

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

516.2

513

E42p

v.3

KATHA 11/86
SERIALS UNIT

NOTICE: Return or renew all Library Materials! The Minimum Fee for each Lost Book is \$50.00.

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.
To renew call Telephone Center, 333-8400

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

AUG 24 1992

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES OEUVRES D'EUCLIDE.

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris , aux indications suivantes :

CHEZ { L'AUTEUR , rue de Provence , n° 25 ;
TREUTTEL et WURTZ , libraires à Paris , rue de Lille , n° 17 ;
FIRMIN DIDOT , rue Jacob , n° 24 ;
RAY et GRAVIER , quai des Augustins.
Madame veuve COURCIER , rue du Jardinot , n° 12.

LES OEUVRES
D'EUCLIDE,

EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

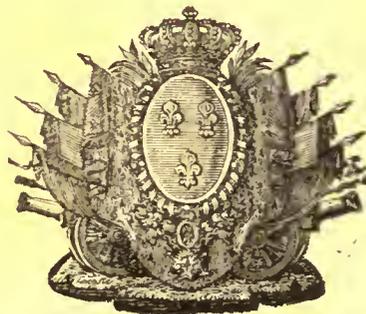
PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES OEUVRES D'ARCHIMÈDE:

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES:

DÉDIÉ AU ROI.

TOME TROISIÈME.



A PARIS,

CHEZ C. F. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1818.

516.2

Eu3p

v. 3

PRÉFACE.

P R Æ F A T I O.

Hoc tertium ultimumque volumen continet libros XI, XII, XIII Elementorum Dataque Euclidis, necnon duos libros de quinque Corporibus qui Hypsicli adscripti sunt.

Euclidis operibus duos Hypsiclis libros ideo adjeci, ut a veteri consuetudine non recederem. Neque tamen negaverim eo commendari priorem quod sit quoddam antiquæ geometriæ monumentum; quod ad alterum attinet, longe aliter sentire me fateor. Etenim demonstrationes hujus libri incompletæ sunt, et in illis severitas ac elegantia desiderantur; itaque censeo non solum hos libros eidem non esse adscribendos, verum etiam alterum altero esse multo antiquiorem.

Hoc volumen comprehendit permultas lectiones varias majoris minorisve pretii, quas cuique, attento animo, perpendere licebit.

Lectio varia propositionis I undecimi libri simpliciter eleganterque ostendit, si duæ rectæ partem communem habeant, illas inter se congruere. Hæc propositio quæ corollarium esse posset propositionis XIV primi libri, collocata est a Proclo in axiomatibus cum demonstratione consimili demonstrationi hujus lectionis variæ quam non admisi.

Propositio XVII duodecimi libri, una ex iis quæ sunt maximi momenti, incompleta huc usque habebatur ex alinea paginæ 196 usque ad corollarium paginæ 205. In notâ quæ est in infimâ paginâ 200 ostendi hanc demonstrationem esse completam in omnibus suis partibus, figuram autem omnino esse inconditam.

Si quis dicat Archimedes pervenisse directius ad scopum, qui erat inventio rationis duarum spherarum magnitudine inæqualium, fateor equidem. Etenim ex eo quod Archimedes demonstravit spheras æquales esse duabus tertiis partibus cylindrorum circumscriptorum, manifestum est spheras inter se esse ut cubi suarum diametrorum.

P R É F A C E.

513
Euclid
vol 3
math

Ce troisième et dernier volume renferme les livres XI, XII, XIII des Éléments, et les Données d'Euclide, ainsi que les deux livres des cinq Corps attribués à Hypsicle.

Si j'ai joint aux Oeuvres d'Euclide les deux livres attribués à Hypsicle, c'était pour me conformer à l'usage établi. Je ne veux pas dire pour cela que le premier livre ne soit un monument précieux de la géométrie ancienne. Quant au second, il en est tout autrement : les démonstrations de ce livre sont incomplètes, sans rigueur et sans élégance ; ce qui me porte à croire que non-seulement ces deux livres ne sont pas du même auteur, mais encore que l'un est beaucoup plus ancien que l'autre.

Ce volume renferme un très-grand nombre de variantes plus ou moins précieuses. Je laisse au lecteur le soin de les apprécier à loisir.

La variante 4 de la proposition I du onzième livre, démontre d'une manière simple et élégante que deux droites ne peuvent pas avoir une partie commune sans se confondre. Cette proposition, qui pourrait être un corollaire de la proposition XIV du premier livre, est placée par Proclus au nombre des axiomes, avec une démonstration semblable à celle de cette variante que je n'ai pas adoptée.

La proposition XVII du douzième livre, qui est une des plus importantes d'Euclide, avait été regardée comme incomplète jusqu'à présent, à partir de l'alinéa de la page 196, jusqu'au corollaire de la page 205. J'ai fait voir dans une note placée au bas de la page 200, que cette démonstration était complète dans toutes ses parties, et que tout l'embarras ne provenait que d'une figure mal construite.

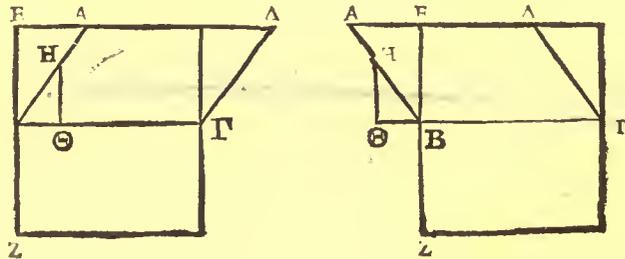
On pourrait peut-être dire qu'Archimède est arrivé plus directement au but, qui est de démontrer le rapport de deux sphères d'inégale grandeur ; cela est très-vrai. En effet, Archimède ayant démontré que les sphères sont égales aux deux tiers des cylindres circonscrits, il suit évidemment de là que les sphères sont entre elles comme les cubes de leurs diamètres.

III.

a

Sed mihi liceat adnotare Euclidem non potuisse ad propositum suum pervenire eâdem viâ quâ Archimedes, ni usus fuisset quatuor principiis vel postulatis quæ adsunt in principio libri primi de sphærà et cylindro; atqui Euclides non admiserat hæc quatuor postulata. Quapropter Euclides, qui demonstravit circulos inter se esse ut quadrata suarum diametrorum, non demonstravit circumferentias circularum inter se esse ut suæ diametri, et circulum æqualem esse triangulo cujus basis æqualis est circumferentiæ, et altitudo æqualis radio; oportuisset enim ob eam rem ut Euclides admisisset, sicut et Archimedes, summam duarum tangentium ab eodem puncto ductarum majorem esse arcu ab iis comprehenso, etc.

Propositio LXXXVI datorum, quæ est LXXXVII editionis meæ, doctissimum virum Gregory non leviter intricaverat. Ille in suâ dicit præfatione hoc theoremâ esse pervalde vitiatum, et se non potuisse illud restituere ope manuscipitorum. Existimo ejus errorem ortum fuisse ex eo quod non noscebat lemma illud quod subsequitur propositionem LXXXVI meæ editionis, et quod hîc modo non plauè simili exponam.

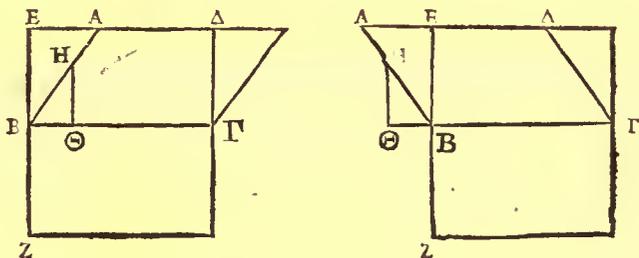


Sit parallelogrammum AF ; per punctum B ducatur recta EZ perpendicularis ad BF ; producaturs ipsa $ΔA$; ponatur BZ æqualis ipsi BA ; compleantur rectangula FE , FZ , et a quovis puncto H ipsius AB ducatur $HΘ$ perpendicularis ad BF . Ergo ut parallelogrammum FA , hoc est rectangulum FE ad rectangulum FZ ita erit BE ad BZ . Ut autem BE ad EZ , hoc est BE est ad BA , ita sinus $HΘ$ anguli ABF ad radium BH ; ut igitur parallelogrammum FA ad rectangulum FZ :: $\sin. ABF : R$. Ex hoc manifestum est quæcumque sint longitudines laterum AB , BF parallelogrammi AF , rectangulum ZF datum fore magnitudine, quamdiu angulus ABF idem manebit, et quamdiu parallelogrammum AF non desinet esse æquale superfici datae.

PRÉFACE.

Mais qu'il me soit permis de faire observer qu'Euclide ne pouvait arriver à son but par la même voie qu'Archimède, sans faire usage des quatre principes ou demandes qui se trouvent à la tête du premier livre de la sphère et du cylindre; or Euclide n'admettait pas ces quatre demandes. Voilà pourquoi Euclide, qui a démontré que les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres, n'a pas démontré que les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs diamètres, et que le cercle est égal à un triangle ayant pour base une droite égale à la circonférence, et pour hauteur une droite égale au rayon; car il aurait fallu pour cela qu'Euclide eût admis, comme Archimède, que la somme de deux tangentes qui partent du même point, est plus grande que l'arc qu'elles embrassent, etc.

La proposition LXXXVI des données, qui est la LXXXVII de mon édition, avait singulièrement embarrassé Grégory. Il dit dans sa préface que ce théorème est grandement vicié, et qu'il n'a pu le rétablir à l'aide des manuscrits. Je pense que son erreur provenait de ce qu'il ne connaissait pas un lemme qui se trouve après la proposition LXXXVI de mon édition, et que je vais exposer d'une manière un peu différente.



Soit le parallélogramme AR ; par le point B menons la droite EZ perpendiculaire à $BΓ$, prolongeons $ΔA$; faisons BZ égal à BA ; achevons les rectangles TE , TZ , et d'un point H quelconque de AB menons $HΘ$ perpendiculaire à $BΓ$. Le parallélogramme TA , c'est-à-dire le rectangle TE sera au rectangle TZ comme BE est à BZ . Mais BE est à BZ , c'est-à-dire BE est à BA comme le sinus $HΘ$ de l'angle ABF est au rayon BH ; le parallélogramme TA est donc au rectangle TZ :: $\sin. ABF : R$. D'où il suit que, quelles que soient les longueurs des côtés AB , $BΓ$ du parallélogramme AR , le rectangle ZT sera donné de grandeur, tant que l'angle ABF restera le même, et que le parallélogramme AR ne cessera pas d'être égal à une surface donnée.

Hæc est solutio algebraica theorematum LXXXVII, quod quidem in nullâ suarum partium vitiatum erat.

Duæ rectæ x , y contineant superficiem datam c^2 , in angulo dato B , et sit ut quadratum x^2 præter superficiem datam a^2 ad y^2 ita recta data m ad rectam datam n ; dico rectas x , y datas fore.

Inveniemus superficiem æqualem rectangulo sub rectis x , y contento, ope hujus proportionis, $\sin. B : R :: c^2 : \frac{R \times c^2}{\sin. B}$;

Ponatur quadratum b^2 æquale rectangulo $\frac{R \times c^2}{\sin. B}$;

Fiet $xy = b^2$.

Sed $x^2 - a^2 : y^2 :: m : n$;

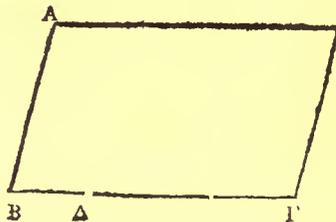
Ergo $nx^2 - na^2 = my^2$.

His duabus æquationibus resolutis, inveniatur,

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{4mb^4 + na^4}{4h}}}$$

$$y = \sqrt{-\frac{na^2}{2m} + \sqrt{\frac{4mub^4 + n^2a^4}{4m^2}}}$$

Talis est algebrae agendi modus; hic autem Euclidis. Utar signis abbreviatoribus nostris, ut pro certo habeatur eorum utilitas in comprehendendis arduis quæstionibus antiquæ geometriæ.



Ponatur rectangulum $B\Gamma \times B\Delta$ æquale superficiem datæ a^2 . Quoniam $B\Gamma^2 = B\Gamma \times B\Delta + B\Gamma \times \Delta\Gamma$; ergo $B\Gamma^2 - a^2 = B\Gamma^2 - B\Gamma \times B\Delta = \Delta\Gamma \times B\Gamma$.

Sed $B\Gamma^2 - a^2 : AB^2 :: m : n$;

Ergo (A) $B\Gamma \times \Delta\Gamma : AB^2 :: m : n$.

Voici à présent la solution algébrique du théorème LXXXVII, qui certes n'était vicié dans aucune de ses parties.

Que deux droites x, y comprennent une surface donnée c^2 , dans un angle donné B , et que x^2 moins une surface donnée a^2 soit à y^2 comme une droite donnée m est à une droite donnée n ; je dis que les droites x, y seront données.

Pour avoir la surface égale au rectangle sous les droites x, y , je fais cette proportion, $\sin. B : R :: c^2 : \frac{R \times c^2}{\sin. B}$.

$$\text{Que } b^2 = \frac{R \times c^2}{\sin. B};$$

$$\text{On aura } xy = b^2.$$

$$\text{Mais } x^2 - a^2 : y^2 :: m : n;$$

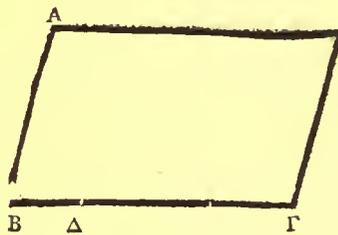
$$\text{Donc } nx^2 - na^2 = my^2.$$

Résolvant ces deux équations, on trouvera

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{4mb^4 + na^4}{4n}}}$$

$$y = \sqrt{-\frac{na^2}{2m} + \sqrt{\frac{4mnb^4 + n^2a^4}{4m^2}}}$$

Tel est le procédé de l'algèbre; voici celui d'Euclide. J'emploierai nos signes abrégatifs, pour faire sentir combien ils sont propres à faciliter l'intelligence des questions difficiles de la géométrie ancienne.



