y = \surd(1 - 2 + 3z - zz) = \surd[1 - (1 - z)(2 - z)]$; faites $y = 1 - (1 - z)x$; vous aurez $-2 + z = -2x + xx - xxz$ & $z = \frac{2 - 2x + xx}{1 + xx}$; ensuite $1 - z = \frac{-1 + 2x}{1 + xx}$, & $y = 1 - (1 - z)x = \frac{1 + x - xx}{1 + xx}$. Voilà à peu-près les cas que présente l'Analyse indéterminée, ou la Méthode de

Diophante, & on emploieroit inutilement une ſubſtitution rationnelle, pour ramener à une forme, qui le fût auſſi, les autres cas, qui ne ſont pas compris dans ceux que nous avons traités ici. C'eſt pourquoi je paſſe à l'autre uſage de la ſubſtitution.

52. *Si la fonction* y *de* z *eſt telle, que* $ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$; *il s'agit de trouver une nouvelle variable* x, *au moyen de laquelle on puiſſe aſſigner explicitement les valeurs de* y *& de* z.

Comme la réſolution générale des équations n'eſt pas connue, on ne peut tirer de l'équation propoſée $ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$, ni la valeur de y en z, ni celle de z en y; pour remédier à cet inconvénient, faiſons $y = x^m z^n$, nous aurons $ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^\beta + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = 0$. Il s'agit maintenant de déterminer l'expoſant n, de maniere que la valeur de z puiſſe ſe tirer de cette équation; ce qui peut s'effectuer de trois manieres.

I. Soit $\alpha n = \beta$, & par conſéquent $n = \frac{\beta}{\alpha}$; en diviſant l'équation par $z^{\alpha n} = z^\beta$, on aura $ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0$; d'où s'enſuit $z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}}$, ou

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}, \ \& \ y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}.$$

II. Soit $\beta = \gamma n + \delta$ ou $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$; l'équation étant diviſée par z^β donnera $ax^{\alpha m} z^{\alpha n - \beta} + b + cx^{\gamma m} = 0$; d'où

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}} = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}, \ \&$$

$$y = x^m \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}.$$

III. Soit $\alpha n = \gamma n + \delta$ ou $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$, en divisant l'équation par $z^{\alpha n}$, on aura $ax^{\alpha m} + bz^{6 - \alpha n} + cx^{\gamma m} = 0$; d'où l'on tire $z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{6 - \alpha n}} = \ldots$

$$\left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha 6 - 6\gamma - \alpha\delta}}, \text{ \& } y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{\alpha 6 - 6\gamma - \alpha\delta}}.$$

On a donc obtenu de trois manieres différentes des fonctions de x égales à z & à y. De plus, on peut prendre pour m une valeur arbitraire, excepté zéro, & par ce moyen les formules pourront être ramenées à l'expression la plus commode.

EXEMPLE.

Supposons que la nature de la fonction y soit exprimée par cette équation $y^3 + z^3 - cyz = 0$, & cherchons les fonctions de x égales à y & à z. Nous aurons donc $a = -1$; $b = -1$; $\alpha = 3$; $6 = 3$; $\gamma = 1$, & $\delta = 1$.

La premiere maniere, en faisant $m = 1$, donnera $z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$, & $y = x\left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$; ou $z = \frac{cx}{1 + x^3}$, & $y = \frac{cxx}{1 + x^3}$.

La seconde donnera ces valeurs : $z = \left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$, & $y = x\left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}$; ou $z = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)}$ & $y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)^2}$.

La troisieme fournira les résultats suivants : $z = (cx - x^3)^{\frac{2}{3}}$, & $y = x(cx - x^3)^{\frac{1}{3}}$.

53. *On comprend par-là, qu'en suivant une marche rétrograde, on pourra former des équations entre* y *&* z, *& indiquer la maniere de les résoudre, en introduisant une nouvelle variable* x.

Car supposons que la résolution ait déja été faite, & qu'elle qu'elle ait donné ces valeurs $z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}\right)^{\frac{p}{r}}$,

& $y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}\right)^{\frac{q}{r}}$. Donc $y^p = x^p z^q$,

& $x = y z^{\frac{-q}{p}}$. Puisque $z^{\frac{r}{p}} = \frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}$, si nous mettons au lieu de x sa valeur $y z^{\frac{-q}{p}}$, il en résultera l'équation $z^{\frac{r}{p}} = \frac{ay^\alpha z^{\frac{-\alpha q}{p}} + by^\beta z^{\frac{-\beta q}{p}} + cy^\gamma z^{\frac{-\gamma q}{p}} + \&c}{A + By^\mu z^{\frac{-\mu q}{p}} + Cy^\nu z^{\frac{-\nu q}{p}} + \&c.}$; qui se réduit à celle-ci: $Az^{\frac{r}{p}} + By^\mu z^{\frac{r-\mu q}{p}} + Cy^\nu z^{\frac{r-\nu q}{p}} + \&c. = ay^\alpha z^{\frac{-\alpha q}{p}} + by^\beta z^{\frac{-\beta q}{p}} + cy^\gamma z^{\frac{-\gamma q}{p}} + \&c$: laquelle étant multipliée par $z^{\frac{\alpha q}{p}}$ deviendra $Az^{\frac{\alpha q + r}{p}} + By^\mu z^{\frac{\alpha q - \mu q + r}{p}} + Cy^\nu z^{\frac{\alpha q - \nu q + r}{p}} + \&c. \ldots = ay^\alpha + by^\beta z^{\frac{\alpha q - \beta q}{p}} + cy^\gamma z^{\frac{\alpha q - \gamma q}{p}} + \&c.$ Supposons $\frac{\alpha q + r}{p} = m$, & $\frac{\alpha q - \beta q}{p} = n$: p deviendra $= \alpha - \beta$; $q = n$; & $r = \alpha m - \beta m - \alpha n$; d'où naîtra l'équation $Az^m + By^\mu z^{\frac{m - \mu n}{\alpha - \beta}} + Cy^\nu z^{\frac{m - \nu n}{\alpha - \beta}} + \&c. = ay^\alpha + by^\beta z^n + cy^\gamma z^{\frac{(\alpha - \gamma)n}{\alpha - \beta}} + \&c.$ laquelle par conséquent se résoudra de maniere à avoir ..... (h)

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}\right)^{\frac{\alpha - \beta}{\alpha m - \beta m - \alpha n}} \quad \& \ldots\ldots$$

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}\right)^{\frac{n}{\alpha m - \beta m - \alpha n}} \quad \ldots\ldots\ldots$$

ou bien ſuppoſons $\frac{\alpha q + r}{p} = m$, & $\frac{\alpha q - \mu q + r}{p} = n$, nous aurons $m - n = \frac{\mu q}{p}$; & $\frac{q}{p} = \frac{m-n}{\mu}$, & $\frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m + \alpha n}{\mu}$. Donc p devient $= \mu$, $q = m - n$; & $r = \mu m - \alpha m + \alpha n$. Nous concluons de-là l'équation: $Az^m + By^\mu z^n + Cy^\nu z^{\frac{\mu m - \nu(m-n)}{\mu}} +$ &c. $= ay^\alpha + by^6 z^{\frac{(\alpha - 6)(m-n)}{\mu}} + cy^\gamma z^{\frac{(\alpha-\gamma)(m-n)}{\mu}} +$ &c; dont la réſolution donnera . . . .

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^6 + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}\right)^{\frac{\mu}{\mu m - \alpha m + \alpha n}} \ \& \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^6 + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu}\right)^{\frac{m-n}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}.$$

54. *Si la dépendance entre* y *&* z *eſt telle qu'elle ſoit exprimée par* $ayy + byz + czz + dy + ez = 0$; *on rendra rationnelle la valeur de* y *& celle de* z, *de la maniere qui ſuit.*

Suppoſez $y = xz$; en diviſant par z, vous aurez $axxz + bxz + cz + dx + e = 0$, & par conſéquent

(i) $z = \frac{-dx - e}{axx + bx + c}$, & $y = \frac{-dxx - ex}{axx + bx + c}$.

On peut ramener à la forme propoſée cette équation-ci entre y & z: $ayy + byz + czz + dy + ez + f = 0$, en diminuant ou en augmentant l'une & l'autre variable d'une quantité conſtante. On pourra donc rendre rationnelles les valeurs des variables en introduiſant une nouvelle variable x.

55. *Si le rapport entre* y *&* z *eſt donné par l'équation* $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + eyy + fyz + gzz = 0$, *on pourra avoir une expreſſion rationnelle des deux variables* y *&* z *par le moyen d'une nouvelle variable* x, *en s'y prenant comme il ſuit :*

Soit $y = xz$; la ſubſtitution faite, toute l'équation pourra être diviſée par zz; d'où réſultera l'équation $ax^3z + bxxz + cxz + dz + exx + fx + g = 0$; donc $z = \frac{-exx - fx - g}{ax^3 + bxx + cx + d}$, & par conſéquent . . . . . .

$$y = \frac{-ex^3 - fxx - gx}{ax^3 + bxx + cx + d}.$$

Ces cas mettront à portée de juger facilement qu'elles ſont les équations plus élevées entre y & z, qui ſeront (*k*)
ſuſceptibles d'une ſemblable réſolution; ces cas, au reſte, ſont renfermés dans les formules précédentes (*art.* 53): mais comme les formules générales ne s'appliquent pas auſſi facilement à des cas de cette nature, qui reviennent plus ſouvent, il a paru à propos d'en traiter à part quelques-uns.

56. *Si* y *dépend de* z, *tellement qu'on ait* $ayy + byz + czz = d$, *les deux quantités* y & z *ſeront exprimées de la maniere ſuivante par la variable* x.

Faites $y = xz$. Partant $(axx + bx + c)\,zz = d$. Donc $z = \sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}}$, & $y = x\sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}}$.

Semblablement, ſi $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fz$; faites $y = xz$; toute l'équation étant diviſée par z donnera $(ax^3 + bx^2 + cx + d)\,zz = ex + f$. Donc $z = \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}$, & $y = x\sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}$. Au reſte, ces cas & ceux qui admettent de ſemblables ſolutions, ſont renfermés dans l'article qui ſuit.

57. *Si le rapport entre* y & z *eſt exprimé par l'équation* $ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \&c. = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \&c$; *le procédé ſuivant vous donnera facilement en* x *les valeurs de* y & *de* z.

Faites $y = xz$; après la ſubſtitution toute l'équation ſera diviſible par z^n, en ſuppoſant $m > n$. Elle deviendra $(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.)\,z^{m-n} = \alpha x^n$

$+ \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} +$ &c. d'où vous conclurez . . . .

$$z = \left(\frac{\alpha x^{n} + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \&c.}{a x^{m} + b x^{m-1} + c x^{m-2} + d x^{m-3} + \&c.} \right)^{\frac{1}{m-n}} \&$$

$$y = x \left(\frac{\alpha x^{n} + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \&c.}{a x^{m} + b x^{m-1} + c x^{m-2} + d x^{m-3} + \&c.} \right)^{\frac{1}{m-n}}.$$

Cette résolution a lieu toutes les fois que l'équation entre x & y renferme un nombre de dimensions double ; comme dans le cas précédent, où le nombre des dimensions dans chacun des termes est ou m ou n.

58. *S'il se trouve dans l'équation trois sortes de dimensions, de maniere que la plus grande surpasse la moyenne, autant que celle-ci surpasse la plus petite ; on pourra toujours déterminer* y *& z en* x *par la résolution d'une équation du second degré.*

Car, si l'on fait $y = xz$; après avoir divisé par la plus petite puissance de z, la valeur de z en x, dépendra de l'extraction d'une racine quarrée, comme on le verra par les exemples suivants.

EXEMPLE I.

Soit $ay^3 + by^2 z + cyzz + dz^3 = 2eyy + 2fyz + 2gzz + hy + iz$; faisons $y = xz$; après avoir divisé par z, il restera $(ax^3 + bxx + cx + d)zz = 2(exx + fx + g)z + hx + i$; d'où nous tirerons par la valeur de z . . . .

$$z = \frac{exx + fx + g + \sqrt{[(exx + fx + g)^2 + (ax^3 + bx^2 + cx + d)(hx + i)]}}{ax^3 + bxx + cx + d};$$

ce qui donnera $y = xz$.

EXEMPLE II.

Soit $y^5 = 2az^3 + by + cz$; nous ferons $y = xz$. Donc $x^5 z^4 = 2azz + bx + c$; & $zz = \frac{a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)}}{x^5}$;

donc enfin $z = \frac{\sqrt{[a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)}]}}{xx\sqrt{x}}$ & $y = \frac{\sqrt{[a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)}]}}{x\sqrt{x}}$.

EXEMPLE III.

Soit l'équation $y^{10} = 2ayz^6 + byz^3 + cz^4$, dans laquelle les trois dimensions différentes sont 10, 7 & 4. Faites $y = xz$, divisez par z^4, & vous aurez $x^{10}z^6 = 2axz^3 + bx + c$, ou $z^6 = \frac{2axz^3 + bx + c}{x^{10}}$; donc $z^3 = \frac{ax \pm x\sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)}}{x^{10}}$. Par conséquent $z = \frac{\sqrt[3]{[a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)}]}}{x^3}$ & $y = \frac{\sqrt[3]{[a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)}]}}{x^2}$. Ces exemples sont plus que suffisants pour faire connoître l'usage des substitutions dont nous venons de parler.

CHAPITRE IV.

Du développement des Fonctions en Séries infinies.

59. La formule $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c, en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut représenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de z; néanmoins on cherche ordinairement pour les exprimer une suite de même forme, qu'on suppose composée d'une infinité de termes. D'ailleurs une semblable série, quoique infinie, paroît plus propre à faire connoître la nature des fonctions transcendantes. En effet, si la nature d'une fonction entiere est bien déterminée, lorsque cette fonction est développée suivant les différentes puissances de z, & ramenée par conséquent à la forme $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c; la même forme paroît aussi la plus propre à représenter à l'esprit le caractere de toutes les

autres fonctions, quoique le nombre des termes de la suite soit infini. Au reste, il est évident qu'une fonction non entiere de z ne peut être représentée par un nombre fini de termes de cette sorte: $A + Bz + Cz^2 +$ &c; car si elle pouvoit l'être, elle seroit par cela même une fonction entiere; & si quelqu'un doutoit qu'elle pût être exprimée par une telle série d'un nombre infini de termes, le développement même de chaque fonction ne lui laissera aucun doute; mais pour plus de généralité, outre les puissances de z, qui ont des exposans positifs & entiers, on doit admettre des puissances quelconques. Ainsi il ne restera aucun doute, que toute fonction de z ne puisse être transformée en une série infinie de cette forme: $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta}$, les exposans α, β, γ, δ, &c. exprimant des nombres quelconques.

60. *On sait qu'au moyen d'une division continue, la fraction* $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ *se résout en cette suite infinie:* $\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} -$ *&c, laquelle nomme une progression géométrique, parce que chaque terme a un rapport constant* $1 : \frac{\beta z}{\alpha}$, *avec celui qui le suit.*

Il y a une autre maniere de trouver cette série; c'est de la supposer d'avance, quoique inconnue, toute développée: car, soit $\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ &c. Pour produire l'égalité, cherchons les coëfficiens A, B, C, D, &c; nous aurons $a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c.) & après la multiplication faite, ...

$$\begin{aligned} a = \alpha A &+ \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{\&c.} \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Par conséquent nous devons avoir $a = \alpha A$, donc $A = \frac{a}{\alpha}$; il faudra ensuite égaler à zéro la somme des coëfficiens de chaque puissance de z; ce qui donnera les équations:

$\alpha B + \beta A = 0$ chaque coëfficient trouvé fera donc con-
$\alpha C + \beta B = 0$ noître facilement le fuivant. Car fi le
$\alpha D + \beta C = 0$ coëfficient d'un terme quelconque $= P$,
$\alpha E + \beta D = 0$ & le fuivant $= Q$; on aura $\alpha Q + \beta P =$
&c. o, ou $Q = -\frac{\beta P}{\alpha}$. Ainfi le premier

terme $A = \frac{a}{\alpha}$, étant une fois déterminé, on en conclura les valeurs des lettres fuivantes B, C, D, &c. qu'on trouvera les mêmes que celles que donne la divifion. Au refte, on voit à l'infpection, que dans la férie trouvée pour $\frac{a}{\alpha + \beta z}$, le coëfficient de la puiffance z^n fera $= \mp \frac{a \beta^n}{\alpha^{n+1}}$, le figne $+$ ayant lieu lorfque n eft un nombre pair, & le figne $-$ lorfque n eft impair, ou fi l'on veut, le coëfficient fera $= \frac{a}{\alpha} \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n$.

61. *On peut de même, au moyen d'une divifion continue, convertir en une férie infinie la fraction* $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$.

Mais comme la divifion eft une opération ennuyeufe, & qu'elle ne fait pas connoître fi facilement la nature de la férie infinie, il fera plus commode de préfuppofer la férie qu'on doit avoir, & de la déterminer de la maniere précédente. Soit donc $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$ multipliez de part & d'autre par $\alpha + \beta z + \gamma zz$, & vous aurez

$$\begin{aligned} a + bz = \alpha A &+ \alpha B z + \alpha C z^2 + \alpha D z^3 + \alpha E z^4 + \&c. \\ &+ \beta A z + \beta B z^2 + \beta C z^3 + \beta D z^4 + \&c. \\ &+ \gamma A z^2 + \gamma B z^3 + \gamma C z^4 + \&c. \end{aligned}$$

Donc $\alpha A = a$; $\alpha B + \beta A = b$; d'où $A = \frac{a}{\alpha}$, & $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha\alpha}$. Les autres lettres feront déterminées par les équations fuivantes: . . . .

$\alpha C + \beta B + \gamma A = 0$	On peut donc, au moyen de deux
$\alpha D + \beta C + \gamma B = 0$	coëfficiens consécutifs quelconques,
$\alpha E + \beta D + \gamma C = 0$	trouver le suivant. Par exemple,
$\alpha F + \beta E + \gamma D = 0$	si les deux coëfficiens consécutifs sont
&c.	P & Q, & le suivant R, on aura

$\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$, ou $R = \frac{-\beta Q - \gamma P}{\alpha}$. Ainsi les deux premieres quantités A & B une fois calculées, les autres dériveront successivement de celles-ci; & on aura la série infinie $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. égale à la fraction proposée $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$.

EXEMPLE.

Soit la fraction $\frac{1 + 2z}{1 - z - z^2}$, & prenons pour la représenter la série $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. à cause de $a = 1$; $b = 2$; $\alpha = 1$; $\beta = -1$; $\gamma = -1$, nous aurons d'abord $A = 1$; & $B = 3$; ensuite . . . .

$C = B + A$	Donc chaque coëfficient est égal à la somme
$D = C + B$	des deux précédents. Ainsi, en supposant
$E = D + C$	connus les deux coëfficiens consécutifs P & Q,
$F = E + D$	le suivant sera $R = P + Q$. Puis donc
&c.	que les deux premiers coëfficiens A & B sont

connus, la fraction proposée $\frac{1 + 2z}{1 - z - zz}$ se change en cette série infinie $1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 +$ &c, qu'on peut prolonger sans peine aussi loin qu'on voudra.

62. Ce que nous venons de dire suffit pour mettre à portée de bien connoître la nature des séries infinies, qui proviennent du développement des fonctions fractionnaires; car elles observent une telle loi, que chaque terme peut être déterminé par quelques-uns de ceux qui précedent. Par exemple, si le dénominateur de la fraction proposée est $\alpha + \beta z$, & qu'on imagine la série infinie

A

$A+Bz+Cz^2+\ldots\ldots+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+\&c$; un coëfficient quelconque Q sera formé du coëfficient précédent par l'équation $\alpha Q+\beta P=0$. Mais si le dénominateur est un trinome $\alpha+\beta z+\gamma zz$, un coëfficient quelconque R de la série sera déterminé, au moyen des deux précédens Q & R par l'équation $\alpha R+\beta Q+\gamma P=0$. De même, si le dénominateur est un quadrinome, tel que $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3$, on obtiendra la valeur d'un coëfficient quelconque S de la série, au moyen des trois précédents R, Q & P, en faisant $\alpha S+\beta R+\gamma Q+\delta P=0$; il en sera de même des autres. Ainsi dans ces sortes de séries, chaque terme est déterminé par quelques-uns des termes qui précèdent, suivant une certaine loi constante, qui se conclut naturellement du dénominateur de la fraction qui produit la série. Le célèbre MOIVRE, qui a examiné plus particuliérement la nature de ces séries, les appelle *Récurrentes*, par la raison qu'il faut recourir aux termes qui précèdent, pour trouver ceux qui suivent.

63. Au reste, pour la formation de ces séries, il faut que le terme constant α du dénominateur ne soit pas $=0$; car, ayant trouvé le premier terme de la série $A=\frac{a}{\alpha}$, celui-ci & tous les suivants seroient infinis si α étoit $=0$. Excepté donc ce cas que je traiterai dans la suite, la fonction fractionnaire, qui doit être transformée en une série infinie récurrente, aura cette forme: $\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\&c.}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\&c.}$. Je suppose le premier terme du dénominateur $=1$, car une fraction peut toujours être ramenée à cet état, à moins que le premier terme ne soit $=0$; & je regarde tous les autres termes du dénominateur comme négatifs, afin que tous les termes de la série qui en dérivent soient positifs. En effet, si la série récurrente, dont il s'agit, est représentée par $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\&c$, les coëfficiens se détermineront comme il suit:

$$A = a$$
$$B = \alpha A + b$$
$$C = \alpha B + \beta A + c$$
$$D = \alpha C + \beta B + \gamma A + d$$
$$E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e$$
&c.

Chaque coëfficient eſt donc égal à la ſomme de quelques multiples des précédents, jointe à un certain nombre que donne le numérateur; mais à moins que ce numérateur n'ait une infinité de termes, cette addition ceſſera bientôt, & dès-lors chaque terme ſera formé ſuivant une loi conſtante par quelques uns des précédents. Mais pour que la loi de la progreſſion ne ſoit pas troublée, il conviendra d'employer une fonction fractionnaire proprement dite; car ſi on en employoit une autre, la partie entiere que celle-ci contiendroit, entreroit dans la ſérie, & interromproit la loi de la progreſſion dans les termes qu'elle augmenteroit ou diminueroit. Par exemple, cette fraction improprement dite $\frac{1 + 2z - z^3}{1 - z - z^2}$, donnera la ſérie $1 + 3z + 4z^2 + 6z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 26z^6 + 42z^7 +$ &c; où le quatrieme terme fait exception à la loi, par laquelle chaque coëfficient eſt la ſomme des deux précédents.

64. Les ſéries récurrentes méritent une attention particuliere, lorſque le dénominateur de la fraction, d'où elles naiſſent, eſt une puiſſance. Par exemple, la fraction $\frac{a + bz}{(1 - \alpha z)^2}$ réduite en ſérie donnera

$$\begin{array}{l} a + 2\alpha a\,z + 3\alpha^2 a\,z^2 + 4\alpha^3 a\,z^3 + 6\alpha^4 a\,z^4 + \text{\&c.} \\ \quad + \quad b \quad + 2\alpha b \quad + 3\alpha^2 b \quad + 4\alpha^3 b \end{array}$$

ſérie dans laquelle le coëfficient de la puiſſance z^n eſt $(n + 1)\alpha^n a + n\alpha^{n-1} b$. Cependant cette ſérie ſera récurrente, parce que chaque terme eſt déterminé par les deux précédents, ſuivant une loi que fait appercevoir le développement du dénominateur $1 - 2\alpha z + \alpha\alpha zz$. Si on fait $\alpha = 1$; & $z = 1$, la férie devient la progreffion arithmétique $a + (2a + b) + (3a + 2b) + (4a + 3b) +$ &c. dont les différences font conftantes. Donc toute progreffion arithmétique eft une férie récurrente. En effet, foit $A + B + C + D + E + F +$ &c. une progreffion arithmétique; on trouvera $C = 2B - A$; $D = 2C - B$; $E = 2D - C$ &c.

65. Enfuite cette fraction $\frac{a + bz + czz}{(1 - \alpha z)^3}$, à caufe de $\frac{1}{(1 - \alpha z)^3} = (1 - \alpha z)^{-3} = 1 + 3\alpha z + 6\alpha^2 z^2 + 10\alpha^3 z^3 + 15\alpha^4 z^4 +$ &c. fe changera en cette férie infinie: . . . .

$$\begin{array}{llllll} a + 3\alpha a & + 6\alpha^2 a & + 10\alpha^3 a & + 15\alpha^4 a & + \&c. \\ + \quad bz + 3\alpha\, bz^2 & + 6\alpha^2 bz^3 & + 10\alpha^3 bz^4 & + \&c. & \\ \qquad + \quad c & + 3\alpha\, c & + 6\alpha^2 c & + \&c. & \end{array}$$

dans laquelle la puiffance z^n a pour coëfficient $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\alpha^n a + \frac{n(n+1)}{1.2}\alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n}{1.\ 2}\alpha^{n-2} c$. Si on fuppofe $\alpha = 1$ & $z = 1$, la férie deviendra une progreffion générale du fecond ordre, dont les différences fecondes font conftantes. Repréfentons cette progreffion par la fuite $A + B + C + D + E +$ &c; elle fera en même-temps une férie récurrente, dont chaque terme fera formé des trois précédents, de maniere à avoir $D = 3C - 3B + A$; $E = 3D - 3C + B$; $F = 3E - 3D + C$ &c. Comme les différences fecondes des termes en progreffion arithmétique font auffi égales, favoir $= 0$, il s'enfuit que cette propriété convient également aux progreffions arithmétiques.

66. Semblablement cette fraction $\frac{a + bz + czz + dz^3}{(1 - \alpha z)^4}$ donnera une férie infinie, dans laquelle une puiffance quelconque z^n de z aura pour coëfficient: $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^n a + \frac{n.(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{n-3} d$. En faifant donc $\alpha = 1$ & $z = 1$,

cette série renfermera toutes les progressions algébriques du troisieme ordre, dont les différences troisiemes sont constantes. Donc toutes les progressions de cet ordre que je représente par $A + B + C + D + E + F +$ &c. seront des séries récurrentes dépendantes du dénominateur $1 - 4z + 6z^2 - 4z^3 + z^4$; d'où il s'ensuit que $E = 4D - 6C + 4B - A$; $F = 4E - 6D + 4C - B$; &c. propriété qui s'applique en même-temps à toutes les progressions d'ordres inférieurs.

67. On fera voir de la même maniere, que toutes les progressions algébriques, de quelque ordre qu'elles soient, qui menent à des différences constantes, sont des séries récurrentes, dont la loi est déterminée par le développement du dénominateur $(1 - z)^n$, le nombre n étoit plus grand que celui qui indique l'ordre de la progression. Ainsi la suite $a^m + (a + b)^m + (a + 2b)^m + (a + 3b)^m +$ &c. représentant une progression de l'ordre m; on aura par la nature des séries récurrentes . . . .

$$0 = a^m - n(a + b)^m + \frac{n.(n-1)}{1.\quad 2}(a + 2b)^m - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3} \times (a + 3b)^m + \ldots\ldots\ldots \pm \frac{n}{1}[a + (n-1)b]^m \mp (a + nb)^m;$$

expression dans laquelle on prend les signes supérieurs si n est impair, & les signes inférieurs si n est pair. Cette équation est donc toujours vraie si n est un nombre entier plus grand que m. On peut juger par-là de l'étendue de la théorie des séries récurrentes.

68. Si le dénominateur n'est pas une puissance d'un binome, mais d'un polynome quelconque, le développement de la série peut être autrement considéré. En effet, soit la fraction $\frac{1}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c.)^{m+1}}$; la série infinie, qui en résultera, sera . . . .

$$\begin{array}{llll}
1 + \frac{(m+1)}{1}\alpha z & + \frac{(m+1)(m+2)}{1.\;2}\alpha^2 & + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\;2.\;3}\alpha^3 & \\
& + \frac{(m+1)}{1}\beta \quad\Big\} z^2 & + \frac{(m+1)(m+2)}{1.\;2}\,2\alpha\beta \quad\Big\} z^3 & + \&c. \\
& & + \frac{(m+1)}{1}\gamma &
\end{array}$$

Pour voir plus à fond la nature de cette série, représentons-la par des coëfficiens indéterminés, de cette maniere $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots\ldots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \&c$; un coëfficient N sera déterminé par autant de coëfficiens précédents qu'il y a de lettres α, β, γ, δ, &c. de sorte que $N = \frac{m+n}{n}\alpha M + \frac{2m+n}{n}\beta L + \frac{3m+n}{n}\gamma K + \frac{4m+n}{n}\delta I + \&c.$ Quoique cette loi ne soit pas constante, mais dépendante *Voyez la note de l'art. 76.* de l'exposant de la puissance de z; cependant il existe pour la même série une autre loi constante que donne le dénominateur développé, & convenable à la nature des séries récurrentes. Au reste, il faut observer que cette loi, non constante, dont nous venons de parler, n'a lieu que dans le cas où le numérateur de la fraction est l'unité; car s'il contenoit quelques puissances de z, cette loi deviendroit beaucoup plus compliquée; ce que les principes du calcul différentiel feront mieux entendre.

69. Comme nous avons supposé jusqu'ici que le premier terme du dénominateur n'étoit pas $= 0$, & que nous avons pris l'unité pour ce terme, voyons à présent quelles séries nous obtiendrons, lorsqu'il n'y a pas de terme constant dans le dénominateur. Dans ce cas, la fonction fractionnaire aura cette forme $\frac{a + bz + czz + \&c}{z(1 - \alpha z - \beta zz - \&c)}$; négligeons le facteur z du dénominateur, & réduisons la partie restante de la fraction $\frac{a + bz + czz + \&c}{1 - \alpha z - \beta zz - \&c}$, en une série récurrente $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c$; il est évident qu'on aura $\frac{a + bz + cz^2 + \&c.}{z(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3\ \&c.)} = \frac{A}{z} + B + Cz + Dz^2 + Ez^3\ \&c$; on aura de même

$\frac{a + bz + cz^2 + \&c.}{z^2(1 - \alpha z - \mathfrak{G}z^2 - \&c.)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + C + Dz + Ez^2 + \&c;$
& en général $\frac{a + bz + cz^2 + \&c.}{z^m(1 - \alpha z - \mathfrak{G}z^2 - \gamma z^3 - \&c.)} = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m-1}} + \frac{C}{z^{m-2}} + \frac{D}{z^{m-3}} + \&c$; quelque soit le nombre m.

70. Puisqu'on peut, à la place de z, introduire une autre variable x dans la fonction fractionnaire, & donner par ce moyen une infinité de formes à chaque fonction, on pourra par la même raison réduire une fraction proposée en séries récurrentes d'une infinité de manieres. Soit proposée, par exemple, la fraction $y = \frac{1 + z}{1 - z - zz}$, qui donne la série récurrente $y = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 + \&c$; en faisant $z = \frac{1}{x}$, y devient $= \frac{xx + x}{xx - x + 1} = \frac{-x(1 + x)}{1 + x - xx}$. Or $\frac{1 + x}{1 + x - xx} = 1 + 0x + xx - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 5x^6 - \&c$. Donc $y = -x + 0x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 3x^6 - 5x^7 + \&c$. Ou bien soit $z = \frac{1 - x}{1 + x}$; alors $y = \frac{-2 - 2x}{1 - 4x - xx}$, & par conséquent $y = -2 - 10x - 42xx - 178x^3 - 754x^4 - \&c$. On peut de cette maniere trouver pour y autant de séries récurrentes qu'on voudra.

71. Les fonctions irrationnelles sont ordinairement transformées en séries infinies, au moyen du Théorême général: $(P + Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n.\ 2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.\ 2n.\ 3n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \&c$: en effet, à moins que $\frac{m}{n}$ ne soit un nombre entier positif, le nombre des termes est infini. Ainsi, en mettant pour m & n des nombres déterminés, on aura . . . .

$$(P+Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}Q - \frac{1.1}{2.4}P^{-\frac{3}{2}}Q^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}P^{-\frac{5}{2}}Q^3 + \&c.$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Q + \frac{1.3}{2.4}P^{-\frac{5}{2}}Q^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}P^{-\frac{7}{2}}Q^3 + \&c.$$

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}P^{-\frac{2}{3}}Q - \frac{1.2}{3.6}P^{-\frac{5}{3}}Q^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}P^{-\frac{8}{3}}Q^3 - \&c.$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{3}} = P^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}P^{-\frac{4}{3}}Q + \frac{1.4}{3.6}P^{-\frac{7}{3}}Q^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}P^{-\frac{10}{3}}Q^3 + \&c.$$

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}P^{-\frac{1}{3}}Q - \frac{2.1}{3.6}P^{-\frac{4}{3}}Q^2 + \frac{2.1.4}{3.6.9}P^{-\frac{7}{3}}Q^3 - \&c.$$

72. Telle eſt la marche de toutes ces ſéries, que chaque terme peut être formé par celui qui le précede. Car, ſoit dans la ſérie, qui réſulte du développement de $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ un terme quelconque $= MP^{\frac{m-kn}{n}}Q^k$, le ſuivant ſera $= \frac{m-kn}{(k+1)n}MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}}Q^{k+1}$. Remarquez, que dans le terme ſuivant, l'expoſant de P diminue, & que celui de Q augmente d'une unité. Au reſte, pour rendre l'application plus facile à tous les cas, nous pouvons mettre la formule générale $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ ſous cette forme-ci: $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$; car en développant la formule $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ & en multipliant le réſultat par $P^{\frac{m}{n}}$, nous obtiendrons la ſérie ci-deſſus. Mais ſi m ne déſigne pas ſeulement des nombres entiers, mais auſſi des nombres fractionnaires, on pourra en toute ſûreté prendre l'unité pour n. Cela poſé, ſi nous écrivons Z au lieu de $\frac{Q}{P}$, qui eſt une fonction de z, nous aurons $(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1}Z + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}Z^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}Z^3 + \&c.$ Mais pour bien obſerver les loix ſuivantes des progreſſions, il ſera bon d'avoir remarqué cette converſion en ſérie de la formule générale $(1+Z)^{m-1} = 1 + \frac{(m-1)}{1}Z + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2.}Z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3}Z^3 + \&c.$

73. Soit d'abord $Z = \alpha z$; nous aurons $(1+\alpha z)^{m-1} =$

$1 + \frac{(m-1)}{1} \alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} \alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3} \alpha^3 z^3$ + &c. Au lieu de cette série, écrivons la formule générale $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots\ldots + Mz^{n-1} + Nz^n +$ &c. Chaque coëfficient N dépendra du précédent M, & se trouvera au moyen de l'équation $N = \frac{m-n}{n} \alpha M$. Ainsi en faisant $n = 1$, comme M est $= 1$, nous aurons $N = A = \frac{m-1}{1} \alpha$. Faisant ensuite $n = 2$, à cause de $M = A = \frac{m-1}{1} \alpha$, nous trouverons $N = B = \frac{m-2}{2} \alpha M = \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} \alpha^2$; & en suivant le même procédé, $C = \frac{m-3}{3} \alpha B = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3} \alpha^3$; comme le fait voir la série trouvée ci-dessus.

74. Soit $Z = \alpha z + \beta z z$; nous aurons $(1 + \alpha z + \beta z z)^{m-1} = 1 + \frac{(m-1)}{1} (\alpha z + \beta z z) + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} (\alpha z + \beta z z)^2 +$ &c. Disposons donc les puissances de z par ordre de grandeur, ce qui donnera $(1 + \alpha z + \beta z z)^{m-1} = \ldots\ldots$

$$1 + \frac{(m-1)}{1} \alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} \alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3} \alpha^3 z^3 + \&c.$$
$$+ \frac{(m-1)}{1} \alpha z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} 2 \alpha \beta z^3 + \&c.$$

Écrivons, pour cette série, la formule générale : . . . $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots\ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n +$ &c; chaque coëfficient se déduira des deux précédents par l'équation $N = \frac{m-n}{n} \alpha M + \frac{2m-n}{n} \beta L$; ainsi tous les termes pourront se conclure du premier, qui est 1. En effet, on aura . . . .

$$A = \frac{(m-1)}{1} \alpha$$
$$B = \frac{(m-2)}{2} \alpha A + \frac{(2m-2)}{2} \beta$$

C

$$C = \frac{(m-3)}{3}\alpha B + \frac{(2m-3)}{3}\beta A$$

$$D = \frac{(m-4)}{4}\alpha C + \frac{(2m-4)}{4}\beta B$$

&c.

75. Si $Z = \alpha z + \beta zz + \gamma z^3$; l'expreſſion $(1 + \alpha z + \beta zz + \gamma z^3)^{m-1}$ ſera $= 1 + \frac{(m-1)}{1}(\alpha z + \beta zz + \gamma z^3) + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ \ 2}(\alpha z + \beta zz + \gamma z^3)^2 +$ &c. Et ſi tous les termes ſont ordonnés ſuivant les puiſſances de z, elle ſe changera en cette ſérie : . . . .

$$\begin{aligned}1 + \frac{(m-1)}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ \ 2}\alpha^2 z^2 &+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3}\alpha^3 z^3 + \&c.\\ + \frac{(m-1)}{1}\beta z^2 &+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ \ 2}2\alpha\beta z^3 + \&c.\\ &+ \frac{(m-1)}{1}\gamma z^3 \qquad + \&c.\end{aligned}$$

Pour mieux découvrir la loi de cette progreſſion, écrivez en ſa place, $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots\ldots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n +$ &c; chaque coëfficient de cette ſérie ſera formé des trois précédents, de maniere que $N = \frac{(m-n)}{n}\alpha M + \frac{(2m-n)}{n}\beta L + \frac{(3m-n)}{n}\gamma K$. Comme le premier terme $= 1$, & ceux qui précèdent $= 0$; on aura les équations ſuivantes . . . .

$$A = \frac{(m-1)}{1}\alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2}\alpha A + \frac{(2m-2)}{2}\beta$$

$$C = \frac{(m-3)}{3}\alpha B + \frac{(2m-3)}{3}\beta A + \frac{(3m-3)}{3}\gamma$$

$$D = \frac{(m-4)}{4}\alpha C + \frac{(2m-4)}{4}\beta B + \frac{(3m-4)}{4}\gamma A$$

$$E = \frac{(m-5)}{5}\alpha D + \frac{(2m-5)}{5}\beta C + \frac{(3m-5)}{5}\gamma B$$

&c.

76. Donc, en général, si nous supposons $(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \&c.)^{m-1} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \&c$; tous les termes de cette série seront formés des précédents, de la maniere qui suit: . . . .

$$A = \frac{(m-1)}{1}\alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2}\alpha A + \frac{(2m-2)}{2}\beta$$

$$C = \frac{(m-3)}{3}\alpha B + \frac{(2m-3)}{3}\beta A + \frac{(3m-3)}{3}\gamma$$

$$D = \frac{(m-4)}{4}\alpha C + \frac{(2m-4)}{4}\beta B + \frac{(3m-4)}{4}\gamma A + \frac{(4m-4)}{4}\delta$$

$$E = \frac{(m-5)}{5}\alpha D + \frac{(2m-5)}{5}\beta C + \frac{(3m-5)}{5}\gamma B + \frac{(4m-5)}{5}\delta A + \frac{(5m-5)}{5}\varepsilon$$

&c.

C'est à dire que chaque terme est déterminé par autant de termes précédents qu'il y a de lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. dans la fonction de z, dont la puissance est convertie en série. Au surplus, il est facile de remarquer l'accord de cette loi avec celle que nous avons exposée auparavant (*art.* 68), lorsque nous avons réduit en une série infinie la quantité $(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \&c.)^{-m-1}$; car si l'on met $-m$ à la place de m, & si l'on prend négativement les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les séries trouvées se conviendront parfaitement. Au reste, ce n'est pas ici le lieu de démontrer directement la loi de cette progression : ce qui pourra se faire facilement dans la suite par les principes du calcul différentiel ; il suffira donc en attendant d'en avoir prouvé la vérité par l'application que nous en avons faite à toutes sortes d'exemples.

CHAPITRE V.

Des Fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de Variables.

77. Les quantités variables que nous avons considérées jusqu'ici, avoient entr'elles une telle liaison, qu'elles étoient toutes des fonctions d'une seule variable, & que la détermination d'une seule emportoit celle des autres; mais nous allons traiter à présent des quantités variables qui n'ont aucune dépendance réciproque, de maniere qu'en substituant à l'une d'elles une valeur déterminée, les autres restent encore indéterminées & variables. Ces sortes de quantités que je représente par x, y, z, quant à leur signification ne changent point de nature, chacune renfermant, comme à l'ordinaire, toutes les valeurs déterminées, mais en les comparant on remarquera entr'elles cette différence, que si l'on met pour z, par exemple, une valeur quelconque déterminée, les autres x & y auront une signification aussi indéfinie qu'auparavant. La différence entre les quantités variables, dépendantes ou indépendantes les unes des autres, consiste donc en ce que, pour les premieres la valeur déterminée d'une seule donne celles des autres, & que pour les dernieres la détermination de l'une ne limite nullement la signification de celles qui restent.

78. *Donc une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables* x, y, z, *est une expression composée de ces quantités, de quelque maniere que ce soit.*

Ainsi l'expression $x^3 + xyz + az^2$ sera une fonction des trois variables x, y, z. Si dans cette quantité on détermine une variable, par exemple z, en mettant un nombre constant en sa place, elle demeurera encore une quantité variable, savoir, une fonction de x & de y; mais si, outre z, y est auſſi déterminé, il ne reſtera plus qu'une fonction de x. Une fonction de pluſieurs variables n'obtiendra donc une valeur déterminée, qu'après que chacune des quantités indéterminées qui la compoſent, aura reçu une valeur donnée. Donc une quantité variable pouvant être déterminée d'une infinité de manieres, une fonction de deux variables, qui pour chaque valeur de l'une d'elles, eſt encore ſuſceptible d'une infinité de valeurs, admettra une infinité de fois un nombre infini de déterminations. Le nombre de déterminations ſera encore une infinité de fois plus grand dans une fonction de trois variables, & croîtra à proportion pour un plus grand nombre d'indéterminées.

79. *Les fonctions de pluſieurs variables ſe diviſent commodément comme celles d'une ſeule, en algébriques & en tranſcendantes.*

Les premieres ſont celles dont la compoſition ne dépend que d'opérations algébriques; les dernieres ſont celles, dans la formation deſquelles il entre des opérations tranſcendantes. On pourroit encore à l'égard de celles-ci en diſtinguer de pluſieurs eſpeces, ſelon que les opérations transcendantes affectent toutes les variables, ou quelques-unes ſeulement, ou même une ſeule. Ainſi l'expreſſion $zz + y \log. z$, qui renferme le logarithme de z, ſera bien une fonction tranſcendante de y & de z; mais elle doit être regardée cependant comme moins tranſcendante, parce que la variable z une fois déterminée la fonction devient algébrique. Au reſte, il eſt inutile de multiplier ces ſortes de ſubdiviſions.

80. *Les fonctions algébriques ſe diviſent enſuite en rationnelles & en irrationnelles; & les rationnelles en entieres & en fractionnaires.*

La raiſon de ces dénominations eſt ſuffiſamment expliquée dans le premier Chapitre. La fonction rationnelle eſt dégagée de toute irrationnalité, qui affecte les quantités variables, dont elle eſt dite fonction. Elle ſera entiere s'il n'entre point de fraction dans sa composition, & dans le cas contraire elle sera fractionnaire. Telle sera donc la forme générale d'une fonction entiere de deux variables y & z: $\alpha + \beta y + \gamma z + \delta y^2 + \epsilon y z + \zeta z^2 + \eta z^3 + \theta y^2 z + \iota y z^2 + \kappa z^3 +$ &c. Donc si P & Q désignent des fonctions entieres, soit de deux, soit d'un plus grand nombre de variables, $\frac{P}{Q}$ sera la forme générale des fonctions fractionnaires. Enfin une fonction irrationnelle est ou explicite ou implicite; celle-là se reconnoît aux radicaux qu'elle met en évidence; & celle-ci est donnée par une équation insoluble. Ainsi V sera une fonction implicite irrationnelle de y & de z, si l'on a $V^5 = (ayz + z^3) V^2 + (y^4 + z^4) V + y^5 + 2ayz^3 + z^5$.

81. *On peut aussi distinguer des fonctions multiformes de plusieurs variables comme d'une seule.*

Ainsi les fonctions rationnelles seront uniformes, parce qu'à chaque détermination des variables elles ne reçoivent qu'une seule valeur. Soient P, Q, R, S, &c. des fonctions rationnelles ou uniformes des variables x, y, z; V sera une fonction biforme des mêmes variables, si $V^2 - PV + Q = 0$; car quelques valeurs déterminées qu'on substitue aux quantités x, y & z, la fonction V aura toujours non une simple, mais une double valeur. De même V sera une fonction triforme, si $V^3 - PV^2 + QV - R = 0$, & une fonction quadriforme, si $V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0$. On assignera d'une maniere semblable la forme des fonctions multiformes de degrés supérieurs.

82. Si en égalant à zéro une fonction d'une seule variable z, il en résulte, pour cette variable, une valeur déterminée, soit simple, soit multiple; de même en supposant égale à zéro une fonction de deux variables y & z, l'une sera déterminée par l'autre, & deviendra conséquemment une fonction de celle-ci, tandis qu'auparavant ces quantités étoient indépendantes l'une de l'autre. Semblablement, si une fonction de trois variables x, y, z, est égalée à zéro, une variable

ſera déterminée par les deux autres, & deviendra une fonction de celles-ci. Il en ſeroit de même, ſi on égaloit la fonction non à zéro, mais à une quantité conſtante, ou même à une autre fonction; car, dans toute équation quelque ſoit le nombre de variables qu'elle renferme, la valeur d'une ſeule dépend toujours des autres, & en devient une fonction. De même au moyen de deux équations différentes entre les mêmes variables, deux variables ſont déterminées par les autres; ainſi de ſuite.

83. *La diviſion la plus remarquable des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables, eſt la diviſion en homogenes & en hétérogenes.*

S'il regne par-tout un égal nombre de dimenſions, la fonction eſt dite homogene; ſinon elle eſt hétérogene. Chaque variable eſt cenſée former une dimenſion; le quarré d'une variable, ou le produit de deux forme deux dimenſions; le produit de trois variables répétées ou non, trois, ainſi de ſuite; les quantités conſtantes n'augmentent point le nombre des dimenſions. Par exemple, dans ces formules αy, βz, on ne compte qu'une dimenſion; on en compte deux dans celles-ci: αy^2; βyz; γz^2; trois dans ces autres αy^3; $\beta y^2 z$; $\gamma y z^2$; δz^3; & quatre dans ces dernieres: αy^4; $\beta y^3 z$; $\gamma y^2 z^2$; $\delta y z^3$; ϵz^4, ainſi des autres.

84. Appliquons d'abord cette diſtinction aux fonctions entieres, & ſuppoſons qu'il n'y ait que deux variables; car ce que nous allons en dire conviendra à un plus grand nombre.

Une fonction entiere ſera homogene, ſi chaque terme a un égal nombre de dimenſions.

Il ſera donc très-commode de ſubdiviſer ces ſortes de fonctions, ſuivant le nombre des dimenſions que forment les variables. Ainſi $\alpha y + \beta z$ ſera la forme générale des fonctions entieres d'une dimenſion; $\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2$ la forme générale des fonctions entieres de deux dimenſions. La forme générale des fonctions de trois dimenſions ſera comprise dans l'expression $\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$; celle de quatre dimensions dans $\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta y z^3 + \epsilon z^4$, ainsi des autres. Par analogie la quantité constante α sera une fonction de dimension nulle.

85. *Une fonction fractionnaire homogene, est celle dont le numérateur & le dénominateur sont eux-mêmes des fonctions homogenes.*

Ainsi cette fraction $\frac{ayy + bzz}{\alpha y + \beta z}$ sera une fonction homogene de y & de z. Or on connoîtra le nombre de dimensions, en soustrayant du nombre des dimensions du numérateur celui des dimensions du dénominateur; on trouvera d'après cela que la proposée est une fonction d'une dimension. Cette autre fraction $\frac{y^5 + z^5}{yy + zz}$ sera une fonction de trois dimensions. Donc, s'il y a le même nombre de dimensions dans le numérateur & dans le dénominateur, la fraction sera une fonction de dimension nulle; comme dans la quantité $\frac{y^3 + z^3}{yyz}$; ou dans celles-ci: $\frac{y}{z}$; $\frac{\alpha zz}{yy}$; $\frac{\beta y^3}{z^3}$. S'il y a plus de dimensions dans le dénominateur que dans le numérateur, le nombre des dimensions de la fraction sera négatif; ainsi $\frac{y}{zz}$ sera une fonction de -1 dimension: $\frac{y + z}{y^4 + z^4}$ une fonction de -3 dimensions: $\frac{1}{y^5 + ayz^4}$ une fonction de -5 dimensions, parce qu'il n'y a aucune dimension dans le numérateur. Au reste, il est évident que plusieurs fonctions homogenes, dans lesquelles il regne un même nombre de dimensions, étant ajoutées ou soustraites, donnent toujours une fonction homogene du même nombre de dimensions. Par exemple, cette expression $\alpha y + \frac{\beta zz}{y} + \frac{\gamma y^4 - \delta z^4}{yyz + yzz}$ sera une fonction d'une seule dimension, & celle-ci $\alpha + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma zz}{yy} + \frac{yy + zz}{yy - zz}$ sera une fonction de dimension nulle.

86. La nature des fonctions homogenes s'étend aussi aux

expressions irrationnelles. Car si P est une fonction quelconque homogene de n dimensions, par exemple, $\sqrt{P}$ sera une fonction de $\frac{1}{2}n$ dimensions; $\sqrt[3]{P}$ sera une fonction de $\frac{1}{3}n$ dimensions, & en général $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ sera une fonction de $\frac{\mu}{\nu}n$ dimensions. Ainsi $\sqrt{(yy+zz)}$ sera une fonction d'une dimension; $\sqrt[3]{(y^9+z^9)}$ sera une fonction de trois dimensions: $(yz+zz)^{\frac{3}{4}}$ sera une fonction de $\frac{3}{2}$ dimensions, & $\frac{yy+zz}{\sqrt{(y^4+z^4)}}$ sera une fonction de dimension nulle. D'après cela, & ce qui précede, on comprendra facilement que l'expression $\frac{1}{y}+\frac{y\sqrt{(yy+zz)}}{z^3}-\frac{y}{\sqrt[3]{(y^6-z^6)}}+\frac{y\sqrt{z}}{zz\sqrt{y}+\sqrt{(y^5+z^5)}}$ est une fonction homogene de -1 dimension.

87. Il n'y a plus de difficulté pour savoir si une fonction irrationnelle implicite est homogene ou non, soit V une telle fonction & $V^3+PV^2+QV+R=0$, P, Q & R étant des fonctions de y & de z. D'abord il est clair que V ne peut être une fonction homogene, si P, Q & R ne sont pas des fonctions homogenes. De plus, si nous supposons que V soit une fonction de n dimensions; V^2 sera une fonction de $2n$, & V^3 une fonction de $3n$ dimensions; puis donc qu'il doit y avoir par-tout un même nombre de dimensions, il faut que P soit une fonction de n, Q de $2n$, & R de $3n$ dimensions. Donc réciproquement, si les lettres P, Q, R sont respectivement des fonctions homogenes de n, $2n$, $3n$ dimensions, on en conclura que V sera une fonction de n dimensions. Ainsi, en supposant l'équation $V^5+(y^4+z^4)V^3+ay^8V-z^{10}=0$, V sera une fonction homogene de deux dimensions des variables y & z.

88. *Si* V *est une fonction homogene de* n *dimensions des variables* y *&* z, *& qu'on fasse par-tout* $y=uz$: *la fonction* V *se changera en un produit de la puissance* z^n *par une certaine fonction de la variable* u.

En effet, par cette substitution de $y=uz$, on introduira dans chaque terme des puissances de z, égales à celles de y qu'il qu'il renfermoit. Ainſi, puiſque dans tous les termes le nombre des dimenſions des variables y & z, priſes enſemble eſt égal à n, la ſeule variable z aura par-tout n dimenſions, & par conſéquent chaque terme renfermera la puiſſance z^n; la fonction V ſera donc diviſible par cette puiſſance, & le quotient ſera une fonction de la ſeule variable u. La choſe eſt claire pour les fonctions entieres; car ſi on a $V = \alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$ en faiſant $y = uz$, V deviendra $= z^3 (\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta)$. La même choſe eſt manifeſte pour les fractions. En effet, ſoit $V = \frac{\alpha y + \beta z}{yy + zz}$, fonction de -1 dimenſion, en faiſant $y = uz$, V deviendra $= z^{-1} \left(\frac{\alpha u + \beta}{u^2 + 1}\right)$. Les fonctions irrationnelles ne font pas plus exception; car ſi $V = \frac{y + \sqrt{(yy + zz)}}{z\sqrt{(y^3 + z^3)}}$, qui eſt une fonction de $-\frac{1}{2}$ dimenſions; en faiſant $y = uz$, on obtiendra l'équation $V = z^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u + \sqrt{(uu + 1)}}{\sqrt{(u^3 + 1)}}\right)$. Ainſi, de cette maniere, les fonctions homogenes de deux variables ſeulement ſeront ramenées à des fonctions d'une ſeule variable; car la puiſſance de z étant un facteur, eſt cenſée ne pas altérer la fonction de u.

89. *Donc une fonction homogene* V *des deux variables* y *&* z *d'une dimenſion nulle, après la ſubſtitution de* $y = uz$ *ſe changera en une fonction pure de la ſeule variable* u.

Car le nombre des dimenſions étant nul, la puiſſance de z, qui multipliera la fonction de u ſera $z^0 = 1$; & dans ce cas la variable z ſort tout-à-fait de l'expreſſion. Par exemple, ſoit $V = \frac{y + z}{y - z}$, en faiſant $y = uz$, on aura $V = \frac{u+1}{u-1}$; & pour les fonctions irrationnelles, ſi on a $V = \frac{y - \sqrt{(yy - zz)}}{z}$, en ſuppoſant $y = uz$, V deviendra $= u - \sqrt{(uu - 1)}$.

90. *Une fonction homogene & entiere de deux variables* y *&* z, *pourra être décompoſée en autant de facteurs ſimples de la forme* $\alpha y + \beta z$, *qu'elle aura de dimenſions.*

Car la fonction étant homogene, si l'on fait $y = uz$, elle se changera en un produit de z^n par une certaine fonction entiere de u, laquelle par cette raison pourra être décomposée en facteurs simples de la forme $\alpha u + \beta$. Multipliant chaque facteur par z, chacun aura la forme $\alpha uz + \beta z = \alpha y + \beta z$, à cause de $uz = y$; mais à cause du multiplicateur z^n, il y aura autant de facteurs de cette forme, que l'exposant n contient d'unités, & ces facteurs simples, seront ou réels ou imaginaires, suivant que les coëfficiens α & β, seront ou réels ou imaginaires.

Il suit donc de-là qu'une fonction de deux dimensions $ayy + byz + czz$ renferme deux facteurs simples de la forme $\alpha y + \beta z$; & qu'une fonction telle que $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$ aura trois facteurs simples de la forme $\alpha y + \beta z$. Il en sera de même des fonctions entieres homogenes, qui auront plus de dimensions.

91. Donc cette expression $\alpha y + \beta z$ comprend la forme générale des fonctions entieres d'une dimension, comme la quantité $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)$ exprime la forme générale des fonctions entieres de deux dimensions; & toutes les fonctions entieres de trois dimensions seront représentées par la formule $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)(\epsilon y + \xi z)$; par conséquent toutes les fonctions entieres homogenes pourront être exprimées par des produits composés d'autant de facteurs, tels que $\alpha y + \beta z$, que ces fonctions contiennent de dimensions. Or ces facteurs se trouvent par la resolution des équations, de la même maniere dont nous avons enseigné à trouver les facteurs simples des fonctions entieres d'une variable. Au reste, cette propriété des fonctions homogenes de deux variables ne s'étend point aux fonctions homogenes de trois ou de plus de variables; car la formule générale de ces sortes de fonctions de deux dimensions seulement, qui est $ayy + byz + cyx + dxz + exx + fzz$, ne peut être ramenée généralement à un produit de la forme
(o) $(\alpha y + \beta z + \gamma x)(\delta y + \epsilon z + \xi x)$; & les fonctions d'un

plus grand nombre de dimenſions ſont encore moins ſuſceptibles d'être ramenées à de ſemblables produits.

92. On comprend par ce que nous venons de dire des fonctions homogenes, ce que c'eſt qu'une fonction hétérogene; c'eſt, comme nous l'avons dit, celle dans laquelle tous les termes n'ont pas le même nombre de dimenſions. Les fonctions hétérogenes peuvent être diviſées ſuivant la multiplicité des dimenſions. Ainſi nous appellerons fonction bifide, celle qui renferme un nombre double de dimenſions; elle ſera par conſéquent un aſſemblage de deux fonctions homogenes, dans leſquelles les nombres des dimenſions ſont différents; par exemple, $y^5 + 2y^3z^2 + yy + zz$ ſera une fonction bifide, parce qu'elle contient partie cinq, partie deux dimenſions. Une fonction trifide, eſt celle dans laquelle il ſe trouve trois nombres différents de dimenſions, ou qui peut être partagée en trois fonctions homogenes, comme $y^6 + y^2z^2 + z^4 + y - z$.

Il y a en outre des fonctions hétérogenes fractionnaires ou irrationnelles, tellement compliquées, qu'on ne peut les décompoſer en fonctions homogenes; telles ſont les expreſſions $\frac{y^3 + ayz}{by + zz}$; $\frac{a + \sqrt{(yy + zz)}}{yy - bz}$.

93. Quelquefois une fonction hétérogene, au moyen d'une ſubſtitution convenable, faite à la place d'une ou de deux variables, peut devenir homogene. Il n'eſt pas ſi facile d'indiquer dans quels cas ce changement a lieu. Il ſuffira donc de préſenter quelques exemples qui en faſſent connoître la poſſibilité. Soit propoſée, en conſéquence, la fonction $y^5 + zzy + y^3z + \frac{z^3}{y}$; avec une légere attention on verra qu'elle devient homogene en faiſant $z = xx$; car alors elle devient $y^5 + x^4y + y^3x^2 + \frac{x^6}{y}$, fonction homogene de cinq dimenſions des variables x & y. De même la fonction $y + y^2x + y^3x^2 + y^5x^4 + \frac{a}{x}$ ſera rendue homogene en

faisant $x = \frac{1}{z}$; car elle devient la fonction d'une dimension $y + \frac{yy}{z} + \frac{y^3}{zz} + \frac{y^5}{z^4} + az$. Il y a d'autres cas où une substitution aussi simple ne suffit pas pour rendre la fonction homogene, & qui présentent beaucoup plus de difficultés.

94. Enfin on doit avoir égard à une autre division assez usitée des fonctions entieres; je veux parler de leur division en ordres. L'ordre est déterminé par le plus grand nombre des dimensions qui se trouve dans la quantité. Par exemple, $xx + yy + zz + ay - aa$ est une fonction du second ordre, parce qu'elle a des termes de deux dimensions; & $y^4 + yz^3 - ay^2z + abyz - a^2y^2 + b^4$ appartient aux fonctions du quatrieme ordre. On a égard à cette division, sur-tout dans la théorie des lignes courbes; d'où résulte encore une nouvelle division des fonctions entieres.

95. Reste à parler de la division des fonctions entieres en complexes & en incomplexes. Une fonction complexe, est celle qui peut être décomposée en facteurs rationnels, ou qui est le produit de deux ou d'un plus grand nombre de fonctions rationnelles; telle est la fonction $y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byzz - a^2z^2 + 2abzy - b^2y^2$, qui résulte de la multiplication de ces deux fonctions . . . . . $(yy + zz - az + by)(yy - zz + az - by)$. Nous pouvons donc conclure que toute fonction entiere homogene, qui renferme seulement deux variables, est une fonction complexe, parce qu'elle a autant de facteurs simples de la forme $\alpha y + \beta z$ qu'elle contient de dimensions. Par la raison contraire une fonction entiere sera incomplexe, si elle ne peut se décomposer en facteurs rationnels; telle est la quantité $yy + zz - aa$, qui ne renferme point de facteurs rationnels, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre. Au reste, c'est par la recherche des diviseurs qu'on pourra s'assurer si une fonction donnée est complexe ou incomplexe.

CHAPITRE VI.

Des Quantités exponentielles & des Logarithmes.

96. Quoique la connoiſſance des fonctions tranſcendantes doive faire un des objets du calcul intégral, cependant il ſera à propos de traiter ici de quelques eſpeces qui ſe préſentent plus fréquemment, & qui préparent la voie à pluſieurs recherches. Nous conſidérerons donc d'abord les quantités exponentielles, ou les puiſſances dont l'expoſant eſt une quantité variable; car il eſt clair que ces ſortes de quantités ne peuvent être rapportées aux fonctions algébriques, puiſque celles-ci n'admettent que des expoſans conſtants. On diſtingue pluſieurs eſpeces de quantités exponentielles, ſuivant que l'expoſant ſeul, ou que l'expoſant avec le nombre qu'il affecte eſt une quantité variable; a^z eſt de la premiere eſpece, & y^z de la ſeconde. De plus, l'expoſant même peut être une quantité exponentielle, comme dans les formules a^{a^z}; a^{y^z}; y^{a^z}; x^{y^z}. Nous ne multiplierons pas davantage les eſpeces de ces grandeurs; car leur nature ſera ſuffiſamment connue, après que nous aurons traité ſeulement la premiere eſpece.

97. Soit donc propoſée la quantité exponentielle a^z, ou ce qui revient au même, une puiſſance de la conſtante a, qui ait pour expoſant la variable z. Cet expoſant z renfermant tous les nombres déterminés, il eſt évident que ſi à la place de z, on ſubſtitue ſucceſſivement tous les nombres entiers poſitifs, on obtiendra pour a^z les valeurs déterminées a^1; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; &c; & ſi l'on met pour z les nombres négatifs -1, -2, -3, &c, la quantité a^z deviendra ſuc-

ceſſivement $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^4}$; &c; & ſi l'on fait $z = 0$, on aura toujours $a^0 = 1$. Mais ſi l'on ſubſtitue à z des fractions, comme $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$, &c, on aura pour réſultats les quantités $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[4]{a^3}$; &c; leſquelles conſidérées en elles-mêmes, ont deux ou un plus grand nombre de valeurs, puiſque l'extraction des racines en fournit toujours pluſieurs. Cependant on n'admet ordinairement dans ce cas, que les valeurs qui ſe préſentent les premieres, c'eſt-à-dire, celles qui ſont réelles & poſitives, parce que la quantité a^z eſt regardée comme une fonction uniforme de z. Ainſi $a^{\frac{5}{2}}$ tiendra un certain milieu entre a^2 & a^3, & ſera par conſéquent une quantité du même genre; & quoique $a^{\frac{5}{2}}$ ait la double valeur $-aa\sqrt{a}$ & $+aa\sqrt{a}$, cependant on ne tient compte que de la derniere. Il en eſt de même ſi l'expoſant z a des valeurs irrationnelles; mais comme il eſt difficile dans ce
(p) cas de concevoir le nombre de valeurs que renferme la quantité propoſée, on ſe contente de conſidérer la ſeule valeur réelle. Ainſi $a^{\sqrt{7}}$ ſera une valeur déterminée compriſe entre les limites a^2 & a^3.

98 Les valeurs de la quantité exponentielle a^z dépendent ſur-tout de la grandeur du nombre conſtant a; car, ſi $a = 1$, a^z ſera toujours $= 1$, quelque valeur qu'on ſubſtitue à l'expoſant z; mais ſi a eſt > 1, la valeur de a^z ſera d'autant plus grande, qu'on ſubſtituera à z un plus grand nombre, juſqu'à ce qu'elle devienne $= \infty$, en faiſant $z = \infty$; ſi $z = 0$, a^z deviendra $= 1$, & ſi z eſt < 0, les valeurs de a^z deviendront plus petites que l'unité; juſqu'à ce qu'ayant fait $z = -\infty$, a^z devienne $= 0$. Le contraire arrive, ſi a eſt < 1, & cependant un nombre poſitif; car alors les valeurs de a^z décroîtront, à meſure que z croîtra au-deſſus de 0; & elles croîtront, ſi l'on prend pour z des nombres négatifs. En effet, ſi a eſt < 1, $\frac{1}{a}$ eſt > 1; ſoit donc $\frac{1}{a} = b$; on

aura $a^z = b^{-z}$, & par conféquent le fecond cas pourra être regardé comme une conféquence du premier.

99. Si $a = 0$, on remarque un grand faut dans les valeurs de a^z; car tant que z fera un nombre pofitif ou plus grand que zéro, on aura toujours $a^z = 0$; fi $z = 0$, a^0 fera $= 1$; mais fi z eft un nombre négatif, a^z obtiendra une valeur infiniment grande. Effectivement foit $z = -3$, alors $a^z = 0^{-3}$ $= \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0} = \infty$. On obfervera encore de plus grands fauts, fi la quantité conftante a a une valeur négative, par exemple, -2; car, en fubftituant à z des nombres entiers, les valeurs de a^z deviendront alternativement pofitives & négatives, comme le fait voir la férie fuivante . . . .

$$a^{-4};\ a^{-3};\ a^{-2};\ a^{-1};\ a^0;\ a^1;\ a^2;\ a^3;\ a^4; \text{\&c.}$$
$$+\tfrac{1}{16};\ -\tfrac{1}{8};\ +\tfrac{1}{4};\ -\tfrac{1}{2};\ 1;\ -2;\ +4;\ -8;\ +16.$$

Et fi l'on donne à l'expofant z des valeurs fractionnaires, la puiffance $a^z = (-2)^z$ prendra des valeurs tantôt réelles, tantôt imaginaires; car $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$, quantité imaginaire, & $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2}; = -\sqrt[3]{2}$ quantité réelle. Mais fi l'on fubftitue à z des valeurs irrationnelles, la puiffance a^z repréfentera-t-elle des quantités réelles ou imaginaires? C'eft ce qu'il n'eft pas poffible de décider.

100. Après avoir ainfi fait connoître les inconvéniens qui fe préfentent, lorfqu'on fubftitue à a des nombres négatifs, prenons pour a un nombre pofitif, & même plus grand que l'unité, parce qu'il eft aifé de ramener à ce cas celui où a exprimeroit un nombre pofitif plus petit que l'unité. Si donc on fuppofe $a^z = y$, en mettant à la place de z tous les nombres réels renfermés entre les limites $+\infty$ & $-\infty$, y acquerra toutes les valeurs pofitives, comprifes entre les limites $+\infty$ & 0. Car fi $z = \infty$, $y = \infty$; fi $z = 0$, $y = 1$; & fi $z = -\infty$, $y = 0$. Donc réciproquement, quelque valeur

positive qu'on prenne pour y, il y aura pour z une valeur correspondante, qui satisfera à la condition $a^z = y$; mais si on donnoit à y une valeur négative, l'exposant z ne pourroit avoir une valeur réelle.

101. Soit donc $y = a^z$, y sera une certaine fonction de z, & on verra facilement par la nature des puissances quel rapport il y a entre y & z. En effet, quelque soit la valeur qu'on donne à z, celle de y est par-là déterminée. On a aussi $yy = a^{2z}$; $y^3 = a^{3z}$; & en général $y^n = a^{nz}$; d'où $\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}$; $\sqrt[3]{y} = a^{\frac{1}{3}z}$; & $\frac{1}{y} = a^{-z}$; $\frac{1}{yy} = a^{-2z}$, & $\frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{1}{2}z}$, ainsi des autres. De plus si $v = a^x$, on aura $vy = a^{x+z}$, & $\frac{v}{y} = a^{x-z}$ Ces considérations sont propres à faciliter les moyens de trouver la valeur de y, celle de z étant donnée.

EXEMPLE.

Soit $a = 10$; à cause de l'Arithmétique décimale dont nous nous servons, il sera facile d'avoir les valeurs de y, lorsqu'on prendra pour z des nombres entiers. En effet, on aura $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$, & $10^0 = 1$; de même $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$; $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$: & si l'on prend pour z des fractions, les valeurs de y pourront être indiquées à l'aide de l'extraction des racines; ainsi $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,162277$ &c.

102. Si étant donné le nombre a, on peut conclure de chaque valeur de z, celle de y; réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nombre convenable pour que $a^z = y$; cette valeur de z, en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y, s'appelle ordinairement le LOGARITHME de

de y. La théorie des logarithmes ſuppoſe donc l'exiſtence d'un nombre conſtant repréſenté par a, que pour cette raiſon on appelle la *Baſe* des logarithmes. Cette baſe une fois choiſie, le logarithme d'un nombre y n'eſt autre choſe que l'expoſant de la puiſſance a^z égale à ce nombre y. On a coutume d'indiquer le logarithme du nombre y de cette maniere ly. Conſéquemment, ſi $a^z = y$, $z = ly$. Il s'enſuit de-là que la baſe logarithmique, quoique arbitraire, doit cependant être plus grande que l'unité, & qu'il n'y a que les nombres poſitifs qui puiſſent avoir des logarithmes réels.

103. Ainſi, quelque nombre qu'on prenne pour la baſe logarithmique a, $l\,1$ ſera toujours $= 0$; car, ſi dans l'équation $a^z = y$, qui revient à celle-ci $z = ly$, on ſuppoſe $y = 1$, on a $z = 0$. Enſuite les logarithmes des nombres plus grands que l'unité ſeront poſitifs & dépendants de la valeur de la baſe a; ainſi $la = 1$, $laa = 2$; $la^3 = 3$; $la^4 = 4$; &c; d'où l'on peut conclure réciproquement le nombre qu'on a pris pour la baſe logarithmique; c'eſt celui dont le logarithme $= 1$. Les logarithmes des nombres plus petits que l'unité, & cependant poſitifs ſeront négatifs; car $l\frac{1}{a} = -1$; $l\frac{1}{aa} = -2$; $l\frac{1}{a^3} = -3$; &c; quant aux logarithmes des nombres négatifs, ils ne ſeront point réels, mais imaginaires, comme nous l'avons déja remarqué.

104. De même, ſi $ly = z$, on aura $lyy = 2z$; $ly^3 = 3z$, & en général $ly^n = nz$ ou $ly^n = nly$, à cauſe de $z = ly$. Donc le logarithme d'une puiſſance de y eſt égal au logarithme de y même, multiplié par l'expoſant de la puiſſance; par conſéquent on aura $l\sqrt{y} = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}ly$; $l\frac{1}{\sqrt{y}} = ly^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}ly$, ainſi des autres; d'où il s'enſuit qu'étant donné le logarithme d'un nombre quelconque, on pourra

trouver les logarithmes de toutes les puiſſances de ce même nombre. Suppoſons à préſent deux logarithmes connus; ſavoir, $ly = z$, & $lv = x$; puiſque $y = a^z$, & $v = a^x$, nous aurons $lvy = x + z = lv + ly$. Donc le logarithme du produit de deux nombres eſt égal à la ſomme des logarithmes des facteurs; nous aurons de même $l\frac{y}{v} = z - x, = ly - lv$; donc le logarithme d'une quantité fractionnaire eſt égal au logarithme du numérateur diminué de celui du dénominateur. Ces regles ſervent à calculer les logarithmes de pluſieurs nombres, lorſqu'on en connoît déja quelques-uns.

105. D'après ce que nous venons d'expoſer, il eſt clair qu'il n'y a de logarithmes rationnels que ceux des puiſſances de la baſe a; car ſi un autre nombre b n'eſt pas une puiſſance de la baſe a, ſon logarithme ne peut être exprimé par un nombre rationnel, le logarithme de b ne ſera pas non plus un nombre irrationnel; car ſi on avoit $lb = \sqrt{n}$, on auroit auſſi $a^{\sqrt{n}} = b$; ce qui eſt impoſſible, puiſque les nombres a & b ſont ſuppoſés rationnels. Or ce ſont les logarithmes des nombres rationnels & entiers dont on a ſur-tout beſoin, parce qu'ils ſervent à trouver ceux des fractions & ceux des nombres ſourds. Puiſqu'aucun nombre, ſoit rationnel, ſoit irrationnel, ne peut repréſenter les logarithmes des nombres, qui ne ſont pas des puiſſances de la baſe, on a donc raiſon de les rapporter aux quantités tranſcendantes; & c'eſt la cauſe pour laquelle on a coutume de ranger les logarithmes parmi ces dernieres.

106. On ne peut donc obtenir les logarithmes des nombres que par approximation au moyen des fractions décimales; & ils approcheront d'autant plus d'être exacts, qu'ils auront été calculés avec plus de chiffres décimaux. Il ſera poſſible, de cette maniere, d'avoir à-peu-près le logarithme de tout nombre, par la ſeule extraction d'une racine quarrée. En effet, puiſqu'en ſuppoſant $ly = z$, & $lv = x$; $l\sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$,

ſi le nombre propoſé b tombe entre les limites a^2 & a^3, dont les logarithmes ſont 2 & 3, cherchez la valeur de $a^{2\frac{1}{2}}$ ou $a^2\sqrt{a}$, & b ſera renfermé entre les limites a^2 & $a^{2\frac{1}{2}}$, ou $a^{2\frac{1}{2}}$ & a^3. Quelque ſoit celui de ces deux cas, qui ait lieu, en prenant une moyenne proportionnelle, on rapprochera les limites, & on pourra, en continuant, arriver à des limites, qui ne ſoient pas ſéparées l'une de l'autre d'une quantité donnée, & avec leſquelles par conſéquent le nombre propoſé b pourra être confondu ſans erreur, & comme les logarithmes de chacune de ces limites ſont donnés, on aura à la fin le logarithme du nombre b.

Exemple.

Soit la baſe logarithmique $a = 10$, qui eſt celle des tables ordinaires, & propoſons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre eſt renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes ſont 0 & 1, on procédera de la maniere ſuivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à des limites, qui ne different plus du nombre propoſé 5.

$A = 1{,}000000$;	$lA = 0{,}\ 0000000$	ſoit
$B = 10{,}000000$;	$lB = 1{,}\ 0000000$;	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3{,}162277$;	$lC = 0{,}\ 5000000$;	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5{,}623413$;	$lD = 0{,}\ 7500000$;	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4{,}216964$;	$lE = 0{,}\ 6250000$;	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4{,}869674$;	$lF = 0{,}\ 6875000$;	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5{,}232991$;	$lG = 0{,}\ 7187500$;	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5{,}048065$;	$lH = 0{,}\ 7031250$;	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4{,}958069$;	$lI = 0{,}\ 6953125$;	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5{,}002865$;	$lK = 0{,}\ 6992187$;	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4{,}980416$;	$lL = 0{,}\ 6972656$;	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4{,}991627$;	$lM = 0{,}\ 6982421$;	$N = \sqrt{KM}$

$N = 4{,}997242$;	$lN = 0{,}6987304$;	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5{,}000052$;	$lO = 0{,}6989745$;	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4{,}998647$;	$lP = 0{,}6988525$;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4{,}999350$;	$lQ = 0{,}6989135$;	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4{,}999701$;	$lR = 0{,}6989440$;	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4{,}999876$;	$lS = 0{,}6989592$;	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4{,}999963$;	$lT = 0{,}6989668$;	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5{,}000008$;	$lV = 0{,}6989707$;	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4{,}999984$;	$lW = 0{,}6989687$;	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4{,}999997$;	$lX = 0{,}6989697$;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5{,}000003$;	$lY = 0{,}6989702$;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5{,}000000$;	$lZ = 0{,}6989700$;	

Ainſi, en prenant des moyennes proportionnelles, on eſt parvenu à trouver $Z = 5{,}000000$, à quoi répond le logarithme cherché $0{,}698970$, en ſuppoſant la baſe logarithmique $= 10$. Par conſéquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'eſt de cette maniere que BRIGGS & ULACQ ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

107. Il y a donc autant de ſyſtêmes différents de logarithmes qu'on peut prendre de nombres différents pour la baſe a, & conſéquemment le nombre de ſyſtêmes logarithmiques ſera infini. Au reſte, dans deux ſyſtêmes, les logarithmes d'un même nombre ont toujours entr'eux un même rapport. Car ſoit la baſe d'un ſyſtême $= a$, celle d'un autre $= b$, le logarithme d'un nombre n dans le premier $= p$, dans le ſecond $= q$, on aura $a^p = n$ & $b^q = n$, donc $a^p = b^q$, & $a = b^{\frac{q}{p}}$. Il faut donc que la fraction $\frac{p}{q}$ ait une valeur conſtante, quelque nombre qu'on ait pris pour n. Par conſequent ſi les logarithmes de tous les nombres ont été calculés pour un ſyſtême, on pourra par une ſimple regle de

Trois obtenir facilement les logarithmes des mêmes nombres pour un autre ſyſtême. Ainſi les logarithmes pour la baſe 10 étant donnés, on pourra trouver les logarithmes pour une autre baſe, par exemple, pour la baſe 2; car ſuppoſons que le logarithme d'un nombre, pour la baſe 2, $= q$, tandis que le logarithme du même nombre, pour la baſe 10, $= p$; puiſque pour la baſe 10, $l2 = 0,3010300$, & que pour la baſe 2, $l2 = 1$, nous aurons $0,3010300 : 1 :: p : q$. Donc $q = \frac{p}{0,3010300} = 3,3219277\, p$. Donc, ſi on multiplie par le nombre 3,3219277 tous les logarithmes ordinaires, on obtiendra la table des logarithmes correſpondants pour la baſe 2.

108. *Il ſuit de-là que les logarithmes de deux nombres dans quelque ſyſtême que ce ſoit conſervent le même rapport.*

Car ſoient deux nombres M & N, dont les logarithmes pour la baſe a ſoient m & n, on aura $M = a^m$, & $N = a^n$. Donc $a^{mn} = M^n = N^m$, & partant $M = N^{\frac{m}{n}}$, équation qui ne renfermant plus la baſe a, fait voir clairement que la fraction $\frac{m}{n}$ a une valeur indépendante de la baſe a. En effet, ſoient μ & ν les logarithmes des mêmes nombres M & N pour une autre baſe b, on en conclura pareillement que $M = N^{\frac{\mu}{\nu}}$. Donc $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$ & $\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}$ ou $m : n :: \mu : \nu$ C'eſt ainſi que nous avons déja vu que dans tout ſyſtême de logarithmes, les logar. de différentes puiſſances du même nombre, comme y^m, & y^n ſont entr'eux comme les expoſans $m : n$.

109. Ainſi, pour conſtruire une table de logarithmes pour une baſe quelconque a, il ſuffit d'avoir calculé par la méthode que nous avons donnée ci-deſſus, ou par une autre plus commode, ſeulement les logarithmes des nombres premiers; car les logarithmes des nombres compoſés étant égaux à la ſomme des logarithmes de tous les facteurs, les logarithmes

de ces nombres se trouveront par la seule addition. Par exemple, les logarithmes des nombres 3 & 5 étant connus, on aura $l15 = l3 + l5$; $l45 = 2l3 + l5$, & comme nous avons trouvé pour la base $a = 10$, $l5 = 0{,}6989700$, & qu'en outre $l10$ est $= 1$; nous aurons $l\frac{10}{5} = l2 = l10 - l5$, & par conséquent $l2 = 1 - 0{,}6989700 = 0{,}3010300$. Or les logarithmes des nombres premiers 2 & 5 une fois trouvés donneront ceux des nombres composés de 2 & de 5; comme 4, 8, 16, 32, 64, &c; 20, 40, 80, 25, 50, &c.

110. Les tables de logarithmes sont du plus grand usage pour abréger les calculs numériques, parce qu'elles font connoître non-seulement le logarithme d'un nombre donné, mais aussi le nombre qui répond à un logarithme proposé. Ainsi, supposons que c, d, e, f, g, h, représentent des nombres quelconques, on pourra, sans multiplication, trouver la valeur de cette expression $\frac{ccd\sqrt{e}}{f\sqrt{gh}}$; car le logarithme de cette quantité $= 2lc + ld + \frac{1}{2}le - lf - \frac{1}{3}lg - \frac{1}{3}lh$; & cherchant le nombre qui lui correspond, on aura la valeur demandée. Les tables de logarithmes sont sur-tout d'une grande utilité pour trouver les puissances & les racines les plus compliquées, en substituant aux opérations ordinaires la multiplication & la division.

Exemple I.

On demande la valeur de la puissance $2^{\frac{7}{12}}$. Son logarithme étant $= \frac{7}{12}l2$; si l'on multiplie le logarithme de 2 pris dans les tables, qui est 0,3010300, par $\frac{7}{12}$, c'est à-dire, par $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$; on trouvera $l2^{\frac{7}{12}} = 0{,}1756008$; logarithme auquel répond le nombre 1,498307, valeur approchée $2^{\frac{7}{12}}$.

Exemple II.

Si le nombre des habitans d'une province s'accroît tous les ans d'un trentieme, & qu'il y ait au commencement 100000 habitans; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans. Soit, pour abréger, le nombre donné des habitans $= n$, de sorte que $n = 100000$; au bout d'un an le nombre des habitans sera $= \left(1 + \frac{1}{30}\right) n = \frac{31}{30} n$; au bout de deux ans $= \left(\frac{31}{30}\right)^2 n$, au bout de trois $= \left(\frac{31}{30}\right)^3 n$; & enfin au bout de cent ans $= \left(\frac{31}{30}\right)^{100} n = \left(\frac{31}{30}\right)^{100} 100000$. Le logarithme de ce dernier nombre $= 100\, l \frac{31}{30} + l\, 100000$. Or $l \frac{31}{30} = l 31 - l 30 = 0{,}0\,4240439$; donc $100\, l \frac{31}{30} = 1{,}4240439$, ajoutant $l\, 100000 = 5$, le logarithme du nombre cherché des habitans $= 6{,}4240439$, auquel répond le nombre $= 2654874$. Donc au bout de cent ans le nombre des habitans sera plus de vingt-six fois & demi plus considérable.

Exemple III.