Supposons que le rectangle $B\Gamma \times B\Delta$ soit égal à la surface donnée a^2 . Puisque $B\Gamma^2 = B\Gamma \times B\Delta + B\Gamma \times \Delta\Gamma$, on aura $B\Gamma^2 - a^2 = B\Gamma^2 - B\Gamma \times B\Delta = B\Gamma \times \Delta\Gamma$.

$$\text{Mais } B\Gamma^2 - a^2 : AB^2 :: m : n;$$

$$\text{Donc (A) } B\Gamma \times \Delta\Gamma : AB^2 :: m : n.$$

Sed rectangulum $AB \times BF$ datum est (lemma), nec non rectangulum $BF \times B\Delta$; ratio igitur ipsius $AB \times BF$ ad ipsum $BF \times B\Delta$ data est. Sit autem ratio ipsius $AB \times BF$ ad $BF \times B\Delta$ eadem quæ ratio ipsius m ad o ;

$$\text{Ergo } AB \times BF : BF \times B\Delta :: m : o.$$

$$\text{Sed } AB \times BF : BF \times B\Delta :: AB : B\Delta;$$

$$\text{Ergo } AB : B\Delta :: m : o;$$

$$\text{Ergo } AB^2 : B\Delta^2 :: m^2 : o^2 : m : p.$$

$$\text{Sed } BF \times \Delta\Gamma : AB^2 :: m : n \text{ (A)};$$

$$\text{Ergo } BF \times \Delta\Gamma : B\Delta^2 :: m^2 : n \times p :: m : q;$$

$$\text{Ergo } 4 BF \times \Delta\Gamma : B\Delta^2 :: 4 m : q;$$

$$\text{Ergo } 4 BF \times \Delta\Gamma + B\Delta^2 : B\Delta^2 :: 4 m + q : q :: m^2 : s^2.$$

$$\text{Sed } 4 BF \times \Delta\Gamma + B\Delta^2 = (BF + \Delta\Gamma)^2 \text{ (lib. II, prop. VIII)};$$

$$\text{Ergo } (BF + \Delta\Gamma)^2 : B\Delta^2 :: m^2 : s^2;$$

$$\text{Ergo } BF + \Delta\Gamma : B\Delta :: m : s;$$

$$\text{Ergo } BF + \Delta\Gamma + B\Delta, \text{ c'est-à-dire } 2 BF : B\Delta :: m + s : s;$$

$$\text{Ergo (B) } BF : B\Delta :: \frac{m + s}{2} : s :: m^2 : t^2.$$

$$\text{Sed } BF : B\Delta :: BF \times B\Delta : B\Delta^2;$$

$$\text{Ergo (C) } BF \times B\Delta : B\Delta^2 :: m^2 : t^2.$$

Sed ipsum $BF \times B\Delta$ datum est; ipsum igitur $B\Delta^2$ datum est; recta igitur $B\Delta$ est data; quare et ipsa BF data est. Sed ipsum $AB \times BF$ est datum, nec non angulus B ; quare et ipsa AB est data; rectæ igitur AB , BF datæ sunt.

Ex hoc manifestum est nos habituros esse valores rectarum incognitarum AB , BF ope duarum proportionum B et C . Etenim si, in proportionem C , substituamus superficiem datam a^2 pro rectangulo $BF \times B\Delta$, habebimus $B\Delta = \frac{at}{m}$, et si substituamus hunc valorem ipsius $B\Delta$, in proportionem B , habebimus $BF = \frac{am}{t}$.

Ex libris Hypsielis, complures mendas crassissimas et solo ictu oculorum evidentissimas eieci, quæ tamen in tribus codicibus 190, 2542, 2545 *, et in editionibus Basilicæ Oxoniæque reperiuntur. (*Vide* Lectiones varias.)

* Hi tres codices, codice 2542 excepto, defectuosi sunt et lacunis scatentes.

Mais le rectangle $AB \times BF$ est donné (lemme), ainsi que le rectangle $BF \times BA$; la raison de $AB \times BF$ à $BF \times BA$ est donc donnée. Que la raison de $AB \times BF$ à $BF \times BA$ soit la même que celle de m à o ,

On aura $AB \times BF : BF \times BA :: m : o$.

Mais $AB \times BF : BF \times BA :: AB : BA$;

Donc $AB : BA :: m : o$;

Donc $AB^2 : BA^2 :: m^2 : o^2 : m : p$.

Mais $BF \times \Delta F : AB^2 :: m : n$ (A);

Donc $BF \times \Delta F : BA^2 :: m^2 : n \times p :: m : q$;

Donc $4 BF \times \Delta F : BA^2 :: 4 m : q$;

Donc $4 BF \times \Delta F + BA^2 : BA^2 :: 4 m + q : q :: m^2 : s^2$.

Mais $4 BF \times \Delta F + BA^2 = (BF + \Delta F)^2$ (liv. II, prop. VIII);

Donc $(BF + \Delta F)^2 : BA^2 :: m^2 : s^2$;

Donc $BF + \Delta F : BA :: m : s$;

Donc $BF + \Delta F + BA$, c'est-à-dire $2 BF : BA :: m + s : s$;

Donc (B) $BF : BA :: \frac{m + s}{2} : s :: m^2 : t^2$.

Mais $BF : BA :: BF \times BA : BA^2$;

Donc (C) $BF \times BA : BA^2 :: m^2 : t^2$.

Mais $BF \times BA$ est donné; BA^2 est donc donné aussi; la droite BA est donc donnée; la droite BF est donc donnée aussi. Mais $AB \times BF$ est donné, ainsi que l'angle B ; la droite AB est donc donnée aussi; les droites AB , BF sont donc données.

Il est évident, d'après cela, que l'on aura les valeurs des inconnues AB , BF par le moyen des deux proportions B et C . En effet, substituant, dans la proportion C , la surface donnée a^2 au rectangle $BF \times BA$, on aura $BA = \frac{at}{m}$, et substituant cette valeur de BA dans la proportion B , on aura $BF = \frac{am}{t}$.

Dans les livres d'Hypsicle, j'ai fait disparaître une foule de fautes grossières qui sautaient aux yeux, et qui cependant se trouvaient dans les trois manuscrits 190, 2542, 2545*, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. (Voyez les Variantes.)

* Ces trois manuscrits, si l'on en excepte 2542, sont défectueux et remplis de lacunes.

Propositio II libri II corruptissima erat in tribus codicibus, in editionibus Basilicæ, Oxoniæque, necnon in versionibus Zamberti et Commandini. Ex integro hanc demonstrationem restitui.

Lectio paginæ 516 mea est. Codices et editio Basilicæ versionesque Zamberti et Commandini omnino erant inintelligibiles; et emendatio Gregory non fausta mihi videbatur.

Lectio varia primæ lineæ paginæ 531 imprimis notanda est. Hæc erat τῆς ΑΒ pro τῆς; hæc mendâ manente, quod Hypsicles dicit illud est impossibile; et hæc menda adest tamen in tribus codicibus, in editionibus Basilicæ, Oxoniæque, necnon in versionibus Zamberti atque Commandini.

Cum Euclides meus terminatus sit, sine ullâ morâ prelo sum subjecturus Apollonii opera conjunctim cum Pappi Lemmatibus Eutochiique Commentariis, nec non cum Sereni duobus libris de Cylindro et Cono. (*Vide præfationem secundi voluminis*).

Hoc tertium ultimumque Euclidis volumen editum fuisset mense octobri novissime præterito, ni moram attulisset miserandum filiæ meæ primo genitæ fatum, quæ postquam fuerat per viginti et octo annos, dulce vitæ meæ solamen, in complexu meo immaturè vitâ decessit decimâ nonâ die septembris. Heu! non potuit, pene dixi, noluit superesse natæ suæ in ipso matris gremio præreptæ, duodecimâ ejusdem mensis die, exacto nondum tertio ætatis anno.

Omnibus ærumnis confectus, nec putans me posse tam diris repentinisque cladibus esse superstitem, obsecraveram clarissimum virum Delambre, perpetuum Academiæ scientiarum secretarium, ut si quis ingrueret casus, impressioni operis mei absolvendæ attendere vellet. Itaque D. Delambre adjuvante, ne mors quidem ipsa mea ullam integræ Euclidis operum promulgationi moram attulisset; et ea jam pridem fuissent edita, ni extitissent calumniæ, vexationes semper renascentes, quibus sexdecim ab hinc annis et amplius sum objectus.

La proposition II du livre II était entièrement altérée dans les trois manuscrits, dans les éditions de Bâle, d'Oxford et dans les traductions de Zamberti et de Commandin. J'ai rétabli cette démonstration dans tout son entier.

La leçon de la page 516 est de moi. Les manuscrits, l'édition de Bâle, et les traductions de Zamberti et de Commandin, ne présentaient aucun sens raisonnable, et la correction de Grégory ne me paraissait pas heureuse.

La variante de la première ligne de la page 551 est très-remarquable. Il y avait $\tau\tilde{\eta}\varsigma$ AB pour $\tau\tilde{\eta}\varsigma$; ce qui faisait dire à Hypsicle une chose impossible, et cette faute se trouve dans tous les trois manuscrits, dans les éditions de Bâle, d'Oxford, et dans les traductions de Zamberti et de Commandin.

Mon Euclide étant terminé, je vais faire mettre incessamment sous presse les OEuvres d'Apollonius, qui seront accompagnées des Lemmes de Pappus, des Commentaires d'Eutochius, et des deux livres du Cylindre et du Cône de Sérénus. (*Voyez* la Préface du second volume.)

Ce troisième et dernier volume des OEuvres d'Euclide aurait paru au mois d'octobre dernier, sans la fin déplorable de ma fille aînée, qui, après avoir fait le charme de ma vie pendant vingt-huit ans, expira dans mes bras le vendredi 19 septembre, n'ayant pu, ou plutôt n'ayant pas voulu survivre à sa fille unique, qui était morte presque subitement sur le sein de sa mère le vendredi de la semaine précédente, dans la troisième année de son âge.

L'âme brisée par la douleur, et ne comptant pas pouvoir survivre à des pertes aussi cruelles, arrivées coup sur coup, j'avais prié M. Delambre, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, de vouloir bien, en cas d'événement, surveiller l'impression de la fin de mon ouvrage. Ainsi, grâce à ce savant illustre, ma mort même n'aurait apporté aucun retard à l'entière publication des OEuvres d'Euclide, dont le public jouirait depuis long-temps, sans les calomnies, et sans les persécutions sans cesse renaissantes, auxquelles j'ai été en butte depuis seize années révolues.

EDITIO OXONIE.			EDITIO BASILIÆ.			
Pag.	lin.		Pag.	lin.		<i>Lege.</i>
414,	3,	<i>b.</i> BEΓ	247,	10,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>	ἢ BEB
415,	13,	<i>b.</i> τῶ				τοῦ
419,	21,	περιεχόμενον	250,	21,	<i>Idem.</i>	περιεχόμενος
—	16,	<i>b.</i> ἤξει				ἤξει
421,	14,	πενταγώνος				πενταγώνον
—	3,	<i>b.</i> αὐτὸν	152,	11,	<i>Idem.</i>	αὐτὸ
424,	1,	<i>b.</i> τῆς				τῶν
425,	30,	πλευρὰ	254,	5,	<i>Idem.</i>	τῆς πλευρᾶς
426,	14,	<i>b.</i> ἀ				αἱ
428,	9,	τριπλασίον				διπλασίον
—	2,	<i>b.</i> τῆς				τῆ
429,	21,	ἀπὸ				ὑπὸ
—	29,	διπλασίον				διπλατίου
435,	11,	τὸ	259,	23,	<i>Idem.</i>	τῶ
—	28,	ἀπὸ	—	14,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>	ὑπὸ
437,	25,	τὰ	260,	8,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>	τὸ
—	20,	<i>b.</i> ἔσται	—	2,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>	ἔστω
438,	14,	τῆς	161,	18,	<i>Idem.</i>	τοῦ
—	17,	ἰσοπλεύρου				ἰσοπλεύρου τριγώνου
—	7,	<i>b.</i> τὸ				τὰ
439,	13,	<i>b.</i> πενταγώνων	262,	14,	<i>Idem.</i>	πενταγώνους
440,	15,	τῆς	—	29,	<i>Idem.</i>	τὴν
—	16,	τῆς	—	30,	<i>Idem.</i>	τὴν
—	18,	δὲ	—	28,	<i>Idem.</i>	deleatur.
—	22,	AB, BΓ	—	19,	<i>Idem.</i>	ὑπὸ AB, BΓ
—	27,	ΔΖ	—	15,	<i>Idem.</i>	ἀπὸ ΔΖ
—	12,	<i>b.</i> λόγον				λόγον ἔχει
—	8,	<i>b.</i> τοῦ				τὸ ἀπὸ
445,	20,	τῆς				τῶν
445,	18,	ἔχει				ἔχει
448,	17,	ἰσοπλεύρου	266,	1,	<i>Idem.</i>	ἰσοπλευρὴν τε καὶ ἰσογώνιον
—	29,	δύο	267,	8,	<i>Idem.</i>	δύο ἑρθᾶς
449,	3,	<i>b.</i> τῆς AB	268,	2,	<i>Idem.</i>	τῆς

EUCLIDIS DATA.

EX EDITIONE CLAUDII HARDII.

EDITIO OXONIE.		EDITIO CLAUDII HARDY.			
Pag.	lin.	Pag.	lin.	Lege.	
462,	6, b.	Γ	22, 11,	<i>Idem.</i>	τὸ Γ
465,	2,	αὐτὸ	27, 13,	<i>Idem.</i>	τὸ αὐτὸ
467,	2,	γωνίας	γωνίας
472,	16, b.	τεῦ	46, 19,	<i>Idem.</i>	τῶ
473,	26,	αὐτὸ	48, 19,	<i>Idem.</i>	τὸ αὐτὸ
476,	5,	αὐτοῦς	59, 15,	<i>Idem.</i>	αὐτὰς
477,	11, b.	ἢ	ἢ ὑπὸ
479,	4,	AB	63, 9,	<i>Idem.</i>	ἢ AB
—	21,	ΓΔ	64, 11,	<i>Idem.</i>	ἢ ΓΔ
482,	8,	ἀπὸ	ἐπὶ
—	21, b.	ἐν	deleatur.
—	5, b.	ἀπὸ τοῦ	ὑπὸ τῶν
485,	1,	τὸ	τῆν
—	2,	τὸ	τῆν
—	16,	ABΓ	78, 15,	<i>Idem.</i>	τὸ ABΓ
—	5, b.	ἐχέθωσαν	ἴχωσι
487,	3,	τῶ	τῆ
490,	12, b.	ἦχθω	91, 2,	<i>Idem.</i>	ἦχθωσαν
491,	19,	τῆς	92, 11,	<i>Idem.</i>	τεῦ
493,	9,	ΑΓΔΕΒ, AZ	96, 11,	<i>Idem.</i>	τὰ ΑΓΔΕΒ, AZ
—	19,	δύο	δύο εἶδη τῶ
494,	22,	τὰ	97, 21,	<i>Idem.</i>	τὰς
298,	21,	τὸ	τῆν
—	77, b.	AB	108, 21,	<i>Idem.</i>	τὸ AB
499,	16,	ἀρα	111, 12,	<i>Idem.</i>	ἀρα ἢ ὑπὸ
501,	14,	τεῦ	115, 5,	<i>Idem.</i>	τῶν
—	4, b.	ΑΔ	ἢ ΑΔ
502,	5,	παρὰ	ὑπὸ
503,	14,	ὑπὸ	120, 1,	<i>Idem.</i>	ἀπὸ
—	19,	τῆς	τῶν
505,	17,	ἀπὸ	ὑπὸ
—	14, b.	ἀρὰ	ἀρὰ ἀπὸ
—	7, b.	τὸ	127, 7,	<i>Idem.</i>	τῶ
—	1, b.	ἀπὸ	— 14,	<i>Idem.</i>	ὑπὸ
506,	23,	τεῦ	τῶν

IN præfatione voluminis primi dixeram Oxoniæ editionem nihil aliud esse quam meram fere transcriptionem editionis Basilicæ. Hæc quidem addere potuissem, scilicet mendas crassissimas quibus scatet Basilicæ editio adesse plerasque editione Oxoniæ, et in hac editione mendas hujusmodi permultas reperiri quibus caret in Basilicæ editio. Quod omni procul dubio ostendetur ope tabulæ subsequenti.