La terre ayant été repeuplée après le déluge par six hommes; supposons qu'au bout de deux cens ans le nombre des hommes se soit élevé à 1000000, on demande de quelle partie il a dû augmenter tous les ans. Supposons que pendant ce temps le nombre des hommes se soit accru tous les ans de $\frac{1}{x}$, le nombre des hommes pendant deux cens ans sera nécessairement monté à $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} 6 = 1000000$, d'où l'on tire $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$. Donc $l \frac{1+x}{x} = \frac{1}{200}\, l \frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \cdot 5{,}2218487 = 0{,}0261092$; conséquemment $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$ & $1000000 = 61963\, x$. Donc $x = 16$ environ. Ainsi, pour une aussi grande population, il auroit fallu que le genre-humain ſe fût accru tous les ans d'un ſeizieme ; ce que la durée de la vie des premiers hommes rend vraiſemblable. Si la même augmentation eût continué d'avoir lieu pendant 400 ans, le nombre des hommes fût monté à 1000000. $\frac{1000000}{6} = 166666666666$. Ce nombre d'habitans eſt ſi conſidérable, que toute la terre n'eût pas ſuffi pour les nourrir.

Exemple IV.

Si le nombre des hommes eſt doublé à chaque ſiecle, quel eſt l'accroiſſement annuel ? Suppoſons que le nombre des hommes ſe ſoit accru tous les ans de ſa partie $\frac{1}{x}$, & qu'au commencement le nombre des habitans ait été $= n$; au bout de cent ans il ſera $= \left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} n$, lequel devant être $= 2n$, donnera l'équation $\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$ & $l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100} l2 = 0{,}0030103$. Donc $\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$ & $x = \frac{10000000}{69555} = 144$ environ. Il ſuffit donc que le nombre des hommes ait augmenté tous les ans de $\frac{1}{144}$. On voit par-là combien ſont ridicules les objections de ces incrédules, qui nient que toute la terre ait pu être peuplée en ſi peu de temps par un ſeul homme.

111. L'uſage des logarithmes eſt particuliérement eſſentiel pour réſoudre les équations, dans leſquelles l'inconnue ſe trouve en expoſant. Si, par exemple, on arrive à l'équation $a^x = b$, d'où il faille tirer la valeur de l'inconnue x ; on ne pourra y parvenir qu'en employant les logarithmes. En effet, puiſque $a^x = b$, on aura $la^x = xla = lb$, & partant $x = \frac{lb}{la}$. Au reſte, il importe peu ici dequel ſyſtême de logarithmes on ſe ſervira, puiſque dans tous les ſyſtêmes les

les logarithmes des nombres a & b ont toujours entr'eux un même rapport.

EXEMPLE I.

Si un nombre d'hommes augmente tous les ans de sa centieme partie, on veut savoir après combien d'années le nombre en sera décuple. Supposons que ce soit après x années, & que le nombre des hommes au commencement ait été $= n$; après x années, il sera $\left(\frac{101}{100}\right)^x n$, lequel devant être $10n$, donne l'équation $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$, & par conséquent $x\, l\frac{101}{100} = l10$, & $x = \frac{l10}{l101 - l100}$; d'où l'on conclura $x = \frac{10000000}{43214} = 231$. Donc au bout de 231 ans, un nombre d'hommes, dont l'accroissement annuel est de sa centieme partie, devient dix fois plus grand; au bout de 462 ans il sera devenu cent fois, & au bout de 693 ans, mille fois plus grand.

EXEMPLE II.

Un particulier doit 400000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent; il acquitte tous les ans 25000 florins; on demande après combien d'années sa dette sera entierement éteinte. Écrivons a pour la somme dûe 400000 fl. & b pour la somme 25000 fl. payée tous les ans; il devra donc au bout d'un an $\frac{105}{100}a - b$; au bout de deux ans $\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$; au bout de trois ans $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$; & en mettant, pour abréger, n au lieu de $\frac{105}{100}$, il restera dû après un nombre x d'années $n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - n^{x-3} b \ldots\ldots - b$

$= n^x a - b(1 + n + n^2 + \ldots\ldots + n^{x-1})$. Mais comme par la nature des progreſſions géométriques $1 + n + n^2 + \ldots\ldots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$; après x années, il ſera dû $n^x a - \frac{n^x b + b}{n - 1}$ fl., quantité, qui égalée à zéro donnera cette équation $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$, ou $(n - 1) n^x a = n^x b - b$, & par conſéquent $(b - na + a) n^x = b$, & $n^x = \frac{b}{b - (n-1)a}$; d'où $x = \frac{lb - l[b - (n-1)a]}{ln}$; mais, puiſque $a = 400000$, $b = 25000$, $n = \frac{105}{100}$; on aura $(n - 1)\, a = 20000$, & $b - (n - 1)\, a = 5000$, & le nombre x d'années, après lequel la dette eſt entierement éteinte $= \frac{l\ 25000 - l\ 5000}{l\ \frac{105}{100}} = \frac{l\ 5}{l\ \frac{21}{20}} = \frac{6989700}{211893}$: donc x ſera un peu moindre que 33; c'eſt-à-dire qu'au bout de 33 ans, la dette ſera non-ſeulement acquittée, mais le créancier ſera tenu de rendre $\frac{(n^{33} - 1)}{n - 1} b - n^{33} a = \frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{33} . 5000 - 25000}{\frac{1}{20}} = 100000 \left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500000$ florins. Or $l\frac{21}{20} = 0{,}0211892991$; par conſéquent $l\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 0{,}69924687$; & $l\,100000 \left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5{,}6992469$; à quoi répond le nombre $500318, 8$; donc au bout de 33 ans révolus le créancier doit rendre $318\,\frac{4}{5}$ florins.

112. Les logarithmes ordinaires calculés pour la baſe = 10, outre l'uſage qui leur eſt commun avec tous les autres, jouiſſent dans l'arithmétique décimale d'un avantage particulier, & méritent par cette raiſon la préférence ſur ceux des autres ſyſtêmes. En effet, les logarithmes de tous les nombres, excepté les puiſſances de 10, étant exprimés en décimales, les logarithmes des nombres compris entre 1 & 10 ſeront renfermés entre 0 & 1, & ceux des nombres contenus

entre 10 & 100 seront compris entre 1 & 2; ainsi de suite. Chaque logarithme est donc composé de deux parties; la premiere est un nombre entier, & se nomme CARACTÉRISTIQUE, & la seconde est une fraction décimale. La caractéristique est moindre d'une unité que le nombre de chiffres dont chaque nombre est composé; ainsi le logarithme de 78509 aura 4 pour caractéristique, parce que ce nombre est composé de 5 chiffres ou figures. On verra donc sur le champ à l'inspection d'un logarithme de combien de chiffres est composé le nombre correspondant. Par exemple, le nombre auquel appartient le logarithme 7,5804631 renfermera 8 figures.

113. Si deux logarithmes se conviennent par leurs parties décimales, & ne different que par la caractéristique, les nombres correspondants seront entr'eux comme une puissance de 10 à l'unité; & s'accorderont par les figures dont ils sont composés. Par exemple, les logarithmes 4,9130187, & 6,9130187 appartiennent respectivement aux nombre 81850, & 8185000; le logarithme 3,9130187 répond à 8185, & le logarithme 0,9130187 au nombre 8,185. La seule partie décimale fera donc connoître les chiffres qui composent le nombre; la caractéristique indiquera le nombre des chiffres entiers qu'on doit séparer sur la gauche, & les autres sur la droite exprimeront des décimales. Par exemple, dans le logarithme 2,7603429, la partie décimale annonce les chiffres 5758945, & la caractéristique 2 fait voir qu'il faut prendre la quantité 575,8945. Si la caractéristique étoit 0, le nombre correspondant seroit 5,758945; si elle étoit — 1, le nombre seroit dix fois plus petit & = 0,5758945; & à la caractéristique — 2, répondroit le nombre 0,05758945 &c. Au lieu des caractéristiques — 1, — 2, — 3, &c on écrit ordinairement 9, 8, 7 &c, & on ne perd pas de vue que ces logarithmes doivent être diminués d'une dixaine. On trouve tout cela expliqué fort au long dans les Introductions aux Tables des Logarithmes.

EXEMPLE.

Si la progreſſion 2, 4, 16, 256, &c. dont chaque terme eſt le quarré du précédent, eſt continuée juſqu'au vingt-cinquieme terme; on demande la grandeur de ce dernier terme. Il ſera plus commode d'exprimer les termes de cette progreſſion par des expoſans, de cette maniere $2^1, 2^2, 2^4, 2^8$, &c. Il eſt évident que les expoſans forment une progreſſion géométrique, & que celui du vingt-cinquieme terme ſera $2^{24} = 16777216$; de ſorte que le terme cherché $= 2^{16777216}$. Son logarithme ſera donc $= 16777216\, l2$; & comme $l2 = 0,30102999566398119$5, le logarithme du nombre demandé ſera $= 5050445,25973367$; dont la caractériſtique nous apprend que le nombre en queſtion exprimé de la maniere ordinaire ſera compoſé de 5050446 chiffres. La partie décimale 259733675932 cherchée dans la table des logarithmes donnera les premiers chiffres du nombre demandé, qui ſeront 181858. Quoique ce nombre ne puiſſe aucunement être exprimé, au moins eſt-il certain qu'il eſt compoſé de 5050446 chiffres, & que les ſix premiers ſont 181858, leſquels doivent être encore ſuivis vers la droite de 5050440 autres, dont quelques-uns pourroient être déterminés avec des tables de logarithmes plus étendues; c'eſt ainſi qu'on trouveroit pour les onze premiers chiffres 18185852986.

CHAPITRE VII.

Du Développement des Quantités exponentielles & logarithmiques en Séries.

114. Puiſqu'on a $a^0 = 1$, & qu'à meſure que l'expoſant de a augmente, la valeur de la puiſſance augmente auſſi, pourvu que a ſoit un nombre plus grand que l'unité; il

s'ensuit que si l'exposant surpasse infiniment peu zéro, la puissance surpassera l'unité aussi infiniment peu. Soit ω un nombre infiniment petit, ou une fraction si petite, qu'elle differe infiniment peu de zéro, on aura $a^{\omega} = 1 + \psi$, ψ étant un nombre infiniment petit; car il est constant par le Chapitre précédent, que si ψ n'étoit pas infiniment petit, ω ne pourroit pas l'être non plus. ψ sera donc ou $= \omega$, ou $> \omega$, ou $< \omega$, rapport qui dépendra toujours de la valeur de la lettre a. Comme ce rapport est encore inconnu, faisons $\psi = k\omega$, de maniere que $a^{\omega} = 1 + k\omega$; si nous prenons a pour la base logarithmique, nous aurons $\omega = l(1 + k\omega)$.

Exemple.

Pour faire voir plus clairement comment le nombre k dépend de la base a; supposons $a = 10$, & cherchons au moyen des tables ordinaires, le logarithme d'un nombre qui excede de très-peu l'unité, par exemple, celui de $1 + \frac{1}{1000000}$, de maniere que $k\omega = \frac{1}{1000000}$; nous trouverons $l\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)$ $= l\,\frac{1000001}{1000000} = 0{,}00000043429 = \omega$. Donc à cause de $k\omega$ $= 0{,}00000100000$, $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$ & $k = \frac{100000}{43429} = 2{,}30258$. On voit par-là que k est un nombre fini dépendant de la valeur de la base a; car si nous eussions pris un autre nombre pour la base a, le logarithme du même nombre $1 + k\omega$, auroit eu un rapport donné avec le premier, & il en seroit résulté une autre valeur pour k.

115. Puisque $a^{\omega} = 1 + k\omega$, on aura $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^{i}$, quelque nombre qu'on prenne pour i. Donc $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega$ $+ \frac{i(i-1)}{1.\,2}k^{2}\omega^{2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.\,2.\,3}k^{3}\omega^{3} +$ &c. Si l'on fait i $= \frac{z}{\omega}$, & que z représente un nombre quelconque fini, à

cause de ω infiniment petit, i deviendra un nombre infiniment grand, & par conséquent $\omega = \frac{z}{i}$, étant une fraction dont le dénominateur est infini, sera une quantité infiniment petite, telle qu'elle a été supposée. Écrivons donc $\frac{z}{i}$ à la place de ω, & nous aurons $a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1} kz + \frac{1(i-1)}{1.\ 2i} k^2 z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1.\ 2i.\ \ 3i} k^3 z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1.\ 2i.\ \ 3i.\ \ 4i} k^4 z^4 +$ &c; équation, qui sera vraie, si l'on prend pour i un nombre infiniment grand, & alors k sera un nombre déterminé dépendant de la valeur de a, comme nous venons de le voir.

116. Comme i est un nombre infiniment grand; il s'ensuit que $\frac{i-1}{i} = 1$; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de la fraction $\frac{i-1}{i}$ approchera de l'unité; donc si i est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction $\frac{i-1}{i}$ égalera l'unité. Par une raison semblable; $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$ &c. Concluons de-là que $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; ainsi des autres. Ces valeurs étant donc substituées, il en résultera $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1.\ 2} + \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \frac{k^4 z^4}{1.2.3.4} +$ &c. à l'infini. Cette équation exprime en même-temps la relation entre les nombres a & k; car, en supposant $z = 1$, on aura $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.\ 2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} +$ &c, & pour que $a = 10$, il faut que k soit environ $= 2,30258$; comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

117. Supposons $b = a^n$, en prenant le nombre a pour la base logarithmique, nous aurons $lb = n$; & puisque $b^z =$

a^{nz}, nous obtiendrons par une ſérie infinie $b^z = 1 + \frac{knz}{1} + \frac{k^2 n^2 z^2}{1.\ 2} + \frac{k^3 n^3 z^3}{1.2.3} + \frac{k^4 n^4 z^4}{1.2.3.4} +$ &c, & en écrivant lb au lieu de n, $b^z = 1 + \frac{kz}{1}.\ lb + \frac{k^2 z^2}{1.\ 2}(lb)^2 + \frac{k^3 z^3}{1.2.3}(lb)^3 + \frac{k^4 z^4}{1.2.3.4}(lb)^4 +$ &c. Ainſi, la valeur de la lettre k étant une fois connue par celle de la baſe a, une quantité exponentielle quelconque b^z pourra être exprimée par une ſérie infinie, dont les termes marchent ſuivant les puiſſances de z. Cela poſé, faiſons voir à préſent comment les logarithmes peuvent être développés en ſéries infinies.

118. Comme $a^\omega = 1 + k\omega$, ω étant une fraction infiniment petite, & que la relation entre a & k eſt donnée par cette équation: $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} +$ &c; en prenant a pour la baſe logarithmique, nous aurons $\omega = l(1 + k\omega)$ & $i\omega = l(1 + k\omega)^i$; or il eſt viſible que plus le nombre ſubſtitué à i ſera grand, plus la puiſſance $(1 + k\omega)^i$ ſurpaſſera l'unité, & qu'en faiſant $i =$ à un nombre infini, la valeur de la puiſſance $(1 + k\omega)^i$ s'élevera au-deſſus de l'unité. Donc ſi l'on ſuppoſe $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, on aura $l(1 + x) = i\omega$. Il ſuit de là que le nombre $i\omega$, étant fini, puiſqu'il eſt le logarithme du nombre $1 + x$, i doit être un nombre infiniment grand; car autrement $i\omega$ ne pourroit avoir une valeur finie.

119. Ayant fait $(1 + k\omega)^i = 1 + x$; $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$, & $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$; d'où $i\omega = \frac{i}{k}\left[(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right]$. Or $i\omega = l(1 + x)$; donc $l(1 + x) = \frac{i}{k}(1 + x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, i étant ſuppoſé

infiniment grand; mais $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i.\,2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i.\,2i.\,3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i.\,2i.\,3i\,4i}x^4 +$ &c; & à cause de i infiniment grand $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$ &c. Donc $i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ &c, & par conséquent $l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.\right)$, a étant toujours la base logarithmique, & k désignant le nombre relatif à cette base, de maniere qu'on ait l'équation $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} +$ &c.

120. Puisque nous avons trouvé une série égale au logarithme du nombre $1+x$, nous pourrons à son aide, la base a étant donnée, représenter la valeur du nombre k. En effet, supposons $1+x=a$, à cause de $la = 1$, nous aurons $1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c.\right)$ & par conséquent $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} +$ &c. Série infinie, dont la valeur, en faisant $a = 10$, devra être à-peu-près $= 2{,}30258$, quoiqu'il soit difficile de concevoir que $2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} +$ &c; parce que les termes de cette série vont toujours en augmentant, & qu'il ne suffit pas par conséquent d'en calculer quelques-uns pour en obtenir une valeur approchée. Nous remédierons tout-à-l'heure à cet inconvénient.

121. Si $l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c.\right)$; en faisant x négative, $l(1-x) = -\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \&c.\right)$; & ôtant la seconde suite de la premiere; $l(1+x) - l(1-x) = l\,\frac{1+x}{1-x} =$

$\frac{2}{k}$

$\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\&c.\right)$. Soit maintenant $\frac{1+x}{1-x}=a$, de maniere que $x=\frac{a-1}{a+1}$, à cauſe de $la=1$, $k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\&c.\right)$; équation qui donne la valeur du nombre k, lorſqu'on connoît celle de la baſe a. Ainſi en faiſant $a=10$, on aura $k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+\&c.\right)$; ſérie aſſez convergente, pour qu'on en puiſſe tirer promptement la valeur approchée de k.

122. Comme on peut prendre à volonté la baſe a pour établir un ſyſtême de logarithmes, nous pourrons la prendre telle, que k devienne $=1$. Suppoſons donc $k=1$; la ſérie trouvée ci-deſſus (*art.* 116) deviendra $a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\&c$, dont les termes convertis en décimales, & ajoutés donnent pour a cette valeur 2,71828182845904523536028, dont le dernier chiffre eſt encore exact. Les logarithmes calculés ſur cette baſe, s'appellent Logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*, parce qu'ils peuvent repréſenter la quadrature de l'hyperbole. Au reſte, pour abréger nous déſignerons conſtamment ce nombre 2,718281828459 &c. par la lettre e, qui indiquera par conſéquent la baſe des logarithmes naturels ou hyperboliques, à laquelle répond la valeur de $k=1$; c'eſt-à-dire, que cette lettre e exprimera la ſomme de la ſérie $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\&c.$ continuée à l'infini. (q)

123. Telle eſt donc la propriété des logarithmes hyperboliques, que celui du nombre $1+\omega=\omega$; ω ſignifiant une quantité infiniment petite, &, comme en vertu de cette propriété, $k=1$, on pourra obtenir les logarithmes hyperboliques de tous les nombres. Ainſi, en écrivant e à la place du nombre trouvé ci-deſſus, on aura toujours $e^z=1+\frac{z}{1}$

$+ \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} +$ &c. Quant aux logarithmes hyperboliques, on les calculera au moyen des ſéries $l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c; & $l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} +$ &c; leſquelles ſeront très convergentes, ſi l'on prend pour x une fraction très-petite. Ainſi avec la derniere ſérie on trouvera ſans peine les logarithmes des nombres, qui ne ſont pas beaucoup plus grands que l'unité. En effet, en faiſant $x = \frac{1}{5}$, on aura $l\frac{6}{4} = l\frac{3}{2} = \frac{2}{1.5} + \frac{2}{3.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \frac{2}{7.3^7} +$ &c: en faiſant $x = \frac{1}{7}$, on trouvera $l\frac{4}{3} = \frac{2}{1.7} + \frac{2}{3.7^2} + \frac{2}{5.7^3} + \frac{2}{7.7^5} +$ &c, & en faiſant $x = \frac{1}{9}$, on obtiendra pareillement $l\frac{5}{4} = \frac{2}{1.9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \frac{2}{7.9^7} +$ &c. Or les logarithmes de ces fractions feront trouver ceux des nombres entiers; car par la nature des logarithmes $l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = l2$; alors $l\frac{3}{2} + l2 = l3$, & $2\,l2 = l4$. Enſuite $l\frac{5}{4} + l4 = l5$; $l2 + l3 = l6$; $3\,l2 = l8$; $2\,l3 = l9$, & $l2 + l5 = l10$.

E X E M P L E.

Voici calculés d'après ces principes les logarithmes hyperboliques des nombres depuis 1 juſqu'à 10.

l	1	=	0, 0000000000000000000000000
l	2	=	0, 6931471805599453094172321
l	3	=	1, 0986122886681096913952452
l	4	=	1, 3862943611198906188344642
l	5	=	1, 6094379124341003746007593
l	6	=	1, 7917594692280550008124773
l	7	=	1, 9459101490553133051054639
l	8	=	2, 0794415416798359282516964
l	9	=	2, 1972245773362193827904905
l	10	=	2, 3025850929940456840179914.

J'ai déduit tous ces logarithmes des trois ſéries précédentes excepté $l7$, que j'ai calculé de cette maniere : j'ai fait dans la derniere ſérie $x = \frac{1}{99}$ & j'ai obtenu $l\frac{100}{98} = l\frac{50}{49} = 0{,}02020270731751944840078230$, lequel étant ſouſtrait de $l50 = 2l5 + l2 = 3{,}9120230054281460586187508$, donne pour reſte $l49$, dont la moitié donne $l7$.

124. Faiſons le logarithme hyperbolique de $1 + x$ ou $l(1+x) = y$, nous aurons $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ &c. Prenons à préſent le nombre a pour la baſe logarithmique, & ſoit dans cette hypotheſe, $= v$ le logarithme du même nombre $1 + x$, nous aurons, comme nous l'avons vu, $v = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.\right) = \frac{y}{k}$. Donc $k = \frac{y}{v}$; ce qui fournit un moyen très-commode de déterminer la valeur de k correſpondante à la baſe a, puiſqu'elle ſe trouve égale au logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque, diviſé par le logarithme du même nombre formé ſur la baſe a. Ainſi, en ſuppoſant ce nombre $= a$, on aura $v = 1$, & par conſéquent $k =$ au logarithme hyperbolique de la baſe a. Donc dans le ſyſtême des logarithmes ordinaires, où $a = 10$, k ſera $=$ au logarithme hyperbolique de 10, ou $k = 2{,}30258509299404568401799914$; valeur dont nous avions déja approché d'aſſez près. Si donc on diviſe tous les logarithmes hyperboliques par ce nombre k, ou ce qui revient au même, ſi on les multiplie par la fraction décimale $0{,}43429448190325182765112289$, on aura les logarithmes ordinaires, qui conviennent à la baſe $a = 10$.

125. Puiſque $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} +$ &c; ſi l'on ſuppoſe $a^y = e^z$; on aura, en prenant les logarithmes hyperboliques, $y\,la = z$, à cauſe de $le = 1$. Cette valeur ſubſtituée à z donnera $a^y = 1 + \frac{y\,la}{1} + \frac{y^2(la)^2}{1.2} + \frac{y^3(la)^3}{1.2.3} +$ &c. Donc une quantité exponentielle quelconque peut être con-

vertie en une série infinie, à l'aide des logarithmes hyperboliques; mais aussi, i désignant un nombre infiniment grand, les quantités exponentielles & les logarithmes peuvent être représentés par des puissances. En effet, $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, & par conséquent $a^y = \left(1 + \frac{y\,l\,a}{i}\right)^i$; d'ailleurs, on a pour les logarithmes hyperboliques $l\,(1 + x) = i\left[(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right]$. Au surplus, l'usage des logarithmes est démontré plus en détail dans le calcul intégral.

CHAPITRE VIII.

Des Quantités transcendantes qui naissent du Cercle.

126. Après la considération des logarithmes & des quantités exponentielles, vient celle des arcs de cercle, & de leurs sinus & cosinus, tant parce qu'ils forment une autre espece de quantités transcendantes, que parce qu'ils dérivent des quantités logarithmiques mêmes & des quantités exponentielles, lorsqu'elles renferment des imaginaires, ce qu'on verra plus clairement ci-après.

Supposons donc le rayon du cercle ou le sinus total $= 1$, il paroît assez clair que la circonférence de ce cercle ne peut être exprimée exactement en nombres rationnels *, mais on a trouvé par approximation la demi-circonférence de ce cercle $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3, 14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384446 +. Pour abréger j'é-

* Cette proposition a été démontrée par Lambert, *Mémoires de Berlin*; mais on en trouvera une démonstration plus simple dans les *Élémens de Géométrie* du C. Legendre, qui ont paru depuis peu.

crirai π au lieu de ce nombre, de ſorte que $\pi =$ à la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; ou π ſera la longueur d'un arc de 180 degrés.

127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je ſuppoſe toujours le rayon $= 1$; on a coutume de conſidérer plus particuliérement les ſinus & coſinus de cet arc z. Pour repréſenter dans la ſuite le ſinus d'un arc z, j'écrirai *ſin.* $A.z$, ou ſimplement *ſin.* z. Et pour repréſenter le coſinus j'écrirai *coſ.* $A\,z$, ou ſeulement *coſ.* z. Ainſi comme π exprime un arc de 180°, $\textit{ſin.}\, 0\pi = 0$; $\textit{coſ.}\, 0\pi = 1$; $\textit{ſin.}\, \frac{1}{2}\pi = 1$; $\textit{coſ.}\, \frac{1}{2}\pi = 0$; $\textit{ſin.}\, \pi = 0$, $\textit{coſ.}\, \pi = -1$; $\textit{ſin.}\, \frac{3}{2}\pi = -1$, $\textit{coſ.}\, \frac{3}{2}\pi = 0$; $\textit{ſin.}\, 2\pi = 0$, & $\textit{coſ.}\, 2\pi = 1$. Tous les ſinus & coſinus ſont donc renfermés dans les limites $+1$ & -1. Or $\textit{coſ.}\, z = \textit{ſin.}\, (\frac{1}{2}\pi - z)$ & $\textit{ſin.}\, z = \textit{coſ.}\, (\frac{1}{2}\pi - z)$; & $(\textit{ſin.}\, z)^2 + (\textit{coſ.}\, z)^2 = 1$. Outre ces dénominations il faut diſtinguer celles-ci: *tang.* z, qui déſigne la tangente de l'arc z, & *cot.* z, qui déſigne la cotangente de l'arc z; on ſait d'ailleurs que $\textit{tang.}\, z = \frac{\textit{ſin.}\, z}{\textit{coſ.}\, z}$, & que $\textit{cot.}\, z = \frac{\textit{coſ}\, z}{\textit{ſin.}\, z} = \frac{1}{\textit{tang.}\, z}$. Tout cela eſt connu par la Trigonométrie.

128. On ſait auſſi qu'étant donnés les deux arcs y & z, $\textit{ſin.}\, (y + z) = \textit{ſin.}\, y.\, \textit{coſ.}\, z + \textit{coſ.}\, y.\, \textit{ſin}\, z$, & $\textit{coſ.}\, (y + z) = \textit{coſ.}\, y.\, \textit{coſ}\, z - \textit{ſin.}\, y.\, \textit{ſin}\, z$; de même $\textit{ſin.}\, (y - z) = \textit{ſin.}\, y.\, \textit{coſ.}\, z - \textit{coſ.}\, y.\, \textit{ſin.}\, z$; & $\textit{coſ.}\, (y - z) = \textit{coſ.}\, y.\, \textit{coſ.}\, z + \textit{ſin.}\, y.\, \textit{ſin.}\, z$.

Par conſéquent, en ſubſtituant à y les arcs $\frac{1}{2}\pi$, π; $\frac{3}{2}\pi$, &c. nous obtiendrons

$\textit{ſin.}\, (\frac{1}{2}\pi + z) = +\, \textit{coſ.}\, z$	$\textit{ſin.}\, (\frac{1}{2}\pi - z) = +\, \textit{coſ.}\, z$
$\textit{coſ.}\, (\frac{1}{2}\pi + z) = -\, \textit{ſin.}\, z$	$\textit{coſ.}\, (\frac{1}{2}\pi - z) = +\, \textit{ſin.}\, z$
$\textit{ſin.}\, (\pi + z) = -\, \textit{ſin.}\, z$	$\textit{ſin.}\, (\pi - z) = +\, \textit{ſin.}\, z$
$\textit{coſ.}\, (\pi + z) = -\, \textit{coſ.}\, z$	$\textit{coſ.}\, (\pi - z) = -\, \textit{coſ.}\, z$
$\textit{ſin.}\, (\frac{3}{2}\pi + z) = -\, \textit{coſ.}\, z$	$\textit{ſin.}\, (\frac{3}{2}\pi - z) = -\, \textit{coſ.}\, z$
$\textit{coſ.}\, (\frac{3}{2}\pi + z) = +\, \textit{ſin.}\, z$	$\textit{coſ.}\, (\frac{3}{2}\pi - z) = -\, \textit{ſin.}\, z$
$\textit{ſin.}\, (2\pi + z) = +\, \textit{ſin.}\, z$	$\textit{ſin.}\, (2\pi - z) = -\, \textit{ſin.}\, z$
$\textit{coſ.}\, (2\pi + z) = +\, \textit{coſ.}\, z$	$\textit{coſ.}\, (2\pi - z) = +\, \textit{coſ.}\, z$

Donc si n désigne un nombre entier quelconque, on verra que . . . .

$\sin.\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = + \cos. z$	$\sin.\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = + \cos. z$
$\cos.\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = - \sin. z$	$\cos.\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = + \sin. z$
$\sin.\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = - \sin. z$	$\sin.\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = + \sin. z$
$\cos.\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = - \cos. z$	$\cos.\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = - \cos. z$
$\sin.\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = - \cos. z$	$\sin.\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) = - \cos. z$
$\cos.\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = + \sin. z$	$\cos.\left(\frac{4n+3}{2}\pi = z\right) = - \sin z$
$\sin.\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) = + \sin. z$	$\sin.\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) = - \sin. z$
$\cos.\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) = + \cos. z$	$\cos.\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) = + \cos. z$

Ces formules sont également vraies, n étant un nombre entier positif ou négatif.

129. Soit $\sin z = p$, & $\cos. z = q$, $\sin. y = m$, $\cos. y = n$; on aura également $pp + qq = 1$, $mm + nn = 1$; & les sinus & les cosinus des arcs composés de ceux-ci se trouvent comme il suit:

$\sin. z = p$	$\cos. z = q$
$\sin.(y + z) = mq + np$	$\cos.(y + z) = nq - mp$
$\sin.(2y + z) = 2mnq + (n^2 - m^2)p$	$\cos.(2y + z) = (nn - mm)q - 2mnp$
$\sin.(3y + z) = (3mn^2 - m^3)q +$ $(n^3 - 3m^2n)p$	$\cos.(3y + z) = (n^3 - 3m^2n)q -$ $(3mn^2 - m^3)p$
&c.	&c.

Ces arcs $z, y + z, 2y + z, 3y + z$, &c. croissent en progression arithmétique, & leur sinus & cosinus forment une progression récurrente, telle qu'elle résulteroit du dénominateur $1 - 2nx + (mm + nn)xx$; en effet

$\sin.(2y + z) = 2n \sin.(y + z) - (mm + nn)\sin. z$ ou

$\sin.(2y + z) = 2\cos. y. \sin.(y + z) - \sin. z$; semblablement

$cof.(2y + z) = 2\, cof.y.\, cof.(y + z) - cof.\, z.$ De même

$fin.(3y + z) = 2\, cof.y.\, fin.(2y + z) - fin.(y + z)$ &

$cof.(3y + z) = 2\, cof.y.\, cof.(2y + z) - cof.(y + z).$ De plus

$fin.(4y + z) = 2\, cof.y.\, fin.(3y + z) - fin.(2z + z)$ &

$cof.(4y + z) = 2\, cof.y.\, cof.(3y + z) - cof.(2y + z)$ &c.

En fuivant cette loi on pourra former promptement les finus & les cofinus de tant d'arcs qu'on voudra, qui croiffent en progreffion arithmétique.

130. A caufe de $fin.(y + z) = fin.y.\, cof.z + cof.y.\, fin.z$ & de $fin.(y + z) = fin.y.\, cof.z - cof.y.\, fin.z$, on aura, en ajoutant ou en fouftrayant, ces expreffions,

$$fin.y.\, cof.z = \frac{fin.(y + z) + fin.(y - z)}{2}.$$

$$cof.y.\, fin.z = \frac{fin.(y + z) - fin.(y - z)}{2}.$$

De plus à caufe de $cof.(y + z) = cof.y.\, cof.z - fin.y.\, fin.z$, & de $cof.(y - z) = cof.y.\, cof.z + fin.y.\, fin.z$, on aura femblablement

$$cof.y.\, cof.z = \frac{cof.(y - z) + cof.(y + z)}{2}.$$

$$fin.y.\, fin.z = \frac{cof.(y - z) - cof.(y + z)}{2}.$$

Soit $y = z = \frac{1}{2}v$, on conclura de ces dernieres formules :

$$(cof.\tfrac{1}{2}v)^2 = \frac{1 + cof.v}{2}, \ \& \ cof.\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 + cof.v}{2}}.$$

$$(fin.\tfrac{1}{2}v)^2 = \frac{1 - cof.v}{2}, \ \& \ fin.\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 - cof.v}{2}}.$$

donc le cofinus d'un angle quelconque étant donné, on trouvera le finus & le cofinus de fa moitié.

131. Suppofons l'arc $y + z = a$, & $y - z = b$, nous aurons $y = \frac{a + b}{2}$, & $z = \frac{a - b}{2}$, & en fubftituant dans les formules précédentes, nous obtiendrons, comme autant de théoremes, les équations fuivantes :

$$fin.a + fin.b = 2\, fin.\frac{a + b}{2}.\, cof.\frac{a - b}{2}$$

$$fin.a - fin.b = 2\, cof.\frac{a + b}{2}\, fin.\frac{a - b}{2}$$

$$cof.\, a + cof.\, b = 2\, cof.\, \frac{a+b}{2}\; cof.\, \frac{a-b}{2}$$

$$cof.\, b - cof.\, a = 2\, fin.\, \frac{a+b}{2}\; fin.\, \frac{a-b}{2}$$

Ces réfultats nous donneront, à l'aide de la divifion, ces théoremes :

$$\frac{fin.\, a + fin.\, b}{fin.\, a - fin.\, b} = tang.\, \frac{a+b}{2} .\, cot.\, \frac{a-b}{2} = \frac{tang.\, \frac{a+b}{2}}{tang.\, \frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{fin.\, a + fin.\, b}{cof.\, a + cof.\, b} = tang.\, \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{fin.\, a + fin.\, b}{cof.\, b - cof.\, a} = cot.\, \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{fin.\, a - fin.\, b}{cof.\, a + cof.\, b} = tang.\, \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{fin.\, a - fin.\, b}{cof.\, b - cof.\, a} = cot.\, \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{cof.\, a + cof.\, b}{cof.\, b - cof.\, a} = cot.\, \frac{a+b}{2} .\, cot.\, \frac{a-b}{2}$$

Enfin de ces derniers théoremes nous déduirons ceux-ci :

$$\frac{fin.\, a + fin.\, b}{cof.\, a + cof.\, b} = \frac{cof.\, b - cof.\, a}{fin.\, a - fin.\, b}$$

$$\frac{fin.\, a + fin.\, b}{fin.\, a - fin.\, b} \times \frac{cof.\, a + cof.\, b}{cof.\, b - cof.\, a} = \left(cot.\, \frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\frac{fin.\, a + fin.\, b}{fin.\, a - fin.\, b} \times \frac{cof.\, b - cof.\, a}{cof.\, a + cof.\, b} = \left(tang.\, \frac{a+b}{2}\right)^2$$

112. Puifque $(fin.\, z)^2 + (cof.\, z)^2 = 1$, en décompofant en facteurs, on aura $(cof.\, z + \sqrt{-1}.\, fin.\, z)\,(cof.\, z - \sqrt{-1}\, fin.\, z) = 1$. Ces facteurs, quoique imaginaires, font d'un grand ufage dans la combinaifon & dans la multiplication des arcs. En effet, cherchons le produit de ces facteurs $(cof.\, z + \sqrt{-1}\, fin.\, z)\;(cof\, y + \sqrt{-1}.\, fin.\, y)$, nous trouverons $cof.\, y.\, cof.\, z - fin.\, y.\, fin\, z + (cof.\, y.\, fin.\, z + fin.\, y.\, cof.\, z)\sqrt{-1}$; mais comme $cof.\, y.\, cof.\, z - fin.\, y.\, fin.\, z = cof.\, (y + z)$, & $cof.\, y.\, fin.\, z + fin.\, y.\, cof.\, z = fin.\, (y + z)$; nous obtiendrons ce produit $(cof.\, y + \sqrt{-1}.\, fin.\, y)$

$(cof.\, z$

$(cos. z + \sqrt{-1}. sin. z) = cos. (y + z) + \sqrt{-1}. sin. (y + z).$

Semblablement

$(cos. y - \sqrt{-1}. sin. y)(cos. z - \sqrt{-1}. sin. z) = cos. (y + z) - \sqrt{-1}. sin. (y + z).$

De même

$(cos. x \pm \sqrt{-1}. sin. x)(cos. y \pm \sqrt{-1}. sin. y)(cos. z \pm \sqrt{-1}. sin. z) = cos. (x + y + z) \pm \sqrt{-1}. sin. (x + y + z).$

133. Il suit de-là que $(cos. z \pm \sqrt{-1}. sin. z)^2 = cos. 2z \pm \sqrt{-1}. sin. 2z$, & $(cos. z \pm \sqrt{-1}. sin z)^3 = cos. 3z \pm \sqrt{-1}. sin. 3z$; & qu'en général $(cos. z \pm \sqrt{-1}. sin. z)^n = cos. nz \pm \sqrt{-1}. sin. nz$: d'où nous tirerons à cause du double signe,

$$cos. nz = \frac{(cos. z + \sqrt{-1}. sin. z)^n + (cos. z - \sqrt{-1}. sin. z)^n}{2} \quad \&$$

$$sin. nz = \frac{(cos. z + \sqrt{-1}. sin. z)^n - (cos. z - \sqrt{-1}. sin. z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc en développant ces binomes en séries, nous aurons

$$cos. nz = (cos. z)^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}(cos. z)^{n-2}(sin\ z)^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(cos. z)^{n-4}(sin. z)^4 - \ldots \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}(cos. z)^{n-6}(sin. z)^6 + \&c.$$

$$\& \ sin. nz = \frac{n}{1}(cos. z)^{n-1} sin. z - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}(cos. z)^{n-3}(sin. z)^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}(cos. z)^{n-5}(sin. z)^5 - \&c.$$

134. Soit z un arc infiniment petit, alors $sin. z = z$, & $cos. z = 1$; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz, par exemple, $= v$; à cause de $sin. z = z = \frac{v}{n}$, on aura

$$cos. v = 1 - \frac{v^2}{1.\ 2} + \frac{v^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{v^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \&c. \ \&$$

$$\mathit{fin.}\ v = v - \frac{v^3}{1.\,2.\,3} + \frac{v^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \frac{v^7}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\ 6.\,7} + \&c.$$

Ainſi l'arc v étant donné, on pourra, à l'aide de ces ſéries, trouver ſon ſinus & ſon coſinus. Pour rendre l'uſage de ces formules plus général, ſuppoſons que l'arc v ſoit au quart de la circonférence ou à 90°, comme m eſt à n, ou que $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$; comme la valeur de π eſt connue, en la ſubſtituant dans tous les termes, on trouvera

$$\mathit{fin.}\ \mathrm{A}\ \frac{m}{n}\ 90^\circ =$$

$$+ \frac{m}{n}.\ 1,5707963267948966192313216916$$
$$- \frac{m^3}{n^3}.\ 0,6459640975062462536557565636$$
$$+ \frac{m^5}{n^5}.\ 0,0796926262461670451205055488$$
$$- \frac{m^7}{n^7}.\ 0,0046817541353186881006854632$$
$$+ \frac{m^9}{n^9}.\ 0,0001604411847873598218726605$$
$$- \frac{m^{11}}{n^{11}}.\ 0,0000035988432352120853404580$$
$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}}.\ 0,0000000569217292196792681171$$
$$- \frac{m^{15}}{n^{15}}.\ 0,0000000006688035109811467224$$
$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}}.\ 0,0000000000060669357311061950$$
$$- \frac{m^{19}}{n^{19}}.\ 0,0000000000000437706546731370$$
$$+ \frac{m^{21}}{n^{21}}.\ 0,0000000000000002571422892856$$
$$- \frac{m^{23}}{n^{23}}.\ 0,0000000000000000012538995403$$
$$+ \frac{m^{25}}{n^{25}}.\ 0,0000000000000000000051564550$$
$$- \frac{m^{27}}{n^{27}}.\ 0,0000000000000000000000181239$$
$$+ \frac{m^{29}}{n^{39}}.\ 0,0000000000000000000000000549$$

Et $cos.\ A\ \frac{m}{n}\ 90^\circ =$

$+$		$1{,}0000000000000000000000000000$
$-$	$\frac{m^2}{n^2}.$	$1{,}2337005501361698273543113745$
$+$	$\frac{m^4}{n^4}.$	$0{,}2536695079010480136365633659$
$-$	$\frac{m^6}{n^6}.$	$0{,}0208634807633529608730516364$
$+$	$\frac{m^8}{n^8}.$	$0{,}0009192602748394265802417158$
$-$	$\frac{m^{10}}{n^{10}}.$	$0{,}0000252020423730606054810526$
$+$	$\frac{m^{12}}{n^{12}}.$	$0{,}0000004710874778818171503665$
$-$	$\frac{m^{14}}{n^{14}}.$	$0{,}0000000063866030837918522408$
$+$	$\frac{m^{16}}{n^{16}}.$	$0{,}0000000000656596311497947230$
$-$	$\frac{m^{18}}{n^{18}}.$	$0{,}0000000000000529440020073462 0$
$+$	$\frac{m^{20}}{n^{20}}.$	$0{,}0000000000000034377391790981$
$-$	$\frac{m^{22}}{n^{22}}.$	$0{,}0000000000000000183599165212$
$+$	$\frac{m^{24}}{n^{24}}.$	$0{,}0000000000000000000820675327$
$-$	$\frac{m^{26}}{n^{26}}.$	$0{,}0000000000000000000003115285$
$+$	$\frac{m^{28}}{n^{28}}.$	$0{,}0000000000000000000000010165$
$-$	$\frac{m^{30}}{n^{30}}.$	$0{,}0000000000000000000000000026$

Mais comme il suffit de connoître les sinus & les cosinus des angles jusqu'à 45°, la fraction $\frac{m}{n}$ sera toujours plus petite que $\frac{1}{2}$, & par conséquent à cause des puissances de la fraction $\frac{m}{n}$, les séries que nous venons de donner, seront très-convergentes, de sorte qu'il suffira le plus souvent d'en prendre seulement quelques termes, sur-tout si l'on n'exige pas pour les ſinus & les coſinus autant de figures.

135. Les ſinus & les coſinus étant une fois trouvés, on peut calculer les tangentes & les cotangentes par les analogies ordinaires; mais comme pour des nombres auſſi grands la multiplication & la diviſion ne laiſſent pas d'être très-fatigantes, il ſera bon d'en donner ici une expreſſion particuliere. On aura donc

$$tang.\, v = \frac{ſin.\ v}{coſ.\ v} = \frac{v - \frac{}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.}{1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.}$$

$$\& \ cot.\, v = \frac{coſ.\ v}{ſin.\ v} = \frac{1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.\ldots\ldots 6} + \&c.}{v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3\ldots\ldots 7} + \&c.}$$

Soit maintenant l'arc $v = \frac{m}{n}\ 90°$, on aura de la même maniere qu'auparavant,

$tang.\ A\ \frac{m}{n}\ 90° =$	$cot.\ A\ \frac{m}{n}\ 90° =$
$+ \frac{2mn}{nn-mm} \cdot 0{,}6366197723675$	$+ \frac{n}{m} \cdot 0{,}6366197723675$
$+ \frac{m}{n} \cdot 0{,}2975567820597$	$- \frac{4mn}{4nn-mm} \cdot 0{,}3183098861837$
$+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}0186886502773$	$- \frac{m}{n} \cdot 0{,}2052888894145$
$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}0018424752034$	$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}0065510747882$
$+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}0001975800714$	$- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}0003450292554$
$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}0000216977245$	$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}0000202791060$
$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}0000024011370$	$- \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}0000012366527$
$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}0000002664132$	$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}0000000764959$
$+ \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}0000000295864$	$- \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}0000000047597$

$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000032867$	$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000002969$
$+ \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000003651$	$- \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,000000000185$
$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0,0000000000405$	$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,00000000000011$
$+ \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0,0000000000045$	
$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0,0000000000005$	

On expliquera plus au long dans la suite la formation de ces dernieres séries. *Voyez art.* 197 *& suiv.*

136. Il suit de ce qui précede, que si l'on connoissoit les sinus & les cosinus des angles moindres que le demi-droit, on connoîtroit aussi ceux de tous les angles plus grands; mais il suffira de connoître les sinus & les cosinus des angles au-dessous de 30°, pour en conclure par l'addition & la soustraction seulement, les sinus & les cosinus des angles au-dessus. En effet, puisque $fin.\ 30° = \frac{1}{2}$, en faisant $y = 30$, on aura (*art.* 130) $cof.\ z = fin.\ (30 + z) + fin.\ (30 - z)$, & $fin.\ z = cof.\ (30 - z) - cof.\ (30 + z)$. Ainsi, au moyen des sinus & des cosinus des angles z & $30 - z$, on trouvera $fin.\ (30 + z) = cof.\ z - fin.\ (30 - z)$, & $cof.\ (30 + z) = cof.\ (30 - z) - fin.\ z$. Donc les sinus & les cosinus des angles depuis 30° jusqu'à 60°, & par conséquent ceux des arcs plus grands seront déterminés.

137. On peut jouir du même avantage pour le calcul des tangentes & des cotangentes. En effet, puisque $tang.\ (a + b) = \frac{tang.\ a + tang.\ b}{1 - tang.\ a.\ tang.\ b}$, on aura $tang.\ 2a = \frac{2\ tang.\ a}{1 - tang.\ a.\ tang.\ a}$ & $cot.\ 2a = \frac{cot.\ a - tang.\ a}{2}$. Par conséquent les tangentes & les cotangentes des arcs, qui sont au-dessous de 30°, donneront les cotangentes des arcs au-dessus jusqu'à 60°.

Soit à présent $a = 30 - b$, on aura $2a = 60 - 2b$,

& $cot. 2a = tang. (30 + 2b)$. Donc $tang. (30 + 2b) = \frac{cot. (30 - b) - tang. (30 - b)}{2}$; ce qui donne auſſi les tangentes des arcs plus grands que 30°.

Quant aux ſécantes & aux coſécantes, on les conclut des tangentes par la ſeule ſouſtraction; car on a $coséc. z = cot. \frac{1}{2} z - cot. z$, & partant $séc. z = cot. (45° - \frac{1}{2} z) - tang. z$. (r) On voit clairement par-là comment on a pu conſtruire des tables de ſinus.

138. Suppoſons encore dans les formules précédentes (*art.* 133) l'arc z infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i, afin d'obtenir pour iz une valeur finie v; nous aurons donc $nz = v$, & $z = \frac{v}{i}$, & par conſéquent $ſin. z = \frac{v}{i}$, & $coſ. z = 1$; ces ſubſtitutions faites donneront $coſ. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$ & $ſin. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$. Or dans le Chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$, e déſignant la baſe des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour z, d'une part $+ v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $- v\sqrt{-1}$, on aura

$$coſ. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \text{ \& } ſin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires ſe ramenent à des ſinus & à des coſinus d'arcs réels. On aura auſſi $e^{+v\sqrt{-1}} = coſ. v + \sqrt{-1}\, ſin. v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = coſ. v - \sqrt{-1}\, ſin. v$.

139. Suppoſons à préſent dans les mêmes formules (*art.* 133) n

un nombre infiniment petit, ou $n = \frac{1}{i}$, i étant un nombre (s) infiniment grand, nous aurons $cos.\, n z = cos.\, \frac{z}{i} = 1$, & $sin.\, n z = sin.\, \frac{z}{i} = \frac{z}{i}$; car le sinus d'un arc $\frac{z}{i}$, qui s'évanouit, est égal à cet arc, & son cosinus $= 1$. Cela posé nous aurons . . . .

$$1 = \frac{(cos.\, z + \sqrt{-1}.\, sin.\, z)^{\frac{1}{i}} + (cos.\, z - \sqrt{-1}.\, sin.\, z)^{\frac{1}{i}}}{2} \quad \& \quad . \quad .$$

$$\frac{z}{i} = \frac{(cos.\, z + \sqrt{-1}.\, sin.\, z)^{\frac{1}{i}} - (cos.\, z - \sqrt{-1}.\, sin.\, z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$ Or en prenant les logarithmes hyperboliques, nous avons fait voir (*art.* 125) que $l(1 + x) = i(1 + x)^{\frac{1}{i}} - i$, ou $y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}\, ly$, en mettant y à la place de $1 + x$. Donc si nous écrivons à présent au lieu de y, d'une part $cos.\, z + \sqrt{-1}.\, sin.\, z$, & de l'autre $cos.\, z - \sqrt{\ }1.\, sin.\, z$, nous trouverons $1 =$

$$\frac{1 + \frac{1}{i}\, l(cos.\, z + \sqrt{-1}\, sin.\, z) + 1 + \frac{1}{i}\, l(cos.\, z - \sqrt{-1}\, sin.\, z)}{2} = 1,$$

à cause des logarithmes qui deviennent nuls, de sorte que nous n'en pouvons rien conclure; mais l'autre équation, relative au sinus donne $\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i}\, l(cos.\, z + \sqrt{-1}\, sin.\, z) - \frac{1}{i}\, l(cos.\, z - \sqrt{-1}\, sin.\, z)}{2\sqrt{-1}}$

& par conséquent $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{cos.\, z + \sqrt{-1}\, sin.\, z}{cos.\, z - \sqrt{-1}\, sin.\, z}\right)$. On voit d'après cela comment les logarithmes imaginaires se ramenent aux arcs circulaires.

140. A cause de $\frac{sin.\, z}{cos.\, z} = tang.\, z$, on aura l'expression d'un arc z par sa tangente de cette maniere: $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{-1}.\, tang.\, z}{1 - \sqrt{-1}.\, tang.\, z}$. Or nous avons vu ci-dessus (*art.* 123) que $l\, \frac{1 + x}{1 - x} =$

$\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} +$ &c; donc en ſuppoſant $x = \sqrt{-1}\, tang.\, z$, nous aurons $z = \frac{tang.\, z}{1} - \frac{(tang.\, z)^3}{3} + \frac{(tang.\, z)^5}{5} - \frac{(tang.\, z)^7}{7} +$ &c. Faiſons donc $tang.\, z = t$, de ſorte que z ſoit l'arc dont la tangente eſt t, & que nous déſignerons ainſi: *A. tang.* t, ce qui donne $z = A\, tang.\, t$. La tangente t étant connue, l'arc correſpondant ſera $z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} -$ &c. Puis donc qu'en ſuppoſant la tangente t égale au rayon 1, l'arc z devient = à l'arc de 45° ou $z = \frac{\pi}{4}$, nous trouverons $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c; ſérie que LEIBNITZ a donnée le premier pour exprimer la valeur de la circonférence du cercle.

141. Mais pour obtenir promptement, au moyen d'une telle ſérie, la longueur d'un arc de cercle, il eſt clair qu'on doit prendre pour la tangente t une fraction aſſez petite. Ainſi, on trouveroit facilement, à l'aide de cette ſérie, la longueur de l'arc z, dont la tangente t feroit $\frac{1}{10}$; car cet arc feroit $z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000} -$ &c. ſérie dont on peut aiſément obtenir la valeur par le moyen des décimales; mais la meſure d'un tel arc n'apprendroit rien pour la longueur de toute la circonférence, parce que le rapport de l'arc, dont la tangente $= \frac{1}{10}$, à la circonférence entiere eſt inaſſignable. C'eſt pourquoi, dans cette recherche, on doit prendre un arc qui ſoit une partie aliquote de la circonférence, & dont la tangente aſſez petite puiſſe être exprimée commodément. On choiſit ordinairement pour remplir ce but l'arc de 30° dont la tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, parce que les tangentes des arcs plus petits, qui ont un rapport commenſurable avec la circonférence, ſont trop irrationnelles.

Ainſi

Ainsi, à cause de l'arc de $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, on aura $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}} - \&c.$ & $\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3} + \&c.$ Et c'est par le moyen de cette série, & avec un travail incroyable, qu'on est venu à bout de trouver la valeur de π que nous avons donnée ci dessus.

142. Ce calcul est d'autant plus pénible, que tous les termes sont irrationnels, & que chacun d'eux n'est gueres plus petit, que le tiers de celui qui précede; mais on pourra remédier ainsi à cet inconvénient: prenons toujours l'arc de 45° ou $\frac{\pi}{4}$. Quoique cet arc ait une valeur exprimée par une série à peine convergente $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c$; conservons-le cependant, & imaginons-le partagé en deux arcs a & b, de maniere que $a + b = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Puis donc que $tang.(a+b) = 1 = \frac{tang.\, a + tang.\, b}{1 - tang.\, a\; tang.\, b}$, nous aurons $1 - tang.\, a\; tang.\, b = tang.\, a + tang.\, b$ & $tang.\, b = \frac{1 - tang.\, a}{1 + tang.\, a}$. Soit maintenant $tang.\, a = \frac{1}{2}$; nous trouverons $tang.\, b = \frac{1}{3}$; alors les deux arcs a & b seront exprimés par une série rationnelle beaucoup plus convergente que la précédente, & leur somme donnera la valeur de l'arc $\frac{\pi}{4}$. Donc . . . .

$$\pi = 4\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \&c. \\ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \&c. \end{array}\right\}$$

On auroit donc pu trouver de cette maniere la longueur de la demi-circonférence beaucoup plus promptement qu'on ne l'a fait, en se servant de la série que nous avons donnée auparavant.

CHAPITRE IX.

De la recherche des Facteurs trinomes.

143. Nous avons fait voir auparavant que c'étoit par la résolution des équations qu'on trouvoit les facteurs simples de chaque fonction entiere. En effet, soit proposée la fonction entiere $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 +$ &c, & cherchons-en les facteurs simples de la forme $p - qz$, il est évident que si $p - qz$ est un facteur de la fonction $\alpha + \beta z + \gamma z^2 +$ &c, en faisant $z = \frac{p}{q}$, qui est le cas ou $p - qz = 0$, la fonction proposée doit aussi devenir égale à zéro; d'où il suit que si $p - qz$ est un facteur ou un diviseur de la fonction $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 +$ &c, cette expression $\alpha + \beta\frac{p}{q} + \gamma\frac{p^2}{q^2} + \delta\frac{p^3}{q^3} + \varepsilon\frac{p^4}{q^4} +$ &c. $= 0$. Donc réciproquement si l'on tire toutes les racines $\frac{p}{q}$ de cette équation, elles donneront chacune autant de facteurs simples de la fonction entiere proposée $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 +$ &c, savoir $p - qz$. Or il est visible en même-temps que le nombre de ces facteurs s'estime par la plus grande puissance de z.

144. Il y a souvent de la difficulté à trouver de cette maniere les facteurs imaginaires; c'est pourquoi je vais donner dans ce Chapitre une méthode particuliere, au moyen de laquelle on pourra trouver dans bien des cas les facteurs simples imaginaires. Or la nature des facteurs simples imaginaires étant telle, que le produit de deux d'entr'eux soit réel, nous les trouverons tous, en cherchant les facteurs doubles, ou de la forme $p - qz + rzz$, qui soient réels,

mais dont les facteurs simples soient imaginaires ; car il est clair que connoissant une fois tous les facteurs doubles trinomes de la forme $p - qz + rzz$, que renferme la fonction $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 +$ &c; on aura en même-temps tous les facteurs imaginaires.

145. Or le trinome $p - qz + rzz$ aura des facteurs simples imaginaires si $4pr > qq$, ou $\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1$. Mais comme les sinus & les cosinus des angles sont plus petits que l'unité, la formule $p - qz + rzz$ aura des facteurs simples imaginaires, si $\frac{q}{2\sqrt{pr}} =$ au sinus ou au cosinus d'un angle quelconque. Soit donc $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = cos. A\phi$, ou $q = 2\sqrt{pr}.\ cos.\phi$, & le trinome $p - qz + rzz$ renfermera des facteurs simples imaginaires; mais pour n'être gêné par aucun signe radical, je choisis cette forme $pp - 2pqz.\ cos.\phi + qqzz$, dont les facteurs imaginaires simples seront ceux-ci : $qz - p\,(cos.\phi + \sqrt{-1}\,sin.\phi)$ & $qz - p\ cos.\phi - \sqrt{-1}\,sin.\phi)$. On voit par-là que si $cos.\phi = \pm 1$, les deux facteurs, à cause de $sin.\ \phi = 0$, deviennent égaux & réels.

146. Étant donc proposée la fonction entiere $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 +$ &c, on en connoîtra les facteurs simples imaginaires, si on détermine les lettres p & q avec l'angle ϕ, de maniere que ce trinome $pp - 2pqz\ cos.\phi + qqzz$ soit facteur de la fonction. Car alors on aura pour ces facteurs simples imaginaires : $qz - p\,(cos.\phi + \sqrt{-1}.\,sin.\phi)$ & $qz - p\,(cos.\phi - \sqrt{-1}\,sin.\phi)$. Par conséquent la fonction proposée se réduira à zéro, en faisant $z = \frac{p}{q}(cos.\phi + \sqrt{-1})sin.\phi$, & $z = \frac{p}{q}(cos.\phi - \sqrt{-1}.sin.\phi)$. Cette double substitution donnera donc deux équations, au moyen desquelles on pourra déterminer, & la fraction $\frac{p}{q}$ & l'arc ϕ.

147. Mais, quoique ces substitutions, qu'on doit faire à la place de z paroissent difficiles de prime-abord, cependant à l'aide des principes établis dans le Chapitre précédent, on

pourra les effectuer assez promptement; car ayant fait voir que $(\cos.\,\varphi \pm \sqrt{-1}\,\sin.\,\varphi)^n = \cos\,n\,\varphi \pm \sqrt{-1}.\,\sin\,n\,\varphi$, il n'y aura plus qu'à écrire les formules suivantes au lieu des différentes puissances de z.

Pour le premier Facteur	Pour le second Facteur
$z = \frac{p}{q}\left(\cos.\,\varphi + \sqrt{-1}\,\sin.\,\varphi\right)$	$z = \frac{p}{q}\left(\cos.\,\varphi - \sqrt{-1}\,\sin.\,\varphi\right)$
$z^2 = \frac{p^2}{q^2}\left(\cos.\,2\,\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\,2\,\varphi\right)$	$z^2 = \frac{p^2}{q^2}\left(\cos.\,2\,\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\,2\,\varphi\right)$
$z^3 = \frac{p^3}{q^3}\left(\cos.\,3\,\varphi + \sqrt{-1}\,\sin.\,3\,\varphi\right)$	$z^3 = \frac{p^3}{q^3}\left(\cos.\,3\,\varphi - \sqrt{-1}\,\sin.\,3\,\varphi\right)$
$z^4 = \frac{p^4}{q^4}\left(\cos.\,4\,\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\,4\,\varphi\right)$	$z^4 = \frac{p^4}{q^4}\left(\cos.\,4\,\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\,4\,\varphi\right)$
&c.	&c.

Faisons, pour abréger, $\frac{p}{q} = r$, nous aurons, après la substitution faite, les deux équations suivantes.

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta\,r\cos.\,\varphi + \gamma\,r^2.\cos.\,2\,\varphi + \delta\,r^3\cos.\,3\,\varphi + \&c. \\ \quad + \beta\,r\sqrt{-1}\sin.\,\varphi + \gamma\,r^2\sqrt{-1}\sin.\,2\,\varphi + \delta\,r^3\sqrt{-1}\sin.\,3\,\varphi + \&c. \end{array}\right\}$$

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta\,r\cos.\,\varphi + \gamma\,r^2.\cos.\,2\,\varphi + \delta\,r^3.\cos\,3\,\varphi + \&c. \\ \quad - \beta\,r\sqrt{-1}\sin.\,\varphi - \gamma\,r^2.\sqrt{-1}\sin.\,2\,\varphi - \delta\,r^3\sqrt{-1}\sin.\,3\,\varphi - \&c. \end{array}\right\}$$

148. Si on ajoute ces deux équations, ou si on les retranche l'une de l'autre, & que dans le dernier cas on divise par $2\sqrt{-1}$, on obtiendra ces deux équations réelles :

$$0 = \alpha + \beta\,r\cos.\,\varphi + \gamma\,r^2.\cos.\,2\,\varphi + \delta\,r^3\cos.\,3\,\varphi + \&c.$$

$$0 = \quad \beta\,r\sin.\,\varphi + \gamma\,r^2\sin.\,2\,\varphi + \delta\,r^3\sin.\,3\,\varphi + \&c.$$

lesquelles peuvent se déduire immédiatement de la fonction proposée $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \&c$, en faisant d'abord pour chaque puissance de z, $z^n = r^n\cos.\,n\,\varphi$, & ensuite $z^n = r^n\sin.\,n\,\varphi$; car, de cette maniere, à cause de $\sin.\,0\,\varphi = 0$,

& de $cos. 0\,\phi = 1$, on écrit 1 dans le terme constant au lieu de z ou pour le premier cas, & pour le second on écrit 0. Si donc on tire de ces deux équations les valeurs des inconnues r & ϕ, à cause de $r = \frac{p}{q}$, on aura le facteur trinome $pp - 2pqz\, cos.\, \phi + qqzz$, qui renferme deux facteurs imaginaires simples.

149. Si l'on multiplie la premiere équation par $sin.\, m\,\phi$, & la seconde par $cos\, m\,\phi$, qu'on ajoute ou qu'on retranche les produits, on aura les équations :

$$0 = \alpha\, sin.\, m\phi + \beta r\, sin\,(m+1)\phi + \gamma r^2\, sin\,(m+2\phi) + \delta r^3\, sin.(m+3\phi) + \&c.$$
$$0 = \alpha\, sin.\, m\phi + \beta r\, sin.\,(m-1)\phi + \gamma r\, sin\,(m-2\phi) - \delta r^3\, sin.(m-3\phi) + \&c.$$

Mais si l'on multiplie la premiere par $cos.\, m\,\phi$ & la derniere par $sin.\, m\,\phi$, on trouvera par l'addition & par la soustraction ces deux autres :

$$0 = \alpha\, cos.\, m\phi + \beta r\, cos\,(m-1)\phi + \gamma r^2\, cos.\,(m-2\phi) + \delta r^3\, cos.\,(m-3\phi) + \&c.$$
$$0 = \alpha\, cos.\, m\phi + \beta r\, cos.\,(m+1)\phi + \gamma r^2\, cos.\,(m+2\phi) + \delta r^3\, cos.\,(m+3\phi) + \&c.$$

Ainsi deux des équations précédentes combinées entr'elles détermineront les inconnues r & ϕ, & comme cela peut se faire le plus souvent de plusieurs manieres, on obtiendra à la fois plusieurs facteurs trinomes, & par conséquent tous ceux que la fonction proposée renferme.

150. Pour faire mieux sentir l'usage de ces regles, nous allons chercher ici les facteurs trinomes de quelques fonctions qui se rencontrent plus fréquemment, afin de les avoir sur le champ, toutes les fois que l'occasion l'exigera. Soit donc proposée la fonction $a^n + z^n$ dont on cherche les facteurs trinomes de la forme $pp - 2pqz\, cos.\, \phi + qqzz$; en faisant $r = \frac{p}{q}$, on aura les deux équations $0 = a^n + r^n\, cos\, n\phi$ & $0 = r^n\, sin.\, n\,\phi$, dont la derniere donne $sin.\, n\,\phi = 0$. Donc l'arc $n\,\phi$ aura la forme $(2k+1)\,\pi$, ou $2k\pi$, k désignant un nombre entier. Je distingue ces deux cas, parce que les

cosinus y sont différents. En effet, dans le premier cas, $cos.\,(2k+1)\pi = -1$, & dans le second $cos.\,2k\pi = +1$. Or il est clair qu'on doit prendre la premiere forme $n\varphi = (2k+1)\pi$, parce qu'elle donne $cos.\,n\varphi = -1$, d'où résulte $a^n - r^n = 0$, & par conséquent $r = a = \frac{p}{q}$. Donc $p = a$, $q = 1$, & $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$. Donc la fonction $a^n + z^n$ aura pour facteur le trinome $aa - 2az\,cos.\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi + zz$, & comme on peut mettre pour k un nombre entier quelconque, on obtiendra de cette maniere plusieurs facteurs, dont le nombre cependant sera limité, puisqu'en supposant $2k+1$ plus grand que n, les premiers facteurs reviennent; c'est ce que les exemples rendront plus sensible, en observant que $cos.\,(2\pi \pm \varphi) = cos.\,\varphi$. De plus, si n est un nombre impair, en faisant $2k+1 = n$, il en résulte le facteur quarré $(a+z)^2$; cependant on auroit tort d'en conclure que le quarré $(a+z)^2$ soit un facteur de la fonction $a^n + z^n$, parce que (dans l'art. 148) on a pour résultat une équation unique, qui apprend seulement que $a + z$ est un diviseur
(t) de la formule $a^n + z^n$; cette regle devra toujours être observée, toutes les fois que $cos.\,\varphi$ devient ou $+1$ ou -1.

Exemple.

Développons quelques cas particuliers, pour mettre sous les yeux ces différents facteurs; & distinguons-les en deux classes, selon que le nombre n sera ou pair ou impair.

Si $n = 1$	Si $n = 2$
la formule	la formule
$a + z$	$a^2 + z^2$
a pour facteur	a pour facteur
$a + z$	$a^2 + z^2$.

Si $n = 3$ la formule $a^3 + z^3$ a pour facteurs $aa - 2az\,cos.\,\frac{1}{3}\pi + zz$ $a + z$	Si $n = 4$ la formule $a^4 + z^4$ a pour facteurs $aa - 2az\,cos.\,\frac{1}{4}\pi + zz$ $aa - 2az\,cos.\,\frac{3}{4}\pi + zz$
Si $n = 5$ la formule $a^5 + z^5$ a pour facteurs $aa - 2az\,cos.\,\frac{1}{5}\pi + zz$ $aa - 2az\,cos.\,\frac{3}{5}\pi + zz$ $a + z$	Si $n = 6$ la formule $a^6 + z^6$ a pour facteurs $aa - 2az\,cos.\,\frac{1}{6}\pi + zz$ $aa - 2az\,cos.\,\frac{3}{6}\pi + zz$ $aa - 2az\,cos.\,\frac{5}{6}\pi + zz$

On voit par ces exemples, qu'on trouve tous les facteurs en mettant à la place de $2k + 1$ tous les nombres impairs, qui ne sont pas plus grands que n, mais que dans le cas où il se trouve un facteur quarré, on ne doit tenir compte que de sa racine.

151. Soit proposée la fonction $a^n - z^n$; on aura pour déterminer le facteur trinome $pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz$, à cause de $r = \frac{p}{q}$, $0 = a^n - r^n\,cos.\,n\varphi$, & $0 = r^n\,sin.\,n\varphi$; on aura donc encore $sin.\,n\varphi = 0$, & par conséquent $n\varphi = (2k + 1)\pi$, ou, $n\varphi = 2k\pi$. Dans ce cas on doit prendre la seconde valeur, afin d'avoir $cos.\,n\varphi = + 1$; ce qui donne $0 = a^n - r^n$ & $r = \frac{p}{q} = a$. Donc $p = a$, $q = 1$, & $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$. Ainsi le facteur trinome de la formule proposée sera $= aa - 2az\,cos.\,\frac{2k}{n}\pi + zz$, expression qui, en supposant qu'on mette, au lieu de $2k$ tous les nombres pairs, qui ne sont pas plus grands que n, donnera

tous les facteurs à la fois ; mais il faudra faire ici à l'occasion des facteurs quarrés la même remarque que nous avons déja faite pour le cas précédent. D'abord la supposition de $k = 0$ donne le facteur $aa - 2az + zz$, pour lequel on doit prendre seulement sa racine $a - z$. Semblablement, n étant un nombre pair, la supposition de $2k = n$ donne le facteur $aa + 2az + zz$, qui nous apprend que $a + z$ est un diviseur de la formule $a^n - z^n$.

EXEMPLE.

En suivant le même procédé qu'auparavant, on obtiendra les résultats suivants, selon que l'exposant n sera un nombre ou impair ou pair.

Si $n = 1$ la formule $a - z$ a pour facteur $a - z$	Si $n = 2$ la formule $a^2 - z^2$ a pour facteurs $a - z$ $a + z$
Si $n = 3$ la formule $a^3 - z^3$ a pour facteurs $a - z$ $aa - 2az\, cos. \frac{2}{3}\pi + zz$	Si $n = 4$ la formule $a^4 - z^4$ a pour facteurs $a - z$ $aa - 2az\, cos. \frac{2}{4}\pi + zz$ $a + z$
Si $n = 5$ la formule $a^5 - z^5$ a pour facteurs $a - z$ $aa - 2az\, cos. \frac{2}{5}\pi + zz$ $aa - 2az\, cos. \frac{4}{5}\pi + zz$	Si $n = 6$ la formule $a^6 - z^6$ a pour facteurs $a - z$ $aa - 2az\, cos. \frac{2}{6}\pi + zz$ $aa - 2az\, cos. \frac{4}{6}\pi + zz$ $a + z$

152. On voit donc par-là se confirmer ce que nous avions avancé; savoir, que toute fonction entiere est décomposable, sinon en facteurs simples réels, au moins en facteurs doubles réels. Car nous venons de voir que cette fonction de dimension indéfinie $a^n \pm z^n$ peut toujours se résoudre en facteurs doubles réels, sans compter les facteurs simples réels. Passons donc à des fonctions plus composées, telles que $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$. Si cette fonction a deux facteurs de la forme $\eta + \theta z^n$, la décomposition, d'après ce qui précede, ne souffrira point de difficulté. Reste donc à enseigner la maniere de décomposer en facteurs réels, soit simples, soit doubles, la formule $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$ dans le cas où elle n'a pas deux facteurs réels de la forme $\eta + \theta z^n$.

153. Examinons donc cette fonction: $a^{2n} - 2a^n z^n \cos. g + z^{2n}$, laquelle ne peut se décomposer en deux facteurs réels de la forme $\eta + \theta n$. Si nous supposons le facteur double réel de cette fonction représenté par $pp - 2pq \cos. \varphi + qqzz$; en faisant $r = \frac{p}{q}$, nous aurons à résoudre les deux équations suivantes $0 = a^{2n} - 2a^n r^n \cos. g \cos. n\varphi + r^{2n} \cos. 2n\varphi$ & $0 = -2a^n r^n \cos. g \sin. n\varphi + r^{2n} \sin. 2n\varphi$; ou bien au lieu de la premiere équation, prenons, d'après l'art. 149, (en supposant $m = 2n$) celle-ci: $0 = a^{2n} \sin. 2n\varphi - 2a^n r^n \cos g \sin. n\varphi$. Comparée avec la seconde, elle donnera $r = a$; alors nous aurons $\sin. 2n\varphi = 2\cos. g \sin. n\varphi$; mais $\sin. 2n\varphi = 2\sin. n\varphi \cos. n\varphi$, donc $\cos. n\varphi = \cos. g$. Or on a toujours $\cos. (2k\pi \pm g) = \cos. g$; donc $n\varphi = 2k\pi \pm g$, & $\varphi = \frac{2k\pi \pm g}{n}$. Le facteur général double de la formule proposée sera donc $= aa - 2az \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + zz$; & nous obtiendrons tous les facteurs en mettant successivement pour $2k$ tous les nombres pairs, qui ne sont

pas plus grands que n; ce qui deviendra facile par l'application que nous allons en faire à différents cas.

EXEMPLE.

Considérons donc les cas où n eſt 1, 2, 3, 4 &c. & voyons quelle ſera la formation des facteurs.

La formule
$$aa - 2az\,cof.\,g + zz$$
a pour facteur unique
$$aa - 2az\,cof.\,g + zz$$
La formule
$$a^4 - 2a^2z^2 cof.\,g + z^4$$
a pour ſes deux facteurs
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{g}{2} + zz$$
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{2\pi \pm g}{2} + zz \text{ ou } aa + 2az\,cof.\,\tfrac{g}{2} + zz.$$
La formule
$$a^6 - 2a^3z^3 cof.\,g + z^6$$
a pour ſes trois facteurs
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{g}{3} + zz$$
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{2\pi - g}{3} + zz$$
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{2\pi + g}{3} + zz$$
La formule
$$a^8 - 2a^4z^4 cof.\,g + z^8$$
a pour ſes quatre facteurs
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{g}{4} + zz$$
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{2\pi - g}{4} + zz$$
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{2\pi + g}{4} + zz$$
$$aa - 2az\,cof.\,\tfrac{4\pi \pm g}{4} + zz \text{ ou } aa + 2az\,cof.\,\tfrac{g}{4} + zz$$

La formule

$a^{10} - 2a^5 z^5 \cos. g + z^{10}$

a pour ses cinq facteurs

$aa - 2az \cos. \frac{g}{5} + zz$

$aa - 2az \cos. \frac{2\pi - g}{5} + zz$

$aa - 2az \cos. \frac{2\pi + g}{5} + zz$

$aa - 2az \cos. \frac{4\pi - g}{5} + zz$

$aa - 2az \cos. \frac{4\pi + g}{5} + zz$

Ces exemples sont propres à confirmer que toute fonction entiere peut être résolue en facteurs réels, soit simples, soit doubles.

154. Si l'on veut aller plus loin, la même décomposition aura lieu pour cette fonction $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$. Elle aura au moins un facteur réel de la forme $\eta + \theta z^n$ dont on pourra par conséquent trouver les facteurs réels, ou simples ou doubles: quant à l'autre multiplicateur de la forme $\iota + \varkappa z^n + \lambda z^{2n}$, il sera facile, de quelque maniere qu'il soit composé, de le décomposer pareillement en facteurs d'après l'art. précédent. Ensuite la fonction $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n}$ ayant toujours deux facteurs réels de la forme $\eta + \theta z^n + \iota z^{2n}$ se résoud de même en facteurs réels, ou simples ou doubles. On peut encore aller plus loin, & considérer la formule $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \xi z^{5n}$. Elle aura au moins un facteur de la forme $\eta + \theta z^n$ & l'autre sera de la forme précédente. Cette fonction sera donc aussi susceptible d'une décomposition en facteurs réels, soit simples, soit doubles. Ainsi, s'il restoit quelque doute sur la décomposition de

toutes les fonctions entieres, il sera maintenant presque
(u) entierement levé.

155. Au reste cette résolution en facteurs peut encore s'appliquer aux séries infinies. En effet nous avons vu auparavant que la série $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c. = e^x$, & que $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, i désignant un nombre infini; il est donc clair que la série $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c.$ a une infinité de facteurs simples $1 + \frac{x}{i}$ égaux entr'eux. Mais si l'on ôte le premier terme de cette même série, le reste $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \&c. = e^x - 1 = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1$. Comparons cette formule avec celle de l'art. 151, nous aurons $a = 1 + \frac{x}{i}$, $n = i$, & $z = 1$, & le facteur général devient $= \left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right) cos. \frac{2k}{i} \pi + 1$, formule qui donnera tous les facteurs à la fois, en substituant à $2k$ tous les nombres pairs. La supposition de $2k = 0$ donnera le facteur quarré $\frac{xx}{ii}$, au lieu duquel on ne doit prendre pour les raisons rapportées ci-dessus que sa racine $\frac{x}{i}$. Donc x sera un facteur de l'expression $e^x - 1$, ce qui est évident. Pour trouver les autres facteurs, il faut observer qu'à cause de l'arc $\frac{2k}{i}\pi$ infiniment petit, on a $cos. \frac{2k\pi}{i} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{ii}$, (*art.* 134), les termes qui suivent, disparoissant à cause du nombre i infiniment grand. Donc le facteur général $= \frac{xx}{ii} + \frac{4kk\pi\pi}{ii} + \frac{4kk\pi\pi}{i^3} x$, & conséquemment la formule $e^x - 1$ sera divisible par $1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4kk\pi\pi}$. Ainsi l'ex-

pression $e^x - 1 = x(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \&c.)$, outre le facteur x, aura cette suite infinie de facteurs $\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{36\pi\pi}\right)$ $\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{64\pi\pi}\right)$ &c.

156. Mais comme chacun de ces facteurs renferme la partie infiniment petite $\frac{x}{i}$, qui par la multiplication de tous les facteurs dont le nombre est $\frac{1}{2}i$, produit le terme $\frac{x}{2}$, cette partie ne peut être négligée. Ainsi pour obvier à cet inconvénient, considérons cette expression $e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = 2\left(\frac{x}{i} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.\right)$, car $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \&c.$ La comparaison de cette formule, avec celle de l'art. 151, donne $n = i$, $a = 1 + \frac{x}{i}$ & $z = 1 - \frac{x}{i}$; le facteur de cette expression sera donc $= aa - 2az\, cos. \frac{2k}{n}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right) cos. \frac{2k}{i}\pi = \frac{4xx}{ii} + \frac{4kk\pi\pi}{ii} - \frac{4kk\pi\pi xx}{i^4}$, à cause de $cos. \frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{ii}$. La fonction $e^x - e^{-x}$ sera donc divisible par $1 + \frac{xx}{kk\pi\pi} - \frac{xx}{ii}$. On pourra à présent négliger en toute sureté le terme $\frac{xx}{ii}$, car quoique multiplié par i, il resteroit encore infiniment petit. Mais si comme auparavant on fait $k = 0$, on trouvera le premier facteur $= x$. Ainsi en rangeant par ordre tous ces facteurs, on aura $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)$ $\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{25\pi\pi}\right)$ &c. $= x\left(1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.\ldots.7} + \&c.\right)$ J'ai

donné à chaque facteur une forme convenable, pour qu'en faisant actuellement la multiplication, on ait x pour le premier terme.

157. De même, puisque $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c. = \frac{\left(1+\frac{x}{i}\right)^i + \left(1-\frac{x}{i}\right)^i}{2}$, la comparaison de cette expression avec la précédente $a^n + z^n$ donnera $a = 1 + \frac{x}{i}$; $z = 1 - \frac{x}{i}$, & $n = i$; le facteur général sera donc $= aa - 2az \operatorname{cos.} \frac{2k+1}{n}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right) \operatorname{cos.} \frac{2k+1}{i}\pi$. Or $\operatorname{cos.} \frac{2k+1}{i}\pi = 1 - \frac{(2k+1)^2\pi\pi}{2ii}$; donc la forme du facteur sera $= \frac{4xx}{ii} + \frac{(2k+1)^2\pi\pi}{ii}$, le terme dont le dénominateur est i^4 s'évanouissant. Mais comme tout facteur de l'expression $1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c.$ doit être de la forme $1 + \alpha xx$, pour ramener le facteur trouvé à cette forme, il faudra le diviser par $\frac{(2k+1)^2\pi\pi}{ii}$. Donc le facteur de la formule proposée sera $1 + \frac{4xx}{(2k+1)^2\pi\pi}$; d'où l'on déduira tous les facteurs particuliers en écrivant successivement & à l'infini tous les nombres impairs à la place de $2k+1$. On aura par cette raison

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c. =$$
$$\left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{49\pi\pi}\right) \&c.$$

158. Si x devient une quantité imaginaire, ces formules exponentielles se changent en sinus ou en cosinus d'un arc quelconque réel. Car soit $x = z\sqrt{-1}$, on aura

$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{fin.}\, z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \frac{z^7}{1\,2\,3\ldots7} +$ &c. Cette expreſſion a donc ce nombre infini de facteurs $z\left(1 - \frac{zz}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{16\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{25\pi\pi}\right)$ &c; ou bien $\text{fin.}\, z = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right)$ &c. Ainſi toutes les fois qu'un arc z eſt tel qu'un des facteurs s'évanouiſſe; ce qui arrive, lorſque $z = 0$, $z = \pm \pi$, $z = \pm 2\pi$; & en général lorſque $z = \pm k\pi$, k déſignant un nombre entier quelconque, le ſinus de ce même arc doit être en même temps $= 0$; ce qui eſt ſi évident qu'on auroit pu déduire indirectement ces facteurs de cette ſimple conſidération.

Semblablement comme $\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = \text{cof.}\, z$; on aura auſſi $\text{cof.}\, z = \left(1 - \frac{4zz}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{25\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{36\pi\pi}\right)$ &c, ou en décompoſant ces facteurs en deux, $\text{cof.}\, z = \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi}\right)$ &c. On voit auſſi par-là que ſi $z = \pm \frac{(2k+1)}{2}\pi$, on aura alors $\text{cof.}\, z = 0$; ce qu'il étoit encore facile de conclure de la nature même du cercle.

159. D'après l'art. 153, on peut trouver en outre les facteurs de cette expreſſion $e^x - 2\,\text{cof}\, g + e^{-x} = 2\left(1 - \text{cof.}\, g + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3\,4} + \text{\&c.}\right)$ En effet, cette expreſſion ſe change en celle-ci : $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 2\,\text{cof.}\, g + \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i$, laquelle étant comparée avec la formule

citée donne $2n = i$, $a = 1 + \frac{x}{i}$, & $z = 1 - \frac{x}{i}$. Le facteur général de cette formule sera donc $= aa - 2az$ $cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right)$. $cos. 2\frac{(2k\pi \pm g)}{i}$. Or $cos. 2\frac{(2k\pi \pm g)}{i} = 1 - 2\frac{(2k\pi \pm g)^2}{ii}$, donc le facteur en question sera $= \frac{4xx}{ii} + 4\frac{(2k\pi \pm g)^2}{ii}$ ou de cette forme $1 + \frac{xx}{(2k\pi \pm g)^2}$. Si donc on divise l'expression proposée par $2(1 - cos. g)$, afin que dans la série infinie le terme constant $= 1$, on trouvera, en rassemblant tous les facteurs, $\frac{e^x - 2 cos. g + e^{-x}}{2(1 - cos. g)} = \left(1 + \frac{xx}{gg}\right)$ $\left(1 + \frac{xx}{(2\pi - g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(2\pi + g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(4\pi - g)^2}\right)$ $\left(1 + \frac{xx}{(4\pi + g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(6\pi - g)^2}\right) \left(1 + \frac{xx}{(6\pi + g)^2}\right)$ &c. Et si au lieu de x on met $z\sqrt{-1}$, on aura $\frac{cos. z - cos. g}{1 - cos. g}$ $= \left(1 - \frac{z}{g}\right) \left(1 + \frac{z}{g}\right) \left(1 - \frac{z}{2\pi - g}\right) \left(1 + \frac{z}{2\pi - g}\right)$ $\left(1 - \frac{z}{2\pi + g}\right) \left(1 + \frac{z}{2\pi + g}\right) \left(1 - \frac{z}{4\pi - g}\right) \left(1 + \frac{z}{4\pi - g}\right)$ &c. $= 1 - \frac{zz}{1.2(1 - cos. g)} + \frac{z^4}{1.2.3.4(1 - cos. g)} - \frac{z^6}{1.2.\ldots.6(1 - cos. g)}$ + &c. On connoît donc tous les facteurs de cette série continuée à l'infini.

160. Il ne sera pas plus difficile de trouver & d'assigner tous les facteurs de cette fonction $e^{b+x} \pm e^{c-x}$. En effet elle prend la forme $\left(1 + \frac{b+x}{i}\right)^i \pm \left(1 + \frac{c-x}{i}\right)^i$. En la comparant avec celle-ci : $a^i \pm z^i$, on obtiendra le facteur $aa - 2az\, cos. \frac{m\pi}{i} + zz$, m désignant un nombre impair, si le signe supérieur a lieu, & un nombre pair, dans

dans le cas contraire. Mais comme à cauſe du nombre i infiniment grand, $cof.\ \frac{m\pi}{i} = 1 - \frac{mm\pi\pi}{2ii}$, le facteur général $= (a - z)^2 + \frac{mm\pi\pi}{ii}\, az$. Or dans ce cas $a = 1 + \frac{b+x}{i}$ & $z = 1 + \frac{c-x}{i}$, d'où $(a - z)^2 = \frac{(b-c+2x)^2}{ii}$, & $az = 1 + \frac{b+c}{i} + \frac{bc+(c-b)x-xx}{ii}$; par conſéquent en multipliant le facteur par ii, il deviendra $= (b-c)^2 + 4(b-c)x + 4xx + m^2\pi^2$, négligeant les termes diviſés par i, ou par ii, par la raiſon qu'il y a déjà des termes de toute eſpece, auprès deſquels ceux ci doivent diſparoître ; & après avoir ramené les termes conſtants à l'unité au moyen de la diviſion, on aura le facteur $= 1 + \frac{4(b-c)x+4xx}{mm\pi\pi+(b-c)^2}$.

161. A préſent le terme conſtant $= 1$ ſe trouvant dans chacun des facteurs, la fonction $e^{b+x} \pm e^{c-x}$ doit être diviſée par une conſtante telle que le terme conſtant devienne $= 1$, ou que ſa valeur devienne $= 1$, en ſuppoſant $x = 0$. Un tel diviſeur ne peut être que $e^b \pm e^c$; & par conſéquent cette expreſſion $\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$ pourra être repréſentée par un nombre infini de facteurs ; on aura donc, ſi c'eſt le ſigne ſupérieur qui ait lieu, m déſignant alors un nombre impair, $\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c} = \left(1 + \frac{4(b-c)x+4xx}{\pi\pi+(b-c)^2}\right)$ $\left(1 + \frac{4(b-c)x+4xx}{9\pi\pi+(b-c)^2}\right)$ $\left(1 + \frac{4(b-c)x+4xx}{25\pi\pi+(b-c)^2}\right)$ &c ; mais ſi c'eſt le ſigne inférieur qui ait lieu, qu'en conſéquence m déſigne un nombre pair, & que dans le cas ou $m = 0$, on prenne la racine du facteur quarré, on aura $\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c} = \left(1 + \frac{2x}{b-c}\right)\left(1 + \frac{4(b-c)x+4xx}{4\pi\pi+(b-c)^2}\right)$

$\left(1+\frac{4(b-c)x+4xx}{16\pi\pi+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4xx}{36\pi\pi+(b-c)^2}\right)$ &c.

162. Soit supposé $b=0$, hypothese qui peut se faire sans détruire la généralité, & on aura $\frac{e^x+e^c e^{-x}}{1+e^c}=$ $\left(1-\frac{4cx+4xx}{\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{4cx+4xx}{9\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{4cx+4xx}{25\pi\pi+cc}\right)$ &c. $\frac{e^x-e^c e^{-x}}{1-e^c}=\left(1-\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{4cx+4xx}{4\pi\pi+cc}\right)$ $\left(1-\frac{4cx+4xx}{16\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{4cx+4xx}{36\pi\pi+cc}\right)$ &c. Soit à présent c une quantité négative, & nous aurons ces deux équations : $\frac{e^x+e^{-c}e^{-x}}{1+e^{-c}}=\left(1+\frac{4cx+4xx}{\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{4cx+4xx}{9\pi\pi+cc}\right)$ $\left(1+\frac{4cx+4xx}{25\pi\pi+cc}\right)$ &c; $\frac{e^x-e^{-c}e^{-x}}{1-e^{-c}}=\left(1+\frac{2x}{c}\right)$ $\left(1+\frac{4cx+4xx}{4\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{4cx+4xx}{16\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{4cx+4xx}{36\pi\pi+cc}\right)$ &c. Multiplions la premiere formule par la troisieme, nous aurons pour produit $\frac{e^{2x}+e^{-2x}+e^c+e^{-c}}{2+e^c+e^{-c}}$; mettons y pour $2x$, nous obtiendrons alors $\frac{e^y+e^{-y}+e^c+e^{-c}}{2+e^c+e^{-c}}=\ldots$ $\left(1-\frac{2cy+yy}{\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{9\pi\pi+cc}\right)$ $\left(1+\frac{2cy+yy}{9\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{25\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{25\pi\pi+cc}\right)$ &c. Si nous multiplions la premiere par la quatrieme, le produit sera $\frac{e^{2x}-e^{-2x}+e^c-e^{-c}}{e^c-e^{-c}}$; mettons y au lieu de $2x$, & nous aurons $\frac{e^y-e^{-y}+e^c-e^{-c}}{e^c-e^{-c}}=\left(1+\frac{y}{c}\right)$

$$\left(1-\frac{2cy+yy}{\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{4\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{9\pi\pi+cc}\right)$$
$$\left(1+\frac{2cy+yy}{16\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{25\pi\pi+cc}\right) \text{ \&c.}$$

Multiplions la seconde par la troisieme, il en résultera la même équation à la différence près que c devra être pris négativement; en effet nous aurons $\frac{e^c-e^{-c}-e^y+e^{-y}}{e^c-e^{-c}}=$
$$\left(1-\frac{y}{c}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{4\pi\pi+cc}\right)$$
$$\left(1+\frac{2cy+yy}{9\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{16\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{25\pi\pi+cc}\right)$$
$\left(1-\frac{2cy+yy}{36\pi\pi+cc}\right)$ &c. Enfin multiplions la seconde par la quatrieme, & nous aurons $\frac{e^y+e^{-y}-e^c-e^{-c}}{2-e^c-e^{-c}}=$
$$\left(1-\frac{yy}{cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{4\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{4\pi\pi+cc}\right)$$
$$\left(1-\frac{2cy+yy}{16\pi\pi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{16\pi\pi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{36\pi\pi+cc}\right)$$
$$\left(1+\frac{2cy+yy}{36\pi\pi+cc}\right) \text{ \&c.}$$

163. Il sera facile à présent d'appliquer au cercle ces quatre combinaisons, en supposant $c=g\sqrt{-1}$ & $y=v\sqrt{-1}$: en effet on aura $e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}=2\,cos.\,v$; $e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}.\ sin.\,v$; & $e^{g\sqrt{-1}}+e^{-g\sqrt{-1}}=2\,cos.\,g$; $e^{g\sqrt{-1}}-e^{-g\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}.\ sin.\,g$. D'après cela, la premiere combinaison donne $\frac{cos.\,v+cos.\,g}{1+cos.\,g}=1-\frac{vv}{1.2\,(1+cos.\,g}+\frac{v^4}{1.2.3.4\,(1+cos.\,g}$
$-\frac{v^6}{1.2\ldots 6\,(1+cos.\,g)}+\text{\&c.}=\left(1+\frac{2gv-vv}{\pi\pi-gg}\right)$
$$\left(1-\frac{2gv-vv}{\pi\pi-gg}\right)\left(1+\frac{2gv-vv}{9\pi\pi-gg}\right)\left(1-\frac{2gv-vv}{9\pi\pi-gg}\right)$$

$\left(1+\frac{2gv-vv}{25\pi\pi-gg}\right)\left(1-\frac{2gv-vv}{25\pi\pi-gg}\right)$ &c. $=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)$ $\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)$ $\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)$ &c. $=$ $\left(1-\frac{vv}{(\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{vv}{(\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{vv}{(3\pi-g)^2}\right)$ $\left(1-\frac{vv}{(3\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{vv}{(5\pi-g)^2}\right)$ &c. La quatrieme combinaison donne $\frac{cos.\,v-cos.\,g}{1-cos.\,g}=1-\frac{vv}{1.2(1-cos.\,g)}$ $+\frac{v^4}{1.2.3.4(1-cos.\,g)}-\frac{v^6}{1.2\ldots6(1-cos.\,g)}+$ &c. $=$ $\left(1-\frac{vv}{gg}\right)\left(1+\frac{2gv-vv}{4\pi\pi-gg}\right)\left(1-\frac{2gv-vv}{4\pi\pi-gg}\right)$ $\left(1+\frac{2gv-vv}{16\pi\pi-gg}\right)\left(1-\frac{2gv-vv}{16\pi\pi-gg}\right)$ &c. $=\left(1-\frac{v}{g}\right)$ $\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)$ $\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)$ &c. $=$ $\left(1-\frac{vv}{gg}\right)\left(1-\frac{vv}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{vv}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{vv}{(4\pi-g)^2}\right)$ $\left(1-\frac{vv}{(4\pi+g)^2}\right)$ &c. La seconde combinaison donne $\frac{fin.\,g+fin.\,v}{fin.\,g}=1+\frac{v}{fin.\,g}-\frac{v^3}{1.2.3\,fin.\,g}+\frac{v^5}{1.2\ldots5\,fin\,g}-$ &c. $=\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{2gv-vv}{\pi\pi-gg}\right)\left(1-\frac{2gv-vv}{4\pi\pi-gg}\right)$ $\left(1+\frac{2gv-vv}{9\pi\pi-gg}\right)\left(1-\frac{2gv-vv}{16\pi\pi-gg}\right)$ &c. $=\left(1+\frac{v}{g}\right)$ $\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)$ $\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)$ &c. Et si on prend v négativement, on trouvera la troisieme combinaison.

164. Les expressions mêmes que nous avons trouvées d'abord (*art.* 162) peuvent aussi être rapportés aux arcs de cercle de cette maniere : puisque $\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1 + e^c} = \frac{(1 + e^{-c})(e^x + e^c e^{-x})}{2 + e^c + e^{-c}} = \frac{e^x + e^{-x} + e^{c-x} + e^{-c+x}}{2 + e^c + e^{-c}}$; si nous faisons $c = g\sqrt{-1}$, & $x = z\sqrt{-1}$, cette expression se change en celle-ci : $\frac{cos.\, z + cos.\, (g - z)}{1 + cos.\, g} = cos.\, z + \frac{sin.\, g.\, sin.\, z}{1 + cos.\, g}$. Nous aurons donc (à cause de $\frac{sin\, g}{1 + cos.\, g} = tang.\, \frac{1}{2} g$) $cos.\, z + tang.\, \frac{1}{2} g\, sin.\, z = 1 + \frac{z}{1}\, tang.\, \frac{1}{2} g - \frac{zz}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3}\, tang.\, \frac{1}{2} g + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} \times tang.\, \frac{1}{2} g - \&c. = \left(1 + \frac{4gz - 4zz}{\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{9\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{25\pi\pi - gg}\right) \&c. = \left(1 + \frac{2z}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi + g}\right) \&c.$ Pareillement, l'autre expression, si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur par $1 - e^{-c}$, se change en celle-ci: $\frac{e^x + e^{-x} - e^{c-x} - e^{-c+x}}{2 - e^c - e^{-c}}$. Cette derniere, en faisant $c = g\sqrt{-1}$ & $x = z\sqrt{-1}$ donne $\frac{cos.\, z - cos.\, (g - z)}{1 - cos.\, g} = cos.\, z - \frac{sin.\, g.\, sin.\, z}{1 - cos.\, g} = cos.\, z - \frac{sin.\, z}{tang.\, \frac{1}{2} g}$. On aura donc $cos.\, z - cot.\, \frac{1}{2} g.\, sin.\, z = 1 - \frac{z}{1}\, cot.\, \frac{1}{2} g - \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3}\, cot.\, \frac{1}{2} g + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^5}{1.2\ldots 5}\, cot.\, \frac{1}{2} g + \&c. = \left(1 - \frac{2z}{g}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{4\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4zz - 4zz}{16\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{36\pi\pi - gg}\right) \&c. = \left(1 - \frac{2z}{g}\right)\left(1 + \frac{2z}{2\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{2\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{4\pi - g}\right)$

$\left(1 - \frac{2z}{4\pi + g}\right)$ &c. Donc si on fait $v = 2z$, ou $z = \frac{1}{2}v$; on aura $\frac{cos. \frac{1}{2}(g-v)}{cos. \frac{1}{2}g} = cos. \frac{1}{2}v + tang. \frac{1}{2}g\ sin. \frac{1}{2}v =$
$\left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right)$ &c.

$\frac{cos. \frac{1}{2}(g+v)}{cos. \frac{1}{2}g} = cos. \frac{1}{2}v - tang. \frac{1}{2}g\ sin. \frac{1}{2}v = \left(1 - \frac{v}{\pi - g}\right)$
$\left(1 + \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{3\pi + g}\right)$ &c.

$\frac{sin. \frac{1}{2}(g-v)}{sin. \frac{1}{2}g} = cos. \frac{1}{2}v - cot. \frac{1}{2}g\ sin. \frac{1}{2}v = \left(1 - \frac{v}{g}\right)$
$\left(1 + \frac{v}{2\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{2\pi + g}\right)\left(1 + \frac{v}{4\pi - g}\right)$ &c.

$\frac{sin. \frac{1}{2}(g+v)}{sin. \frac{1}{2}g} = cos. \frac{1}{2}v + cot. \frac{1}{2}g\ sin. \frac{1}{2}v = \left(1 + \frac{v}{g}\right)$
$\left(1 - \frac{v}{2\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{4\pi - g}\right)$ &c.

La loi progressive qu'observent ces facteurs est assez simple & uniforme. Et ces dernières expressions redonneront, par le moyen de la multiplication, celles que nous avons trouvées dans l'article précédent.

CHAPITRE X.

De l'usage des Facteurs trouvés ci-dessus, pour la sommation de Séries infinies.

165. Si $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c. $=$ $(1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z)$ &c; ces facteurs, quel qu'en soit le nombre fini ou infini, étant multipliés les uns par les autres, doivent redonner la suite $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c. Le coëfficient A sera donc égal à la somme de toutes les quantités $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon +$ &c. Pour le coëfficient B, il sera égal à la

ſomme des produits des mêmes quantités priſes deux à deux; c'eſt-à-dire, qu'on aura $B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta +$ &c, & en égalant le coëfficient C à la ſomme des produits de toutes les lettres priſes trois à trois, on aura $C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta +$ &c. On aura de même D = à la ſomme des produits des lettres priſes quatre à quatre, & E = à la ſomme des produits des lettres priſes cinq à cinq, &c; tout cela eſt connu par l'algébre ordinaire.

166. Puiſque la ſomme des quantités $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ &c, & celle de leurs produits deux à deux ſont données, on pourra en conclure la ſomme des quarrés $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ &c; car elle eſt égale au quarré de la ſomme des quantités ſimples, moins celle du double de leurs produits, en les prenant deux à deux. On peut déterminer d'une maniere ſemblable la ſomme des cubes, celle des quatriemes puiſſances & des autres puiſſances plus élevées. En effet ſuppoſons

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c.$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \&c.$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \&c.$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \&c.$$
$$T = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5 + \&c.$$
$$V = \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \varepsilon^6 + \&c.$$
&c.

Les valeurs de A, B, C, D &c. étant connues, on en déduira de la maniere ſuivante celles de P, Q, R, S, T, V, &c.

$$P = A$$
$$Q = AP - 2B$$
$$R = AQ - BP + 3C$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$
$$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F$$
&c.

Avec un peu d'attention on appercevra ſans peine la vérité
(*u*) de ces formules ; au reſte elle ſera rigoureuſement démontrée dans le calcul différentiel.

167. Ayant trouvé ci-deſſus $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.\ldots\ldots7} + \&c.\right) = x\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{25\pi\pi}\right)$ &c ; on aura $1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3\ldots7} + \&c. = \left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)$ &c. Soit $xx = \pi\pi z$, alors $1 + \frac{\pi\pi}{1.2.3}z + \frac{\pi^4}{1.2.3.4.5}z^2 + \frac{\pi^6}{1.2.3\ldots7}z^3 + \&c. = (1 + z)\left(1 + \frac{1}{4}z\right)\left(1 + \frac{1}{9}z\right)\left(1 + \frac{1}{16}z\right)\left(1 + \frac{1}{25}z\right)$ &c ; en appliquant donc à ce cas la regle précédente, nous trouverons $A = \frac{\pi\pi}{6}$; $B = \frac{\pi^4}{120}$; $C = \frac{\pi^6}{5040}$; $D = \frac{\pi^8}{362880}$ &c. Suppoſons donc . . .

$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$$
$$Q = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \&c.$$
$$R = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \&c.$$
$$S = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \&c.$$
$$T = 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \&c.$$
&c.

En déterminant les valeurs de ces lettres par celles des lettres *A*, *B*, *C*, *D*, &c. nous trouverons

$$P = \frac{\pi\pi}{6}$$
$$Q = \frac{\pi^4}{90}$$

R

$$R = \frac{\pi^6}{945}$$

$$S = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$T = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

&c.

168. Il ſuit donc de-là qu'on peut avoir, au moyen de la demi-circonférence π la ſomme de toutes les ſéries infinies compriſes dans cette formule générale $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \&c.$ toutes les fois que n ſera un nombre pair; car la ſomme de cette ſérie aura toujours un rapport rationnel avec π^n. Au reſte, pour faire mieux connoître la valeur de ces ſuites, j'ajouterai ici pluſieurs ſommes de ces ſortes de ſéries exprimées d'une maniere plus commode.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. = \frac{2^0}{1.2.3} \frac{1}{1} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. = \frac{2^2}{1.2.3.4.5} \frac{1}{3} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \&c. = \frac{2^4}{1.2.3 \ldots 7} \frac{1}{3} \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \&c. = \frac{2^6}{1.2.3 \ldots 9} \frac{3}{5} \pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \&c. = \frac{2^8}{1.2.3 \ldots 11} \frac{5}{3} \pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \&c. = \frac{2^{10}}{1.2.3 \ldots 13} \frac{691}{105} \pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \&c. = \frac{2^{12}}{1.2.3 \ldots 15} \frac{35}{1} \pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \&c. = \frac{2^{14}}{1.2.3 \ldots 17} \frac{3617}{15} \pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \&c. = \frac{2^{16}}{1.2.3 \ldots 19} \frac{43867}{21} \pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \&c. = \frac{2^{18}}{1.2.3 \ldots 21} \frac{1222277}{55} \pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\&c.=\frac{2^{20}}{1.2.3\ldots23}\,\frac{854513}{3}\,\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\&c.=\frac{2^{22}}{1.2.3\ldots25}\,\frac{1181820455}{273}\,\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\&c.=\frac{2^{24}}{1.2.3\ldots27}\,\frac{76977927}{1}\,\pi^{26}$$

J'expliquerai ailleurs l'artifice, au moyen duquel on a pu arriver à ces résultats. Je les ai donnés d'avance, parce que la série des fractions $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}, \frac{35}{1}$, &c, quoique
(x) très-irréguliere au premier aspect, est d'un très-grand usage dans beaucoup d'occasions.

169. Traitons de la même maniere l'équation donnée (art. 157); nous avions trouvé $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{xx}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}$ $+\&c.=\left(1+\frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{49\pi\pi}\right)\&c.$ Supposant donc $x^2=\frac{\pi^2 z}{4}$, nous aurons $1+\frac{\pi\pi}{1.2.4}z+$ $\frac{\pi^4}{1.2.3.4^2}zz+\frac{\pi^6}{1.2\ldots6.4^3}z^3+\&c.=(1+z)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right)$ $\left(1+\frac{1}{49}z\right)\&c$; & faisant l'application de la regle précédente, nous trouverons $A=\frac{\pi\pi}{1.2.4}$; $B=\frac{\pi^4}{1.2.3.4.4^2}$; $C=\frac{\pi^6}{1.2.3\ldots6.4^3}$, &c. Donc, si nous supposons . . . .

$$P=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\&c.$$

$$Q=1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{81^2}+\&c.$$

$$R=1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\frac{1}{81^3}+\&c.$$

$$S=1+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{81^4}+\&c.$$

&c.

Nous obtiendrons pour P, Q, R, S, &c. les valeurs ſuivantes :

$$P = \frac{1}{1} \cdot \frac{\pi^2}{2^3}; \quad Q = \frac{2}{1.2.3} \cdot \frac{\pi^4}{2^5};$$
$$R = \frac{16}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{\pi^6}{2^7}; \quad S = \frac{272}{1.2.3\ldots.7} \cdot \frac{\pi^8}{2^9};$$
$$T = \frac{7936}{1.2.3\ldots..9} \cdot \frac{\pi^{10}}{2^{11}}; \quad V = \frac{353792}{1.2.3\ldots\ldots11} \cdot \frac{\pi^{12}}{2^{13}};$$
$$W = \frac{22368256}{1.2.3\ldots\ldots13} \cdot \frac{\pi^{14}}{2^{15}}.$$

170. Les mêmes ſommes des puiſſances des nombres impairs peuvent ſe déduire des ſommes précédentes, dans leſquelles ſe trouvent tous les nombres. En effet, ſi $M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} +$ &c. en multipliant tout par $\frac{1}{2^n}$, on aura $\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} +$ &c, ſérie, qui ne contient que les nombres pairs, & qui ſouſtraite de la premiere, donnera pour reſte tous les nombres impairs; ainſi on aura $M - \frac{M}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \cdot M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} +$ &c. Mais ſi on ſouſtrait de M la ſérie $\frac{M}{2^n}$ priſe deux fois, les ſignes ſeront alternativement poſitifs & négatifs, & on aura $M - \frac{2M}{2^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \cdot M = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} +$ &c. On pourra donc, au moyen des principes expoſés ci-deſſus, ſommer ces ſéries . . . .

$$1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} \pm \text{\&c.}$$
$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \text{\&c.}$$

pourvu que n ſoit un nombre pair; & la ſomme ſera $= A\pi^n$, A étant un nombre rationnel.

171. Les expreſſions trouvées (art. 164) fourniront auſſi

des séries également remarquables. Car, puisque $cos. \frac{1}{2} v + tang. \frac{1}{2} g \, sin. \frac{1}{2} v = \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right) \left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right) \left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)$ &c; si nous supposons $v = \frac{x}{n}\pi$ & $g = \frac{m}{n}\pi$, nous aurons $\left(1 + \frac{x}{n-m}\right) \left(1 - \frac{x}{n+m}\right) \left(1 + \frac{x}{3n-m}\right) \left(1 - \frac{x}{3n+m}\right) \left(1 + \frac{x}{5n-m}\right) \left(1 - \frac{x}{5n+m}\right)$ &c. $= cos. \frac{x\pi}{2n} + tang. \frac{m\pi}{2n} \cdot sin. \frac{x\pi}{2n} = 1 + \frac{x\pi}{2n} \times tang. \frac{m\pi}{2n} - \frac{\pi\pi xx}{2.4n^2} - \frac{\pi^3 x^3}{2.4.6n^3} tang. \frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi^4 x^4}{2.4.6.8n^4} +$ &c. Cette expression infinie comparée avec celle de l'art. 165 donnera ces valeurs-ci : $A = \frac{\pi}{2n} tang. \frac{m\pi}{2n}$; $B = -\frac{\pi\pi}{2.4n^2}$; $C = -\frac{\pi^3}{2.4.6n^3} tang. \frac{m\pi}{2n}$; $D = \frac{\pi^4}{2.4.6.8.n^4}$; $E = \frac{\pi^5}{2.4.6.8.10.n^5} \times tang. \frac{m\varpi}{2n}$ &c; mais alors $\alpha = \frac{1}{n-m}$; $\beta = -\frac{1}{n+m}$; $\gamma = \frac{1}{3n-m}$; $\delta = -\frac{1}{3n+m}$; $\epsilon = \frac{1}{5n-m}$; $\xi = -\frac{1}{5n+m}$ &c.

172. Ainsi, d'après la regle donnée (art. 166) nous obtiendrons les séries suivantes.

$$P = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \frac{1}{5n-m} - \frac{1}{5n+m} + \&c.$$

$$Q = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \frac{1}{(5n-m)^2} + \frac{1}{(5n+m)^2} + \&c.$$

$$R = \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} + \frac{1}{(3n-m)^3} - \frac{1}{(3n-m)^3} + \frac{1}{(5n+m)^3} - \&c.$$

$$S = \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(3n-m)^4} + \frac{1}{(3n+m)^4} + \frac{1}{(5n-m)^4} + \&c.$$

$$T = \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} + \frac{1}{(3n-m)^5} - \frac{1}{(3n+m)^5} + \frac{1}{(5n-m)^5} - \&c.$$

$$V = \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(3n-m)^6} + \frac{1}{(3n+m)^6} + \frac{1}{(5n-m)^6} + \&c.$$

&c.

Or en faisant $tang. \frac{m\pi}{2n} = k$, nous en conclurons, comme nous l'avons fait voir,

$$P = A = \frac{k\pi}{2n} \qquad = \qquad \frac{k\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nn} \qquad = \qquad \frac{(2kk+2)\pi^2}{2.\,4.\,n^2}$$

$$R = \frac{(k^3+k)\pi^3}{8n^3} \qquad = \qquad \frac{(6k^3+6k)\pi^3}{2.\,4.\,6.\,n^3}$$

$$S = \frac{(3k^4+4kk+1)\pi^4}{48n^4} \qquad = \qquad \frac{(24k^4+32k^2+8)\pi^4}{2.\,4.\,6.\,8\,n^4}$$

$$T = \frac{(3k^5+5k^3+2k)\pi^5}{96n^5} \qquad = \qquad \frac{(120k^5+200k^3+80k)\pi^5}{2.\,4.\,6.\,8.\,10\,n^5}$$

173. On peut traiter de même la derniere formule de l'art. 164; . . . . $cos. \frac{1}{2}v + cot. \frac{1}{2}g. sin. \frac{1}{2}v = \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right) 1 + \left(\frac{v}{2\pi+g}\right)$ $\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)$ &c. Si nous supposons $v = \frac{x}{n}\pi$, $g = \frac{m}{n}.\pi$ & $tang. \frac{m\pi}{2n} = k$, de maniere que $cot. \frac{1}{2}g = \frac{1}{k}$; la formule, dont il s'agit donnera $cos. \frac{\pi x}{2n} + \frac{1}{k} sin. \frac{\pi x}{2n} =$

$$1 + \frac{\pi x}{2nk} - \frac{\pi\pi\, xx}{2.\,4nn} - \frac{\pi^3 x^3}{2.\,4.\,6.\,n^3 k} + \frac{\pi^4 x^4}{2.\,4.\,6.\,8\,n^4} + \frac{\pi^5 x^5}{2.\,4.\,6.\,8.\,10\,n^5 k} - \&c.$$

$$= \left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{2n-m}\right)\left(1+\frac{x}{2n+m}\right)\left(1-\frac{x}{4n-m}\right)\left(1+\frac{x}{4n+m}\right)$$

(&c. Comparant avec la formule générale (art. 165), on aura $A = \frac{\pi}{2nk}$; $B = -\frac{\pi\pi}{2.\,4nn}$; $C = -\frac{\pi^3}{2.\,4.\,6\,n^3 k}$; $D = \frac{\pi^4}{2.\,4.\,6.\,8\,n^4}$; $E = \frac{\pi^5}{2.\,4.\,6.\,8.\,10\,n^5 k}$; &c, & les facteurs donneront, $\alpha = \frac{1}{m}$; $\beta = -\frac{1}{2n-m}$; $\gamma = \frac{1}{2n+m}$; $\delta = -\frac{1}{4n-m}$; $\epsilon = \frac{1}{4n+m}$ &c.

174. Ainsi, d'après la regle donnée (art. 166), nous

formerons les séries suivantes, & nous assignerons leurs sommes.

$$P = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \&c.$$

$$Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \&c.$$

$$R = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} - \frac{1}{(4n-m)^3} + \frac{1}{(4n+m)^3} - \&c.$$

$$S = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \frac{1}{(4n-m)^4} + \frac{1}{(4n+m)^4} + \&c.$$

$$T = \frac{1}{m^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} - \frac{1}{(4n-m)^5} + \frac{1}{(4n+m)^5} - \&c.$$

&c.

Or ces sommes P, Q, R, S &c. se trouveront de la maniere qui suit.

$$P = A = \frac{\pi}{2nk} = \frac{1\pi}{2nk}$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nnkk} = \frac{(2+2kk)\pi^2}{2.4.n^2k^2}$$

$$R = \frac{(kk+1)\pi^3}{8n^3k^3} = \frac{(6+6kk)\pi^3}{2.4.6n^3k^3}$$

$$S = \frac{(k^4+4kk+3)\pi^4}{48n^4k^4} = \frac{(24+32kk+8k^4)\pi^4}{2.\ 4.\ 6.\ 8\ n^4\ k^4}$$

$$T = \frac{(2k^4+5kk+3)\pi^5}{96n^5k^5} = \frac{(120+200kk+80k^4)\pi^5}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10\ n^5\ k^5}$$

$$V = \frac{(2k^6+17k^4+30k^2+15)\pi^6}{960n^6k^6} = \frac{(720+1440kk+816k^4+96k^6)\pi^6}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ n^6\ k^6}$$

&c.

175. Ces séries générales méritent que nous prenions quelques cas particuliers, en déterminant en nombres le rapport de m à n. Soit donc d'abord $m = 1$ & $n = 2$, k sera $= tang.\ \frac{\pi}{4} = tang.\ 45^\circ = 1$; & les deux classes de séries deviendront les mêmes; on aura donc . . . .

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c.$$
$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.$$
$$\frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c.$$
$$\frac{\pi^6}{960} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \&c.$$
&c.

Nous avions déja trouvé (art. 140) la premiere de ces ſéries. Parmi les autres celles qui ont des expoſans pairs ont été calculées (art. 169), & celles dans leſquelles les expoſans ſont des nombres négatifs ſe préſentent ici pour la premiere fois. Il n'y a donc point de doute qu'on ne puiſſe aſſigner au moyen de la valeur de π les ſommes de toutes ces ſéries:

$$1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} + \frac{1}{9^{n+1}} - \&c.$$

176. Soit maintenant $m = 1$, $n = 3$; alors $k = tang. \frac{\pi}{6} = tang.\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, & les ſéries de l'art. 172 ſe changeront en celles-ci:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \&c.$$
$$\frac{\pi\pi}{27} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{16^2} + \&c.$$
$$\frac{\pi^3}{162\sqrt{3}} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{10^3} + \frac{1}{14^3} - \frac{1}{16^3} + \&c.$$
&c. ou bien

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \&c.$$
$$\frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \&c.$$
$$\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \&c.$$
&c.

Tous les nombres divisibles par trois manquent dans ces séries. Celles qui ont des dimensions paires peuvent se déduire des séries déja trouvées, en s'y prenant de cette maniere : puisque . . . .

$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c$, & que par conséquent

$\frac{\pi\pi}{6.9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \&c. = \frac{\pi\pi}{54}$,

cette derniere série qui contient tous les nombres divisibles par trois, étant soustraite de la premiere, donnera pour reste tous les nombres non-divisibles par trois : & partant $\frac{8\pi\pi}{54} = \frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c$, comme nous venons de le trouver.

177. La même hypothese de $m = 1$, $n = 3$, & $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, appliquée à l'art. 174 fournira les sommations suivantes :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \&c.$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} - \&c.$$

Les dénominateurs de ces séries contiennent seulement les nombres impairs, excepté ceux qui sont divisibles par trois. Au reste, les dimensions paires peuvent se conclure de ce que nous connoissons déja : car puisque nous avons

$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c$, il s'ensuit que

$\frac{\pi\pi}{8.9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \&c. = \frac{\pi\pi}{72}$,

série, qui contient tous les nombres impairs divisibles par trois, & qui étant soustraite de la supérieure, donnera pour reste la suite des quarrés des nombres impairs non-divisibles par trois ; savoir

$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \&c.$$

178.

178. Si on ajoute, ou si on soustrait l'une de l'autre les séries trouvées (art. 172 & 174), on en obtiendra d'autres également remarquables; savoir . . . .

$$\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2nk}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\&c.=\frac{(kk+1)\pi}{2nk}:$$

or $k = tang.\frac{m\pi}{2n} = \dfrac{\mathit{sin.}\frac{m\pi}{2n}}{\mathit{cos.}\frac{m\pi}{2n}}$ & $1+kk = \dfrac{1}{\left(\mathit{cos.}\frac{m\pi}{2n}\right)^2}$.

Donc $\frac{2k}{1+kk} = 2\,\mathit{sin.}\frac{m\pi}{2n}.\,\mathit{cos.}\frac{m\pi}{2n} = \mathit{sin.}\frac{m\pi}{n}$. Cette valeur étant substituée, nous aurons . . . .

$$\frac{\pi}{n\,\mathit{sin.}\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}$$

$-$ &c. On aura semblablement par la soustraction . . .

$$\frac{\pi}{2nk}-\frac{k\pi}{2n}=\frac{(1-kk)\pi}{2nk}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}$$

$-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-$ &c. Or $\frac{2k}{1-kk} = tang.\,2.\frac{m\pi}{2n} = tang.\frac{m\pi}{n}$

$= \dfrac{\mathit{sin.}\frac{m\pi}{n}}{\mathit{cos.}\frac{m\pi}{n}}$. Donc . . . .

$$\frac{\pi.\mathit{cos.}\frac{m}{n}\pi}{n.\mathit{sin.}\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\&c.$$

Les séries des quarrés & des autres puissances plus élevées de ces termes se trouveront plus facilement par le calcul différentiel.

179. Comme nous avons déja traité les cas où $m = 1$, & $n = 2$ ou 3; supposons à présent $m = 1$, & $n = 4$, alors $\mathit{sin.}\frac{m\pi}{n} = \mathit{sin.}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\mathit{cos.}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc . . .

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\&c. \;\&$$

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\&c.$$

Soit $m = 1$, & $n = 8$, on aura $\frac{m\pi}{n} = \frac{\pi}{8}$, & $\mathit{sin.}\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$ & $\mathit{cos.}\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$ & $\frac{\mathit{cos.}\,\frac{\pi}{8}}{\mathit{sin.}\,\frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$.

Ainsi $\frac{\pi}{4\sqrt{(2-\sqrt{2})}} = 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{23} - \&c.$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}-1)} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \&c.$$

Soit maintenant $m = 3$, & $n = 8$; dans ce cas $\frac{m\pi}{n} = \frac{3\pi}{8}$, & $\mathit{sin.}\,\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$ & $\mathit{cos.}\,\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$; d'où $\frac{\mathit{cos.}\,\frac{3}{8}\pi}{\mathit{sin.}\,\frac{3}{8}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$; ce qui donnera les séries . . . . . .

$$\frac{\pi}{4\sqrt{(2+\sqrt{2})}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \&c.$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} + \&c.$$

180. En combinant ces séries, on trouvera: . . . .

$$\frac{\pi\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \&c;$$

$$\frac{\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi[\sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{2} - 1]}{8} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi[\sqrt{(4+2\sqrt{2})} - \sqrt{2} + 1]}{8} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi[\sqrt{2} + 1 + \sqrt{(4-2\sqrt{2})}]}{8} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \&c.$$

$$\frac{\pi[\sqrt{2} + 1 - \sqrt{(4-2\sqrt{2})}]}{8} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \&c.$$

On peut aller plus loin, en suivant un semblable procédé & faisant $n = 16$ & $m = 1$ ou 3 ou 5 ou 7. On trouvera de cette maniere les sommes des séries $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ &c. dans lesquelles les variations des signes + & — suivroient d'autres loix.

181. Si dans les séries trouvées (art. 178) on réunit deux termes en un seul; on aura . . . .

$$\frac{\pi}{n\,sin.\,\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{2m}{nn-mm} - \frac{2m}{4nn-mm} + \frac{2m}{9nn-mm} - \frac{2m}{16nn-mm} + \&c.$$

& par conséquent

$$\frac{1}{nn-mm} - \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} - \&c. = \frac{\pi}{2mn\,sin.\,\frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{2mm}.$$

L'autre série donnera

$$\frac{\pi}{n.\,tang.\,\frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{2m}{nn-mm} - \frac{2m}{4nn-mm} - \frac{2m}{9nn-mm} - \&c;\ \&$$

par conséquent

$$\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \&c. = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn\,tang.\,\frac{m}{n}\pi}.$$

De la somme de ces deux séries résulte celle-ci: . . .

$$\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{25nn-mm} + \&c. = \frac{\pi\,tang.\,\frac{m}{2n}\pi}{4mn}.$$

Si dans cette derniere série $n = 1$, & $m = 2k$, nombre pair quelconque; à cause de $tang.\ k\pi = 0$, on aura toujours, à moins que k ne soit $= 0$, ...

$\frac{1}{1-4kk} + \frac{1}{9-4kk} + \frac{1}{25-4kk} + \frac{1}{49-4kk} + \&c. = 0$; mais, si dans cette série on fait $n = 2$, & m, nombre impair quelconque $= 2k+1$; à cause de $\frac{1}{tang.\,\frac{m\pi}{n}} = 0$, on aura

$$\frac{1}{4-(2k+1)^2} + \frac{1}{16-(2k+1)^2} + \frac{1}{36-(2k+1)^2} + \&c. = \frac{1}{2(2k+1)^2}.$$

182. Multiplions les séries trouvées par nn; & soit $\frac{m}{n} = p$; nous obtiendrons ces résultats: . . . .

$$\frac{1}{1-pp} - \frac{1}{4-pp} + \frac{1}{9-pp} - \frac{1}{16-pp} + \&c. = \frac{\pi}{2p\,\mathit{sin}.\,p\pi} - \frac{1}{2pp}.$$

$$\frac{1}{1-pp} + \frac{1}{4-pp} + \frac{1}{9-pp} + \frac{1}{16-pp} + \&c. = \frac{1}{2pp} - \frac{\pi}{2p\,\mathit{tang}.\,p\pi}.$$

Soit $pp = a$ & ces séries deviendront . . . .

$$\frac{1}{1-a} - \frac{1}{4-a} + \frac{1}{9-a} - \frac{1}{16-a} + \&c. = \frac{\pi\sqrt{a}}{2a\,\mathit{sin}.\,\pi\sqrt{a}} - \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{4-a} + \frac{1}{9-a} + \frac{1}{16-a} + \&c. = \frac{1}{2a} - \frac{\pi\sqrt{a}}{2a\,\mathit{tang}.\,\pi\sqrt{a}}.$$

Ainsi, pourvu que a ne soit pas un nombre négatif, ni un quarré entier, on pourra assigner la somme de ces séries au moyen du cercle.

183. Cependant, en ramenant, comme nous l'avons fait, les exponentielles imaginaires à des sinus & à des cosinus d'arcs circulaires, nous pourrons encore assigner les sommes de ces séries, lorsque a est un nombre négatif. En effet, puisque $e^{x\sqrt{-1}} = \mathit{cos}.\,x + \sqrt{-1}.\,\mathit{sin}.\,x$; & $e^{-x\sqrt{-1}} = \mathit{cos}.\,x - \sqrt{-1}.\,\mathit{sin}.\,x$: réciproquement, en mettant $y\sqrt{-1}$ à la place de x, on aura $\mathit{cos}.\,y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$ & $\mathit{sin}.\,y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2\sqrt{-1}}$. Donc si l'on suppose $a = -b$, & $y = \pi\sqrt{b}$; alors $\mathit{cos}.\,\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}}{2}$ & $\mathit{sin}.\,\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}}$; & par conséquent $\mathit{tang}.\,\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{-b}}}{(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})\sqrt{-1}}$. Il suit de-là que $\frac{\pi\sqrt{-b}}{\mathit{sin}.\,\pi\sqrt{-b}} = -\frac{2\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}$, & $\frac{\pi\sqrt{-b}}{\mathit{tang}.\,\pi\sqrt{-b}} = -\frac{(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}$.

Cela poſé, on aura . . . .

$$\frac{1}{1+b}-\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}-\frac{1}{16+b}+\&c.=\frac{1}{2b}-\frac{\pi\sqrt{b}}{\left(e^{\pi\sqrt{b}}-e^{-\pi\sqrt{b}}\right)b}$$

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}+\frac{1}{16+b}+\&c.=\frac{\left(e^{\pi\sqrt{b}}+e^{-\pi\sqrt{b}}\right)\pi\sqrt{b}}{2b\left(e^{\pi\sqrt{b}}-e^{-\pi\sqrt{b}}\right)}-\frac{1}{2b}.$$

Ces mêmes ſéries peuvent ſe déduire de l'art. 162, en employant la même méthode dont je me ſuis ſervi dans ce Chapitre. Mais, comme la maniere dont j'ai opéré ici, jette un grand jour ſur la transformation des ſinus & des (y) coſinus des arcs imaginaires en quantités exponentielles réelles, j'ai cru devoir lui donner la préférence.

CHAPITRE XI.

Des autres expreſſions infinies des Arcs & des Sinus.

184. Nous avons vu ci-deſſus, (art. 158) que z déſignant un arc de cercle quelconque, on avoit $\text{ſin.}\, z = z\left(1-\frac{zz}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{16\pi\pi}\right)$ &c. & $\text{coſ.}\, z = \left(1-\frac{4zz}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{25\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{49\pi\pi}\right)$ &c. Suppoſons l'arc de cercle $z=\frac{m\pi}{n}$, nous aurons $\text{ſin.}\frac{m\pi}{n}=\frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{mm}{nn}\right)\left(1-\frac{mm}{4nn}\right)\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{mm}{16nn}\right)$&c. & $\text{coſ.}\frac{m\pi}{n}=\left(1-\frac{4mm}{nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{25nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{49nn}\right)$ &c. ou bien mettons $2n$ à la place de n, pour avoir ces expreſſions:

$$\text{ſin.}\ \frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{4nn-mm}{4nn}\right)\left(\frac{16nn-mm}{16nn}\right)\left(\frac{36nn-mm}{36nn}\right)\ \&c.$$

$$\text{coſ.}\ \frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{nn-mm}{nn}\right)\left(\frac{9nn-mm}{9nn}\right)\left(\frac{25nn-mm}{25nn}\right)\left(\frac{49nn-mm}{49nn}\right)\&c.$$

lesquelles étant décomposées en facteurs simples donnent

$$\mathit{sin.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\ \&c.$$

$$\mathit{cos.}\ \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right)\ \&c.$$

Soit mis $n - m$ à la place de m, à cause de $\mathit{sin.}\ \frac{(n-m)\pi}{2n} = \mathit{cos.}\ \frac{m\pi}{2n}$ & de $\mathit{cos.}\ \frac{(n-m)\pi}{2n} = \mathit{sin.}\ \frac{m\pi}{2n}$, on aura ces autres expressions:

$$\mathit{cos.}\ \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{(n-m)\pi}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\ \&c.$$

$$\mathit{sin.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\ \&c.$$

185. On a donc deux expressions du sinus & du cosinus de l'angle $\frac{m\pi}{2n}$; si on les divise l'une par l'autre on aura $1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8}$ &c, & par conséquent $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13}$ &c. C'est-là l'expression que WALLIS a trouvée pour la valeur de la circonférence du cercle dans son *Arithmétique des Infinis*. On peut à l'aide de la premiere expression du sinus en trouver une infinité d'autres semblables à la derniere; on en conclud, en effet, que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{n}{m}\,\mathit{sin.}\ \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\left(\frac{6n}{6n-m}\right)\ \&c.$$

formule, qui par la supposition de $\frac{m}{n} = 1$ donne celle de WALLIS. Soit donc $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, à cause de $\mathit{sin.}\ \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on aura $\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{17}$ &c. Soit $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, à cause de $\mathit{sin.}\ \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, on aura $\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23}$ &c. Si on divise la formule de *Wallis* par celle où $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, on trouvera $\sqrt{2} = \frac{2.\ 2.\ 6.\ 6.\ 10.\ 10.\ 14.\ 14.\ 18.\ 18.}{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15.\ 17.\ 19.}$ &c.

186. Comme la tangente d'un angle est égale au quotient du sinus divisé par le cosinus, on pourra exprimer aussi la valeur de la tangente par des facteurs infinis. Si l'on divise la premiere expression du sinus par la seconde du cosinus, on aura

$$\text{tang.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n-m}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\ \&c.$$

$$\text{cot.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\ \&c.$$

Semblablement pour les sécantes, & pour les cosécantes on aura

$$\text{séc.}\ \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\left(\frac{5n}{5n+m}\right)\ \&c.$$

$$\text{coséc.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\left(\frac{5n}{6n-m}\right)\ \&c.$$

Mais si l'on combine les autres expressions des sinus & des cosinus, on trouvera . . . .

$$\text{tang.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\cdot \&c.$$

$$\text{cot.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}\cdot \&c.$$

$$\text{séc.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\cdot \&c.$$

$$\text{coséc.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdot \&c.$$

187. Si on écrit k au lieu de m, & qu'on détermine d'une maniere semblable le sinus & le cosinus de l'angle $\frac{k\pi}{2n}$, & qu'ensuite on divise par ces dernieres expressions les premieres, on obtiendra les formules: . . . .

$$\frac{\text{sin.}\ \frac{m\pi}{2n}}{\text{sin.}\ \frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{k}\cdot\frac{2n-m}{2n-k}\cdot\frac{2n+m}{2n+k}\cdot\frac{4n-m}{4n-k}\cdot\frac{4n+m}{4n+k}\cdot \&c.$$

$$\frac{\text{sin.}\ \frac{m\pi}{2n}}{\text{cos.}\ \frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{n-k}\cdot\frac{2n-m}{n+k}\cdot\frac{2n+m}{3n-k}\cdot\frac{4n-m}{3n+k}\cdot\frac{4n+m}{5n-k}\cdot \&c.$$

$$\frac{cos. \frac{m\pi}{2n}}{cos. \frac{k\pi}{2n}} = \left(\frac{n-m}{n-k}\right)\left(\frac{n+m}{n+k}\right)\left(\frac{3n-m}{3n-k}\right)\left(\frac{3n+m}{3n+k}\right)\left(\frac{5n-m}{5n-k}\right) \&c.$$

$$\frac{cos. \frac{m\pi}{2n}}{fin. \frac{k\pi}{2n}} = \left(\frac{n-m}{k}\right)\left(\frac{n+m}{2n-k}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+k}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-k}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+k}\right) \&c.$$

Ayant donc pris pour $\frac{k\pi}{2n}$ un angle, dont le ſinus & le coſinus ſoient donnés, on pourra au moyen de ceux-ci déterminer le ſinus & le coſinus de tout autre angle $\frac{m\pi}{2n}$.

188. Donc réciproquement on peut aſſigner les vraies valeurs de ces ſortes d'expreſſions, qui ſont compoſées d'une infinité de facteurs au moyen de la circonférence du cercle, ou au moyen des ſinus & des coſinus d'angles donnés; ce qui ne laiſſe pas d'être d'une grande importance, puiſque juſqu'à préſent il n'y a point d'autres méthodes, qui puiſſent donner les valeurs de ces ſortes de produits. Au reſte, de telles expreſſions ne peuvent guere ſervir à obtenir par approximation les valeurs, ſoit de π, ſoit des ſinus & des coſinus des angles $\frac{m\pi}{2n}$. En effet, quoiqu'on pût ſans difficulté multiplier entr'eux ces facteurs $\frac{\pi}{2} = 2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)$ &c, en employant les fractions décimales, il faudroit cependant prendre un trop grand nombre de termes pour en conclure la valeur exacte de π ſeulement à la dixieme figure décimale près.

189. Le principal uſage de ces expreſſions, quoique infinies, conſiſte dans la recherche des logarithmes; en quoi les facteurs ſont ſi utiles, que ſans eux le calcul des logarithmes ſeroit très-difficile. En effet, puiſque $\pi = 4\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)$ &c, on aura en prenant les logarithmes

logarithmes $l\pi = l4 + l\left(1-\frac{1}{9}\right) + l\left(1-\frac{1}{25}\right) + l\left(1-\frac{1}{49}\right) +$ &c, ou $l\pi = l2 - l\left(1-\frac{1}{4}\right) - l\left(1-\frac{1}{16}\right) - l\left(1-\frac{1}{36}\right) -$ &c. quelques soient les logarithmes, tabulaires, ou hyperboliques. Mais, comme il est aisé de conclure les logarithmes ordinaires des logarithmes hyperboliques, on pourra employer un moyen très-expéditif d'obtenir le logarithme hyperbolique de π.

190. Puis donc qu'en prenant les logarithmes hyperboliques, on a $l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} -$ &c. Si nous développons chaque terme de cette maniere, nous aurons

$$l\pi = l4 \begin{cases} -\frac{1}{9} - \frac{1}{2.9^2} - \frac{1}{3.9^3} - \frac{1}{4.9^4} - \&c. \\ -\frac{1}{25} - \frac{1}{2.25^2} - \frac{1}{3.25^3} - \frac{1}{4.25^4} - \&c. \\ -\frac{1}{49} - \frac{1}{2.49^2} - \frac{1}{3.49^3} - \frac{1}{4.49^4} - \&c. \\ \qquad\qquad \&c. \end{cases}$$

Dans ce nombre infini de séries, les termes pris en descendant verticalement forment eux-mêmes des séries, dont nous avons déja assigné les sommes; c'est pourquoi, si pour abréger, nous supposons . . . .

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.$$

$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \&c.$$

$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \&c.$$

Nous aurons $l\pi = l4 - (A-1) - \frac{1}{2}(B-1) - \frac{1}{3}(C-1) - \frac{1}{4}(D-1) -$ &c.

Or, en cherchant les valeurs approchées des ſommes indiquées ci-deſſus, nous trouverons . . . .

$$
\begin{aligned}
A &= 1,\ 23370055013616982735431\\
B &= 1,\ 01467803160419205454625\\
C &= 1,\ 00144707664094212190647\\
D &= 1,\ 00015517902529611930298\\
E &= 1,\ 00001704136304482550816\\
F &= 1,\ 00000188584858311957590\\
G &= 1,\ 00000020924051921150010\\
H &= 1,\ 00000002323715737915670\\
I &= 1,\ 00000000258143755665977\\
K &= 1,\ 00000000028680769745558\\
L &= 1,\ 00000000003186677514044\\
M &= 1,\ 00000000000354072294192\\
N &= 1,\ 00000000000039341246691\\
O &= 1,\ 00000000000004371244859\\
P &= 1,\ 00000000000000485693682\\
Q &= 1,\ 00000000000000053965957\\
R &= 1,\ 00000000000000005996217\\
S &= 1,\ 00000000000000000666246\\
T &= 1,\ 00000000000000000074027\\
V &= 1,\ 00000000000000000008225\\
W &= 1,\ 00000000000000000000913\\
X &= 1,\ 00000000000000000000101
\end{aligned}
$$

Ainſi, ſans un calcul trop pénible, on trouve le logarithme hyperbolique de $\pi = 1,\ 14472988584940017414342$, lequel étant multiplié par $0,\ 43429$ &c. donne le logarithme ordinaire de $\pi = 0,\ 49714987269413385435126$.

191. Comme nous avons de plus la valeur du ſinus &

celle du cosinus de l'angle $\frac{m\pi}{2n}$ exprimées en un nombre infini de facteurs, nous pourrons déterminer commodément le logarithme de l'un & de l'autre. Or les formules trouvées précédemment donnent . . . .

$$l\,\mathit{sin}.\frac{m\pi}{2n} = l\pi + l\frac{m}{2n} + l\left(1-\frac{mm}{4nn}\right) + l\left(1-\frac{mm}{16nn}\right) + l\left(1-\frac{mm}{36nn}\right) + \&c.$$

$$l\,\mathit{cos}.\frac{m\pi}{2n} = l\left(1-\frac{mm}{nn}\right) + l\left(1-\frac{mm}{9nn}\right) + l\left(1-\frac{mm}{25nn}\right) + l\left(1-\frac{mm}{49nn}\right) + \&c.$$

Donc il sera facile d'abord d'exprimer comme ci-dessus, les logarithmes hyperboliques en séries très-convergentes ; mais pour ne pas multiplier sans nécessité les séries infinies, laissons les logarithmes des premiers termes, & nous aurons

$$l\,\mathit{sin}.\frac{m\pi}{2n} = l\pi + lm + l(2n-m) + l(2n+m) - l8 - 3ln$$

$$- \frac{mm}{16nn} - \frac{m^4}{2.16^2n^4} - \frac{m^6}{3.16^3n^6} - \frac{m^8}{4.16^4n^8} - \&c.$$

$$- \frac{mm}{36nn} - \frac{m^4}{2.36^2n^4} - \frac{m^6}{3.36^3n^6} - \frac{m^8}{4.36^4n^8} - \&c.$$

$$- \frac{mm}{64nn} - \frac{m^4}{2.64^2n^4} - \frac{m^6}{3.64^3n^6} - \frac{m^8}{4.64^4n^8} - \&c.$$

&c.

$$l\,\mathit{cos}.\frac{m\pi}{2n} = l(n-m) + l(n+m) - 2ln$$

$$- \frac{mm}{9nn} - \frac{m^4}{2.9^2n^4} - \frac{m^6}{3.9^3n^6} - \frac{m^8}{4.9^4n^8} - \&c.$$

$$- \frac{mm}{25nn} - \frac{m^4}{2.25^2n^4} - \frac{m^6}{3.25^3n^6} - \frac{m^8}{4.25^4n^8} - \&c.$$

$$- \frac{mm}{49nn} - \frac{m^4}{2.49^2n^4} - \frac{m^6}{3.49^3n^6} - \frac{m^8}{4.49^4n^8} - \&c.$$

&c.

192. Ces séries contiennent toutes les puissances paires de $\frac{m}{n}$ multipliées par des séries, dont nous avons déja assigné les sommes. Ainsi on aura . . . .

$$l\,\textit{sin.}\,\frac{m\pi}{2n} = lm + l(2n - m) + l(2n + m) - 3ln + l\pi - l8$$
$$- \frac{mm}{nn}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \&c.\right)$$
$$- \frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{12^4} + \&c.\right)$$
$$- \frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{12^6} + \&c.\right)$$
$$- \frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{12^8} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

$$l\,\textit{cof.}\,\frac{m\pi}{2n} = l(n - m) + l(n + m) - 2ln$$
$$- \frac{mm}{nn}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.\right)$$
$$- \frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.\right)$$
$$- \frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \&c.\right)$$
$$- \frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

On vient de donner (190) les fommes des dernieres féries;
(ζ) on pourroit en déduire les premieres; mais pour en faciliter
l'ufage, j'ajouterai pareillement ici leurs fommes.

193. Soient donc pour abréger, ...

$$\alpha = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \&c.$$
$$\beta = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \&c.$$
$$\gamma = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \&c.$$
$$\delta = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \&c.$$
$$\&c.$$

Les ſommes approchées au moyen des décimales ſeront:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 0,\ 41123351671205660911810\\
\beta &= 0,\ 06764520210694613696975\\
\gamma &= 0,\ 01589598534350701780804\\
\delta &= 0,\ 00392217717264822007570\\
\varepsilon &= 0,\ 00097753376477325984898\\
\zeta &= 0,\ 00024420070472492872274\\
\eta &= 0,\ 00006103889453949332915\\
\theta &= 0,\ 00001525902225127269977\\
\iota &= 0,\ 00000381471182744318008\\
\kappa &= 0,\ 00000095367522617534053\\
\lambda &= 0,\ 00000023841863595259154\\
\mu &= 0,\ 00000005960464832831555\\
\nu &= 0,\ 00000001490116141589813\\
\xi &= 0,\ 00000000372529031233986\\
o &= 0,\ 00000000093132257548284\\
\pi &= 0,\ 00000000023283064370807\\
\rho &= 0,\ 00000000005820766091685\\
\sigma &= 0,\ 00000000001455191522858\\
\tau &= 0,\ 00000000000363797880710\\
\upsilon &= 0,\ 00000000000090949470177\\
\varphi &= 0,\ 00000000000022737367544\\
\chi &= 0,\ 00000000000005684341886\\
\psi &= 0,\ 00000000000001421085471\\
\omega &= 0,\ 00000000000000355271367
\end{aligned}
$$

Les autres ſommes décroiſſent en raiſon quadruple.

194. On aura donc à l'aide de ces valeurs, ...

$$l\,\mathit{ſin.}\,\frac{m\pi}{2n} = lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3ln + l\pi - l8$$

$$-\frac{mm}{nn}\left(\alpha - \frac{1}{2^2}\right) - \frac{m^4}{2n^4}\left(\beta - \frac{1}{2^4}\right) - \frac{m^6}{3n^6}\left(\gamma - \frac{1}{2^6}\right) - \&c.$$

$$l\,cof.\,\frac{m\pi}{2n} = l(n-m) + l(n+m) - 2\,l\,n$$
$$- \frac{mm}{nn}(A-1) - \frac{m^4}{2n^4}(B-1) - \frac{m^6}{3n^6}(C-1) - \&c.$$

Ainſi, les logarithmes $l\pi$ & $l\,8$ étant donnés, on aura le logarithme hyperbolique du ſinus de l'angle $\frac{m}{n}\,90^\circ =$ $lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3\,ln$ . . . . . .

$$- \quad 0,93471165583043575410$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,16123351671205660911$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,00257260105347306848$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,00009032844783567260$$
$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00000398179316205501$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,00000019425295465196$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,00000001001328748812$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,00000000053404135618$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,00000000002914859658$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,00000000000161797979$$
$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,00000000000009097690$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,00000000000000516827$$
$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,00000000000000029607$$
$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,00000000000000001708$$
$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,00000000000000000099$$
$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,00000000000000000005$$

Et le logarithme hyperbolique du cosinus de l'angle $\frac{m}{n} 90^\circ =$

$$l(n-m) + l(n+m) - 2\,l n$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,23370055013616982735$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,00733901580209602727$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,00048235888031404063$$
$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00003879475632402982$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,00000340827260896510$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,00000031430809718659$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,00000002989150274450$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,00000000290464467239$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,00000000028682639518$$
$$- \frac{m^{20}}{m^{20}} \cdot 0,00000000002868076974$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,00000000000289697956$$
$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,00000000000029506024$$
$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,00000000000003026249$$
$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,00000000000000312232$$
$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,00000000000000032379$$
$$- \frac{m^{32}}{n^{32}} \cdot 0.00000000000000003373$$
$$- \frac{m^{34}}{n^{34}} \cdot 0,00000000000000000352$$
$$- \frac{m^{36}}{n^{36}} \cdot 0,00000000000000000037$$
$$- \frac{m^{38}}{n^{38}} \cdot 0,00000000000000000004$$

195. En multipliant ces logarithmes hyperboliques des

sinus & des cosinus, par 0,4342944819 &c, on aura leurs logarithmes ordinaires rapportés au rayon $= 1$. Mais comme dans les tables le logarithme du sinus total est supposé ordinairement $= 10$, pour avoir les logarithmes tabulaires des sinus & des cosinus, il faut, après la multiplication, ajouter 10.

Ainsi le logarithme tabulaire du sinus de l'angle $\frac{m}{n}\,90^\circ$ sera $=$

$$\begin{aligned}
& lm + l(2n - m) + l(2n + m) - 3\,ln \\
& + \quad 9,\ 594059885702190 \\
& - \frac{m^2}{n^2}\cdot 0,\ 070022826605901 \\
& - \frac{m^4}{n^4}\cdot 0,\ 001117266441661 \\
& - \frac{m^6}{n^6}\cdot 0,\ 000039229146453 \\
& - \frac{m^8}{n^8}\cdot 0,\ 000001729270798 \\
& - \frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0,\ 000000084362986 \\
& - \frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0,\ 000000004348715 \\
& - \frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0,\ 000000000231931 \\
& - \frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0,\ 000000000012659 \\
& - \frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0,\ 000000000000702 \\
& - \frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0,\ 000000000000039
\end{aligned}$$

Et le logarithme tabulaire du cosinus de l'angle $\frac{m}{n}\,90^\circ =$

$$\begin{aligned}
& l(n - m) + l(n + m) - 2\,ln \\
& + \quad 10,\ 000000000000000 \\
& - \frac{m^2}{n^2}\cdot 0,\ 101494859341892 \\
& - \frac{m^4}{n^4}\cdot 0,\ 003187294065451
\end{aligned}$$

—

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0002094858000017$$
$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000016848348597$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000001480193986$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000136502272$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000012981715$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000001261471$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000124567$$
$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000012456$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000001258$$
$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,000000000000128$$
$$= \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,000000000000013$$

196. On peut donc, moyennant ces formules, calculer les logarithmes, ſoit hyperboliques, ſoit tabulaires des ſinus & des coſinus de tous les angles, ſans connoître les ſinus & les coſinus mêmes. Or la connoiſſance des logarithmes des ſinus & des coſinus donnera par la ſouſtraction ſeule ceux des tangentes & des cotangentes, des ſécantes & des coſécantes; ainſi, on n'aura point beſoin pour ces dernieres de formules particulieres. Au reſte, il ne faut pas perdre de vue qu'on doit prendre les logarithmes hyperboliques des nombres m, n, $n - m$, $n + m$, &c, lorſqu'on cherche les logarithmes hyperboliques des ſinus & des coſinus, & les logarithmes ordinaires des mêmes nombres, lorſqu'il s'agit de trouver ceux-ci au moyen des dernieres formules. De plus $m : n$ déſigne le rapport de l'angle propoſé à l'angle droit; ainſi, puiſque les ſinus des angles plus grands qu'un

demi-droit sont égaux aux cosinus d'angles moindres, & réciproquement; il s'ensuit que la fraction $\frac{m}{n}$ ne devra jamais être plus grande que $\frac{1}{2}$, & que par conséquent ces termes deviendront beaucoup plus convergents, de sorte qu'il suffira pour notre objet d'en prendre la moitié.

197. Donnons, avant de finir, une maniere de trouver les tangentes & les sécantes, plus commode que celle que nous avons proposée dans le Chapitre précédent. Car, quoique les tangentes & les sécantes se déterminent par les sinus & les cosinus; cependant cette détermination qui se fait par la division devient trop pénible pour de si grands nombres. Nous avons déja donné, à la vérité (art. 136) les formules des tangentes & des cotangentes; mais nous n'avons pu en donner alors la démonstration que nous avons réservée pour ce Chapitre.

198. Tirons donc d'abord de l'art. 181 l'expression de la tangente de l'angle $\frac{m}{2n}\pi$. Puisque $\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{25nn-mm}$ + &c. $= \frac{\pi}{4mn} \cdot tang. \frac{m}{2n}\pi$, on aura $tang. \frac{m}{2n} \cdot \pi = \frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{25nn-mm} + \&c\right)$. Ensuite, comme $\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \&c. = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn} \cdot cot. \frac{m}{n} \cdot \pi$, si, au lieu de n, nous écrivons $2n$, nous trouverons $cot. \frac{m}{2n} \cdot \pi = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{16nn-mm} + \frac{1}{36nn-mm} + \&c\right)$.

Convertissons en séries infinies ces fractions, excepté les premieres, dont il est facile de tenir compte, nous aurons

$$tang. \frac{m}{2n} \cdot \pi = \frac{mn}{nn-mm} \cdot \frac{4}{\pi}$$
$$+ \frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{3^2 n} + \frac{m^3}{3^4 n^3} + \frac{m^5}{3^6 n^5} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{5^2 n} + \frac{m^3}{5^4 n^3} + \frac{m^5}{5^6 n^5} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{7^2 n} + \frac{m^3}{7^4 n^3} + \frac{m^5}{7^6 n^5} + \&c.\right)$$
&c.

$$\textit{cot.}\ \frac{m}{2n}\cdot\pi = \frac{n}{m}\cdot\frac{2}{\pi} - \frac{mn}{4nn-mm}\cdot\frac{4}{\pi}$$
$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{4^2 n}+\frac{m^3}{4^4 n^3}+\frac{m^5}{4^6 n^5}+\&c.\right)$$
$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{6^2 n}+\frac{m^3}{6^4 n^3}+\frac{m^5}{6^6 n^5}+\&c.\right)$$
$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{8^2 n}+\frac{m^3}{8^4 n^3}+\frac{m^5}{8^6 n^5}+\&c.\right)$$
$$\&c.$$

198. Or la valeur connue de π donne $\frac{1}{\pi} = 0, \ldots$ 318309886183790671537767926745028724; viennent ensuite les mêmes séries, que nous avons désignées ci-dessus par les lettres A, B, C, D, &c, & $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. Cela observé : $\textit{tang.}\ \frac{m}{2n}\pi = \frac{mn}{nn-mm}\cdot\frac{4}{\pi} + \frac{m}{n}\cdot\frac{4}{\pi}(A-1) + \frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{4}{\pi}(B-1) + \frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{4}{\pi}(C-1) + \frac{m^7}{n^7}\cdot\frac{4}{\pi}(D-1)$ &c. & $\textit{cotang.}\ \frac{m}{2n}\pi = \frac{n}{m}\cdot\frac{2}{\pi} - \frac{4mn}{4nn-mm}\cdot\frac{1}{\pi} - \frac{m}{n}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\alpha - \frac{1}{2^2}\right) - \frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\beta - \frac{1}{2^4}\right) - \frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\gamma - \frac{1}{2^6}\right) -$ &c. . . .

C'est de ces formules que dérivent les expressions que nous avons données (art. 135) pour la tangente & pour la cotangente. Nous avons fait voir aussi (art. 137) comment les tangentes & les cotangentes une fois trouvées, on en pouvoit déduire seulement par l'addition & par la soustraction les sécantes & les cosécantes. On pourroit donc par le moyen de ces regles calculer une table générale des sinus, des tangentes, des sécantes & de leurs logarithmes beaucoup plus facilement que ne l'ont fait les premiers calculateurs.

CHAPITRE XII.

Du développement réel des Fonctions fractionnaires.

199. Nous avons déja donné dans le Chapitre second la méthode de décomposer une fonction fractionnaire quelconque, en autant de parties que le dénominateur renferme de facteurs simples ; car ceux-ci forment les dénominateurs de ces fractions partielles ; d'où il suit évidemment que, si le dénominateur contient quelques facteurs simples imaginaires, les fractions qui en résulteront seront aussi imaginaires : or, dans ce cas, il y aura peu d'avantage à décomposer la fraction réelle en imaginaires. Mais, comme on a fait voir que toute fonction entiere, telle que le dénominateur d'une fraction quelconque, peut toujours, quelque soit le nombre de facteurs imaginaires qu'elle renferme, se décomposer en facteurs réels doubles ou de deux dimensions, on pourra par-là éviter les quantités imaginaires dans la décomposition des fractions, en prenant pour les dénominateurs des fractions partielles, non pas les facteurs simples du dénominateur principal, mais les facteurs réels doubles.

200. Soit donc proposée la fonction fractionnaire $\frac{M}{N}$, de laquelle on extraira, suivant la méthode donnée auparavant, autant de fractions simples, que le dénominateur N renferme de facteurs simples réels ; mais, au lieu de facteurs imaginaires, prenons cette expression $pp - 2pqz \cdot cos. \phi + qqzz$, pour facteur de N, & comme il faut avoir ici le numérateur & le dénominateur sous une forme développée, soit proposée la fraction . . . .

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.}{(pp - 2pqz \cdot cos. \phi + qqzz)(\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \&c)},$$

& supposons la fraction particelle que fournit le dénominateur $pp - 2pqz \cos.\varphi + qqzz$, représentée par $\frac{A + \text{A}z}{pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz}$. En effet, la variable z, ayant deux dimensions dans le dénominateur, pourra bien en avoir une au numérateur, mais non davantage; autrement la quantité renfermeroit une fonction entiere, qu'il faudroit extraire séparément.

201. Soit, pour abréger, le numérateur $A + Bz + Cz^2 +$ &c. $= M$ & l'autre facteur du dénominateur $\alpha + \beta z + \gamma z^2 +$ &c. $= Z$; soit supposée la 2^e^ partie, qui résulte du facteur Z du dénominateur, $= \frac{Y}{Z}$; on aura $Y = \frac{M - \text{A}Z - \text{A}Zz}{pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz}$; expression qui doit être une fonction entiere de z; par conséquent il est nécessaire que $M - \text{A}Z - \text{A}Zz$ soit divisible par $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$. Ainsi la quantité $M - \text{A}Z - \text{A}Zz$ s'évanouira, si l'on fait $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz = 0$, c'est-à-dire, si on fait $z = \frac{p}{q}.(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$, ou $z = \frac{p}{q}.(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)$; soit $\frac{p}{q} = f$, alors $z^n = f^n.(\cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.n\varphi)$. Cette double substitution de la valeur de z, donnera deux équations, au moyen desquelles on pourra déterminer les deux inconnues constantes A & A.

202. Ayant donc fait cette substitution, l'équation $M = \text{A}Z + \text{A}Zz$ étant développée donnera ces deux-ci: . . . .

$$\left.\begin{matrix} A + Bf.\cos.\varphi + Cff\cos.2\varphi + Df^3\cos.3\varphi + \&c. \\ \pm(Bf\sin.\varphi + Cff\sin.2\varphi + Df^3\sin.3\varphi + \&c.)\sqrt{-1} \end{matrix}\right\} =$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{A}(\alpha + \beta f\cos.\varphi + \gamma ff\cos.2\varphi + \delta f^3\cos.3\varphi + \&c.) \\ \pm \text{A}(\beta ff\sin.\varphi + \gamma ff\sin.2\varphi + \delta f^3\sin.3\varphi + \&c.)\sqrt{-1}. \\ + \text{A}(\alpha f\cos.\varphi + \beta ff\cos.2\varphi + \gamma f^3\cos.3\varphi + \&c.) \\ \pm \text{A}(\alpha f\sin.\varphi + \beta ff\sin.2\varphi + \gamma f^3\sin.3\varphi + \&c.)\sqrt{-1}. \end{matrix}\right.$$

Soit pour abréger le calcul,

$$A + Bf\,cos.\,\varphi + Cff\,cos.\,2\varphi + Df^3\,cos.\,3\varphi + \&c. = \mathrm{P}$$
$$Bf\,sin.\,\varphi + Cff\,sin.\,2\varphi + Df^3\,sin.\,3\varphi + \&c. = \mathrm{p}$$
$$\alpha + \beta f\,cos.\,\varphi + \gamma ff\,cos.\,2\varphi + \delta f^3\,cos.\,3\varphi + \&c. = \mathrm{Q}$$
$$\beta f\,sin.\,\varphi + \gamma ff\,sin.\,2\varphi + \delta f^3\,sin.\,3\varphi + \&c. = \mathrm{q}$$
$$\alpha f\,cos.\,\varphi + \beta ff\,cos.\,2\varphi + \gamma f^3\,cos.\,3\varphi + \&c. = \mathrm{R}$$
$$\alpha f\,sin.\,\varphi + \beta ff\,sin.\,2\varphi + \gamma f^3\,sin.\,3\varphi + \&c. = \mathrm{r}$$

cela posé,

$$\mathrm{P} \pm \mathrm{p}\sqrt{-1} = \mathrm{AQ} \pm \mathrm{Aq}\sqrt{-1} + \mathrm{aR} \pm \mathrm{ar}\sqrt{-1}.$$

203. A cause du double signe, on aura les deux équations

$$\mathrm{P} = \mathrm{AQ} + \mathrm{aR}$$
$$\mathrm{p} = \mathrm{Aq} + \mathrm{ar}$$

d'où l'on tirera les valeurs des inconnues A & a,

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{Pr} - \mathrm{pR}}{\mathrm{Qr} - \mathrm{qR}} \;\&\; \mathrm{a} = \frac{\mathrm{Pq} - \mathrm{pQ}}{\mathrm{qR} - \mathrm{Qr}}.$$

Étant donc proposée la fraction $\frac{M}{(pp - 2pqz\cdot cos.\,\varphi + qqzz)\,Z}$, on trouvera, en observant la regle qui suit, la fraction partielle $\frac{\mathrm{A} + \mathrm{a}z}{pp - 2pqz\cdot cos.\,\varphi + qqzz}$ qui en résulte. Faisons $f = \frac{p}{q}$, & après avoir développé chacun des termes, supposons

qu'en faisant $z^n = f^n\,cos.\,n\varphi$, M devienne $= \mathrm{P}$
. . . . $z^n = f^n\,sin.\,n\varphi$, M $= \mathrm{p}$
. . . . $z^n = f^n\,cos.\,n\varphi$, Z $= \mathrm{Q}$
. . . . $z^n = f^n\,sin.\,n\varphi$, Z $= \mathrm{q}$
. . . . $z^n = f^n\,cos.\,n\varphi$, zZ $= \mathrm{R}$
$z^n = f^n\,sin.\,n\varphi$, zZ $= \mathrm{r}$

Ayant trouvé de cette maniere les valeurs P, Q, R, p, q, r, on aura $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{Pr} - \mathrm{pR}}{\mathrm{Qr} - \mathrm{qR}}$ & $\mathrm{a} = \frac{\mathrm{pQ} - \mathrm{Pq}}{\mathrm{Qr} - \mathrm{qR}}$.

EXEMPLE I.

Prenons la fonction fractionnaire $\frac{zz}{(1-z+zz)(1+z^4)}$, & cherchons la partie qui provient du facteur $1-z+zz$ du dénominateur, laquelle nous représentons par $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{a}z}{1-z+zz}$. Ce facteur comparé avec la formule générale $pp - 2pqz.\,cof.\,\varphi + qqzz$, donne $p = 1$, $q = 1$, & $cof.\,\varphi = \frac{1}{2}$; d'où $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$; ainsi, puisque $M = zz$, $Z = 1 + z^4$ & $f = 1$, nous aurons

$$\mathrm{P} = cof.\,\tfrac{2}{3}\,\pi = -\tfrac{1}{2};\quad \mathrm{p} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{Q} = 1 + cof.\,\tfrac{4}{3}\,\pi = \tfrac{1}{2};\quad \mathrm{q} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{R} = cof.\,\frac{\pi}{3} + cof.\,\frac{5\pi}{3} = 1;\quad \mathrm{r} = 0.$$

Donc $\mathrm{A} = -1$, & $\mathrm{a} = 0$, & partant la fraction cherchée $= \frac{-1}{1-z+zz}$; & le complément de cette fraction sera $\frac{1+z+zz}{1+z^4}$, qu'on peut de même réduire, par la raison que le dénominateur $1 + z^4$ a pour facteurs $1 + z\sqrt{2} + zz$ & $1 - z\sqrt{2} + zz$; alors $\varphi = \frac{\pi}{4}$, & dans le premier cas $f = -1$, & dans le second $f = +1$.

EXEMPLE II.

Supposons donc qu'il s'agisse de décomposer la fraction $\frac{1+z+zz}{(1+z\sqrt{2}+zz)(1-z\sqrt{2}+zz)}$; on aura $M = 1 + z + zz$; & pour le premier facteur, $f = -1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$, & $Z = 1 - z\sqrt{2} + zz$; par conséquent . . . .

$$\mathrm{P} = 1 - cof.\,\frac{\pi}{4} + cof.\,\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{p} = -fin.\,\frac{\pi}{4} + fin.\,\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Q} = 1 + \sqrt{2}.\,cof.\,\frac{\pi}{4} + cof.\,\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathrm{Q} = +\sqrt{2}\,\mathit{sin.}\,\frac{\pi}{4} + \mathit{sin.}\,\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathrm{R} = -\mathit{cos.}\,\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\,\mathit{cos.}\,\frac{2\pi}{4} - \mathit{cos.}\,\frac{3\pi}{4} = 0$$

$$\mathrm{r} = -\mathit{sin.}\,\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\,\mathit{sin.}\,\frac{2\pi}{4} - \mathit{sin.}\,\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

D'après cela, on trouvera $\mathrm{Qr} - \mathrm{qR} = -4\sqrt{2}$; $\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$, & $\mathrm{a} = 0$; par conséquent le facteur $1 + z\sqrt{2} + zz$ du dénominateur donnera la fraction partielle $\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + zz}$; pareillement l'autre facteur donnera celle-ci : $\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + zz}$. Ainsi, la fonction proposée d'abord $\frac{zz}{(1 - z + zz)(1 + z^4)}$ se résoud en ces fractions $\frac{-1}{1 - z + zz} + \frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + zz} + \frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + zz}$.

EXEMPLE III.

Soit encore donnée à résoudre la fraction $\frac{1 + 2z + zz}{(1 - \frac{8}{5}z + zz)(1 + 2z + 3zz)}$; représentons la fraction qui résultera du facteur $1 - \frac{8}{5}z + zz$ du dénominateur par $\frac{\mathrm{A} + \mathrm{a}z}{1 - \frac{8}{5}z + zz}$; nous aurons $p = 1$, $q = 1$; $\mathit{cos.}\,\varphi = \frac{4}{5}$; par conséquent $f = 1$; $M = 1 + 2z + zz$; $Z = 1 + 2z + 3zz$. Mais comme ici le rapport de l'angle φ à l'angle droit n'est pas déterminé, il faut calculer à part les sinus & les cosinus des angles multiples. Ainsi, à cause de . . .

$\mathit{cos.}\,\varphi = \frac{4}{5}$; on aura $\mathit{sin.}\,\varphi = \frac{3}{5}$.

$\mathit{cos.}\,2\varphi = \frac{7}{25}$; $\mathit{sin.}\,2\varphi = \frac{24}{25}$.

$\mathit{cos.}\,3\varphi = \frac{-44}{125}$; $\mathit{sin.}\,3\varphi = \frac{117}{125}$;

Par

Par conséquent . . . .

$$P = 1 + 2.\frac{4}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$$

$$p = + 2.\frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25}$$

$$Q = 1 + 2.\frac{4}{5} + 3.\frac{7}{25} = \frac{86}{25}$$

$$q = + 2.\frac{3}{5} + 3.\frac{24}{25} = \frac{102}{25}$$

$$R = \frac{4}{5} + 2.\frac{7}{25} - 3.\frac{44}{125} = \frac{38}{125}$$

$$r = \frac{3}{5} + 2.\frac{24}{25} + 3.\frac{117}{125} = \frac{666}{125}$$

& conséquemment $Qr - qR = \frac{53400}{25.125} = \frac{2136}{125}$. Donc

$$A = \frac{1836}{2136} = \frac{153}{178}; \quad a = -\frac{540}{2136} = -\frac{45}{178}.$$

Ainsi la fraction qui proviendra du facteur $1 - \frac{8}{5}z + zz$ sera $\frac{9(17 - 5z) : 178}{1 - \frac{8}{5}z + zz}$

Cherchons de même la fraction correspondante à l'autre facteur; nous aurons $p = 1$, $q = -\sqrt{3}$, & $cos.\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; donc $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $M = 1 + 2z + zz$ & $Z = 1 - \frac{8}{5}z + zz$. Or à cause

de $cos.\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $sin.\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$cos.\,2\varphi = -\frac{1}{3}$, $sin.\,2\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$cos.\,3\varphi = -\frac{5}{3\sqrt{3}}$, $sin.\,3\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

Conséquemment . . . .

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$Q = 1 + \frac{8}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} = \frac{64}{45}$$

$$q = +\frac{8}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$R = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5 \cdot 3} \cdot -\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot -\frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{135}$$

$$r = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5 \cdot 3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -\frac{98\sqrt{2}}{135}$$

Donc $Qr - qR = -\frac{712\sqrt{2}}{675}$, & partant . . . .

$$A = \frac{100}{712} = \frac{25}{178}; \quad a = \frac{540}{712} = \frac{135}{178}.$$

Ainſi la fraction propoſée $\dfrac{1 + 2z + zz}{(1 - \frac{8}{5}z + zz)(1 + 2z + 3zz)}$ ſe décompoſe

(aa) en ces deux-ci : $\dfrac{9(17 - 5z) : 178}{1 - \frac{8}{5}z + zz} + \dfrac{5(5 + 27z) : 178}{1 + 2z + 3zz}$.