Vocabulum *idem* quod videre est in columnâ editionis Basilicæ, significat hanc editionem concordare cum Oxoniæ editione; ubi hoc vocabulum abest, ibi abest et menda.

Littera *b* indicat lineas ab infimâ paginâ esse computandas.

J'AVAIS dit, dans la préface du premier volume, que l'édition d'Oxford n'était guères que la copie de celle de Bâle. J'aurais pu ajouter que la plupart des fautes les plus grossières de l'édition de Bâle, se retrouvent dans celle d'Oxford, et que celle-ci en renferme un très-grand nombre dont l'autre est exempte. Le tableau suivant prouvera d'une manière incontestable, ce que je viens d'avancer.

Le mot *idem* de la colonne de l'édition de Bâle, veut dire que cette édition est conforme à celle d'Oxford; l'absence de ce mot veut dire que la faute n'existe pas dans l'édition de Bâle.

La lettre *b* indique qu'il faut compter les lignes à partir du bas de la page.

TABULA
MENDARUM CRASSISSIMARUM

QUIBUS PRÆCIPUE VITIANTUR

OXONIÆ BASILIÆQUE EDITIONES.

MENDE EDIT. OXONIÆ.			MENDE EDIT. BASILIÆ.			Lege.
Pag.	lin.		Pag.	lin.		
2,	16,	b. ἀνίστας	2,	11,	<i>Idem</i>	ἀνίστους
4,	16,	b. ΓΗΘ				ὁ ΓΗΘ
7,	17,	b. τῷ ἐλάσσονι τὸ μείζον	5,	21,	<i>Idem</i>	τὸ ἐλάσσον τῷ μείζονι
35,	17,	τῶν				τῆς
40,	21,	b. τοῦ				τοῦ ἀπὸ τοῦ
46,	8,	τῆς				τοῦ
58,	13,	b. ἡ				τοῦ
66,	28,	τὸ	40,	3,	<i>Idem</i>	τῷ
98,	17,	ὅτι τὸ	68,	25,	τὸ	εἰ
99,	13,	b. ΖΗ	69,	17,	<i>Idem</i>	τὸ ΖΗ
103,	4,	τὸ	61,	9,	<i>Idem</i>	τὰ
114,	2,	b. παράλληλος	69,	26,	<i>Idem</i>	deleatur.
115,	3,	παράλληλος	—	29,	<i>Idem</i>	deleatur.
123,	22,	αὐτῷ				αὐτῆ
136,	25,	b. αὐτῷ				αὐτοῦ
140,	6,	τὴν				τῆς
142,	21,	τὸ				τῷ
149,	9,	b. μέτρη	88,	1,	b. <i>Idem</i>	μετραῖ
151,	21,	μετρήσας	89,	3,	b. <i>Idem</i>	μετρήσει
153,	5,	τῷ	91,	2,	<i>Idem</i>	τοῦ
—	10,	μέρη				μέρη ἢ
154,	1,	τοῦ	—	31,	<i>Idem</i>	τῷ
155,	12,	b. τῷ	92,	8,	b. <i>Idem</i>	τοῦ
—	8,	b. τῷ	—	5,	b. <i>Idem</i>	τοῦ
159,	13,	δευτέρου	95,	12,	<i>Idem</i>	τετάρτου
—	13,	b. τὸν	—	28,	<i>Idem</i>	τῶν
160,	3,	ἀπὸ				ὑπὸ
—	18,	ἀπὸ	—	3,	b. <i>Idem</i>	ὑπὸ
164,	8,	τινα	98,	24,	<i>Idem</i>	τίνας
171,	4,	b. ἔσους	103,	4,	b. <i>Idem</i>	ἔσους ἂν
174,	15,	τῶν	105,	13,	b. <i>Idem</i>	ὁ
178,	9,	πρὸς	108,	12,	b. <i>Idem</i>	deleatur.
182,	5,	b. οὐδὲ ὁ δὲ	113,	9,	ὁ δ'	οὐδὲ
187,	4,	αὐτῶν				αὐτοῦ
191,	14,	τέταρτος	118,	9,	<i>Idem</i>	δεύτερος
192,	17,	τὸν				τῶν

III.

C

EDITIO OXONIA.		EDITIO BASILIE.		Lege.
Pag.	lin.	Pag.	lin.	
192,	14, b.	ἐπεὶ	118, 6, b. <i>Idem</i>	ἐπεὶ οἱ
193,	17, b.	διαλείποντες	119, 22, b. <i>Idem</i>	διαλείποντες πάν- τες
198,	18,	ἄλλου	122, 9, b. <i>Idem</i>	ἄλλου πρώτου
—	13, b.	μετρούμενον	μετρούμενος
207,	25,	τὸν	128, 6, b. <i>Idem</i>	τοὺς
209,	1, b.	τετράγωνος	130; 16, <i>Idem</i>	τετράγωνα
210,	1,	ἴσαι	— 17, <i>Idem</i>	ἴσα
211,	15, b.	ὁ	131, 20, <i>Idem</i>	τὸ
215,	20, b.	τὸν	133, 10, b. <i>Idem</i>	τὸ
226,	16,	μήκη	139, 25, <i>Idem</i>	μήκει
—	24,	μήκη	— 17, b. <i>Idem</i>	μήκει
—	17, b.	τῶ	139, 11, b. <i>Idem</i>	τῆ
237,	20,	τῆν	145, 2, b. <i>Idem</i>	τὸν
244,	17,	τῆ	τῆς
245,	15,	τῆς	150, 26, <i>Idem</i>	τοῦ
—	19,	ἀπὸ	— 14, b. <i>Idem</i>	ὑπὸ
245,	1, b.	τῆ	τῆς
246,	7,	ἐκ	ἐκ τῶν ἀπὸ
—	17,	μέσον, μέσον	μέσον
—	26,	ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῶ ἀπὸ	ἀπὸ τῶν ΑΔ, τῶ ἀπὸ
250	17,	ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ	153, 19, <i>Idem</i>	ἀσύμμετρά ἐστι τὰ
251,	2, b.	τῶν	154, 2, <i>Idem</i>	τοῦ
262,	22,	τῶν	159, 1, b. <i>Idem</i>	τοῦ
—	23,	τῶν	— 1, b. <i>Idem</i>	τοῦ
264,	3,	τῶ	160, 6, b. <i>Idem</i>	τῶν
—	23,	ἀσύμμετρον	ἀσύμμετρα
—	—	ὑπὸ τῶν	ἀπὸ τῶν
269,	11, b.	τὰ μέσα	164, 16, <i>Idem</i>	τὰς μέσας
277,	13,	τὸ	169, 3, <i>Idem</i>	τῶ
—	20,	τὸ	— 5, <i>Idem</i>	τῶ
282,	12, b.	μείσεως	171, 14, b. <i>Idem</i>	μείσεως
284,	2, b.	τὸ	172, 6, b. <i>Idem</i>	τὰ
289,	8,	τὸ	175, 7, <i>Idem</i>	τῶ
297,	12, b.	τὸ	τῶ
300,	26,	τῶ τῶ	τῶ
—	54,	τῆς	τῶν
303	6, b.	ὁ	ἢ
305,	17, b.	τῶ	τὸ
309,	13, b.	ἢ	τὸ
310	1,	ὑπὸ	ἀπὸ

TABULA.

XV

EDITIO OXONIE.		EDITIO BASILIE.		Lege.	
Pag.	lin.	Pag.	lin.		
314,	15, <i>b.</i>	188,	5, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	ἔστι τετάρτη
315,	18,	189,	9,	<i>Idem.</i>	αἱ
319,	1, <i>b.</i>				τῆς
—	8,				τοῦ τε
323,	18,				deleatur.
326,	23,				τῆς
332,	27,				ἑκατέραν
336,	10,				κάθητον
338,	21, <i>b.</i>				deleatur.
343,	9, <i>b.</i>				αὐτάς
345,	2,				εἰ δὲ οὐ
350,	9,				deleatur.
352,	14, <i>b.</i>	210,	9, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	ἴσην στερεᾶν γωνίαν
355,	18, <i>b.</i>	211,	16,	<i>Idem.</i>	διαγωνίους
358,	9,				εὐθείαις
360,	32,	215,	15, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	ἴσων
361,	4,	—	3, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	ἐπίπεδα
367,	2,				γωνίας
369,	9, <i>b.</i>				περὶ
370,	3,	221	411,	<i>Idem.</i>	παραλληλόγραμμα
373,	27,				βάσις
—	29,				βάσις
374,	28,	223,	3, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	τῆς ΓΞ, ἢ δὲ τῆς ΖΦ
382,	8, <i>b.</i>	228,	2, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	τετραγώνου
383,	5, <i>b.</i>	229,	18, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	κύκλον
385,	16, <i>b.</i>	220,	14, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	μείζων
—	15, <i>b.</i>	230,	13, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	τέμνοντες
400,	20, <i>b.</i>				τῆς
—	17, <i>b.</i>	239,	14,	τετραγώνου	τετραγώνου
—	5, <i>b.</i>	—	20,	<i>Idem.</i>	τῆς
401,	30,	240,	2,	<i>Idem.</i>	τῆς
403,	11,	—	2, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	διπλασίων
403,	27,				τῶ δὲ
404,	1, <i>b.</i>				τὸ
408,	4,	243,	10, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	ῥητῆ
411,	5, <i>b.</i>	246,	3,	<i>Idem.</i>	τῆς
412,	6,	245,	3, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	τῆ BK περιφέρειας
—	6,				τῆς
—	4, <i>b.</i>	146,	21, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	deleatur.
—	1, <i>b.</i>	—	18, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	τῆς
413,	7,	—	13, <i>b.</i>	<i>Idem.</i>	τῆς
—	20, <i>b.</i>	247,	4,	<i>Idem.</i>	τῆ

EDITIO OXONIÆ.			EDITIO BASILIÆ.			Lege.
Pag.	lin.		Pag.	lin.		
192,	14,	b. ἐπεὶ	118,	6,	b. <i>Idem</i>	ἐπεὶ οἱ
193,	17,	b. διαλείποντες	119,	22,	b. <i>Idem</i>	διαλείποντες πάν- τες
198,	18,	ἄλλου	122,	9,	b. <i>Idem</i>	ἄλλου πρώτου
—	13,	b. μετρούμενον				μετρούμενος
207,	25,	τὸν	128,	6,	b. <i>Idem</i>	τοὺς
209,	1,	b. τετράγωνος	130;	16,	<i>Idem.</i>	τετράγωνα
210,	1,	ἴσαι	—	17,	<i>Idem.</i>	ἴσα
211,	15,	b. ὁ	131,	20,	<i>Idem.</i>	τὸ
215,	20,	b. τὸν	133,	10,	b. <i>Idem.</i>	τὸ
226,	16,	μήκη	139,	25,	<i>Idem.</i>	μήκει
—	24,	μήκη	—	17,	b. <i>Idem.</i>	μήκει
—	17,	b. τῶ	139,	11,	b. <i>Idem.</i>	τῆ
237,	20,	τῶν	145,	2,	b. <i>Idem.</i>	τὸν
244,	17,	τῆ				τῆς
245,	15,	τῆς	150,	26,	<i>Idem.</i>	τοῦ
—	19,	ἀπὸ	—	14,	b. <i>Idem.</i>	ὑπὸ
245,	1,	b. τῆ				τῆς
246,	7,	ἐκ				ἐκ τῶν ἀπὸ
—	17,	μέσον, μέσον				μέσον
—	26,	ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῶ ἀπὸ				ἀπὸ τῶν ΑΔ, τῶ ἀπὸ
250	17,	ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ	153,	19,	<i>Idem.</i>	ἀσύμμετά ἐστι τὰ
251,	2,	b. τῶν	154,	2,	<i>Idem.</i>	τοῦ
262,	22,	τῶν	159,	1,	b. <i>Idem.</i>	τοῦ
—	23,	τῶν	—	1,	b. <i>Idem.</i>	τοῦ
264,	3,	τῶ	160,	6,	b. <i>Idem.</i>	τῶν
—	25,	ἀσύμμετρον				ἀσύμμετρα
—	—	ὑπὸ τῶν				ἀπὸ τῶν
269,	11,	b. τὰ μέσα	164,	16,	<i>Idem.</i>	τὰς μέσας
277,	13,	τὸ	169,	3,	<i>Idem.</i>	τῶ
—	20,	τὸ	—	5,	<i>Idem.</i>	τῶ
282,	12,	b. μέσης	171,	14,	b. <i>Idem.</i>	μέσης
284,	2,	b. τὸ	172,	6,	b. <i>Idem.</i>	τὰ
289,	8,	τὸ	175,	7,	<i>Idem.</i>	τῶ
297,	12,	b. τὸ				τῶ
300,	26,	τῶ τῶ				τῶ
—	34,	τῆς				τῶν
303	6,	b. ὁ				ἢ
305,	17,	b. τῶ				τὸ
309,	13,	b. ἢ				τὸ
310	1,	ὑπὸ				ἀπὸ

TABULA.