204. Remarquons qu'on peut conclure des lettres Q & q les valeurs des lettres R & r. En effet, puiſque . . .

$$Q = \alpha + \beta f \, cof.\, \phi + \gamma f^2 \, cof.\, 2\phi + \delta f^3 \, cof.\, 3\phi + \&c.$$

$$q = \beta f \, fin.\, \phi + \gamma f^2 \, fin.\, 2\phi + \delta f^3 \, fin.\, 3\phi + \&c;$$

on aura . . . .

$$Q \, cof.\, \phi - q \, fin.\, \phi = \alpha . \, cof.\, \phi + \beta f \, cof.\, 2\phi + \gamma f^2 \, cof.\, 3\phi + \&c.$$

& par conſéquent $R = f(Q \, cof.\, \phi - q \, fin.\, \phi)$;

on aura enſuite . . . .

$$Q \, fin.\, \phi + q \, cof.\, \phi = \alpha \, fin.\, \phi + \beta f \, fin.\, 2\phi + \gamma f f \, fin.\, 3\phi + \&c.$$

donc $r = f(Q \, fin.\, \phi + q \, cof.\, \phi)$

par conſéquent . . . .

$$Qr - qR = (QQ + qq) \, f \, fin.\, \phi$$

$$Pr - pR = (PQ + pq) \, f \, fin.\, \phi + (Pq - pQ) \, f \, cof.\, \phi$$

donc . . . . ,

$$A = \frac{PQ + pq}{QQ + qq} + \frac{Pq - pQ}{QQ + qq} \cdot \frac{cof.\, \phi}{fin.\, \phi}$$

$$a = -\frac{Pq + pQ}{(QQ + qq) f \, fin.\, \phi}$$

Ainsi le facteur $pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz$ du dénominateur donnera la fraction partielle

$$\frac{(PQ + pQ)f\,fin.\varphi + (Pq - pQ)(f\,cof.\varphi - z)}{(pp - 2pqz.\,cof.\varphi + qqzz)(QQ + qq)f\,fin.\varphi}$$

ou, à cause de $f = \frac{p}{q}$, celle-ci :

$$\frac{(PQ + pq)p\,fin.\varphi + (Pq - pQ)(p\,cof.\varphi - qz)}{(pp - 2pqz\,cof.\varphi + qqzz)(QQ + qq)\,p\,fin.\varphi}$$

205. Cette derniere fraction est donc la fraction partielle que donne le facteur $pp - 2pqz\,cof.\varphi + qqzz$ du dénominateur de la fonction proposée $\frac{M}{(pp - 2pqz\,cof.\varphi + qqzz)Z}$, & les lettres P, p, Q & q se trouvent de la maniere suivante au moyen des fonctions M & Z: . . . .

ayant supposé $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot cof.\ n\varphi$, soit $M = P$;
& $Z = Q$;

& ayant supposé $z^n = \frac{p^n}{q^n}\,fin.\ n\varphi$, soit $M = p$;
& $Z = q$;

Remarquez qu'avant de faire cette substitution il faut développer les fonctions M & Z, afin d'avoir des expressions de la forme suivante : . . . .

$$M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$$
$$\& Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \&c.$$

on aura . . . .

$$P = A + B\frac{p}{q}\cdot cof.\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\cdot cof.\,2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\cdot cof.\,3\varphi + \&c.$$

$$p = B\frac{p}{q}\cdot fin.\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\cdot fin.\,2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\cdot fin.\,3\varphi + \&c.$$

$$Q = \alpha + \beta\frac{p}{q}\cdot cof.\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\cdot cof.\,2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\cdot cof.\,3\varphi + \&c.$$

$$q = \beta\frac{p}{q}\cdot fin.\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\cdot fin.\,2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\cdot fin.\,3\varphi + \&c.$$

206. On voit au reste par ce qui précede que cette résolution ne peut réussir, si la fonction Z renferme encore le même facteur $pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz$. En effet, après avoir fait, en ce cas, dans l'équation $M = AZ + \mathrm{a}Zz$ la substitution $z^n = f^n\,(cos.\,n\varphi \pm \sqrt{-1}\,sin.\,n\varphi)$, la quantité Z s'évanouiroit elle-même, & par conséquent on n'en pourroit rien conclure. Donc, si le dénominateur de la fonction fractionnaire $\frac{M}{N}$ a pour facteur $(pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz)^2$ ou une puissance plus élevée, on aura besoin d'une résolution particuliere. Soit donc $N = (pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz)^2 Z$; le facteur $(pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz)^2$ du dénominateur donnera deux fractions partielles de cette forme; . . .

$$\frac{A + \mathrm{a}z}{(pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz)^2} + \frac{B + \mathrm{b}z}{pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz}$$ dans lesquelles il s'agit de déterminer les lettres constantes A, a, B, b.

207. Cela posé, ...

$$\frac{M - (A + \mathrm{a}z)Z - (B + \mathrm{b}z)Z(pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz)}{(pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz)^2}$$

doit être une fonction entiere, & par cette raison le numérateur sera divisible par le dénominateur. Il faudra donc que cette expression $M - AZ - \mathrm{a}zZ$ soit divisible d'abord par $pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz$. Ce cas étant le même que le précédent, on déterminera aussi de la même maniere les valeurs des lettres A & a. C'est pourquoi . . . . . .

en faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n}\,.\,cos.\,n\varphi$, supposons $M = P$ & $Z = N$

& en faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n}\,.\,sin.\,n\varphi$, supposons $M = \mathrm{p}$ & $Z = \mathrm{n}$;

en suivant la regle précédente, il est bien clair que nous aurons

$$A = \frac{PN + \mathrm{pn}}{N^2 + \mathrm{n}^2} + \frac{P\mathrm{n} - \mathrm{p}N}{N^2 + \mathrm{n}^2}\,.\,\frac{cos.\,\varphi}{sin.\,\varphi}$$

$$\mathrm{a} = \frac{-P\mathrm{n} + \mathrm{p}N}{N^2 + \mathrm{n}^2}\,.\,\frac{q}{p.\,sin.\,\varphi}.$$

208. Ayant donc trouvé de cette maniere A & A, la quantité $\frac{M-(A+Az)Z}{pp-2pqz\,cos.\varphi+qqzz}$ deviendra une fonction entiere, que j'appelle P; l'expression $P - BZ - bzZ$ restera encore divisible par $pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz$, & comme elle est semblable à la précédente, si . . . .

en faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot cos.\,n\varphi$, on suppose $P = R$

& en faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot sin.\,n\varphi$, on suppose $P = r$,

on aura $B = \frac{RN + rn}{N^2 + n^2} + \frac{Rn - rN}{N^2 + n^2} \cdot \frac{cos.\varphi}{sin.\varphi}$

$$b = \frac{-Rn + rN}{N^2 + n^2} \cdot \frac{q}{p.\,sin.\varphi}.$$

209. On est maintenant en état de conclure en général la maniere de procéder, lorsque le dénominateur de la fonction proposée $\frac{M}{N}$ a un facteur tel que $(pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz)^k$. En effet, soit $N = (pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz)^k Z$, de sorte qu'on ait à résoudre la fonction fractionnaire.

$$\frac{M}{(pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz)^k Z}.$$

Supposons que le facteur $(pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz)^k$ du dénominateur fournisse ces fractions partielles : . . .

$$\frac{A + az}{(pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz)^k} + \frac{B + bz}{(pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz)^{k-1}}$$
$$+ \frac{C + cz}{(pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz)^{k-2}} + \frac{D + dz}{(pp - 2pqz\,cos.\varphi + qqzz)^{k-3}} + \&c.$$

En faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot cos.\,n\varphi$, soit $M = M$,
& $Z = N$;

& en faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot sin.\,n\varphi$, soit $M = m$,
& $Z = n$;

nous aurons . . . .

$$A = \frac{MN + mn}{N^2 + n^2} + \frac{Mn - mN}{N^2 + n^2} \cdot \frac{cos.\varphi}{sin.\varphi}.$$

$$a = \frac{-Mn + mN}{N^2 + n^2} \cdot \frac{q}{p.\,sin.\varphi}.$$

Soit ensuite $\frac{M - (\mathrm{A} + \mathrm{a}z)Z}{pp - 2pqz.\,cos.\,\varphi + qqzz} = P$; &

faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,cos.\,n\,\varphi$, soit $P = \mathrm{P}$,

& faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,sin.\,n\,\varphi$, soit $P = \mathrm{p}$;

nous obtiendrons . . . .

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{PN} + \mathrm{pn}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2} + \frac{\mathrm{Pn} - \mathrm{pN}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2}.\frac{cos.\,\varphi}{sin.\,\varphi}$$

$$\mathrm{b} = \frac{-\mathrm{Pn} + \mathrm{pN}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2}.\frac{q}{p.\,sin.\,\varphi}.$$

faisons à présent $\frac{P - (\mathrm{B} + \mathrm{b}z)Z}{pp - 2pqz.\,cos.\,\varphi + qqzz} = Q$ &

supposant $z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,cos.\,n\,\varphi$, soit $Q = \mathrm{Q}$,

& supposant $z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,sin.\,n\,\varphi$, soit $Q = \mathrm{q}$,

nous en conclurons . . . .

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{QN} + \mathrm{qn}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2} + \frac{\mathrm{Qn} - \mathrm{qN}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2}.\frac{cos.\,\varphi}{sin.\,\varphi}$$

$$\mathrm{c} = \frac{-\mathrm{Qn} + \mathrm{qN}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2}.\frac{q}{p.\,sin.\,\varphi}.$$

Soit enfin $\frac{Q - (\mathrm{C} + \mathrm{c}z)Z}{pp - 2pqz.\,cos.\,\varphi + qqzz} = R$, & . . . . . .

faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,cos.\,n\,\varphi$, supposons $R = \mathrm{R}$,

& faisant $z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,sin.\,n\,\varphi$, supposons $R = \mathrm{r}$,

nous trouverons . . . .

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{RN} + \mathrm{rn}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2} + \frac{\mathrm{Rn} - \mathrm{rN}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2}.\frac{cos.\,\varphi}{sin.\,\varphi}$$

$$\mathrm{d} = \frac{-\mathrm{Rn} + \mathrm{rN}}{\mathrm{N}^2 + \mathrm{n}^2}.\frac{q}{p.\,sin.\,\varphi}.$$

On continuera de suivre le même procédé, jusqu'à ce qu'on ait déterminé le numérateur de la derniere fraction, dont le dénominateur est $pp - 2pqz\,cos.\,\varphi + qqzz$.

EXEMPLE.

Soit donnée la fonction fractionnaire $\frac{z - z^3}{(1 + zz)^4\,(1 + z^4)}$, & concevons que les fractions partielles, qui naissent du facteur $(1 + zz)^4$ soient . . . .

$$\frac{A + \mathfrak{A}z}{(1+zz)^4} + \frac{B + \mathfrak{B}z}{(1+zz)^3} + \frac{C + \mathfrak{C}z}{(1+zz)^2} + \frac{D + \mathfrak{D}z}{1 + zz}.$$

En comparant, on trouvera $p = 1$, $q = 1$, $cos.\ \varphi = 0$, & par conséquent $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; puis $M = z - z^3$ & $Z = 1 + z^4$. On aura donc $\mathrm{M} = 0$; $\mathfrak{M} = 2$; $\mathrm{N} = 2$; $\mathfrak{N} = 0$, & $sin.\ \varphi = 1$ . . . .

Donc . . . .

$$A = -\tfrac{4}{4}.\ 0 = 0,\ \&\ \mathfrak{A} = 1.$$

& par conséquent $A + \mathfrak{A}z = z$; nous aurons . . . . $P = \frac{z - z^3 - z - z^5}{1 + zz} = -z^3$, & $\mathrm{P} = 0$, $\mathfrak{P} = 1$: ce qui donne

$$B = 0,\ \&\ \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}.$$

Donc $B + \mathfrak{B}z = \frac{1}{2}z$, & $Q = \frac{-z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3}{1 + zz} = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3$; d'où $\mathrm{Q} = 0$, & $\mathfrak{Q} = 0$; & conséquemment

$$C = 0,\ \&\ \mathfrak{C} = 0.$$

Donc $R = \frac{-\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3}{1 + zz} = -\frac{1}{2}z$; nous conclurons de-là que $\mathrm{R} = 0$, $\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}$; ce qui donne enfin

$$D = 0,\ \&\ \mathfrak{D} = -\tfrac{1}{4}.$$

Ainsi les fractions cherchées sont . . . .

$\frac{z}{(1 + zz)^4} + \frac{z}{2(1 + zz)^3} - \frac{z}{4(1 + zz)}$. Quant au numérateur de la fraction restante, il sera $= S = \frac{R - (D + \mathfrak{D}z)Z}{1 + zz} = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^3$, & la fraction sera $= \frac{-z + z^3}{4(1 + z^4)}$.

210. Cette méthode donne en même-temps la fraction du complément, qui, ajoutée à celles qui ont été trouvées

auparavant, produit la fraction proposée même. En effet, lorsque pour la fraction $\frac{M}{(pp - 2pqz.\,cos.\,\varphi + qqzz)^k Z}$, on aura trouvé toutes les fractions partielles, qui proviennent du facteur $(pp - 2pqz\ cos.\,\varphi + qqzz)^k$, en calculant les valeurs des fonctions P, Q, R, S, T; si l'on continue la série de ces lettres, celle qui suivra la derniere dont on aura eu besoin pour trouver les numérateurs, sera le numérateur de la fraction restante, qui a Z pour dénominateur. Par exemple, si $k = 1$, la fraction restante sera $\frac{P}{Z}$; si $k = 2$, elle sera $\frac{Q}{Z}$; si $k = 3$, elle sera $\frac{R}{Z}$; ainsi de suite; & lorsqu'on aura déterminé la fraction restante, qui a Z pour dénominateur, on pourra la décomposer suivant les regles que nous venons d'expliquer.

CHAPITRE XIII.

Des Séries récurrentes.

211. Je rapporte ici à cette espece de série que MOIVRE appelle *Récurrentes*, toutes les séries qui proviennent du développement d'une fonction fractionnaire quelconque par le moyen de la division. Car nous avons déja fait voir que ces séries étoient tellement formées, que chaque terme se déterminoit par quelques-uns des termes prédédents suivant une certaine loi, qui dépend du dénominateur de la fonction fractionnaire. Mais, comme je viens d'enseigner à convertir une fonction fractionnaire quelconque en d'autres plus simples, la série récurrente pourra aussi être décomposée en d'autres plus simples. Il est donc question dans ce Chapitre de décomposer en séries récurrentes plus simples les séries récurrentes d'un degré quelconque.

212. Soit proposée la fraction suivante: . . . .

$$\frac{a + bz + czz + dz^3 + \&c.}{1 - \alpha z - \beta zz - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c.}$$

qui se change par la division en cette série récurrente

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \&c.$$

dont nous avons appris à déterminer les coëfficiens & la loi qu'ils suivoient. Si cette fonction fractionnaire est décomposée en ses fractions simples, & que chacune soit convertie en une série récurrente, il est évident que la somme de toutes ces séries, qui naissent des fractions partielles, doit être égale à la série récurrente. . . . .

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \&c.$$

Les fractions partielles que nous avons appris à trouver, donneront donc des séries partielles, dont il sera aisé, à cause de leur simplicité, de connoître la nature; or la somme de toutes ces séries partielles produira la série récurrente proposée; par conséquent la nature de cette derniere sera par-là mieux déterminée.

213. Soient les séries récurrentes, qui naissent de chacune des fractions partielles.

$$\begin{array}{l} \mathrm{a} + \mathrm{b}z + \mathrm{c}zz + \mathrm{d}z^3 + \mathrm{e}z^4 + \&c. \\ \mathrm{a}' + \mathrm{b}'z + \mathrm{c}'zz + \mathrm{d}'z^3 + \mathrm{e}'z^4 + \&c. \\ \mathrm{a}'' + \mathrm{b}''z + \mathrm{c}''zz + \mathrm{d}''z^3 + \mathrm{e}''z^4 + \&c. \\ \mathrm{a}''' + \mathrm{b}'''z + \mathrm{c}'''zz + \mathrm{d}'''z^3 + \mathrm{e}'''z^4 + \&c. \\ \&c. \end{array}$$

Comme ces séries prises ensemble doivent être égales à celle-ci : $A + Bz + Czz + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$ il s'ensuit nécessairement que . . . .

$$\begin{array}{l} A = \mathrm{a} + \mathrm{a}' + \mathrm{a}'' + \mathrm{a}''' + \&c. \\ B = \mathrm{b} + \mathrm{b}' + \mathrm{b}'' + \mathrm{b}''' + \&c. \\ C = \mathrm{c} + \mathrm{c}' + \mathrm{c}'' + \mathrm{c}''' + \&c. \\ D = \mathrm{d} + \mathrm{d}' + \mathrm{d}'' + \mathrm{d}''' + \&c. \\ \&c. \end{array}$$

Donc, si on peut déterminer pour chacune des séries, que donnent les fractions partielles, les coëfficiens de la puissance z^n, leur somme donnera le coëfficient de la puissance z^n dans la série récurrente $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c.

214. On pourroit ici former le doute, si, dans le cas où deux séries sont égales entr'elles, lors, par exemple, que $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. $= \mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z^2 + \mathrm{D}z^3 +$ &c, il s'ensuit nécessairement que les coëfficiens des puissances semblables soient égaux entr'eux, ou que $A = \mathrm{A}$; $B = \mathrm{B}$; $C = \mathrm{C}$; $D = \mathrm{D}$; &c. Mais ce doute disparoîtra bientôt, si on fait attention que cette égalité doit avoir lieu, quelque soit la valeur de la variable z. Soit donc $z = 0$; alors il clair que $A = \mathrm{A}$. Retranchant donc de part & d'autre ces termes égaux, & divisant l'équation restante par z, on aura $B + Cz + Dz^2 +$ &c. $= \mathrm{B} + \mathrm{C}z + \mathrm{D}z^2 +$ &c; d'où $B = \mathrm{B}$, on fera voir pareillement que $C = \mathrm{C}$, $D = \mathrm{D}$, ainsi de suite à l'infini.

215. Considérons donc les séries qui proviennent des fractions partielles résultantes de la décomposition d'une fraction quelconque: il est d'abord évident que la fraction $\frac{\mathrm{A}}{1 - pz}$ donne la série $\mathrm{A} + \mathrm{A}pz + \mathrm{A}p^2z^2 + \mathrm{A}p^3z^3$ + &c, dont le terme général est $\mathrm{A}p^n z^n$; car on a coutume d'appeller cette expression *Terme général*, par la raison qu'en mettant successivement tous les nombres à la place de n, on a tous les termes de la série. Ensuite la fraction $\frac{\mathrm{A}}{(1 - pz)^2}$ donne la série $\mathrm{A} + 2\mathrm{A}pz + 3\mathrm{A}p^2z^2 + 4\mathrm{A}p^3z^3 +$ &c. dont le terme général est $(n + 1)\mathrm{A}p^n z^n$. Et la fraction $\frac{\mathrm{A}}{(1 - pz)^3}$ donnera la série $\mathrm{A} + 3\mathrm{A}pz + 6\mathrm{A}p^2z^2 + 10\mathrm{A}p^3z^3 +$ &c, dont le terme général est $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\mathrm{A}p^n z^n$. En général la fraction $\frac{\mathrm{A}}{(1 - pz)^k}$ fournit cette série $\mathrm{A} + k\mathrm{A}pz + \frac{k(k+1)}{1.\ 2}\mathrm{A}p^2z^2 + \frac{k.(k+1)(k+2)}{1.\ 2.\ 3}\mathrm{A}p^3z^3 +$ &c. dont le terme

général eſt $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+k-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(k-1)}$ A $p^n z^n$. La progreſſion de la ſérie fait voir auſſi que ce même terme $=$ $\frac{k.(k+1)(k+2)\ldots\ldots(k+n-1)}{1.\ 2.\quad 3.\ldots\ldots\ldots\ n}$ A $p^n z^n$. Or cette expreſſion eſt égale à la premiere, comme il eſt facile de s'en convaincre en multipliant en croix. En effet, on aura . . . . .
$1.2.3\ldots n.(n+1)\ldots(n+k-1)=1.2.3\ldots(k-1)k\ldots(k+n-1)$ équation identique.

216. Ainſi toutes les fois que dans la réſolution des fonctions fractionnaires, on arrivera à des fractions partielles de la forme $\frac{A}{(1-pz)^k}$, on pourra aſſigner le terme général de la ſérie récurrente $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ &c, qui réſulte de la décompoſition de la fonction; puiſqu'il ſera la ſomme des termes généraux des ſéries, qui proviennent des fractions partielles.

Exemple I.

Trouver le terme général de la ſérie récurrente, qui naît de la fraction $\frac{1-z}{1-z-2zz}$. . . . .
Cette ſérie ſera $1+0z+2zz+2z^3+6z^4+10z^5+22z^6+42z^7+86z^8+$ &c. Pour trouver le coëfficient de la puiſſance générale z^n, décompoſons la fraction $\frac{1-z}{1-z-2zz}$ en celles-ci : $\frac{\frac{2}{3}}{1+z}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$, & nous aurons pour le terme général cherché $[\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}.2^n]z^n=\frac{2^n\pm 2}{3}.z^n$, où le ſigne $+$ a lieu, ſi n eſt un nombre pair, & le ſigne $-$, ſi n eſt un nombre impair.

Exemple II.

Trouver le terme général de la ſérie récurrente, qui réſulte *de la fraction* $\frac{1-z}{1-5z+6zz}$; *ou de cette série* $1+4z+14z^2+46z^3+146z^4+454z^5+$ &c. . . . .

A cause du dénominateur $=(1-2z)(1-3z)$ la fraction se décompose en celles-ci $\frac{-1}{1-2z}+\frac{2}{1-3z}$; d'où résulte le terme général $2.3^n z^n - 2^n z^n = (2.3^n - 2^n) z^n$.

EXEMPLE III.

Trouver le terme général de cette série $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+47z^7+$ &c, *que donne le développement de la fraction* $\frac{1+2z}{1-z-zz}$. . . . .

A cause des facteurs du dénominateur $1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z$ & $1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z$, on aura les fractions partielles $\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z}+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z}$, lesquelles donnent le terme général $=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n$.

EXEMPLE IV.

Trouver le terme général de la série $a+(\alpha a+b)z+(\alpha^2 a+\alpha b+\beta a)z^2+(\alpha^3 a+\alpha^2 b+2\alpha\beta a+\beta b)z^3+$ &c. *résultante de la fraction* $\frac{a+bz}{1-\alpha z-\beta zz}$. . . . .

Par la décomposition des facteurs on trouvera ces deux fractions

$$\frac{[a(\alpha+\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)})+2b]:2\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}}{1-\left[\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}}{2}\right]z}+\frac{[a(\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}-\alpha)-2b]:2\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}}{1-\left[\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}}{2}\right]z}$$

& par conséquent

le terme général sera $\frac{a[\sqrt{(\alpha\alpha+4\delta)}+\alpha]+2b}{2\sqrt{(\alpha\alpha+4\delta)}}\left(\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha\alpha+4\delta)}}{2}\right)^n z^n$ $+\frac{a[\sqrt{(\alpha\alpha+4\delta)}-\alpha]-2b}{2\sqrt{(\alpha\alpha+4\delta)}}\left(\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha\alpha+4\delta)}}{2}\right)^n z^n$. On peut donc trouver d'une maniere expéditive les termes généraux de toutes les séries récurrentes, dont chaque terme est déterminé par les deux qui le précedent.

Exemple V.

Trouver le terme général de la série $1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+4z^7+$ &c, *qui résulte de la fraction* $\frac{1}{1-z-z^2+z^3}=\frac{1}{(1-z)^2(1+z)}$. . . . .

Quoique la loi de la progression paroisse au premier abord assez manifeste pour n'avoir pas besoin d'éclaircissement, cependant au moyen des fractions résultantes de la décomposition, savoir $\frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1-z}+\frac{\frac{1}{4}}{1+z}$, on trouvera pour terme général: $\frac{1}{2}(n+1)z^n+\frac{1}{4}z^n+\frac{1}{4}(-1)^n z^n=\frac{2n+3\pm 1}{4}z^n$. Le signe supérieur aura lieu, si n est un nombre pair, & l'inférieur, si n est un nombre impair.

217. On peut obtenir de cette maniere les termes généraux de toutes les séries récurrentes, parce que toutes les fractions peuvent se réduire en fractions partielles de cette forme; mais, si on veut éviter les expressions imaginaires, on arrivera souvent à des fractions partielles de la forme suivante: $\frac{A+Bpz}{1-2pz\cos.\varphi+ppzz}$; $\frac{A+Bpz}{(1-2pz\cos.\varphi+ppzz)^2}$; & $\frac{A+Bpz}{(1-2pz\cos.\varphi+ppzz)^3}$. Cherchons la forme des séries, qui naissent de leur développement; d'abord à cause de $\cos.n\varphi=2\cos.\varphi.\cos.(n-1)\varphi-\cos.(n-2)\varphi$, la fraction $\frac{A}{1-2pz\cos.\varphi+ppzz}$ étant développée, donnera . . . .

$$\begin{aligned}A &+ 2Apz\cos.\varphi + 2Appzz\cos.2\varphi + 2Ap^3z^3\cos.3\varphi + 2Ap^4z^4\cos.4\varphi\\ &+ Appzz \qquad\qquad + 2Ap^3z^3\cos.\varphi + 2Ap^4z^4\cos.2\varphi\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Ap^4z^4.\ \&c.\end{aligned}$$

(*bb*) Série dont le terme général n'est pas si aisé à reconnoître.

218. Pour arriver au but, considérons les deux séries :

$$Ppz\,\textit{sin.}\,\varphi + Pp^2z^2\,\textit{sin.}\,2\varphi + Pp^3z^3\,\textit{sin.}\,3\varphi + Pp^4z^4\,\textit{sin.}\,4\varphi + \&c.$$

$$Q + Qpz\,\textit{cos.}\,\varphi + Qp^2z^2\,\textit{cos.}\,2\varphi + Qp^3z^3\,\textit{cos.}\,3\varphi + Qp^4z^4\,\textit{cos.}\,4\varphi + \&c.$$

lesquelles proviennent toutes deux du développement d'une fraction, dont le dénominateur est $1 - 2pz\,\textit{cos.}\,\varphi + ppzz$. En effet, la premiere résulte de la fraction $\frac{Ppz\,\textit{sin.}\,\varphi}{1 - 2pz\,\textit{cos.}\,\varphi \quad ppzz}$, & la seconde de celle-ci : $\frac{Q - Qpz\,\textit{cos.}\,\varphi}{1 - 2pz\,\textit{cos.}\,\varphi + ppzz}$. Ajoutons ces deux séries & leur somme $\frac{Q + Ppz\,\textit{sin.}\,\varphi - Qpz\,\textit{cos.}\,\varphi}{1 - 2pz.\,\textit{cos.}\,\varphi + pp.zz}$ donnera une série dont le terme général sera $= (P\,\textit{sin.}\,n\varphi + Q\,\textit{cos.}\,n\varphi)\,p^n z^n$. Égalons cette fraction à la proposée $\frac{A + Bpz}{1 - 2pz\,\textit{cos.}\,\varphi + ppzz}$, nous aurons $Q = A$, & $P = A\,\textit{cot.}\,\varphi + B.\,\textit{cosec.}\,\varphi$. Le terme général de la série résultante de la fraction $\frac{A + Bpz}{1 - 2pz\,\textit{cos.}\,\varphi + ppzz}$ sera donc $= \frac{A\,\textit{cos.}\,\varphi\,\textit{sin.}\,n\varphi + B\,\textit{sin.}\,n\varphi + A\,\textit{sin.}\,\varphi.\,\textit{cos.}\,n\varphi}{\textit{sin.}\,\varphi}.\,p^n z^n =$
$\frac{A\,\textit{sin.}\,(n+1)\varphi + B\,\textit{sin.}\,n\varphi}{\textit{sin.}\,\varphi}.\,p^n z^n$

219. Pour trouver le terme général, lorsque le dénominateur de la fraction est une puissance, telle que $(1 - 2pz\,\textit{cos.}\,\varphi + ppzz)^k$, il sera à propos de décomposer cette fraction en deux autres, quoique imaginaires, $\frac{a}{[1 - (\textit{cos.}\,\varphi + \sqrt{-1}\,\textit{sin.}\,\varphi)\,pz]^k} + \frac{b}{[1 - (\textit{cos.}\,\varphi - \sqrt{-1}.\,\textit{sin.}\,\varphi)\,pz]^k}$ lesquelles ajoutées ensemble donneront pour le terme général de la série résultante :

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+k-1)}{1.\quad 2.\quad 3\quad \ldots\ldots(k-1)}(\textit{cos.}\,n\varphi + \sqrt{-1}.\,\textit{sin.}\,n\varphi)\,ap^n z^n$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+k-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad \ldots\ldots(k-1)}(\textit{cos.}\,n\varphi - \sqrt{-1}.\,\textit{sin.}\,n\varphi)\,bp^n z^n.$$

Soit $a + b = f$; $a - b = \frac{g}{\sqrt{-1}}$, de maniere que $a = \frac{f\sqrt{-1} + g}{2\sqrt{-1}}$, & $b = \frac{f\sqrt{-1} - g}{2\sqrt{-1}}$; alors cette expression . . . .

$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+k-1)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\ldots\ldots(k-1)}(f.\mathit{cos}.n\varphi+g.\mathit{sin}.n\varphi)p^n z^n$ sera le terme général de la série, qui naît de ces fractions:

$$\frac{\frac{1}{2}f+\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{[1-(\mathit{cos}.\varphi+\sqrt{-1}.\mathit{sin}.\varphi)pz]^k}+\frac{\frac{1}{2}f-\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{[1-(\mathit{cos}.\varphi-\sqrt{-1}.\mathit{sin}.\varphi)pz]^k},$$

ou de la fraction unique . . . .

$$\frac{\begin{array}{l}f-kfpz\,\mathit{cos}.\varphi+\frac{k.(k-1)}{1.\;2}fp^2z^2\mathit{cos}.2\varphi-\frac{k.(k-1)(k-2)}{1.\;2.\;\;3}fp^3z^3\mathit{cos}.3\varphi \\ +kgpz.\,\mathit{sin}.\varphi-\frac{k.(k-1)}{1.\;2}gp^2z^2\mathit{sin}.2\varphi+\frac{k.(k-1)(k-2)}{1.\;2.\;\;3}gp^3z^3\mathit{sin}.3\varphi\end{array}}{(1-2pz\,\mathit{cos}.\varphi+ppzz)^k}\;\&c.$$

220. Ainsi en supposant $k=2$, le terme général de la série résultante de la fraction $\frac{f-2pz(f\mathit{cos}.\varphi-g\,\mathit{sin}.\varphi)+p^2z^2(f\mathit{cos}.2\varphi-g\,\mathit{sin}.2\varphi)}{(1-2pz\,\mathit{cos}.\varphi+ppzz)^2}$ sera $=(n+1)(f\mathit{cos}.n\varphi+g\,\mathit{sin}.n\varphi)p^n z^n$. Or celui de la série, que donne la fraction $\frac{a}{1-2pz\,\mathit{cos}.\varphi+ppzz}$, ou celle-ci: $\frac{a-2apz\,\mathit{cos}.\varphi+appzz}{(1-2pz\,\mathit{cos}.\varphi+ppzz)^2}$ est $=\frac{a\,\mathit{sin}.(n+1)\varphi}{\mathit{sin}.\varphi}p^n z^n$.
Ajoutons ces deux fractions & faisons $a+f=A$; $2a\,\mathit{cos}.\varphi+2f\mathit{cos}.\varphi-2g\,\mathit{sin}.\varphi=-B$, & $a+f\mathit{cos}.2\varphi-g\,\mathit{sin}.2\varphi=0$; il s'ensuivra que $g=\frac{B+2A\,\mathit{cos}.\varphi}{2\,\mathit{sin}.\varphi}$, $a=\frac{A+B\,\mathit{cos}.\varphi}{1-\mathit{cos}.2\varphi}=\frac{A+B\,\mathit{cos}.\varphi}{2(\mathit{sin}.\varphi)^2}$ & $f=\frac{-A\,\mathit{cos}.2\varphi-B\,\mathit{cos}.\varphi}{2(\mathit{sin}.\varphi)^2}$ & $g=\frac{B.\mathit{sin}.\varphi+A\,\mathit{sin}.2\varphi}{2(\mathit{sin}.\varphi)^2}$. Par conséquent le terme général de la série provenante de la fraction $\frac{A+Bpz}{(1-2pz.\,\mathit{cos}.\varphi+ppzz)^2}$ est $\frac{A+B\,\mathit{cos}.\varphi}{2(\mathit{sin}.\varphi)^3}.\,\mathit{sin}.(n+1)\varphi p^n z^n$

$$+\frac{(n+1)(B\mathit{sin}.\varphi\,\mathit{sin}.n\varphi+A\mathit{sin}.2\varphi.\mathit{sin}.n\varphi-B\mathit{cos}.\varphi\,\mathit{cos}.n\varphi-A\,\mathit{cos}.2\varphi\,\mathit{cos}.n\varphi)}{2(\mathit{sin}.\varphi)^2}p^n z^n,$$

$$=-\frac{(n+1)(A\,\mathit{cos}.(n+2)\varphi+B\,\mathit{cos}.(n+1)\varphi)}{2(\mathit{sin}.\varphi)^2}p^n z^n+$$

$$\frac{(A+B\,\mathit{cos}.\varphi)\,\mathit{sin}.(n+1)\varphi}{2(\mathit{sin}.\varphi)^3}p^n z^n=$$

$$\frac{\frac{1}{2}(n+3)\,\mathit{sin}.(n+1)\varphi-\frac{1}{2}(n+1)\,\mathit{sin}.(n+3)\varphi}{2(\mathit{sin}.\varphi)^3}A\,p^n z^n+$$

$\frac{\frac{1}{2}(n+2)\,\mathit{fin.}\,n\varphi - \frac{1}{2}\,n.\mathit{fin.}\,(n+2)\varphi}{2\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^3}\,\mathrm{B}\,p^n z^n$. Donc le terme général cherché, c'est-à-dire, celui de la série, qui naît dela fraction $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}pz}{(1-2pz\,\mathit{cof.}\,\varphi+ppzz)^2}$ est $= \frac{(n+3)\,\mathit{fin.}\,(n+1)\varphi-(n+1)\,\mathit{fin.}\,(n+3)\varphi}{4\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^3}\times$ $\mathrm{A}\,p^n z^n + \frac{(n+2)\,\mathit{fin.}\,(n\varphi)-n\,\mathit{fin.}\,(n+2)\varphi}{4\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^3}.\,\mathrm{B}\,p^n z^n$.

221. Soit $k=3$, & le terme général de la série, qui viendra de la fraction . . . .

$$\frac{f-3pz(f\,\mathit{cof.}\,\varphi-g\,\mathit{fin.}\,\varphi)+3ppzz(f\,\mathit{cof.}\,2\varphi-g\,\mathit{fin.}\,2\varphi)-p^3z^3(f\,\mathit{cof.}\,3\varphi-g\,\mathit{fin.}\,3\varphi)}{(1-2pz\,\mathit{cof.}\,\varphi+ppzz)^3}$$

sera $=\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}(f\,\mathit{cof.}\,n\varphi+g\,\mathit{fin.}\,n\varphi)\,p^n z^n$. De plus celui de la série, qui vient de la fraction $\frac{a+bpz}{(1-2pz\,\mathit{cof.}\,\varphi+ppzz)^2}$ ou de celle-ci: $a - 2apz.\mathit{cof.}\,\varphi + appzz$ . . . .

$$\frac{+bpz \qquad -2bppzz\,\mathit{cof.}\,\varphi+bp^3z^3}{(1-2pz\,\mathit{cof.}\,\varphi+ppzz)^3}\ \text{eft}$$

$\frac{(n+3)\,\mathit{fin.}\,(n+1)\varphi-(n+1)\,\mathit{fin.}\,(n+3)\varphi}{4\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^3}\,ap^n z^n + \frac{(n+2)\,\mathit{fin.}\,(n\varphi)-n.\mathit{fin.}\,(n+2)\varphi}{4\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^3}.\,bp^n z^n$.

Ajoutons ces fractions, & supposons le numérateur $=\mathrm{A}$, nous aurons $a+f=\mathrm{A}$; $3f\,\mathit{cof.}\,\varphi-3g\,\mathit{fin.}\,\varphi+2a\,\mathit{cof.}\,\varphi-b=0$; $3f\,\mathit{cof.}\,2\varphi-3g\,\mathit{fin.}\,2\varphi+a-2b\,\mathit{cof.}\,\varphi=0$; & $b=f\,\mathit{cof.}\,3\varphi-g\,\mathit{fin.}\,3\varphi$; & par conséquent $a=\frac{f\,\mathit{cof.}\,3\varphi-g\,\mathit{fin.}\,3\varphi-3f\,\mathit{cof.}\,\varphi+3g\,\mathit{fin.}\,\varphi}{2\,\mathit{cof}\,\varphi}=$ $2g\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^2\,\mathit{tang.}\,\varphi-f-2f\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^2$. On trouve ensuite $\frac{f}{g}=$ $\frac{\mathit{fin.}\,5\varphi-2\,\mathit{fin.}\,3\varphi+\mathit{fin.}\,\varphi}{\mathit{cof.}\,5\varphi-2\,\mathit{cof.}\,3\varphi+\mathit{cof.}\,\varphi}$ & $a+f=\mathrm{A}=2g\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^2\,\mathit{tang.}\,\varphi-2f(\mathit{fin.}$ Donc $\frac{\mathrm{A}}{2\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^2}=\frac{g\,\mathit{fin}\,\varphi-f\,\mathit{cof.}\,\varphi}{\mathit{cof.}\,\varphi}$; d'où l'on tire enfin $f=$ $\mathrm{A}\,\frac{(\mathit{fin.}\,\varphi-2\,\mathit{fin.}\,3\varphi+\mathit{fin.}\,5\varphi)}{16\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^5}$, $g=\mathrm{A}\,\frac{(\mathit{cof.}\,\varphi-2\,\mathit{cof.}\,3\varphi+\mathit{cof.}\,5\varphi)}{16\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^5}$; à cause de $16\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^5=\mathit{fin.}\,5\varphi-5\,\mathit{fin.}\,3\varphi+10\,\mathit{fin.}\,\varphi$, on aura $a=\mathrm{A}\,\frac{(9\,\mathit{fin.}\,\varphi-3\,\mathit{fin.}\,3\varphi)}{16\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^5}$ & $b=\mathrm{A}\,\frac{(-\mathit{fin.}\,2\varphi+\mathit{fin.}\,2\varphi)}{16\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^5}$ $=0$. Or $3\,\mathit{fin.}\,\varphi-\mathit{fin.}\,3\varphi=4\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^3$; donc $a=\frac{3\,\mathrm{A}}{4\,(\mathit{fin.}\,\varphi)^2}$.

Donc

Donc le terme général sera $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2} p^n z^n A \times$
$\left(\frac{\text{sin.}(n+1)\varphi - 2\,\text{sin.}(n+3)\varphi + \text{sin.}(n+5)\varphi}{16(\text{sin.}\,\varphi)^5}\right) +$
$3\,A p^n z^n . \left(\frac{(n+3)\,\text{sin.}(n+1)\varphi - (n+1)\,\text{sin.}(n+3)\varphi}{16(\text{sin.}\,\varphi)^5}\right) =$
$\frac{A p^n z^n}{16(\text{sin.}\,\varphi)^5}\left(\frac{(n+4)(n+5)}{1.\ 2}\text{sin.}(n+1)\varphi - 2\,\frac{(n+1)(n+5)}{1.\ 2}\text{sin.}(n+3)\varphi\right.$
$\left. + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\text{sin.}(n+5)\varphi\right).$

222. Donc le terme général de la série résultante de la fraction $\frac{A + Bpz}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^3}$ sera
$\frac{A p^n z^n}{16(\text{sin.}\,\varphi)^5}\left(\frac{(n+5)(n+4)}{1.\ 2}\text{sin.}(n+1)\varphi - \frac{2.(n+1)(n+5)}{1.\ 2}\text{sin.}(n+3)\varphi\right.$
$\left. + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\text{sin.}(n+5)\varphi\right) + \frac{B p^n z^n}{16(\text{sin.}\,\varphi)^5}\left(\frac{(n+4)(n+3)}{1.\ 2}\text{sin.}\,n\varphi -\right.$
$\left.\frac{2n(n+4)}{1.\ 2.}\text{sin.}(n+2)\varphi + \frac{n(n+1)}{1.\ 2}\text{sin.}(n+4)\varphi\right)$; & en procédant de la même maniere on trouvera, que le terme général de la série qui tire son origine de la fraction . . . .

$$\frac{A + Bpz}{(1 - 2pz\cos.\varphi + ppzz)^4} \text{ sera}$$

$\frac{A p^n z^n}{64(\text{sin.}\,\varphi)^7}\left(\frac{(n+7)(n+6)(n+5)}{1.\ 2.\ 3}\text{sin.}(n+1)\varphi - 3\,\frac{(n+1)(n+7)(n+6)}{1.\ 2.\ 3}\right.$
$\text{sin.}(n+3)\varphi + 3\,\frac{(n+1)(n+2)(n+7)}{1.\ 2.\ 3}\text{sin.}(n+5)\varphi - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3}$
$\left.\text{sin.}(n+7)\varphi\right) + \frac{B p^n z^n}{64(\text{sin.}\,\varphi)^7}\left(\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1.\ 2.\ 3}\text{sin.}\,n\varphi -\right.$
$\frac{3n.(n+6)(n+5)}{1.\ 2.\ 3}\text{sin.}(n+2)\varphi + 3\,\frac{n(n+1)(n+6)}{1.\ 2.\ 3}\text{sin.}(n+4)\varphi$
$\left.- \frac{n.(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\text{sin.}(n+6)\varphi\right).$ Ces formules mettent à (cc) portée de voir la loi que suivent les termes généraux pour les puissances plus élevées; mais pour connoître plus particuliérement la nature de ces expressions, il est bon de remarquer que . . . .

$$\begin{array}{rl}
\sin.\varphi = & \sin.\varphi \\
4(\sin.\varphi)^3 = & 3\sin.\varphi - \sin.3\varphi \\
16(\sin.\varphi)^5 = & 10\sin.\varphi - 5\sin.3\varphi + \sin.5\varphi \\
64(\sin.\varphi)^7 = & 35\sin.\varphi - 21\sin.3\varphi + 7\sin.5\varphi - \sin.7\varphi \\
256(\sin.\varphi)^9 = & 126\sin.\varphi - 84\sin.3\varphi + 36\sin.5\varphi - 9\sin.7\varphi + \sin.9\varphi
\end{array}$$

&c. *

223. Toute fonction fractionnaire pouvant donc être décomposée de cette maniere en fractions partielles réelles, il s'ensuit qu'il sera possible d'obtenir en expressions réelles les termes généraux de toutes les séries récurrentes. Pour rendre cette vérité plus sensible, on a ajouté les exemples suivans.

Exemple I.

La fraction $\frac{1}{(1-z)(1-zz)(1-z^3)} = \frac{1}{1-z-zz+z^4+z^5-z^6}$ donne naissance à la série récurrente $1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+7z^6+8z^7+10z^8+12z^9+$ &c; dont on demande le terme général. La fraction proposée étant ordonnée par rapport à ses facteurs devient $=\frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+zz)}$ & se change en ces fractions $\frac{1}{6(1-z)^3}+\frac{1}{4(1-z)^2}+\frac{17}{72(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{(2+z)}{9(1+z+zz)}$. La premiere de ces fractions donne le terme général $\frac{(n+1)}{1.}\frac{(n+2)}{2}.\frac{1}{6}z^n = \frac{n^2+3n+2}{12}.z^n$. La seconde $\frac{1}{4(1-z)^2}$ donne $\frac{n+1}{4}.z^n$, la troisieme $\frac{17}{72(1-z)}$ donne $\frac{17}{72}z^n$: la quatrieme $\frac{1}{8(1+z)}$ donne $\frac{1}{8}(-1)^n z^n$; mais si l'on compare la cinquieme $\frac{2+z}{9(1+z+zz)}$ avec la formule $\frac{A+Bpz}{1-2pz.\cos.\varphi+ppzz}$, on aura (art. 218) $p=-1$; $\varphi=\frac{\pi}{3}=60°$; $A=+\frac{2}{9}$; & $B=-\frac{1}{9}$; d'où résulte le terme général $+\frac{2\sin.(n+1)\varphi-\sin.n\varphi}{9\sin.\varphi}.(-1)^n z^n = +$

* Voyez la fin du Chapitre XIV.

$$\frac{4\,\text{ſin.}\,(n+1)\,\varphi - 2\,\text{ſin.}\,n\,\varphi}{9\sqrt{3}} \times (-1)^n z^n = + \frac{4\,\text{ſin.}\,(n+1)\frac{\pi}{3} - 2\,\text{ſin.}\,n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} \cdot (-1)^n z^n.$$

Faiſons une ſomme de toutes ces expreſſions, & nous aurons le terme général cherché de la ſérie en queſtion,

$$= \left(\tfrac{nn}{12} + \tfrac{n}{2} + \tfrac{47}{72}\right) z^n \pm \tfrac{1}{8} z^n \pm \frac{4\,\text{ſin.}\,(n+1)\frac{\pi}{3} - 2\,\text{ſin.}\,n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} z^n,$$ où il faut prendre les ſignes ſupérieurs, ſi n eſt un nombre pair, & les ſignes inférieurs, ſi n eſt un nombre impair. Remarquons ici que ſi n eſt un nombre de la forme $3\,m$, on aura $\frac{4\,\text{ſin.}\,\frac{1}{3}(n+1)\pi - 2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{3}n\pi}{9\sqrt{3}} = \pm \frac{2}{9}$; que ſi $n = 3\,m + 1$, cette expreſſion deviendra $= \mp \frac{1}{9}$; & que ſi $n = 3\,m + 2$, elle aura pour valeur $\mp \frac{1}{9}$, ſuivant que n ſera un nombre pair ou impair; cela poſé, la nature de la ſérie pourra être ainſi déterminée, de maniere que . . . .

ſi	on aura pour terme général
$n = 6\,m + 0$	$\left(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + 1\right) z^n$
$n = 6\,m + 1$	$\left(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12}\right) z^n$
$n = 6\,m + 2$	$\left(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{2}{3}\right) z^n$
$n = 6\,m + 3$	$\left(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{3}{4}\right) z^n$
$n = 6\,m + 4$	$\left(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{2}{3}\right) z^n$
$n = 6\,m + 5$	$\left(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12}\right) z^n$

Par exemple, ſi $n = 50$, la forme $n = 6\,m + 2$ a lieu, & le terme de la ſérie ſera $= 234\,z^{50}$.

EXEMPLE II.

La fraction $\frac{1 + z + zz}{1 - z - z^4 + z^5}$ produit la ſérie récurrente

$1 + 2z + 3zz + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6 + 6z^7 + 7z^8 + \&c.$ dont il s'agit de déterminer le terme général. La fraction proposée se ramene à cette forme $\frac{1+z+zz}{(1-z)^2(1+z)(1+zz)}$, & se décompose par conséquent en ces fractions partielles $\frac{3}{4(1-z)^2} + \frac{3}{8(1-z)} + \frac{1}{8(1+z)}\ \frac{-1+z}{4(1+zz)}$. La premiere de ces fractions, savoir $\frac{3}{4(1-z)^2}$ donne le terme général $\frac{3(n+1)}{4}z^n$; la seconde $\frac{3}{8(1-z)}$ donne $\frac{3}{8}z^n$; la troisieme donne $\frac{1}{8}(-1)^n z^n$, & la quatrieme $\frac{-1+z}{4(1+zz)}$ comparée avec la formule $\frac{A+Bpz}{1-2pz.\cos.\varphi-ppzz}$, donne $p=1$; $\cos.\varphi=0$; & $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; $A=-\frac{1}{4}$; $B=+\frac{1}{4}$; d'où résulte le terme général $=(-\frac{1}{4}\sin.\frac{1}{2}(n+1)\pi+\frac{1}{4}\sin.\frac{1}{2}n\pi)z^n$. Donc en rassemblant ces résultats, on aura le terme général demandé $=(\frac{3}{4}n+\frac{9}{8})z^n \pm \frac{1}{8}z^n - \frac{1}{4}(\sin.\frac{1}{2}(n+1)\pi - \sin.\frac{1}{2}n\pi)z^n$. Concluons de-là, que . . . .

si	on aura pour terme général
$n = 4m + 0$	$(\frac{3}{4}n + 1)z^n$
$n = 4m + 1$	$(\frac{3}{4}n + \frac{5}{4})z^n$
$n = 4m + 2$	$(\frac{3}{4}n + \frac{3}{2})z^n$
$n = 4m + 3$	$(\frac{3}{4}n + \frac{3}{4})z^n$.

Par exemple si $n=50$; ce sera la formule $n=4m+2$ qui aura lieu, & le terme cherché sera $=39z^{50}$.

224. Étant donc proposée une série récurrente, comme il sera facile de connoître la fraction qui l'a produite, on en trouvera le terme général, en suivant les regles que nous venons de donner. Or la loi de la série récurrente, d'après laquelle chaque terme se conclut des précédents, fait connoître sur le champ le dénominateur de la fraction, dont les facteurs donneront la forme du terme général; car le numérateur ne sert qu'à déterminer les coëfficiens. Soit proposée, par exemple, cette série récurrente. . . .

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \&c.$$

dont chaque terme eſt formé de quelques-uns des précédents ſuivant une certaine loi, de maniere à donner pour le dénominateur de la fraction la quantité $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$; & par conſéquent $D = \alpha C + \beta B + \gamma A$; $E = \alpha D + \beta C + \gamma B$; $F = \alpha E + \beta D + \gamma C$; &c. Ce ſont ces multiplicateurs α, $+\beta$, $+\gamma$ que MOIVRE appelle *Échelle de relation*. La loi de la progreſſion conſiſte donc dans l'échelle de relation, & cette échelle donne ſur le champ le dénominateur de la fraction dont la réſolution forme la ſérie récurrente propoſée.

225. Ainſi pour trouver le terme général ou le coëfficient de la puiſſance indéfinie z^n, il faut chercher les facteurs ſimples, ou doubles, ſi l'on veut éviter les facteurs imaginaires, du dénominateur $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$. Suppoſons d'abord tous les facteurs ſimples, inégaux entr'eux & réels, tels que $(1-pz)(1-qz)(1-rz)$; la fraction génératrice de la ſérie ſe changera en celles-ci: $\frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-qz} + \frac{C}{1-rz}$; ce qui donnera, pour le terme général de la ſérie: $(Ap^n + Bq^n + Cr^n)z^n$. S'il y a deux facteurs égaux, par exemple, ſi $q = p$ le terme général ſera de cette forme: $[(An + B)p^n + Cr^n]z^n$, & ſi de plus $r = p = q$; le terme général ſera de la forme $(An^2 + Bn + C)p^n z^n$; mais ſi le dénominateur a un facteur double de maniere qu'il ſoit $= (1-pz)(1 - 2qz\,coſ.\varphi + qqzz)$; alors le terme général ſera $= \left(Ap^n + \frac{B\,ſin.\,\overline{n+1}\,\varphi + C\,ſin.\,n\varphi}{ſin.\,\varphi}\,q^n\right)z^n$. Donc, puiſqu'en ſuppoſant ſucceſſivement pour n les nombres 0, 1, 2, on doit obtenir les termes A, Bz, Cz^2, il ſera facile de déterminer les valeurs des lettres A, B, C.

226. Suppoſons une échelle de relation à deux termes, c'eſt-à-dire, que chaque coëfficient ſoit déterminé par les deux précédents, de maniere que $C = \alpha B - \beta A$; $D = \alpha C - \beta B$; $E = \alpha D - \beta C$ &c. Il eſt évident que la ſérie récurrente

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots\ldots + Pz^n +$$

$Q z^{n+1}$ + &c. vient d'une fraction dont le dénominateur est $1 - \alpha z + \beta zz$. Soient les facteurs de ce dénominateur; $(1 - pz)(1 - qz)$; on aura $p + q = \alpha$, & $pq = \beta$; & le terme général de la série sera $(\mathrm{A} p^n + \mathrm{B} q^n) z^n$. En faisant $n = 0$, on aura $A = \mathrm{A} + \mathrm{B}$, & en faisant $n = 1$, $B = \mathrm{A} p + \mathrm{B} q$; d'où $Aq - B = \mathrm{A}(q - p)$, & $\mathrm{A} = \frac{Aq - B}{q - p}$ & $\mathrm{B} = \frac{Ap - B}{p - q}$. Or les valeurs de A & de B étant une fois trouvées, on aura $P = \mathrm{A} p^n + \mathrm{B} q^n$, & $Q = \mathrm{A} p^{n+1} + \mathrm{B} q^{n+1}$. Et alors $\mathrm{AB} = \frac{BB - \alpha AB + \beta AA}{4\beta - \alpha\alpha}$.

227. On peut déduire de-là la maniere de former un terme quelconque du seul terme qui le précede, tandis que la loi de la progression en exige deux. En effet, puisque . . .

$$P = \mathrm{A} p^n + \mathrm{B} q^n \ \& \ Q = \mathrm{A}\, p.\, p^n + \mathrm{B}\, q.\, q^n.$$

on aura . . . .

$$Pq - Q = \mathrm{A}(q - p) p^n \ \& \ Pp - Q = \mathrm{B}(p - q) q^n.$$

Multiplions l'une par l'autre ces deux expressions; le produit sera $P^2 pq - (p + q) PQ + QQ + \mathrm{AB}(p - q)^2 p^n q^n = 0$; mais $p + q = \alpha$; $pq = \beta$; $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \alpha\alpha - 4\beta$, & $p^n q^n = \beta^n$. La substitution faite, on aura pour résultat: $\beta P^2 - \alpha PQ + QQ = (\beta AA - \alpha AB + BB) \beta^n$ ou $\frac{QQ - \alpha PQ + \beta PP}{BB - \alpha AB + \beta AA} = \beta^n$; propriété remarquable des séries récurrentes, dont chaque terme est déterminé par les deux précédents. Mais le terme P étant une fois connu, le suivant Q sera $= \frac{1}{2}\alpha P + \sqrt{[(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta) P^2 + (B^2 - \alpha AB + \beta AA)\beta^n]}$; expression, qui, quoiqu'elle se présente sous une forme irrationnelle, est cependant toujours rationnelle, puisqu'il n'entre dans la série aucun terme irrationnel.

228. Au reste, deux termes consécutifs quelconques $P z^n$ & $Q z^{n+1}$ étant donnés, on peut assigner facilement le

terme beaucoup plus éloigné Xz^{2n}. Car ſuppoſons. . .
$X = fP^2 + gPQ - hAB\beta^n$. A cauſe de . . . .
$P = Ap^n + Bq^n$ & de $Q = App^n + Bqq^n$, & de
$X = Ap^{2n} + Bq^{2n}$; on aura, comme il ſuit :

$$\begin{array}{llll}
fP^2 = & fA^2p^{2n} & + fB^2q^{2n} & + 2fAB\beta^n \\
gPQ = & gA^2pp^{2n} & + gB^2qq^{2n} & + gAB\alpha\beta^n \\
-hAB\beta^n = & & & -hAB\beta^n \\
\hline
X = & Ap^{2n} & + Bq^{2n} &
\end{array}$$

On aura donc $f + gp = \frac{1}{A}$; $f + gq = \frac{1}{B}$; & $h = 2f + g\alpha$, d'où $g = \frac{B - A}{AB(p-q)}$ & $f = \frac{Ap - Bq}{AB(p-q)}$. Mais $B - A = \frac{\alpha A - 2B}{p - q}$; $Ap - Bq = \frac{\alpha B - 2A\beta}{p - q}$. Donc $f = \frac{\alpha B - 2A\beta}{AB(\alpha^2 - 4\beta)}$ & $g = \frac{\alpha A - 2B}{AB(\alpha\alpha - 4\beta)}$, ou $f = \frac{2A\beta - \alpha B}{BB - \alpha AB + \beta AA}$ & $g = \frac{2B - \alpha A}{BB - \alpha AB + \beta AA}$, & par conſéquent $h = \frac{(4\beta - \alpha\alpha)A}{BB - \alpha AB + \beta AA}$. . . . . . .

On trouvera donc . . . .

$$X = \frac{(2A\beta - \alpha B)P^2 + (2B - \alpha A)PQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} - A\beta^n. \quad . \; . \; . \; .$$

On trouvera d'une maniere ſemblable . . .

$$X = \frac{[\alpha\beta A - (\alpha\alpha - 2\beta)B]P^2 + (2B - \alpha A)Q^2}{\alpha(BB - \alpha AB) + \beta AA} - \frac{2B\beta^n}{\alpha}; \quad (dd)$$

Et ſi on joint ces deux valeurs par l'élimination du terme β^n, on en conclura . . . .

$$X = \frac{(\beta A - \alpha B)P^2 + 2BPQ - AQQ}{BB - \alpha AB + \beta AA}.$$

229. Pareillement, ſi nous voulons déterminer les termes qui viennent à la ſuite dans la ſérie $A + Bz + Cz^2 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \ldots\ldots + Xz^{2n} + Yz^{2n+1} + Zz^{2n+2}$. . . . .

nous aurons . . . .

$Z = \frac{(\epsilon A - \alpha B) Q^2 + 2 B Q R - A R R}{B B - \alpha A B + \epsilon A A}$, & à cause de $R = \alpha Q - \epsilon P$, ...

$$Z = \frac{- \epsilon\epsilon A P^2 + 2\epsilon (\alpha A - B) P Q + [\alpha B - (\alpha\alpha - \epsilon) A] Q^2}{B B + \alpha A B + \epsilon A A}$$

or . . . .

$Z = \alpha Y - \epsilon X$; donc $Y = \frac{Z + \epsilon X}{\alpha}$; & par conséquent $Y = \frac{- \epsilon B P^2 + 2 \epsilon A P Q + (B - \alpha A) Q Q}{B B - \alpha A B + \epsilon A A}$. Ainsi on pourra assigner, d'une maniere semblable, en X & en Y, les coëfficiens des puissances z^{4n} & z^{4n+1}, & en suivant le même procédé, on trouvera aussi ceux des puissances z^{8n}, z^{8n+1}; ainsi de suite.

EXEMPLE.

Soit proposée la série récurrente . . . . :
$1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1} +$ &c. dont chaque coëfficient est la somme des deux précédents; le dénominateur de la fraction, qui produit cette série, sera $1 - z - zz$; & conséquemment $\alpha = 1$; $\epsilon = -1$, & $A = 1$, $B = 3$; donc $BB - \alpha AB + \epsilon AA = 5$; d'où l'on tirera d'abord $Q = \frac{P + \sqrt{(5PP + 20(-1)^n}}{2} = \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$. Si n est un nombre pair, on prendra le signe supérieur, & on prendra, au contraire, l'inférieur, si n est un nombre impair. Par exemple, si $n = 4$, à cause de $P = 11$, on aura $Q = \frac{11 + \sqrt{(5.121 + 20)}}{2} = \frac{11 + 25}{2} = 18$. Si ensuite le coëfficient du terme z^{2n} est X, on aura $X = \frac{-4PP + 6PQ - QQ}{5}$. Donc le coëfficient de la puissance z^8 sera $= \frac{-4.121 + 6.198 - 324}{5} = 76$; mais comme $Q = \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$; on aura QQ =

$= \frac{3PP \pm 10 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$; & par conséquent $X = \frac{-PP \mp 2 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$. Donc un terme quelconque Pz^n de la série donnera ceux-ci : $\frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2} z^{n+1}$ & $\frac{-PP \mp 2 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2} z^{2n}$.

230. Semblablement dans les séries récurrentes, dont chaque terme dépend des trois précédents, on peut déterminer un terme quelconque, par le moyen des deux qui le précedent. En effet, soit la série récurrente . . . .
$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \&c.$
dont l'échelle de relation soit $\alpha, -\beta, +\gamma$; ou qui résulte d'une fraction, dont le dénominateur $= 1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3$. Si l'on exprime de même les termes P, Q, R par les facteurs de ce dénominateur que je suppose, $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$, de sorte que $P = \mathrm{A}p^n + \mathrm{B}q^n + \mathrm{C}r^n$; $Q = \mathrm{A}pp^n + \mathrm{B}qq^n + \mathrm{C}rr^n$, & $R = \mathrm{A}p^2 . p^n + \mathrm{B}q^2 . q^n + \mathrm{C}r^2 . r^n$: à cause de $p + q + r$ (ee)
$= \alpha$; $pq + pr + qr = \beta$ & $pqr = \gamma$; on trouvera la proportion suivante : . . . .

$$\left.\begin{array}{l} R^3 - 2\alpha Q \\ \quad + \beta\ P \end{array}\right\} R^2 \left.\begin{array}{l} + (\alpha\alpha + \beta) Q^2 \\ - (\alpha\beta + 3\gamma) PQ \\ + \alpha\gamma\ P^2 \end{array}\right\} R \begin{array}{l} - (\alpha\beta - \gamma)\ Q^3 \\ + (\alpha\gamma + \beta\beta)\ P\ Q^2 \\ - 2\beta\gamma P^2 Q \\ + \gamma\gamma\ P^3 \end{array} : \gamma^n =$$

$$\left.\begin{array}{l} C^3 - 2\alpha B \\ \quad + \beta\ A \end{array}\right\} C^2 \left.\begin{array}{l} + (\alpha^2 + \beta) B^2 \\ - (\alpha\beta + 3\gamma) AB \\ + \alpha\gamma\ A^2 \end{array}\right\} C \begin{array}{l} - (\alpha\beta - \gamma) B^3 \\ + (\alpha\gamma + \beta\beta) AB^2 \\ - 2\beta\gamma A^2 B \\ + \gamma\gamma A^3 \end{array} : 1.$$

Le terme R dépend donc des deux précédents P & Q, & pour le trouver il faudra résoudre une équation du troisieme degré.

231. Après ces observations sur les termes généraux des

séries récurrentes, il nous reste encore à chercher les sommes de ces séries. D'abord il est clair que la somme d'une série récurrente continuée à l'infini, est égale à la fraction qui l'a fait naître, & comme le dénominateur de la fraction est connu par la loi de la progression, il n'y a plus que le numérateur à déterminer. Soit donc proposée la série

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \&c;$$

dont la loi de progression donne le dénominateur $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4$. Supposons la fraction, qui exprime la somme de cette série infinie $= \frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$; comme la série proposée en dérive, on aura, en comparant, . .

$$a = A$$
$$b = B - \alpha A$$
$$c = C - \alpha B + \beta A$$
$$d = D - \alpha C + \beta B - \gamma A:$$

Donc la somme demandée sera . . . .

$$\frac{A + (B - \alpha A)z + (C - \alpha B + \beta A)z^2 + (D - \alpha C + \beta B - \gamma A)z^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}.$$

232. On comprend aisément après cela comment on trouve la somme d'une série récurrente continuée jusqu'à un terme donné. En effet, supposons qu'il soit question de trouver la somme de la série proposée jusqu'au terme Pz^n, & faisons . . . .

$$s = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \ldots\ldots + Pz^n.$$

Comme la somme de cette série prolongée à l'infini est connue, cherchons celle des termes qui suivent le dernier Pz^n à l'infini, laquelle nous supposons . . . .

$$t = Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + Tz^{n+4} + \&c.$$

cette série étant divisée par z^{n+1} donne une série récurrente parfaitement conforme à la premiere, dont la somme sera par conséquent $t =$ . . . .

$$\frac{Qz^{n+1} + (R - \alpha Q)z^{n+2} + (S - \alpha R + \beta Q)z^{n+3} + (T - \alpha S + \beta R - \gamma Q)z^{n+4}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 \pm \delta z^4}.$$

On en conclura que la somme cherchée $s =$ . . . .

$$\frac{+A+(B-\alpha A)z+(C-\alpha B+\beta A)z^2+(D-\alpha C+\beta B-\gamma A)z^3}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}$$

$$\frac{-Qz^{n+1}-(R-\alpha Q)z^{n+2}-(S-\alpha R+\beta Q)z^{n+3}-(T-\alpha S+\beta R-\gamma Q)z^{n+4}}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

233. Donc si l'échelle de relation est à deux termes $\alpha - \beta$; la somme de la série $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots\ldots+Pz^n$, qui résulte de la fraction $\frac{A+(B-\alpha A)z}{1-\alpha z+\beta zz}$ sera . : . .

$$\frac{A+(B-\alpha A)z-Qz^{n+1}-(R-\alpha Q)z^{n+2}}{1-\alpha z+\beta zz}.$$

Mais, par la nature de la série, $R=\alpha Q-\beta P$; donc nous aurons pour somme: $\frac{A+(B-\alpha A)z-Qz^{n+1}+\beta Pz^{n+2}}{1-\alpha z+\beta zz}$.

EXEMPLE.

Soit proposée la série $1+3z+4z^2+7z^3\ldots\ldots+Pz^n$; dans laquelle $\alpha=1$; $\beta=-1$; $A=1$; $B=3$; la somme de cette série sera $\frac{1+2z-Qz^{n+1}-Pz^{n+2}}{1-z-zz}$. Or si l'on fait $z=1$, la somme deviendra $1+3+4+7+11+\ldots\ldots+P=P+Q-3$. Donc la somme du dernier terme & du suivant excede de trois la somme de la série; & comme $Q=\frac{P+\sqrt{(5PP\pm 20)}}{2}$, la somme de la série $1+3+4+7+11+\ldots\ldots+P=\frac{3P-6+\sqrt{(5PP\pm 20)}}{2}$. La somme peut donc être exprimée par le moyen du dernier terme seulement.

CHAPITRE XIV.

De la multiplication & de la division des Angles.

234. Si dans un cercle dont le rayon $=1$, on suppose un angle ou un arc quelconque $=z$, son sinus $=x$, son

cosinus $= y$, & sa tangente $= t$; on aura $xx + yy = 1$, & $t = \frac{x}{y}$. Ainsi puisque les sinus & les cosinus des angles z; $2z$; $3z$; $4z$; forment, comme nous l'avons observé, une série récurrente, dont l'échelle de relation est $2y - 1$, on obtiendra d'abord pour les sinus de ces arcs les expressions suivantes: . . . .

$$
\begin{array}{lllllll}
\sin. 0z = & 0 & & & & & \\
\sin. 1z = & x & & & & & \\
\sin. 2z = & 2xy & & & & & \\
\sin. 3z = & 4xy^2 & - & x & & & \\
\sin. 4z = & 8xy^3 & - & 4xy & & & \\
\sin. 5z = & 16xy^4 & - & 12xy^2 & + & x & \\
\sin. 6z = & 32xy^5 & - & 32xy^3 & + & 6xy & \\
\sin. 7z = & 64xy^6 & - & 80xy^4 & + & 24xy^2 & - \; x \\
\sin. 8z = & 128xy^7 & - & 192xy^5 & + & 80xy^3 & - \; 8xy
\end{array}
$$

d'où l'on conclut . . . .

$$(ff)\ \sin. nz = x[2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)\,2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.\ \ 2}\,2^{n-5}y^{n-5}$$
$$- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ \ 2.\ \ 3}\,2^{n-7}y^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}\,2^{n-9}y^{n-9} - \&c.$$

235. Si nous faisons l'arc $nz = s$; nous aurons $\sin. nz = \sin. s = \sin. (\pi - s) = \sin. (2\pi + s) = \sin. (3\pi - s)$ &c. car tous ces sinus sont égaux entr'eux. Nous tirons de là plusieurs valeurs pour x, savoir, ...

$$\sin. \frac{s}{n};\ \sin. \frac{\pi - s}{n};\ \sin. \frac{2\pi + s}{n};\ \sin. \frac{3\pi - s}{n};\ \sin. \frac{4\pi + s}{n};\ \&c.$$

lesquelles, par conséquent conviennent toutes également à l'équation trouvée. Or on obtiendra pour x autant de valeurs différentes que n contient d'unités. Elles seront conséquemment les racines de l'équation dont il s'agit. Il faut donc avoir l'attention de ne pas regarder comme égales les valeurs qui doivent être considérées comme les mêmes, en n'admettant que les expressions alternatives. Les racines de (gg) l'équation étant donc ainsi déterminées, quoique d'une maniere indirecte, leur comparaison avec les termes de l'équation nous fournira des propriétés remarquables. Mais, comme pour cet objet, il faut avoir une équation qui ne renferme que l'inconnue x, on devra substituer à y sa valeur $\sqrt{(1 - xx)}$; ce qui exigera deux opérations, suivant que n sera un nombre pair, ou un nombre impair.

236. Soit n un nombre impair; comme la différence des arcs $-z$, $+z$, $+3z$, $+5z$; &c. est $2z$, & que le cosinus de cette différence $= 1 - 2xx$, l'échelle de relation de la progression des sinus sera $2 - 4xx$, -1. Donc . . .

$$\begin{array}{l} \textit{sin.} -z = -x \\ \textit{sin.}\ z = x \\ \textit{sin.}\ 3z = 3x - 4x^3 \\ \textit{sin.}\ 5z = 5x - 20x^3 + 16x^5 \\ \textit{sin.}\ 7z = 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7 \\ \textit{sin.}\ 9z = 9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9 \end{array}$$

Donc . . . .

$$\textit{sin.}\ nz = nx - \frac{n(nn-1)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}x^5 - \frac{n(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}x^7 + \&c. \qquad (hh)$$

pourvu que n soit un nombre impair. Les racines de cette équation sont . . . .

$\textit{sin.}\ z$; $\textit{sin.}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)$; $\textit{sin.}\left(\frac{4\pi}{n} + z\right)$; $\textit{sin.}\left(\frac{6\pi}{n} + z\right)$; $\textit{sin.}\left(\frac{8\pi}{n} + z\right)$ &c; dont le nombre est n.

237. L'équation $0 = 1 - \frac{nx}{\textit{sin.}\ nz} + \frac{n(nn-1)x^3}{1.2.3.\textit{sin.}\ nz} - \frac{n(nn-1)(nn-9)x^5}{1.2.3.4.5.\textit{sin.}\ nz} \ldots\ldots \pm \frac{2^{n-1}x^n}{\textit{sin.}\ nz}$, (en prenant le signe supérieur, lorsque n est surpassé d'une unité par un multiple de quatre, & le signe inférieur

dans le cas contraire) a donc pour facteurs $\left(1-\frac{x}{\text{sin.}\,z}\right)$ $\left(1-\frac{x}{\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}\right)\left(1-\frac{x}{\text{sin.}\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)}\right)$ &c. On conclut de-là que . . . .

$$\frac{n}{\text{sin.}\,nz}=\frac{1}{\text{sin.}\,z}+\frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}+\frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)}+\frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)}+\&c.$$

jusqu'à ce qu'on ait un nombre n de termes. Pour le produit de tous ces facteurs, on aura . . . .

$$\mp\frac{2^{n-1}}{\text{sin.}\,nz}=\frac{1}{\text{sin.}\,z.\,\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\text{sin.}\left(\frac{4\pi}{n}+z\right).\,\text{sin.}\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)\,\&c.},\ \text{ou}$$

$$\text{sin.}\,nz=\mp 2^{n-1}\text{sin.}\,z.\,\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\text{sin.}\left(\frac{4\pi}{n}+z\right).\,\text{sin.}\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)\,\&c.$$

&, à cause que l'avant dernier terme manque, on a . .

$$0=\text{sin.}\,z+\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)+\text{sin.}\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)+\text{sin.}\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)+\&c.$$

EXEMPLE I.

Si donc $n=3$, on aura les équations suivantes:

$$0=\text{sin.}\,z+\text{sin.}\,(120^\circ+z)+\text{sin.}\,(240^\circ+z)=\text{sin.}\,z+\text{sin.}\,(60^\circ-z)-\text{sin.}\,(60^\circ+z);$$

$$\frac{3}{\text{sin.}\,3z}=\frac{1}{\text{sin.}\,z}+\frac{1}{\text{sin.}\,(120+z)}+\frac{1}{\text{sin.}\,(240+z)}=\frac{1}{\text{sin.}\,z}+\frac{1}{\text{sin.}\,(60-z)}-\frac{1}{\text{sin.}\,(60+z)};$$

$$\text{sin.}\,3z=-4\,\text{sin.}\,z.\,\text{sin.}\,(120+z)\,\text{sin.}\,(240+z)=4\,\text{sin.}\,z.\,\text{sin.}\,(60-z)\ \ \text{sin.}\,(60+z);$$

On en conclura, comme nous l'avons déja remarqué,

$\text{sin.}\,(60+z)=\text{sin.}\ z+\text{sin.}\ (60-z)$ &

$3\ \text{cosec.}\ 3z=\text{cosec.}\,z+\text{cosec.}\,(60-z)-\text{cosec.}\,(60+z).$

EXEMPLE II.

Supposons $n=5$, & nous aurons ces équations:

$$0=\text{sin.}\,z+\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)+\text{sin.}\,(\tfrac{4}{5}\pi+z)+\text{sin.}\,(\tfrac{6}{5}\pi+z)+\text{sin.}\,(\tfrac{8}{5}\pi+z)$$

ou $0=\text{sin.}\,z+\text{sin.}\,(\frac{2}{5}\pi+z)+\text{sin.}\,(\frac{1}{5}\pi-z)-\text{sin.}\,(\frac{1}{5}\pi+z)-\text{sin.}\,(\frac{2}{5}\pi-z)$]

ou $0=\text{sin.}\,z+\text{sin.}\,(\frac{1}{5}\pi-z)-\text{sin.}\,(\frac{1}{5}\pi+z)-\text{sin.}\,(\frac{2}{5}\pi-z)+\text{sin.}\,(\frac{2}{5}\pi+z);$

Puis . . . .

$$\frac{5}{\text{fin. } 5z} = \frac{1}{\text{fin. } z} + \frac{1}{\text{fin.}(\frac{1}{5}\pi - z)} - \frac{1}{\text{fin.}(\frac{1}{5}\pi + z)} - \frac{1}{\text{fin.}(\frac{2}{5}\pi - z)} + \frac{1}{\text{fin.}(\frac{2}{5}\pi + z)}.$$

$$\text{fin. } 5z = 16.\text{fin. } z.\text{fin.}(\tfrac{1}{5}\pi - z)\text{fin.}(\tfrac{1}{5}\pi + z)\text{ fin. }(\tfrac{2}{5}\pi - z)\text{ fin. }(\tfrac{2}{5}\pi + z).$$

EXEMPLE III.

D'après cela, fi nous faifons $n = 2m + 1$, nous trouverons

$$0 = \text{fin. } z + \text{fin.}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \text{fin.}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) - \text{fin.}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \text{fin.}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) +$$
$$\text{fin.}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \text{fin.}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) - \ldots\ldots \pm \text{fin.}\left(\frac{m}{n}\pi - z\right) \mp \text{fin.}\left(\frac{m}{n}\pi + z\right).$$

Les fignes fupérieurs font pour le cas où m eft un nombre impair, & les fignes inférieurs pour celui où m eft un nombre pair. L'autre équation fera . . . .

$$\frac{n}{\text{fin.} nz} = \frac{1}{\text{fin.} z} + \frac{1}{\text{fin.}\left(\frac{\pi}{n} - z\right)} - \frac{1}{\text{fin.}\left(\frac{\pi}{n} + z\right)} - \frac{1}{\text{fin.}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right)} + \frac{1}{\text{fin.}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)}$$
$$+ \frac{1}{\text{fin.}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right)} - \frac{1}{\text{fin.}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right)} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{\text{fin.}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right)} \mp \frac{1}{\text{fin.}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right)}.$$

laquelle fe ramene facilement aux cofécantes. On a en troifieme lieu ce produit: . . . .

$$\text{fin. } nz = 2^{2m}\text{fin.} z\,\text{fin.}\left(\frac{\pi}{n} - z\right)\text{fin.}\left(\frac{\pi}{n} + z\right)\text{fin.}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right)\text{fin.}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)\text{fin.}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right).$$
$$\text{fin.}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right)\ldots\ldots\ldots \times \text{fin.}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right)\text{fin.}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right).$$

238. Soit à préfent n un nombre pair; à caufe de $y = \sqrt{(1 - xx)}$ & de $\text{cof. } 2z = 1 - 2xx$, ce qui donne, comme ci-deffus, l'échelle de relation, $2 - 4xx, -1$, on aura . . . .

$\text{fin. } 0z = 0$

$\text{fin. } 2z = 2x\sqrt{(1 - xx)}$

$\text{fin. } 4z = (4x - 8x^3)\sqrt{(1 - xx)}$

$\text{fin. } 6z = (6x - 32x^3 + 32x^5)\sqrt{(1 - xx)}$

$\text{fin. } 8z = (8x - 80x^3 + 192x^5) - 128x^7)\sqrt{(1 - xx)}$

& en général . . . .

(::) $$\textit{fin.}\, n z = \left[n x - \frac{n(nn-4)}{1.\,2.\,3} x^3 + \frac{n.(nn-4)(nn-16)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} x^5 - \frac{n.(nn-4)(nn-16)(nn-36)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} x^7 + \ldots\ldots \pm 2^{\;\;-1} x^{n-1} \right] \sqrt{(1-xx)},$$

n désignant un nombre quelconque pair.

239. Pour rendre cette équation rationnelle, prenons de part & d'autre les quarrés, & nous aurons une équation de cette forme : . . . .

$(\textit{fin.}\, n z)^2 = nnxx + Px^4 + Qx^6 + \ldots\ldots\ldots - 2^{2n-2} x^{2n}$, ou $x^{2n} \ldots\ldots\ldots - \frac{nn}{2^{2n-2}} xx + \frac{1}{2^{2n-2}} (\textit{fin.}\, n z)^2 = 0$; dont les racines feront à la fois positives & négatives ; favoir $\pm\, \textit{fin.}\, z$, $\pm\, \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{n} - z\right)$; $\pm\, \textit{fin.} \left(\frac{2\pi}{n} + z\right)$; $\pm\, \textit{fin.} \left(\frac{3\pi}{n} - z\right)$; $\pm\, \textit{fin.} \left(\frac{4\pi}{n} + z\right)$ &c. prenant toujours un nombre n de ces expreffions ; & comme le dernier terme eft le produit de toutes les racines, en extrayant la racine quarrée des deux membres, on aura

$$\textit{fin.}\, n z = \pm 2^{n-1}\, \textit{fin.}\, z . \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{n} - z\right) \textit{fin.} \left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \textit{fin.} \left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \ldots\ldots$$

Les cas particuliers apprendront de quel figne on doit faire ufage.

EXEMPLE.

Ainfi, en fubftituant pour n fucceffivement les nombres 2, 4, 6, &c, & choififfant un nombre n de finus différens, on aura

$$\textit{fin.}\, 2z = 2\,\textit{fin.}\, z . \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$\textit{fin.}\, 4z = 8\,\textit{fin.}\, z . \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{4} - z\right) \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{4} + z\right) \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$\textit{fin.}\, 6z = 32\,\textit{fin.}\, z . \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{6} - z\right) \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{6} + z\right) \textit{fin.} \left(\frac{2\pi}{6} - z\right) \textit{fin.} \left(\frac{2\pi}{6} + z\right) \textit{fin.} \left(\frac{3\pi}{6} - z\right)$$

$$\textit{fin.}\, 8z = 128\,\textit{fin.}\, z . \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{8} - z\right) \textit{fin.} \left(\frac{\pi}{8} + z\right) \textit{fin.} \left(\frac{2\pi}{8} - z\right) \textit{fin.} \left(\frac{2\pi}{8} + z\right) \times \textit{fin.} \left(\frac{3\pi}{8} - z\right) \textit{fin.} \left(\frac{3\pi}{8} + z\right) \textit{fin.} \left(\frac{4\pi}{8} - z\right).$$

240.

240. Il suit donc de-là qu'en général . . . .

$$\sin. nz = 2^{n+1} \sin. z \sin. \left(\frac{\pi}{n} - z\right) \sin. \left(\frac{\pi}{n} + z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{n} + z\right)$$
$$\sin. \left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \sin. \left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \ldots\ldots \times \sin. \left(\tfrac{1}{2}\pi - z\right)$$

en supposant n un nombre pair. Or, si on compare cette expression, avec la précédente qui a lieu, lorsque n est un nombre impair, on remarquera entr'elles une telle ressemblance, qu'on pourra les réduire à une seule. On aura donc, soit qu'on suppose n un nombre pair, soit qu'on le suppose un nombre impair, ...

$$\sin. nz = 2^{n-1} \sin. z \sin. \left(\frac{\pi}{n} - z\right) \sin. \left(\frac{\pi}{n} + z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \times$$
$$\sin. \left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \sin. \left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \ \&c.$$

jusqu'à ce qu'on ait pris autant de facteurs que le nombre n contient d'unités.

241. Ces formules, au moyen desquelles on exprime en facteurs les sinus des angles multiples, peuvent être utiles pour calculer les logarithmes des sinus des angles multiples, & pour trouver plusieurs expressions des sinus en facteurs, tels que nous les avons donnés (art. 184). Au reste, on aura

$$\sin. z = 1. \sin. z.$$
$$\sin. 2z = 2. \sin. z. \sin. \left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$
$$\sin. 3z = 4. \sin. z. \sin. \left(\frac{\pi}{3} - z\right) \sin. \left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$
$$\sin. 4z = 8. \sin. z. \sin. \left(\frac{\pi}{4} - z\right) \sin. \left(\frac{\pi}{4} + z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{4} - z\right)$$
$$\sin. 5z = 16. \sin. z. \sin. \left(\frac{\pi}{5} - z\right) \sin. \left(\frac{\pi}{5} + z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{5} - z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$
$$\sin. 6z = 32 \sin. z. \sin. \left(\frac{\pi}{6} - z\right) \sin. \left(\frac{\pi}{6} + z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{6} - z\right) \sin. \left(\frac{2\pi}{6} + z\right) \times$$
$$\sin. \left(\frac{3\pi}{6} - z\right)$$

&c.

242. De plus, à cauſe de $\frac{\mathit{ſin.}\, 2nz}{\mathit{ſin.}\, nz} = 2\, \mathit{coſ.}\, nz$, les coſinus des angles multiples ſeront exprimés en facteurs d'une maniere ſemblable. . . . .

$$\mathit{Coſ.}\, z = 1.\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$\mathit{Coſ.}\, 2z = 2.\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{4} - z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{4} + z\right)$$

$$\mathit{Coſ.}\, 3z = 4.\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{6} - z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{6} + z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{3\pi}{6} - z\right)$$

$$\mathit{Coſ.}\, 4z = 8.\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{8} - z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{8} + z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{3\pi}{8} - z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{3\pi}{8} + z\right)$$

$$\mathit{Coſ.}\, 5z = 16.\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{10} - z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{10} + z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{3\pi}{10} - z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{3\pi}{10} + z\right) \times$$
$$\mathit{ſin.}\left(\frac{5\pi}{10} - z\right)$$

& en général

$$\mathit{Coſ.}\, nz = 2^{n-1}\, \mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{2n} - z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{\pi}{2n} + z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{3\pi}{2n} - z\right)\mathit{ſin.}\left(\frac{3\pi}{2n} + z\right) \times$$
$$\mathit{ſin.}\left(\frac{5\pi}{2n} - z\right) \&c.$$

juſqu'à ce qu'on ait autant de facteurs que n contient d'unités.

243. Les mêmes expreſſions ſe déduiſent de la conſidération des coſinus des arcs multiples. En effet, ſi l'on fait $\mathit{coſ.}\, z = y$, on trouvera, comme il ſuit: . . . .

$$\mathit{Coſ.}\, 0z = 1$$
$$\mathit{Coſ.}\, 1z = y$$
$$\mathit{Coſ.}\, 2z = 2yy - 1$$
$$\mathit{Coſ.}\, 3z = 4y^3 - 3y$$
$$\mathit{Coſ.}\, 4z = 8y^4 - 8yy + 1$$
$$\mathit{Coſ.}\, 5z = 16y^5 - 20y^3 + 5y$$
$$\mathit{Coſ.}\, 6z = 32y^6 - 48y^4 + 18yy - 1$$
$$\mathit{Coſ.}\, 7z = 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y$$

& en général

$$Cos. n z = 2^{n-1} y^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.\ 2} 2^{n-5} y^{n-4} - \frac{n.(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3} 2^{n-7} y^{n-6} + \frac{n.(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} 2^{n-9} y^{n-8} - \&c. \quad (kk)$$

Cette équation, à cause de $cos\ n z = cos. (2\pi - n z) = cos. (2\pi + n z) = cos. (4\pi \pm n z) = cos. (6\pi \pm n z)$ &c, aura pour ses racines y: $cos. z$; $cos. \left(\frac{2\pi}{n} \pm z\right)$; $cos. \left(\frac{4\pi}{n} \pm z\right)$; $cos. \frac{6\pi}{n} \pm z)$ &c, & on choisira pour y autant de ces expressions qu'il y a de racines, c'est-à-dire, autant que n contient d'unités.

244. D'abord, il est donc évident, qu'à cause du second terme, qui manque, on aura toujours, excepté le cas où $n=1$, la somm. de toutes ces racines $= 0$. Par conséquent,

$$0 = cos. z + cos. \left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + cos. \left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + cos. \left(\frac{4\pi}{n} - z\right) + cos. \left(\frac{4\pi}{n} + z\right) \&c.$$

en prenant autant de termes que n contient d'unités : au reste, cette égalité se présente d'elle-même, si n est un nombre pair, parce q e chaque terme est détruit par un autre négatif qui lui est égal. Considérons donc les nombres impairs en excluant l'unité, & nous aurons, à cause de $cos. v = - cos. (\pi - v)$ . . . .

$$0 = cos. z - cos. \left(\frac{\pi}{3} - z\right) - cos. \left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$0 = cos. z - cos. \left(\frac{\pi}{5} - z\right) - cos. \left(\frac{\pi}{5} + z\right) + cos. \left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + cos. \left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

$$0 = cos. z - cos. \left(\frac{\pi}{7} - z\right) - cos. \left(\frac{\pi}{7} + z\right) + cos. \left(\frac{2\pi}{7} - z\right) + cos. \left(\frac{2\pi}{7} + z\right) - cos. \left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - cos. \left(\frac{3\pi}{7} + z\right)$$

& généralement n étant un nombre impair quelconque;

$$0 = cos. z - cos. \left(\frac{\pi}{n} - z\right) - cos. \left(\frac{\pi}{n} + z\right) + cos. \left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + cos. \left(\frac{2\pi}{n} + z\right) - cos. \left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - cos. \left(\frac{3\pi}{n} + z\right) + cos. \left(\frac{4\pi}{n} - z\right) + cos. \left(\frac{4\pi}{n} + z\right) - \&c.$$

ayant soin de prendre toujours autant de termes que n contient d'unités : mais, il est nécessaire que n soit un nombre impair plus grand que l'unité, comme nous en avons déja averti.

245. Quant au produit de toutes les racines, on obtient à la vérité différentes expressions, suivant que n est un nombre ou impair, ou impairement pair, ou pairement pair; mais elles sont toutes comprises dans l'expression générale trouvée ci-dessus (art. 242), en changeant les sinus en cosinus. Ainsi, on aura . . . .

$$cof.\ z = 1.\,cof.\,z$$

$$cof.\,2z = 2.\,cof.\left(\frac{\pi}{4}+z\right)cof.\left(\frac{\pi}{4}-z\right)$$

$$cof.\,3z = 4.\,cof.\left(\frac{2\pi}{6}+z\right)cof.\left(\frac{2\pi}{6}-z\right)cof.\,z$$

$$cof.\,4z = 8.\,cof.\left(\frac{3\pi}{8}+z\right)cof.\left(\frac{3\pi}{8}-z\right)cof.\left(\frac{\pi}{8}+z\right)cof.\left(\frac{\pi}{8}-z\right)$$

$$cof.\,5z = 16.\,cof.\left(\frac{4\pi}{10}+z\right)cof.\left(\frac{4\pi}{10}-z\right)cof.\left(\frac{2\pi}{10}+z\right)cof.\left(\frac{2\pi}{10}-z\right)cof.\,z$$

& en général

$$cof.\,nz = 2^{n-1}\,cof.\left(\frac{n-1}{2n}\pi+z\right)cof.\left(\frac{n-1}{2n}\pi-z\right)cof.\left(\frac{n-3}{2n}\pi+z\right)cof.\left(\frac{n-3}{2n}\pi-z\right)$$

$$cof.\left(\frac{n-5}{2n}\pi+z\right)cof.\left(\frac{n-5}{2n}\pi-z\right)cof.\left(\frac{n-7}{2n}\pi+z\right)\ \&c.$$

en prenant autant de facteurs que n contient d'unités.

246. Soit n un nombre impair, & commençons l'équation par l'unité; nous aurons $o = 1 \mp \frac{ny}{cof.\,nz} + \&c$, équation dans laquelle il faudra prendre le signe supérieur, si n est un nombre impair de la forme $4m+1$, & l'inférieur, si $n = 4m-1$. Nous tirerons de-là . . . .

$$+\frac{1}{cof.\,z} = \frac{1}{cof.\,z}$$

$$-\frac{3}{cof.\,3z} = \frac{1}{cof.\,z} - \frac{1}{cof.\left(\frac{\pi}{3}-z\right)} - \frac{1}{cof.\left(\frac{\pi}{3}+z\right)}$$

$$+\frac{5}{cof.\,5z} = \frac{1}{cof.\,z} - \frac{1}{cof.\left(\frac{\pi}{5}-z\right)} - \frac{1}{cof.\left(\frac{\pi}{5}+z\right)} + \frac{1}{cof.\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)} + \frac{1}{cof.\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)}$$

& généralement, en supposant $n = 2m + 1$,

$$\frac{n}{cos. nz} = \frac{2m+1}{cos. (2m+1)z} = \frac{1}{cos.\left(\frac{m}{n}\pi + z\right)} + \frac{1}{cos.\left(\frac{m}{n}\pi - z\right)} - \frac{1}{cos.\left(\frac{m-1}{n}\pi + z\right)}$$

$$- \frac{1}{cos.\left(\frac{m-1}{n}\pi - z\right)} + \frac{1}{cos.\left(\frac{m-2}{n}\pi + z\right)} + \frac{1}{cos.\left(\frac{m-2}{n}\pi - z\right)} - \frac{1}{cos\left(\frac{m-3}{n}\pi + z\right)} - \&c.$$

en prenant autant de termes qu'il y a d'unités dans n.

247. Donc, à cause de $\frac{1}{cos. v} = séc. v$, on en conclura pour les sécantes ces propriétés remarquables : savoir,

$$séc.\ z = séc.\ z$$

$$3\, séc.\ 3z = séc.\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + séc.\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - séc.\left(\frac{0\pi}{3} + z\right)$$

$$5\, séc.\ 5z = séc.\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + séc.\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) - séc.\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - séc.\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + séc.\left(\frac{0\pi}{5} + z\right)$$

$$7\, séc.\ 7z = séc.\left(\frac{3\pi}{7} + z\right) + séc.\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - séc.\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) - séc.\left(\frac{2\pi}{7} - z\right) +$$
$$séc.\left(\frac{\pi}{7} + z\right) + séc.\left(\frac{\pi}{7} - z\right) - séc.\left(\frac{0\pi}{7} + z\right)$$

& généralement, en faisant $n = 2m + 1$; on aura

$$n\, séc.\ n\, z = séc.\left(\frac{m}{n}\pi + z\right) + séc.\left(\frac{m}{n}\pi - z\right) - séc.\left(\frac{m-1}{n}\pi + z\right) -$$
$$séc.\left(\frac{m-1}{n}\pi - z\right) + séc.\left(\frac{m-2}{n}\pi + z\right) + séc.\left(\frac{m-2}{n}\pi - z\right) -$$
$$séc.\left(\frac{m-3}{n}\pi + z\right) - séc.\left(\frac{m-3}{n}\pi - z\right) + séc.\left(\frac{m-4}{n}\pi + z\right) + \ldots\ldots \pm séc.\ z.$$

248. Quant aux cosécantes, on trouvera d'après ce que nous avons vu (art 237)

$$cosséc.\ z = cosséc.\ z$$

$$3\, cosséc.\ 3z = cosséc.\ z + cosséc.\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - cosséc.\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$5\, cosséc.\ 5z = cosséc.\ z + cosséc.\left(\frac{\pi}{5} - z\right) - cosséc.\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - cosséc.\left(\frac{2\pi}{5} - z\right)$$
$$\pm\, cosséc.\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

$$7\, cos\acute{e}c. 7z = cos\acute{e}c. z + cos\acute{e}c. \left(\frac{\pi}{7} - z\right) - cos\acute{e}c. \left(\frac{\pi}{7} + z\right) - cos\acute{e}c. \left(\frac{2\pi}{7} - z\right)$$
$$+ cos\acute{e}c. \left(\frac{2\pi}{7} + z\right) + cos\acute{e}c. \left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - cos\acute{e}c. \left(\frac{3\pi}{7} + z\right)$$

& généralement en suppofant $n = 2m + 1$, on aura

$$n\, cos\acute{e}c. nz = cos\acute{e}c. z + cos\acute{e}c. \left(\frac{\pi}{n} - z\right) - cos\acute{e}c. \left(\frac{\pi}{n} + z\right) - cos\acute{e}c. \left(\frac{2\pi}{n} - z\right)$$
$$+ cos\acute{e}c. \left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + cos\acute{e}c. \left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - cos\acute{e}c. \left(\frac{5\pi}{n} + z\right) -$$
$$\ldots\ldots\ldots \mp cos\acute{e}c. \left(\frac{m\pi}{n} - z\right) \pm cos\acute{e}c. \left(\frac{m\pi}{n} + z\right).$$

Les fignes fupérieurs conviennent aux cas où m eft un nombre pair, & les inférieurs à ceux où m eft un nombre impair.

249. Nous avons vu auparavant que $cos.\ nz \pm \sqrt{-1}.\ fin.\ nz = (cos.\ z \pm \sqrt{-1}\ fin.\ z)^n$ donc $cos.\ nz = \frac{(cos.\ z + \sqrt{-1}\ fin.\ z)^n + (cos.\ z - \sqrt{-1}\ fin.\ z)^n}{2}$; $fin\ nz = \frac{(cos.\ z + \sqrt{-1}\ fin.\ z)^n - (cos\ z - \sqrt{-1}.\ fin.\ z)^n}{2\sqrt{-1}}$; & $tang.\ nz = \frac{(cos.\ z + \sqrt{-1}.\ fin.\ z)^n - (cos.\ z - \sqrt{-1}\ fin.\ z)^n}{(cos.\ z + \sqrt{-1}\ fin.\ z)^n \sqrt{-1} + (cos.\ z - \sqrt{-1}\ fin.\ z)^n \sqrt{-1}}$. Faifons $tang.\ z = \frac{fin.\ z}{cof.\ z} = t$, nous aurons $tang.\ nz = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^n - (1 - t\sqrt{-1})^n}{(1 + t\sqrt{-1})^n \sqrt{-1} + (1 - t\sqrt{-1})^n \sqrt{-1}}$: ce qui donne pour les tangentes des angles multiples les expreffions fuivantes: . . . .

$$tang.\ z = t$$
$$tang.\ 2z = \frac{2t}{1 - tt}$$
$$tang.\ 3z = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}$$
$$tang.\ 4z = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6tt + t^4}$$
$$tang.\ 5z = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10tt + 5t^4}$$

& en général

$$tang.\, n z = \frac{nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3} t^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5} t^5 - \&c.}{1 - \frac{n.(n-1)}{1.\ \ 2} tt + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.} t^4 - \&c.}$$

A présent, puisque $tang.\, n z = tang.\, (\pi + n z) = tang.\, (2\pi + n z) = tang.\, (3\pi + n z)$ &c; les valeurs de t ou les racines de l'équation seront $tang.\, z$; $tang.\left(\frac{\pi}{n} + z\right)$; $tang.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)$; $tang.\left(\frac{3\pi}{n} + z\right)$; &c. jusqu'à ce qu'on en ait un nombre n.

250. Si l'équation commence par l'unité, on aura . .

$$0 = 1 - \frac{nt}{tang.\, n z} - \frac{n.(n-1)tt}{1.\ \ 2} + \frac{n.(n-1)(n-2)t^3}{1.\ 2.\ \ 3.\ tang.\ n z} + \&c.$$

& par conséquent la comparaison des coëfficiens avec les racines donnera . . . .

$$n\, cot.\, n z = cot.\, z + cot.\left(\frac{\pi}{n} + z\right) + cot.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + cot.\left(\frac{3\pi}{n} + z\right)$$
$$+ cot.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) + \ldots\ldots + cot.\left(\frac{n-1}{n}\pi + z\right).$$

On aura ensuite la somme des quarrés de toutes ces cotangentes $= \frac{nn}{(sin.\, n z)^2} - n$. Les puissances supérieures peuvent être assignées d'une maniere semblable. Au reste, en mettant pour n des nombres déterminés, on trouvera . . . .

$$cot.\ z = cot.\, z$$
$$2\, cot.\, 2 z = cot.\, z + cot.\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$$
$$3\, cot.\, 3 z = cot.\, z + cot.\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + cot.\left(\frac{2\pi}{3} + z\right)$$
$$4\, cot.\, 4 z = cot.\, z + cot.\left(\frac{\pi}{4} + z\right) + cot.\left(\frac{2\pi}{4} + z\right) + cot.\left(\frac{3\pi}{4} + z\right)$$
$$5\, cot.\, 5 z = cot.\, z + cot.\left(\frac{\pi}{5} + z\right) + cot.\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + cot.\left(\frac{3\pi}{5} + z\right)$$
$$+ cot.\left(\frac{4}{5}\pi + z\right).$$

251. Mais comme *cot.* $v = - cot. (\pi - v)$, on aura

$$cot.\ z = cot.\ z$$

$$2\ cot.\ 2z = cot.\ z - cot.\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$3\ cot.\ 3z = cot.\ z - cot.\left(\frac{\pi}{3} - z\right) + cot.\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$4\ cot.\ 4z = cot.\ z - cot.\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + cot.\left(\frac{\pi}{4} + z\right) - cot.\left(\frac{2\pi}{4} - z\right)$$

$$5\ cot.\ 5z = cot.\ z - cot.\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + cot.\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - cot.\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + cot.\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

& en général . . . .

$$n\ cot.\ nz = cot.\ z - cot.\left(\frac{\pi}{n} - z\right) + cot.\left(\frac{\pi}{n} + z\right) - cot.\left(\frac{2\pi}{n} - z\right)$$

$$+ cot.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) - cot.\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) + cot.\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) - \&c.$$

jusqu'à ce qu'on ait pris autant de termes que le nombre n contient d'unités.

252. Commençons l'équation que nous avons trouvée, par la plus haute puissance, & distinguons les cas où n est un nombre pair, ou un nombre impair. Soit d'abord n un nombre impair $= 2m + 1$, on aura . . . .

$$t - tang.\ z = 0$$

$$t^3 - 3tt\ tang.\ 3z - 3t + tang.\ 3z = 0$$

$$t^5 - 5t^4\ tang.\ 5z - 10t^3 + 10tt\ tang\ 5z + 5t - tang.\ 5z = 0$$

& en général . . . .

$$t^n - n t^{n-1}\ tang.\ nz - \ldots\ldots\ldots\ldots \mp tang.\ nz = 0$$

le signe supérieur $-$ a lieu, si m est un nombre pair, & l'inférieur $+$ si m est un nombre impair. On aura donc, à cause du coëfficient du second terme . . . .

$$tang.\ z = tang.\ z$$

$$3\ tang.\ 3z = tang.\ z + tang.\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{3} + z\right)$$

$$5\ tang.\ 5z = tang.\ z + tang.\left(\frac{\pi}{5} + z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + tang.\left(\frac{3\pi}{5} + z\right) + tang.\left(\frac{4\pi}{5} + z\right)$$

&c.

253. Comme $tang.\, v = - tang.\, (\pi - v)$, les angles plus grands qu'une angle droit se ramenent à ceux qui sont plus petits, & on a . . . .

$$tang.\, z = tang.\, z$$

$$3\, tang.\, 3z = tang.\, z - tang.\left(\frac{\pi}{3} - z\right) + tang.\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$5\, tang.\, 5z = tang.\, z - tang.\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + tang.\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - tang.\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

$$7\, tang.\, 7z = tang.\, z - tang.\left(\frac{\pi}{7} - z\right) + tang.\left(\frac{\pi}{7} + z\right) - tang.\left(\frac{2\pi}{7} - z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) - tang.\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) + tang.\left(\frac{3\pi}{7} + z\right),$$

& généralement si $n = 2m + 1$, on aura . . . .

$$n\, tang.\, nz = tang.\, z - tang.\left(\frac{\pi}{n} - z\right) + tang.\left(\frac{\pi}{n} + z\right) - tang.\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) - tang.\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) + \ldots\ldots\ldots - tang.\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) + tang.\left(\frac{m\pi}{n} + z\right).$$

254. Quant au produit de toutes ces tangentes, il sera $= tang.\, nz$, parce que le nombre des signes négatifs, qui se trouve alternativement pair & impair, fait disparoître l'ambiguité des signes ci-dessus. Ainsi on aura . . . .

$$tang.\, z = tang.\, z.$$

$$tang.\, 3z = tang.\, z.\, tang.\left(\frac{\pi}{3} - z\right) tang.\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$tang.\, 5z = tang.\, z.\, tang.\left(\frac{\pi}{5} - z\right) tang.\left(\frac{\pi}{5} + z\right) tang.\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) tang.\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

& en général si $n = 2m + 1$, ...

$$tang.\, nz = tang.\, z.\, tang.\left(\frac{\pi}{n} - z\right) tang.\left(\frac{\pi}{n} + z\right) tang.\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) tang.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \times tang.\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \times tang.\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) tang.\left(\frac{m\pi}{n} + z\right).$$

255. Soit maintenant n un nombre pair, & commençons par la plus grande puissance, nous aurons . . . . .

$$tt + 2t\, cot.\, 2z - 1 = 0$$

$$t^4 + 4t^3\, cot.\, 4z - 6tt - 4t\, cot.\, 4z + 1 = 0$$

& en général, si $n = 2m$, ...

$$t^n + n\,t^{n-1}\,cot.\,n\,z - \ldots\ldots\ldots\ldots \mp 1 = 0$$

le signe supérieur $-$ a lieu, si m est un nombre impair, & l'inférieur $+$ si m est pair. En comparant donc les racines avec le coëfficient du second terme, nous trouverons . .

$$-2\,cot.\,2z = tang.\,z + tang.\left(\frac{\pi}{2}+z\right)$$

$$-4\,cot.\,4z = tang.\,z + tang.\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{4}+z\right) + tang.\left(\frac{3\pi}{4}+z\right)$$

$$-6\,cot.\,6z = tang.\,z + tang.\left(\frac{\pi}{6}+z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) + tang.\left(\frac{3\pi}{6}+z\right)$$
$$+ tang.\left(\frac{4\pi}{6}+z\right) + tang.\left(\frac{5\pi}{6}+z\right)$$

&c.

256. A cause de $tang.\,v = -\,tang.\,(\pi - v)$, on formera les équations suivantes : . . . .

$$2\,cot.\,2z = -\,tang.\,z + tang.\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$4\,cot.\,4z = -\,tang.\,z + tang.\left(\frac{\pi}{4}-z\right) - tang.\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{4}-z\right).$$

$$6\,cot.\,6z = -\,tang.\,z + tang.\left(\frac{\pi}{6}-z\right) - tang.\left(\frac{\pi}{6}+z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{6}-z\right)$$
$$-\,tang.\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) + tang.\left(\frac{3\pi}{6}-z\right)$$

& en général, si $n = 2m$, on a . . . .

$$n\,cot.\,n\,z = -\,tang.\,z + tang.\left(\frac{\pi}{n}-z\right) - tang.\left(\frac{\pi}{n}+z\right) + tang.\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)$$
$$-\,tang.\left(\frac{2\pi}{n}+z\right) + tang.\left(\frac{3\pi}{n}-z\right) - tang.\left(\frac{3\pi}{n}+z\right) + \ldots\ldots + tang.\left(\frac{m\pi}{n}-z\right).$$

257. Ces formules font disparoître encore l'ambiguité des signes du produit de toutes les racines ; & on aura par cette raison . . . .

$$1 = tang.\,z.\,tang.\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$1 = tang.\,z\,tang.\left(\frac{\pi}{4}-z\right) tang.\left(\frac{\pi}{4}+z\right) tang.\left(\frac{2\pi}{4}-z\right)$$

$$1 = tang.\,z.\,tang.\left(\frac{\pi}{6}-z\right) tang.\left(\frac{\pi}{6}+z\right) tang.\left(\frac{2\pi}{6}-z\right) tang.\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) tang.\left(\frac{3\pi}{6}-z\right);$$

&c.

au surplus, la raison pour laquelle ces équations ont lieu, est sensible & saute d'abord aux yeux; puisqu'il y a toujours deux angles complémens l'un de l'autre. Les tangentes de deux de ces angles donnent donc toujours un produit $= 1$, & par conséquent le produit de toutes doit être égal à l'unité.

258. Comme les sinus & les cosinus des angles en progression arithmétique forment une série récurrente, on pourra assigner par le Chapitre précédent la somme d'autant de ces sinus & de ces cosinus qu'on voudra. Soient les angles en progression arithmétique . . . .

$$a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b, a+5b \text{ \&c},$$

& cherchons d'abord la somme des sinus de ces angles, en supposant la progression infinie. Soit donc . . . .

$s = \sin. a + \sin. (a+b) + \sin. (a+2b) + \sin. (a+3b) + \&c.$
& comme cette série est une série récurrente, dont l'échelle de relation est $2 \cos. b - 1$, elle provient du développement d'une fraction, dont le dénominateur est $1 - 2z \cos. b + zz$, en faisant $z = 1$. Or cette fraction sera $= \frac{\sin. a + z[\sin. (a+b) - 2 \sin. a \cos. b]}{1 - 2z \cos. b + zz}$. Donc en supposant $z = 1$, on aura $s = \frac{\sin. a + \sin. (a+b) - 2 \sin. a \cos. b}{2 - 2 \cos. b} = \frac{\sin. a - \sin. (a-b)}{2(1 - \cos. b)}$ à cause de $2 \sin. a \cos. b = \sin. (a+b) + \sin. (a-b)$. Mais, comme $\sin. f - \sin. g = 2. \cos. \frac{f+g}{2}. \sin. \frac{f-g}{2}$, il s'ensuit que $\sin. a - \sin. (a-b) = 2 \cos. (a - \frac{1}{2} b) \sin. \frac{1}{2} b$: d'ailleurs $1 - \cos. b = 2 (\sin. \frac{1}{2} b)^2$; ce qui donne $s = \frac{\cos. (a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin. \frac{1}{2} b}$.

259. Concluons de-là qu'on pourra assigner la somme d'un certain nombre de sinus, dont les arcs sont en progression arithmétique. En effet, qu'il s'agisse d'avoir la somme de cette progression . . . .

$\sin. a + \sin. (a+b) + \sin. (a+2b) + \sin. (a+3b) + \ldots\ldots + \sin. (a+nb)$.

Comme la somme de cette progression continuée à l'infini est $\frac{\cos. (a-\frac{1}{2}b)}{2\sin. \frac{1}{2}b}$; considerons les termes qui suivent le dernier à l'infini: savoir, $\sin. [a+(n+1)]b + \sin. [a+(n+2)b] + \sin. [a+(n+3)b] +$ &c. leur somme sera $= \frac{\cos. [a+(n+\frac{1}{2})b]}{2\sin. \frac{1}{2}b}$, retranchons celle-ci de la premiere, & il restera la somme demandée, c'est-à-dire, que si on suppose $s = \sin. a + \sin. (a+b) + \sin. (a+2b) + \ldots\ldots + \sin. (a+nb)$; on aura $s = \frac{\cos. (a-\frac{1}{2}b) - \cos. [a+(n+\frac{1}{2})b]}{2\sin. \frac{1}{2}b} = \frac{\sin. (a+\frac{1}{2}nb) \sin. \frac{1}{2}(n+1)b}{\sin. \frac{1}{2}b}$.

260. Pareillement, si on veut avoir la somme des cosinus, & qu'on fasse . . . .
$s = \cos. a + \cos. (a+b) + \cos. (a+2b) + \cos. (a+3b) +$ &c. à l'infini, on trouvera $s = \frac{\cos. a + z[\cos. (a+b) - 2\cos. a. \cos. b]}{1 - 2z\cos. b + zz}$, en supposant $z = 1$. Donc à cause de $2\cos. a. \cos. b = \cos. (a-b) + \cos. (a+b)$, s deviendra $= \frac{\cos. a - \cos. (a-b)}{2(1-\cos. b)}$. Or $\cos. f - \cos. g = 2\sin. \frac{f+g}{2}. \sin. \frac{g-f}{2}$; par conséquent, $\cos. a - \cos. (a-b) = -2\sin. (a-\frac{1}{2}b) \sin. \frac{1}{2}b$, & à cause de $1 - \cos. b = 2(\sin \frac{1}{2}b)^2$ on aura $s = -\frac{\sin. (a-\frac{1}{2}b)}{2\sin. \frac{1}{2}b}$; & comme on a d'une maniere semblable la somme de la série . . . .
$\cos. [a+(n+1)b] + \cos. [a+(n+2)b] + \cos. [a+(n+3)b] +$ &c. $= -\frac{\sin. [a+(n+\frac{1}{2})b]}{2\sin. \frac{1}{2}b}$, en retranchant cette derniere de l'autre, le reste sera la somme de cette série . . . .
$s = \cos. a + \cos. (a+b) + \cos. (a+2b) + \cos. (a+3b) + \ldots . \cos. (a+nb)$; & conséquemment $s = -\frac{\sin. (a-\frac{1}{2}b) + \sin. [a+(n+\frac{1}{2})b]}{2\sin. \frac{1}{2}b} = \frac{\cos. (a+\frac{1}{2}nb) \sin. [\frac{1}{2}(n+1)b]}{\sin. \frac{1}{2}b}$.

261. On pourroit, à l'aide des principes précédents,

réſoudre beaucoup d'autres queſtions relatives aux ſinus & aux tangentes; comme, par exemple, trouver la ſomme des quarrés, ou des puiſſances plus élevées des ſinus & des tangentes; mais comme cela ſe déduit des autres coëfficiens des équations ci-deſſus, en ſuivant un procédé analogue, je ne m'arrêterai pas davantage ſur cet objet. Quant à ces dernieres ſommations, il faut remarquer qu'une puiſſance quelconque de ſinus & de coſinus peut être développée en ſinus & en coſinus d'arcs multiples; c'eſt ce que, pour plus de clarté, nous allons expoſer ici brièvement.

262. Pour cet effet, il conviendra de tirer de ce qui précede les lemmes ſuivants : . . . .

$$2 \sin. a. \sin. z = \cos. (a - z) - \cos. (a + z)$$
$$2 \cos. a. \sin. z = \sin. (a + z) - \sin. (a - z)$$
$$2 \sin. a. \cos. z = \sin. (a + z) + \sin. (a - z)$$
$$2 \cos. a. \cos. z = \cos. (a - z) + \cos. (a - z).$$

On en conclura d'abord les puiſſances des ſinus: . .

$$\begin{aligned}
\sin. z &= \sin. z \\
2 (\sin. z)^2 &= 1 - \cos. 2z \\
4 (\sin. z)^3 &= 3 \sin. z - \sin. 3z \\
8 (\sin. z)^4 &= 3 - 4 \cos. 2z + \cos. 4z \\
16 (\sin. z)^5 &= 10 \sin. z - 5 \sin. 3z + \sin. 5z \\
32 (\sin. z)^6 &= 10 - 15 \cos. 2z + 6 \cos. 4z - \cos. 6z \\
64 (\sin. z)^7 &= 35 \sin. z - 21 \sin. 3z + 7 \sin. 5z - \sin. 7z \\
128 (\sin. z)^8 &= 35 - 56 \cos. 2z + 28 \cos. 4z - 8 \cos. 6z + \cos. 8z \\
256 (\sin. z)^9 &= 126 \sin. z - 84 \sin. 3z + 36 \sin. 5z - 9 \sin. 7z + \sin. 9z
\end{aligned}$$

La loi que ſuivent ces coëfficiens eſt la même que celle des derniers coëfficiens numériques du binome, excepté que dans les puiſſances paires, le nombre conſtant n'eſt que la moitié (ll) de celui que donne le binome.

263. On aura pareillement les puissances des cosinus:

$$cos.\,z = cos.\,z$$
$$2(cos.\,z)^2 = 1 + cos.\,2z$$
$$4(cos.\,z)^3 = 3\,cos.\,z + cos.\,3z$$
$$8(cos.\,z)^4 = 3 + 4\,cos.\,2z + cos.\,4z$$
$$16(cos.\,z)^5 = 10\,cos.\,z + 5\,cos.\,3z + cos.\,5z$$
$$32(cos.\,z)^6 = 10 + 15\,cos.\,2z + 6\,cos.\,4z + cos.\,6z$$
$$64(cos.\,z)^7 = 35\,cos.\,z + 21\,cos.\,3z + 7\,cos.\,5z + cos.\,7z.$$

&c.

Il faut faire ici à l'égard de la loi de la progression la même remarque, que nous avons faite pour les sinus.

CHAPITRE XV.

Des Séries résultantes du développement des Facteurs.

264. Soit proposé un produit composé d'un nombre quelconque de facteurs, fini ou infini, de cette maniere $(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)(1+\varepsilon z)(1+\xi z)$ &c. lequel, étant développé par la multiplication, donne

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \&c;$$

il est évident que les coëfficiens A, B, C, D, E &c. sont formés des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$, &c, de sorte que

$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \xi +$ &c. $=$ à leur somme.

$B =$ à la somme de ces nombres combinés deux à deux.

$C =$ à la somme de ces nombres combinés trois à trois.

$D =$ à la somme de ces nombres combinés quatre à quatre.

$E =$ à la somme de ces nombres combinés cinq à cinq.

&c.

jusqu'à ce qu'on soit arrivé au produit de tous.

265. Donc, si on fait $z = 1$, ce produit . . . .

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\epsilon) \&c.$$

sera égal à l'unité, plus à la suite de tous les nombres, qu'on peut former avec les lettres α, β,, γ, δ, ϵ, en les prenant séparément, ou en les multipliant deux à deux, ou en plus grand nombre; & si le même nombre peut résulter de leur combinaison de deux ou d'un plus grand nombre de manieres, il se trouvera dans la série deux fois ou davantage.

266. Si on suppose $z = -1$, ce produit . . . . . .

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\epsilon) \&c.$$

sera égal à l'unité ajoutée à la suite de tous les nombres, qui résulteroient des quantités α, β, γ, δ, ϵ, ξ &c. en les prenant séparément, ou en les combinant deux à deux, ou en plus grand nombre, comme dans le cas précédent; mais avec cette différence que les nombres, que donneroit chacune des lettres, ou leur combinaison trois à trois, cinq à cinq, ou en nombre impair, sont négatifs, & qu'au contraire ceux qu'on obtiendroit de leurs produits distincts, en les prenant deux à deux, quatre à quatre, ou six à six, ou en nombre pair, sont positifs.

267. Écrivons pour α, β, γ, δ &c. tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, alors ce produit . . . .

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13) \&c. = P$$

vaudra l'unité, plus la suite de tous les nombres premiers, & de ceux que donnent les produits de ceux-ci, en ne prenant qu'une fois chacun d'eux dans leur combinaison. Ainsi

$$P = 1+2+3+5+6+7+10+11+13+15+17+ \&c.$$

série qui renferme tous les nombres naturels, excepté les puissances, ou ceux qui sont divisibles par des puissances. On n'y trouvera donc point les nombres 4, 8, 9, 12, 16, 18 &c; parce qu'ils sont ou des puissances, comme 4, 8, 9, 16 &c, ou divisibles par des puissances, comme 12, 18 &c.

268. Il en sera de même, si on met pour α, β, γ, δ, &c. des puissances quelconques des nombres premiers ; si l'on fait, par exemple, ...

$$P = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)\left(1 + \frac{1}{5^n}\right)\left(1 + \frac{1}{7^n}\right)\left(1 + \frac{1}{11^n}\right) \&c.$$

En effet, en faisant la multiplication, on aura . . . .

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \&c.$$

Ces fractions renferment tous les nombres, excepté ceux qui sont des puissances, ou qui sont divisibles par quelque puissance. Car tous les nombres entiers étant eux-mêmes ou des nombres premiers, ou des nombres formés de ceux-ci par la multiplication, il n'y aura d'exclus ici que ceux dans la formation desquels le même nombre premier entre deux ou plusieurs fois.

269. Si nous prenons négativement les nombres α, β, γ, δ &c ; comme nous avons fait ci-dessus (art. 266), & que nous supposions . . . .

$$P = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right)\left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \&c.$$

nous aurons . . . .

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{15^n} - \&c.$$

où se trouvent encore tous les nombres, à l'exception des puissances & des nombres divisibles par les puissances. Mais les nombres premiers, & ceux qui sont formés de leur combinaison, en les prenant trois à trois, cinq à cinq, ou en nombre impair, sont précédés du signe −, tandis que ceux qui résultent de leur multiplication, deux à deux, quatre à quatre, six à six, ou en nombre pair, ont le signe +. Ainsi le terme $\frac{1}{30^n}$ se trouvera dans cette série, parce que $30 = 2.\ 3.\ 5$, & ne renferme point par conséquent de puissance ; & de plus ce même terme $\frac{1}{30^n}$ aura le signe −, parce

parce que 30 eſt le produit de trois nombres premiers.

270. Conſidérons maintenant cette expreſſion . . .

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)(1-\varepsilon z)\ \&c},$$

dont le développement par la diviſion donne la ſérie:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \&c.$$

il eſt clair que les coëfficiens A, B, C, D, E &c. ſont formés des nombres α, β, γ, δ, ε &c, de la maniere ſuivante, de ſorte que . . . .

$A =$ à la ſomme de chacun d'eux.
$B =$ à la ſomme de leurs produits deux à deux.
$C =$ à la ſomme de leurs produits trois à trois.
$D =$ à la ſomme de leurs produits quatre à quatre.
&c.

} les mêmes facteurs n'étant plus exclus.

271. Donc, ſi $z = 1$, cette expreſſion . . . . . .

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\ \&c.}$$

ſera égale à l'unité ajoutée à la ſuite de tous les nombres, que ceux-ci α, β, γ, δ, ε, ξ &c, peuvent donner, en les prenant ſéparément, ou en les multipliant entr'eux deux à deux, ou en plus grand nombre, les mêmes pouvant être pris pluſieurs fois dans leur combinaiſon. Il y a donc cette différence entre cette ſuite & la précédente (art. 265), que dans la derniere on ne pouvoit prendre que des facteurs différents, & que dans celle-ci, au contraire, le même facteur peut revenir deux ou pluſieurs fois; c'eſt-à-dire, qu'on trouve ici tous les nombres qui peuvent provenir de la multiplication de ceux-ci: α, β, γ, δ &c.

272. Donc la ſérie eſt toujours compoſée d'un nombre infini de termes, quelque ſoit le nombre des facteurs, infini ou fini. Par exemple, on aura . . . .

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \&c.$$

série, où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux; c'est-à dire, toutes les puissances de deux. On aura ensuite

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+ \&c.$$

On ne trouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 & 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 & 3.

273. Donc, si au lieu de α, β, γ, δ &c. on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, & qu'on suppose

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\ \&c.}$$

on aura . . . .

$$P = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+ \&c.$$

Série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers, que ceux qui en sont formés par la multiplication. Or comme tous les nombres sont ou des nombres premiers, ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs.

274. La même chose arrive, si on prend des puissances quelconques des nombres premiers. En effet, si on suppose

$$P = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\ \&c.}$$

on aura . . . .

$$P = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+ \&c.$$

Série dans laquelle se trouvent tous les nombres naturels sans exception. Mais si dans les facteurs on met par-tout le signe $+$, de maniere que . . . .

$$P = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\ \&c.}$$

alors . . . .

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \&c.$$

Ici les nombres premiers ont le ſigne —; ceux qui ſont le produit de deux nombres premiers, les mêmes ou non, ont le ſigne +, & en général les nombres qui ſont formés par un nombre pair de facteurs premiers, ont le ſigne +, & ceux qui ſont compoſés d'un nombre impair de facteurs premiers, ſont précédés du ſigne —. Ainſi le terme $\frac{1}{240^n}$, à cauſe que $240 = 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 3.\ 5$, aura le ſigne +, comme il eſt facile de le voir par l'art. 270, en faiſant $z = -1$.

275. En comparant ces réſultats avec les précédents, on trouvera deux ſéries, dont le produit eſt égal à l'unité. Car ſoit . . . .

$$P = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\ \&c.}$$

& . . . .

$$Q = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\&c.$$

on aura . . . .

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$$

&

$$Q = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n}\ \&c.$$ (art. 269) & il eſt évident qu'on aura $PQ = 1$.

276. Mais ſi on ſuppoſe . . . .

$$P = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\ \&c.}$$

&

$$Q = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\ \&c.$$

on aura . . . .

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \&c.$$

$$Q = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \&c.$$

&, de même qu'auparavant, $PQ = 1$. La somme d'une des séries étant donc connue, celle de la seconde le sera aussi.

277. Réciproquement, étant données les sommes de ces séries, on pourra assigner les valeurs de produits composés d'une infinité de facteurs. En effet, soit . . . .

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \&c.$$

& on aura . . . .

$$M = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\&c.}$$

$$N = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\&c.}$$

On obtient par la division . . . . .

$$\frac{M}{N} = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\&c.$$

Enfin on aura . . . .

$$\frac{MM}{N} = \frac{2^n+1}{2^n-1} \cdot \frac{3^n+1}{3^n-1} \cdot \frac{5^n+1}{5^n-1} \cdot \frac{7^n+1}{7^n-1} \cdot \frac{11^n+1}{11^n-1} \cdot \&c.$$

Par conséquent M & N étant une fois connues, on aura, outre les valeurs de ces produits, les sommes de ces séries :

$$\frac{1}{M} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \&c.$$

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} - \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}} - \frac{1}{11^{2n}} - \&c.$$

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \&c.$$

$$\frac{N}{M} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \&c.$$

Et la combinaiſon de celles-ci peut en donner pluſieurs autres.

Exemple I.

Soit $n = 1$; comme nous avons démontré auparavant que $l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \&c$; on aura, en ſuppoſant $x = 1$, $l\frac{1}{1-1} = l\,\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c$; mais le logarithme d'un nombre infini ∞ eſt lui-même infiniment grand ; donc

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c. = \infty.$$

Donc, à cauſe de $\frac{1}{M} = \frac{1}{\infty} = 0$, on aura

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}\ \&c.$$

En prenant les produits, on trouvera

$$M = \infty = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ \&c.}$$

ce qui donne

$$\infty = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18}\ \&c.$$

&

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{18}{19}\ \&c.$$

Enſuite, d'après la ſommation des ſéries que nous avons donnée auparavant, * nous aurons * (167)

$$N = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. = \frac{\pi\pi}{6};$$

D'où nous conclurons ces ſommes de ſéries

$$\frac{6}{\pi\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} - \&c.$$

$$\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \&c.$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\ \&c.$$

Et, ſi nous employons les facteurs, ils nous donneront

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdot \&c.$$

ou

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{121}{120} \cdot \frac{169}{168} \cdot \&c.$$

Et à cauſe de $\frac{M}{N} = \infty$, ou de $\frac{N}{M} = 0$, on aura

$$\infty = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \&c.$$

ou

$$0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{20} \cdot \&c.$$

&

$$\infty = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{20}{18} \cdot \&c.$$

ou

$$0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \&c.$$

Les numérateurs de ces fractions, (j'en excepte la premiere) ſont moindres que les dénominateurs d'une unité ; & les ſommes des numérateurs & des dénominateurs de chaque fraction donnent conſtamment les nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, &c.

EXEMPLE II.

Soit $n = 2$; d'après ce que nous avons vu, * * (167)

$$M = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. = \frac{\pi\pi}{6}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \&c. = \frac{\pi^4}{90}.$$

On aura d'abord ces ſommes de ſéries :

$$\frac{6}{\pi\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} - \&c.$$

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} - \&c.$$

$$\frac{15}{\pi^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \&c.$$

$$\frac{\pi\pi}{15} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} \&c.$$

Et enſuite ces valeurs des produits ſuivants :

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \ \&c.$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \ \&c.$$

$$\frac{15}{\pi\pi} = \frac{2^2+1}{2^2} \cdot \frac{3^2+1}{3^2} \cdot \frac{5^2+1}{5^2} \cdot \frac{7^2+1}{7^2} \cdot \frac{11^2+1}{11^2} \ \&c.$$

ou

$$\frac{\pi\pi}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{25}{26} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{121}{122} \cdot \frac{169}{170} \ \&c.$$

&

$$\frac{5}{2} = \frac{2^2+1}{2^2-1} \cdot \frac{3^2+1}{3^2-1} \cdot \frac{5^2+1}{5^2-1} \cdot \frac{7^2+1}{7^2-1} \cdot \frac{11^2+1}{11^2-1} \ \&c.$$

ou

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{61}{60} \cdot \frac{85}{84} \ \&c.$$

ou

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{61}{60} \cdot \frac{85}{84} \ \&c.$$

Dans ces fractions les numérateurs ſurpaſſent d'une unité les dénominateurs, & pris ensemble ils forment les quarrés des nombres premiers 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, &c.

EXEMPLE III.

Comme, d'après ce que nous avons vu, on ne peut avoir les valeurs de M, qu'entant que n est un nombre pair,
*(167) supposons $n = 4$, nous aurons *

$$M = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \&c. = \frac{\pi^4}{90}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \&c. = \frac{\pi^8}{9450}$$

On a d'abord les sommes des séries suivantes :

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} \&c.$$

$$\frac{9450}{\pi^8} = 1 - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{3^8} - \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} - \frac{1}{7^8} + \frac{1}{10^8} - \frac{1}{11^8} \&c.$$

$$\frac{105}{\pi^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{11^4} \&c.$$

$$\frac{\pi^4}{105} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} - \frac{1}{8^4} + \frac{1}{9^4} \&c.$$

Ensuite on obtient aussi les valeurs des produits, qui suivent :

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \&c.$$

$$\frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8}{2^8-1} \cdot \frac{3^8}{3^8-1} \cdot \frac{5^8}{5^8-1} \cdot \frac{7^8}{7^8-1} \cdot \frac{11^8}{11^8-1} \&c.$$

$$\frac{105}{\pi^4} = \frac{2^4+1}{2^4} \cdot \frac{3^4+1}{3^4} \cdot \frac{5^4+1}{5^4} \cdot \frac{7^4+1}{7^4} \cdot \frac{11^4+1}{11^4} \&c.$$

&

$$\frac{7}{6} = \frac{2^4+1}{2^4-1} \cdot \frac{3^4+1}{3^4-1} \cdot \frac{5^4+1}{5^4-1} \cdot \frac{7^4+1}{7^4-1} \cdot \frac{11^4+1}{11^4-1} \&c.$$

ou

$$\frac{35}{34} = \frac{41}{40} \cdot \frac{313}{312} \cdot \frac{1201}{1200} \cdot \frac{7321}{7320} \&c.$$

Dans ces facteurs les numérateurs surpassent d'une unité les dénominateurs, & ajoutés ensemble ils forment les

quatriemes

quatriemes puissances des nombres premiers impairs . . . 3, 5, 7, 11, &c.

278. Après avoir ici transformé en facteurs la somme de la série

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \&c.$$

il sera facile d'y appliquer les logarithmes. En effet, puisque

$$M = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\&c.}$$

on aura

$$lM = -l\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-l\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-l\left(1-\frac{1}{5^n}\right)-l\left(1-\frac{1}{7^n}\right)-\&c.$$

Donc, en prenant les logarithmes hyperboliques, on aura

$$\begin{aligned} lM = &+ 1\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\&c.\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\&c.\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\&c.\right)\\ &+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\&c.\right)\\ &\&c. \end{aligned}$$

Si nous supposons de plus,

$$N = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \&c.$$

de sorte que

$$N = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\&c.};$$

On aura de même, en prenant les logarithmes hyperboliques,

$$\begin{aligned} lN = &+ 1\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\&c.\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\&c.\right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6n}}+\frac{1}{3^{6n}}+\frac{1}{5^{6n}}+\frac{1}{7^{6n}}+\frac{1}{11^{6n}}+\&c.\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{8n}}+\frac{1}{3^{8n}}+\frac{1}{5^{8n}}+\frac{1}{7^{8n}}+\frac{1}{11^{8n}}+\&c.\right)$$
$$\&c.$$

En combinant ces résultats, on obtiendra $l\,M - \frac{1}{2}\,l\,N =$

$$+1\left(\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{5^{n}}+\frac{1}{7^{n}}+\frac{1}{11^{n}}+\&c.\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\&c.\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5n}}+\frac{1}{3^{5n}}+\frac{1}{5^{5n}}+\frac{1}{7^{5n}}+\frac{1}{11^{5n}}+\&c.\right)$$
$$+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7n}}+\frac{1}{3^{7n}}+\frac{1}{5^{7n}}+\frac{1}{7^{7n}}+\frac{1}{11^{7n}}+\&c.\right)$$
$$\&c.$$

279. Si $n = 1$; on aura $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$ $= l\,\infty$, & $N = \frac{\pi\pi}{6}$, on en conclura $l.\,l\,\infty - \frac{1}{2}\,l\,\frac{\pi\pi}{6} =$

$$+1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\&c.\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3}}+\frac{1}{3^{3}}+\frac{1}{5^{3}}+\frac{1}{7^{3}}+\frac{1}{11^{3}}+\&c.\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5}}+\frac{1}{3^{5}}+\frac{1}{5^{5}}+\frac{1}{7^{5}}+\frac{1}{11^{5}}+\&c.\right)$$
$$+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7}}+\frac{1}{3^{7}}+\frac{1}{5^{7}}+\frac{1}{7^{5}}+\frac{1}{11^{7}}+\&c.\right)$$
$$\&c.$$

Or ces séries, à l'exception de la premiere, non seulement ont des sommes finies, mais encore toutes réunies, elles ne forment qu'une somme finie, & même assez petite; d'où il s'ensuit nécessairement que la somme de la premiere série
(*mm*) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \&c$, est infiniment grande, & qu'elle différe assez peu du logarithme hyperbolique de la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \&c.$

280. Soit $n = 2$; on aura $M = \frac{\pi\pi}{6}$, & $N = \frac{\pi^4}{90}$: d'où il s'enfuit que

$$2l\pi - l6 = 1\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \&c.\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \&c.\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \&c.\right)$$
&c.

$$4l\pi - l90 = 1\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \&c.\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{11^8} + \&c.\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{7^{12}} + \frac{1}{11^{12}} + \&c.\right)$$
&c.

$$\frac{1}{2} l \frac{5}{2} = 1\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \&c.\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \&c.\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{11^{10}} + \&c.\right)$$
&c.

281. Quoique la loi, que fuivent les nombres premiers, ne foit pas connue, cependant il ne fera pas difficile d'avoir à-peu-près la fomme des puiffances un peu élevées de ces féries. En effet, foit la férie

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$$

& celle-ci

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \&c.$$

on aura

$$S = M - 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{6^n} - \frac{1}{8^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{10^n} - \&c.$$

& parce que

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{12^n} + \&c.$$

on aura

$$S = M - \frac{M}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \&c.$$

ou

$$S = (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{27^n} - \&c.$$

& à cauſe de

$$M\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \&c.$$

on obtiendra

$$S = (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} - \&c.$$

Ainſi, comme on connoît la ſomme M, on trouvera facilement la valeur de S, pourvu que n ſoit un nombre paſſablement grand.

(nn) 282. Au reſte, les ſommes des plus hautes puiſſances étant trouvées, on peut auſſi, à l'aide des formules précédentes, aſſigner les ſommes des puiſſances moins élevées ; & c'eſt par cette méthode que nous avons obtenu les ſommes ſuivantes de la ſérie

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \&c.$$

Si	la ſomme de la ſérie ſera
$n = 2$;	0,452247420041222
$n = 4$;	0,076993139764252
$n = 6$;	0,017070086850639
$n = 8$;	0,004061405366515
$n = 10$;	0,000993603573633
$n = 12$;	0,000246026470033
$n = 14$;	0,000061244396725

$n = 16$;	0,0000152822026219
$n = 18$;	0,0000038172787O2
$n = 20$;	0,0000009539611 23
$n = 22$;	0,00000 238450446
$n = 24$;	0,000000 59608184
$n = 26$;	0,0000000149O1555
$n = 28$;	0,0000000037 25333
$n = 30$;	0,0000000009 31323
$n = 32$;	0,0000000002 32830
$n = 34$;	0,00000000005 8207
$n = 36$;	0,00000000001 4551

Les autres ſommes des puiſſances paires décroiſſent en raiſon quadruple.

283. Cette converſion de la ſérie $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \&c.$ en un produit infini, peut auſſi s'effectuer directement, en s'y prenant de la maniere ſuivante : ſoit

$$A = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$$

retranchez

$$\frac{1}{2^n} A = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$$

vous aurez

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) A = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \&c. = B\,;$$

ainſi tous les termes diviſibles par 2 ont diſparu.

Retranchez $\frac{1}{3^n} B = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \&c.$

vous aurez

$$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) B = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \&c. = C:$$

De cette maniere, vous n'aurez plus de termes diviſibles par 3 ;

Retranchez $\frac{1}{5^n} C = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{25^n} + \frac{1}{35^n} + \frac{1}{55^n} + \&c.$

il vous reſtera

$$\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) C = 1 + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \&c\,;$$

ainſi tous les termes diviſibles par 5, auront auſſi diſparu. Vous ferez diſparoître d'une maniere ſemblable tous les termes diviſibles par 7, 11 & par les autres nombres premiers; or il eſt clair qu'après avoir fait diſparoître tous les termes diviſibles par les nombres premiers, il ne reſtera plus que l'unité. Par conſéquent, en mettant pour B, C, D, E & leurs valeurs, vous aurez enfin

$$A\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right)\left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \&c. = 1,$$

d'où vous conclurez la ſomme de la ſérie propoſée =

$$A = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right)\left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \&c.}$$

ou

$$A = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \cdot \&c.$$

284. Cette méthode pourra encore être employée avantageuſement pour transformer en produits infinis les autres ſéries, dont nous avons auparavant déterminé les ſommes. Or nous avons trouvé (art. 175) les ſommes de ces ſéries

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \&c.$$

lorſque n eſt un nombre impair; car leur ſomme eſt $= N\pi^n$; & nous avons donné les valeurs de N dans l'endroit cité. Mais il faut obſerver que parmi les nombres impairs, qui ſont les ſeuls, qui ſe préſentent ici, ceux de la forme $4m + 1$ ont le ſigne $+$, & que les autres de la forme $4m - 1$ ont le ſigne $-$. Soit donc

$$A = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{15^n} + \&c.$$

$$\frac{1}{3^n} A = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} + \frac{1}{27^n} - \&c.$$ Ajoutez, vous aurez

$$\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) A = 1 + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \&c. = B$$

$$\frac{1}{5^n} B = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n}$$ &c; retranchez, il vous reſtera

$$\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) B = 1 - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \&c. = C;$$

réſultat, dans lequel les nombres diviſibles par 3 & par 5, manquent;

$$\frac{1}{7^n} C = \frac{1}{7^n} - \frac{1}{49^n} - \frac{1}{77^n} + \&c;$$ ajoutez, vous aurez

$$\left(1 + \frac{1}{7^n}\right) C = 1 - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \&c. = D;$$

par cette opération les nombres diviſibles par 7 ont diſparu.

$$\frac{1}{11^n} D = \frac{1}{11^n} - \frac{1}{121^n} + \&c;$$ ajoutez, la ſomme ſera

$$\left(1 + \frac{1}{11^n}\right) D = 1 + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \&c. = E.$$

Par ce moyen, les nombres diviſibles par 11 ont auſſi diſparu; & continuant de faire diſparoître de cette maniere tous les autres nombres diviſibles par les autres nombres premiers, vous obtiendrez à la fin

$$A\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 + \frac{1}{7^n}\right)\left(1 + \frac{1}{11^n}\right)\left(1 - \frac{1}{13^n}\right) \&c. = 1,$$

ou

$$A = \frac{3^n}{3^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n + 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \frac{17^n}{17^n - 1} \cdot \&c.$$

Les numérateurs renferment les puiſſances de tous les nombres premiers, leſquelles ſe trouvent auſſi dans les dénominateurs, mais augmentées ou diminuées d'une unité, ſuivant que les nombres premiers ſont de la forme $4m - 1$, ou $4m + 1$.

285. Ayant fait $n = 1$, on aura, à cause de $A = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdot \&c.$$

* (277) Or nous avons trouvé ci-dessus *

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{5^2}{4.6} \cdot \frac{7^2}{6.8} \cdot \frac{11^2}{10.12} \cdot \frac{13^2}{12.14} \cdot \frac{17^2}{16.18} \cdot \frac{19^2}{18.20} \cdot \&c.$$

Divisons cette seconde expression par la premiere, nous aurons pour quotient

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \ \&c.$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \ \&c.$$

Ici les nombres premiers forment les numérateurs, & les dénominateurs sont les nombres impairement pairs, qui différent d'une unité des numérateurs. Enfin, si on divise cette derniere par la premiere $\frac{\pi}{4}$, on aura

$$2 = \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \frac{24}{22} \cdot \&c.$$

ou

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \&c.$$

Ces fractions proviennent des nombres premiers impairs 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c, en partageant chacun en deux parties, qui différent d'une unité, & prenant les parties paires pour les numérateurs, & les parties impaires pour les dénominateurs.

286. Comparons ces expressions avec celle de *Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ 11} \ \&c.$$

ou

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{5.5}{4.6} \cdot \frac{7.7}{6.8} \cdot \frac{9.9}{8.10} \cdot \frac{11.11}{10.12} \cdot \&c.$$

comme

comme on a * *(285)

$$\frac{\pi\pi}{8} = \frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\ \&c.$$

en divisant celle-là par celle-ci, le quotient donnera

$$\frac{32}{\pi^3} = \frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\frac{15\cdot15}{14\cdot16}\cdot\frac{21\cdot21}{20\cdot22}\cdot\frac{25\cdot25}{24\cdot26}\ \&c.$$

résultat, dans lequel les numérateurs renferment tous les nombres impairs non premiers.

287. Soit maintenant $n = 3$, on aura $A = \frac{\pi^3}{32}$; d'où

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{3^3}{3^3+1}\cdot\frac{5^3}{5^3-1}\cdot\frac{7^3}{7^3+1}\cdot\frac{11^3}{11^3+1}\cdot\frac{13^3}{13^3-1}\cdot\frac{17^3}{17^3-1}\cdot\ \&c.$$

Mais la série * *(167)

$$\frac{\pi^6}{945} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \&c.$$

donne

$$\frac{\pi^6}{945} = \frac{2^6}{2^6-1}\cdot\frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\ \&c.$$

ou

$$\frac{\pi^6}{960} = \frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\ \&c.$$

Cette derniere série étant divisée par la premiere, donnera

$$\frac{\pi^3}{30} = \frac{3^3}{3^3-1}\cdot\frac{5^3}{5^3+1}\cdot\frac{7^3}{7^3-1}\cdot\frac{11^3}{11^3-1}\cdot\frac{13^3}{13^3+1}\cdot\frac{17^3}{17^3+1}\ \&c.$$

Et enfin celle-ci divisée par la premiere, donnera l'équation

$$\frac{16}{15} = \frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\frac{7^3+1}{7^3-1}\cdot\frac{11^3+1}{11^3-1}\cdot\frac{13^3-1}{13^3+1}\cdot\frac{17^3-1}{13^3+1}\ \&c.$$

ou

$$\frac{16}{15} = \frac{14}{13}\cdot\frac{62}{63}\cdot\frac{172}{171}\cdot\frac{666}{665}\cdot\frac{1098}{1099}\cdot\ \&c.$$

Ces fractions sont formées des cubes des nombres premiers impairs, en partageant chacun en deux parties, qui diffèrent d'une unité, & prenant les parties paires pour les numérateurs, & les impaires pour les dénominateurs.

288. On peut tirer encore de ces expreſſions de nouvelles ſéries, dans leſquelles tous les nombres naturels forment les dénominateurs. En effet, puiſque *

*(285)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdot \text{\&c.}$$

on aura

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ \text{\&c.}}$$

dont le développement donnera la ſérie ſuivante

$$\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\ \text{\&c.}$$

dans laquelle on obſervera pour la loi que ſuivent les ſignes, que le nombre deux a le ſigne —, les nombres premiers de la forme $4m - 1$, ſigne —, & ceux de la forme $4m + 1$, le ſigne +; quant aux nombres compoſés, ils auront le ſigne, qui leur convient, à raiſon de leur compoſition par la multiplication des nombres premiers; c'eſt ainſi qu'on trouvera facilement que la fraction $\frac{1}{60}$, à cauſe de $60 = \overset{-}{2}.\ \overset{-}{2}.\ \overset{-}{3}.\ \overset{+}{5}$ aura le ſigne —. On aura ſemblablement

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ \text{\&c.}}$$

ce qui donnera la ſérie

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\ \text{\&c},$$

dans laquelle le nombre deux eſt précédé du ſigne +, les nombres premiers de la forme $4m - 1$ ſont précédés du ſigne —, & ceux de la forme $4m + 1$, du ſigne +; & un nombre quelconque compoſé aura le ſigne, qui lui convient à raiſon de ſa compoſition, d'après les regles de la multiplication.

289. Enſuite, puiſqu'on a * *(285)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ \&c.}$$

on trouvera, en développant,

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\ \&c.$$

Il n'y a dans cette ſérie que les nombres impairs, & la loi des ſignes eſt telle, que les nombres premiers de la forme $4m-1$ ſont précédés du ſigne $+$, tandis que les nombres premiers de la forme $4m+1$ le ſont du ſigne $-$. Ce qui dérermine, en même temps, les ſignes des nombres compoſés. Au ſurplus, on peut tirer de-là deux autres ſéries qui renferment tous les nombres. En effet, on aura

$$\pi=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ \&c.}$$

dont le développement donne la ſuite

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\ \&c.$$

dans laquelle le nombre deux a le ſigne $+$, les nombres premiers de la forme $4m-1$ ont le ſigne $+$, & les nombres premiers de la forme $4m+1$, le ſigne $-$.
On aura auſſi

$$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ \&c.}$$

&, en développant,

$$\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\ \&c.$$

où le nombre deux a le ſigne $-$, les nombres premiers de la forme $4m-1$, le ſigne $+$, & les nombres premiers de la forme $4m+1$, le ſigne $-$.

290. Concluons de-là qu'on peut varier à l'infini les ſignes entr'eux, de maniere que la ſomme de la ſérie

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8}\ \&c.$$

ſoit aſſignable. Par exemple, puiſque

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\ \&c.}$$

Multiplions cette expreſſion par $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$, nous aurons

$$\pi = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\ \&c.}$$

&

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\ \&c.$$

Le nombre deux a le ſigne $+$; le nombre trois le ſigne $+$; & tous les autres nombres premiers de la forme $4m - 1$, le ſigne $-$; mais les ſignes premiers de la forme $4m + 1$ ont le ſigne $+$; d'où dépend la loi des ſignes pour les nombres compoſés. Semblablement, puiſque

$$\pi = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ \&c.}$$

en multipliant par $\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{2}$, on aura

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\left(1+\frac{1}{17}\right)\ \&c.}$$

&, en faiſant le développement,

$$\frac{3\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ \&c.$$

Ici le nombre deux a le ſigne $+$; les nombres premiers de la forme $4m - 1$ ont auſſi le ſigne $+$; & les nombres premiers de la forme $4m + 1$, excepté cinq, ont le ſigne $-$.

291. On peut aussi trouver une infinité de séries de cette forme, dont la somme soit $= 0$. En effet, puisqu'on a * *(277)

$$0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \text{ \&c.}$$

il s'ensuit que

$$0 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right) \text{ \&c.}}$$

& qu'en conséquence, comme nous l'avons déjà vu,

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \text{ \&c.}$$

Tous les nombres premiers ont le signe $-$, & les signes des nombres composés suivent la régle de la multiplication. Multiplions à présent cette expression par $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$, nous aurons pareillement

$$0 = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right) \text{ \&c.}}$$

& conséquemment, en développant,

$$0 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ \&c.}$$

expression dans laquelle le nombre deux a le signe $+$, & tous les autres nombres premiers le signe $-$. Semblablement, on aura

$$0 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right) \text{ \&c.}}$$

d'où naît la série

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ \&c.}$$

dans laquelle tous les nombres premiers, excepté 3 & 5, ont le signe $-$.

Remarquez qu'en général toutes les fois que tous les nombres premiers, à l'exception de quelques-uns seulement, ont le ſigne —, la ſomme de la ſérie eſt $=0$, & qu'au contraire toutes les fois que tous les nombres premiers, excepté quelques-uns ſeulement, ont le ſigne +, la ſomme de la ſérie eſt infiniment grande.

292. Nous avons donné (art. 176) la ſomme de la ſérie

$$A = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} \ \&c.$$

lorſque n eſt un nombre impair : nous avons donc

$$\frac{1}{2^n}A = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{8^n} - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{14^n} - \&c;$$ ajoutons, nous aurons

$$B = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) A = 1 - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \frac{1}{23^n} + \frac{1}{25^n} - \&c.$$

$$\frac{1}{5^n}B = \frac{1}{5^n} - \frac{1}{25^n} + \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} \ \&c.$$ nous aurons, en ajoutant,

$$C = \left(1 + \frac{1}{5^n}\right) B = 1 + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \frac{1}{23^n} \ \&c.$$

$$\frac{1}{7^n} C = \frac{1}{7^n} + \frac{1}{49^n} - \frac{1}{77^n} + \&c.$$

en faiſant la ſouſtraction, il reſtera

$$D = \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) C = 1 - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \&c.$$

enfin, nous conclurons,

$$A\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right)\left(1 + \frac{1}{11^n}\right)\left(1 - \frac{1}{13^n}\right) \&c = 1;$$

réſultat, dans lequel les nombres premiers, qui ſurpaſſent d'une unité les multiples de ſix, ont le ſigne —, & ceux, qui en ſont ſurpaſſés d'une unité, le ſigne +; Donc

$$A = \frac{2^n}{2^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n + 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \ \&c.$$

293. Suppoſons $n = 1$, auquel cas $A = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, & nous aurons

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \ \&c.$$

expreſſion, dans les numérateurs de laquelle ſe trouvent tous les nombres premiers après 3, & dont les dénominateurs diffèrent d'une unité des numérateurs, & sont tous divisibles par 6. Maintenant, à cause de * *(277)

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\ \&c.$$

on aura, en divisant cette derniere expression par l'autre,

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\ \&c.$$

où les dénominateurs ne sont pas divisibles par 6. Ou bien on aura

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{24}\ \&c.$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\ \&c.$$

La derniere de ces formules étant divisée par la précédente, donne

$$\frac{4}{3} = \frac{6}{4}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{18}{20}\cdot\frac{24}{22}\ \&c.$$

ou

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{11}\ \&c.$$

Chacune des fractions est formée des nombres premiers 5, 7, 11, &c, en partageant chacun des nombres premiers en deux parties, qui diffèrent d'une unité, & prenant constamment pour les numérateurs les parties divisibles par 3.

294. Ayant vu ci-dessus * que *(285)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\ \&c.$$

ou

$$\frac{\pi}{3} = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\ \&c.$$

Si on divise par celle-ci les expressions supérieures $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ & $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, on aura

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} \text{ \&c.}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{30}{29} \text{ \&c.}$$

Dans la premiere expreſſion, les fractions ſont formées des nombres premiers de la forme $12m + 6 \pm 1$, & dans la derniere, des nombres premiers de la forme $12m \pm 1$, en partageant chacun en deux parties, qui différent d'une unité, & prenant les parties paires pour les numérateurs, & les impaires pour les dénominateurs.

295. Examinons encore la ſérie que nous avons trouvée (art. 179) & qui étoit ainſi exprimée :

$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{\&c} = A$, on aura $\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} - \text{\&c}$, & en faiſant la ſouſtraction,

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) A = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{\&c.} = B.$$

$\frac{1}{5}B = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{35} + \frac{1}{55} - \text{\&c}$; ajoutez, & vous aurez

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right) B = -\frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} \text{ \&c.} = C:$$

& en ſuivant le même procédé, vous arriverez enfin à cette expreſſion :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 + \frac{1}{13}\right)\left(1 - \frac{1}{17}\right)\left(1 - \frac{1}{19}\right) \text{\&c.} = 1;$$

dans laquelle les ſignes ſont tellement combinés, que les nombres premiers de la forme $8m + 1$, ou $8m + 3$ ont le ſigne $-$, & les nombres premiers de la forme $8m + 5$ ou $8m + 7$, le ſigne $+$. Ainſi, on aura

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{24} \cdot \text{\&c.}$$

où tous les dénominateurs ſont ou diviſibles par 8, ou ſont ſeulement

ſeulement les nombres impairement pairs. Puis donc qu'on a

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdot \&c.$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \ \&c. \ast$$ *(285)

& par conſéquent

$$\frac{\pi\pi}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \ \&c.$$

on en conclura

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{22} \ \&c.$$

où il n'y a plus de dénominateurs diviſibles par 8, mais où ſe trouvent les nombres pairement pairs, toutes les fois qu'ils différent d'une unité des numérateurs ; & ſi on diviſe la premiere expreſſion par la derniere, le quotient donnera

$$1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{12} \ \&c.$$

Ces fractions ſont formées des nombres premiers en partageant chacun en deux parties, qui différent d'une unité, & prenant pour les numérateurs les parties paires, à moins qu'elles ne ſoient pairement paires.

296. Pareillement, les autres ſéries que nous avons trouvées pour les expreſſions d'arcs du cercle (art. 179 & ſuiv.) peuvent être transformées en facteurs formés des nombres premiers. On peut ainſi trouver beaucoup d'autres propriétés, tant de ces facteurs que de ces ſéries infinies ; mais comme j'ai rapporté ici les principales, je ne m'arrêterai pas plus long-temps ſur cet objet, & je vais paſſer à un autre ſujet, qui a quelque rapport avec celui que je viens de traiter. En effet, ayant enviſagé dans ce Chapitre la formation des nombres, en tant qu'ils naiſſent de la multiplication, j'examinerai dans le ſuivant leur génération, en tant qu'elle ſe fait par voie d'addition.

CHAPITRE XVI.

De la partition des Nombres.

297. Proposons-nous cette expression :

$$(1 + x^{\alpha} z)(1 + x^{\beta} z)(1 + x^{\gamma} z)(1 + x^{\delta} z)(1 + x^{\epsilon} z) \text{ \&c.}$$

& cherchons la forme qu'elle prendra, étant développée par la multiplication. Supposons qu'elle devienne

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{\&c.}$$

il est évident que P sera la somme des puissances

$x^{\alpha} + x^{\beta} + x^{\gamma} + x^{\delta} + x^{\epsilon} +$ &c. Ensuite Q sera la somme des produits de deux puissances différentes, ou un assemblage de plusieurs puissances de x, dont les exposants sont les sommes de deux termes différents de cette série

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \epsilon,\ \xi,\ \eta,\ \text{\&c.}$$

Semblablement R sera un assemblage de puissances de x, dont les exposants sont les sommes de trois termes différents ; & S sera un assemblage de puissances de x, dont les exposants sont les sommes de quatre termes différents de la même série $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c, ainsi de suite.

298. Chacune des puissances de x, qui sont comprises dans les valeurs des lettres P, Q, R, S, aura l'unité pour coëfficient, si leurs exposants ne peuvent être formés que d'une maniere par les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c ; mais si l'exposant de la même puissance peut être de plusieurs manieres la somme de deux, de trois ou de plusieurs termes de la série $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c, alors cette puissance aura un coëfficient qui contiendra l'unité autant de fois. Par exemple, si Nx^n se trouve dans la valeur de Q, ce sera une preuve que n peut être d'un nombre N de manieres diffé-

rentes la somme de deux termes différents de la série α, β, γ, &c; & si on trouve dans le développement des facteurs proposés le terme $N x^n z^m$, son coëfficient N indiquera de combien de manieres différentes le nombre n peut être la somme de m termes différents de la série $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$, &c.

299. Ainsi, le produit proposé

$$(1 + x^\alpha z)(1 + x^\beta z)(1 + x^\gamma z)(1 + x^\delta z) \text{ \&c.}$$

étant effectivement développé par la multiplication, le résultat fera voir sur le champ de combien de manieres différentes un nombre donné peut être la somme d'autant de termes différents, qu'on voudra, de la série $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$, &c. Par exemple, si on cherche de combien de manieres différentes le nombre n peut être la somme de m termes différents de cette série, il faut chercher le terme $x^n z^m$ dans l'expression développée, & le coëfficient de ce terme donnera le nombre demandé.

300. Pour rendre tout cela plus sensible, prenons ce produit composé d'une infinité de facteurs

$$(1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3 z)(1 + x^4 z)(1 + x^5 z) \text{ \&c.}$$

lequel étant effectué par la multiplication donne

$$\begin{aligned}
&1 + z(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \text{\&c.})\\
&+ z^2(x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + \text{\&c.})\\
&+ z^3(x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + \text{\&c.})\\
&+ z^4(x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + 15x^{18} + \text{\&c.})\\
&+ z^5(x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + 18x^{23} + \text{\&c.})\\
&+ z^6(x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + 20x^{29} + \text{\&c.})\\
&+ z^7(x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + 21x^{36} + \text{\&c.})\\
&+ z^8(x^{36} + x^{37} + 2x^{38} + 3x^{39} + 5x^{40} + 7x^{41} + 11x^{42} + 15x^{43} + 22x^{44} + \text{\&c.})\\
&\qquad\qquad\text{\&c.}
\end{aligned}$$

Au moyen de ces séries, on peut trouver tout de suite de combien de manieres différentes un nombre proposé peut résulter d'un nombre déterminé de termes différents de cette série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. Voulez-vous savoir, par exemple, de combien de manieres différentes le nombre 35 peut être la somme de sept termes différents de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c? Cherchez dans la série, qui multiplie z^7, la puissance x^{35}, & son coëfficient 15 vous apprendra que le nombre proposé 35 peut être de quinze manieres différentes la somme de sept termes de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

301. Mais, si vous supposez $z = 1$, & que vous fassiez une somme des puissances semblables de x, ou, ce qui revient au même, si vous développez cette expression infinie

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)(1 + x^6)\ \&c.$$

vous aurez la suite

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \&c.$$

dans laquelle chaque coëfficient indique de combien de manieres différentes l'exposant de la puissance correspondante de x, peut résulter par addition des termes différents de la série, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Ainsi, il est visible qu'il y a six manieres de former le nombre 8 par l'addition de différents nombres. Les voici :

$8 = 8$	$8 = 5 + 3$
$8 = 7 + 1$	$8 = 5 + 2 + 1$
$8 = 6 + 2$	$8 = 4 + 3 + 1$

Il faut remarquer ici qu'on doit mettre aussi en ligne de compte le nombre proposé, parce que le nombre des termes n'est pas déterminé, & que par conséquent on peut n'en prendre qu'un.

302. On voit, par ce qui précéde, comment chaque nombre est produit par l'addition de nombres différents. Mais cette condition qui suppose des nombres différents n'aura

plus lieu, si nous transportons ces facteurs au dénominateur. En effet, soit proposée cette expression

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)(1-x^{\delta}z)(1-x^{\epsilon}z)\ \&c.}$$

laquelle étant développée par la division donne la série

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c;$$

il est clair que P sera la somme des puissances de x, dont les exposants sont compris dans cette série

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \epsilon,\ \xi,\ \eta,\ \&c.$$

Ensuite Q sera un assemblage de puissances de x, dont les exposants sont les sommes de deux termes, répétés ou non, de cette série. De plus, R sera la somme des puissances de x, dont les exposants sont formés par l'addition de trois termes, & S la somme des puissances, dont les exposants sont formés par l'addition de quatre termes contenus dans cette série; ainsi des autres.

303. Par conséquent, si on suppose que l'expression ait été entiérement développée, & qu'on ait rassemblé les termes semblables, on verra de combien de manieres différentes un nombre proposé n peut être formé par l'addition de m termes, différents ou non, de la série $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi$, &c. Cherchons, par exemple, dans l'expression développée le terme $x^n z^m$, & son coëfficient que je suppose N, de sorte que le terme total soit $= N x^n z^m$; ce coëfficient N nous apprendra de combien de manieres différentes le nombre n peut être formé par l'addition de m termes contenus dans la suite $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. On aura donc ainsi la solution d'une question analogue à la premiere que nous avons considérée auparavant.

304. Faisons l'application de ce que nous venons de dire à un cas plus remarquable, & prenons cette expression

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \&c.}$$

dont le développement effectué par la division donnera

$$
\begin{aligned}
1 &+ z\,(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \&c.) \\
&+ z^2(x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + 5x^{10} + \&c.) \\
&+ z^3(x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \&c.) \\
&+ z^4(x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^3 + 6x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + 15x^{12} + \&c.) \\
&+ z^5(x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + 18x^{13} + \&c.) \\
&+ z^6(x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + 20x^{14} + \&c.) \\
&+ z^7(x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + 21x^{15} + \&c.) \\
&+ z^8(x^8 + x^9 + 2x^{10} + 3x^{11} + 5x^{12} + 7x^{13} + 11x^{14} + 15x^{15} + 22x^{16} + \&c.)
\end{aligned}
$$

&c.

On peut donc, à l'aide de ces séries, trouver sur le champ de combien de manieres différentes un nombre proposé peut être formé par l'addition d'un nombre donné de termes de cette série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Veut-on savoir, par exemple, de combien de manieres différentes le nombre 13 peut résulter de l'addition de cinq nombres entiers? Il faudra chercher le terme $x^{13}z^5$, dont le coëfficient 18 apprend que le nombre en question 13 peut être de dix-huit manieres le résultat de cinq nombres ajoutés.

305. Si on suppose $z = 1$, & qu'on réunisse en une somme les puissances semblables de x, cette expression

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ \&c.}$$

se changera en cette série

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + \&c.$$

dans laquelle chaque coëfficient marque de combien de manieres différentes l'exposant de la puissance correspondante peut être formé par l'addition de nombres entiers, soit égaux soit inégaux. Par exemple, le terme $11x^6$ fait voir que le nombre 6 peut être produit de onze manieres par l'addition des nombres entiers. Les voici :

$6 = 6$
$6 = 5 + 1$
$6 = 4 + 2$
$6 = 4 + 1 + 1$
$6 = 3 + 3$
$6 = 3 + 2 + 1$
$6 = 3 + 1 + 1 + 1$
$6 = 2 + 2 + 2$
$6 = 2 + 2 + 1 + 1$
$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Remarquez auſſi que le nombre propoſé étant contenu dans la ſérie des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. fournit lui-même une maniere.

306. Cela poſé en général, cherchons une méthode facile, qui nous donne chacune des compoſitions, dont vous venons de parler, & prenons d'abord en conſidération celle qui n'admet que des nombres entiers différents, & dont il a été queſtion en premier lieu. Soit donc propoſée, à cet effet, l'expreſſion ſuivante

$$Z = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z) \text{ \&c.}$$

qui développée & ordonnée par rapport aux puiſſances de z, donne la ſérie

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \text{\&c.}$$

pour laquelle il s'agit de trouver une méthode expéditive d'obtenir les fonctions P, Q, R, S, T, &c. de x; car on aura, par ce moyen, ſatisfait d'une maniere convenable à la queſtion propoſée.

307. Or il eſt clair que ſi on écrit xz pour z, on aura

$$(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z) \text{ \&c.} = \frac{Z}{1 + xz}.$$

Donc, en ſubſtituant xz à z, la valeur du produit, qui étoit Z, ſe changera en $\frac{Z}{1 + xz}$; ainſi, puiſque

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{\&c.}$$

on aura

$$\frac{Z}{1 + xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \&c.$$

Multiplions donc par $1 + xz$, & nous obtiendrons

$$\begin{aligned} Z = 1 &+ Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \&c. \\ &+ \quad xz + Px^2z^2 + Qx^3z^3 + Rx^4z^4 + \&c. \end{aligned}$$

Cette valeur de Z comparée avec la premiere donnera

$$P = \frac{x}{1-x}; \; Q = \frac{Px^2}{1-x^2}; \; R = \frac{Qx^3}{1-x^3}; \; S = \frac{Rx^4}{1-x^4} \; \&c.$$

On aura donc pour P, Q, R, S, &c. les valeurs ſuivantes

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$T = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

&c.

308. Nous pouvons donc obtenir ſéparément chacune des ſéries des puiſſances de x, qui doit nous apprendre de combien de manieres différentes un nombre propoſé peut être formé par l'addition d'un nombre donné de parties entieres. Au reſte, il eſt viſible que toutes ces ſéries ſont récurrentes, parce qu'elles ſont le réſultat du développement d'une fonction fractionnaire de x. En effet, la premiere expreſſion $P = \frac{x}{1-x}$ donne la progreſſion géométrique

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \&c.$$

laquelle fait voir évidemment que chaque nombre eſt contenu une fois dans la ſuite des nombres entiers.

309. La

309. La ſeconde expreſſion $\frac{x^3}{(1-x)(1-xx)}$ donne la ſérie

$$x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \&c.$$

dans laquelle le coëfficient de chaque terme apprend de combien de manieres l'expoſant de x peut être partagé en deux parties inégales. Par exemple, le terme $4x^9$ marque que le nombre 9 peut être partagé de quatre manieres en deux parties inégales. Si nous diviſons cette ſérie par x^3, nous aurons celle qui provient de la fraction $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, ſavoir :

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \&c.$$

dont nous ſuppoſerons le terme général $= Nx^n$. D'après la génération de cette ſérie, on ſait que le coëfficient N indique de combien de manieres différentes l'expoſant n peut être formé par l'addition des nombres 1 & 2 ; & puiſque le terme général de la premiere ſérie $= Nx^{n+3}$, nous en conclurons ce théorême :

On pourra partager le nombre n + 3 *en deux parties inégales d'autant de manieres différentes, qu'on pourra former le nombre* n *par l'addition des nombres* 1 & 2.

310. La troiſieme expreſſion $\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$, étant réduite en ſérie, donnera

$$x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + \&c.$$

Le coëfficient de chaque terme de cette ſérie marque de combien de manieres différentes l'expoſant de la puiſſance correſpondante de x peut être partagé en trois parties inégales. Mais le développement de la fraction $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ donnera cette autre ſérie

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \&c.$$

dont nous ſuppoſerons le terme général $= Nx^n$. Ce coëfficient N indiquera de combien de manieres différentes le nombre n peut être formé par l'addition des nombres 1, 2, 3; ainsi le terme général de la série précédente étant Nx^{n+6}, nous en déduirons le théorême suivant.

On pourra partager le nombre n + 6 *en trois parties inégales, d'autant de manieres qu'on pourra former le nombre* n *par l'addition des nombres* 1, 2 & 3.

311. La quatrieme expression développée en série donnera

$$x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + \&c.$$

où le coëfficient de chaque terme fera connoître de combien de manieres différentes l'exposant de la puissance correspondante peut être partagé en quatre parties inégales; mais, si on fait le développement de cette expression

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

on obtiendra la premiere série divisée par x^{10}, c'est-à-dire,

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 11x^7 + \&c.$$

dont nous supposons le terme général $= Nx^n$; il suit de-là que le coëfficient N indique de combien de manieres différentes le nombre n peut être formé par l'addition de ces quatre nombres 1, 2, 3, 4. Puis donc que le terme général de la série précédente doit être $= Nx^{n+10}$; nous en conclurons le théorême qui suit:

On peut partager le nombre n + 10 *en quatre parties inégales, d'autant de manieres différentes qu'on peut former le nombre* n *par l'addition des nombres* 1, 2, 3 & 4.

312. Donc, en général, si cette expression

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)}$$

est convertie en série; & que le terme général soit $= Nx^n$, le coëfficient N indiquera de combien de manieres différentes le nombre n peut être formé par l'addition des nombres 1, 2, 3, 4, ... m. Mais, si cette expression

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

est changée en série, le terme général sera $= N x^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$, dont le coëfficient N marque de combien de manieres différentes le nombre $n+\frac{m(m+1)}{1.2}$ peut être partagé en m parties inégales ; d'où s'ensuit le théorême :

Le nombre de manieres différentes dont on peut former le nombre n *par l'addition des nombres* 1, 2, 3, 4, ... m, *est le même que celui dont on peut partager le nombre* $n+\frac{m(m+1)}{1.2}$ *en* m *parties inégales.*

313. Après avoir exposé la partition des nombres en parties inégales, examinons à présent celle qui n'exclud pas l'égalité des parties, & qui résulte de cette expression

$$Z = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \&c.}$$

Supposons qu'après le développement fait par la division, on ait

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \&c.$$

Or il est clair que si on met xz au lieu de z, on aura

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \&c.} = (1-xz)\ Z;$$

le même changement ayant donc été fait dans la série développée, le résultat sera

$$(1-xz)Z = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \&c.$$

Multiplions également la premiere série par $1-xz$, & nous aurons

$$\begin{aligned}(1-xz)Z = 1 &+ Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c.\\ &- xz - Pxz^2 - Qxz^3 - Rxz^4 - \&c.\end{aligned}$$

En comparant, on trouvera

$$P = \frac{x}{1-x};\ Q = \frac{Px}{1-x^2};\ R = \frac{Qx}{1-x^3};\ S = \frac{Rx}{1-x^4};\ \&c.$$

ce qui donnera pour P, Q, R, S, &c, les valeurs ſuivantes

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

&c.

314. Ces expreſſions ne différent de celles que nous avons données plus haut, qu'en ce que les numérateurs ont ici de moindres expoſants que dans le cas précédent; & c'eſt pourquoi les ſéries qui naiſſent de leur développement, s'accordent parfaitement par les coëfficients; accord qu'il a déjà été facile de ſaiſir par comparaiſon (art. 300 & 304) & dont la raiſon eſt à préſent connue. On en conclura donc les théorêmes analogues que voici :

Autant qu'il y a de manieres différentes de former le nombre n *par l'addition des nombres* 1, 2, *autant il y a de manieres différentes de partager le nombre* n + 2 *en deux parties.*

Autant qu'il y a de manieres différentes de former le nombre n *par l'addition des nombres* 1, 2, 3; *autant il y a de manieres différentes de partager le nombre* n + 3 *en trois parties.*

Autant qu'il y a de manieres différentes de former le nombre n *par l'addition des nombres* 1, 2, 3, 4; *autant il y a de manieres différentes de partager le nombre* n + 4 *en quatre parties. Et, en général, on aura ce théorême.*

Autant qu'il existe de manieres différentes de former le nombre n *par l'addition des nombres* 1, 2, 3 ..... m, *autant il y a de manieres différentes de partager le nombre* n + m *en* m *parties.*

315. Qu'on ait donc à trouver en combien de manieres un nombre donné peut être partagé, ſoit en un nombre m de parties inégales, ſoit en un nombre m de parties, tant égales qu'inégales; ces deux queſtions ſeront réſolues, ſi on ſait de combien de manieres chaque nombre peut être formé par l'addition des nombres $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots m$, comme on le verra par les théorêmes ſuivants, qui dérivent de ceux qui précédent.