XV

EDITIO OXONIE.			EDITIO BASILIE.			Lege.
Pag.	lin.		Pag.	lin.		
314,	15,	b. ἐστὶ	188,	5,	b. <i>Idem.</i>	ἐστὶ τετάρτη
315,	18,	ἢ	189,	9,	<i>Idem.</i>	αἱ
319,	1,	τῆ				τῆς
—	8,	τό τε				τοῦ τε
323,	18,	ἀπὸ				deleatur.
326,	23,	τούς				τῆς
332,	27,	ἐκατέρων				ἐκατέρων
336,	10,	κάθητον				κάθητον
338,	21,	b. παράλληλοι				deleatur.
343,	9,	b. αὐτὰ				αὐτὰς
345,	2,	οὐ δὲ οὐ				εἰ δὲ οὐ
350,	9,	παράλληλοι				deleatur.
352,	14,	b. ἴσιν στρεῖαν γωνίαν	210,	9,	b. στρεῖα γωνία ἴσιν	ἴση στρεῖα γωνία
353,	18,	b. διαγωνίας	211,	16,	<i>Idem.</i>	διαγωνίους
358,	9,	εὐθείαις				εὐθείαις
360,	32,	ἴσων	215,	15,	b. <i>Idem.</i>	ἴσων
361,	4,	ἐπίπεδοι	—	5,	b. ἐπίπεδος	ἐπίπεδα
367,	2,	γωνίας				γωνίας
369,	9,	b. ὑπὸ				περὶ
370,	3,	παρὰλλήλων	221	411,	<i>Idem.</i>	παρὰλληλόγραμμα
373,	27,	βάσεις				βάσεις
—	29,	βάσεις				βάσεις
374,	28,	τῆ ΓΞ, ἢ δὲ τῆ ΖΦ	223,	5,	b. <i>Idem.</i>	τῆς ΓΞ, ἢ δὲ τῆς ΖΦ
382,	8,	b. κύκλου	228,	2,	b. <i>Idem.</i>	τετραγώνου
383,	5,	b. κύλινδρον	229,	18,	b. <i>Idem.</i>	κύκλον
385,	16,	b. μείζον	220,	14,	b. <i>Idem.</i>	μείζων
—	15,	b. τέμνοντας	230,	15,	b. <i>Idem.</i>	τέμνοντες
400,	20,	b. τῆ				τῆς
—	17,	b. τετραγώνων	239,	14,	τετραγώνου	τετραγώνου
—	5,	b. τῆ	—	20,	<i>Idem.</i>	τῆς
401,	30,	τοῦ	240,	2,	<i>Idem.</i>	τῆς
403,	11,	διπλασίον	—	2,	b. <i>Idem.</i>	διπλασίον
403,	27,	τῶ				τῶ δὲς
404,	1,	b. τῶ				τὸ
408,	4,	ῥητὴν	245,	10,	b. <i>Idem.</i>	ῥητὴ
411,	5,	b. τῆ	246,	3,	<i>Idem.</i>	τῆς
412,	6,	τῆς BK περιφέρειας	245,	3,	b. <i>Idem.</i>	τῆ BK περιφέρειας
—	6,	τῆ				τῆς
—	4,	b. ἢ ABΓZE	146,	21,	b. <i>Idem.</i>	deleatur.
—	1,	b. τῆ	—	18,	b. <i>Idem.</i>	τῆς
413,	7,	τῆ	—	13,	b. <i>Idem.</i>	τῆς
—	20,	b. τῶ	247,	4,	<i>Idem.</i>	τῆ

EDITIO OXONIE.			EDITIO BASILIE.			
Pag.	lin.		Pag.	lin.		<i>Lege.</i>
414,	3,	<i>b.</i> BEΓ	247,	10,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>	ἢ BEB
415,	13,	<i>b.</i> τῶ				τοῦ
419,	21,	περιεχόμενον	250,	21,	<i>Idem.</i>	περιεχόμενος
—	16,	<i>b.</i> ἤξει				ἤξει
421,	14,	πεντάγωνος				πενταγώνου
—	3,	<i>b.</i> αὐτὸν	152,	11,	<i>Idem.</i>	αὐτὸ
424,	1,	<i>b.</i> τῆς				τῶν
425,	50,	πλευρὰ	254,	5,	<i>Idem.</i>	τῆς πλευρᾶς
426,	14,	<i>b.</i> ἀ				αἱ
428,	9,	τριπλασίον				διπλασίον
—	2,	<i>b.</i> τῆς				τῆ
429,	21,	ἀπὸ				ὑπὸ
—	29,	διπλασίον				διπλασίον
435,	11,	τὸ	259,	23,	<i>Idem.</i>	τῶ
—	28,	ἀπὸ	—	14,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>	ὑπὸ
437,	25,	τὰ	260,	8,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>	τὸ
—	20,	<i>b.</i> ἔσται	—	2,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>	ἔστω
438,	14,	τῆς	161,	18,	<i>Idem.</i>	τοῦ
—	17,	ἰσοπλεύρου				ἰσοπλεύρου τριγώνου
—	7,	<i>b.</i> τὸ				τὰ
439,	13,	<i>b.</i> πενταγώνων	262,	14,	<i>Idem.</i>	πενταγώνους
440,	15,	τῆς	—	29,	<i>Idem.</i>	τὴν
—	16,	τῆς	—	50,	<i>Idem.</i>	τὴν
—	18,	δὲ	—	28,	<i>Idem.</i>	deleatur.
—	22,	AB, BΓ	—	19,	<i>Idem.</i>	ὑπὸ AB, BΓ
—	27,	ΔΖ	—	15,	<i>Idem.</i>	ἀπὸ ΔΖ
—	12,	<i>b.</i> λόγον				λόγον ἔχει
—	8,	<i>b.</i> τοῦ				τὸ ἀπὸ
443,	20,	τῆς				τῶν
445,	18,	ἔχει				ἔχει
448,	17,	ἰσοπλεύρου	266,	1,	<i>Idem.</i>	ἰσοπλευρὸν τε καὶ ἰσογώνιον
—	29,	δύο	267,	8,	<i>Idem.</i>	δύο ὀρθὰς
449,	3,	<i>b.</i> τῆς AB	268,	2,	<i>Idem.</i>	τῆς

EUCLIDIS DATA.

EX EDITIONE CLAUDII HARDII.

EDITIO OXONIE.		EDITIO CLAUDII HARDY.		
Pag.	lin.	Pag.	lin.	Lege.
462,	6, b.	Γ	22, 11,	<i>Idem.</i> τὸ Γ
465,	2,	αὐτὸ	27, 13,	<i>Idem.</i> τὸ αὐτὸ
467,	2,	γωνίας	γωνίας
472,	16, b.	τεῦ	46, 19,	<i>Idem.</i> τῶ
473,	26,	αὐτὸ	48, 19,	<i>Idem.</i> τὸ αὐτὸ
476,	5,	αὐτούς	59, 15,	<i>Idem.</i> αὐτάς
477,	11, b.	ἢ	ἢ ὑπὸ
479,	4,	AB	63, 9,	<i>Idem.</i> ἢ AB
—	21,	ΓΔ	64, 11,	<i>Idem.</i> ἢ ΓΔ
482,	8,	ἀπὸ	ἐπὶ
—	21, b.	ἐν	deleatur.
—	5, b.	ἀπὸ τοῦ	ὑπὸ τῶν
485,	1,	τὸ	τῶν
—	2,	τὸ	τῶν
—	16,	ABΓ	78, 15,	<i>Idem.</i> τὸ ABΓ
—	5, b.	ἐχέθωσαν	ἴχωσι
487,	3,	τῶ	τῆ
490,	12, b.	ἦχθω	91, 2,	<i>Idem.</i> ἦχθωσαν
491,	19,	τῆς	92, 11,	<i>Idem.</i> τοῦ
493,	9,	ΑΓΔΕΒ, ΑΖ	96, 11,	<i>Idem.</i> τὰ ΑΓΔΕΒ, ΑΖ
—	19,	δύο	δύο εἶδη-τῶ
494,	22,	τὰ	97, 21,	<i>Idem.</i> τὰς
298,	21,	τὸ	τῶν
—	77, b.	AB	108, 21,	<i>Idem.</i> τὸ AB
499,	16,	ἀρα	111, 12,	<i>Idem.</i> ἀρα ἢ ὑπὸ
501,	14,	τοῦ	115, 5,	<i>Idem.</i> τῶν
—	4, b.	ΑΔ	ἢ ΑΔ
502,	3,	παρὰ	ὑπὸ
503,	14,	ὑπὸ	120, 1,	<i>Idem.</i> ἀπὸ
—	19,	τῆς	τῶν
505,	17,	ἀπὸ	ὑπὸ
—	14, b.	ἀρὰ	ἀρὰ ἀπὸ
—	7, b.	τὸ	127, 7,	<i>Idem.</i> τῶ
—	1, b.	ἀπὸ	— 14,	<i>Idem.</i> ὑπὸ
506,	23,	τοῦ	τῶν

EDITIO OXONIÆ.			EDITIO CLAUDII HARDY.			<i>Lege.</i>
Pag.	lin.		Pag.	lig.		
510,	17,	<i>b.</i> τὴν				τὸ
513,	20,	ὁ				ἡ
—	16,	<i>b.</i> ὁ				ἡ
517,	2,	ΛΘΗ	152,	8,	<i>Idem.</i>	ὑπὸ ΛΘΗ
—	11,	ὑπὸ	152,	6,	<i>b. Idem.</i>	ὑπὸ τῶν
518,	23,	τοῦ				τῆς
—	24,	τὸ	155,	17,	<i>Idem.</i>	τῶ
520,	10,	ὡς ἔτυχεν				ἀνάλογον
—	19,	ὡς ἔτυχεν				deleatur.
423,	2,	τὸ				τῶ
522,	1,	τῶ				τοῦ
525,	19,	ἑ				τὸ

ERRATUM.

Ante ultimum *alinea* paginæ IX præfationis hæc adjiciantur :

Et si in propòrtione $AB : BA :: m : o$, substituamus valorem ipsius BA , habebimus $AB = \frac{at}{o}$

Et si dans la proportion $AB : BA :: m : o$, nous substituons la valeur de BA , nous aurons $AB = \frac{at}{o}$

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

ΟΡΟΙ.

α. ΣΤΕΡΕΟΝ ἐστὶ, τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

β. Στερεῦ δὲ πέρασ, ἐπιφάνεια.

γ. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὖσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ. Επίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστίν, ὅταν αἱ τῆ κοινῆ τομῆ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾧσιν.

DEFINITIONES.

1. SOLIDUM est, quod longitudinem et latitudinem et altitudinem habet.

2. Solidi autem terminus, superficies.

3. Recta ad planum perpendicularis est, quando ad omnes rectas contingentes ipsam, et existentes in subjecto plano, rectos facit angulos.

4. Planum ad planum rectum est, quando rectæ, quæ communi sectioni planorum ad rectos et in uno planorum ducuntur, reliquo plano ad rectos sunt.

LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Un solide est ce qui a longueur, largeur et profondeur.

2. Un solide est terminé par une surface.

3. Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan.

4. Un plan est perpendiculaire à un plan, lorsque les perpendiculaires menées dans un des plans à leur commune section, sont perpendiculaires à l'autre plan.

έ. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῆ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπίπεδῳ πέρασ² τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῆ³, ἢ περιεχομένη ὀξεῖα⁴ γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφιστώσης.

ς'. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ἢ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγόμενων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζ. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κλισθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημίαι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾧσι.

η. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θ. Ὁμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ι. Ἰσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

5. Rectæ ad planum inclinatio est, quando a sublimi termino rectæ ad planum perpendicularis ducitur, et a facto puncto ad terminum rectæ in plano recta jungitur, contentus acutus angulus junctâ rectâ et insistente.

6. Plani ad planum inclinatio est contentus acutus angulus rectis, quæ ducuntur ad rectos communi sectioni ad idem punctum in utroque planorum.

7. Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli æquales inter se sunt.

8. Parallela plana sunt quæ inter se non conveniant.

9. Similes solidæ figuræ sunt quæ continentur similibus planis, æqualibus multitudinc.

10. Æquales vero et similes solidæ figuræ sunt quæ continentur similibus planis, æqualibus multitudinc et magnitudinc.

5. L'inclinaison d'une droite sur un plan est l'angle aigu compris par cette droite et par la droite qui joint le point du plan que la première droite rencontre, et le point de ce plan que rencontre la perpendiculaire menée à ce plan de l'extrémité supérieure de la première droite.

6. L'inclinaison d'un plan sur un autre plan est l'angle aigu compris par les perpendiculaires menées d'un même point de la commune section dans l'un et l'autre plan.

7. On dit que des plans sont semblablement inclinés sur d'autres plans quand les angles des inclinaisons dont nous venons de parler sont égaux.

8. Les plans parallèles sont ceux qui ne se rencontrent point.

9. Les figures solides semblables sont celles qui sont comprises par des plans semblables, égaux en nombre.

10. Les figures solides égales sont celles qui sont comprises par des plans semblables, égaux en nombre et en grandeur.

ιδ'. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὸ πλείονων ἢ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν ἢ⁶ πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ΑΛΛΩΣ. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὸ πλείονων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων⁷ περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ις'. Πυραμὶς ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνεστῶς.

ιγ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστι καὶ⁸ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ'. Σφαῖρά ἐστὶν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περινεχθῆν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθῆν σχῆμα.

ιε'. Αξῶν δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ις'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

11. Solidus angulus est plurium quam duarum linearum, quæ sese contingant et non in eadem superficie sint, ad omnes lineas inclinatio. ALITER. Solidus angulus est qui pluribus quam duobus angulis planis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, ad unum punctum constitutis.

12. Pyramis est figura solida planis comprehensa, ab uno plano ad unum punctum constituta.

15. Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo adversa et æqualia et similia sunt et parallela, reliqua autem parallelogramma.

14. Sphæra est figura comprehensa, quando circuli manente diametro, conversum semicirculum, in eundem locum rursus restituitur a quo cœperat moveri.

15. Axis autem sphæræ est manens illa recta circa quam semicirculus convertitur.

16. Centrum vero sphæræ est idem quod et semicirculi.

11. Un angle solide est l'inclinaison mutuelle de plus de deux lignes qui se rencontrent, et qui ne sont pas dans une même surface. AUTREMENT. Un angle solide est celui qui est compris par plus de deux angles plans qui ne sont pas dans une même surface, et qui sont construits en un seul point.

12. Une pyramide est une figure solide comprise par des plans construits en un seul point au-dessus d'un plan.

13. Un prisme est une figure solide comprise par des plans dont deux de ces plans sont égaux, semblables et parallèles, et dont les autres plans sont des parallélogrammes.