Le nombre n *peut être partagé en* m *parties inégales, d'autant de manieres que le nombre* $n - \frac{m(m+1)}{2}$ *peut être formé par l'addition des nombres* $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots m$.

Le nombre n *peut être partagé en* m *parties, ſoit égales, ſoit inégales, d'autant de manieres que le nombre* $n - m$ *peut être formé par l'addition des nombres* $1, 2, 3 \ldots\ldots m$.

Nous en déduirons ces autres théorêmes.

Le nombre n *peut être partagé en* m *parties inégales, d'autant de manieres que le nombre* $n - \frac{m(m-1)}{2}$ *peut être partagé en* m *parties, ſoit égales, ſoit inégales.*

Le nombre n *peut être partagé en* m *parties, ſoit égales, ſoit inégales, d'autant de manieres que le nombre* $n + \frac{m(m-1)}{2}$ *peut être partagé en* m *parties inégales.*

316. Or la formation des ſéries récurrentes nous apprend de combien de manieres différentes un nombre donné n peut être formé par l'addition des nombres $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots m$. Il faudra, pour cela, développer la fraction

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots\ldots(1-x^m)}$$

& continuer la ſérie récurrente juſqu'au terme Nx^n, dont le coëfficient N indiquera de combien de manieres le nombre n peut être formé par l'addition des nombres $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots m$. Mais, ce moyen d'arriver ne laiſſera pas d'être laborieux, pour peu que les nombres m & n ſoient grands; car l'échelle de relation que fournit le dénominateur développé par la multiplication, eſt alors compoſé d'un plus grand nombre de termes, ce qui rend pénible la continuation de la ſérie pouſſée un peu loin.

317. Au reſte, cette recherche donnera moins de peine, ſi on traite d'abord les cas les plus ſimples; car il ſera facile de paſſer de ceux-ci aux cas plus compoſés. En effet, ſuppoſons que la ſérie, qui naît de la fraction

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots\ldots(1-x^m)}$$

ait un terme général $= Nx^n$, & que celle qui provient de la formule

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots(1-x^m)}$$

ait pour terme général la quantité Mx^n, dont le coëfficient M indiquera de combien de manieres différentes le nombre $n-m$ peut être formé par l'addition des nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots m$. Retranchons cette derniere expreſſion de la premiere, nous aurons pour reſte :

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots\ldots(1-x^{m-1})}$$

Or il eſt évident que le terme général de la ſérie réſultante ſera $(N-M)x^n$. Donc le coëfficient $N-M$ fera connoître de combien de manieres différentes le nombre n peut être formé par l'addition des nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots (m-1)$.

318. Nous tirerons donc de-là la régle ſuivante :

Soit L le nombre de manieres, dont le nombre n peut être formé par l'addition des nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots (m-1)$.

Soit M le nombre de manieres, dont le nombre $n-m$ peut être formé par l'addition des nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots m$.

Et ſoit N le nombre de manieres, dont le nombre n peut être formé par l'addition des nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots m$.

Cela poſé, on aura, comme nous venons de voir, $L = N - M$, & par conſéquent $N = L + M$. Donc, ſi nous trouvons de combien de manieres différentes les nombres n & $n-m$, peuvent être formés par addition, le premier avec les nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots (m-1)$; & le second avec les nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots m$, il s'ensuivra que nous connoîtrons aussi de combien de manieres différentes le nombre n peut être formé par addition avec les nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots m$. On pourra, à l'aide de ce théorême, passer des cas les plus simples, qui ne présentent aucune difficulté, aux cas de plus en plus composés; & c'est de cette maniere qu'a été calculée la Table ci-jointe *, dont voici l'usage.

Voulez-vous savoir de combien de manieres différentes le nombre 50 peut être partagé en 7 parties inégales? Prenez dans la premiere colonne verticale le nombre $50 - \frac{7 \cdot 8}{2} = 22$, & dans la rangée horisontale supérieure le chiffre romain VII, le nombre 522 placé dans l'angle vous donnera le nombre de manieres, que vous demandiez. Voulez-vous à présent connoître de combien de manieres différentes le même nombre 50 peut être partagé en 7 parties, soit égales, soit inégales? Prenez dans la premiere colonne verticale le nombre $50 - 7 = 43$, le nombre 8946, qui lui correspond dans la 7[e] colonne, sera le nombre cherché.

319. Les séries verticales de cette Table, quoique récurrentes, ont cependant, avec les nombres naturels, triangulaires, pyramidaux & suivants, une grande connexion, que nous allons exposer en peu de mots. En effet, comme la fraction $\frac{1}{(1-x)(1-xx)}$ donne la série . . . . . .

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \&c.$$

& conséquemment la fraction $\frac{x}{(1-x)(1-xx)}$ celle-ci

$$x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + \&c.$$

Si on ajoute ces deux séries, leur somme donnera cette autre,

* Voyez page 252.

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + \&c.$$

que fournit le développement de la fraction $\frac{1+x}{(1-x)(1-xx)} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Ce qui fait voir clairement que les termes numériques de la derniere série forment la suite des nombres naturels. Donc en ajoutant deux termes consécutifs de la seconde série de la Table, on obtiendra la suite des nombres naturels, en supposant $x = 1$.

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + \&c.$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \&c.$$

Donc réciproquement la série des nombres naturels donnera la série supérieure, en retranchant chaque terme de la série supérieure du terme suivant de la série inférieure.

320. La troisiéme série verticale provient de la fraction $\frac{1}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)}$. Mais comme $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{(1+x)(1+x+xx)}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)}$, il est évident qu'en ajoutant
(oo) d'abord trois termes de cette série, ensuite deux termes de la série résultante, on doit obtenir les nombres triangulaires; ce dont il est aisé de s'assurer par ce qui suit:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 19 + \&c.$$

$$1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + 36 + 42 + 49 + \&c.$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + \&c.$$

Réciproquement on voit comment on peut tirer la suite supérieure de celle des nombres triangulaires.

321. Pareillement, comme la quatrieme série provient de la fraction $\frac{1}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)}$, on aura $\frac{(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)} = \frac{1}{(1-x)^4}$. Si dans la quatrieme série on ajoute d'abord quatre termes, ensuite trois

trois dans la férie réfultante, & enfin deux dans cette derniere, on trouvera la fuite des nombres pyramidaux, comme le fait voir le calcul fuivant.

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + 23 + 27 + &c.

1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + 67 + 83 + &c.

1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + 161 + 203 + &c.

1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + 286 + 364 + &c.

Semblablement la cinquieme férie conduira aux nombres pyramidaux du fecond ordre, la fixieme à ceux du troifieme ordre; ainfi de fuite.

322. Donc, réciproquement on pourra, au moyen des nombres figurés, former les féries qui fe trouvent dans les tables par des opérations, que le calcul fuivant rendra faciles à faifir.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + &c.

1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + &c. II.

1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + &c.

1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + &c.

1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + &c. III.

1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + &c.

1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + &c.

1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + &c.

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + &c. IV.

1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + 210 + 330 + 495 + 715 + &c.

1 + 4 + 11 + 24 + 46 + 80 + 130 + 200 + 295 + 420 + &c.

1 + 3 + 7 + 14 + 25 + 41 + 64 + 95 + 136 + 189 + &c.

1 + 2 + 4 + 7 + 12 + 18 + 27 + 38 + 53 + 71 + &c.

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 10 + 13 + 18 + 23 + &c. V.

&c.

Dans ces différents groupes de ſéries, les premieres ſont les nombres figurés, & en retranchant chaque terme de la ſeconde ſérie du terme ſuivant de la premiere on forme la ſeconde. Puis on ajoute deux termes de la troiſieme ſérie, qu'on retranche du terme ſuivant de la ſeconde, & on obtient la troiſieme; & en continuant ainſi de ſouſtraire la ſomme de trois, de quatre termes, ou d'un plus grand nombre, de la ſérie ultérieure, du terme ſuivant de la ſérie, qui précéde, on formera les autres ſéries, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à celle qui commence par $1 + 1 + 2$ &c; & ce ſera la ſérie de la Table.

323. Toutes les ſéries verticales de la Table commencent de la même maniere, & ont continuellement un plus grand nombre de termes communs; d'où il s'enſuit qu'à l'infini ces ſéries deviendront identiques. On aura alors la ſérie, qui provient de la fraction.

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ \&c.}$$

Comme cette ſérie eſt récurrente, conſidérons d'abord le dénominateur de la fraction pour en déduire l'échelle de relation. Or ſi les facteurs du dénominateur ſont continuellement multipliés entr'eux, on trouvera la ſuite

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \&c.$$

& ſi on examine avec un peu plus d'attention la nature de cette ſuite, on verra qu'elle ne renferme d'autres puiſſances de x, que celles dont les expoſants ſont compris dans cette
(pp) formule $\frac{3nn \pm n}{2}$. Si n eſt un nombre impair, les puiſſances ſeront négatives, & elles ſeront poſitives, ſi n eſt un nombre pair.

324. Donc l'échelle de relation étant

$$+1, +1, 0, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, +1, 0, 0, +1, 0, 0, \&c.$$

La ſérie récurrente que donnera le développement de la fraction

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ \&c.}$$

fera celle-ci :

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + 135x^{14} + 176x^{15} + 231x^{16} + 297^{17} + 385x^{18} + 490x^{19} + 627x^{20} + 792x^{21} + 1002x^{22} + 1255x^{23} + 1575x^{24} \&c.$$

Par conséquent dans cette série, chaque coëfficient indique de combien de manieres différentes l'exposant de x peut se former par l'addition des nombres entiers. Ainsi le nombre 7 peut être formé de quinze manieres par addition.

$7 = 7$	$7 = 4 + 2 + 1$	$7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
$7 = 6 + 1$	$7 = 4 + 1 + 1 + 1$	$7 = 2 + 2 + 2 + 1$
$7 = 5 + 2$	$7 = 3 + 3 + 1$	$7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$
$7 = 5 + 1 + 1$	$7 = 3 + 2 + 2$	$7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$7 = 4 + 3$	$7 = 4 + 1 + 1 + 1$	$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

325. Si on développe ce produit

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)(1 + x^6) \&c.$$

on aura la série qui suit,

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + \&c.$$

dans laquelle chaque coëfficient marque de combien de manieres différentes l'exposant de x peut être formé par l'addition de nombres inégaux. Ainsi le nombre 9 peut être de huit manieres différentes la somme de nombres inégaux.

$9 = 9$	$9 = 6 + 2 + 1$
$9 = 8 + 1$	$9 = 5 + 4$
$9 = 7 + 2$	$9 = 5 + 3 + 1$
$9 = 6 + 3$	$9 = 4 + 3 + 2$

326. Afin de pouvoir comparer ces formules entr'elles, supposons

$$P = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6) \&c.$$

&

$$Q = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)(1 + x^6) \&c.$$

nous aurons

$$PQ = (1 - x^2)(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x^8)(1 - x^{10})(1 - x^{12}) \&c.$$

Comme tous ces facteurs sont contenus dans P, divisons P par PQ, le quotient sera $\frac{1}{Q} = (1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)(1 - x^7)(1 - x^9) \&c.$

& par conséquent

$$Q = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)(1 - x^7)(1 - x^9) \&c.}$$

Le développement de cette fraction produira une série, dans laquelle chaque coëfficient apprendra de combien de manieres différentes l'exposant de x peut être formé par l'addition des nombres impairs. Puis donc que cetre expression est égale à celle que nous avons considérée dans l'article précédent, nous en conclurons le théorême suivant.

Autant qu'il y a de manieres de former par addition un nombre donné, avec tous les nombres entiers inégaux entr'eux; autant il y a de manieres de former le même nombre, par addition, avec les nombres seulement impairs, soit égaux soit inégaux.

327. Comme nous avons vu ci-dessus que

$$P = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \&c.$$

on aura en mettant xx pour x,

$$PQ = 1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + x^{44} + x^{52} - \&c..$$

TABLE

Au moyen de laquelle on trouve de combien de manières différentes on peut partager un nombre entier quelconque en un nombre donné de parties inégales, ou de parties soit égales, soit inégales, & dont l'usage est expliqué, page 247.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560
21	1	11	48	120	221	331	436	525	598	653	695
22	1	12	52	136	255	391	522	638	732	807	863
23	1	12	56	150	291	454	618	764	887	984	1060
24	1	13	61	169	333	532	733	919	1076	1204	1303
25	1	13	65	185	377	612	860	1090	1291	1455	1586
26	1	14	70	206	427	709	1009	1297	1549	1761	1930
27	1	14	75	225	480	811	1175	1527	1845	2112	2331
28	1	15	80	249	540	931	1367	1801	2194	2534	2812
29	1	15	85	270	603	1057	1579	2104	2592	3015	3370
30	1	16	91	297	674	1206	1824	2462	3060	3590	4035
31	1	16	96	321	748	1360	2093	2857	3589	4242	4802
32	1	17	102	351	831	1540	2400	3319	4206	5013	5708
33	1	17	108	378	918	1729	2738	3828	4904	5888	6751
34	1	18	114	411	1014	1945	3120	4417	5708	6912	7972
35	1	18	120	441	1115	2172	3539	5066	6615	8070	9373
36	1	19	127	478	1226	2432	4011	5812	7657	9418	11004
37	1	19	133	511	1342	2702	4526	6630	8824	10936	12866
38	1	20	140	551	1469	3009	5102	7564	10156	12690	15021
39	1	20	147	588	1602	3331	5731	8588	11648	14663	17475
40	1	21	154	632	1747	3692	6430	9749	13338	16928	20298
41	1	21	161	672	1898	4007	7190	11018	15224	19466	23501
42	1	22	169	720	2062	4494	8033	12450	17354	22367	27169
43	1	22	176	764	2233	4935	8946	14012	19720	25608	31316
44	1	23	184	816	2418	5427	9953	15765	22380	29292	36043
45	1	23	192	864	2611	5942	11044	17674	25331	33401	41373
46	1	24	200	920	2818	6510	12241	19805	28629	38047	47420
47	1	24	208	972	3034	7104	13534	22122	32278	43214	54218
48	1	25	217	1033	3266	7760	14950	24699	36347	49037	61903
49	1	25	225	1089	3507	8442	16475	27493	40831	55494	70515
50	1	26	234	1154	3765	9192	18138	30588	45812	62740	80215
51	1	26	243	1215	4033	9975	19928	33940	51294	70760	91058
52	1	27	252	1285	4319	10829	21873	37638	57358	79725	103226
53	1	27	261	1350	4616	11720	23961	41635	64015	89623	116792
54	1	28	271	1425	4932	12692	26226	46031	71362	100654	131970
55	1	28	280	1495	5260	13702	28652	50774	79403	112804	148847
56	1	29	290	1575	5608	14800	31275	55974	88252	126299	167672
57	1	29	300	1650	5969	15944	34082	61565	97922	141136	188556
58	1	30	310	1735	6351	17180	37108	67696	108527	157564	211782
59	1	30	320	1815	6747	18467	40340	74280	120092	175586	237489
60	1	31	331	1906	7166	19858	43819	81457	132751	195491	266006
61	1	31	341	1991	7599	21301	47527	89162	146520	217280	297495
62	1	32	352	2087	8056	22856	51508	97539	161554	241279	332337
63	1	32	363	2178	8529	24473	55748	106522	177884	267507	370733
64	1	33	374	2280	9027	26207	60289	116263	195666	296320	413112
65	1	33	385	2376	9542	28009	65117	126692	214944	327748	459718
66	1	34	397	2484	10083	29941	70281	137977	235899	362198	511045
67	1	34	408	2586	10642	31943	75762	150042	258569	399705	567377
68	1	35	420	2700	11229	34085	81612	163069	283161	440725	629261
69	1	35	432	2808	11835	36308	87816	176978	309729	485315	697097

& en divisant cette expression par la premiere

$$Q = \frac{1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.}$$

Donc la série Q sera aussi récurrente, & sera égale à la série $\frac{1}{P}$, en multipliant celle-ci par $1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24}$ &c. Ainsi, puisque (art. 324)

$$\frac{1}{P} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \&c.$$

Si on multiplie ce résultat par

$$1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - \&c.$$

on trouvera pour produit

$$\begin{array}{l} 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \&c. \\ \qquad - x^2 - x^3 - 2x^4 - 3x^5 - 5x^6 - 7x^7 - 11x^8 - 15x^9 - \&c. \\ \qquad\qquad - x^4 - x^5 - 2x^6 - 3x^7 - 5x^8 - 7x^9 - \&c. \end{array}$$

ou

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + \&c. = Q.$$

Donc avec la formation des nombres par l'addition des nombres, tant égaux qu'inégaux, on aura celle des nombres par l'addition des nombres inégaux, & conséquemment celle des nombres par l'addition des nombres seulement impairs.

328. Reste encore à traiter & à expliquer quelques cas particuliers, qui ne sont pas sans utilité pour faire connoître la nature des nombres. Considérons, par exemple, cette expression

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})(1 + x^{32}) \&c,$$

dans laquelle les exposants de x croissent en raison double. Si on développe cette expression, on trouvera, à la vérité, la série

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \&c.$$

Mais, comme on peut douter si cette série continuera de suivre la même loi, & si elle formera à l'infini une progression géométrique, examinons-la plus particuliérement. Soit à cet effet

$$P = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \text{ \&c.}$$

& supposons que le développement de cette quantité donne la série

$$P = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \xi x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \text{\&c.}$$

Or il est clair que si au lieu de x on écrit xx, on aura le produit

$$(1+xx)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32}) \text{ \&c.} = \frac{P}{1+x};$$

ayant donc fait dans la série la même substitution, on aura

$$\frac{P}{1+x} = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \epsilon x^{10} + \xi x^{12} + \text{\&c.}$$

& multipliant par $1+x$,

$$P = 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4 + \beta x^5 + \gamma x^6 + \gamma x^7 + \delta x^8 + \delta x^9 + \text{\&c.}$$

Cette valeur de P comparée avec la précédente, donnera

$$\alpha = 1;\ \beta = \alpha;\ \gamma = \alpha;\ \delta = \beta;\ \epsilon = \beta;\ \xi = \gamma;\ \eta = \gamma, \text{ \&c.}$$

Donc tous les coëfficients seront $= 1$; & par conséquent le produit P, dont il est question, étant développé, fournira la série géométrique

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{\&c.}$$

329. Puisque toutes les puissances de x se trouvent dans cette suite, & chacune une fois; concluons, d'après la forme du produit $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ &c, que tout nombre entier peut être formé par l'addition de termes différents de la progression géométrique double, 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c, & cela d'une maniere seulement. Cette propriété est connue de ceux qui sont dans l'habitude de faire des pesées; car ils

ſavent qu'avec des poids ſeulement de 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. livres, ils peuvent faire toutes les peſées poſſibles, tant qu'il n'y aura pas de fractions de livre. Ainſi, avec ces dix poids, ſavoir 1℔, 2℔, 4℔, 8℔, 16℔, 32℔, 64℔, 128℔, 256℔, 512℔, on peut peſer juſqu'à 1024℔, & ſi on y ajoute un poids de 1024℔, on pourra peſer juſqu'à 2048℔.

330. On ſait de plus dans la pratique qu'avec un moindre nombre de poids, & qui croiſſent en raiſon géométrique, ſavoir, 1, 3, 9, 27, 81, &c, on peut pareillement faire toutes les peſées poſſibles, à moins qu'on n'ait beſoin de fractions. Obſervez que dans ce dernier cas, on ne place pas les poids d'un ſeul côté de la balance, mais des deux côtés, à la fois, s'il eſt néceſſaire. Cette pratique eſt fondée ſur ce qu'en prenant toujours des termes différents de la progreſſion géométrique triple, 1, 3, 9, 27, 81, &c; on peut, par l'addition & par la ſouſtraction, former tous les nombres entiers imaginables. En effet

$1 = 1$	$5 = 9 - 3 + 1$	$9 = 9$
$2 = 3 - 1$	$6 = 9 - 3$	$10 = 9 + 1$
$3 = 3$	$7 = 9 - 3 + 1$	$11 = 9 + 3 - 1$
$4 = 3 + 1$	$8 = 9 - 1$	$12 = 9 + 3$

&c.

331. Pour démontrer cette vérité, je prends ce produit composé d'un nombre infini de facteurs

$$(x^{-1} + 1 + x^{1})\,(x^{-3} + 1 + x^{3})\,(x^{-9} + 1 + x^{9})\,(x^{-27} + 1 + x^{27})\ \&c. = P,$$

lequel étant développé, ne donnera d'autres puiſſances de x que celles dont les expoſants peuvent être formés par les nombres 1, 3, 9, 27, 81, &c, ſoit en les ajoutant, ſoit en les ſouſtrayant. Mais obtiendra-t-on toutes les puiſſances,

& chacune d'elles ſeulement une fois ? C'eſt ce que je cherche de la maniere ſuivante. Soit

$$P = \&c. + cx^{-3} + bx^{-2} + ax^{-1} + 1 + \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \&c.$$

Or il eſt évident, que, ſi au lieu de x on écrit x^3, on aura

$$\frac{P}{x^{-1}+1+x^1} = \&c. + bx^{-6} + ax^{-3} + 1 + \alpha x^3 + \beta x^6 + \gamma x^9 + \&c.$$

Donc $P =$ &c. +

$$ax^{-4} + ax^{-3} + ax^{-2} + x^{-1} + 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \alpha x^4 + \beta x^5 + \beta x^6 + \beta x^7 + \&c.$$

Cette expreſſion comparée avec la ſuppoſée donnera

$$\alpha = 1;\ \beta = \alpha;\ \gamma = \alpha;\ \delta = \alpha;\ \varepsilon = \beta;\ \xi = \beta, \&c.$$

$$a = 1;\ b = a;\ c = a;\ d = a;\ e = b, \&c.$$

d'où nous conclurons

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \&c.$$
$$+ x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + \&c.$$

On voit par-là clairement que toutes les puiſſances de x tant poſitives que négatives, ſe trouvent dans cette ſérie ; & que par conſéquent, on peut former tous les nombres, ſoit en ajoutant, ſoit en ſouſtrayant les termes de la progreſſion géométrique triple, & que de plus il n'y a qu'une maniere de former chacun des nombres.

CHAPITRE XVII.

CHAPITRE XVII.

De l'usage des Séries récurrentes dans la recherche des Racines des Équations.

332. *Le célèbre* DANIEL BERNOUILLI a indiqué un bel usage des séries récurrentes, relatif à la recherche des racines d'une équation d'un degré quelconque, dans *les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, Tome III*, où il enseigne comment on peut, à l'aide des séries récurrentes, assigner les valeurs approchées des racines d'une équation algébrique quelconque, quelqu'en soit le nombre de dimensions. Cette méthode pouvant être d'une très-grande utilité, j'ai jugé à propos de l'expliquer ici avec quelque détail, afin qu'on puisse savoir dans quel cas on peut l'employer. Car il arrive quelquefois qu'on est trompé dans son attente, & qu'on ne peut obtenir aucune racine de l'équation par le moyen de cette méthode. C'est pourquoi, pour en mieux faire sentir l'esprit & la nature, il convient d'examiner, d'après les propriétés des séries récurrentes, les fondements, sur lesquels elle porte.

333. Toute série récurrente pouvant être regardée comme le développement d'une fraction rationnelle quelconque, prenons la fraction

$$= \frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \&c.}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c.}$$

laquelle donne naissance à la série récurrente suivante :

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \&c.$$

dont les coëfficients A, B, C, D, &c. sont déterminés, ainsi qu'il suit :

$$A = a$$
$$B = \alpha A + b$$
$$C = \alpha B + \beta A + c$$
$$D = \alpha C + \beta B + \gamma A + d$$
$$E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e$$
&c.

Or le terme général ou le coëfficient de la puiſſance z^n, ſe trouve en décompoſant la fraction propoſée en fractions ſimples, dont les dénominateurs ſoient les facteurs du dénominateur $1 - \alpha z - \beta zz - \gamma z^3 -$ &c, comme on l'a vu (Chap. XIII.)

334. Quant à la forme du terme général, elle dépend principalement de la nature des facteurs ſimples du dénominateur, ſuivant qu'ils ſont réels ou imaginaires, inégaux entre eux, ou égaux deux à deux, ou en plus grand nombre. Pour parcourir ces différents cas par ordre, ſuppoſons d'abord que tous les facteurs ſimples du dénominateur ſoient réels & inégaux entr'eux. Soient donc tous les facteurs ſimples du dénominateur $(1 - pz)$ $(1 - qz)$ $(1 - rz)$ $(1 - sz)$ &c; au moyen deſquels la fraction propoſée puiſſe être décompoſée en ces autres fractions ſimples $\frac{\mathrm{A}}{1 - pz} + \frac{\mathrm{B}}{1 - qz} + \frac{\mathrm{C}}{1 - rz} + \frac{\mathrm{D}}{1 - sz} +$ &c. Celles-ci étant connues, le terme général de la ſérie récurrente ſera $= z^n (\mathrm{A}p^n + \mathrm{B}q^n + \mathrm{C}r^n + \mathrm{D}s^n +$ &c.) que nous ferons $= Pz^n$, c'eſt-à-dire, que P ſera le coëfficient de la puiſſance z^n, & ceux des puiſſances ſuivantes ſeront Q, R, &c, de maniere que la ſérie récurrente deviendra

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \text{\&c.}$$

335. Suppoſons à préſent n un nombre très-grand, ou la ſérie récurrente continuée juſqu'à un très-grand nombre

de termes ; comme les puiſſances des nombres inégaux ſont elles-mêmes d'autant plus inégales, qu'elles ſont plus élevées, il y aura une ſi grande différence entre les puiſſances $A p^n$, $B q^n$, $C r^n$, que celle, qui réſultera du plus grand des nombres p, q, r, &c, ſurpaſſera beaucoup en grandeur les autres, & que celles-ci deviendront abſolument nulles à l'égard de la premiere, ſi n eſt un nombre infiniment grand. Les nombres p, q, r, &c, étant donc inégaux entr'eux, ſuppoſons p le plus grand de tous; par conſéquent, ſi n eſt un nombre infini, on aura $P = A p^n$; mais ſi n eſt ſeulement un nombre très-grand, on aura à-peu-près $P = A p^n$; on aura pareillement $Q = A p^{n+1}$, & par conſéquent $\frac{Q}{P} = p$. Il ſuit de-là évidemment que, ſi la ſérie récurrente eſt prolongée ſuffiſamment, le coëfficient de chaque terme diviſé par le précédent, exprimera la valeur approchée de la plus grande lettre p.

336. Donc, ſi dans la fraction propoſée

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c.}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c.}$$

le dénominateur ne renferme que des facteurs ſimples réels inégaux entr'eux, la ſérie récurrente qui en naîtra, pourra faire connoître un des facteurs ſimples, ſavoir, celui $1 - pz$, dans lequel la lettre p a la plus grande valeur de toutes. On ne fait point entrer ici dans le calcul les coëfficients a, b, c, d, &c. du numérateur; car quels qu'ils ſoient, il en réſultera toujours la même vraie valeur pour la plus grande quantité p. A la vérité, on ne tireroit la véritable valeur de p, que lorſque la ſérie auroit été prolongée à l'infini; cependant, ſi on a déjà calculé pluſieurs termes de cette ſuite, on aura la valeur de p d'autant plus approchée, que le nombre des termes ſera plus grand, & que cette lettre p ſurpaſſera en grandeur les autres q, r, s, &c. Au reſte, il eſt indifférent que cette lettre p ſoit affectée du ſigne +

ou du ſigne —, car dans les deux cas, ſes puiſſances augmentent également.

337. Il eſt aſſez facile à préſent de voir comment ſe peut faire l'application de ces principes à la recherche des racines d'une équation algébrique quelconque. En effet, les facteurs du dénominateur $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 -$ &c. étant connus, on aſſignera facilement les racines de cette équation

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c. = 0,$$

de ſorte que ſi un des facteurs eſt $1 - pz$, une des racines de cette équation ſera $z = \frac{1}{p}$. Puis donc que la ſérie récurrente fait connoître le plus grand nombre p, on obtiendra en même temps la plus petite racine de l'équation $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 -$ &c. $= 0$; ou bien, ſi on fait $z = \frac{1}{x}$, pour avoir l'équation

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \&c. = 0,$$

on aura, à l'aide de la même méthode, la plus grande racine de cette derniere équation, ſavoir $x = p$.

338. Soit donc propoſée cette équation

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \&c. = 0,$$

laquelle ne renferme que des racines réelles & inégales entr'elles, on trouvera de la maniere ſuivante la plus grande de ces racines. Formons des coëfficients de cette équation la fraction

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c.}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c.}$$

& de cette fraction, une ſérie récurrente, en prenant à volonté le numérateur, ou, ce qui revient au même, en prenant arbitrairement les premiers termes; de maniere qu'elle ſoit

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1};$$

la fraction $\frac{Q}{P}$ donnera la valeur de la plus grande racine x

de l'équation d'autant plus approchée, que n sera un plus grand nombre.

Exemple I.

Soit proposée l'équation $xx - 3x - 1 = 0$, *dont il s'agit de trouver la plus grande racine.*

Formons la fraction $\frac{a + bz}{1 - 3z - zz}$; en prenant pour premiers termes 1, 2, nous aurons la série récurrente

$$1, 2, 7, 23, 76, 251, 829, 2738, \&c.$$

Donc la quantité $\frac{2738}{829}$ approchera de la valeur de la plus grande racine de l'équation proposée. Or la valeur de cette fraction exprimée en décimales est

$$3,3027744$$

tandis que la plus grande racine de l'équation $= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} =$

$$3,3027756$$

laquelle surpasse la précédente seulement d'un millioniéme. Remarquez au reste que les fractions $\frac{P}{Q}$ sont alternativement plus grandes & plus petites que la vraie racine. (99)

Exemple II.

Soit proposée l'équation $3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$, *dont les racines représentent les sinus de trois arcs, dont les triples ont un sinus* $= \frac{1}{2}$.

Ayant ramené l'équation à la forme $0 = 1 - 6x * + 8x^3$, cherchons-en, pour nous en tenir aux nombres entiers, la plus petite racine, de maniere qu'il ne soit pas nécessaire de mettre $\frac{1}{z}$ pour x. Formons donc en conséquence la fraction

$$\frac{a + bx + cxx}{1 - 6x * + 8x^3}$$

& comme les trois premiers termes sont à notre choix, nous prendrons 0,0,1, pour rendre, par ce moyen, le calcul plus expéditif; ce qui nous donnera, en omettant les puissances de x, parce que nous n'avons besoin que des coëfficients, la série récurrente suivante

$$0; 0; 1; 6; 36; 208; 1200; 6912; 39808; 229248.$$

La valeur approchée de la plus petite racine de l'équation sera donc $= \frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791} = 0{,}1736460$, laquelle conséquemment devroit être le sinus de l'angle de 10°; mais, suivant les Tables, ce sinus est $0{,}1736482$; quantité, qui surpasse la racine trouvée auparavant de $\frac{22}{10000000}$. Au reste, cette même racine peut se trouver plus facilement en faisant $x = \frac{1}{2}y$, pour avoir l'équation $1 - 3y * + y^3 = 0$. Traitée de la même maniere que la précédente, elle donnera la série

$$0, 0, 1, 3, 9, 26, 75, 216, 622, 1791, 5157, \&c.$$

On aura donc pour la valeur approchée de la plus petite racine $y = \frac{1791}{5157} = \frac{199}{573} = 0{,}3472949$. Donc $x = \frac{1}{2}y = 0{,}1736479$; valeur dix fois plus approchée que la précédente.

EXEMPLE III.

On veut connoître la plus grande racine de la même équation proposée $0 = 1 - 6x * + 8x^3$.

Soit $x = \frac{y}{2}$; on aura $y^3 * - 3y + 1 = 0$. On trouvera la plus grande racine de cette équation par une série récurrente, dont l'échelle de relation est $0, 3, -1$, d'où résulte, les trois premiers termes ayant été pris à volonté, la série

$$1, 1, 1, 2, 2, 5, 4, 13, 7, 35, 8, 98, -11, \&c.$$

Et comme on arrive à des termes négatifs, c'est une preuve que la plus grande racine est négative; en effet $x = - \mathit{sin}. 70^\circ = - 0,9396926$. Il faut donc avoir égard à cette circonstance dans le choix des premiers termes, en cette maniere :

$$1 - 2 + 4 - 7 + 14 - 25 + 49 - 89 + 172 - 316 + 605 - \&c.$$

d'où l'on tire $y = \frac{-605}{316}$ & $x = \frac{-605}{632} = - 0,957$, valeur, qui s'écarte beaucoup de la vérité.

339. La raison de cette différence vient sur-tout de ce que les racines de l'équation proposée étant $\mathit{sin}. 10^\circ$, $\mathit{sin}. 50^\circ$, & $- \mathit{sin}. 70^\circ$, les deux plus grandes different si peu l'une de l'autre, que dans les puissances, jusqu'auxquelles nous avons continué la série, la seconde racine $\mathit{sin}. 50^\circ$ a encore un rapport sensible avec la plus grande, & qu'elle ne disparoît pas à l'égard de celle-ci. Le saut, que nous observons, vient aussi de ce que les valeurs trouvées deviennent alternativement trop grandes & trop petites. Ainsi, en prenant (rr)

$$y = \frac{-316}{172}, x \text{ devient } = \frac{-158}{172} = \frac{-79}{86} = -0,918.$$

En effet, comme les puissances de la plus grande racine deviennent alternativement positives & négatives, les puissances de la seconde racine sont aussi alternativement ajoutées & retranchées : c'est pourquoi, pour rendre cette différence insensible, on doit continuer la série beaucoup plus loin.

340. Mais on peut remédier d'une autre maniere à cet inconvénient, en transformant, au moyen d'une substitution convenable, l'équation en une autre, dont les racines ne soient pas si voisines. Par exemple, si dans l'équation $0 = 1 - 6x + 8x^3$ dont les racines sont $- \mathit{sin}. 70^\circ$, $+ \mathit{sin}. 50^\circ$ $+ \mathit{sin}. 10^\circ$, on fait $x = y - 1$, l'équation $0 = 8y^3 - 24yy + 18y - 1$, aura pour racines $1 - \mathit{sin}. 70^\circ$; $1 + \mathit{sin}. 50^\circ$; $1 + \mathit{sin}. 10^\circ$; & par conséquent la plus petite racine

ſera $1 - \mathit{ſin.}\, 70^\circ$, tandis qu'auparavant celle-ci $\mathit{ſin.}\, 70^\circ$ étoit la plus grande de l'équation précédente ; & à préſent $1 + \mathit{ſin.}\, 50^\circ$ eſt la racine la plus grande, lorſque précédemment la racine $\mathit{ſin.}\, 50^\circ$ étoit la moyenne. Ainſi, une racine quelconque pourra, par le moyen d'une ſubſtitution, devenir la plus grande ou la plus petite d'une nouvelle équation, & être en conſéquence déterminée par la méthode que nous venons de donner. De plus, comme dans notre exemple la racine $1 - \mathit{ſin.}\, 70^\circ$ eſt beaucoup plus petite que les deux autres, il ſera facile d'en avoir la valeur approchée par une ſérie récurrente.

Exemple IV.

Trouver la plus petite racine de l'équation $0 = 8y^3 - 24y^2 + 18y - 1$, *qui étant ſouſtraite de l'unité donnera pour reſte le ſinus de l'angle de* 70°.

Soit $y = \frac{1}{2}z$, pour avoir $0 = z^3 - 6zz + 9z - 1$, dont la plus petite racine ſe trouvera par une ſérie récurrente, dont l'échelle de relation eſt $9, -6, +1$, & la plus grande, en prenant l'échelle de relation $6, -9, +1$. Pour avoir la plus petite, formons donc cette ſérie

$$1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861; \&c.$$

nous aurons à-peu-près $z = \frac{17593}{145861} = 0{,}12061483$ & $y = 0{,}06030741$, & $\mathit{ſin.}\, 70^\circ = 1 - y = 0{,}93969258$, valeur qui ne s'écarte pas de la vérité, même dans le dernier chiffre. On comprend donc par-là combien il peut être avantageux de transformer, par une ſubſtitution convenable, une équation, pour en trouver les racines, & que par ce moyen la méthode que nous avons expliquée, ne s'applique pas ſeulement à la recherche des plus grandes & des plus petites racines, mais qu'elle peut les donner toutes.

341. Ayant donc trouvé par approximation une racine quelconque d'une équation propoſée, de maniere que le nombre k, par exemple, différe très-peu d'une des racines, nous

nous ferons $x - k = y$, ou $x = y + k$, & par ce moyen nous aurons une équation, dont la plus petite racine sera $= x - k$; & si nous la cherchons par une série récurrente, ce qui sera très-facile, puisque cette racine est beaucoup plus petite que les autres, en l'ajoutant à k, nous aurons une des vraies racines x de l'équation proposée. L'usage de ce procédé est si général, qu'il auroit encore lieu, quand même l'équation contiendroit des racines imaginaires.

342. On ne peut sur-tout se passer de cet artifice pour trouver une racine, lorsque l'équation en renferme une autre égale à celle qu'on cherche, mais affectée d'un signe contraire. Par exemple, si une équation dont la plus grande racine soit p, avoit aussi $-p$ pour racine, on auroit beau continuer la série, même jusqu'à l'infini, on n'en pourroit jamais déduire cette racine p. Proposons-nous, pour éclaircir ce que nous avançons, l'équation $x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$, dont la plus grande racine est $\sqrt{5}$, & qui a en même temps $-\sqrt{5}$ pour racine; si nous suivons la méthode que nous avons prescrite, pour trouver la plus grande racine, & que nous formions une série récurrente, dont l'échelle de relation soit $1, +5, -5$, nous aurons la suite

$$1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563, \&c.$$

dans laquelle on n'arrive à aucun rapport constant. Mais il en est autrement du rapport des termes pris alternativement, (ss) & si l'un de ces termes est divisé par le précédent, le quotient exprimera le quarré de la plus grande racine. En effet, on a à-peu-près $5 = \frac{1563}{313} = \frac{938}{188} = \frac{313}{63}$. Ainsi, toutes les fois qu'en prenant seulement les termes alternatifs, leur rapport tend à l'égalité, on obtient la valeur approchée du quarré de la racine cherchée. Au reste, la racine $x = \sqrt{5}$ se trouve en faisant $x = y + 2$; ce qui donne l'équation $1 - 3y - 5yy - y^3 = 0$, dont la plus petite racine se conclura de la série

$$1, 1, 1, 9, 33, 145, 609, 2585, 10945, \&c.$$

Car elle ſera à-peu-près $= \frac{2585}{10945} = 0,2361$; or $2,2361$ eſt à-peu-près $= \sqrt{5}$, qui eſt la plus grande racine de l'équation.

343. Quoique le numérateur de la fraction qui forme la ſérie récurrente, ſoit arbitraire, cependant la forme qu'on lui donne, peut contribuer beaucoup à trouver plus promptement la valeur approchée de la racine. En effet, ayant pris, comme ci-deſſus (art. 334) les facteurs du dénominateur ; ſoit le terme général de la ſérie récurrente $= z^n(A p^n + B q^n + C r^n +$ &c.) ces coëfficients A, B, C, &c, ſe déterminent par le numérateur de la fraction ; par conſéquent il peut arriver que A ait une valeur grande ou petite ; dans le premier cas, la plus grande racine p ſe trouve plutôt, & dans le ſecond, plus tard ; on peut même prendre un numérateur qui faſſe diſparoître entiérement A ; alors la ſérie, quoique continuée à l'infini, ne donnera jamais la plus grande racine p. Or cela arrive, lorſque le numérateur qu'on a choiſi, a lui même pour facteur, $1 - pz$, car alors ce facteur ſortira entiérement de l'expreſſion. Par exemple, ſi on propoſe l'équation $x^3 - 6xx + 10x - 3 = 0$, dont la plus grande racine $= 3$, & qu'on en forme la fraction

$$\frac{1 - 3z}{1 - 6z + 10z^2 - 3z^3}$$

de ſorte que l'échelle de relation ſoit $6, -10, +3$, on obtiendra la ſérie

$$1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, \&c.$$

dans laquelle le rapport de deux termes n'approche nullement de $1 : 3$. La raiſon en eſt que la même ſérie provient de la fraction $\frac{1}{1 - 3z + zz}$, & qu'elle donne par conſéquent la plus grande racine de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.

344. Il eſt encore poſſible de prendre un numérateur, qui faſſe connoître par la ſérie récurrente telle racine qu'on

voudra de l'équation ; il faut pour cela que le numérateur ſoit le produit de tous les facteurs du dénominateur, excepté celui, auquel répond la racine cherchée. Ainſi, en prenant dans le premier exemple le numérateur $1 - 3z + zz$; la fraction $\frac{1 - 3z + zz}{1 - 6z + 10z^2 - 3z^3}$ donnera cette ſérie récurrente 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c, laquelle formant une progreſſion géométrique donne tout de ſuite la racine $x = 3$; car cette fraction eſt égale à cette fraction ſimple $\frac{1}{1 - 3z}$. Il ſuit de-là que ſi les premiers termes qu'on peut prendre à volonté, ſont tels qu'ils forment une progreſſion géométrique, dont l'expoſant ſoit égal à une racine de l'équation, toute la ſérie récurrente ſera géométrique, & donnera par conſéquent cette racine, quoiqu'elle ne ſoit ni la plus grande ni la plus petite.

345. Ainſi, pour n'être pas expoſés, lorſque nous cherchons la plus grande ou la plus petite racine, à trouver, contre notre attente, une autre racine par la ſérie récurrente, il faut choiſir un numérateur qui n'ait aucun facteur commun avec le dénominateur ; ce qui ſe fera, en prenant l'unité pour numérateur. Donc le premier terme de la ſérie ſera = 1, & avec celui-là, on déterminera tous les autres, d'après l'échelle de relation. De cette maniere on ſera toujours sûr de trouver la racine de l'équation, la plus grande ou la plus petite, ſelon qu'on le deſire. Ainſi, s'étant propoſé l'équation $y^3 * - 3y + 1 = 0$, dont on veut connoître la plus grande racine, au moyen de l'échelle de relation $0, +3, -1$, on formera, en commençant par l'unité, la ſérie récurrente ſuivante

$$1 - 0 + 3 - 1 + 9 - 6 + 28 - 27 + 90 - 109 + 297 - 417 + 1000 - 1548 + 3417 - 5644 + \&c.$$

laquelle tend manifeſtement à un rapport conſtant, & fait voir que la plus grande racine y eſt négative, & qu'elle eſt à-peu-près $y = \frac{-5644}{3417} = -1,651741$, tandis qu'elle devoit être $= -1,867938 52$. On a vu auparavant la raiſon pour laquelle on arrive ſi lentement à la vraie valeur, c'eſt que l'autre racine n'eſt pas beaucoup moindre que la plus grande, & que d'ailleurs elle eſt poſitive.

346. Après avoir bien examiné ce que nous avons dit en général, & à l'occaſion des exemples que nous avons rapportés, on reconnoîtra ſans peine la grande utilité de cette méthode pour trouver les racines des équations. Nous avons ſuffiſamment indiqué les moyens qui peuvent abréger les opérations, & les rendre plus faciles, de ſorte que nous n'aurions rien à ajouter, s'il ne reſtoit à examiner les cas, où l'équation a des racines égales ou imaginaires. Suppoſons donc que le dénominateur de la fraction

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c.}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c.}$$

renferme le facteur $(1 - pz)^2$, outre les autres facteurs $1 - qz$, $1 - rz$, &c. Le terme général de la ſérie qui en proviendra, ſera donc $= z^n[\,n+1)\,A p^n + B p^n + C q^n + \&c]$. Pour ſavoir quelle valeur en réſultera, lorſque n eſt un nombre très-grand, diſtinguons deux cas, celui où p eſt un nombre plus grand que les autres q, r, &c, & celui où p ne donne pas la plus grande racine. Dans le premier cas, où p eſt la racine la plus grande, à cauſe du coëfficient $(n + 1)$, les autres termes $B p^n + C q^n$ &c, ne s'évanouiront pas à l'égard du premier, auſſi-tôt qu'auparavant; & ſi q eſt $> p$, le terme
(tt) $(n + 1) A p^n$ ne diſparoîtra que tard devant $C q^n$, & par conſéquent, on aura beaucoup plus de peine à trouver la plus grande racine.

EXEMPLE I.

Soit propoſée l'équation $x^3 - 3xx + 4 = 0$, *dans laquelle la plus grande racine* 2 *ſe trouve deux fois.*

Cherchons donc la plus grande racine ſuivant la méthode que nous avons exposée ci-dessus, en développant la fraction

$$\frac{1}{1 - 3z * 4z^3}$$

en une série récurrente ; qui sera

1, 3, 9, 23, 57, 135, 313, 711, 1593, &c.

Il est visible que chaque terme divisé par le précédent, donne un quotient plus grand que deux. La raison s'en déduit très-facilement du terme général ; car en rejettant les puissances Cq^n, &c, on aura le terme correspondant à la puissance z^n, $= (n + 1)Ap^n + Bp^n$, & le suivant $= (n + 2)Ap^{n+1} + Bp^{n+1}$, lequel étant divisé par le premier, donne $\frac{(n + 2)A + B}{(n + 1)A + B} p > p$, à moins que n ne soit infini.

Exemple II.

Soit proposée maintenant l'équation $x^3 - xx - 5x - 3 = 0$, *dont la plus grande racine* $= 3$, *& les deux autres égales* $= - 1$.

Cherchons la plus grande racine par le moyen d'une série récurrente, dont l'échelle de relation est $1 + 5 + 3$; ce qui donne

1, 1, 6, 14, 47, 135, 412, 1228, &c.

On trouve assez-tôt la valeur 3, parce que les puissances de la plus grande racine $- 1$, quoique multipliées par $(n + 1)$ disparoissent de bonne heure auprès des puissances de 3.

Exemple III.

Mais, si on se proposoit l'équation $x^3 + xx - 8x - 12 = 0$, *dont les racines sont* $3, - 2, - 2$; on trouvera beaucoup plus tard la plus grande racine. En effet, on aura la série

1, — 1, 9, — 5, 65, 3, 457, 347, 3345, 4915, &c.

qu'on devroit continuer encore bien au-delà, avant de s'appercevoir que la racine qui doit en résulter, $= 3$.

347. Semblablement, s'il y a dans l'équation trois facteurs égaux, de sorte qu'un facteur du dénominateur soit $(1-pz)^3$, & les autres $1-qz$, $1-rz$, &c, le terme général de la série sera $= z^n \left(\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ \ 2} Ap^n + (n+1)Bp^n + Cp^n + Dq^n + Cr^n + \&c\right)$. Donc si p est la plus grande racine, & que n soit un nombre assez grand, pour que les puissances q^n, r^n, &c, disparoissent devant p^n, alors la série récurrente donnera la racine $=$

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)A+(n+2)B+C}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)A+(n+1)B+C}p,$$

qui n'indiquera la vraie racine de p, que lorsque n sera un nombre très-grand & presque infini. Or cette valeur de la racine $= p + \frac{(n+2)A+B}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)A+(n+1)B+C}p.$ Mais, si p n'est pas la racine la plus grande, on éprouvera beaucoup plus d'embarras à la trouver, d'où il suit que les équations, qui renferment des racines égales, se résolvent par les séries récurrentes, en suivant cette méthode beaucoup plus difficilement, que si toutes les racines étoient inégales entr'elles.

348. Examinons maintenant la nature d'une série récurrente continuée à l'infini, lorsque le dénominateur de la fraction contient des facteurs imaginaires. Soit donc la fraction

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\&c.}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\&c.}$$

dont le dénominateur ait pour facteurs réels, $1-qz$, $1-rz$, &c, & de plus le facteur trinome $1-2pz\,cos.\,\phi+ppzz$, qui renferme deux facteurs simples imaginaires. Donc, si la série récurrente, qui résulte de cette fraction, est

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots\ldots+Pz^n+Qz^{n+1},$$

on aura, suivant ce que nous avons exposé plus haut, le coëfficient $P = \frac{A.\mathit{fin.}\,(n+1)\varphi + B.\mathit{fin.}\,n\varphi}{\mathit{fin.}\,\varphi}\, p^n + C q^n + D r^n +$ &c. Donc, ſi le nombre p eſt plus petit que chacun des autres, q, r, &c, de maniere que la plus grande racine de l'équation

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \&c. = 0$$

ſoit réelle, elle ſe trouvera par les ſéries récurrentes, comme ſi aucune racine n'étoit imaginaire.

349. Donc l'exiſtence des racines imaginaires n'empêchera point de trouver la plus grande racine réelle, pourvu que le produit des deux d'entr'elles, qui compoſent un facteur réel, ne ſoit pas plus grand que le quarré de la plus grande racine. Mais, ſi le produit de deux de ces racines imaginaires égale ou ſurpaſſe le quarré de la plus grande racine réelle, alors la méthode précédente n'apprendra rien, puiſque la puiſſance p^n ne diſparoît jamais devant une puiſſance ſemblable de la plus grande racine, quoique la ſérie ſoit prolongée à l'infini. Pour plus d'éclairciſſement, nous avons jugé à propos de donner quelques exemples. (*uu*)

Exemple I.

Soit propoſée l'équation $x^3 - 2x - 4 = 0$, *dont il s'agit de trouver la plus grande racine.*

Cette équation ſe décompoſe en deux facteurs $(x-2)(x^2+2x+2)$; ce qui nous apprend qu'elle a une racine réelle 2 & deux autres imaginaires, dont le produit 2 eſt moindre que le quarré de la racine réelle. La racine réelle pourra donc ſe trouver en ſuivant la même marche qu'auparavant. Formons en conſéquence une ſérie récurrente avec l'échelle de relation 0, + 2, + 4, elle ſera

$$1, 0, 2, 4, 4, 16, 24, 48, 112, 192, 416, 832, \&c.$$

d'où l'on peut conclure aſſez facilement la racine réelle 2.

EXEMPLE II.

Soit proposée l'équation $x^3 - 4xx + 8x - 8 = 0$, *dont une racine réelle est* 2, *& le produit des deux imaginaires* $= 4$, *& est par conséquent égal au quarré de la racine réelle* 2.

Cherchons donc cette racine par une série récurrente, & pour plus de facilité, faisons $x = 2y$, afin d'avoir $y^3 - 2yy + 2y - 1 = 0$; ce qui donnera la série récurrente

1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, &c.

Comme les mêmes termes reviennent continuellement, on n'en peut rien conclure, sinon ou que la plus grande racine n'est pas réelle, ou qu'il y a des imaginaires dont le produit égale ou surpasse le quarré de la racine réelle.

EXEMPLE III.

Soit encore proposée l'équation $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$, *dont la racine réelle est* 1, *& le produit des imaginaires* $= 2$.

Formons donc avec l'échelle de relation $3, -4, +2$, la série

1, 3, 5, 5, 1, −7, −15, −15, 1, 33, 65, 65, 1, &c.

Comme les termes y sont tantôt positifs, & tantôt négatifs, on n'en pourra nullement déduire la racine réelle 1. Mais ces retours successifs de signes apprennent toujours, que la racine que devoit donner la série, est imaginaire; car ici les racines imaginaires sont plus grandes en puissance que la racine réelle 1.

350. Supposons donc dans la fraction générale le produit pp de deux racines imaginaires plus grand que le quarré d'aucune racine réelle, de maniere que les autres puissances q^n, r^n, &c, disparoissent à l'égard de p^n, si n est un nombre infini. Dans ce cas, P deviendra $=$

$$\frac{A \sin(n+1)\varphi + B.\sin. n\varphi}{\sin. \varphi} p^n \text{ \& } Q = \frac{A.\sin.(n+2)\varphi + B.\sin.(n+1)\varphi}{\sin. \varphi} p^{n+1},$$

&

& par conséquent $\frac{Q}{P} = \frac{A. fin. (n+2)\varphi + B. fin. (n+1)}{A. fin. (n+1)\varphi + B. fin. n\varphi} p$.

Cette expression n'aura jamais une valeur constante, quoique n soit un nombre infini; car les sinus des angles varient continuellement, de sorte qu'ils sont tantôt positifs & tantôt négatifs.

351. Cependant, si on prend de même les fractions suivantes $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$, & qu'on élimine A & B, le nombre n sortira en même temps du calcul. En effet, on trouvera $Ppp + R = 2Qp. cof. \varphi$; & par conséquent $cof. \varphi = \frac{Ppp + R}{2Qp}$; mais on aura de même $cof. \varphi = \frac{Qpp + S}{2Rp}$; & en comparant ces deux valeurs, on trouvera $p = \sqrt{\frac{RR - QS}{QQ - PR}}$ & $cof. \varphi = \frac{QR - PS}{2\sqrt{(Q^2 - PR)(R^2 - QS)}}$. Donc, si la série récurrente a été assez prolongée, pour que les puissances des autres racines s'évanouissent à l'égard de p^n, on pourra trouver de cette maniere le facteur trinome $1 - 2pz\, cof. \varphi + ppzz$.

352. Comme ce calcul pourroit embarrasser les Commençans, je vais le faire ici tout au long. De la valeur trouvée de $\frac{Q}{P}$, on conclura $A. Pp\, fin. (n+2)\varphi + B. Pp\, fin. (n+1)\varphi = A. Q\, fin. (n+1)\varphi + B. Q\, fin. n\varphi$. Donc $\frac{A}{B} = \frac{Q\, fin. n\varphi - Pp\, fin. (n+1)\varphi}{Pp\, fin. (n+2)\varphi - Q\, fin. (n+1)\varphi}$. Par la même raison, on aura $\frac{A}{B} = \frac{R\, fin. (n+1)\varphi - Qp\, fin. (n+2)\varphi}{Qp\, fin. (n+3)\varphi - R\, fin. (n+2)\varphi}$. En égalant ces deux valeurs, on aura

$$0 = QQp\, fin. n\varphi\, fin. (n+3)\varphi - QR\, fin. n\varphi\, fin. (n+2)\varphi - PQpp\, fin. (n+1)\varphi\, fin. (n+3)\varphi - QQp\, fin. (n+1)\varphi\, fin. (n+2)\varphi + QR\, fin. (n+1)\varphi\, fin. (n+1)\varphi + PQpp\, fin. (n+2)\varphi\, fin. (n+2)\varphi.$$

Mais, comme $fin. a\, fin. b = \frac{1}{2} cof. (a-b) - \frac{1}{2} cof. (a+b)$, on aura $o = \frac{1}{2} QQp(cos. 3\varphi - cos. \varphi) + \frac{1}{2} QR(1 - cos. 2\varphi) + \frac{1}{2} PQpp(1 - cos. 2\varphi)$, & en divisant par $\frac{1}{2} Q$, $(Ppp + R)(1 - cos. 2\varphi) = Qp(cos. \varphi - cos. 3\varphi)$. Mais $cos. \varphi = cos. 2\varphi\, cos. \varphi + sin. 2\varphi\, sin. \varphi$, & $cos. 3\varphi = cos. 2\varphi\, cos. \varphi - sin. 2\varphi\, sin. \varphi$, & partant $cos. \varphi - cos. 3\varphi = 2\, sin. 2\varphi\, sin. \varphi = 4\, sin. \varphi^2\, cos. \varphi$ & $1 - cos. 2\varphi = 2\, sin. \varphi^2$. Donc $Ppp + R = 2Qp\, cos. \varphi$ & $cos. \varphi = \frac{Ppp + R}{2Qp}$, & de même $cos. \varphi = \frac{Qpp + S}{2Rp}$, d'où l'on déduit les valeurs indiquées ci-dessus, savoir : $p = \sqrt{\frac{RR - QS}{QQ - PR}}$ & $cos. \varphi = \frac{QR - PS}{2\sqrt{(Q^2 - PR)(RR - QS)}}$.

353. Si le dominateur de la fraction qui forme la série récurrente, renferme plusieurs facteurs trinomes égaux entr'eux, on voit par la forme générale que nous avons donnée auparavant que la recherche des racines devient beaucoup plus incertaine. Cependant, si on a déjà une valeur approchée d'une racine réelle quelconque, en transformant l'équation, on obtiendra toujours une valeur de la même racine beaucoup plus approchée. Il faudra faire x égale à la valeur déjà trouvée, $+ y$, & chercher pour y la plus petite racine de la nouvelle équation, laquelle ajoutée à la premiere, donnera la vraie valeur de x.

Exemple.

Soit proposée l'équation $x^3 - 3xx + 5x - 4 = 0$, *dont on sait qu'une des racines est à-peu-près* $= 1$, *puisqu'en faisant* $x = 1$, *il en résulte l'équation* $x^3 - 3xx + 5x - 4 = -1$.

Soit $x = 1 + y$, l'équation deviendra $1 - 2y - y^3 = 0$, & pour trouver la plus petite racine, formons une série récurrente dont l'échelle de relation soit $2, 0, + 1$, & qui sera

1, 2, 4, 9, 20, 44, 97, 214, 472, 1041, 2296, &c.

Par conséquent la plus petite racine de y sera à-peu-près $\frac{1041}{2296} = 0,453397$; de sorte que $x = 1,453397$, valeur, qu'il seroit bien difficile d'avoir plus approchée par une autre méthode.

354. Si une série récurrente quelconque devient à la fin à très-peu de chose près une progression géométrique, alors la loi de la progression fera connoître facilement l'équation, qui aura pour racine le quotient, qui résulte de la division d'un terme par celui qui précéde. Soient

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ T, \text{ \&c.}$$

des termes de la série récurrente déjà très-éloignés de l'origine, tels qu'ils se confondent avec une progression géométrique, & soit $T = \alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P$, ou, soit l'échelle de relation, α, β, γ, δ. Supposons la valeur de la fraction $\frac{Q}{P} = x$, on aura $\frac{R}{P} = xx$; $\frac{S}{P} = x^3$ & $\frac{T}{P} = x^4$. Ces quantités substituées dans l'équation précédente donneront

$$x^4 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

d'où il suit que le quotient $\frac{Q}{P}$ donne une racine de l'équation trouvée. C'est ce que nous indique la méthode précédente, en même temps qu'elle nous apprend que $\frac{Q}{P}$ exprime la plus grande racine de l'équation.

355. Cette méthode peut encore être employée quelquefois utilement, pour trouver des racines d'une équation, dont le nombre de termes est infini. Pour en donner un exemple, soit proposée l'équation $\frac{1}{2} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \text{\&c}$, dont la plus petite racine z exprime un arc de 30°, ou le sixieme de la demi-circonférence d'un cercle.

Ramenons donc l'équation à cette forme

$$1 - 2z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{60} + \frac{z^7}{2520} - \&c. = 0$$

formons-en une série récurrente, dont l'échelle de relation est infinie, savoir

$$2, 0, -\frac{1}{3}, 0, +\frac{1}{60}, 0, -\frac{1}{2520}, 0 \ \&c.$$

Cette série récurrente sera

$$1, 2, 4, \frac{23}{3}, \frac{44}{3}, \frac{1681}{60}, \frac{2408}{45} \ \&c.$$

On aura donc à-peu-près $z = \frac{1681 \cdot 45}{2408 \cdot 60} = \frac{1681 \cdot 3}{2408 \cdot 4} = \frac{5043}{9632} = 0{,}52356$. Mais par le rapport connu de la circonférence au diametre, on devroit avoir $z = 0{,}523598$; de maniere que la racine trouvée différe de la véritable seulement de $\frac{3}{100000}$. Au reste, on a pu faire usage de la méthode dans cette équation, parce que toutes ses racines sont réelles, & que les autres ne laissent pas de différer de la plus petite. Mais comme cette condition a rarement lieu dans les équations infinies, il y aura peu de cas, où cette méthode puisse être employée pour les résoudre.

CHAPITRE XVIII.

Des Fractions continues.

356. Après avoir traité assez au long dans les Chapitres précédents des séries infinies, & des produits composés de facteurs infinis, il convient de dire un mot d'une troisieme espece de formules infinies, que donnent les divisions ou fractions continues. Car quoique cette partie ait été peu cultivée jusqu'à présent, je ne doute pas que l'usage n'en devienne très-grand dans l'analyse infinitésimale. Quelques essais que j'en ai faits m'autorisent à le croire. Cette théorie ne laissera pas d'être particulierement d'un assez grand secours pour l'Arithmétique & l'Algebre ordinaire; c'est ce que je me propose d'exposer & d'expliquer en peu de mots dans ce Chapitre.

357. J'appelle fraction continue une fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier joint à une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier & une fraction formée de la même maniere que les précédentes, ainsi de suite, soit qu'il y ait un nombre infini de fractions, soit qu'il n'y en ait qu'un nombre fini.

Telles sont les expressions suivantes :

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\&c.}}}}} \quad \text{ou} \quad a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\&c.}}}}}$$

Dans la premiere, les numérateurs de toutes les fractions sont l'unité; c'est celle que nous considérerons principalement ; & dans la ſeconde, les numérateurs ſont des nombres quelconques.

358. Après avoir ainſi donné la forme des fractions continues, voyons d'abord comment on peut obtenir leur valeur ſous la forme ordinaire. Pour faciliter cette recherche, allons, par degrés, & interrompons la ſuite : d'abord à la premiere, enſuite à la ſeconde, puis à la troiſieme fraction ; cela poſé, il eſt clair qu'on aura

$$a = a$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{abc+a+c}{bc+1}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}} = \frac{abcde+abe+ade+cde+abc+a+c+e}{bcde+be+de+bc+1}$$

&c.

359. Quoique dans ces fractions ordinaires, on ne reconnoiſſe pas facilement la loi ſuivant laquelle le numérateur & le dénominateur ſont compoſés des lettres a, b, c, d, &c. cependant, avec un peu d'attention, on pourra découvrir comment chaque fraction dérive des précédentes. En effet, chaque numérateur eſt la ſomme du dernier numérateur multiplié par une nouvelle lettre, & de l'avant-dernier numérateur ſimple ; & la même loi s'obſerve pour les dénominateurs. Ayant donc écrit par ordre les lettres a, b, c, d, &c.

on en formera facilement les fractions, de cette maniere :

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+a+c}{bc+1}; & \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d} \end{array}$$

Chaque numérateur se trouve en multipliant le dernier par la lettre qui est écrite au-dessus de celui-ci, & en ajoutant au produit l'avant-dernier. Il en est de même des dénominateurs ; mais pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans la loi, j'ai écrit à la tête la fraction $\frac{1}{0}$, qui, quoiqu'elle ne dérive pas de la fraction continue, est propre pourtant à rendre plus sensible la loi de la progression. Au reste, chaque fraction exprime la valeur de la fraction continue en supposant qu'elle ait été continuée inclusivement jusqu'à la lettre écrite au-dessus du terme qui précede.

360. On obtiendra semblablement pour l'autre formule des fractions continues, savoir :

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \&c.}}}}}$$

les résultats suivants, selon le nombre de termes qu'on prendra,

$$a = a$$

$$a + \frac{\alpha}{b} = \frac{ab+\alpha}{b}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c}} = \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d}}} = \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b}$$

&c.

Chacune de ces fractions se trouvera au moyen des deux précédentes, comme on le voit ici :

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+\alpha}{b}; & \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}; & \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

361. Pour former ces fractions, écrivez au-dessus les indices a, b, c, d, &c. écrivez encore la premiere fraction $\frac{1}{0}$, & la seconde $\frac{a}{1}$; vous aurez alors chacune des suivantes en multipliant le numérateur de la derniere par l'indice supérieur, & celui de l'avant-derniere par l'indice inférieur correspondant ; la somme de ces produits sera le numérateur de la fraction demandée. De même le dénominateur sera formé du produit du dénominateur précédent par l'indice supérieur, & de celui de l'avant-dernier par l'indice inférieur ; & chaque fraction trouvée de cette maniere donnera la valeur de la fraction continue, en supposant qu'on l'ait continuée inclusivement jusqu'au dénominateur qui est écrit au-dessus de la fraction précédente.

362. Donc, si l'on poursuit la formation de ces fractions jusqu'à ce que la fraction continue ne fournisse plus d'indices, la derniere fraction, qu'on obtiendra, donnera la vraie valeur de la fraction continue. Les fractions précédentes approcheront de plus en plus de cette valeur, & donneront par conséquent une approximation très-suffisante. En effet, supposons la vraie valeur de la fraction continue

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\&c.}}}} = x$$

Il est évident que la premiere fraction $\frac{1}{0}$ est plus grande que x; mais la seconde $\frac{a}{1}$ sera plus petite ; la troisieme $a+\frac{\alpha}{b}$ sera

sera de nouveau plus grande, & la quatrieme plus petite; ainsi, ces fractions seront alternativement plus grandes & plus petites que x. Au reste, il est clair que chaque fraction approche plus près de la vraie valeur de x, qu'aucune des (vv)
précédentes; d'où il suit qu'on peut, de cette maniere, avoir facilement & promptement la valeur approchée de x, quand même la fraction continue seroit prolongée à l'infini, pourvu que les numérateurs α, β, γ, δ, &c, ne croissent pas trop; mais si tous les numérateurs égalent l'unité, l'approximation ne peut manquer d'avoir lieu.

363. Pour faire mieux sentir comment on approche de la vraie valeur de la fraction continue, prenons les différences des fractions trouvées ci-dessus. D'abord, en négligeant la premiere $\frac{1}{0}$, la différence entre la seconde & la troisieme $= \frac{\alpha}{b}$; la quatrieme soustraite de la troisieme donne pour reste $\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$, & la quatrieme soustraite de la cinquieme donne $\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$, &c. Ainsi la valeur de la (xx)
fraction continue sera représentée par une suite de la forme ordinaire, de maniere que

$$x = a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+b)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \text{\&c.}$$

série qui sera limitée, toutes les fois que la fraction continue ne se prolongera pas à l'infini.

364. Nous avons donc un moyen de convertir une fraction continue en une série, dont les termes ont alternativement les signes + & — lorsque le premier a manque.

En effet, soit

$$x = \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \text{\&c.}}}}}}$$

on aura, par ce qui précéde

$$x = \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha \beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha \beta \gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha \beta \gamma \delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta \delta)} + \&c.$$

D'où il suit que si les numérateurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ne croissent pas, si, par exemple, ils sont égaux à l'unité, & que les dénominateurs a, b, c, d, &c. soient des nombres entiers quelconques positifs, la valeur de la fraction continue sera donnée par une série très-convergente.

365. Cela posé, on pourra réciproquement changer en fraction continue une suite de termes qui ont alternativement des signes différents, ou trouver une fraction continue, dont la valeur soit égale à la somme de la série proposée. Par exemple, si on a l'équation

$$x = A - B + C - D + E - F + \&c.$$

la comparaison de cette suite avec les termes correspondants de la série, qui représente la fraction continue, donnera les égalités suivantes :

$$A = \frac{\alpha}{b}; \qquad\qquad \alpha = Ab$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{bc+\beta}; \qquad\qquad \beta = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma b}{bcd+\beta d+\gamma b}; \qquad \text{Donc} \qquad \gamma = \frac{Cd(bc+\beta)}{b(B-C)}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta(bc+\beta)}{bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta}; \qquad \delta = \frac{De(bcd+\beta d+\gamma b)}{(bc+b)(C-D)}.$$

&c.

Mais puisque $\beta = \frac{Bbc}{A-B}$, on aura $bc+\beta = \frac{Abc}{A-B}$; d'où $\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$. Ensuite $bcd+\beta d+\gamma b = (bc+\beta)d + \gamma b = \frac{Abcd}{A-B} + \frac{ACbcd}{(A-B)(B-C)} = \frac{ABbcd}{(A-B)(B-C)}$; donc

$\frac{bcd+\beta d+\gamma b}{bc+\beta} = \frac{Bd}{B-C}$ & $\delta = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$; on trouvera de même $\varepsilon = \frac{DEef}{(C-D)(D-E)}$, ainsi de suite.

366. Pour mettre cette loi plus en évidence, supposons

$$P = b$$
$$Q = bc + \beta$$
$$R = bcd + \beta d + \gamma b$$
$$S = bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta$$
$$T = bcdef + \&c.$$
$$V = bcdefg + \&c.$$

La loi que suivent ces expressions nous apprend que

$$Q = Pc + \beta$$
$$R = Qd + \gamma P$$
$$S = Re + \delta Q$$
$$T = Sf + \varepsilon R$$
$$V = Tg + \zeta S$$
&c.

Et par conséquent, en introduisant ces nouvelles lettres, on aura

$$x = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha\beta}{PQ} + \frac{\alpha\beta\gamma}{QR} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{RS} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{ST} - \&c.$$

367. Ainsi, puisque nous supposons

$$x = A - B + C - D + E - F + \&c.$$

nous aurons

$$A = \frac{\alpha}{P}; \quad \alpha = AP$$
$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{Q}; \quad \beta = \frac{BQ}{A}$$
$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma P}{R}; \quad \gamma = \frac{CR}{BP}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta Q}{S}; \quad \delta = \frac{DS}{\iota Q}$$

$$\frac{E}{D} = \frac{\epsilon R}{T}; \quad \epsilon = \frac{ET}{DR}$$

&c. &c.

Et en prenant les différences

$$A - B = \alpha \frac{(Q - \beta)}{PQ} = \frac{\alpha c}{Q} = \frac{APc}{Q}$$

$$B - C = \alpha \beta \frac{(R - \gamma P)}{PQR} = \frac{\alpha \beta d}{PR} = \frac{BQd}{R}$$

$$C - D = \alpha \beta \gamma \frac{(S - \delta Q)}{QRS} = \frac{\alpha \beta \gamma \epsilon}{QS} = \frac{CRe}{S}$$

$$D - E = \alpha \beta \gamma \delta \frac{(T - \epsilon R)}{RST} = \frac{\alpha \beta \gamma \delta f}{RT} = \frac{DSf}{T}$$

&c. &c. &c.

Si nous multiplions ces résultats deux à deux, nous aurons les produits

$$(A - B)(B - C) = ABcd\frac{P}{R}, \ \& \ \frac{R}{P} = \frac{ABcd}{(A - B)(B - C)}$$

$$(B - C)(C - D) = BCde\frac{Q}{S}, \ \& \ \frac{S}{Q} = \frac{BCde}{(B - C)(C - D)}$$

$$(C - D)(D - E) = CDef\frac{R}{T}, \ \& \ \frac{T}{R} = \frac{CDef}{(C - D)(D - E)}$$

&c.

Ainsi, puisque $P = b$, $Q = \frac{\alpha c}{A - B} = \frac{Abc}{A - B}$; il s'ensuit que

$$\alpha = Ab$$

$$\beta = \frac{Bbc}{A - B}$$

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A - B)(B - C)}$$

$$\delta = \frac{BDde}{(B - C)(C - D)}$$

$$\epsilon = \frac{CEef}{(C - D)(D - E)}$$

&c.

368. Les valeurs des numérateurs α, β, γ, δ, &c. étant donc trouvées, les dénominateurs b, c, d, e, &c. restent arbitraires; il convient seulement de les prendre tels qu'étant eux-mêmes des nombres entiers, ils donnent aussi des nombres entiers pour α, β, γ, δ, &c; ce qui dépend encore de la nature des nombres A, B, C, &c. suivant qu'ils sont entiers ou fractionnaires. Supposons d'abord qu'ils soient entiers, on satisfera à la condition demandée en faisant

$$\begin{array}{lcl} b = 1 & & \alpha = A \\ c = A - B & & \beta = B \\ d = B - C & \text{d'où} & \gamma = AC \\ e = C - D & & \delta = BD \\ f = D - E & & \varepsilon = CE \\ \quad\&c. & & \quad\&c. \end{array}$$

Par conséquent, si

$$x = A - B + C - D + E - F + \&c.$$

la même valeur de x pourra être exprimée par une fraction continue de cette maniere,

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B + \cfrac{AC}{B - C + \cfrac{BD}{C - D + \cfrac{CE}{D - E + \&c.}}}}}$$

369. Mais si tous les termes de la série sont des nombres fractionnaires, de sorte que

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \&c.$$

on aura pour α, β, γ, δ, &c. les valeurs suivantes :

$$\alpha = \frac{b}{A}; \quad \beta = \frac{Abc}{B - A}; \quad \gamma = \frac{B^2cd}{(B - A)(C - B)};$$

$$\delta = \frac{C^2 de}{(C-B)(D-C)}\,;\ \varepsilon = \frac{D^2 ef}{(D-C)(E-D)}\,;\ \&c.$$

Faisons donc

$$\begin{array}{lcl} b = A\,; & & \alpha = 1 \\ c = B - A\,; & \text{\& par conséquent} & \beta = AA \\ d = C - B\,; & & \gamma = BB \\ e = D - C\,; & & \delta = CC \end{array}$$

&c.

& la fraction continue sera

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{AA}{B - A + \cfrac{BB}{C - B + \cfrac{CC}{D - C + \&c.}}}}$$

Exemple I.

Il s'agit de transformer en fraction continue la série infinie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.$$

Donc $A = 1$, $B = 2$; $C = 3$; $D = 4$, &c ; & comme la valeur de la série proposée $= l\,2$, on aura

$$l\,2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \cfrac{25}{1 + \&c.}}}}}}$$

Exemple II.

Qu'il s'agisse de transformer la série infinie $\frac{\pi}{4} =$

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ &c. *dans laquelle* π *exprime la circonférence d'un cercle dont le diametre* $= 1$

En substituant pour A, B, C, D, &c. les nombres $1, 3, 5, 7$, &c. on aura

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{\&c.}}}}}}$$

& en renversant la fraction,

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{\&c.}}}}}$$

Expression que BROUNCKER a donnée le premier pour la quadrature du cercle.

EXEMPLE III.

Soit proposée la série infinie

$$x = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \text{\&c.}$$

à cause de $A = m$; $B = m + n$; $C = m + 2n$, &c. elle se change en cette fraction continue,

$$x = \cfrac{1}{m + \cfrac{mm}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \cfrac{(m+3n)^2}{n + \text{\&c.}}}}}}$$

d'où l'on conclud, en renverſant,

$$\frac{1}{x} - m = \cfrac{mm}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \cfrac{(m+3n)^2}{n + \&c.}}}}$$

EXEMPLE IV.

Nous avons trouvé auparavant (art. 178) l'équation

$$\frac{\pi.\ cof.\ \frac{m\pi}{n}}{n.\ fin.\ \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \&c.$$

Ainſi, nous aurons, pour former la fraction continue, $A = m$; $B = n - m$; $C = n + m$; $D = 2n - m$; &c; & conſéquemment

$$\frac{\pi.\ cof.\ \frac{m\pi}{n}}{n.\ fin.\ \frac{m\pi}{n}} = \cfrac{1}{m + \cfrac{mm}{n - 2m + \cfrac{(n-m)^2}{2m + \cfrac{(n+m)^2}{n - 2m + \cfrac{(2n-m)^2}{2m + \cfrac{(2n+m)^2}{n - 2m + \&c.}}}}}}$$

370. S'il entre des facteurs continus dans la formation de la ſérie propoſée; qu'on ait, par exemple,

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - \&c.$$

on aura les égalités ſuivantes:

$$\alpha = \frac{b}{A};\ \beta = \frac{bc}{B-1};\ \gamma = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)};\ \delta = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)};$$
$$\epsilon = \frac{Def}{(D-1)(E-1)},\ \&c.$$

Soit

Soit donc

$$\begin{array}{llll} b = A; & & & \alpha = 1 \\ c = B - 1; & & & \beta = A \\ d = C - 1; & \text{\& partant} & & \gamma = B \\ e = D - 1; & & & \delta = C \\ f = E - 1; & & & \varepsilon = D \\ & \text{\&c.} & & \end{array}$$

il s'enſuivra que

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A}{B - 1 + \cfrac{B}{C - 1 + \cfrac{C}{D - 1 + \cfrac{D}{E - 1 + \text{\&c.}}}}}}$$

EXEMPLE I.

En ſuppoſant que e repréſente le nombre dont le logarithme $= 1$; nous avons trouvé auparavant

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{\&c.}$$

ou

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{\&c.}$$

Cette ſérie ſera changée en fraction continue, en faiſant $A = 1$; $B = 2$; $C = 3$; $D = 4$, &c; & par conſéquent

$$1 - \frac{1}{e} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \text{\&c.}}}}}}}$$

ou bien, en renverſant, & formant par là une ſuite parfaitement ſymmétrique dès ſon origine,

$$\frac{1}{e-1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \&c.}}}}}$$

EXEMPLE II.

Nous avons auſſi trouvé que le coſinus d'un arc ſuppoſé égal au rayon $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 12} - \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 30} + \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 30 \cdot 56} - \&c.$

Si donc on fait $A=1$, $B=2$; $C=12$; $D=30$; $E=56$, &c. & le coſinus de l'arc égal au rayon $=x$, on aura

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \&c.}}}}}$$

ou

$$\frac{1}{x} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \&c.}}}}$$

371. Suppoſons à préſent une ſérie combinée avec une progreſſion géométrique, par exemple,

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 - Fz^5 + \&c.$$

dans ce cas

$$\alpha = Ab;\ \beta = \frac{Bbcz}{A - Bz};\ \gamma = \frac{ACcdz}{(A-Bz)(B-Cz)};$$

$$\delta = \frac{BDdez}{(B-Cz)(C-Dz)};\ \varepsilon = \frac{CEefz}{(C-Dz)(D-Ez)};\ \&c.$$

Supposons

$$b = 1, \quad c = A - Bz, \quad d = B - Cz, \quad e = C - Dz$$

& par conséquent

$$\alpha = A, \quad \beta = Bz, \quad \gamma = ACz, \quad \delta = BDz$$

nous en conclurons

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{Bz}{A - Bz + \cfrac{ACz}{B - Cz + \cfrac{BDz}{C - Dz + \&c.}}}}$$

372. Mais pour traiter ce sujet avec plus de généralité, supposons qu'on ait

$$x = \frac{A}{L} - \frac{By}{Mz} + \frac{Cy^2}{Nz^2} - \frac{Dy^3}{Oz^3} + \frac{Ey^4}{Pz^4} - \&c.$$

nous trouverons, en comparant,

$$\alpha = \frac{Ab}{L};\ \beta = \frac{BLbcy}{AMz - BLy};\ \gamma = \frac{ACM^2cdyz}{(AMz - BLy)(BNz - CMy)};$$

$$\delta = \frac{BDN^2deyz}{(BNz - CMy)(COz - DNy)};\ \&c.$$

Déterminons les valeurs b, c, d, &c. de la maniere suivante :

$$\begin{array}{ll} b = L; & \alpha = A \\ c = AMz - BLy; & \beta = BLLy \\ d = BNz - CMy; \quad \text{donc} & \gamma = ACM^2yz \\ e = COz - DNy; & \delta = BDN^2yz \\ f = DPz - EOy; & \varepsilon = CEO^2yz \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

Nous conclurons de là que la série proposée sera exprimée par la fraction continue suivante

$$x = \cfrac{A}{L + \cfrac{BLLy}{AMz - BLy + \cfrac{ACMMyz}{BNz - CMy + \cfrac{BDNNyz}{COz - DNy + \&c.}}}}$$

373. Suppoſons enfin que la ſérie propoſée ſoit de cette forme

$$x = \frac{A}{L} - \frac{ABy}{LMz} + \frac{ABCy^2}{LMNz^2} - \frac{ABCDy^3}{LMNOz^3} + \&c.$$

nous aurons les équations qui ſuivent :

$$\alpha = \frac{Ab}{L}; \; \beta = \frac{Bbcy}{Mz - By}; \; \gamma = \frac{CMcdyz}{(Mz - By)(Nz - Cy)};$$

$$\delta = \frac{DNdeyz}{(Nz - Cy)(Oz - Dy)}; \; \epsilon = \frac{EOefyz}{(Oz - Dy)(Pz - Ey)};$$

&c.

Faiſons donc, pour trouver des nombres entiers,

$$\begin{array}{lcl} b = Lz; & & \alpha = Az \\ c = Mz - By; & & \beta = BLyz \\ d = Nz - Cy; & \text{d'où} & \gamma = CMyz \\ e = Oz - Dy; & & \delta = DNyz \\ f = Pz - Ey; & & \epsilon = EOyz \\ \&c. & & \&c. \end{array}$$

La ſérie propoſée deviendra

$$x = \cfrac{Az}{Lz + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \&c.}}}}$$

ou bien pour que la loi de la progreſſion ſoit miſe en évidence dès le commencement,

$$\frac{Az}{x} - Ay = Lz - Ay + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \&c.}}}$$

374. On pourra trouver de cette maniere une infinité de fractions continues infinies, dont la vraie valeur eſt aſſignable. Car comme on peut diſpoſer pour cela, d'après ce que nous venons de dire, les ſéries infinies dont on connoît la ſomme;

chacune pourra être convertie en une fraction continue, dont la valeur par conséquent est égale à la somme de cette série. Les exemples, que nous avons donnés ci-dessus, suffisent pour indiquer cet usage. Mais il seroit à desirer qu'on découvrit une méthode, au moyen de laquelle, étant proposée une fraction continue quelconque, on pût en trouver immédiatement la valeur. En effet, quoiqu'une fraction continue puisse être transformée en une série, qu'on peut chercher à sommer par les méthodes connues, cependant ces sortes de séries sont le plus souvent si compliquées, qu'il paroît à peine possible d'en trouver la somme quoiqu'elle soit assez simple.