14. Une sphère est la figure comprise sous la surface décrite par un demi-cercle, lorsque son diamètre restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir.

15. L'axe de la sphère est la droite immobile autour de laquelle tourne le demi-cercle.

16. Le centre de la sphère est le même que celui du demi-cercle.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη'. Κῶνός ἐστίν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περινεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. Κῶν μὲν ἢ μένουσα εὐθεῖα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένη, ὀρθογωνίος ἐσται ὃν κῶνος· ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγωνίος· ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγωνίος.

ιβ'. Ἀξων δὲ τοῦ κῶνου ἐστὶν ἢ μένουσα εὐθεῖα¹⁰ περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα'. Κύλινδρός ἐστίν¹¹, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν¹², περινεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

17. Diameter autem sphaeræ est recta quædam per centrum ducta, et terminata ex utràque parte a superficie sphaeræ.

18. Conus est comprehensa figura, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, conversum triangulum, in eundem locum rursus restituitur a quo cœperat moveri. Et si quidem manens recta æqualis sit reliquæ rectæ quæ circa rectum angulum convertitur, orthogonius erit conus; si vero minor, amblygonius; si autem major, oxygonius.

19. Axis autem conici est manens recta circa quam triangulum convertitur.

20. Basis vero, circulus a conversâ rectâ descriptus.

21. Cylindrus est comprehensa figura, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, parallelogrammum conversum, in eundem locum rursus restituitur a quo cœperat moveri.

17. Le diamètre de la sphère est une droite menée par le centre et terminée de part et d'autre à la surface de la sphère.

18. Un cône est une figure comprise sous les surfaces décrites par deux côtés d'un triangle rectangle, lorsque l'un des côtés de l'angle droit restant immobile, le triangle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir. Si la droite qui reste immobile est égale à l'autre côté qui tourne autour de l'angle droit, le cône s'appelle rectangle; si elle est plus petite, le cône s'appelle obtusangle; et si elle est plus grande, le cône s'appelle acutangle.

19. L'axe du cône est la droite immobile autour de laquelle tourne le triangle.

20. La base du cône est le cercle décrit par la droite qui tourne.

21. Un cylindre est un solide compris sous les surfaces décrites par trois côtés d'un parallélogramme rectangle, lorsque le quatrième côté restant immobile, ce parallélogramme tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir.

κβ'. Ἀξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίων περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ'. Ὁμοιοὶ κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἱ τε ἄξονες καὶ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσι.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἐξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κς'. Τετράεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν τεττάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον¹³.

κζ'. Οκτάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτῶ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον.

κη'. Δωδεκάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον¹⁴.

κθ'. Εἰκοσάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον.

22. Axis autem cylindri est manens recta circa quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases vero, circuli a duobus ex adverso circumactis lateribus descripti.

24. Similes conici et cylindri sunt, quorum et axes et diametri basium proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida sex quadratis æqualibus comprehensa.

26. Tetraëdrum est figura solida quatuor triangularibus et æquilateris comprehensa.

27. Octaëdrum est figura solida octo triangularibus et æquilateris comprehensa.

28. Dodecaëdrum est figura solida duodecim pentagonis æqualibus et æquilateris et æquiangularibus comprehensa.

29. Icosaëdrum est figura solida viginti triangularibus et æquilateris comprehensa.

22. L'axe du cylindre est la droite immobile autour de laquelle tourne le parallélogramme.

23. Les bases du cylindre sont les cercles décrits par les deux côtés opposés du parallélogramme qui se meuvent.

24. Les cônes et les cylindres semblables sont ceux dont les axes et dont les diamètres des bases sont proportionnels.

25. Un cube est un solide compris sous six quarrés égaux.

26. Un tétraèdre est une figure solide comprise sous quatre triangles égaux et équilatéraux.

27. Un octaèdre est une figure solide comprise sous huit triangles égaux et équilatéraux.

28. Un dodécaèdre est une figure solide comprise sous douze pentagones égaux, équilatéraux et équiangles.

29. Un icosaèdre est une figure solide comprise sous vingt triangles égaux et équilatéraux.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

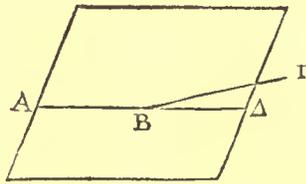
PROPOSITIO I.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μὲν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ¹.

Rectæ lineæ pars quædam non est in sub-
jecto plano, pars autem quædam in sublimiori.

Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μὲν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ².

Si enim possibile, rectæ lineæ ΑΒΓ pars quædam ΑΒ sit in subiecto plano, pars vero quædam ΒΓ in sublimiori.



Ἐσται δὴ τις τῆ ΑΒ συνεχῆς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Ἐστω ἡ ΒΔ· δύο δὲ δοθεισῶν³ εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμήμα ἔστιν ἡ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα γὰρ εὐθεῖα οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἓν· εἰ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Erit igitur quædam ipsi ΑΒ continuata recta in directum in subiecto plano. Sit ipsa ΒΔ; duabus igitur datis rectis ΑΒΓ, ΑΒΔ commune segmentum est ipsa ΑΒ, quod impossibile; recta enim cum rectâ non convenit in pluribus punctis quam in uno; si autem non, congruent inter se rectæ.

Εὐθείας ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Rectæ igitur, etc.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Une partie d'une ligne droite ne peut être dans un plan et une autre partie au-dessus de ce plan.

Car, si cela est possible, qu'une partie ΑΒ de la ligne droite ΑΒΓ soit dans un plan et l'autre partie ΒΓ au-dessus de ce plan.

Il y aura, dans le plan inférieur, un prolongement de ΑΒ; soit ΒΔ ce prolongement; les deux droites ΑΒΓ, ΑΒΔ auront une partie commune ΑΒ, ce qui est impossible, car deux droites ne peuvent se rencontrer qu'en un seul point, sinon elles se confondraient. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

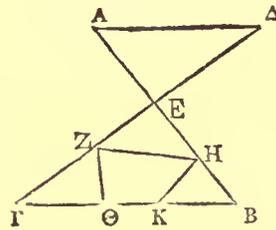
PROPOSITIO II.

Εάν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἐνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

Si duæ rectæ se mutuo secent, in uno sunt plano, et omne triangulum in uno est plano.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι αἱ AB, ΓΔ ἐν ἐνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

Duæ enim rectæ AB, ΓΔ se mutuo secent in puncto E; dico ipsas AB, ΓΔ in uno esse plano, et omne triangulum in uno esse plano.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα, τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον ὅτι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Εἰ γὰρ ἐστὶ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου μέρος ἢτοι τὸ ΖΓΘ, ἢ τὸ ΗΒΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπι-

Sumantur enim in ipsis ΕΓ, ΕΒ quælibet puncta Ζ, Η, et jungantur ipsæ ΓΒ, ΖΗ, et ducantur ipsæ ΖΘ, ΗΚ; dico primum ΕΓΒ triangulum in uno esse plano. Si enim est ΕΓΒ trianguli vel pars ΖΓΘ, vel ΗΒΚ in subjecto plano, reliqua autem in alio, erit et unius ΕΓ, ΕΒ recatarum pars quædam in subjecto plano, altera

PROPOSITION II.

Si deux droites se coupent, elles sont dans un seul plan; tout triangle est aussi placé dans un seul plan.

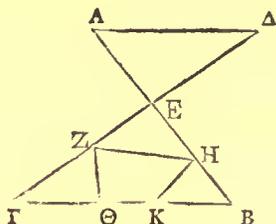
Que les deux droites AB, ΓΔ se coupent mutuellement au point E; je dis que les droites AB, ΓΔ sont dans un seul plan; et que tout triangle est aussi dans un seul plan.

Car prenons dans les droites ΕΓ, ΕΒ deux points quelconques Ζ, Η; joignons ΓΒ, ΖΗ, et menons les droites ΖΘ, ΗΚ; je dis d'abord que le triangle ΕΓΒ est dans un seul plan; car si la partie ΖΓΘ ou la partie ΗΒΚ du triangle ΕΓΒ est dans un plan, et l'autre partie dans un autre plan, une partie de l'une des droites ΕΓ, ΕΒ sera dans un plan

8 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πέδω, τὸ δὲ ἐν ἄλλω. Εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ἦν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἀτοπον

vero in alio. Si autem ΕΓΒ trianguli pars ΖΓΒΗ sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, erit et ambarum reclarum ΕΓ, ΕΒ pars quædam in subjecto plano, una vero in alio, quod absurdum demonstratum est; triangulum



ἔδείχθη· τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δὲ ἐστὶ τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ· ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur ΕΓΒ in uno est plano. In quo autem est triangulum ΕΓΒ, in hoc et utraque ipsarum ΕΓ, ΕΒ; in quo autem utraque ipsarum ΕΓ, ΕΒ, in hoc et ipsæ ΑΒ, ΓΔ; ipsæ igitur ΑΒ, ΓΔ rectæ in uno sunt plano, et omne triangulum in uno est plano. Quod oportebat ostendere.

et l'autre partie dans un autre plan. Mais si une partie ΖΓΒΗ du triangle ΕΓΒ est dans un plan et l'autre partie dans un autre plan, une certaine partie des deux droites ΕΓ, ΕΒ sera dans un plan et l'autre partie dans un autre plan; ce qui a été démontré absurde; le triangle ΕΓΒ est donc dans un seul plan. Mais l'une et l'autre des droites ΕΓ, ΕΒ sont dans le même plan que le triangle ΕΓΒ, et les droites ΑΒ, ΓΔ sont dans le même plan que les droites ΕΓ, ΕΒ (prop. 1. 11); les droites ΑΒ, ΓΔ sont donc dans un seul plan, et tout triangle est donc aussi placé dans un seul plan. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

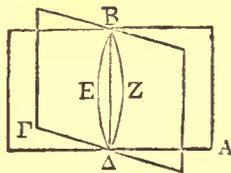
PROPOSITIO III.

Εάν δύο ἐπίπεδα τέμνη ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι.

Δύο γάρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τεμνέτωι ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμὴ· λέγω ἔτι ἡ ΔΒ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Si duo plana se mutuo secant, communis ipsorum sectio recta est.

Duo enim plana ΑΒ, ΒΓ se mutuo secant, communis autem ipsorum sectio sit ΔΒ linea; dico ΔΒ lineam rectam esse.



Εἰ γάρ μὴ, ἐπιζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β, ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖΒ· ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσιν δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτακτον· οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. Ομοίως δὲ δειξόμεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη, εὐθεῖα ἔσται, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.

Εάν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si enim non, jungatur a puncto Δ ad Β, in plano quidem ΑΒ recta ΔΕΒ, in plano autem ΒΓ recta ΔΖΒ; erunt igitur duarum rectarum ΔΕΒ, ΔΖΒ iidem termini, proptereaque continebunt spatium, quod absurdum; non igitur ΔΕΒ, ΔΖΒ rectæ sunt. Similiter utique demonstrabimus, neque aliam quamdam, a puncto Δ ad Β ductam, rectam esse, præter ipsam ΔΒ communem sectionem ipsorum ΑΒ, ΒΓ planorum.

PROPOSITION III.

Si deux plans se coupent mutuellement, leur commune section est une ligne droite.

Que les deux plans ΑΒ, ΒΓ se coupent mutuellement, et que leur commune section soit la ligne ΔΒ; je dis que la ligne ΔΒ est une ligne droite.

Car si cela n'est point, dans le plan ΑΒ menons du point Δ au point Β la droite ΔΕΒ, et dans le plan ΒΓ menons la droite ΔΖΒ; les extrémités des deux droites ΔΕΒ, ΔΖΒ seront les mêmes, et ces droites renfermeront un espace, ce qui est absurde (dém. 6); les lignes ΔΕΒ, ΔΖΒ ne sont donc pas des lignes droites. Nous démontrerons semblablement que toute autre ligne menée du point Δ au point Β n'est point une ligne droite, excepté la commune section ΔΒ des plans ΑΒ, ΒΓ. Si donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εάν εὐθεία δύο εὐθείαις τεμνούσαι ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοιῆς τομῆς ἐπισταθῆ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεία γάρ τις ἡ EZ δύο εὐθείαις ταῖς AB, ΓΔ τεμνούσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον ἀπὸ τοῦ E πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι ἡ EZ καὶ τῷ διὰ τῶν AB, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ AE, EB, ΓE, EΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ E, ὡς ἔτυχεν, ἢ HEΘ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ AΔ, ΓB, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Z ἐπιζεύχθωσαν αἱ ZA, ZH, ZΔ, ZΓ, ZΘ, ZB. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AE, EΔ δυοὶ ταῖς ΓE, EB ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ AΔ βάσει τῇ ΓB ἴση ἔστί, καὶ τὸ AED τρίγωνον τῷ ΓEB τρίγωνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔAE γωνία τῇ ὑπὸ EBG ἴση ἔστί¹. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AEH γωνία τῇ ὑπὸ BEΘ ἴση· δύο δὲ

Si recta duabus rectis se mutuo secantibus ad rectos in communi sectione insistat, et per ipsas plano ad rectos erit.

Recta enim quædam EZ duabus rectis AB, ΓΔ se mutuo secantibus in E puncto ab ipso E ad rectos insistat; dico EZ et per AB, ΓΔ plano ad rectos esse.

Sumantur enim ipsæ AE, EB, ΓE, EΔ æquales inter se, et ducatur per E utcumque recta HEΘ, et jungantur ipsæ AΔ, ΓB, et adhuc a quolibet puncto Z ducantur ipsæ ZA, ZH, ZΔ, ZΓ, ZΘ, ZB. Et quoniam duæ AE, EΔ duabus ΓE, EB æquales sunt, et angulos æquales continent, basis igitur AΔ basi ΓB æqualis est, et triangulum AED triangulo ΓEB æquale erit; quare et angulus ΔAE angulo EBG æqualis est. Est autem et AEH angulus ipsi BEΘ æqualis;

PROPOSITION IV.

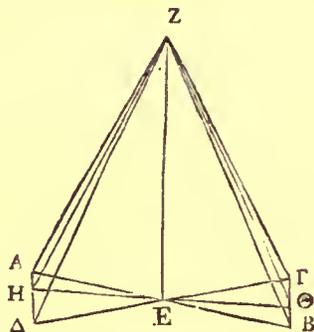
Si deux droites se coupent mutuellement, la droite perpendiculaire à ces deux droites, à leur section commune, sera aussi perpendiculaire au plan de ces deux droites.