375. Pour faire voir plus clairement qu'il y a des fractions continues, dont on peut d'ailleurs obtenir facilement la valeur sans qu'on puisse rien conclure des séries infinies qui en dérivent ; prenons pour exemple cette fraction continue

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \&c.}}}}$$

dont tous les dénominateurs sont égaux entr'eux. En effet, si, en suivant le procédé exposé ci-dessus, nous formons les fractions

$$\begin{array}{cccccccc} & 0, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{5}, & \frac{5}{12}, & \frac{12}{29}, & \frac{29}{70}, & \&c. \end{array}$$

nous en déduirons la série

$$x = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{12.29} + \frac{1}{29.70} - \&c,$$

ou, en ajoutant deux termes, celle-ci :

$$x = \frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.29} + \frac{2}{29.169} + \&c.$$

ou

$$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{2.12} - \frac{2}{12.70} - \&c.$$

De plus, puisque

$$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2.2.5} + \frac{1}{2.5.12} - \frac{1}{2.12.29} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{4} - \frac{1}{2.2.5} + \frac{1}{2.5.12} - \frac{1}{2.12.29} + \&c.$$

on aura aussi,

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{1.5} - \frac{1}{1.12} + \frac{1}{5.29} - \frac{1}{12.70} \ \&c.$$

Et quoique ces séries soient très-convergentes, leur valeur cependant ne peut pas se conclure de leur forme.

376. Au reste, pour ces sortes de fractions continues, dans lesquelles les dénominateurs restent les mêmes, ou reviennent périodiquement dans le même ordre, de maniere qu'après avoir ôté quelques termes à la fraction elle demeure encore égale à elle-même, il y a un moyen facile d'en avoir la somme. En effet, puisque dans l'exemple proposé,

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \&c;}}}}$$

on aura $x = \frac{1}{2+x}$, & par conséquent $xx + 2x = 1$ & $x + 1 = \sqrt{2}$, de sorte que la valeur de la fraction continue $= \sqrt{2} - 1$. Or, les fractions que nous avons déduites auparavant de la fraction continue, approchent toujours de plus en plus de cette valeur, & même si rapidement, qu'on trouveroit difficilement un moyen plus expéditif d'obtenir la valeur approchée de cette quantité incommensurable en nombres rationnels. En effet, $\sqrt{2} - 1$ differe si peu de $\frac{29}{70}$, que l'erreur est insensible, puisqu'en extrayant la racine quarrée on trouvera

$$\sqrt{2} - 1 = 0,4142135623 8,$$

tandis que

$$\tfrac{29}{70} = 0,4142857142\,8,$$

de forte que l'erreur n'eft que dans les cent milliemes.

377. Si les fractions continues fourniffent, comme nous venons de le voir, un moyen facile d'avoir par approximation $\sqrt{2}$, elles ferviront de même à trouver les racines approchées des autres nombres. Pour cet effet, foit

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \&c;}}}}}$$

on aura $x = \frac{1}{a+x}$, & $xx + ax = 1$, d'où $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(1 + \frac{1}{4}a^2)} = \frac{\sqrt{(a^2+4)} - a}{2}$. Cette fraction continue fervira donc à trouver la valeur de la racine quarrée du nombre $aa + 4$; & par conféquent en mettant fucceffivement à la place de a les nombres 1, 2, 3, 4, &c, on trouvera les valeurs $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{53}$, &c, ces racines ayant été ramenées à leur forme la plus fimple. On aura donc

$$1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \&c. = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$2,\quad 2,\quad 2,\quad 2,\quad 2,\quad 2,$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \&c. = \sqrt{2} - 1$$

$$3,\quad 3,\quad 3,\quad 3,\quad 3,\quad 3,$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{10},\ \frac{10}{33},\ \frac{33}{109},\ \frac{109}{360},\ \&c. = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

$$4,\quad 4,\quad 4,\quad 4,\quad 4,\quad 4,$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{17},\ \frac{17}{72},\ \frac{72}{305},\ \frac{305}{1292},\ \&c. = \sqrt{5} - 2$$

&c.

Remarquez que l'approximation eſt d'autant plus prompte, que le nombre a eſt plus grand; ainſi, dans le dernier exemple, $\sqrt{5} = 2\frac{305}{1292}$, de maniere que l'erreur n'eſt pas de $\frac{1}{1292 \cdot 5473}$, 5473 étant le dénominateur de la fraction ſuivante $\frac{1202}{5473}$.

378. On ne peut avoir de cette maniere que les racines des nombres qui ſont la ſomme de deux quarrés. Mais, pour étendre cette méthode d'approximation aux autres nombres, ſuppoſons

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \&c.}}}}}}$$

nous aurons

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b+x}} = \frac{b+x}{ab+1+ax}$$, & par conſéquent

$$axx + abx = b$$

&

$$x = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}bb + \tfrac{b}{a}\right)} = \frac{-ab+\sqrt{(a^2b^2+4ab)}}{2a}.$$

On pourra donc trouver à préſent les racines de tous les nombres. Soit, par exemple, $a = 2$; $b = 7$, on aura $x = \frac{-14 + \sqrt{14 \cdot 18}}{4} = \frac{-7 + 3\sqrt{7}}{2}$. Et la valeur de x ſera exprimée à-peu-près par les fractions ſuivantes,

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 7, & 2, & 7, & 2, & 7 \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{7}{15}, & \frac{15}{32}, & \frac{112}{239}, & \frac{239}{510}, \ \&c. \end{array}$$

on aura donc à-peu-près, $\frac{-7+3\sqrt{7}}{2} = \frac{239}{510}$, & $\sqrt{7} = \frac{2024}{765}$

$\frac{2024}{765} = 2,6457516$; or on a véritablement $\sqrt{7} = 2,6457513 1$, de maniere que l'erreur n'est pas de $\frac{3}{10000000}$.

379. Allons plus loin, & supposons

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \&c.}}}}}}}$$

nous en conclurons

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + x}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{c + x}{bx + bc + 1}} = \frac{bx + bc + 1}{(ab+1)x + abc + a + c};$$

donc $(ab+1)xx = (abc + a - b + c)x = bc + 1$ &

$$x = \frac{-abc - a + b - c + \sqrt{[(abc + a + b + c)^2 + 4]}}{2(ab+1)},$$

expression dans laquelle la quantité, qui est sous le radical, est encore la somme de deux quarrés. Donc, cette nouvelle formule ne peut servir qu'à trouver les racines des nombres pour lesquels la premiere auroit suffi. De même, si les quatre lettres a, b, c, d continuellement répétées forment les dénominateurs de la fraction continue, la formule, qui en résultera, n'aura pas d'autre usage que la seconde, qui renfermoit seulement deux lettres, ainsi de suite.

380. Puisque les fractions continues peuvent être employées si utilement pour l'extraction de la racine quarrée, elles serviront donc en même temps à la résolution des équations du second degré; ce qui est évident par le calcul même, puisque x est déterminée par une équation de ce degré; & réciproquement la racine d'une équation du second degré peut être aisément représentée par une fraction continue,

de cette maniere. Soit proposée l'équation

$$x x = a x + b;$$

puisque $x = a + \frac{b}{x}$, en substituant dans le dernier terme la valeur de x déjà trouvée, on aura

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{x}},$$

& en procédant d'une maniere semblable, on trouvera par une fraction continue infinie

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \text{\&c.}}}}$$

expression qui ne peut être employée si commodément, attendu que les numérateurs b ne sont pas égaux à l'unité.

381. Pour montrer à présent l'usage des fractions continues en Arithmétique, remarquons d'abord que toute fraction ordinaire peut être convertie en une fraction continue. En effet, soit proposée la fraction $x = \frac{A}{B}$, dans laquelle A soit $> B$; divisez A par B, & soit le quotient $= a$ & le reste C; divisez par le reste C le diviseur précédent B, soit b, le quotient & D le reste, par lequel il faudra encore diviser le reste, qui précede; continuez ainsi jusqu'à la fin ce procédé, qui est celui qu'on suivroit pour trouver le plus grand commun diviseur de A & de B comme on le voit ici:

$$\begin{array}{l}
B\,)\,A\,(\,a \\
\hline
\quad C\,)\,B\,(\,b \\
\hline
\qquad D\,)\,C\,(\,c \\
\hline
\qquad\quad E\,)\,D\,(\,d \\
\hline
\qquad\qquad F\ \text{\&c.}
\end{array}$$

vous aurez par la nature de la divifion ;

$$A = aB + C; \qquad \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B};$$

$$B = bC + D; \qquad \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}; \quad \frac{C}{B} = \cfrac{1}{b + \frac{D}{C}}$$

& partant

$$C = cD + E; \qquad \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}; \quad \frac{D}{C} = \cfrac{1}{c + \frac{E}{D}}$$

$$D = dE + F; \qquad \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}; \quad \frac{E}{D} = \cfrac{1}{d + \frac{F}{E}}$$

&c. &c. &c.

Concluons de là , en fubftituant dans les premieres expreffions les valeurs qui font à la fuite

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \cfrac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \frac{E}{D}}}, \quad \&$$

par conféquent, en exprimant x par les feuls quotients a, b, c, d, &c, comme il fuit,

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \&c.}}}}}$$

Exemple I.

Soit propofée la fraction $\frac{1461}{59}$, qu'on changera de la maniere fuivante en une fraction continue, dont tous les numérateurs feront égaux à l'unité. Procédons en conféquence comme s'il étoit queftion de trouver le plus grand commun divifeur des nombres 59 & 1461.

$$\begin{array}{l}
59)\,1461\,(24 \\
\quad\ 118 \\
\quad\ \overline{\ \ 281} \\
\quad\ \ \ 236 \\
\quad\quad\ \overline{45)\,59\,(1} \\
\quad\quad\quad\quad 45 \\
\quad\quad\quad\ \overline{14)\,45\,(3} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 42 \\
\quad\quad\quad\quad\ \overline{3)\,14\,(4} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 12 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\ \overline{2)\,3\,(1} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \overline{1)\,2\,(2} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overline{0}
\end{array}$$

On formera donc avec les quotients l'équation

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

EXEMPLE II.

Les fractions décimales pourront aussi être transformées de la même maniere; car soit proposée

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356 = \frac{141421356}{100000000},$$

ce qui nous conduit aux opérations suivantes:

100000000	141421356	1
82842712	100000000	2
17157288	41421356	2
14213560	34314576	2
2943728	7106780	2
2438648	5887456	2
505080	1219324	2
418328	1010160	2
&c.	209164	

Il eſt viſible à préſent, d'après ce calcul, que tous les dénominateurs ſont égaux à 2 & par conſéquent $\sqrt{2} =$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \&c.}}}}}$$

Réſultat dont la raiſon ſe déduit de ce que nous avons vu ci-deſſus.

Exemple III.

Le nombre e dont le logarithme eſt $= 1$, mérite une attention particuliere ; ce nombre $e = 2,718281828459$, d'où réſulte l'équation $\frac{e-1}{2} = 0,8591409142295$. Cette fraction décimale, traitée comme la précédente, donnera les quotients ſuivants :

8591409142295	10000000000000	1
8451545146224	8591409142295	6
139863996071	1408590857704	10
139312557916	1398639960710	14
551438155	9950896994	18
550224488	9925886790	22
1213667	25010204	

&c.

Et si, ayant pris une valeur plus exacte de e, on continue le calcul de la même maniere, on obtiendra les quotients

1, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, &c.

qui forment tous, excepté le premier, une progression arithmétique, d'où s'ensuit évidemment l'équation

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{\&c.}}}}}}}$$

(yy) Résultat dont la raison peut se donner par le calcul infinitésimal.

382. Puis donc qu'il est possible de tirer de ces sortes d'expressions des fractions, qui menent très-promptement à un résultat exact, cette méthode pourra être employée pour changer les fractions décimales en fractions ordinaires, qui en different très-peu. De plus, si on propose une fraction dont le numérateur & le dénominateur soient des nombres très-grands, on pourra trouver des fractions exprimées par de moindres termes, lesquelles, sans être entierement égales à la proposée, en différeront cependant le moins possible. On peut par là résoudre facilement le problême autrefois traité par *WALLIS*, qui consiste à trouver les fractions composées

de moindres termes, qui approchent tellement de la valeur d'une fraction exprimée par de plus grands termes, qu'il ne ſoit pas poſſible d'en approcher davantage ſans employer de plus grands nombres. Car les fractions obtenues par notre méthode donnent la valeur de la fraction continue tellement approchée, qu'on tenteroit en vain d'en avoir une plus exacte ſans employer des termes plus grands. (77)

Exemple I.

Qu'il ſoit queſtion d'avoir le rapport du diametre à la circonférence en nombres ſi petits, qu'il ne ſoit pas poſſible de l'avoir plus exactement, ſans employer des nombres plus grands. Développons, en continuant de diviſer ſuivant la méthode que nous venons d'expoſer, la fraction décimale connue

$$3,1415926535, \&c.$$

nous trouverons les quotients ſuivants

$$3, \quad 7, \quad 15, \quad 1, \quad 292, \quad 1, \quad 1, \quad \&c.$$

qui formeront les fractions ci-après :

$$\frac{1}{0}, \ \frac{3}{1}, \ \frac{22}{7}, \ \frac{333}{106}, \ \frac{355}{113}, \ \frac{103993}{33102}, \ \&c.$$

La ſeconde fraction fait déjà voir que le diametre eſt à la circonférence comme 1 : 3 ; & certainement il n'eſt pas poſſible d'avoir ce rapport plus approché avec des nombres qui ne ſoient pas plus grands. La troiſieme fraction donne le rapport d'*Archimede*, 7 : 22 ; & la cinquieme celui de *Métius*, lequel differe ſi peu du véritable que l'erreur n'eſt pas de $\frac{1}{113.33102}$. Au reſte, ces fractions ſont alternativement plus grandes & plus petites que la vraie valeur.

Exemple II.

Propoſons-nous d'exprimer, par les plus petits nombres poſſibles, le rapport approché du jour à l'année ſolaire moyenne. Comme cette année eſt de $365^{j}\ 5^{h}\ 48'\ 55''$, elle renfermera en fraction $365\ \frac{20935}{86400}$ jours. Il ſuffit donc de développer cette fraction, ce qui donnera les quotients ſuivants:

$$4,\ 7,\ 1,\ 6,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4$$

D'où ſe tirent les fractions

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{55}{227},\ \frac{63}{260},\ \frac{181}{747},\ \&c.$$

Ainſi, les heures avec les minutes & les ſecondes, qui ſurpaſſent 365 jours, font environ un jour en quatre ans; c'eſt là l'origine du calendrier *Julien*, ou plus exactement, 33 ans donnent 8 jours, ou 747 ans 181 jours; ce qui fait en 400 ans une augmentation de 97 jours. Auſſi, tandis que dans cet intervalle le calendrier *Julien* intercale 100 jours, le *Grégorien* change-t-il dans la durée de quatre ſiécles trois années biſſextiles en annees communes.

FIN DU TOME PREMIER.

NOTES

NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENS

Sur quelques endroits du premier Livre de l'Introduction à l'Analyse Infinitésimale.

CHAPITRE I.

(a) ART. 25. L'équation $y^2 = ayz + bz^2 + c$ donne $y = \frac{y^2 - bz^2 - c}{az}$ & $z = \frac{y^2 - bz^2 - c}{ay}$. Or, quelles que soient les valeurs de y ou de z, positives ou négatives, il est évident que ni y^2 ni z^2 ne peuvent changer de signes. Donc, si on écrit $-z$ à la place de $+z$, y devient $-y$; & si l'on met $-y$ au lieu de $+y$, z devient $-z$. Le même raisonnement s'applique manifestement à l'équation $y^3 + ay^2z = byz^2 + cy + dz$, qui donne $y = \frac{ay^2z - dz}{bz^2 + c - y^2}$ ou $z = \frac{byz^2 + cy - y^3}{ay^2 - d}$ & à toutes celles qui seront dans les cas énoncés tant dans cet article que dans le précédent.

CHAPITRE II.

(b) ART. 29. On sait qu'une équation d'un degré quelconque, a autant de racines soit réelles soit imaginaires, qu'il y a d'unités dans le plus grand exposant de l'inconnue. Descartes a donné une regle pour trouver le nombre des racines positives & celui des racines négatives, lorsqu'elles sont toutes réelles. La regle que ce célebre Géomètre avoit d nnée sans démonstration, a été démontrée depuis par l'abbé de Gua, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1741, & ensuite par Segner, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1756. Comme tout le monde n'est pas à portée de consulter ces précieuses Collections, je vais faire connoître en peu de mots la démonstration de Segner ; je la donne de préférence à celle de l'abbé de Gua, parce qu'elle est plus simple & plus directe.

Si une équation toute ordonnée ne manque d'aucun terme, ou, en cas qu'elle en manque, si l'on conçoit écrit en sa place ± 0, il est évident qu'il y aura autant de racines dans l'équation qu'on pourra former de combinaisons de deux signes, en joignant chacun d'eux à celui qui le suit immédiatement. Ainsi dans l'équation $x^5 + ax^4 - bx^3 - cx^2 + dx + e = 0$, il y a cinq racines & autant de combinaisons distinctes de deux signes pris consécutivement; savoir $++$, $+-$, $--$, $-+$, $++$, en effet cette équation a six termes; & en général une équation du degré m a $m+1$ termes, ce qui donne m combinaisons de deux signes, en les prenant consécutivement, comme nous venons de le faire. Mais dans quelqu'ordre que se trouvent les signes d'une équation, si on la multiplie par un facteur simple, qui contienne une racine négative, par $x + p$, par exemple,

$$\begin{array}{ll} & x^m + ax^{m-1} - bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} \ldots\ldots \mp k \\ & x + p \\ \hline + x^{m+1} + ax^m - bx^{m-1} - cx^{m-2} + dx^{m-3} \ldots \mp kx & (A) \\ \quad + px^m + apx^{m-1} - bpx^{m-2} - cpx^{m-3} + dpx^{m-4} \ldots \mp kp & (B) \end{array}$$

Il est visible, par la nature même de la multiplication, que les deux suites (A) & (B) ont les mêmes signes, & que les termes de la seconde doivent être plus avancés d'un rang vers la droite, de sorte que le signe d'un terme quelconque de la suite (B) est le même que celui du terme, qui précede d'un rang dans la série (A); mais si on multiplie la même équation ou toute autre par un facteur, qui contienne une racine positive, tel que $x - q$,

$$\begin{array}{ll} & x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} - dx^{m-4} \ldots\ldots \mp k \\ & x - q \\ \hline + x^{m+1} + ax^m + bx^{m-1} - cx^{m-2} - dx^{m-3} \ldots\ldots \mp kx & (A) \\ \quad - qx^m - aqx^{m-1} - bqx^{m-2} + cqx^{m-3} + dqx^{m-4} \ldots \pm kq & (B) \end{array}$$

Les signes de la série (B) seront différents des signes de la série (A), ensorte que si on prend un signe quelconque de la série (B), il différera du signe plus avancé d'un rang dans la série (A). Il est facile de voir que les signes du produit dépendent de ceux des deux séries (A) & (B) & du rapport qu'il y a entre les grandeurs des termes correspondants, qui sont affectés de signes contraires. D'abord il est clair que le premier terme du produit aura le même signe que le premier terme de la série (A), & que cette même série (A) continuera de fournir les signes du produit jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un terme au-dessous duquel s'en trouve un, qui ayant un signe contraire soit plus grand dans la série (B); après quoi, laissant la série (A), on doit prendre la suite des signes de la série (B), jusqu'à ce qu'on revienne de nouveau à un terme au-dessus duquel s'en trouve un plus grand avec le signe contraire dans la série (A). On écrira ensuite le signe de ce terme supérieur, au lieu de celui de l'inférieur, & les signes suivants de la même série, jusqu'à ce qu'on soit obligé de repasser à la série inférieure, & ainsi de suite alternativement; de maniere pourtant qu'on s'arrête à la fin à la série (B), dont le dernier terme n'en ayant aucun au-dessus de lui, dans la série (A), donnera nécessairement un signe semblable à celui, dont il est affecté, pour le dernier terme du produit. Il suit delà que pour avoir les signes du produit, on doit passer au moins une fois de la série (A) à la série (B), & quel que soit le nombre de ces passages successifs de l'une à l'autre, le nombre des retours de (B) à (A) sera toujours moindre d'une unité que le nombre des passages de (A) à (B)

Si on fait attention à présent que lorsque le multiplicateur renferme une racine négative, on a, à chaque fois qu'on passe de la série (A) à la série (B), une permanence de plus dans le produit; puisqu'on passe nécessairement une fois de plus de la série (A) à la série (B), qu'on ne revient de la série (B) à la série (A), nous devons en conclure, sans nous embarrasser de ce qui arrive à chaque retour de (B) à (A), que le nombre des permanences est augmenté au moins d'une unité. De même, dans le second cas, c'est-à-dire, lorsque le multiplicateur renferme une racine positive; puisque chaque passage de la série (A) à la série (B) donne dans le produit une variation de plus, & que le nombre des passages de la série (A) à la série (B) surpasse d'une unité le nombre des retours de la série (B) à la série (A), nous sommes également en droit d'en conclure qu'il y aura dans le produit au moins une variation de plus que dans le multiplicande.

Ainsi, comme une équation d'un degré quelconque, peut être regardée comme le résultat de la multiplication d'autant de facteurs binomes simples, qu'il y a d'unités dans le plus grand exposant de l'inconnue, & que pour la multiplication quelconque d'une équation, au moyen de laquelle une nouvelle racine réelle négative y est introduite, une permanence tout au moins des signes semblables $+ +$ ou $- -$ est ajoutée au nombre de celles qui se trouvent dans l'équation multipliée, le nombre de ces permanences dans une équation quelconque ne sera pas moindre que le nombre de ses racines négatives. Par la même raison, le nombre des variations des signes contraires $+ -$ ou $- +$, ne pourra pas non plus être moindre que le nombre des racines réelles positives d'une équation quelconque. C'est pourquoi si dans une équation tous les termes sont précédés du signe $+$ ou du signe $-$, aucune racine réelle de l'équation ne sera positive; car s'il y en avoit seulement une, il se trouveroit au moins une variation de signes. De même aussi, si dans une équation tous les termes ont successivement des signes dissemblables, elle n'aura point de racine réelle négative, puisque si elle en avoit une seule, on y verroit au moins une permanence de signes Concluons donc qu'en général dans toute équation dont toutes les racines sont réelles, le nombre des variations de signes $+ -$ & $- +$ est égal au nombre de ses racines positives, & le nombre des permanences $+ +$ & $- -$ égal au nombre des racines négatives de la même équation. En effet, soient n le nombre des racines négatives & N le nombre des permanences $+ +$ & $- -$ de cette équation; soient m le nombre de ses racines positives & M le nombre des variations $+-$ & $-+$; on aura $n+m=N+M$; or N ne peut pas être moindre que n; si donc on suppose $N>n$, on aura $M<m$; ce qui ne peut avoir lieu, comme nous venons de le voir. Donc $N=n$ & $m=M$. Donc s'il arrive que le nombre des racines réelles négatives de l'équation ne soit pas égal au nombre N, & que pareillement le nombre des racines réelles positives de la même équation ne soit pas égal au nombre M, c'est une preuve qu'elle renferme des racines imaginaires.

En réunissant tout ce qui vient d'être exposé, il en résulte manifestement la démonstration de la regle de Descartes, savoir, que *dans toute équation qui n'a point de racines imaginaires, le nombre des racines positives est égal au nombre de variations de signes, & le nombre des racines négatives égal au nombre de permanences.*

(c) ART. 29. La fonction $Z=Az^n+Bz^{n-1}+Cz^{n-2}+$ &c, ne peut être que le résultat du produit de plusieurs facteurs simples, tels que $az-m$, $a'z-m'$, $a''z-m''$, $a'''z-m'''$, &c, de maniere que . . . .

$$Z=(az-m)(a'z-m')(a''z-m'')(a'''z-m''')\ \&c.=$$
$$a\,a'\,a''\,a'''\ \&c.\left(z-\frac{m}{a}\right)\left(z-\frac{m'}{a'}\right)\left(z-\frac{m''}{a''}\right)\left(z-\frac{m'''}{a'''}\right)\ \&c.=$$
$$A\left(z-\frac{m}{a}\right)\left(z-\frac{m'}{a'}\right)\left(z-\frac{m''}{a''}\right)\left(z-\frac{m'''}{a'''}\right)\ \&c.=A(z-f)(z-g)(z-h)\ \&c.$$

en désignant par f, g, h, i, &c. les racines $\frac{m}{a}, \frac{m'}{a'}, \frac{m''}{a''}, \frac{m'''}{a'''}$, &c. de l'équation, ou les valeurs de z. De même si $Z=A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ &c; on pourra supposer $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\&c.=(m-az)(m'-a'z)(m''-a''z)\ \&c.=m\,m'\,m''\ \&c.$ $\left(1-\frac{az}{m}\right)\left(1-\frac{a'z}{m'}\right)\left(1-\frac{a''z}{m''}\right)\&c.=A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\&c.$ f, g, h, &c. étant les valeurs de z dans l'équation $0=Z=A+Bz+Cz^2+\&c.$

(d) ART. 31. Soit $z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D$, le produit de deux facteurs imaginaires du second degré, tels que $z^2-2(p+q\sqrt{-1})z+r+s\sqrt{-1}$, & $z^2-2(m+n\sqrt{-1})z+k+l\sqrt{-1}$. Ce sont là les formes les plus générales, qu'on puisse donner à deux facteurs de cette nature. On

pourra s'aſſurer ſans peine que le produit de ces deux facteurs ne peut être réel, qu'autant que $m = p$; $n = -q$; $k = r$, & $l = -s$; ce qu'on trouvera, en égalant ſéparément à zéro la ſomme des coëfficients imaginaires de chaque puiſſance de z.

(*e*) Art. 39. Lorſqu'il s'agit de décompoſer une fonction fractionnaire proprement dite, dont le dénominateur ne renſerme que des facteurs premiers entr'eux, en autant de fractions partielles, qu'il y a de facteurs dans ce dénominateur, il eſt viſible que la décompoſition ne peut s'effectuer que d'une maniere; mais il en eſt autrement lorſque la fonction renferme un entier; car alors on peut ſuppoſer indifféremment que l'une quelconque des fractions partielles réſultantes de la décompoſition contienne cet entier.

Si la fraction ſuppoſée irréductible, ce qui eſt toujours permis, renfermoit dans ſon dénominateur des facteurs égaux, tels que $(p-qz)^n$ & qu'on l'égalât à la ſomme des fractions $\frac{A}{p-qz} + \frac{B}{p-qz} + \frac{C}{p-qz} + \ldots\ldots + \frac{K}{S}$. En les réduiſant à un dénominateur commun & égal à celui de la fraction propoſée, le numérateur de la fraction réſultante auroit néceſſairement le facteur $p-qz$ commun avec le dénominateur. Donc cette dernière fraction pourroit être réduite à une plus ſimple expreſſion, & ne pourroit, par conſéquent, être égale à la première, qui, par hypothèſe eſt irréductible.

(*f*) Art. 46. Prenons au lieu de $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz)^2 S}$ (N étant $=(p-qz)^2 S$) la quantité $\frac{M \pm kN}{N}$ ou plutôt $\frac{M \pm k(p-qz)^2 S}{(p-qz)^2 S}$; égalons cette quantité à $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$. Donc $\frac{P}{S} =$
$$\frac{M \pm k(p-qz)^2 S}{(p-qz)^2 S} - \frac{A}{(p-qz)^2} - \frac{B}{p-qz} = \frac{M \pm k(p-qz)^2 S - AS - (p-qz)BS}{(p-qz)^2 S}.$$
Il eſt clair qu'en diviſant par $p-qz$, & faiſant $z = \frac{p}{q}$, on aura pour déterminer A l'équation $M - AS = 0$, comme ſi le numérateur eut été ſimplement $= M$.

CHAPITRE III.

(g) Art. 51. Soit $y = \sqrt{(-p + qz - pzz)}$. Pour ſavoir dans quel cas la valeur de y ſera réelle ou imaginaire, j'obſerve, 1°. que pour qu'elle ſoit réelle, la quantité $-p + qz - rzz$, qui eſt ſous le radical, doit être > 0, ou $rzz - qz < -p$, ou $zz - \frac{q}{r} z + \frac{qq}{4rr} < \frac{q^2 - 4pr}{4rr}$, ou enfin $\left(z - \frac{q}{2r}\right)^2 < \frac{q^2 - 4pr}{4r^2}$. Or, le premier membre étant le quarré d'une quantité réelle eſt néceſſairement poſitif. Donc à plus forte raiſon le ſecond doit l'être auſſi. Donc q^2 doit être $> 4pr$. 2°. Pour que la valeur de y ſoit imaginaire, il faut que $-p + qz - rzz$ ſoit < 0 ou $\left(z - \frac{q}{2r}\right)^2 > \frac{q^2 - 4pr}{4r^2}$.

(h) Art. 53. En faiſant $\frac{\alpha q + r}{p} = m$, & $\frac{\alpha q - \beta q}{p} = n$, on peut prendre pour quantités inconnues les rapports $\frac{q}{p}$ & $\frac{r}{p}$, qu'on trouve, ſavoir le premier $\frac{q}{p} = \frac{n}{\alpha - \beta}$, & le ſecond $\frac{r}{p} = \frac{\alpha m - \beta m - \alpha n}{\alpha - \beta}$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation

$$A z^{\frac{\alpha q + r}{p}} + B y^{\mu} z^{\frac{\alpha q - \mu q + r}{p}} + C y^{\nu} z^{\frac{\alpha q - \nu q + r}{p}} + \&c. = a y^{\alpha} + b y^{\beta} z^{\frac{\alpha q - \beta q}{p}} + c y^{\gamma} z^{\frac{\alpha q - \gamma q}{p}} + \&c.$$

elle ſe changera en celle-ci :

$$A z^{m} + B y^{\mu} z^{m - \frac{\mu n}{\alpha - \beta}} + C y^{\nu} z^{m - \frac{\nu n}{\alpha - \beta}} + \&c. =$$

$$a y^{\alpha} + b y^{\beta} z^{n} + c y^{\gamma} z^{\frac{(\alpha - \gamma) n}{\alpha - \beta}} + \&c.$$

D'ailleurs p, q & r ſont des nombres entiers, qu'on peut même ſuppoſer premiers entr'eux. Cela poſé, ſi on faiſoit $p = k(\alpha - \beta)$, à cauſe de $\frac{q}{p} = \frac{n}{\alpha - \beta}$, on auroit $q = kn$, & par conſéquent $r = k(\alpha m - \beta m - \alpha n)$. Donc p, q & r auroient un facteur commun k ; ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Donc $k = 1$; donc $p = \alpha - \beta$; $q = n$; & $r = \alpha m - \beta m - \alpha n$.* Un raisonnement semblable aura lieu pour la seconde supposition $\frac{\alpha q + r}{p} = m$ & $\frac{\alpha q - \mu q + r}{p} = n$.

(i) ART. 54. Au lieu d'augmenter ou de diminuer l'une & l'autre variable d'une constante, il suffira d'augmenter ou de diminuer seulement l'une des variables y ou z d'une quantité quelconque, qu'on déterminera après la substitution, en égalant à zéro la somme des termes constants; ce qui est toujours permis, puisque la constante est arbitraire.

(k) ART. 55. Ces cas, & tous ceux où la somme des exposants des variables de chaque terme donne deux dimensions différentes, sont renfermés dans la formule de l'Article 53; il n'y a qu'à supposer $q = p = n = \alpha - \beta$.

CHAPITRE IV.

(l) ART. 66. Pour avoir en général l'expression du coëfficient de z^n dans la série, qui résulte du développement de la fraction $\frac{1}{(1-z)^m}$; on se rappellera que $\frac{1}{(1-z)^m} = (1-z)^{-m} = 1 + mz + m.\frac{m+1}{2}z^2 + m.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}z^3 + m.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}.\frac{m+3}{4}z^4 + \&c.$ Donc le coëfficient d'un terme quelconque sera . . . .

$$\frac{m.m+1.m+2.m+3\ldots\ldots m+n-1}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots m-1.m\ldots\ldots\ldots n} = \frac{m.m+1.m+2\ldots\ldots n.n+1\ldots\ldots n+m-1}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots m-1.m\ldots\ldots\ldots n-1.n}$$
$$= \frac{n+1.n+2\ n+3\ldots\ldots n+m-1}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots m-2\ .\ m-1}.$$

Il est aisé de conclure de-là l'expression générale du coëfficient d'un terme de la série, qui provient de la fraction $\frac{a+bz+\ldots+kz^{m-1}}{(1-\alpha z)^m}$.

ART. 67. Soit y, une fonction de la variable x, & représentons par $y', y'', y''', y^{\text{IV}}$, &c, les nouvelles fonctions qui résultent de la premiere, par la substitution de $x+b$, $x+2b$, $x+3b$, $x+4b$, &c, à la place de x. La suite des différences premieres sera $y'-y$, $y''-y'$, $y'''-y''$, $y^{\text{IV}}-y'''$, &c; ou, en désignant

* On ne fait point $\alpha - \beta = n$, parce que cela donneroit $p = q$; ce qui est un cas particulier, & que dans la formule générale on suppose p différent de q.

désignant par Δ la différence d'une fonction variable quelconque, ou l'accroissement qu'elle reçoit par la substitution de $x+b$ au lieu de x, sera Δy, $\Delta y'$, $\Delta y''$, $\Delta y'''$, Δy^{IV}, &c. On aura donc $\Delta y = y' - y$; $\Delta y' = y'' - y'$; $\Delta y'' = y''' - y''$; &c. Or la différence seconde que je représente par $\Delta\Delta y$ ou $\Delta^2 y$, $= (y'' - y') - (y' - y)$ & $y'' - y' = \Delta y'$. Donc $\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y$. De même la différence troisieme $\Delta^3 y = [(y''' - y'') - (y'' - y')] - [(y'' - y') - (y' - y)] = [\Delta y'' - \Delta y'] - [\Delta y' - \Delta y]$; donc, à cause de $\Delta y'' - \Delta y' = \Delta^2 y'$, on aura $\Delta^3 y = \Delta^2 y' - \Delta^2 y$. On trouvera pareillement $\Delta^{\text{IV}} y = \Delta^3 y' - \Delta^3 y$.

Cela posé, soit $y = x^m$; comme $y' = (x+b)^m$; $y'' = (x+2b)^m$; $y''' = (x+3b)^m$, &c; en développant les puissances, nous aurons

$$y = x^m$$

$$y' = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$y'' = x^m + \frac{m}{1}.2x^{m-1} b + \frac{m.m-1.}{1.2} 4x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} 8x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$y''' = x^m + \frac{m}{1}.3x^{m-1} b + \frac{m.m-1.}{1.2} 9x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} 27x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$y^{\text{IV}} = x^m + \frac{m}{1}.4x^{m-1} b + \frac{m.m-1.}{1.2} 16x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} 64x^{m-3} b^3 + \&c.$$

&c.

Donc

$$\Delta y = \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta y' = \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m.m-1.}{1.2} 3x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} 7x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta y'' = \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m.m-1.}{1.2} 5x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} 19x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta y''' = \frac{m}{1} x^{m-1} b + \frac{m.m-1.}{1.2} 7x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} 37x^{m-3} b^3 + \&c.$$

&c.

$$\Delta^2 y = m.m-1.x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} 6x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta^2 y' = m.m-1.x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} 12x^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\Delta^2 y'' = m.m-1.x^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} 18x^{m-3} b^3 + \&c.$$

&c.

$$\Delta^3 y = m.m-1.m-2.x^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4}\ 36\, x^{m-4} b^4 + \&c.$$

$$\Delta^3 y' = m.m-1.m-2.x^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4}\ 60\, x^{m-4} b^4 + \&c.$$

&c.

$$\Delta^4 y = m.m-1.m-2.m-3.x^{m-4}b^4 + \&c.$$

&c.

On voit à préſent, ſans aller plus loin, que la différence m^e de y eſt une quantité conſtante $m.m-1.m-2 \ldots . 2.1 b^m$. Donc la ſuite $a^m + (a+b)^m + (a+2b)^m + (a+3b)^m +$ &c, repréſente une progreſſion de l'ordre m.

(*m*) Art. 71. Comme la plupart des traités d'Algebre ne donnent la démonſtration du binome de Newton que pour le cas où l'expoſant de la puiſſance eſt un nombre entier poſitif, on ne ſera peut-être pas fâché de trouver ici que la même formule s'applique aux cas où l'expoſant m eſt un nombre fractionnaire poſitif, ou un nombre négatif quelconque. Nous nous contenterons de conſidérer le binome $1+x$, parce qu'il eſt facile de ramener tous les autres à cette forme. Pour abréger le calcul, repréſentons par $[m]$ la fonction de x, qui ſeroit le développement de la puiſſance m de $1+x$, ſi m étoit un nombre entier ; c'eſt-à-dire, ſoit $[m] = 1 + mx + m.\frac{m-1}{2}x^2 +$ &c, m étant un nombre quelconque. Soit, par la même raiſon, $[n]$ une fonction ſemblable de x, ou une ſuite, qui exprimeroit la puiſſance n développée de $1+x$, ſi n étoit un nombre entier. Comme en général la forme du produit d'autant de polynomes, qu'on voudra, eſt indépendante de la valeur des quantités littérales, c'eſt-à-dire que la combinaiſon des lettres, qui entrent dans les termes du produit reſte la même, quelque ſoit la valeur de ces lettres, il eſt évident que ſi on peut obtenir la forme du produit de $[m] \times [n]$, lorſque m & n expriment des nombres entiers, la même forme conviendra aux cas où m & n ſont des nombres fractionnaires. Or dans le cas où m & n ſont des nombres entiers, on a $[m] = (1+x)^m$ & $[n] = (1+x)^n$. Donc, dans ce dernier cas $[m] \times [n] = (1+x)^m \times (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$

$= 1 + (m+n)x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \quad 2} x^2 + \&c. = [m+n]$. Donc aussi $[m] \times [n] = [m+n]$ dans le cas où m & n sont fractionnaires. Par la même raison, on aura $[m] \times [n] \times [p] = [m+n+p]$, & en général $[m] \times [n] \times [p] [q] \times \&c. = [m+n+p+q+\&c]$. Soit à présent $m=n=p=q=\&c$; & k le nombre des facteurs $[m]$, $[n]$ &c : on aura évidemment $[m]^k = [km]$. Mais comme k est un nombre entier pris arbitrairement, on peut le supposer tel que km soit un nombre entier, & alors $[km] = (1+x)^{km}$. Donc $[m]^k = (1+x)^{km}$, & extrayant de part & d'autre la racine k ; $[m] = (1+x)^m$, m étant une fraction. Pour démontrer le cas où m est un nombre négatif, il suffit de reprendre l'équation $[m] \times [n] = [m+n]$, qui, en supposant $n = -m$, devient $[m] \times [-m] = [m-m] = 1 + (m-m)x + \frac{(m-m)(m-m-1)}{1. \quad 2} x^2 + \&c. = 1$. Donc $[-m] = \frac{1}{[m]} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}$.

On peut faire voir encore assez facilement, par le moyen des logarithmes, que la même formule du binome de Newton s'applique au cas où l'exposant m est irrationnel. En effet, soit $(1+x)^{\sqrt[p]{m}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$; on aura aussi $(1+x+y)^{\sqrt[p]{m}} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \&c.$ Divisant la seconde équation par la premiere, & faisant attention que le second membre de la seconde équation $= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c. + y(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \&c.) + y^2 \times \&c$; on trouvera $\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)^{\sqrt[p]{m}} = 1 + \frac{y(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\&c) + y^2 \times \&c + \&c}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.}$, & en prenant les logarithmes de part & d'autre $\sqrt[p]{m} \left(\frac{y}{1+x} - \frac{y^2}{2(1+x)^2} + \&c.\right) = \frac{y(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\&c) + y^2 \times \&c + \&c}{1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\&c.} - y^2 \times \&c + \&c.$ Divisant par y ; supposant ensuite $y=0$ & faisant disparoître les dénominateurs, on aura $\sqrt[p]{m} + A\sqrt[p]{m}.x + B\sqrt[p]{m}.x^2 + C\sqrt[p]{m}.x^3 + D\sqrt[p]{m}.x^4 + \&c. =$

$$\left\{\begin{matrix} A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \&c. \\ + Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + \&c. \end{matrix}\right\}$$ Donc $A =$

$\sqrt[p]{m}$; $B = \frac{A(\sqrt[p]{m}-1)}{2} = \frac{\sqrt[p]{m}.\sqrt[p]{m}-1}{1.\ 2}$; $C = \frac{B(\sqrt[p]{m}-2)}{3} = \frac{\sqrt[p]{m}.\sqrt[p]{m}-1.\sqrt[p]{m}-2}{1.\ 2.\ 3}$; $D = C\frac{(\sqrt[p]{m}-3)}{4} = \frac{\sqrt[p]{m}.\sqrt[p]{m}-1.\sqrt[p]{m}-2.\sqrt[p]{m}-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ &c. Donc $(1+x)^{\sqrt[p]{m}} = 1 + \sqrt[p]{m}.x + \frac{\sqrt[p]{m}.\sqrt[p]{m}-1.}{1.\ 2}x^2 + \frac{\sqrt[p]{m}.\sqrt[p]{m}-1.\sqrt[p]{m}-2.}{1.\ 2.\ 3}x^3 +$ &c.

Il eſt inutile de faire obſerver que la même démonſtration ſubſiſteroit quand même $\sqrt[p]{m}$ feroit imaginaire, donc la formule du binome de Newton a toute la généralité qu'on puiſſe deſirer.

(*n*) ART. 76. Sans recourir expreſſément au Calcul différentiel, voici comment on peut démontrer la loi de cette progreſſion. Soit $\frac{1}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\&c.)^{m+1}} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c; on aura par la même raiſon . . . $\frac{1}{(1-\alpha(z+y)-\beta(z+y)^2-\gamma(z+y)^3-\&c)^{m+1}} = 1 + A(z+y) + B(z+y)^2 + C(z+y)^3 + D(z+y)^4 +$ &c, quelque ſoit la valeur de y. Faiſons, pour abréger, $Z = 1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-$ &c; la premiere équation deviendra $\frac{1}{Z^{m+1}}$ ou $Z^{-m-1} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c, & la ſeconde équation, qui eſt la même choſe que

$$\frac{1}{[1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\&c-y(\alpha+2\beta z+3\gamma z^2+4\delta z^3+\&c)-y^2\times\&c-\&c]^{m+1}}$$
$$= 1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\&c+y[A+2Bz+3Cz^2+4Dz^3+\&c]+y^2\times\&c$$
$+$ &c deviendra $[Z-y(\alpha+2\beta z+3\gamma z^2+4\delta z^3+\&c)-y^2\times\&c-\&c]^{-m-1}$ ou $Z^{-m-1}+(m+1)Z^{-m-2}[y(\alpha+2\beta z+3\gamma z^2+4\delta z^3+\&c)+y^2\times\&c+\&c+y^2\times\&c+\&c] = Z^{-m-1}+y(A+2Bz+3Cz^2+4Dz^3+\&c)+y^2\times\&c+\&c.$

Retranchant de part & d'autre la quantité Z^{-m-1}, diviſant le reſte par y, qui eſt facteur commun, & ſuppoſant $y=0$, ce qui eſt permis, puiſque l'équation eſt vraie indépendamment de la valeur de y; on aura $(m+1)Z^{-m-2}(\alpha+2\beta z+3\gamma z^2+4\delta z^3+\&c) = A+2Bz+3Cz^2+4Dz^3+\&c$; multipliant enſuite chaque membre par Z & ſubſtituant pour Z^{-m-1} & pour Z leurs valeurs reſpectives $1+Az+Bz^2$

$+ Cz^3 + Dz^4 +$ &c; & $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 -$ &c, la derniere équation deviendra

$$(m+1)(\alpha + 2\beta z + 3\gamma z^2 + 4\delta z^3 + \&c)(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.)$$
$$= (1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c)(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \&c.)$$

Effectuant les multiplications & ordonnant par rapport à z, nous aurons

$$\left.\begin{array}{r} (m+1)\alpha + (2m+2)\beta z + (3m+3)\gamma z^2 + (4m+4)\delta z^3 + \&c. \\ +(m+1)\alpha A z + (2m+2)\beta A z^2 + (3m+3)\gamma A z^3 + \&c. \\ +(m+1)\alpha B z^2 + (2m+2)\beta B z^3 + \&c. \\ +(m+1)\alpha C z^3 + \&c. \\ +\&c. \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{r} A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \&c. \\ -\alpha A z - \beta A z^2 - \gamma A z^3 - \&c. \\ -2\alpha B z^2 - 2\beta B z^3 - \&c. \\ -3\alpha C z^3 - \&c. \\ -\&c. \end{array}$$

Donc

$$A = (m+1)\alpha$$

$$B = \frac{(m+2)\alpha A + (2m+2)\beta}{2}$$

$$C = \frac{(m+3)\alpha B + (2m+3)\beta A + (3m+3)\gamma}{3}$$

$$D = \frac{(m+4)\alpha C + (2m+4)\beta B + (3m+4)\gamma A + (4m+4)\delta}{4}$$

&c.

Et en général, n étant l'exposant de Z dans le terme Nz^n,
$$N = \frac{m+n}{n}\alpha M + \frac{2m+n}{n}\beta L + \frac{3m+n}{n}\gamma K + \frac{4m+n}{n}\delta I + \frac{5m+n}{n}\epsilon H + \&c.$$

CHAPITRE V.

(o) ART. 91. Pour que la quantité $ay^2 + byz + cyx + dxz + ex^2 + fz^2$ pût être représentée par le produit $(\alpha y + \beta z + \gamma x)(\delta y + \epsilon z + \zeta x)$; il faudroit qu'on eût l'équation de condition $ad^2 + eb^2 + fc^2 - 4aef - bcd = 0$. On peut s'en convaincre, en faisant la multiplication indiquée, égalant les coëfficients des produits semblables des variables, & traitant suivant les regles ordinaires de l'Algebre les ſix équations, qu'on trouvera. Mais il ſera plus commode de décompoſer la quantité $ay^2 + byz + cxy + dxz + exx + fzz$ en deux facteurs, en la traitant comme une équation du ſecond degré & regardant y, par exemple, comme l'inconnue; ce qui donnera les deux facteurs $y + \frac{bz + cx}{2a} \mp \frac{\sqrt{[(c^2 - 4ae)x^2 + 2x(bc - 2ad)z + (b^2 - 4af)z^2]}}{2a}$ ou $y + \frac{bz + cx}{2a} \mp \frac{1}{2a}\sqrt{\left[c^2 - 4ae)\left(x^2 + 2x.z.\frac{bc - 2ad}{c^2 - 4ae} + \frac{b^2 - 4af}{c^2 - 4ae}.z^2\right)\right]}$.

Or, pour que ces facteurs puiſſent être ramenés à la forme $\alpha y + \beta z + \gamma x$; & $\delta y + \varepsilon z + \zeta x$, il faut qu'il n'y ait ſous le radical ni x ni z; ce qui exige que $x^2 + 2x\left(\frac{bc - 2ad}{c^2 - 4ae}\right)z + \frac{b^2 - 4af}{c^2 - 4ae}.z^2$ ſoit un quarré, & que par conſéquent $\frac{b^2 - 4af}{c^2 - 4ae}zz = \left(\frac{bc - 2ad}{c^2 - 4ae}\right)^2 z^2$ ou que $ad^2 + eb^2 + fc^2 - 4aef - bcd = 0$. Ainſi la quantité dont il s'agit feroit $= \left[ay + \left(\frac{b}{2} - \frac{(bc - 2ad)}{2\sqrt{(c^2 - 4ae)}}\right)z + \left(\frac{c - \sqrt{(c^2 - 4ae)}}{2}\right)x\right] \times \left[y + \left(\frac{b}{2a} + \frac{(bc - 2ad)}{2a\sqrt{(c^2 - 4ae)}}\right)z + \left(\frac{c + \sqrt{(c^2 - 4ae)}}{2a}\right)x\right]$. Ce qui donne $\alpha = a$; $\beta = \frac{b}{2} - \frac{(bc - 2ad)}{2\sqrt{(c^2 - 4ae)}}$; $\gamma = \frac{c - \sqrt{(c^2 - 4ae)}}{2}$; $\delta = 1$; $\varepsilon = \frac{b}{2a} + \frac{bc - 2ad}{2a\sqrt{(c^2 - 4ae)}}$; $\zeta = \frac{c + \sqrt{(c^2 - 4ae)}}{2a}$.

CHAPITRE VI.

(p) ART. 97. On ſait qu'en général l'expreſſion $a^{\frac{m}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a^m}$, m & n étant des nombres entiers, renferme un nombre n de valeurs différentes. Mais une quantité irrationnelle, telle que $\sqrt{7}$ n'eſt pas exprimable par une quantité de la forme $\frac{m}{n}$; on n'en peut obtenir qu'une valeur approchée au moyen des décimales; on ne peut donc pas dire que le nombre de valeurs renfermées dans $a^{\sqrt{7}}$, par exemple, ſoit déterminé ou aſſignable.

De plus, puiſqu'il n'y a pas de raiſon de concevoir pour la valeur d'une quantité irrationnelle, quelque approchée qu'on la ſuppoſe, une fraction dont le dénominateur ſoit plutôt pair qu'impair, ou réciproquement, il s'enſuit que a étant une quantité négative & z une quantité irrationnelle, on ne peut ſavoir ſi dans ce cas a^z repréſente une quantité réelle ou non.

CHAPITRE VII.

(q) ART. 122. * Dans l'hyperbole équilatere, dont la puiſſance $= 1$, on a l'équation $xy = 1$, ou $y = \frac{1}{x}$. Si on veut avoir l'eſpace aſymptotique terminé par deux ordonnées, dont la plus voiſine du centre $= 1$, par la portion de la courbe correſpondante & par la partie z de l'abſciſſe totale x, compriſe entre ces ordonnées; on imaginera cet eſpace partagé en une infinité de petits rectangles, dont les baſes priſes ſur la ligne des abſciſſes ſoient égales entr'elles & infiniment petites; je les repréſente par e; il eſt clair que la ſurface du premier, à compter de l'ordonnée $= 1$, ſera $\frac{e}{1+e}$, celle du ſecond $\frac{e}{1+2e}$, celle du troiſieme $\frac{e}{1+3e}$, &c. Donc l'eſpace total $= e\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1+2e} + \frac{1}{1+3e} \ldots + \frac{1}{1+z}\right)$ $=$ (en réduiſant chaque fraction en ſérie) $e(1+1+1+1+$ &c.$) - e^2\left(1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots+\frac{z}{e}\right) + e^3\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\frac{z^2}{e^2}\right) - e^4\left(1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+\frac{z^3}{e^3}\right) +$ &c. Or, en général $1^m+2^m+3^m+4^m+5^m+\ldots\ldots+n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$, lorſque $n = \infty$. En effet, le terme général de cette ſuite $= n^m$. Si on déſigne par s la ſomme de tous les termes, & par s' la ſomme de tous les termes, excepté le dernier, & qu'on faſſe $s = An^{m+1}$; il eſt évident qu'on aura $s' = A(n-1)^{m+1}$; mais $s - s'$ ou $(m+1)An^m = n^m$; donc $A = \frac{1}{m+1}$; donc $s = \frac{n^{m+1}}{m+1}$. L'eſpace aſymptotique,

* Cette note ſuppoſe qu'on a vu les Sections coniques.

dont il s'agit, sera donc $= e . \frac{z}{e} - \frac{e^2 . z^2}{2e^2} + \frac{e^3 . z^3}{3 . e^3} - \frac{e^4 z^4}{4e^4} + \&c.$ $= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \&c. = l(1+z) = l.x.$ Donc les espaces asymptotiques comptés depuis l'ordonnée $= 1$, sont exprimés par les logarithmes des abscisses totales correspondantes.

CHAPITRE VIII.

(*r*) ART. 137. Puisqu'on a $cot\, z = \frac{cot \frac{1}{2} z - tang \frac{1}{2} z}{2}$; on en conclura $2\, cot\, z = cot \frac{1}{2} z - \frac{1}{cot \frac{1}{2} z}$ ou $(cot \frac{1}{2} z)^2 - 2\, cot\, z . cot \frac{1}{2} z = 1$. Donc $cot \frac{1}{2} z = cot\, z + \sqrt{1 + (cot\, z)^2} = cot\, z + cosec.\, z$. Donc $cosec.\, z = cot \frac{1}{2} z - cot\, z$.

(*s*) ART. 139. Il n'y a pas de doute que la formule $(cos\, z \pm \sqrt{-1}\, sin\, z)^n = cos\, n z \pm \sqrt{-1} . sin\, n z$, ne s'applique aussi aux cas où n est une fraction. En effet, soit $n = \frac{1}{m}$, $n z$ deviendra $\frac{z}{m}$; soit z' ce dernier arc; on aura $z = m z'$, & la formule deviendra $(cos\, m z' \pm \sqrt{-1} . sin\, m z')^{\frac{1}{m}} = (cos\, z' \pm \sqrt{-1} . sin\, z')$; ou $cos\, m z' \pm \sqrt{-1} . sin\, m z' = (cos\, z' \pm \sqrt{-1} . sin\, z')^m$; équation vraie qui légitime la supposition faite.

La même formule aura encore lieu pour le cas où n est négative. En effet, $(cos\, z + \sqrt{-1}\, sin\, z)^{2n} (cos\, z - \sqrt{-1}\, sin\, z)^{2n} = [(cos\, z)^2 + (sin\, z^2)]^{2n} = 1$. Donc $\frac{1}{(cos\, z \pm \sqrt{-1}\, sin\, z)^{2n}}$ ou $(cos\, z \pm \sqrt{-1}\, sin\, z)^{-2n} = (cos\, z \mp \sqrt{-1}\, sin\, z)^{2n}$; & extrayant la racine quarrée de part & d'autre $(cos\, z \pm \sqrt{-1}\, sin\, z)^{-n} = (cos\, z \mp \sqrt{-1}\, sin\, z)^n = cos\, n z \mp \sqrt{-1} . sin\, n z = cos (-n z) \pm \sqrt{-1}\, sin (-n z)$. Enfin la formule $(cos\, z \pm \sqrt{-1}\, sin\, z)^n = cos\, n z \pm \sqrt{-1} . sin\, n z$ a aussi lieu lorsque n est irrationnelle, puisque l'une & l'autre expression se réduit à $e^{\pm n z \sqrt{-1}}$.

CHAPITRE IX.

(*t*) ART. 150. On n'a trouvé dans l'Article cité 148 deux équations

équations différentes, que parce qu'on y a ſuppoſé l'exiſtence d'un facteur double ; par conſéquent, s'il arrive que les ſubſtitutions ne donnent qu'une équation, on n'a pas le droit d'en conclure plus d'un facteur ſimple.

(*u*) Art. 154. Ce ſeroit ici le lieu de prouver qu'en général toute fonction entiere peut être réſolue en facteurs réels, ſimples ou doubles. Dalembert a démontré le premier, cette propoſition importante, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, que pourront conſulter ceux qui ſeront curieux de connoître ſa démonſtration ; mais elle ſuppoſe la théorie des courbes. On en trouvera à la fin de la note ſuivante (*v*) une beaucoup plus ſimple, que j'ai extraite des leçons du C. Laplace, imprimées dans le Journal des Séances des Ecoles normales.

CHAPITRE X.

(*v*) Art. 166. On pourra trouver ces formules de la maniere ſuivante : ſoit $Z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \&c. = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)\,\&c$; & Z' ce que deviennent ces quantités en mettant $z + y$ à la place de z. On aura $l\frac{Z'}{Z} = l\frac{1+\alpha z+\alpha y}{1+\alpha z} + l\frac{1+\beta z+\beta y}{1+\beta z} + l\frac{1+\gamma z+\gamma y}{1+\gamma z} + \&c. = l\left(1+\frac{\alpha y}{1+\alpha z}\right) + l\left(1+\frac{\beta y}{1+\beta z}\right) + l\left(1+\frac{\gamma y}{1+\gamma z}\right) + \&c.$ Or, $Z' = Z + y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \&c) + y^2 \times \&c + \&c.$ Donc $\frac{Z'}{Z} = 1 + \frac{y(A+2Bz+3Cz^2+4Dz^3+\&c)+y^2\times\&c+\&c.}{Z}$ & $l.\frac{Z'}{Z} = \frac{y(A+2Bz+3Cz^2+4Dz^3+\&c)+y^2\times\&c+\&c.}{Z} - \frac{y^2}{Z^2}(A^2+\&c) + \&c. = \frac{\alpha y}{1+\alpha z} - \frac{\alpha^2 y^2}{2(1+\alpha z)^2} + \&c + \frac{\beta y}{1+\beta z} - \frac{\beta^2 y^2}{2(1+\beta z)^2} + \&c. + \frac{\gamma y}{1+\gamma z} - \frac{\gamma^2 y^2}{2(1+\gamma z)^2} + \&c + \&c.$ Diviſant par y & ſuppoſant $y = 0$, ce qui eſt permis, puiſque l'équation eſt vraie indépendamment de la valeur de y, on aura

$$\frac{A+2Bz+3Cz^2+4Dz^3+5Ez^4+\&c}{Z} = \frac{\alpha}{1+\alpha z} + \frac{\beta}{1+\beta z} + \frac{\gamma}{1+\gamma z} + \frac{\delta}{1+\delta z} + \&c$$

ou $A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \&c = Z \left(\frac{\alpha}{1+\alpha z} + \frac{\beta}{1+\beta z} + \frac{\gamma}{1+\gamma z} + \frac{\delta}{1+\delta z} + \&c.\right)$ ou bien (en mettant à la place de Z sa valeur, en développant les fractions en séries, & ordonnant par rapport à z) $=$ . . . .

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c \times \left\{\begin{array}{l} \alpha - \alpha^2 z + \alpha^3 z^2 - \alpha^4 z^3 + \alpha^5 z^4 - \alpha^6 z^5 + \&c. \\ + \beta - \beta^2 z + \beta^3 z^2 - \beta^4 z^3 + \beta^5 z^4 - \beta^6 z^5 + \&c. \\ + \gamma - \gamma^2 z + \gamma^3 z^2 - \gamma^4 z^3 + \gamma^5 z^4 - \gamma^6 z^5 + \&c. \\ + \delta - \delta^2 z + \&c. \\ + \varepsilon - \&c. \\ + \&c. \end{array}\right\}$$

$$= (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c)(P - Qz + Rz^2 - Sz^3 + Tz^4 - Vz^5 + \&c.)$$

Donc enfin

$$\begin{aligned} A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \&c = P &+ APz + BPz^2 + CPz^3 + DPz^4 + EPz^5 + \&c. \\ &- Qz - AQz^2 - BQz^3 - CQz^4 - DQz^5 - \&c. \\ &+ Rz^2 + ARz^3 + BRz^4 + CRz^5 + \&c. \\ &- Sz^3 - ASz^4 - BSz^5 - \&c. \\ &+ Tz^4 + ATz^5 + \&c. \\ &- Vz^5 - \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

D'où l'on conclud

$$\begin{aligned} P &= A \\ Q &= AP - 2B \\ R &= AQ - BP + 3C \\ S &= AR - BQ + CP - 4D \\ T &= AS - BR + CQ - DP + 5E \\ V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F \\ \&c. &= \&c. \end{aligned}$$

Et en général, si on représente par $s^{(n)}, s^{(n-1)} \ldots s$, la somme des puissances $n, n-1, \ldots\ldots\ldots 1$; on aura l'équation

$$s^{(n)} = As^{(n-1)} - Bs^{(n-2)} + Cs^{(n-3)} \ldots \mp Ls \pm nM;$$

L marquant la somme des produits différents qu'on peut former avec les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c, prises $n-1$ à $n-1$, chacune des lettres n'entrant qu'une fois dans chaque combinaison; & M marquant la somme des produits différents qu'on peut former avec les mêmes lettres, en les prenant n à n. Le ſigne — convient aux cas où n eſt pair, & le ſigne + aux cas où n eſt impair.

Il eſt aiſé de voir que les coëfficients A, B, C, D, &c. de l'équation propoſée, ſont des fractions invariables des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c; c'eſt-à-dire, des fonctions, qui reſtent les mêmes, lorſqu'on y change ces quantités l'une en l'autre; par exemple, α en β & réciproquement; α en &c. On voit encore que les puiſſances entieres & poſitives du même ordre de ces mêmes quantités, ſavoir P, Q, R, S, &c, en ſont auſſi des fonctions invariables, & que de plus ces puiſſances ſont des fonctions rationnelles des coëfficients A, B, C, &c. Il eſt inutile d'obſerver que ſi au lieu de l'équation précédente, on avoit celle-ci : $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots + h = 0$; la même choſe auroit lieu à l'égard des coëfficients comparés aux racines a, b, c, d, &c, de l'équation; & à l'égard des puiſſances ſemblables des racines comparées aux coëfficients p, q, r, s, &c. Je remarque à préſent que a, b, c, d, &c, déſignant toujours les racines de l'équation propoſée, on pourra obtenir la ſomme des termes de la forme $a^m b^{m'}$, ou $a^m b^{m'} \cdot c^{m''}$, ou &c, en fonction rationnelle des coëfficients de l'équation. Cherchons d'abord la ſomme des termes de la forme $a^m b^{m'}$; je multiplie la ſomme des puiſſances a^m par la ſomme des puiſſances $a^{m'}$; le produit ſera formé de la ſomme des puiſſances $a^{m+m'}$, & de la ſomme des produits de la forme $a^m b^{m'}$. On obtiendra donc cette derniere ſomme au moyen de celle des puiſſances, & par conſéquent en fonction rationnelle des coëfficients p, q, r, s, &c, de l'équation.

Pour avoir la ſomme des termes de la forme $a^m b^{m'} c^{m''}$, je multiplie la ſomme des termes $a^m b^{m'}$ par la ſomme des puiſſances $a^{m''}$; le produit ſera compoſé de trois parties, ſavoir, 1°. De la ſomme des termes de la forme $a^{m'} b^{m+m''}$; 2°. De la ſomme des termes de la forme $a^m b^{m'+m''}$; 3°. De la ſomme des termes de la forme $a^m b^{m'} c^{m''}$. On pourra donc avoir cette derniere ſomme en fonction rationnelle des coëfficients de l'équation; ainſi de ſuite.

Cela posé, nous allons passer à la démonstration annoncée dans la note précédente.

Prenons une équation du degré $2^i k$, k étant un nombre impair, & supposons que ses différentes racines soient a, b, c, &c; il est clair que le nombre en sera $2^i k$; & que celui des sommes différentes, ou des produits différents qu'elles donneront en les prenant deux à deux sera exprimé, d'après la théorie des combinaisons, par $2^{i-1}k(2^i k-1)$. Par conséquent l'équation, qui aura pour racines $a+b+mab$, m étant un nombre quelconque, sera du degré $2^{i-1}k'$, k' étant un nombre impair. De plus, les coëfficients de cette nouvelle équation seront rationnels, puisqu'il n'entrera dans leur formation que des puissances des racines a, b, c, &c, & des produits de la forme donnée ci-dessus; $a^m b^{m'}$, $a^m b^{m'} c^{m''}$, &c; lesquels sont, comme nous l'avons vu, des fonctions rationnelles des coëfficients de l'équation primitive.

Si $i = 1$, l'équation du degré k', qui dérive de la premiere, sera d'un degré impair, & aura par conséquent au moins une racine réelle; & comme on peut supposer à m une infinité de valeurs différentes, il y aura aussi une infinité de fonctions de la forme $a+b+mab$ qui auront des valeurs réelles; & parmi ces fonctions, il s'en trouvera nécessairement qui renfermeront les mêmes racines de la proposée. Supposons a & b ces racines, $a+b+mab$ & $a+b+m'ab$ deux fonctions, dont les valeurs soient réelles; leur différence $(m-m')ab$ sera aussi reelle. Donc ab & $a+b$ seront séparément des quantités réelles. Donc, dans ce cas, la proposée aura un facteur réel du second degré $x^2-(a+b)x+ab$.

Je dis à présent qu'en général la proposée aura un facteur réel du second degré, si toute équation du degré $2^{i-1}k'$ a un facteur réel du second degré. En effet, on sait que les racines imaginaires d'une équation du second degré sont de la forme $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, & de plus, que de quelque maniere qu'on combine des quantités de cette forme par les opérations ordinaires de l'Algebre, on arrive toujours à des résultats de la même forme : d'ailleurs on en peut voir la démonſtration ci-deſſous. Donc on aura, dans le cas préſent, une infinité de fonctions $a + b + mab$, dont la valeur eſt de la forme $g \pm f\sqrt{-1}$. On prouvera en raiſonnant comme ci-deſſus, qu'il y a deux racines a & b telles, que $a + b$ & ab ſoient de la même forme. Le facteur $x^2 - (a + b)\,x + ab$ prend alors la forme $x^2 + \alpha x + \beta + \sqrt{-1}\,.\,(\alpha' x + \beta')$, ou $x^2 + \alpha x + \beta - \sqrt{-1}\;(\alpha' x + \beta')$. Donc l'équation propoſée ſera diviſible ou par $x^2 + \alpha x + \beta + \sqrt{-1}\;(\alpha' x + \beta')$, ou par $x^2 + \alpha x + \beta - \sqrt{-1}\;(\alpha' x + \beta')$. Mais comme une équation diviſible par l'un de ces facteurs l'eſt auſſi néceſſairement par l'autre ; & que leur produit eſt un facteur réel du quatrieme degré, qui, comme on ſait, eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré, il s'enſuit que la propoſée eſt décompoſable en deux facteurs réels du ſecond degré, du moins s'ils n'ont point de diviſeur commun.

Si les deux facteurs précédents avoient un diviſeur commun, il ne pourroit être que $\alpha' x + \beta'$, puiſqu'il devroit diviſer leur différence ; mais après la diviſion le quotient ſeroit une fonction d'un degré impair, qui auroit par conſéquent un facteur ſimple réel. Donc la fonction propoſée auroit encore dans ce dernier cas un facteur réel du ſecond degré, qui ſeroit le réſultat du produit de ces deux facteurs du premier.

Ainſi toute équation du degré $2^i k$ a un facteur réel du ſecond degré, ſi toute équation du degré $2^{i-1} k'$ a un tel facteur. De même toute équation du degré $2^{i-1} k'$ aura un facteur réel du ſecond degré, ſi toute équation du degré $2^{i-2} k''$ a auſſi un facteur réel du ſecond degré. On peut continuer le même raiſonnement juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à l'équation du degré $2h$, h étant un nombre impair ; mais on vient de voir que celle-ci avoit néceſſairement un facteur réel du ſecond degré. Nous en conclurons donc, en rétrogradant, qu'une équation du degré $2^i k$ a un facteur réel du ſecond degré. Donc, toute fonction entiere d'un degré quelconque, eſt réſoluble en facteurs réels, ſoit ſimples ſoit doubles.

On voit en même-temps, par ce qui précede, que les racines imaginaires des équations des degrés supérieurs peuvent être ramenées à la forme $A + B\sqrt{-1}$. Dalembert l'avoit démontré dans les Mémoires de l'Académie de Berlin; & sa démonstration s'étend aux autres quantités algébriques, quelque soit leur composition. En effet, il n'y a point de difficulté pour les cas, où les imaginaires sont combinées entr'elles par voie d'addition, de soustraction, de multiplication & de division. Car, 1°. $a + b\sqrt{-1} \pm c \pm g\sqrt{-1} = a \pm c + (b \pm g)\sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$. 2°. $(a + b\sqrt{-1})(c + g\sqrt{-1}) = \left\{\begin{matrix} ac + bc\sqrt{-1} \\ -bg + ag\sqrt{-1} \end{matrix}\right\} = A + B\sqrt{-1}$. 3°. $\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + g\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(c - g\sqrt{-1})}{(c + g\sqrt{-1})(c - g\sqrt{-1})} = \frac{\begin{matrix} ac + bc\sqrt{-1} \\ + bg - ag\sqrt{-1} \end{matrix}}{c^2 + g^2} = A + B\sqrt{-1}$. Il y a un cas qui présente plus de difficulté, & pour lequel le célèbre Géomètre que je viens de citer a employé le calcul différentiel; c'est celui où l'on auroit une puissance imaginaire de la forme $(a + b\sqrt{-1})^{g + h\sqrt{-1}}$. En voici une démonstration qui ne suppose que les principes exposés dans l'Introduction à l'Analyse infinitésimale.

Je fais $(a + b\sqrt{-1})^{g + h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$; A & B étant supposés des quantités réelles, qu'il s'agit de déterminer. En prenant de part & d'autre les logarithmes, on aura $l(A + B\sqrt{-1}) = (g + h\sqrt{-1})\, l(a + b\sqrt{-1})$. Or, $l(A + B\sqrt{-1}) = lA + l(1 + \frac{B}{A}\sqrt{-1}) = lA + \frac{B}{A}\sqrt{-1} + \frac{B^2}{2A^2} - \frac{B^3}{3A^3}\sqrt{-1} - \frac{B^4}{4A^4} + \frac{B^5}{5A^5}\sqrt{-1} + \&c$; $g\,l(a + b\sqrt{-1}) = g(la + \frac{b}{a}\sqrt{-1} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{3a^3}\sqrt{-1} - \frac{b^4}{4a^4} + \frac{b^5}{5a^5}\sqrt{-1} + \&c)$ & $h\sqrt{-1}$. $l(a + b\sqrt{-1}) = h\sqrt{-1}\,(la + \frac{b}{a}\sqrt{-1} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{3a^3}\sqrt{-1} - \frac{b^4}{4a^4} + \frac{b^5}{5a^5}\sqrt{-1} + \&c.)$

Donc

$l A+\frac{B^2}{2A^2}-\frac{B^4}{4A^4}+\frac{B^6}{6A^6}-\&c.+\frac{B}{A}\sqrt{-1}-\frac{B^3}{3A^3}\sqrt{-1}+\frac{B^5}{5A^5}\sqrt{-1}-\&c = g\left(l a+\frac{b^2}{2a^2}-\frac{b^4}{4a^4}+\&c.\right)-h\left(\frac{b}{a}-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{b^5}{5a^5}-\&c\right)+g\sqrt{-1}\left(\frac{b}{a}-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{b^5}{5a^5}-\&c\right)+h\sqrt{-1}\left(l a+\frac{b^2}{2a^2}-\frac{b^4}{4a^4}+\frac{b^6}{6a^6}-\&c\right)$ ou $l A+\frac{1}{2}l\left(1+\frac{B^2}{A^2}\right)+\sqrt{-1}.\ Ang.\ Tang.\frac{B}{A}=g\left(l a+\frac{1}{2}l\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\right)-h.\ Ang.\ Tang.\frac{b}{a}+g\sqrt{-1}\left(Ang.\ Tang.\frac{b}{a}\right)+h\sqrt{-1}\left(l a+\frac{1}{2}l\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\right).$

Mais lorſque les deux membres d'une équation renferment des quantités réelles & des quantités imaginaires, la ſomme des quantités réelles du premier membre eſt égale à celle des quantités réelles du ſecond membre, & par conſéquent celle des quantités imaginaires eſt auſſi égale de part & d'autre. Donc $l\sqrt{A^2+B^2}=g\,l\sqrt{a^2+b^2}-h.\ Ang.\ Tang.\ \frac{b}{a}=g\,l\sqrt{a^2+b^2}-h.\ Ang.\ Tang.\frac{b}{a}\,l e$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $=1$; & $Ang.\ Tang.\ \frac{B}{A}=g\left(Ang.\ Tang.\ \frac{b}{a}\right)+h\,l\sqrt{a^2+b^2}$; ou enfin $A^2+B^2=(a^2+b^2)^g\times e^{-2h\,Ang.\ Tang.\ \frac{b}{a}}$, & $\frac{B}{A}=Tang.\ Ang.\ (g\times Ang.\ Tang.\frac{b}{a}+h\,l\sqrt{a^2+b^2})$; ce qui donne évidemment des valeurs réelles pour A & pour B. Donc une quantité algébrique, compoſée d'autant d'imaginaires qu'on voudra, peut toujours être ramenée à la forme $A+B\sqrt{-1}$.

(x) ART. 168. On a, comme on le voit à l'article 181, l'équation $\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\&c=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn\ tang.\ \frac{m}{n}\pi}$; ce qui donne, en faiſant $m=1$,

$$\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{9n^2-1}+\frac{1}{16n^2-1}+\frac{1}{25n^2-1}+\&c=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2n\ tang.\ \frac{\pi}{n}},$$

En réduisant chacune de ces fractions en séries, on aura

$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^8} + \frac{1}{n^{10}} + \frac{1}{n^{12}} + \&c.$

$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4^2n^4} + \frac{1}{4^3n^6} + \frac{1}{4^4n^8} + \frac{1}{4^5n^{10}} + \frac{1}{4^6n^{12}} + \&c.$

$\frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{9n^2} + \frac{1}{9^2n^4} + \frac{1}{9^3n^6} + \frac{1}{9^4n^8} + \&c.$

$\frac{1}{16n^2-1} = \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{16^2n^4} + \&c.$

&c. = &c.

Faisant ensuite une somme des termes de chaque colonne, & supposant, pour cet effet,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c = A\,\pi^2$$
$$1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \&c = B\,\pi^4$$
$$1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \&c = C\,\pi^6$$
$$1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \&c = D\,\pi^8,$$

&c.

l'équation deviendra $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\,n\,tang.\,\frac{\pi}{n}} = \frac{A\pi^2}{n^2} + \frac{B\pi^4}{n^4} + \frac{C\pi^6}{n^6} + \frac{D\pi^8}{n^8} + \&c.$

Soit à présent $\frac{\pi}{n} = x$ pour faire disparoître à la fois les lettres π & n, on aura $\frac{1}{2} - \frac{x}{2\,tang.\,x}$ ou $\frac{\sin x - x\cos x}{2\sin x} = A\,x^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \&c$, que pour abréger, je représenterai par s. Ainsi $s = \frac{\sin x - x\cos x}{2\sin x}$ ou $s.\ \sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\,x\cos x$. Or, $\sin x = \alpha\,x - \beta\,x^3 + \gamma\,x^5 - \delta\,x^7 + \varepsilon\,x^9 - \&c$, en supposant $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{1.2.3}$, $\gamma = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, $\delta = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$ &c. & comme $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2..5.6} + \frac{x^8}{1.2..7.8}$ &c; on aura $\cos x = \alpha - 3\,\beta\,x^2 + 5\,\gamma\,x^4 - 7\,\delta\,x^6 + 9\,\varepsilon\,x^8 - \&c.$ Donc $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\,x\cos x = \beta\,x^3 - 2\,\gamma\,x^5 + 3\,\delta\,x^7 - 4\,\varepsilon\,x^9 + 5\,\zeta\,x^{11} - \&c = s.\sin x$. Or, la valeur de s étant multipliée par celle de $\sin x$, donnera

$s\ \sin x$

$$
\begin{array}{rllllllll}
s \sin x = & \alpha A x^3 & + \alpha B x^5 & + \alpha C x^7 & + \alpha D x^9 & + \alpha E x^{11} & + \alpha F x^{13} & + \&c. \\
& & - \beta A & - \beta B & - \beta C & - \beta D & - \beta E & - \&c. \\
& & & + \gamma A & + \gamma B & + \gamma C & + \gamma D & + \&c. \\
& & & & - \delta A & - \delta B & - \delta C & - \&c. \\
& & & & & + \varepsilon A & + \varepsilon B & + \&c. \\
& & & & & & - \zeta A & - \&c. \\
& & & & & & & + \&c.
\end{array}
$$

expreſſion, qui doit être égale à la premiere. Par conſéquent, en égalant les coëfficients des puiſſances égales, on aura, pour trouver les indéterminées A, B, C, &c, les équations ſuivantes, qu'on pourra continuer tant qu'on voudra.

$A = \beta$, à cauſe de $\alpha = 1$
$B = \beta A - 2\gamma$
$C = \beta B - \gamma A + 3\delta$
$D = \beta C - \gamma B + \delta A - 4\varepsilon$
$E = \beta D - \gamma C + \delta B - \varepsilon A + 5\zeta$
$F = \beta E - \gamma D + \delta C - \varepsilon B + \zeta A - 6\eta$.
&c. = &c.

(y) ART. 183. Les mêmes ſéries peuvent ſe déduire de l'art. 162. En effet, la ſeconde combinaiſon de l'art. 162, en faiſant $y = v\sqrt{-1}$, & $c = g\sqrt{-1}$, donne comme on le voit à l'article 163, $\frac{\sin g + \sin v}{\sin g} = 1 + \frac{v}{\sin g} - \frac{v^3}{1.2.3 \sin g} + \frac{v^5}{1.2\ldots5 \sin g} - \&c. = \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)$ &c. Donc $\frac{1}{\sin g} = \frac{1}{g} + \frac{2g}{\pi^2-g^2} - \frac{2g}{4\pi^2-g^2} + \frac{2g}{9\pi^2-g^2} - \frac{2g}{16\pi^2-g^2} + \&c.$ & $\frac{g}{2\sin g} - \frac{1}{2} = \frac{g^2}{\pi^2-g^2} - \frac{g^2}{4\pi^2-g^2} + \frac{g^2}{9\pi^2-g^2} - \frac{g^2}{16\pi^2-g^2} + \&c.$ Faiſant $g = b\pi\sqrt{-1}$, & par conſéquent $g^2 = -b^2\pi^2$, on aura $\frac{b\pi\sqrt{-1}}{2\sin b\pi\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} = -\frac{b^2}{1+b^2} + \frac{b^2}{4+b^2} - \frac{b^2}{9+b^2} + \frac{b^2}{16+b^2} - \&c.$ Donc $\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{4+b^2} + \frac{1}{9+b^2} - \frac{1}{16+b^2} + \&c = \frac{1}{2b^2} - \frac{b\pi\sqrt{-1}}{2b^2 \sin b\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2b^2} - \frac{\pi b}{(e^{b\pi} - e^{-b\pi})b^2}$, à cauſe de $2\sin b\pi\sqrt{-1} = \frac{e^{-b\pi} - e^{b\pi}}{\sqrt{-1}}$;

& enfin en écrivant b au lieu de b^2 & $\sqrt{b}$ au lieu de b,
$\frac{1}{1+b}-\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}-\frac{1}{16+b}+\&c=\frac{1}{2b}-\frac{\pi\sqrt{b}}{(e^{\pi\sqrt{b}}-e^{-\pi\sqrt{b}})b}$.

La premiere formule de l'art. 162 $\frac{e^{x}+e^{c-x}}{1+e^{c}}=$ (164) $\frac{e^{x}+e^{-x}+e^{c-x}+e^{-c+x}}{2+e^{c}+e^{-c}}$, &, en faisant $c=g\sqrt{-1}$, & $x=z\sqrt{-1}$; elle se change en $\frac{\cos z+\cos(g-z)}{1+\cos g}=\cos z+\frac{\sin g\sin z}{1+\cos g}=1+z\frac{\sin g}{1+\cos g}-\frac{z^2}{1.2}-\&c=\left(1+\frac{2z}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{3\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{5\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{5\pi+g}\right)$ &c. Donc
$\frac{\sin g}{1+\cos g}=\frac{2}{\pi-g}-\frac{2}{\pi+g}+\frac{2}{3\pi-g}-\frac{2}{3\pi+g}+\frac{2}{5\pi-g}-\frac{2}{5\pi+g}+\&c.$
ou $\frac{\sin g}{1+\cos g}=\frac{4g}{\pi^2-g^2}+\frac{4g}{9\pi^2-g^2}+\frac{4g}{25\pi^2-g^2}+\&c.$ Retranchant la série $\frac{1}{\sin g}=\frac{1}{g}+\frac{2g}{\pi^2-g^2}-\frac{2g}{4\pi^2-g^2}+$ &c de celle-ci; on aura $\frac{\sin g}{1+\cos g}-\frac{1}{\sin g}=-\frac{1}{g}+\frac{2g}{\pi^2-g^2}+\frac{2g}{4\pi^2-g^2}+\frac{2g}{9\pi^2-g^2}+$ &c ou $\frac{g(\sin^2 g-1-\cos g)}{\sin g(1+\cos g)}=-\frac{g\cos g(\cos g+1)}{\sin g(1+\cos g)}=-\frac{g\cos g}{\sin g}=-1+\frac{2g^2}{\pi^2-g^2}+\frac{2g^2}{4\pi^2-g^2}+\frac{2g^2}{9\pi^2-g^2}+$ &c. Soit $g=b\pi\sqrt{-1}$ & par conséquent $g^2=-b^2\pi^2$, on aura $\frac{b\pi\sqrt{-1}}{2b^2}\,\frac{\cos b\pi\sqrt{-1}}{\sin b\pi\sqrt{-1}}-\frac{1}{2b^2}=\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{4+b^2}+\frac{1}{9+b^2}+\&c=\frac{b\pi\sqrt{-1}}{2b^2}.\sqrt{-1}.\frac{e^{-\pi b}+e^{\pi b}}{e^{-\pi b}-e^{\pi b}}-\frac{1}{2b^2}=\frac{b\pi}{2b^2}.\frac{e^{\pi b}+e^{-\pi b}}{e^{\pi b}-e^{-\pi b}}-\frac{1}{2b^2}$, à cause de $2\cos b\pi\sqrt{-1}=e^{-b\pi}+e^{b\pi}$ & de $2\sqrt{-1}.\sin b\pi\sqrt{-1}=e^{-\pi b}-e^{\pi b}$. Donc enfin en écrivant b pour b^2, on aura $\frac{1}{1+b}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}+\frac{1}{16+b}+\&c=\frac{e^{\pi\sqrt{b}}+e^{-\pi\sqrt{b}}}{2b(e^{\pi\sqrt{b}}-e^{-\pi\sqrt{b}})}$

$\times \pi \sqrt{b} - \frac{1}{2b}$. Ces résultats, comme on voit, s'accordent exactement avec ceux qu'Euler a donnés.

CHAPITRE XI.

(z) ART. 179. Il ne faut qu'une légere attention pour voir que la série $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} +$ &c, peut se déduire de la série $\frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{1}{11^m} +$ &c, en retranchant celle-ci de la série $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} +$ &c.

CHAPITRE XII.

(aa) ART. 203. Il ne faut pas croire que la méthode donnée ici par Euler, soit toujours la plus commode & la plus expéditive. On arrivera plus promptement au but, en faisant dans le premier exemple $\frac{zz}{(1-z+z^2)(1+z^4)} = \frac{A+Bz}{1-z+z^2} + \frac{C+Dz+Ez^2+Fz^3}{1+z^4}$. Après avoir réduit les deux membres au même dénominateur & fait passer tous les termes d'un même côté, on égalera à zéro, séparément, la somme des coëfficients des mêmes puissances de z; ce qui donnera autant d'équations que d'inconnues; lesquelles on traitera suivant les regles ordinaires. On pourroit semblablement faire dans le second exemple $\frac{1+z+z^2}{(1+z\sqrt{2}+z^2)(1-z\sqrt{2}+z^2)} = \frac{A+Bz}{1+z\sqrt{2}+z^2} + \frac{C+Dz}{1-z\sqrt{2}+z^2}$; & dans le troisieme $\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{3}z+z^2)(1+2z+3z^2)} = \frac{A+Bz}{1-\frac{8}{3}z+z^2} + \frac{C+Dz}{1+2z+3z^2}$. Le calcul seroit plus simple & plus facile Il en sera de même des autres cas, où le nombre des indéterminées ne sera pas trop grand. Cette derniere méthode consiste, comme on voit, à égaler la fonction fractionnaire à autant d'autres fractions partielles qu'il y a de facteurs dans son dénominateur, & à donner à chacune de ces fractions un numérateur dans lequel le plus grand exposant de la variable soit moindre d'une unité que celui du dénominateur.

(*bb*) ART. 217. Quoiqu'on n'apperçoive pas du premier coup-d'œil quel est le terme général de la série, on voit cependant, en y regardant de plus près, que pour les termes où l'exposant de z est impair, le terme général est $2Ap^n(cos.\varphi + cos.3\varphi + cos.5\varphi + \ldots + cos.n\varphi)$, & que pour ceux où l'exposant est pair, le terme général est $2Ap^n(cos.2\varphi + cos.4\varphi + \ldots + cos.n\varphi + \frac{1}{2})$; or, (art. 260) la somme des cosinus d'un certain nombre d'arcs, qui forment une progression arithmétique, & dont le premier est a, la différence b & le dernier $a + kb = \frac{cos(a+\frac{1}{2}kb)(sin\frac{1}{2}(k+1)b)}{sin\frac{1}{2}b}$. En substituant dans cette derniere formule au lieu de a, b & k, les valeurs qui conviennent; c'est-à-dire, pour le premier cas, faisant $a = \varphi$, $b = 2\varphi$, $(n-1)\varphi = k.2\varphi$, ou $k = \frac{n-1}{2}$; & pour le second, $a = 0$, $b = 2\varphi$, & $k = \frac{n}{2}$, ou plus simplement, faisant attention que la somme dont on vient de parler est égale au produit du cosinus de la moitié de la somme du plus grand & du plus petit arc multiplié par le sinus de la moitié de la différence des mêmes arcs augmentée de la raison de la progression, & divisé par le sinus de la moitié de la raison, il sera facile de ramener les deux premieres expressions à la forme générale $\frac{A\,sin(n+1)\varphi}{sin\,\varphi}$.

(*cc*). ART. 222. Je vais détailler ici le calcul qu'il faut faire en suivant un procédé analogue aux précédents pour trouver le terme général de la série, qui résulte du développement de la fraction $\frac{A + Bpz}{(1 - 2pz\,cos\varphi + p^2z^2)^4}$; & cela afin de mettre ceux que sa longueur ne rebutera pas, à portée de s'exercer utilement.

1°. La quantité suivante, que je désigne par (*A*)

$$\frac{f - 4pz(f cos.\varphi - g sin.\varphi) + 6p^2z^2(f cos.2\varphi - g sin.2\varphi) - 4p^3z^3(f cos.3\varphi - g sin.3\varphi) + p^4z^4(f cos.4\varphi - g sin.4\varphi)}{(1 - 2pz\,cos.\varphi + p^2z^2)^4}$$

a pour terme général; $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}(f cos.n\varphi + g sin.n\varphi)p^nz^n$. (*C*)

2°. $\frac{a+bpz+cp^2z^2}{(1-2pz\,\cos.\varphi+p^2z^2)^3}$ ou $\frac{(a+bpz+cp^2z^2)(1-2pz\,\cos.\varphi+p^2z^2)}{(1-2pz\,\cos.\varphi+p^2z^2)^4}$, ou enfin

$$\frac{\begin{array}{l} a+bpz+cp^2z^2 \\ -2apz\cos.\varphi-2bp^2z^2\cos.\varphi-2cp^3z^3\cos.\varphi \\ \quad +ap^2z^2 \qquad +bp^3z^3 \qquad +cp^4z^4 \end{array}}{(1-2pz\,\cos.\varphi+p^2z^2)^4}\ (B)$$

a pour terme général

$$\frac{ap^nz^n}{16(\sin.\varphi)^5}\left(\frac{(n+5)(n+4)}{1\,.\,2}\sin.(n+1)\varphi-2\frac{(n+1)(n+5)}{1\,.\,2}\sin.(n+3)\varphi+\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}\sin.(n+5)\varphi\right)$$
$$+\frac{bp^nz^n}{16(\sin.\varphi)^5}\left(\frac{(n+4)(n+3)}{1\,.\,2}\sin.n\varphi-2\frac{n\,.\,(n+4)}{1\,.\,2}\sin.(n+2)\varphi+\frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\sin.(n+4)\varphi\right)$$
$$+\frac{cp^nz^n}{16(\sin.\varphi)^5}\left(\frac{(n+3)(n+2)}{1\,.\,2}\sin.(n-1)\varphi-2\frac{(n-1)(n+3)}{1\,.\,2}\sin.(n+1)\varphi+\frac{(n-1)\,n}{1\,.\,2}\sin.(n+3)\varphi\right)$$

lequel je représente par (D). Soit $(A)+(B)=\frac{A}{(1-2pz\cos.\varphi+p^2z^2)^4}$. Donc $\frac{A}{(1-2pz\cos.\varphi+p^2z^2)^4}$ aura pour terme général $(C)+(D)$.

Cela posé, on aura pour trouver les cinq indéterminées a, b, c, f, g, les cinq équations suivantes : 1°. $a+f=A$; 2°. $4f\cos.\varphi-4g\sin.\varphi+2a\cos.\varphi-b=0$; 3°. $6f\cos.2\varphi-6g\sin.2\varphi-2b\cos.\varphi+a+c=0$; 4°. $4f\cos.3\varphi-4g\sin.3\varphi+2c\cos.\varphi-b=0$; 5°. $f\cos.4\varphi-g\sin.4\varphi+c=0$. Si on élimine suivant les regles ordinaires a, b, c, & g, en observant qu'en général $2\cos.\varphi\,.\cos.m\varphi=\cos.(m+1)\varphi+\cos.(m-1)\varphi$, & que $2\cos.\varphi\sin.m\varphi=\sin(m+1)\varphi+\sin.(m-1)\varphi$, on arrivera à l'équation $f[(3\sin.2\varphi-3\sin.4\varphi+\sin.6\varphi)(2\cos.\varphi-3\cos.3\varphi+\cos.5\varphi)-(3\cos.2\varphi-3\cos.4\varphi+\cos.6\varphi-1)(4\sin.\varphi-3\sin.3\varphi+\sin.5\varphi)]=A[4\sin.\varphi-3\sin.3\varphi+\sin.5\varphi-2\cos.\varphi(3\sin.2\varphi-3\sin.4\varphi+\sin.6\varphi)]$. Faisant les multiplications indiquées, & réduisant, en mettant à la place des produits de sinus & de cosinus, leurs valeurs en sinus ou en cosinus d'arcs multiples, on trouvera, après toute réduction faite, pour le multiplicateur de f, la quantité $35\sin.\varphi-21\sin.3\varphi+7\sin.5\varphi-\sin.7\varphi=64(\sin.\varphi)^7$, & pour celui de A, la quantité $\sin.\varphi - 3\sin.3\varphi + 3\sin.5\varphi - \sin.7\varphi$. Donc, on aura pour f, g, a, b, c, les valeurs suivantes :

$$f = \mathrm{A}\left(\frac{\sin.\varphi - 3\sin.3\varphi + 3\sin.5\varphi - \sin.7\varphi}{64(\sin.\varphi)^7}\right)$$

$$g = \mathrm{A}\left(\frac{\cos.\varphi - 3\cos.3\varphi + 3\cos.5\varphi - \cos.7\varphi}{64(\sin.\varphi)^7}\right)$$

$$a = 2\mathrm{A}\left(\frac{17\sin.\varphi - 9\sin.3\varphi + 2\sin.5\varphi}{64(\sin.\varphi)^7}\right)$$

$$b = 2\mathrm{A}\left(\frac{2\sin.2\varphi - \sin.4\varphi}{64(\sin.\varphi)^7}\right)$$

$$c = 2\mathrm{A}\left(\frac{\sin.3\varphi - 3\sin.\varphi}{64(\sin.\varphi)^7}\right)$$

Donc $\frac{\mathrm{A}}{(1 - 2pz\cos.\varphi + p^2z^2)^4}$ a pour terme général

$$\frac{\mathrm{A}p^nz^n}{64(\sin.\varphi)^7}\Bigg[\left(\frac{n+5}{1}.\frac{n+4}{2}.\sin.(n+1)\varphi - 2.\frac{n+1}{1}.\frac{n+5}{2}.\sin.(n+3)\varphi + \frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\sin.(n+5)\varphi\right)\left(\frac{34\sin.\varphi - 18\sin.3\varphi + 4\sin.5\varphi}{16(\sin\varphi)^5}\right) + \left(\frac{n+4}{1}.\frac{n+3}{2}.\sin.n\varphi - 2.\frac{n}{1}.\frac{n+4}{2}.\sin.(n+2)\varphi + \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\sin.(n+4)\varphi\right)\left(\frac{4\sin.2\varphi - 2\sin.4\varphi}{16(\sin.\varphi)^5}\right)$$
$$+ \left(\frac{n+3}{1}.\frac{n+2}{2}.\sin.(n-1)\varphi - 2.\frac{n-1}{1}.\frac{n+3}{2}.\sin.(n+1)\varphi + \frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\sin.(n+3)\varphi\right)\left(\frac{2\sin.3\varphi - 6\sin.\varphi}{16(\sin.\varphi)^5}\right) + \frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\frac{n+3}{3}.\left(\sin.(n+1)\varphi - 3\sin.(n+3)\varphi + 3\sin.(n+5)\varphi - \sin.(n+7)\varphi\right)\Bigg],$$

& en mettant pour $34\sin.\varphi - 18\sin.3\varphi + 4\sin.5\varphi$, $4\sin.2\varphi - 2\sin.4\varphi$, & $2\sin.3\varphi - 6\sin.\varphi$ leurs valeurs $64(\sin.\varphi)^5 - 8(\sin.\varphi)^3$, $2\cos.\varphi.8(\sin.\varphi)^1$, $-8(\sin.\varphi)^3$, le terme général deviendra

$$\frac{\mathrm{A}p^nz^n}{64(\sin.\varphi)^7}\Bigg[\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\frac{n+3}{3}\left(\sin.(n+1)\varphi - 3\sin.(n+3)\varphi + 3\sin.(n+5)\varphi - \sin.(n+7)\varphi\right) + 4.\frac{n+5}{1}.\frac{n+4}{2}.\sin.(n+1)\varphi - 8.\frac{n+1}{1}.\frac{n+5}{2}.\sin.(n+3)\varphi + 4.\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\sin.(n+5)\varphi +$$
$$\frac{8(\sin.\varphi)^3}{16(\sin.\varphi)^5}\left(-\frac{n+5}{1}.\frac{n+4}{2}.\sin.(n+1)\varphi + 2.\frac{n+1}{1}.\frac{n+5}{2}.\sin.(n+3)\varphi\right.$$

$-\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\sin.(n+5)\varphi+\Big(\frac{n+4}{1}.\frac{n+3}{2}.\sin.n\varphi-2.\frac{n}{1}.\frac{n+4}{2}.$ $\sin.(n+2)\varphi+\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\sin.(n+4)\varphi\Big)2\cos.\varphi-\frac{n+3}{1}.\frac{n+2}{2}.$ $\sin.(n-1)\varphi+2.\frac{n-1}{1}.\frac{n+3}{2}.\sin.(n+1)\varphi-\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.$ $\sin.(n+3)\varphi\Big)\Big]$. La partie $\frac{8(\sin.\varphi)^2}{16(\sin.\varphi)^5}\Big(-\frac{n+5}{1}.\frac{n+4}{2}.\sin(n+1)\varphi$ $+$ &c. $+\Big(\frac{n+4}{1}.\frac{n+3}{2}.\sin.n\varphi-$ &c.$\Big)2\cos.\varphi-\frac{n+3}{1}.\frac{n+2}{2}.$ $\sin.(n-1)\varphi+$ &c$\Big)$, après les transformations & réductions nécessaires, se change à la fin en $-6\sin.(n+1)\varphi$ $-2n\sin.(n+1)\varphi+2n\sin.(n+3)\varphi+2\sin(n+3)\varphi$. En ajoutant cette partie à la premiere, & réduisant, on trouvera enfin pour le terme général de $\frac{A}{(1-2pz\cos.\varphi+p^2z^2)^4}$ la quantité $\frac{Ap^nz^n}{64(\sin.\varphi)^7}\Big[\frac{n+7}{1}.\frac{n+6}{2}.\frac{n+5}{3}.\sin.(n+1)\varphi-3\frac{n+1}{1}.\frac{n+6}{2}.\frac{n+7}{3}.$ $\sin.(n+3)\varphi+3.\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\frac{n+7}{3}.\sin.(n+5)\varphi-\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\frac{n+3}{3}.$ $\sin.(n+7)\varphi.\Big]$. D'où il est facile de conclure le terme général de la fraction $\frac{A+Bpz}{(1-2pz\cos.\varphi+p^2z^2)^4}$.

En examinant avec un peu d'attention la maniere dont les termes généraux trouvés jusqu'ici sont composés, on en déduira aisément par induction les termes généraux ultérieurs. On en conclura, par exemple, que le terme général de la fraction $\frac{A}{(1-2pz\cos.\varphi+p^2z^2)^5}$ sera $\frac{Ap^nz^n}{256(\sin.\varphi)^9}\Big[\frac{n+9}{1}.\frac{n+8}{2}.\frac{n+7}{3}.$ $\frac{n+6}{4}.\sin.(n+1)\varphi-4.\frac{n+9}{1}.\frac{n+8}{2}.\frac{n+7}{3}.\frac{n+1}{4}.\sin.(n+3)\varphi$ $+6.\frac{n+9}{1}.\frac{n+8}{2}.\frac{n+1}{3}.\frac{n+2}{4}.\sin.(n+5)\varphi-4.\frac{n+9}{1}.\frac{n+1}{2}.$ $\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.\sin.(n+7)\varphi+\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\frac{n+3}{3}.\frac{n+4}{4}.\sin.(n+9)\varphi\Big]$.

Cependant, pour ne laisser aucune incertitude sur la légitimité de cette conclusion, nous allons chercher directement une formule générale, après avoir établi auparavant deux propositions qui nous seront nécessaires.

I.

Si y est une fonction d'un nombre quelconque de facteurs variables, & $y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}$, &c, ce que devient cette fonction, lorsqu'on met successivement à la place de la variable de chaque facteur, cette variable, augmentée de sa différence, prise une, deux, trois, quatre, cinq, &c. fois, & que je suppose ici constante. La différence premiere de la fonction sera évidemment $y'-y$; la différence seconde sera $(y''-y')-(y'-y)=y''-2y'+y$; la différence troisieme sera $[(y'''-y'')-(y''-y')]-[(y''-y')-(y'-y)]=y'''-3y''+3y'-y$. La différence quatrieme sera de même $y^{IV}-4y'''+6y''-4y'+y$; & en général, la différence n^{e} sera $\pm(y-ny'+n.\frac{n-1}{2}y''-n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.y'''+\text{\&c.})$ suivant que n sera un nombre pair ou impair.

II.

Si on a un nombre m de facteurs variables, p, q, r, s, t, &c. dont les différences constantes soient a, b, c, d, e, &c; je dis que la différence n^{e}, du produit de ce nombre m de facteurs, sera zéro, si n est $> m$. Pour abréger & faciliter le calcul, prenons pour m un nombre déterminé, 3, par exemple, & soient les facteurs p, q, r, dont les différences constantes sont a, b, & c; la différence n^{e} sera, par la premiere proposition,

$$\begin{aligned}
&pqr\\
&-n.(pqr+a.qr+b.pr+c.pq+ab.r+ac.q+bc.p+abc)\\
&+n.\tfrac{n-1}{2}.(pqr+2a.qr+2b.pr+2c.pq+2^2ab.r+2^2ac.q+2^2bc.p+2^3abc)\\
&-n.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{3}.(pqr+3a.qr+3b.pr+3c.pq+3^2ab.r+3^2ac.q+3^2bc.p+3^3abc)\\
&+n.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{3}.\tfrac{n-3}{4}.(pqr+4a.qr+4b.pr+4c.pq+4^2ab.r+4^2ac.q+4^2bc.p+4^3abc)\\
&-\text{\&c.}
\end{aligned}$$

Or,

Or, ſuivant ce qu'on a vu Chapitre IV, Article 67, la ſomme des termes, qui forment chaque colonne verticale, eſt égale à zéro tant que n eſt plus grande que les expoſants des coëfficients 1, 2, 3, 4, &c. Donc, ſi n eſt elle-même plus grande que m, la totalité ſera zéro. Donc, en général, la différence n^e d'un nombre m de facteurs eſt nulle, pourvu que n ſoit plus grande que m.

Cela poſé, on pourra déterminer par la méthode ſuivante, que je dois à l'amitié du C. Laplace, le coëfficient de z^n dans le développement de la fonction $\frac{1}{(1-2z\cos.\varphi+z^2)^i}$.

Je mets cette fonction ſous la forme $\frac{1}{\left(1-ze^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1-ze^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^i}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbole eſt 1. Or, $\frac{1}{\left(1-ze^{\pm\varphi\sqrt{-1}}\right)^i}$ ou $\left(1-ze^{\pm\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-i}=1+\frac{i}{1}ze^{\pm\varphi\sqrt{-1}}+\frac{i}{1}.\frac{i+1}{2}.z^2e^{\pm2\varphi\sqrt{-1}}+\frac{i}{1}.\frac{i+1}{2}.\frac{i+2}{3}.z^3e^{\pm3\varphi\sqrt{-1}}+\frac{i}{1}.\frac{i+1}{2}.\frac{i+2}{3}.\frac{i+3}{4}.z^4e^{\pm4\varphi\sqrt{-1}}+$ &c. Donc (art. 215) le coëfficient de z^n dans la fonction $\frac{1}{(1-2z\cos\varphi+z^2)^i}$, en ne conſervant que les puiſſances poſitives de $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, ſera

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots i-1}\left\{\begin{array}{l}(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+i-1)e^{n\varphi\sqrt{-1}}\\+\frac{i}{1}n.(n+1)\ldots\ldots\ldots\ldots(n+i-2)e^{(n-2)\varphi\sqrt{-1}}\\+\frac{i}{1}\frac{i+1}{2}(n-1)n\ldots\ldots\ldots(n+i-3)e^{(n-4)\varphi\sqrt{-1}}\\+\frac{i}{1}\frac{i+1}{2}\frac{i+2}{3}(n-2)(n-1)\ldots\ldots(n+i-4)e^{(n-6)\varphi\sqrt{-1}}\\+\text{ \&c.}\end{array}\right\} \quad (a)$$

Si on multiplie ce ſecond facteur, par la ſuite, $e^{(2i-1)\varphi\sqrt{-1}}-\frac{2i-1}{1}.e^{(2i-3)\varphi\sqrt{-1}}+\frac{2i-1}{1}.\frac{2i-2}{2}e^{(2i-5)\varphi\sqrt{-1}}-\frac{2i-1}{1}.\frac{2i-2}{2}.$

$$\frac{2i-3}{3}\, e^{(2i-7)\varphi\sqrt{-1}} + \frac{2i-1}{1}\cdot\frac{2i-2}{2}\cdot\frac{2i-3}{3}\cdot\frac{2i-4}{4}\, e^{(2i-9)\varphi\sqrt{-1}} - \&c,$$

laquelle exprime la valeur de $(e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}})^{2i-1} = (2\sqrt{-1})^{2i-1}(\sin\varphi)^{2i-1}$; on aura pour le coëfficient de $e^{(n+2i-2r-1)\varphi\sqrt{-1}}$

$$(a')\quad \frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)1.2.3\ldots r}\times\left\{\begin{array}{l} i(i+1)(i+2)\ldots.(i+r-1)(n-r+1)(n-r+2)\ldots.(n+i-r-1) \\ -\frac{r}{1}.i(i+1)(i+2)\ldots..(i+r-2)(n-r+2)(n-r+3)\ldots\ldots(n+i-r)(2i-1) \\ +\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.i(i+1)(i+2)\ldots.(1+r-3)(n-r+3)(n-r+4)\ldots.(n+i-r+1)(2i-1)(2i-2) \\ -\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.\frac{r-2}{3}.i(i+1)(i+2)\ldots\ldots(1+r-4)(n-r+4)(n-r+5)\ldots\ldots(n+i-r+2) \\ \qquad (2i-1)(2i-2)(2i-3) \\ +\ \&c. \end{array}\right\}$$

On doit observer dans cette fonction, d'écrire l'unité au lieu du produit $i(i+1)(i+2)\ldots\ldots(i+r-1)$, si $r=0$, c'est-à dire, si le facteur $i+r-1$ est plus petit que i. Dans ce cas & dans les cas semblables, cela indique que le produit de ces facteurs se réduit à l'unité.

Maintenant, si on suppose dans la fonction (a'), $n=s-2i$, elle deviendra

$$\frac{\pm\ 1}{1.2.3..(i-1)1.2.3\ldots r}\left\{\begin{array}{l} i.(i+1)(i+2)\ldots.(i+r-1)(i+r-s+1)\ldots..(2i+r-s-1) \\ -\frac{r}{1}i.(i+1)\ldots\ldots(i+r-2)(i+r-s)\ldots\ldots(2i+r-s-2)(2i-1) \\ +\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.i(i+1)\ldots.(i+r-3)(i+r-s-1)\ldots.(2i+r-s-3)(2i-1)(2i-2) \\ -\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.\frac{r-2}{3}.i(i+i)..(i+r-4)(i+r-s-2)\ldots(2i+r-s-4)(2i-1)(2i-2)(2i-3) \\ +\ \&c. \end{array}\right\}$$

J'ai mis au commencement le double signe $\pm$, parce qu'ayant changé les signes des facteurs, dans lesquels se trouve la lettre s, leur produit seroit négatif, lorsqu'ils seroient en nombre impair ; & si on fait $s=$ ou >1, mais $<r+1$, on pourra la représenter par

$$\frac{\pm\, i(i+1)\ldots.(2i-1)}{1.2.3\ldots.i-1).1.2.3\ldots..r}\left\{\begin{array}{l} (i+r-s+1)\ldots..(i+r-1)2i.(2i+1)\ldots..(2i+r-s-1) \\ -r.(i+r-s)\ldots\ldots(i+r-2)(2i-1)2i\ldots\ldots(2i+r-s-2) \\ +\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.(i+r-s-1)\ldots.(i+r-3)(2i-2)(2i-1)\ldots(2i+r-s-3) \\ -\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.\frac{r-2}{3}(i+r-s-2)\ldots.(1+r-4)(2i-3)(2i-2)\ldots.(2i+r-s-4) \\ +\ \&c. \end{array}\right\}$$

Le second facteur de cette quantité, est la différence finie r^e du nombre $r-1$ de facteurs $i+r-s+1$, $i+r-s+2$, ... $i+r-1$; $2i$, $2i+1$, ... $2i+r-s-1$. Cette différence est donc nulle, comme on vient de le voir. Ainsi la fonction (a') a pour facteurs $n+2i-s$, s étant $=$ ou >1 & $<r+1$. Elle a donc pour facteur le produit $(n+2i-1)$ $(n+2i-2)(n+2i-3)\ldots\ldots(n+2i-r)$. D'ailleurs, tous ses facteurs sont multipliées par le produit $(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+i-r-1)$, comme il est aisé de s'en assurer, en observant que le coëfficient de $e^{n+2i-2r-1}$ sera composé d'un nombre $r+1$ de termes, & que par conséquent, le dernier terme aura pour un de ses facteurs, $n-r+r+1$, ou $n+1$. Donc cette fonction est de la forme $Q(n+1)(n+2)\ldots(n+i-r-1)(n+2i-1)$ $(n+2i-2)\ldots\ldots(n+2i-r)$; (b); Q étant une fonction de i & de r, indépendante de n, puisque dans la fonction (b) la plus haute dimension est $(i-1)$, comme dans la fonction (a'). Pour déterminer Q, nous ferons n infinie; en comparant alors les deux fonctions (b) & (a'), & ne considérant que les coëfficients de n^{i-1}, nous aurons

$$Q=\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)1.2.3\ldots r}\left\{\begin{array}{l} i(i+1)(i+2)\ldots\ldots(i+r-1)\\ -\frac{r}{1}.i.(i+1)\ldots\ldots(i+r-2)(2i-1)\\ +\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.i.(i+1)\ldots\ldots(i+r-3)(2i-1)(2i-2)\\ -\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.\frac{r-2}{3}.i.(i+1)\ldots\ldots(i+r-4)(2i-2)(2i-3)\\ +\ \&c.\end{array}\right\}$$

Ce qui donne, en supposant $i=$ ou $<r$ & $=$ ou >1,

$$Q=\frac{i.(i+1)\ldots\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)1.2.3\ldots\ldots r}\left\{\begin{array}{l} 2i(2i+1)\ldots\ldots(i+r-1)\\ -\frac{r}{1}.(2i-1)2i\ldots\ldots(i+r-2)\\ +\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.(2i-2)(2i-1)\ldots(i+r-3)\\ -\ \&c.\end{array}\right\}$$

Ce dernier facteur est la différence finie r^e d'un nombre $r-i$ de facteurs; elle est donc nulle, & par conséquent Q a pour facteurs $(i-1)(i-2)\ldots\ldots(i-r)$; il est donc de la forme $\frac{P(i-1)(i-2)(i-3)\ldots\ldots(i-r)}{1.2.3\ldots(i-1)1.2.3\ldots\ldots r}$, P étant une fonction de r indépendante de i.

Pour la déterminer, nous supposerons i infini dans les deux expressions de Q, & nous aurons, en n'ayant égard qu'à la puissance la plus élevée de i, $P = 1 - r.2 + \frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.2^2 - \frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.\frac{r-2}{3}.2^3 +$ &c. ou $P = (-1)^r$. Donc la fonction $(a') =$

$$\frac{(-1)^r(i-1)(i-2)(i-3)\ldots(i-r)(n+1)(n+2)\ldots(n+i-r-1)(n+2i-1)(n+2i-2)\ldots(n+2i-r)}{1.2.3\ldots\ldots(i-1)1.2.3\ldots\ldots r}$$

Maintenant il est aisé de voir que dans le produit de la quantité (a) par $e^{(2i-1)\varphi\sqrt{-1}} - (2i-1)e^{(2i-3)\varphi\sqrt{-1}} + \frac{(2i-1)(2i-2)}{1.2}e^{(2i-5)\varphi\sqrt{-1}} -$ &c. le coëfficient de $\sin.(n+2i-2r-1)\varphi$ est

$$\frac{(-1)^r 2\sqrt{-1}.(i-1)(i-2)\ldots(i-r)(n+1)(n+2)\ldots(n+i-r-1)(n+2i-1)(n+2i-2)\ldots(n+2i-r)}{1.2.3\ldots\ldots(i-1)1.2.3\ldots\ldots r}$$

parce qu'il est évident que $-e^{-(n+2i-2r-1)\varphi\sqrt{-1}}$ aura le même coëfficient que $e^{(n+2i-2r-1)\varphi\sqrt{-1}}$ & que l'on a $2\sqrt{-1}.\sin.(n+2i-2r-1)\varphi = e^{(n+2i-2r-1)\varphi\sqrt{-1}} - e^{-(n+2i-2r-1)\varphi\sqrt{-1}}$. On aura donc, en ne perdant pas de vue que $e^{(2i-1)\varphi\sqrt{-1}} - (2i-1)e^{(2i-3)\varphi\sqrt{-1}} +$ &c. $= (2\sqrt{-1})^{2i-1}(\sin.\varphi)^{2i-1}$, ...

$$\frac{(\pm 1)(-1)^r(i-1)(i-2)\ldots(i-r)(n+1)(n+2)\ldots(n+i-r-1)(n+2i-1)(n+2i-2)\ldots(n+2i-r)}{2^{2i-2}(\sin.\varphi)^{2i-1}.1.2.3\ldots i-1.1.2.3\ldots r}$$

pour le coëfficient de $z^n \sin.(n+2i-2r-1)\varphi$ dans le développement de la fonction proposée. Le signe positif de (± 1) a lieu, lorsque i est un nombre impair, & le signe négatif, lorsque i est un nombre pair. Il sera facile de conclure de-là que le terme multiplié par z^n sera, en faisant successivement $2i - 2r - 1 = 1, = 3, = 5$, &c.

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)\, 2^{2i-2}(\sin.\varphi)^{2i-1}}\left\{\begin{array}{l}(n+2i-1)(n+2i-2)\ldots\ldots(n+i+1)\sin.(n+1)\varphi \\ -(i-1)(n+2i-1)\ldots\ldots(n+i+2)(n+1)\sin.(n+3)\varphi \\ +\frac{i-1}{1}.\frac{i-2}{2}(n+2i-1)\ldots(n+i+3)(n+1)(n+2)\sin.(n+5)\varphi \\ - \&c.\end{array}\right\}$$

ce qui donne la formule générale qu'Euler paroît avoir conclue par induction.

(dd) Art. 228. Au lieu de supposer X représenté par une expression de la forme $fP^2 + gPQ - h\,\mathrm{AB}\,\beta^n$, rien n'empêche de faire $X = fP^2 + gQ^2 - h\,\mathrm{AB}\,\beta^n$, & en opérant d'une maniere semblable, on trouve la seconde valeur $X = \frac{(\alpha\beta A - (\alpha\alpha - 2\beta)B)P^2 + (2B - \alpha A)QQ}{\alpha(BB - \alpha AB + \beta AA)} - \frac{2B\beta^n}{\alpha}$, d'où l'on conclud par l'élimination de β^n la valeur de $X = \frac{(\beta A - \alpha B)P^2 + 2BPQ - AQQ}{BB - \alpha AB + \beta AA}$; expression qu'on auroit pû trouver tout de suite en substituant dans la premiere valeur de $X = \frac{(2A\beta - \alpha B)P^2 + (2B - \alpha A)PQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} - A\beta^n$ la valeur de $\beta^n = \frac{QQ - \alpha PQ + \beta PP}{BB - \alpha AB + \beta AA}$.

(ee) Art. 230. Les équations $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = A$, $\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r = B$ & $\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = C$ donnent $\mathrm{A} = \frac{Aqr - B(q+r) + C}{(p-q)(p-r)}$; $\mathrm{B} = \frac{Apr - B(p+r) + C}{(q-p)(q-r)}$; $\mathrm{C} = \frac{Apq - B(p+q) + C}{(r-p)(r-q)}$. Par la même raison, les équations $\mathrm{A}p^n + \mathrm{B}q^n + \mathrm{C}r^n = P$; $\mathrm{A}p.p^n + \mathrm{B}q.q^n + \mathrm{C}r.r^n = Q$; $\mathrm{A}p^2.p^n + \mathrm{B}q^2.q^n + \mathrm{C}r^2.r^n = R$ donnent $\mathrm{A}p^n = \frac{Pqr - Q(q+r) + R}{(p-q)(p-r)}$; $\mathrm{B}q^n = \frac{Ppr - Q(p+r) + R}{(q-p)(q-r)}$; $\mathrm{C}r^n = \frac{Ppq - Q(p+q) + R}{(r-p)(r-q)}$. Donc, en multipliant, on aura la proportion

$$(Pqr - Q(q+r) + R)(Ppr - Q(p+r) + R)(Ppq - Q(p+q) + R) :$$
$$(Aqr - B(q+r) + C)(Apr - B(p+r) + C)(Apq - B(p+q) + C) ::$$

$p^n q^n r^n : 1$. Effectuant les multiplications, réduisant, & se rappellant que $p+q+r=\alpha$, $pq+pr+qr=\beta$ & $pqr=\gamma$, on arrivera au résultat indiqué.

CHAPITRE XIV.

(*ff*) ART. 234. Cherchons directement l'expression de $\sin. nz$. Pour cela, je fais

$$\sin. nz = x(A^{[n]}y^{n-1} - B^{[n]}y^{n-3} + C^{[n]}y^{n-5} - D^{[n]}y^{n-7} + E^{[n]}y^{n-9} - \&c).$$

La lettre n, mise entre deux crochets, indique la multiplicité de l'arc, auquel le coëfficient, qu'elle affecte, appartient. En conservant la même notation, on aura

$$\sin.(n-1)z = x(A^{[n-1]}y^{n-2} - B^{[n-1]}y^{n-4} + C^{[n-1]}y^{n-6} - D^{[n-1]}y^{n-8} + E^{[n-1]}y^{n-10} - \&c)$$

$$\& \sin.(n-2)z = x(A^{[n-2]}y^{n-3} - B^{[n-2]}y^{n-5} + C^{[n-2]}y^{n-7} - D^{[n-2]}y^{n-9} + E^{[n-2]}y^{n-11} - \&c.)$$

Or $\sin. nz = 2y \sin.(n-1)z - \sin.(n-2)z$; donc on aura cette seconde valeur,

$$\begin{aligned}\sin. nz = x&(2A^{[n-1]}y^{n-1} - 2B^{[n-1]}y^{n-3} + 2C^{[n-1]}y^{n-5} - 2D^{[n-1]}y^{n-7} + 2E^{[n-1]}y^{n-9} - \&c)\\ + x&(\quad - A^{[n-2]}y^{n-3} + B^{[n-2]}y^{n-5} - C^{[n-2]}y^{n-7} + D^{[n-2]}y^{n-9} - \&c.)\end{aligned}$$

Comparant cette seconde valeur de $\sin. nz$ à la premiere, & égalant les coëfficients des puissances semblables de y, on aura pour déterminer $A^{[n]}$, $B^{[n]}$, $C^{[n]}$, $D^{[n]}$, $E^{[n]}$, &c; les équations suivantes:

$$A^{[n]} = 2A^{[n-1]}.$$

$$B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2B^{[n-1]}.$$

$$C^{[n]} = B^{[n-2]} + 2C^{[n-1]}.$$

$$D^{[n]} = C^{[n-2]} + 2D^{[n-1]}.$$

$$E^{[n]} = D^{[n-2]} + 2E^{[n-1]}.$$

Or, par la même raison que $A^{[n]} = 2A^{[n-1]}$, $A^{[n-1]} = 2A^{[n-2]}$, ainsi des autres. Donc $A^{[n]} = 2A^{[n-1]} = 2^2 A^{[n-2]} = 2^3 A^{[n-3]} =$, en général, $2^x A^{[n-x]}$. Mais si on suppose $n - x = 1$, $x = n - 1$, & $A^{[n-x]}$ devient $A^{[1]} = 1$; donc $A^{[n]} = 2^{n-1}$.

L'équation $B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2B^{[n-1]}$, à cause de $B^{[n-1]} = A^{[n-3]} + 2B^{[n-2]}$, donne $B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2B^{[n-1]} = A^{[n-2]} + 2A^{[n-3]} + 2^2 B^{[n-2]} =$, en continuant de substituer, $A^{[n-2]} + 2A^{[n-3]} + 2^2 A^{[n-4]} + 2^3 B^{[n-3]}$, & en général,

$$B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2A^{[n-3]} + 2^2 A^{[n-4]} + 2^3 A^{[n-5]} + \ldots\ldots + 2^x A^{[n-x-2]} + 2^{x+1} B^{[n-x-1]}.$$

Mais, si on fait $n - x - 1 = 2$, ou $n - x - 2 = 1$, alors $B^{[n-x-1]} = B^{[2]} = 0$, & $A^{[1]} = 1$, & $x = n - 3$. Donc $B^{[n]} = (n-2)\,2^{n-3}$. De même

$$C^{[n]} = B^{[n-2]} + 2B^{[n-3]} + 2^2 B^{[n-4]} + \ldots\ldots + 2^x B^{[n-x-2]} + 2^{x+1} C^{[n-x-1]}.$$

Faisant $n - x - 1 = 4$ ou $n - x - 2 = 3$, ce qui donne $x = n - 5$, & observant que $C^{[4]} = 0$ & $B^{[3]} = 1$, on aura

$$C^{[n]} = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n - 4)\,2^{n-5} = \frac{(n-3)\,(n-4)}{1\ .\ 2}\,2^{n-5}.$$

$$D^{[n]} = C^{[n-2]} + 2C^{[n-3]} + 2^2 C^{[n-4]} + \ldots + 2^x C^{[n-x-2]} + 2^{x+1} D^{[n-x-1]}$$

& en faisant $n - x - 1 = 6$, ou $n - x - 2 = 5$, ce qui donnera $x = n - 7$; considérant de plus que $D^{[6]} = 0$, & $C^{[5]} = 1 = \frac{1.2}{1.2}$, on aura $D^{[n]} = \left(\frac{1.2}{1.2} + \frac{2.3}{1.2} + \frac{3.4}{1.2} + \frac{4.5}{1.2} + \ldots + \frac{(n-6)(n-5)}{1\ .\ 2}\right) 2^{n-7}$.

Or le terme général de la suite $1.2 + 2.3 + 3.4 +$ &c. $= t.(t+i) = t^2 + t$. Donc $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots\ldots + (n-6)(n-5) = S.t^2 + S.t = \frac{t.(t+1)(t+2)}{3}$. Donc

$$D^{[n]} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\,2^{n-7}$$

$E^{[n]} = D^{[n-2]} + 2D^{[n-3]} + 2^2 D^{[n-4]} + \ldots\ldots\ldots + 2^x D^{[n-x-2]} + 2^{x+1} E^{[n-x-1]}$. Soit $n - x - 1 = 8$ ou $n - x - 2 = 7$, auquel cas $x = n - 9$, $E^{[8]} = 0$, & $D^{[7]} = 1 = \frac{1.2.3}{1.2.3}$, on aura

$$E^{[n]} = \left(\frac{1.2.3}{1.2.3} + \frac{2.3.4}{1.2.3} + \frac{3.4.5}{1.2.3} + \ldots + \frac{(n-8)(n-7)(n-6)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\right) 2^{n-9}.$$

Mais le terme général de la ſuite $1 . 2 . 3 + 2 . 3 . 4 + 3 . 4 . 5 + \ldots\ldots + (n - 8)(n - 7)(n - 6) = t.(t + 1)(t + 2)$ ou $t^3 + 3t^2 + 2t$. Donc cette ſuite $= S.t^3 + 3.S.t^2 + 2S.t$. Or $S.t^3 = \frac{1}{4}t^2(t^2 + 2t + 1)$; $3.S.t^2 = \frac{t.(t+1)(2t+1)}{2}$; $2S.t = t.(t + 1)$. Donc

$$E^{[n]} = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} 2^{n-9}. \text{ \&c.}$$

Nota. La détermination des lettres $B^{[n]}$, $C^{[n]}$, $D^{[n]}$, $E^{[n]}$, &c. ſuppoſe, comme on vient de le voir, qu'on ſait trouver en général la ſomme d'un nombre quelconque de termes dans une progreſſion des puiſſances des nombres naturels. C'eſt ce qui eſt expliqué dans la plupart des Traités d'Algebre.

(gg) ART. 235. Dans la ſuite $\mathit{ſin}\, \frac{s}{n}$, $\mathit{ſin}.\, \frac{\pi - s}{n}$, $\mathit{ſin}.\, \frac{2\pi + s}{n}$, $\mathit{ſin}.\, \frac{3\pi - s}{n}$ &c; il eſt à propos de diſtinguer les cas où n eſt un nombre impair ou un nombre pair. Si n eſt un nombre impair, il faudra prendre pour x alternativement les termes de cette ſuite, & ſi n eſt un nombre pair, il faudra, au contraire, prendre les termes conſécutifs, juſqu'à ce qu'on en ait autant qu'il y a d'unités dans n. Il eſt d'abord évident que les mêmes ſinus reviendront, & dans le même ordre, lorſqu'on ſera arrivé à $\mathit{ſin}.\, \frac{2n\pi + s}{n}$; il y aura un nombre $2n$ de ſinus, qui précéderont celui-ci, & qui ſeront égaux deux à deux. Ce ſont ceux dont les arcs ajoutés $= \pi$ ou 3π, lorſque n eſt un nombre impair. Par exemple, ſi $n = 5$, on aura $\mathit{ſin}.\, \frac{s}{5} = \mathit{ſin}.\, \frac{5\pi - s}{5}$; $\mathit{ſin}.\, \frac{\pi - s}{5} = \mathit{ſin}.\, \frac{4\pi + s}{5}$; $\mathit{ſin}\, \frac{2\pi + s}{5} = \mathit{ſin}.\, \frac{3\pi - s}{5}$; $\mathit{ſin}.\, \frac{6\pi + s}{5} = \mathit{ſin}.\, \frac{9\pi - s}{5}$; $\mathit{ſin}.\, \frac{7\pi - s}{5} = \mathit{ſin}.\, \frac{8\pi + s}{5}$. Si n eſt un nombre pair, les n premiers termes ſeront égaux aux n derniers termes pris négativement;

négativement ; par exemple si $n = 6$, on aura $\mathit{sin.}\frac{s}{6} = -\mathit{sin.}\frac{6\pi+s}{6}$; $\mathit{sin.}\frac{\pi-s}{6} = -\mathit{sin.}\frac{7\pi-s}{6}$; $\mathit{sin.}\frac{2\pi+s}{6} = -\mathit{sin.}\frac{8\pi+s}{6}$; $\mathit{sin.}\frac{3\pi-s}{6} = -\mathit{sin.}\frac{9\pi-s}{6}$; $\mathit{sin.}\frac{4\pi+s}{6} = -\mathit{sin.}\frac{10\pi+s}{6}$; $\mathit{sin.}\frac{5\pi-s}{6} = -\mathit{sin.}\frac{11\pi-s}{6}$. En général, les sinus, qui sont égaux, aux signes près, appartiennent à des arcs dont la différence est π.

(hh). ART. 236. Pour trouver directement la formule générale $\mathit{sin.}\, nz = nx - n\frac{(nn-1)}{1.2.3}x^3 + \&c$, on pourroit suivre un procédé analogue à celui que nous avons employé pour l'article 234. On trouveroit pour déterminer $A^{[n]}$, $B^{[n]}$, $C^{[n]}$ &c, les équations $A^{[n]} = 2A^{[n-2]} - A^{[n-4]}$; $B^{[n]} = 2B^{[n-2]} - B^{[n-4]} + 4A^{[n-2]}$; $C^{[n]} = 2C^{[n-2]} - C^{[n-4]} + 4B^{[n-2]}$; $D^{[n]} =$ &c ; mais il sera beaucoup plus simple de substituer dans la valeur de $\mathit{sin.}\, nz$ donnée (art. 133) à la place de $(\mathit{cos.}\, z)^{n-1}$, $(\mathit{cos.}\, z)^{n-3}$, &c ; leurs valeurs $(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}$, &c. développées en séries ; en désignant par a, b, c, d, e &c les coëfficiens de x, x^3, x^5, &c, d'abord il sera facile de voir qu'ils renferment successivement 1, 2, 3, 4, &c. termes. Soient ces termes, pour le premier, A ; pour le second, B, B' ; pour le troisieme C, C', C'' ; ainsi de suite ; on aura

$$a = A$$
$$b = B + B'$$
$$c = C + C' + C''$$
$$d = D + D' + D'' + D'''$$
$$e = E + E' + E'' + E''' + E^{iv}$$
$$f = \&c.$$

Ces équations sont les mêmes, que les suivantes, qui font connoître la loi, suivant laquelle les coëfficients a, b, c, &c, dépendent les uns des autres.

$a = A$

$b = \frac{n-1}{2} . A + B'$

$c = \frac{1}{2} . \frac{n-3}{2} B + \frac{n-3}{2} . B' + C''$

$d = \frac{1}{3} . \frac{n-5}{2} . C + \frac{1}{2} . \frac{n-5}{2} C' + \frac{n-5}{2} C'' + D'''$

$e = \frac{1}{4} . \frac{n-7}{2} D + \frac{1}{3} . \frac{n-7}{2} D' + \frac{1}{2} . \frac{n-7}{2} D'' + \frac{n-7}{2} D''' + E^{IV}$

$f = \frac{1}{5} . \frac{n-9}{2} E + \frac{1}{4} . \frac{n-9}{2} E' + \frac{1}{3} . \frac{n-9}{2} E'' + \frac{1}{2} \frac{n-9}{2} E''' + \frac{n-9}{2} E^{IV} + F^{V}$

&c.

Si on fait attention que $A = n$, $B' = \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$, $C'' = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$ &c, on trouvera ſans peine en faiſant le calcul,

$a = n$

$b = \frac{n.(n^2-1)}{1.2.3}$

$c = \frac{n.(n^2-1)(n^2-9)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

$d = \frac{n.(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots 6.\ 7}$

$e = \frac{n.(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)(n^2-49)}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots 8.\ 9}$

&c.

Il eſt inutile, ſans doute, d'obſerver que les valeurs de b, d, f, &c, c'eſt-à-dire, les coëfficients de rang pair, doivent être pris négativement.

(*ii*) ART. 238. La formule générale *ſin.* $n z = (n x - \frac{n.(n^2-4)}{1.\ 2.\ 3} x^3 + \ldots\ldots \pm 2^{n-1} x^{n-1}) \sqrt{1-x^2}$ peut auſſi ſe déduire de la formule donnée (Art. 133). Il ne s'agira que de développer les puiſſances fractionnaires $(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{n-6}{2}}$, &c; de ſubſtituer leurs valeurs

& de multiplier ensuite le tout par $\sqrt{1-xx}$. En désignant, comme dans la note précédente, les coëfficiens de x, x^3, x^7, &c par a, b, c, d, &c, & les termes dont ils sont composés par A, $B+B'$, $C+C'+C''$, &c; on aura

$$a=A$$

$$b=\frac{n-2}{2}A+B'$$

$$c=\frac{1}{2}.\frac{n-4}{2}B+\frac{n-4}{2}B'+C''$$

$$d=\frac{1}{3}.\frac{n-6}{2}C+\frac{1}{2}.\frac{n-6}{2}C'+\frac{n-6}{2}C''+D'''$$

&c.

On trouvera, comme ci-dessus,

$$a=n$$

$$b=\frac{n.(n^2-4)}{1.2.3}$$

$$c=\frac{n.(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5}$$

$$d=\frac{n.(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$e=$ &c.

Même remarque, qu'auparavant, pour les signes de b, d, f, &c, ou des coëfficients de rang pair.

(*kk*) ART. 243. Pour trouver la valeur générale de $cos.\,nz$, on pourra s'y prendre de la même maniere que dans l'art. 234. En conséquence, soit $cos.\,nz=A^{[n]}y^n-B^{[n]}y^{n-2}+C^{[n]}y^{n-4}-D^{[n]}y^{n-6}+E^{[n]}y^{n-8}-$ &c; à cause de $cos.\,nz=2y\,cos.(n-1)z-cos.(n-2)z$, on aura aussi

$$\begin{aligned}cos.nz=&2A^{[n-1]}y^n-2B^{[n-1]}y^{n-2}+2C^{[n-1]}y^{n-4}-2D^{[n-1]}y^{n-6}+2E^{[n-1]}y^{n-8}-\&c.\\&-A^{[n-2]}y^{n-2}+B^{[n-2]}y^{n-4}-C^{[n-2]}y^{n-6}+D^{[n-2]}y^{n-8}-\&c.\end{aligned}$$

Egalant les coëfficients des puissances semblables de y dans les deux valeurs de $cos\,nz$, on aura pour déterminer $A^{[n]}$, $B^{[n]}$, $C^{[n]}$, $D^{[n]}$, &c.

$A^{[n]} = 2\,A^{[n-1]}$

$B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2\,B^{[n-1]}$

$C^{[n]} = B^{[n-2]} + 2\,C^{[n-1]}$

$D^{[n]} = C^{[n-2]} + 2\,D^{[n-1]}$

$E^{[n]} =$ &c.

La premiere équation $A^{[n]} = 2\,A^{[n-1]}$ donne auſſi $A^{[n]} = 2^2 A^{[n-2]} = 2^3 A^{[n-3]}$, & en général $A^{[n]} = 2^x A^{[n-x]}$. Or ſi $n - x = 1$, $A^{[1]} = 1$, & $x = n - 1$. Donc $A^{[n]} = 2^{n-1}$.

L'équation $B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2\,B^{[n-1]}$ ſe change en $B^{[n]} = A^{[n-2]} + 2\,A^{[n-3]} + 2^2 A^{[n-4]} + \ldots\ldots + 2^x\ A^{[n-x-2]} + 2^{x+1} B^{[n-x-1]}$. Si on fait $n - x - 1 = 2$, ou $n - x - 2 = 1$, ce qui donne $x = n - 3$, $A^{[1]} = 1$ & $2^{x+1} B^{[n-x-1]} = 2^{n-2}.B^{[2]} = 2^{n-2} \times 1 = 2^{n-3}.\,2$; on aura $B^{[n]} = 2^{n-3}(2 + n - 2) = n\,.\,2^{n-3}$. De même, $C^{[n]} = B^{[n-2]} + 2B^{[n-3]} + 2^2 B^{[n-4]} + \ldots\ldots + 2^x B^{[n-x-2]} + 2^{x+1} C^{[n-x-1]}$. Or ſi on fait $n - x - 1 = 4$, ou $n - x - 2 = 3$, on aura $x = n - 5$, $2^x\ B^{[n-x-2]} = 2^{n-5}.\,3$ & $2^{x+1}\ C^{[n-x-1]} = 2^{n-4} \times 1 = 2^{n-5} \times 2$. Donc $C^{[n]} = (2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n - 2)\,2^{n-5} = \frac{n.(n-3)}{1\,.\,2}\,2^{n-5}$. $D^{[n]} = C^{[n-2]} + 2\,C^{[n-3]} + 2^2 C^{[n-4]} + \ldots + 2^x C^{[n-x-2]} + 2^{x+1} D^{[n-x-1]}$. Soit $n - x - 1 = 6$, ou $n - x - 2 = 5$; ce qui donne $x = n - 7$, on aura pour $C^{[n-x-2]}$ ou $C^{[5]}$, $\frac{2\,.\,5}{2}$ & pour $D^{[6]}$, 1 ; par conſéquent $2^{x+1} D^{[n-x-1]} = 2^{n-6} \times 1 = 2^{n-7} \times 2 = 2^{n-7}.\,\frac{1\,.\,4}{2}$. Donc $D^{[n]} = \left(\frac{1\,.\,4}{2} + \frac{2\,.\,5}{2} + \ldots\ldots \frac{(n-5)\,(n-2)}{2}\right) 2^{n-7}$. Or le terme général de la ſérie $1\,.\,4 + 2\,.\,5 + 3\,.\,6 +$ &c. $= t\,.\,(t + 3) = t^2 + 3\,t$ & $S\,.\,t^2 = t\,.\,\frac{(t+1)\,(2t+1)}{2\,.\,3}$ & $3\,.\,S\,.\,t = 3\,.\,t\,.\,\frac{t+1}{2}$. Donc $S\,.\,t^2 + 3\,.\,S\,.\,t = t\,.\,\frac{(t+1)\,(t+5)}{3}$. Donc $D^{[n]} = n\,.\,\frac{(n-4)\,(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}$. On aura encore

$E^{[n]} = D^{[n-2]} + 2D^{[n-3]} + 2^2 D^{[n-4]} + \ldots\ldots + 2^x D^{[n-x-2]} + 2^{x+1} E^{[n-x-1]}$. Soit $n - x - 1 = 8$, ou $n - x - 2 = 7$, ce qui donne $x = n - 9$, $2^x D^{[n-x-2]} = 2^{n-9} D^{[7]} = 2^{n-9} . \frac{2.3.7}{1.2.3}$ & $2^{x+1} E^{[8]} = 2^{n-8} \times 1 = 2^{n-9} \times 2 = 2^{n-9} . \frac{1.2.6}{1.2.3}$; on aura

$$E^{[n]} = \frac{1.2.6}{1.2.3} + \frac{2.3.7}{1.2.3} + \frac{3.4.8}{1.2.3} + \ldots\ldots \frac{(n-7)(n-6)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.$$

Or le terme général de la suite $1.2.6 + 2.3.7 + 3.4.8 +$ &c, est $t.(t+1)(t+5) = t^3 + 6t^2 + 5t$. D'ailleurs $S.t^3 = \frac{1}{4} t^2 (t+1)^2$; $6.S.t^2 = t(t+1)(2t+1)$; & $5.S.t = 5.t.\frac{t+1}{2}$. Donc $S.t^3 + 6S.t^2 + 5S.t = t.\frac{t+1}{4}.(t+2)(t+7)$.

Donc

$$E^{[n]} = \frac{n.(n-5)(n-6)(n-7)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4} 2^{n-9}$$

&c.

(ll) Art. 262. Pour faire voir que cette loi est générale, j'observe qu'on a $2\sqrt{-1}\, \text{fin.}\, z = e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}$ & $(2\sqrt{-1})^n (\text{fin}\ z)^n = (e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}})^n = e^{nz\sqrt{-1}} - n . e^{(n-2)z\sqrt{-1}} + \frac{n.(n-1)}{2} e^{(n-4)z\sqrt{-1}} - \ldots\ldots \mp n e^{(-n+2)z\sqrt{-1}} \pm e^{-nz\sqrt{-1}}$, suivant que n est pair ou impair. On sait par la formation du binome de Newton que lorsque n est un nombre impair tel que $2m+1$, le nombre des termes est pair, & de plus que les termes extrêmes, & les termes à égale distance des extrêmes ont des coëfficients numériquement égaux. Or la somme de deux de ces termes, abstraction faite de leurs coëfficients, étant divisée par $2\sqrt{-1}$, est l'expression du sinus d'un arc multiple déterminé par l'exposant de e. Donc on aura, pour le cas où n est un nombre impair,

$\pm 2^{n-1} (\text{fin.}\, z)^n = \text{fin.}\, nz - n\, \text{fin.}\, (n-2) z + n.\frac{n-1}{2}.\, \text{fin.} (n-4) z - \ldots \pm k\, \text{fin.}\, z$, k exprimant chacun des coëfficients des termes moyens de la ſuite; prenant d'ailleurs le ſigne + lorſque dans la valeur de $n = 2m + 1$, m eſt un nombre pair, & le ſigne — lorſque m eſt impair.

Lorſque n eſt un nombre pair, le nombre des termes eſt impair, & alors on a

$$\pm\, 2^{n-1}(\sin. z)^n = \cos. nz - n.\cos.(n-2)z + \frac{n.(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)z - \ldots$$

$\pm \frac{k}{2}$; parce que dans ce cas les termes extrêmes, & ceux qui ſont à égale diſtance des extrêmes, ont des coëfficients égaux avec le même ſigne, ce qui donne, en diviſant leur ſomme par 2, des expreſſions de coſinus, & $\frac{k}{2}$ pour le terme moyen.

On trouvera d'une maniere ſemblable l'expreſſion générale des puiſſances des coſinus, en développant la puiſſance $(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}})^n = (2\cos. z)^n$, & en faiſant les mêmes obſervations qu'à l'égard des ſinus.

CHAPITRE XV.

(mm). ART. 279. La ſomme de toutes ces ſéries réunies, excepté la premiere, ne peut faire qu'une quantité aſſez petite. En effet, il eſt évident qu'elle eſt ſenſiblement moindre que la ſomme de ces ſuites :

$$1\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \&c\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \&c\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \&c\right)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^8} + \&c\right)$$
$$+ \&c.$$

Or la ſomme de ces dernieres ſéries $= lN$ (art. 278) $= l\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \&c.\right)$ & cette derniere ſérie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c = \frac{\pi\pi}{6}$, dont le logarithme $= 2\,l\,\pi - l\,6$ eſt une quantité aſſez peu conſidérable.

(nn) ART. 282. Quand on a les ſommes des puiſſances un peu conſidérables, on peut employer, pour trouver les ſommes des puiſſances moins élevées, les formules précédentes, (art. 278), savoir :

$$lM - \tfrac{1}{2}\,lN = S + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \&c\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5n}} + \frac{1}{3^{5n}} + \frac{1}{5^{5n}} + \frac{1}{7^{5n}} + \&c\right)$$
$$+ \tfrac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7n}} + \frac{1}{3^{7n}} + \frac{1}{5^{7n}} + \frac{1}{7^{7n}} + \&c\right)$$
$$+ \&c.$$

$$\text{ou } lM = S + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \&c\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \&c\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \&c\right)$$
$$+ \&c.$$

CHAPITRE XVI.

(oo) ART. 320. La fraction $\frac{1}{(1-x)^3}$ donne la ſuite des nombres triangulaires & la fraction $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ donne la troiſieme ſuite verticale de la table; or, en ſuppoſant $\frac{X}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{(1-x)^3}$ on trouvera $X = (1+x)(1+x+x^2)$. Donc on devra multiplier d'abord la ſuite que donne $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$, ſavoir $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 10x^8 + \&c$ par $1 + x + x^2$; ce qui donnera une nouvelle ſérie, dans laquelle le coëfficient de chaque puiſſance de x ſera évidemment la ſomme du coëfficient de la même puiſſance de x dans la premiere ſérie & des coëfficients des deux termes précédents, ou $1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 9x^4 + 12x^5 + 16x^6 + \&c$; enſuite

il faudra multiplier cette derniere ſérie par $1+x$, ce qui donnera pour le coëfficient de chacune des puiſſances de x de la ſérie réſultante, la ſomme des coëfficients du terme correſpondant & de celui qui précede.

On peut faire un raiſonnement analogue pour les autres nombres figurés; ce qui fait connoître la connexion de ceux-ci avec ceux de la Table.

(pp) ART. 323. On a (art. 306) $Z=(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\times(1+x^4z)(1+x^5z)\times\&c.=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+\&c$, & par conſéquent en faiſant $z=-1$, $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\times\&c.=1-P+Q-R+S-T+\&c.$ Mais (art. 307) $P=\frac{x}{1-x}$; $Q=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$; $R=\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$; $S=\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$; $T=\&c.$ Donc $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\times\&c.$ $=1-\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ $-\&c.$ Or la nature du premier membre de cette équation fait voir clairement que le ſecond, qui ſe préſente ſous la forme de pluſieurs fonctions fractionnaires, doit ſe convertir en une fonction entiere. Voici un moyen aſſez ſimple d'arriver au but, & dont l'idée m'a été donnée par le C. Legendre. J'écris le ſecond membre de l'équation ci-deſſus ſous cette forme $1 \quad \frac{-x+x^2}{1-x} \quad \frac{-x^2(1-x^2)+x^3-x^5}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^5(1-x^3)-x^6+x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \quad \frac{-x^9(1-x^4)+x^{10}-x^{14}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\frac{x^{14}(1-x^5)-x^{15}+x^{20}}{(1-x)\ldots\ldots(1-x^5)}-\&c.$ En faiſant les diviſions, les deux termes, qui ont pour diviſeurs, l'un $1-x$, & l'autre $(1-x)(1-x^2)$, perdent leur forme fractionnaire & deviennent les deux entiers $-x-x^2$; de plus, le premier & le dernier facteur des dénominateurs des fractions, qui reſtent, diſparoiſſent, & la quantité devient $1-x-x^2+\frac{x^5}{1-x^2}-\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ $-$

$-\frac{x^{20}}{(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^5)}+\frac{x^{27}}{(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^6)}-$ &c. Je transforme de même la suite $\frac{x^5}{1-x^2}-\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)}+$ &c. en $\frac{x^5-x^7}{1-x^2}+\frac{x^7(1-x^3)-x^9+x^{12}}{(1-x^2)(1-x^3)}\quad\frac{-x^{12}(1-x^4)+x^{14}-x^{18}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\frac{x^{18}(1-x^5)-x^{20}+x^{25}}{(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^5)}$ $-$ &c, ou en $x^5+x^7-\frac{x^{12}}{1-x^3}+\frac{x^{18}}{(1-x^3)(1-x^4)}-\frac{x^{25}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}+$ &c. En suivant un procédé semblable, on obtiendra à chaque fois deux nombres entiers de plus, qui ont l'un & l'autre un même signe, mais différent de celui des deux termes précédents, & les facteurs extrêmes des dénominateurs des fractions restantes continueront à disparoître.

Cela posé j'écris, comme on le voit ici, les suites que fournissent les exposans de x, en commençant par l'exposant de x du dernier entier, que donne chaque réduction successive,

0,	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	&c
	2,	5,	9,	14,	20,	27,	35,	&c	
		7,	12,	18,	25,	33,	42,	&c	
			15,	22,	30,	39,	49,	&c	
				26,	35,	45,	56,	&c	
					40,	51,	63,	&c	
						57,	70,	&c	
							77,	&c.	

Si on vouloit continuer cette Table, on remarquera que chacune des suites a un terme de moins que la précédente, & que chacune des colonnes verticales forme une progression arithmétique, dont les différences sont successivement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c. D'ailleurs, d'après les opérations précédentes & la formation de ces différentes suites, il est évident qu'il n'y a que les deux premiers termes de chacune, qui fassent partie des exposants de x dans la série cherchée. J'écris maintenant la ſuite naturelle des nombres, en commençant par 0, & à côté le terme général n; je place au-deſſous les ſéries précédentes dans l'ordre qui ſuit, avec le terme général de chacune, n repréſentant toujours le nombre correſpondant de la premiere ſuite.

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	&c.	n
0,	1,	3,	6,	10,	15,	21,	&c.	$n \cdot \frac{n+1}{2}$
	2,	5,	9,	14,	20,	27,	&c.	$n \cdot \frac{n+1}{2} + n$
		7,	12,	18,	25,	33,	&c.	$n \cdot \frac{n+1}{2} + 2n$
			15,	22,	30,	39,	&c.	$n \cdot \frac{n+1}{2} + 3n$
				26,	35,	45,	&c.	$n \cdot \frac{n+1}{2} + 4n$
					40,	51,	&c.	$n \cdot \frac{n+1}{2} + 5n$
						57,	&c.	$n \cdot \frac{n+1}{2} + 6n$
							&c.	

D'où il ſuit que le premier terme de chaque ſuite ſera repréſenté par $n \cdot \frac{n+1}{2} + n^2 = \frac{3nn+n}{2}$; & comme le ſecond terme de la ſuite précédente doit faire partie des expoſants de x, & qu'il eſt repréſenté par $n \cdot \frac{n+1}{2} + (n-1)n = \frac{3n^2-n}{2}$, il eſt clair qu'il n'y aura d'autres puiſſances de x, que celles qui ſont renfermées dans la formule $\frac{3nn \pm n}{2}$.

A préſent qu'on a un moyen facile & infaillible de trouver les termes de la ſérie, qui réſulte de la multiplication du nombre infini de facteurs $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, &c, & qu'on eſt aſſuré, qu'elle n'admet pour expoſants de x que ceux qui ſont renfermés dans la formule $\frac{3nn \pm n}{2}$; je ne puis m'empêcher de m'arrêter un moment ſur une queſtion traitée ailleurs par Euler, & faite pour piquer la curioſité. Je veux parler de la maniere de trouver la ſomme des diviſeurs des nombres; on ſera étonné de voir combien la ſolution de ce problême eſt étroitement liée à ce qui précéde. Reprenons en conſéquence l'équation

$$P=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\times\&c. =$$
$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\&c.$$

Soit P' ce que devient chacune de ces expreſſions en augmentant x d'une quantité quelconque y, la premiere valeur de P deviendra

$$P'=(1-[x+y])(1-[x+y]^2)(1-[x+y]^3)(1-[x+y]^4)(1-[x+y]^5)\times\&c,$$

& la ſeconde valeur de P deviendra

$$P'=1-(x+y)-(x+y)^2+(x+y)^5+(x+y)^7-(x+y)^{12}-(x+y)^{15}+\&c.$$

Nous aurons d'abord, en prenant les logarithmes des premieres valeurs de P & de P', les deux équations ſuivantes:

$$lP=l(1-x)+l(1-x^2)+l(1-x^3)+l(1-x^4)+l(1-x^5)+\&c.$$
$$lP'=l(1-x-y)+l(1-x^2-2xy)+l(1-x^3-3x^2y)+l(1-x^4-4x^3y)+\&c.$$

Je néglige les puiſſances de y ſupérieures à la premiere, parce que dans la ſuppoſition que nous ferons de $y=0$, elles donneroient des quantités nulles. En retranchant la ſeconde équation de la premiere, j'aurai

$$l.\frac{P'}{P}=l\left(1-\frac{y}{1-x}\right)+l\left(1-\frac{2yx}{1-x^2}\right)+l\left(1-\frac{3yx^2}{1-x^3}\right)+l\left(1-\frac{4yx^3}{1-x^4}\right)+\&c;$$

ou

$$l\frac{P'}{P}=-\frac{y}{1-x}-\frac{2yx}{1-x^2}-\frac{3yx^2}{1-x^3}-\frac{4yx^3}{1-x^4}-\frac{5yx^4}{1-x^5}-\&c.$$

Multipliant chaque membre par $\frac{x}{y}$, ſuppoſant $y=0$, & déſignant par t le réſultat, nous aurons pour premiere valeur de $-t$,

$$-t=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{4x^4}{1-x^4}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\&c.$$

Nous aurons enfuite, en divifant la feconde valeur de P' par la feconde de P, & négligeant, comme auparavant & par la même raifon, les termes, qui feroient affectés de y^2, y^3, &c, le quotient . . . .

$$\frac{P'}{P} = 1 \qquad \frac{-y - 2yx + 5yx^4 + 7yx^6 - 12yx^{11} - 15yx^{14} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \&c.}$$

& en prenant les logarithmes de part & d'autre,

$$l.\frac{P'}{P} = \frac{-y - 2yx + 5yx^4 + 7yx^6 - 12yx^{11} - 15yx^{14} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.}$$

Multipliant comme auparavant les deux membres par $\frac{x}{y}$, & faifant $y = 0$, nous aurons cette autre valeur de $-t$,

$$-t = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - \&c}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26}}.$$

La premiere valeur de $-t$ donne, en développant en féries chaque terme,

$$\begin{array}{lcccccccccc}
-t = & x & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10}\ \&c. \\
 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 \\
 & & & +3 & & & +3 & & & +3 & \\
 & & & & +4 & & & & +4 & & \\
 & & & & & +5 & & & & & +5 \\
 & & & & & & +6 & & & & \\
 & & & & & & & +7 & & & \\
 & & & & & & & & +8 & & \\
 & & & & & & & & & +9 & \\
 & & & & & & & & & & +10
\end{array}$$

expreffion, dans laquelle il eft manifefte que le coëfficient de chaque puiffance de x eft la fomme des divifeurs de l'expofant correfpondant ; donc, fi nous défignons par $\int n$ la fomme des divifeurs du nombre n, cette derniere expreffion fe changera en celle-ci :

$$-t = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + x^8\int 8 + \&c.$$

Comparant cette derniere valeur de t avec celle trouvée en second lieu $-t = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \&c.}$ & faiſant diſparoître le dénominateur, nous aurons

$$\begin{array}{lllllllllll}
x\int 1 & +x^2\int 2 & +x^3\int 3 & +x^4\int 4 & +x^5\int 5 & +x^6\int 6 & +x^7\int 7 & +x^8\int 8 & +x^9\int 9 & +x^{10}\int 10 & +\&c \\
 & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 & -\int 9 & -\&c \\
 & & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 & -\&c \\
 & & & & & +\int 1 & +\int 2 & +\int 3 & +\int 4 & +\int 5 & +\&c \\
 & & & & & & & +\int 1 & +\int 2 & +\int 3 & +\&c \\
= x & +2x^2 & & & -5x^5 & & -7x^7 & & & &
\end{array}$$

ce qui donne les égalités ſuivantes :

$\int 1 = 1$, $\int 2 = \int 1 + 2$, $\int 3 = \int 2 + \int 1$, $\int 4 = \int 3 + \int 2$, $\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5$, $\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1$, $\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7$, $\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1$, $\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2$, $\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3$, $\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4$, $\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + 12$ &c.

leſquelles reviennent évidemment à celles-ci :

$\int 1 = 1$	$\int 7 = \int(7-1) + \int(7-2) - \int(7-5) - 7$
$\int 2 = \int(2-1) + 2$	$\int 8 = \int(8-1) + \int(8-2) - \int(8-5) - \int(8-7)$
$\int 3 = \int(3-1) + \int(3-2)$	$\int 9 = \int(9-1) + \int(9-2) - \int(9-5) - \int(9-7)$
$\int 4 = \int(4-1) + \int(4-2)$	$\int 10 = \int(10-1) + \int(10-2) - \int(10-5) - \int(10-7)$
$\int 5 = \int(5-1) + \int(5-2) - 5$	$\int 11 = \int(11-1) + \int(11-2) - \int(11-5) - \int(11-7)$
$\int 6 = \int(6-1) + \int(6-2) - \int(6-5)$	$\int 12 = \int(12-1) + \int(12-2) - \int(12-5) - \int(12-7) + 12$

&c.

Il eſt clair que les nombres à ſouſtraire continuellement du nombre propoſé, & des diviſeurs duquel on cherche la ſomme, forment la ſuite 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, &c, la même que celle des expoſants de x dans la ſérie, qui exprime la valeur du produit de $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ &c. Donc on a, en général,

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \&c$$

en prolongeant la série, jusqu'à ce qu'on trouve un nombre négatif sous le signe $\int$, & ayant l'attention de prendre pour $\int(n-n)$, lorsqu'on arrive à un résultat de cette forme, le nombre même n.

CHAPITRE XVII.

(qq) ART. 338. Les fractions $\frac{Q}{P}$ sont alternativement plus grandes & plus petites que la vraie racine. En effet $\frac{Q}{P} = \frac{Ap^{n+1}+Bq^{n+1}}{Ap^n+Bq^n} = p - \frac{Bq^n(p-q)}{Ap^n+Bq^n}$. Or dans cet exemple q est négatif, & par conséquent $\frac{Bq^n(p-q)}{Ap^n+Bq^n}$ est alternativement positif & négatif.

Donc &c.

(rr) ART. 339. Puisque dans ce cas-ci $\frac{Q}{P} = \frac{Ap^{n+1}+Bq^{n+1}+Cr^{n+1}}{Ap^n+Bq^n+Cr^n}$, il est clair que si $n+1$ est un nombre pair, la puissance q^{n+1} est de même signe que p^{n+1}, & qu'elle est de signe différent, si $n+1$ est un nombre impair; circonstance, qui contribue manifestement à rendre plus lente l'approximation de la plus grande racine qu'on cherche.

(ss) ART. 342. Dans l'exemple cité on a $\frac{Q}{P} = \frac{Ap^{n+1}+B(-p)^{n+1}+Cq^{n+1}}{Ap^n+B(-p)^n+Cq^n}$, quantité, qui lorsque Cq^{n+1} disparoît devant les autres termes Ap^{n+1} & $B(-p)^{n+1}$, prend la forme $\frac{(A\pm B)p^{n+1}}{(A\mp B)p^n}$, & qui par conséquent ne peut donner p; mais si on prend $\frac{R}{P}$, on aura $\frac{Ap^{n+2}+B(-p)^{n+2}+Cq^{n+2}}{Ap^n+B(-p)^n+Cq^n}$, expression qui devient de la forme $\frac{(A\pm B)p^{n+2}}{(A\pm B)p^n} = p^2$.

(tt) ART. 346. A cause de $\frac{Q}{P} = \frac{(n+2)Ap^{n+1}+Bp^{n+1}+Cq^{n+1}+\&c}{(n+1)Ap^n+Bp^n+Cq^n+\&c}$,

il ne faut qu'une légère attention pour voir que les coëfficients $n+2$, $n+1$, empêcheront que cette quantité ne se réduise sitôt à p.

(uu) ART. 349. Il est bien clair que pour que les racines imaginaires n'empêchent pas de trouver la plus grande racine q, il faut que p soit $< q$; mais dans le facteur trinome $1 - 2pz \cos\varphi + p^2z^2$, qui ne peut provenir que du produit de deux facteurs simples de la forme $1 - (\alpha + \beta\sqrt{-1})z$ & $1 - (\alpha - \beta\sqrt{-1})z$, p^2 est le produit des deux imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, & $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; donc q^2 doit être plus grand que le produit des deux racines imaginaires, qui composent un facteur réel.

CHAPITRE XVIII.

(vv) ART. 362. Il n'est pas généralement vrai que chaque fraction approche plus près de la véritable valeur de x qu'aucune des précédentes. L'exemple le plus simple peut en convaincre. Soit $x = a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c}} = \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta}$, la premiere valeur approchée de $x = a$, la seconde $= \frac{ab + \alpha}{b}$. La différence de $\frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta}$ à $a = \frac{\alpha c}{bc + \beta}$, & la différence de $\frac{ab + \alpha}{b}$ à $\frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta} = \frac{\alpha\beta}{b(bc + \beta)}$. Or il est possible que $\frac{\alpha c}{bc + \beta}$ soit $< \frac{\alpha\beta}{b(bc + \beta)}$; il suffit pour cela que c soit $< \frac{\beta}{b}$ ou $\beta > bc$; mais cet inconvénient n'aura plus lieu, si les numérateurs α, β, γ, δ, &c, sont tous égaux à l'unité.

Reprenons l'équation $x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \&c.}}}$ & supposons

$b' = b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \&c}}$, $c' = c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \&c}}$; $d' = d + \frac{1}{e + \frac{1}{f + \&c}}$, $e' = e + \frac{1}{f + \&c}$; $f' = f + \frac{1}{g + \&c}$;

on aura pour les

valeurs approchées de x	valeurs vraies de x
$x = a$	
$x = \frac{ab+1}{b}$	$x = \frac{ab'+1}{b'}$
$x = \frac{abc+a+c}{bc+1}$	$x = \frac{abc'+a+c'}{bc'+1}$
$x = \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$	$x = \frac{abcd'+ab+ad'+cd'+1}{bcd'+b+d'}$
$x =$ &c.	$x =$ &c.

ou bien en faisant

$A = a$	$A' = 1$
$B = bA + 1$	$B' = b$
$C = cB + A$	$C' = cB' + A'$
$D = dC + B$	$D' = dC' + B'$
$E = eD + C$	$E' = eD' + C'$
&c.	&c.

les valeurs approchées & successives de x seront $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$, &c, & les vraies valeurs seront $x = \frac{Ab'+1}{A'b'}$; $x = \frac{Bc'+A}{B'c'+A'}$; $x = \frac{Cd'+B}{Cd'+B'}$; $x = \frac{De'+C}{D'e'+C'}$; $x =$ &c; & si on considere, qu'en multipliant en croix les termes des fractions voisines dans la suite $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c, on a en général $BA' - AB' = 1$, $CB' - BC' = -1$, $DC' - CD' = 1$, $ED' - DE' = -1$, &c, les vraies valeurs de x deviendront $x = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'b'}$; $x = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'c' + A')}$; $x = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'd' + B')}$; $x = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'(D'e' + C')}$; $x =$ &c. Donc les valeurs approchées $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$, &c, sont successivement plus petites & plus grandes que x.

Cela

Cela posé, comme b' est $> b$, $c' > c$, $d' > d$, &c, on aura $b' > B'$, $B'c' + A' > B'c + A'$ ou $> C'$; $C'd' + B' > C'd + B'$ ou $> D'$; &c. De même, comme b' est $< b + 1$, $c' < c + 1$, $d' < d + 1$, &c; on aura $b' < B' + A'$; $B'c' + A' < B'(c + 1) + A' < C' + B'$; $C'd' + B' < C'(d + 1) + B' < C' + D'$; &c. Donc en prenant $\frac{A}{A'}$ pour x, l'erreur est $> \frac{1}{A'(B' + A')}$, & prenant $\frac{B}{B'}$; l'erreur est $< \frac{1}{B'C'}$ ou $< \frac{1}{B'(B'c + A')}$. Or $B' =$ ou $> A'$, & $B'c + A' > B' + A'$; donc $\frac{B}{B'}$ approche plus de la vraie valeur de x, que $\frac{A}{A'}$. De même l'erreur en prenant $\frac{B}{B'}$ est $> \frac{1}{B'(C' + B')}$, & en prenant $\frac{C}{C'}$, l'erreur est $< \frac{1}{C'D'}$ ou $< \frac{1}{C'(C'd + B')}$; or C' est $> B'$, & $C'd + B' > C' + B'$; donc $\frac{C}{C'}$ approche plus de la vraie valeur que $\frac{B}{B'}$. On fera un raisonnement semblable pour les autres expressions. Donc chaque fraction successive approche plus de la vraie valeur de x qu'aucune des précédentes.

De plus, la différence entre deux fractions voisines est la plus petite possible, de sorte qu'il ne peut tomber entre ces deux fractions une autre fraction plus petite, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand. En effet, supposons qu'il existe une fraction $\frac{m}{n}$ dont la valeur tombe entre celles de $\frac{D}{D'}$ & de $\frac{E}{E'}$, par exemple, dont la différence est $\frac{1}{D'E'}$; on auroit la différence entre $\frac{m}{n}$ & $\frac{D}{D'}$, savoir $\frac{mD' - nD}{nD'}$ ou $\frac{nD - mD'}{nD'}$ plus petite que $\frac{1}{D'E'}$; mais la premiere ne peut être plus petite que $\frac{1}{nD'}$, quantité plus grande que $\frac{1}{D'E'}$, si n est plus petite que E'. De même la différence entre $\frac{m}{n}$ & $\frac{E}{E'}$ ne peut être plus petite que $\frac{1}{nE'}$, quantité encore plus grande que $\frac{1}{D'E'}$, ſi n eſt plus petite que D'. Donc toute fraction, dont la valeur tombe entre deux fractions voiſines de la ſérie $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ &c aura néceſſairement un dénominateur plus grand. Or, la vraie valeur de x tombe toujours entre deux fractions conſécutives de cette ſérie. Donc il eſt impoſſible d'avoir une valeur plus approchée de x, que celle qu'on trouvera de cette maniere, à moins que la fraction n'ait un dénominateur plus grand.

Ceux qui voudront avoir plus de détails ſur les fractions continues, peuvent conſulter les excellentes additions du célèbre Lagrange, qui ſe trouvent imprimées à la fin du ſecond volume de l'Algèbre d'Euler, & dont j'ai extrait ce qu'on vient de lire.

(xx) Art. 363. Soient a, a', a'', a''', a^{iv}, a^{v}, a^{vi}, &c, les valeurs approchées & ſucceſſives de x; & d, d', d'', d''', d^{iv}, &c, les différences de ces valeurs, on aura $a < x$, $a' > x$, $a'' < x$, &c, & $a' - a = d$, $a' - a'' = d'$, $a''' - a'' = d''$, $a''' - a^{iv} = d'''$, $a^{v} - a^{iv} = d^{iv}$, $a^{v} - a^{vi} = d^{v}$, &c. Donc $a + d = d' - d'' + d''' - d^{iv} + d^{v} -$ &c. $+ x$, ou $x = a + d - d' + d'' - d''' + d^{iv} - d^{v} + d^{vi} -$ &c, ou $x = a + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} +$ &c.

(yy) Art. 381. Soit la fonction $1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z \cdot z+1} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{a^4}{z \cdot z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} +$ &c, que je repréſente par $\varphi(z)$, & par conſéquent $1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} +$ &c. $= \varphi(z+1)$; on aura $\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{a}{z \cdot z+1} + \frac{a^2}{z \cdot z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} +$ &c. $= \frac{a}{z \cdot z+1} \left(1 + \frac{a}{z+2} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{z+2 \cdot z+3} + \text{\&c.}\right) = \frac{a}{z \cdot z+1} \varphi(z+2)$. Diviſons par φ

$(z+1)$ & soit $\psi(z) = \frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$; nous aurons $\frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)}$ $= \frac{a}{z\psi(z)}$, & $\frac{\varphi(z+2)}{\varphi(z+1)} = \frac{(z+1)\psi(z+1)}{a}$; & en substituant, $\psi(z) = \frac{a}{z+\psi(z+1)}$. Par la même raison, $\psi(z+1) = \frac{a}{z+1+\psi(z+2)}$; $\psi(z+2) = \frac{a}{z+2+\psi(z+3)}$ &c.

Donc $\psi(z) = \cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3+\cfrac{a}{\&c.}}}}}$, ou

$$\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3+\&c.}}}} = \frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} =$$

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+1\cdot z+2}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{a^3}{z+1\cdot z+2\cdot z+3}+\&c.}{1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z\cdot z+1}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{a^3}{z\cdot z+1\cdot z+2}+\&c.}.$$

Soit $z=\frac{1}{2}$, la fraction continue deviendra $\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\&c.}}}$, & sa valeur en suite ordinaire sera

$$2a \cdot \frac{1+\frac{4a}{2\cdot 3}+\frac{16a^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{64a^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\&c.}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{64a^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\&c.} = \text{(art. 156 \& 157)}$$

$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\sqrt{a}$; de sorte qu'en faisant $4a=x^2$, ou $2\sqrt{a}=x$, on aura $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\&c.}}}}$ & si on ſuppoſe $x = \frac{1}{2}$, on aura $\dfrac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \&c.}}}}$

ou $\dfrac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \&c.}}}$, ou bien $\dfrac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} - 1$

$= 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \&c.}}} = \dfrac{2\, e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}$; & enfin

$\dfrac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{2\, e^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{e - 1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \&c.}}}}}$

Cette démonſtration eſt tirée d'une des Notes intéreſſantes que le citoyen Legendre a miſes à la fin de ſes *Éléments de Géométrie*, ouvrage ſupérieur à la plupart des autres Traités du même genre, & dont la lecture ne peut être trop recommandée aux jeunes Géomètres, pour les accoutumer de bonne heure aux démonſtrations rigoureuſement exactes.

(33) ART. 382. Ce ſeroit ici le cas de faire voir que les différentes valeurs des fractions continues trouvées par les méthodes précédentes, ſont approchées de maniere qu'il ſeroit impoſſible d'en avoir une valeur plus exacte en moindres termes ; c'eſt ce qui a été démontré d'avance à la fin de la note relative à l'article 362.

Fin des Notes & des Éclairciſſements.

De l'Imprimerie de BAUDELOT & EBERHART, rue S.-Jacques, N° 30.