Que les deux droites AB, ΓΔ se coupent mutuellement au point E; du point E élevons une droite EZ perpendiculaire à ces deux droites; je dis que la droite EZ est aussi perpendiculaire au plan des droites AB, ΓΔ.

Faisons les droites AE, EB, ΓE, EΔ égales entr'elles; par le point E menons d'une manière quelconque une droite HEΘ; joignons AΔ, ΓB, et d'un point quelconque Z menons les droites ZA, ZH, ZΔ, ZΓ, ZΘ, ZB. Puisque les deux droites AE, EΔ sont égales aux deux droites ΓE, EB, et que ces droites comprennent des angles égaux (prop. 15. 1), la base AΔ sera égale à la base ΓB (prop. 4. 1), le triangle AED égal au triangle ΓEB, et l'angle ΔAE égal à l'angle EBG. Mais l'angle AEH est égal à l'angle BEΘ (prop. 15. 1); les deux triangles AHE, BEΘ ont donc

τρίγωνά ἐστι τὰ AHE , $BE\Theta$ τὰς δύο γωνίας ταῖς³ δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν AE τῇ EB · καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἢ μὲν HE τῇ $E\Theta$, ἢ δὲ AH τῇ $B\Theta$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ AE τῇ EB , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ἑρθὰς ἢ ZE , βάσις ἄρα ἢ ZA βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση· διὰ

duo igitur triangula sunt AHE , $BE\Theta$ duos angulos duobus angulis æquales habentia, utrumque utriusque, et unum latus AE uni lateri EB æquale ad æquales angulos; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur quidem HE ipsi $E\Theta$, ipsa vero AH ipsi $B\Theta$. Et quoniam æqualis est AE ipsi EB , communis autem et ad rectos ipsa ZE , basis igitur ZA basi ZB est æqualis; propter



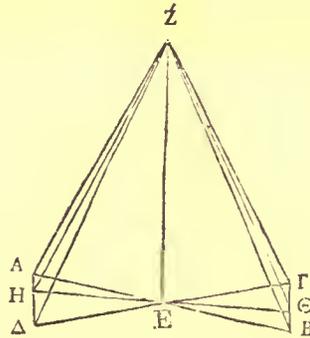
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ $Z\Gamma$ τῇ $Z\Delta$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ $A\Delta$ τῇ ΓB , ἐστὶ δὲ καὶ ἢ ZA τῇ ZB ἴση· δύο δὴ αἱ ZA , $A\Delta$ δυσὶ ταῖς ZB , ΓB ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα. Καὶ βάσις ἢ $Z\Delta$ βάσει τῇ $Z\Gamma$ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ $Z\Delta\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $Z\Gamma\Gamma$ ἴση ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ⁵ πάλιν ἐδείχθη ἢ AH τῇ $B\Theta$ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἢ ZA τῇ ZB ἴση· δύο δὴ αἱ ZA , AH δυσὶ ταῖς ZB , $B\Theta$ ἴσαι εἰσὶ. Καὶ γωνία ἢ

eadem utique et $Z\Gamma$ ipsi $Z\Delta$ est æqualis. Et quoniam æqualis est $A\Delta$ ipsi ΓB , est autem et ZA ipsi ZB æqualis; duæ igitur ZA , $A\Delta$ duabus ZB , ΓB æquales sunt, utraque utriusque. Et basis $Z\Delta$ basi $Z\Gamma$ ostensa est æqualis; et angulus igitur $Z\Delta\Delta$ angulo $Z\Gamma\Gamma$ æqualis est. Et quoniam rursus ostensa est AH ipsi $B\Theta$ æqualis; at vero et ZA ipsi ZB æqualis; duæ igitur ZA , AH duabus ZB , $B\Theta$ æquales sunt. Et angulus

deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun; et les côtés AE , EB adjacents à des angles égaux seront égaux entr'eux; les autres côtés de ces triangles seront donc aussi égaux entr'eux (prop. 26. 1); HE est donc égal à $E\Theta$, et AH égal à $B\Theta$. Et puisque AE est égal à EB , et que la perpendiculaire ZE est commune, la base ZA sera égale à la base ZB (prop. 4. 1); par la même raison, $Z\Gamma$ sera égal à $Z\Delta$. Et puisque $A\Delta$ est égal à ΓB , et ZA à ZB , les deux droites ZA , $A\Delta$ seront égales aux deux droites ZB , ΓB , chacune à chacune. Mais on a démontré que la base $Z\Delta$ est égale à la base $Z\Gamma$; l'angle $Z\Delta\Delta$ est donc égal à l'angle $Z\Gamma\Gamma$ (prop. 8. 1). Et de plus, puisqu'on a démontré que AH est égal à $B\Theta$, et ZA égal à ZB ; les deux droites ZA , AH seront égales aux deux droites ZB , $B\Theta$. Mais on a démontré que l'angle

ὕπὸ ZAH ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ZBΘ. βάσις ἄρα ἢ ZH βάσει τῇ ZΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἢ HE τῇ EΘ, κοινὴ δὲ ἢ EZ, δύο δὲ αἱ HE, EZ δὴ τὰς ΘΕ, EZ ἴσαι εἰσί. Καὶ βάσις ἢ ZH βάσει τῇ ZΘ ἴση. γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ ΘEZ ἴση ἐστίν. ἔρθῃ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ HEZ, ΘEZ γωνιῶν. ἢ ZE ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ E

ZAH ostensus est æqualis ipsi ZBΘ; basis igitur ZH basi ZΘ est æqualis. Et quoniam rursus æqualis ostensa est HE ipsi EΘ, communis autem EZ, duæ igitur HE, EZ duabus ΘΕ, EZ æquales sunt. Et basis ZH basi ZΘ æqualis; angulus igitur HEZ angulo ΘEZ æqualis est; rectus igitur uterque angulorum HEZ, ΘEZ; ergo ZE ad ipsam ΗΘ utcumque per E ductam



ἀρθεῖσαν ἔρθῃ ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἢ ZE καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἔρθας ποιήσει γωνίας. Εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ἔρθῃ ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔρθας ποιῇ γωνίας. ἢ ZE ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ἔρθας ἐστίν. Τὸ δὲ ὑποκείμενον

recta est. Similiter utique demonstrabimus ZE etiam ad omnes rectas contingentes ipsam et existentes in subjecto plano rectos facere angulos. Recta autem ad planum perpendicularis est, quando ad omnes rectas contingentes ipsam et existentes in eodem plano rectos facit angulos; ipsa igitur ZE subjecto plano ad rectos est. Sed subjectum planum est quod per ipsas

ZAH est égal à l'angle ZBΘ; la base ZH est donc égale à la base ZΘ (4. 1). Mais on a démontré encore que HE est égal à EΘ, et la droite EZ est commune; les deux droites HE, EZ sont donc égales aux deux droites ΘΕ, EZ. Mais la base ZH est égale à la base ZΘ; l'angle HEZ est donc égal à l'angle ΘEZ (8. 1); les angles HEZ, ΘEZ sont donc droits l'un et l'autre; la droite ZE fait donc des angles droits avec la droite ΗΘ, de quelque manière que la droite ΗΘ soit menée par le point E. Nous démontrerons semblablement que la droite ZE fait aussi des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans le plan inférieur. Mais une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent et qui sont placées dans ce plan (déf. 3. 11); la droite EZ est donc perpendiculaire au plan inférieur. Mais le plan inférieur passe par

ἐπιπέδον ἔστι τὸ διὰ τῶν AB, ΒΓ εὐθειῶν ἢ ZE ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν AB, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

rectas AB, ΓΔ; ipsa igitur EZ ad rectos est per plano ipsas AB, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

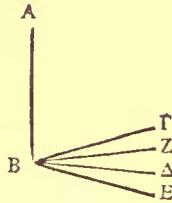
PROPOSITIO V.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτεμέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθάς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἐνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Si recta tribus rectis sese tangentibus ad rectos angulos in communi sectione insistat, tres illæ rectæ in uno sunt plano.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ πρὸς ὀρθάς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἀφῆς ἐφρεστέτω· λέγω ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἐνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Recta enim quædam AB tribus rectis ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ad rectos in contactu B insistat; dico ipsas ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ in uno esse plano.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἢ δὲ ΒΓ ἐν μετεωρετέρῳ¹, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν

Non enim, sed si possibile, sint quidem ipsæ ΒΔ, ΒΕ in subiecto plano, ipsa vero ΒΓ in sublimiori, et producat per ipsas AB, ΒΓ pla-

les droites AB, ΒΓ; la droite ZE est donc perpendiculaire au plan des droites AB, ΓΔ. Si donc, etc.

PROPOSITION V.

Si trois droites se rencontrent, et si une droite leur est perpendiculaire à leur commune section, ces trois droites sont dans un seul plan.

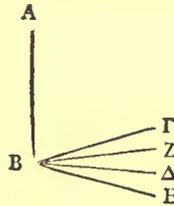
Qu'une droite AB soit perpendiculaire aux trois droites ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ au point de contact; je dis que les trois droites ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ sont dans un seul plan.

Car que cela ne soit pas; mais, si cela est possible, que les droites ΒΔ, ΒΕ soient dans un plan, et ΒΓ dans un autre plan élevé au-dessus du premier; faisons passer un

14 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB, ΒΓ ἐπίπεδον· κοινὴν δὲ τομὴν² ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεΐαν. Ποιείτω τὴν ΒΖ. Ἐν ἐνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ αἱ τρεῖς εὐθεΐαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστὶ πρὸς ἐκάτεραν³ τῶν ΒΔ, ΒΕ· καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶν ἡ ΑΒ. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθή

num ; communem igitur sectionem faciet in subjecto plano rectam. Faciat ipsam ΒΖ. In uno igitur sunt plano ducto per ipsas ΑΒ, ΒΓ tres rectæ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ. Et quoniam ΑΒ perpendicularis est ad utramque ipsarum ΒΔ, ΒΕ ; et per ipsas ΒΔ, ΒΕ igitur plano perpendicularis est ΑΒ. Planum autem per ipsas ΒΔ, ΒΕ subjectum est ; ergo ΑΒ perpendicularis



ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῶς ποιήσει γωνίας ἡ ΑΒ. Ἀπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ⁴ οὕσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστὶν. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Καὶ εἰσὶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν⁵ ἀδύνατον· οὐκ

est ad subjectum planum ; quare et ad omnes rectas contingentes ipsam et existentes in subjecto plano rectos faciet angulos ipsa ΑΒ. Tangit autem ipsam ipsa ΒΖ existens in subjecto plano ; ergo angulus ΑΒΖ rectus est. Supponitur autem et angulus ΑΒΓ rectus ; æqualis igitur angulus ΑΒΖ ipsi ΑΒΓ. Et sunt in uno plano, quod est impossibile ; non igitur recta ΒΓ in subli-

plan par les droites ΑΒ, ΒΓ ; la commune section de ce plan avec le plan inférieur sera une ligne droite (prop. 3. 11). Que cette droite soit ΒΖ. Il est évident que les trois droites ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ sont dans le plan qui passe par les droites ΑΒ, ΒΓ. Puisque la droite ΑΒ est perpendiculaire à chacune des droites ΒΔ, ΒΕ, la droite ΑΒ sera perpendiculaire au plan qui passe par ΒΔ, ΒΕ (prop. 4. 11). Mais le plan qui passe par ΒΔ, ΒΕ est le plan inférieur ; la droite ΑΒ est donc perpendiculaire au plan inférieur ; cette droite sera donc perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans ce plan (déf. 3. 11). Mais la droite ΒΖ est rencontrée dans le plan inférieur par la droite ΒΖ ; l'angle ΑΒΖ est donc droit. Mais on a supposé que l'angle ΑΒΓ est droit ; l'angle ΑΒΖ est donc égal à l'angle ΑΒΓ. Mais ces angles sont dans un seul plan, ce qui est impossible (ax. 9) ; la droite ΒΓ n'est

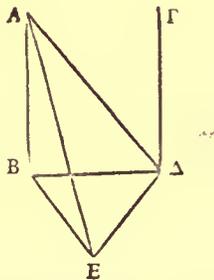
ἄρα ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐν μειωροτέρῳ^δ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

miori est plano; tres igitur rectæ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ in uno sunt plano.

Si igitur recta, etc.

PROPOSITIO VI.

Si duæ rectæ eidem plano ad rectos sunt, parallelæ erunt rectæ.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ subjecto plano ad rectos sint; dico parallelam esse ΑΒ ipsi ΓΔ.

Occurrant enim subjecto plano in Β, Δ punctis, et jungatur recta ΒΔ, et ducatur ipsi ΒΔ ad rectos in eodem subjecto plano ipsa ΔΕ, et ponatur ipsi ΑΒ æqualis ΔΕ, et jungantur ipsæ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

donc pas dans un plan élevé au-dessus des droites ΒΔ, ΒΕ; les trois droites ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ sont donc dans un seul plan. Si donc, etc.

PROPOSITION VI.

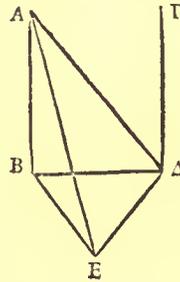
Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, ces deux droites seront parallèles.

Que les deux droites ΑΒ, ΓΔ soient perpendiculaires à un même plan; je dis que ΑΒ est parallèle à ΓΔ.

Que ces perpendiculaires rencontrent un plan inférieur aux points Β, Δ; joignons la droite ΒΔ; menons dans le plan inférieur la droite ΔΕ perpendiculaire à ΒΔ; faisons ΔΕ égal à ΑΒ, et joignons ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκειμένον ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα³ τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἀπτεται δὲ τῆς AB ἑκατέρα τῶν BD , BE , οὔσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν³ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ABD , ABE γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΓΔB$, $ΓΔE$ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $ΔE$, κοινὴ δὲ ἡ BD , δύο δὴ αἰ

Et quoniam AB perpendicularis est ad subjectum planum; et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam, et existentes in subjecto plano, rectos faciet angulos. Contingit autem ipsam AB utraque ipsarum BD , EB existens in subjecto plano; rectus igitur est uterque angulorum ABD , ABE . Propter eadem utique et uterque ipsorum $ΓΔB$, $ΓΔE$ rectus est. Et quoniam æqualis est AB ipsi $ΔE$, communis autem BD , duæ igitur AB ,



AB , BD δυσὶ ταῖς ED , $ΔB$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ AD βάσει τῇ BE ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $ΔE$, ἀλλὰ καὶ ἡ AD τῇ BE , δύο δὴ αἰ AB , BE δυσὶ ταῖς ED , $ΔA$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ AE · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ $EΔA$ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ABE ὀρθή ἄρα καὶ

BD duabus ED , $ΔB$ æquales sunt, et angulos rectos continent; basis igitur AD basi BE est æqualis. Et quoniam æqualis est AB ipsi $ΔE$, sed et AD ipsi BE , duæ igitur AB , BE duabus ED , $ΔA$ æquales sunt, et basis ipsarum communis AE ; angulus igitur ABE angulo $EΔA$ est æqualis. Rectus autem ABE ; rectus igitur

Puisque la droite AB est perpendiculaire au plan inférieur, elle est perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans ce plan (déf. 5. 11). Mais cette droite AB est rencontrée par chacune des droites BD , BE qui sont dans le plan inférieur; les angles ABD , ABE sont donc droits l'un et l'autre. Par la même raison, les angles $ΓΔB$, $ΓΔE$ sont aussi droits l'un et l'autre. Mais la droite AB est égale à la droite $ΔE$ et la droite BD est commune; les deux droites AB , BD sont donc égales aux deux droites ED , $ΔB$; mais ces droites comprennent des angles droits; la base AD est donc égale à la base BE (4. 1). Puisque AB est égal à $ΔE$, et AD égal à BE , les deux droites AB , BE sont donc égales aux deux droites ED , $ΔA$; mais la base AE est commune; l'angle ABE est donc égal à l'angle $EΔA$

ἢ ὑπὸ^δ ΕΔΑ· ἢ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή· ἢ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἀφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ, πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ εὐθεῖαι^δ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς,

et ΕΔΑ; ergo ΕΔ ad ΔΑ perpendicularis est. Est autem et ad utramque ipsarum ΒΔ, ΔΓ perpendicularis; ergo ΕΔ tribus rectis ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ad rectos in contactu insistit; tres igitur rectæ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ in uno sunt plano. In quo autem ipsæ ΔΒ, ΔΑ, in hoc et ipsa ΑΒ, omne enim triangulum in uno est plano; ergo ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ rectæ in uno sunt plano. Atque est rectus uterque ΑΒΔ, ΓΔΒ angulorum; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ.

Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῶ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα

PROPOSITIO VII.

Si sint duæ rectæ parallelæ, sumantur autem in utrâque ipsarum quælibet puncta; puncta conjungens recta in eodem plano est cum parallelis.

Sint duæ rectæ parallelæ ΑΒ, ΓΔ, et sumantur in utrâque ipsarum quælibet puncta

(8. 1). Mais l'angle ABE est droit; l'angle ΕΔΑ est donc droit aussi; la droite ΕΔ est donc perpendiculaire à la droite ΔΑ. Mais la droite ΕΔ est aussi perpendiculaire à chacune des droites ΒΔ, ΔΓ; la droite ΕΔ est donc perpendiculaire aux trois droites ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ à leur point de contact; les trois droites ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ sont donc dans un seul plan (5. 11). Mais la droite ΑΒ est dans le même plan que les droites ΔΒ, ΔΑ, car tout triangle est dans un seul plan (2. 11); les trois droites ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ sont donc dans un seul plan. Mais les angles ΑΒΔ, ΓΔΒ sont droits l'un et l'autre; la droite ΑΒ est donc parallèle à la droite ΓΔ (28. 1). Si donc, etc.

PROPOSITION VII.

Si deux droites sont parallèles, et si l'on prend dans chacune de ces droites des points quelconques, la droite qui joindra ces points sera dans le même plan que les parallèles.

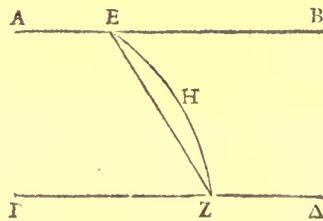
Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites parallèles, et prenons dans ces droites des points

τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ¹ ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὲ ποιήσει ἐν ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν.

E, Z; dico rectam puncta E, Z conjungentem in eodem plano esse cum parallelis.

Non enim, sed si possibile, sit in sublimiori ut ipsa ΕΗΖ, et ducatur per ipsam ΕΗΖ planum; sectionem igitur faciet in subjecto plano rectam.



Ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἢ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ² ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΒ, ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἢ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ³ ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Faciat ut ipsam ΕΖ; duæ igitur rectæ ΕΗΖ, ΕΖ spatium continebunt, quod est impossibile; non igitur a puncto E ad Z juncta recta in sublimiori est plano; ergo in plano per parallelas ΔΒ, ΓΔ est a puncto E ad Z juncta recta.

Si igitur, etc.

quelconques E, Z; je dis que la droite qui joint les points E, Z est dans le même plan que les parallèles.

Que cela ne soit point, et si cela est possible, que cette droite soit dans un plan supérieur, et qu'elle ait la position ΕΗΖ; par la droite ΕΗΖ menons un plan; ce plan fera avec le plan inférieur une section qui sera une ligne droite (3. 11). Que cette section soit ΕΖ; les deux droites ΕΗΖ, ΕΖ renfermeront un espace; ce qui est impossible (dém. 6); la droite menée du point E au point Z n'est donc point dans un plan supérieur; la droite menée du point E au point Z est donc dans le plan des parallèles ΔΒ, ΓΔ. Si donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

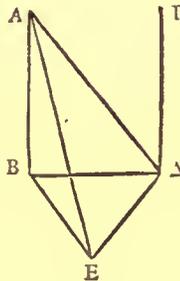
PROPOSITIO VIII.

Εάν ὄσιν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ· καὶ ἡ λοιπὴ τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ $AB, \Gamma\Delta$, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ AB τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ $\Gamma\Delta$ τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Si sint duæ rectæ parallelæ, altera autem ipsarum plano alieui ad rectos sit; et reliqua eidem plano ad rectos erit.

Sint duæ rectæ parallelæ $AB, \Gamma\Delta$, altera autem ipsarum AB subjecto plano ad rectos sit; dieo et reliquam $\Gamma\Delta$ eidem plano ad rectos fore.



Συμβαλλέτωσαν γάρ αἱ $AB, \Gamma\Delta$ τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ B, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Delta$. αἱ $AB, \Gamma\Delta, B\Delta$ ἄρα ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἡχθω τῇ $B\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔE , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ ΔE , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BE, AE, AD .

Occurrant enim ipsæ $AB, \Gamma\Delta$ subjecto plano in B, Δ punctis, et jungatur ipsa $B\Delta$; ipsæ $AB, \Gamma\Delta, B\Delta$ igitur in uno sunt plano. Ducatur ipsi $B\Delta$ ad rectos in subjecto plano ipsa ΔE , et ponatur ipsi AB æqualis ΔE , et jungantur ipsæ BE, AE, AD . Et quoniam AB

PROPOSITION VIII.

Si deux droites sont parallèles, et si l'une d'elles est perpendiculaire à un plan, l'autre sera aussi perpendiculaire à ce même plan.

Soient $AB, \Gamma\Delta$ deux droites parallèles, et que AB l'une de ces droites soit perpendiculaire à un plan inférieur; je dis que l'autre droite $\Gamma\Delta$ sera aussi perpendiculaire à ce même plan.

Car, que les droites $AB, \Gamma\Delta$ rencontrent le plan inférieur aux points B, Δ . Joignons $B\Delta$; les droites $AB, \Gamma\Delta, B\Delta$ seront dans un seul plan (7. 11). Menons dans le plan inférieur la droite ΔE perpendiculaire à $B\Delta$; faisons ΔE égal à AB , et joignons BE, AE, AD . Puisque AB est perpendiculaire au plan inférieur, elle

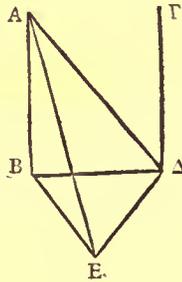
Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ ὑποκείμενῳ ἐπίπιδῳ, πρὸς ἑρθᾶς² ἐστὶν ἡ AB ὀρθή ἄρα ἐστὶν³ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta$, ABE γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα⁴ ἐμπέπτωκεν ἡ $B\Delta$, αἱ ἄρα ὑπὸ $AB\Delta$, $\Gamma\Delta B$ γωνίαι δυσὶν ἑρθῶν ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$ ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν $B\Delta$ ὀρθή ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , κοινὴ δὲ ἡ $B\Delta$ δύο δὴ αἱ AB , $B\Delta$ δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔB ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta B$ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βᾶσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βᾶσει τῇ BE ἐστὶν⁵ ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔE , ἡ δὲ BE τῇ $A\Delta$ · δύο δὴ αἱ AB , BE δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔA ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βᾶσις αὐτῶν κοινὴ ἡ AE · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta A$ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ABE ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $E\Delta A$ ἡ $E\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν $A\Delta$ ὀρθή ἐστὶν. Ἐστὶ δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔB ὀρθή ἡ $E\Delta$ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $B\Delta$, ΔA ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς

perpendicularis est ad subjectum planum, et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam, et existentes in subjecto plano, ad rectos est ipsa AB ; rectus igitur est uterque angulorum $AB\Delta$, ABE . Et quoniam in parallelas AB , $\Gamma\Delta$ recta incidit $B\Delta$, ergo $AB\Delta$, $\Gamma\Delta B$ anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem $AB\Delta$; rectus igitur et $\Gamma\Delta B$; ergo $\Gamma\Delta$ ad $B\Delta$ perpendicularis est. Et quoniam æqualis est AB ipsi ΔE , communis autem $B\Delta$; duæ igitur AB , $B\Delta$ duabus $E\Delta$, ΔB æquales sunt, et angulus $AB\Delta$ angulo $E\Delta B$ æqualis, rectus enim uterque; basis igitur $A\Delta$ basi BE est æqualis. Et quoniam æqualis est quidem AB ipsi ΔE , ipsa vero BE ipsi $A\Delta$; duæ igitur AB , BE duabus $E\Delta$, ΔA æquales sunt utraque utrique, et basis ipsorum communis AE ; angulus igitur ABE angulo $E\Delta A$ est æqualis. Rectus autem ABE ; rectus igitur et $E\Delta A$; ergo $E\Delta$ ad $A\Delta$ perpendicularis est. Est autem et ad ΔB perpendicularis; ergo $E\Delta$ et plano per ipsas $B\Delta$, ΔA perpendicularis est; et ad omnes igitur rectas contingentes ip-

sera perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan (déf. 3. 11); les angles $AB\Delta$, ABE sont donc droits l'un et l'autre. Et puisque la droite $B\Delta$ tombe sur les parallèles AB , $\Gamma\Delta$, la somme des angles $AB\Delta$, $\Gamma\Delta B$ sera égale à deux angles droits (29. 1). Mais l'angle $AB\Delta$ est droit; l'angle $\Gamma\Delta B$ est donc droit aussi; $\Gamma\Delta$ est donc perpendiculaire à $B\Delta$. Et puisque la droite AB est égale à la droite ΔE , et que la droite $B\Delta$ est commune, les deux droites AB , $B\Delta$ seront égales aux deux droites $E\Delta$, ΔB ; mais l'angle $AB\Delta$ est égal à l'angle $E\Delta B$, car ils sont droits l'un et l'autre; la base $A\Delta$ est donc égale à la base BE (4. 1). Mais AB est égal à ΔE , et BE égal à $A\Delta$; les deux droites AB , BE sont donc égales aux deux droites $E\Delta$, ΔA , chacune à chacune; mais la base AE est commune; l'angle ABE est donc égal à l'angle $E\Delta A$ (8. 1). Mais l'angle ABE est droit; l'angle $E\Delta A$ est donc droit aussi; $E\Delta$ est donc perpendiculaire à $A\Delta$. Mais $E\Delta$ est aussi perpendiculaire à ΔB ; la droite $E\Delta$ est donc perpendiculaire au plan des droites $B\Delta$, ΔA (4. 11); la droite $E\Delta$ est donc perpendiculaire à toutes les droites qui la

εὐθείας, καὶ οὐσας ἐν τῷ διὰ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἢ $ΕΔ$. Ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν $ΒΑ$, $ΑΔ$ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ $ΔΓ$, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν $ΒΔ$, $ΔΑ$ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ $ΑΒ$, $ΒΔ$. Ἐν ᾧ δὲ αἱ $ΑΒ$, $ΒΔ$ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΓ$ · ἢ $ΕΔ$ ἄρα τῇ $ΔΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ

sam, et existentes in plano per $ΑΔ$, $ΔΒ$; rectos faciet angulos ipsa $ΕΔ$. In plano autem per $ΒΑ$, $ΑΔ$ est ipsa $ΔΓ$, quoniam in plano per ipsas $ΒΔ$, $ΔΑ$ sunt ipsæ $ΑΒ$, $ΒΔ$. In quo autem ipsæ $ΑΒ$, $ΒΔ$ in hoc est et ipsa $ΔΓ$; ergo $ΕΔ$ ipsi $ΔΓ$ ad rectos est; quare



$ΓΔ$ τῇ $ΔΕ$ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $ΓΔ$ τῇ $ΒΔ$ · ἢ $ΓΔ$ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς $ΔΕ$, $ΔΒ$ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ $Δ$ κομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστικεν· ὥστε καὶ ἡ $ΓΔ$ καὶ τῷ διὰ τῶν $ΔΕ$, $ΔΒ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ· τὸ δὲ διὰ τῶν $ΔΕ$, $ΔΒ$ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστίν· ἢ $ΓΔ$ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et $ΓΔ$ ipsi $ΔΕ$ ad rectos est. Est autem et $ΓΔ$ ipsi $ΒΔ$; ergo $ΓΔ$ duobus rectis $ΔΕ$, $ΔΒ$ se mutuo secantibus in communi sectione $Δ$ ad rectos insistit; quare et $ΓΔ$ et plano per $ΔΕ$, $ΔΒ$ ad rectos est; sed per $ΔΕ$, $ΔΒ$ planum subjectum est; ergo $ΓΔ$ subiecto plano ad rectos est. Quod oportebat ostendere.

rencontrent, et qui sont dans le plan des droites $ΑΔ$, $ΔΒ$. Mais $ΔΓ$ est dans le plan des droites $ΒΑ$, $ΑΔ$, parce que les droites $ΑΒ$, $ΒΔ$ sont dans le plan des droites $ΒΔ$, $ΔΑ$ (2. 11); et $ΔΓ$ est dans le même plan que les droites $ΑΒ$, $ΒΔ$ (7. 11); $ΕΔ$ est donc perpendiculaire à $ΔΓ$; la droite $ΓΔ$ est donc aussi perpendiculaire à $ΔΕ$. Mais $ΓΔ$ est perpendiculaire à $ΒΔ$; la droite $ΓΔ$ est perpendiculaire aux deux droites $ΔΕ$, $ΔΒ$ au point $Δ$ où elles se rencontrent; la droite $ΓΔ$ est donc perpendiculaire au plan des droites $ΔΕ$, $ΔΒ$ (4. 11); mais le plan des droites $ΔΕ$, $ΔΒ$ est le plan inférieur; la droite $ΓΔ$ est donc perpendiculaire au plan inférieur. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

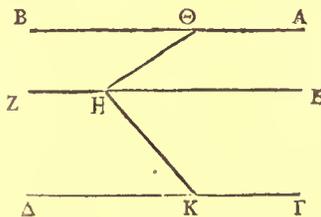
PROPOSITIO IX.

Αἱ τῆ αὐτῆ εὐθεία παράλληλοι, καὶ μὴ οὔσαι αὐτῆ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω γὰρ ἑκατέρω τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τῆ EZ παράλληλος, μὴ οὔσαι αὐτῆ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. λέγω ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Rectæ eidem rectæ parallelæ, et non existentes cum illâ in eodem plano, et inter se sunt parallelæ.

Sit enim utraq̃ue ipsarum AB , $\Gamma\Delta$ ipsi EZ parallelæ, non existentes cum illâ in eodem plano; dico parallelam esse AB ipsi $\Gamma\Delta$.



Εἰλήφθω γάρ ἐπὶ τῆς EZ τυχὸν σημεῖον τὸ H , καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῆ EZ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν EZ , AB ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $H\Theta$, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ZE , $\Gamma\Delta$ τῆ EZ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ HK . Καὶ ἐπεὶ ἡ EZ πρὸς ἑκατέραν τῶν $H\Theta$, HK ὀρθή ἐστίν, ἡ EZ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $H\Theta$, HK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Καὶ ἐστὶν ἡ EZ τῆ AB παράλληλος, καὶ ἡ AB ἄρα²

Sumatur enim in EZ quodvis punctum H , et a quo ipsi EZ in plano quidem per EZ , AB ad rectos ducatur $H\Theta$, in plano autem per ipsas ZE , $\Gamma\Delta$ ipsi EZ rursus ad rectos ducatur HK . Et quoniam EZ ad utramque ipsarum $H\Theta$, HK perpendicularis est, ergo EZ et plano per $H\Theta$, HK ad rectos est. Atque

PROPOSITION IX.

Les droites qui sont parallèles à une même droite, sans être dans le même plan que cette droite, sont aussi parallèles entr'elles.

Que les droites AB , $\Gamma\Delta$ soient parallèles l'une et l'autre à EZ , sans être dans le même plan; je dis que AB est parallèle à $\Gamma\Delta$.

Car prenons dans EZ un point quelconque H , et de ce point menons dans le plan des droites EZ , AB la droite $H\Theta$ perpendiculaire à EZ , et dans le plan des droites ZE , $\Gamma\Delta$, menons aussi HK perpendiculaire à ZE . Puisque la droite EZ est perpendiculaire à l'une et à l'autre des droites $H\Theta$, HK , la droite EZ sera aussi perpendiculaire au plan des droites $H\Theta$, HK (4. 11). Mais est EZ parallèle à AB ; la

τῷ διὰ τῶν Θ , H , K ἐπιπέδῳ πρὸς ἰσθῆος ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῷ διὰ τῶν Θ , H , K ἐπιπέδῳ πρὸς ἰσθῆος ἐστίν· ἑκατέρα ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τῷ διὰ τῶν Θ , H , K ἐπιπέδῳ πρὸς ἰσθῆος ἐστίν. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἰσθῆος ᾧσι, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

est EZ ipsi AB parallela; et igitur AB plano per Θ , H , K ad rectos est. Propter eadem utique et ipsa $\Gamma\Delta$ plano per Θ , H , K ad rectos est; utraque igitur ipsarum AB , $\Gamma\Delta$ plano per ipsas Θ , H , K ad rectos est. Si autem duæ rectæ eidem plano ad rectos sint, parallelæ sunt rectæ; parallela igitur est AB ipsi $\Gamma\Delta$. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ᾧσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , BF ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔE , EZ ἀπτομένας ἀλλήλων ἕστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ABF γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ .

PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ sese contingentes duabus rectis sese contingentibus sint parallelæ, non in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ enim rectæ AB , BF sese contingentes duabus rectis ΔE , EZ sese contingentibus sint parallelæ, non in eodem plano; dico æqualem esse angulum ABF ipsi ΔEZ .

droite AB est donc perpendiculaire au plan qui passe par les points Θ , H , K (8. 11). Par la même raison, la droite $\Gamma\Delta$ est perpendiculaire au plan qui passe par les points Θ , H , K ; les droites AB , $\Gamma\Delta$ sont donc perpendiculaires l'une et l'autre au plan qui passe par les points Θ , H , K . Mais si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, ces deux droites sont parallèles entr'elles (6. 11); la droite AB est donc parallèle à la droite $\Gamma\Delta$. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION X.

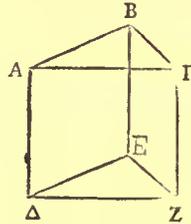
Si deux droites qui se touchent sont parallèles à deux droites qui se touchent, sans être dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux.

Que les deux droites AB , BF qui se touchent soient parallèles aux deux droites ΔE , EZ qui se touchent, sans être dans le même plan; je dis que l'angle ABF est égal à l'angle ΔEZ .

24 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῆ ΕΔ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος². Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος³· ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ τῆ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος.

Assumantur enim ipsæ ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ æquales inter se, et jungantur ipsæ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. Et quoniam ΒΑ ipsi ΕΔ æqualis est et parallela, et igitur ΑΔ ipsi ΒΕ æqualis est et parallela. Propter eadem utique et ΓΖ ipsi ΒΕ æqualis est et parallela; utraque igitur ipsarum ΑΔ, ΓΖ ipsi ΒΕ æqualis est et parallela. Sed rectæ



Αἱ δὲ τῆ αὐτῆ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῆ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ³ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆ ΓΖ καὶ ἴση. Καὶ ἐπιζευγύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυοὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ ΑΓ βάσει τῆ ΔΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ⁴ γωνία τῆ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση.

eidem rectæ parallelæ, et non existentes eidem in eodem plano, et inter se sunt parallelæ; parallela igitur est ΑΔ ipsi ΓΖ et æqualis. Et conjungunt ipsas ipsæ ΑΓ, ΔΖ; et igitur ΑΓ ipsi ΔΖ æqualis est et parallela. Et quoniam duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, et basis ΑΓ basi ΔΖ æqualis; angulus igitur ΑΒΓ angulo ΔΕΖ est æqualis.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duæ, etc.

Car faisons les droites ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ égales entr'elles; et joignons ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. Puisque ΒΑ est égal et parallèle à ΕΔ, ΑΔ sera égal et parallèle à ΒΕ (35. 1). Par la même raison, la droite ΓΖ est égale et parallèle à ΒΕ; donc les deux droites ΑΔ, ΓΖ sont égales et parallèles chacune à la droite ΒΕ. Mais les parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles, sans être dans le même plan (9. 11); la droite ΑΔ est donc parallèle et égale à ΓΖ. Mais ces parallèles sont jointes par les droites ΑΓ, ΔΖ; la droite ΑΓ est donc parallèle et égale à ΔΖ. Mais les droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux deux droites ΔΕ, ΕΖ, et la base ΑΓ est égale à la base ΔΖ; l'angle ΑΒΓ est donc égal à l'angle ΔΕΖ (8. 1). Si donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'

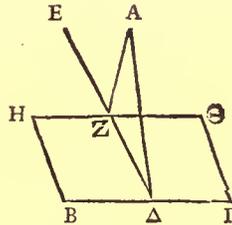
PROPOSITIO XI.

Από τοῦ δοθέντος σημείου μετέωρον ἐπὶ τὸ δοθὲν¹ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον² εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον³ δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον³ ἐπίπεδον κάθετον εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

A dato puncto sublimi ad datum subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum sublime A, datum vero planum subjectum; oportet igitur a puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.



Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεΐα ὡς ἔτυχεν ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι, καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον⁴ ἐπίπεδον, γερῶνός ἂν εἶη τὸ ἐπιταχθέν⁵· εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ

Ducatur enim quaedam in subjecto plano recta ut libet ΒΓ, et agatur a puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ. Si quidem igitur ΑΔ perpendicularis est, et ad subjectum planum, factum erit quod proponebatur; si autem non, ducatur a puncto Δ ipsi ΒΓ in subjecto plano ad rectos ipsa ΔΕ, et ducatur a

PROPOSITION XI.

D'un point donné au-dessus d'un plan donné mener une ligne droite perpendiculaire à ce plan.

Soit donné un point A, soit donné aussi un plan inférieur; il faut du point A mener une ligne droite perpendiculaire au plan inférieur.

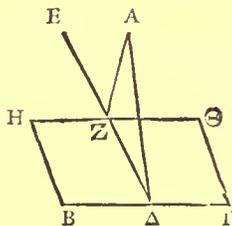
Car dans le plan inférieur, menons une droite ΒΓ d'une manière quelconque, et du point A menons ΑΔ perpendiculaire à ΒΓ (12. 1.) Si la droite ΑΔ est encore perpendiculaire au plan inférieur, on aura fait ce qui était proposé; si cela n'est pas, du point Δ et dans le plan inférieur menons la droite ΔΕ perpendiculaire à ΒΓ

ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ,
καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῆ ΒΓ παράλληλος
ἦχθω ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἐκατέρω τῶν ΔΑ, ΔΕ πρὸς
ὀρθὰς ἐστίν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῶν διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ
ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, καὶ ἐστὶν αὐτῆ πα-
ράλληλος ἡ ΗΘ. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλ-
ληλοι, ἢ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρ-

puncto A ad ΔΕ perpendicularis ΑΖ, et per
punctum Z ipsi ΒΓ parallela ducatur ΗΘ.

Et quoniam ΒΓ utrique ipsarum ΔΑ, ΔΕ
ad rectos est; ipsa ΒΓ igitur et plano per
ΕΔ, ΔΑ ad rectos est, atque est ipsi
parallela ΗΘ. Si autem sint duæ rectæ paral-
lelæ, una vero ipsarum plano alicui ad



θὰς ἢ, καὶ ἡ λοιπὴ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς
ὀρθὰς ἐστίν· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῶν διὰ τῶν ΕΔ,
ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν· καὶ πρὸς πάσας
ἄρα⁵ τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως
ἐν τῶν διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἐστίν
ἡ ΗΘ. Ἀπαιτεῖται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὕτως ἐν τῶν
διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθὴ ἐστίν
πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθὴ ἐστίν πρὸς

rectos sit, et reliqua eidem plano ad rectos
erit; et ΗΘ igitur plano per ipsas ΕΔ,
ΔΑ ad rectos est; et ad omnes igitur rectas
contingentes ipsam, et existentes in plano
per ipsas ΕΔ, ΔΑ, perpendicularis est ΗΘ.
Contingit autem ipsam ipsa ΑΖ existens in plano
per ipsas ΕΔ, ΔΑ; ergo ΗΘ perpendicularis
est ad ΖΑ; quare et ΖΑ perpendicularis est

(11. 1), è du point A la droite EZ perpendiculaire à ΔΑ (12. 1), et enfin par le
point Z menons ΗΘ parallèle à ΒΓ.

Puisque ΒΓ est perpendiculaire à chacune des droites ΔΑ, ΔΕ, la droite
ΒΓ sera perpendiculaire au plan des droites ΕΔ, ΔΑ. Mais ΗΘ est parallèle à ΒΓ
(4. 11), et si deux droites sont parallèles, et si l'une d'elles est perpendicu-
laire à un plan, l'autre droite est aussi perpendiculaire à ce même plan
(8. 11); la droite ΗΘ est donc perpendiculaire au plan des droites ΕΔ, ΔΑ, et par
conséquent à toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans le plan des
droites ΕΔ, ΔΑ (déf. 3. 11). Mais la droite ΑΖ, qui est dans le plan des droites ΕΔ,
ΔΑ, rencontre la droite ΗΘ; la droite ΗΘ est donc perpendiculaire à ΖΑ; la droite

τὴν ΗΘ. Ἐστὶ δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ ὀρθή ἐστίν. Ἐὰν δὲ εὐθεία δυοῖν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς⁶ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστι. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπιπέδον ἐστὶ τὸ ὑποκείμενον ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δεθέντος⁷ σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦεται ἡ ΑΖ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

Τῷ δεθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δεθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἐστω τὸ μὲν δεθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

ad ΗΘ. Est autem AZ et ad ΔΕ perpendicularis; ergo AZ ad utramque ipsarum ΗΘ, ΔΕ perpendicularis est. Si autem recta duabus rectis scse secantibus in sectione ad rectos insinat, et plano per ipsas ad rectos erit; ergo ZA plano per ipsas ΕΔ, ΗΘ ad rectos est. Ipsum autem per ipsas ΕΔ, ΗΘ est planum subjectum; ergo AZ subjecto plano ad rectos est.

A dato igitur puncto sublimi A ad subjectum planum perpendicularis recta linea ducta est AZ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII.

Dato plano, a puncto in ipso dato, ad rectos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum, punctum vero A in ipso; oportet igitur a puncto A subjecto plano ad rectos rectam lineam constituere.

ZA est donc perpendiculaire à ΗΘ. Mais AZ est perpendiculaire à ΔΕ; la droite AZ est donc perpendiculaire à chacune des droites ΗΘ, ΔΕ. Mais si une droite est perpendiculaire au point de section à deux droites qui se coupent, elle est aussi perpendiculaire au plan de ces deux droites (4. 11); la droite ZA est donc perpendiculaire au plan des droites ΕΔ, ΗΘ. Mais le plan des droites ΕΔ, ΗΘ est le plan inférieur; la droite AZ est donc perpendiculaire au plan inférieur.

On a donc mené du point donné A, pris au-dessus d'un plan, une ligne droite AZ perpendiculaire à ce plan. Ce qu'il fallait faire.

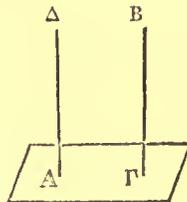
PROPOSITION XII.

D'un point donné dans un plan donné, élever une ligne droite perpendiculaire à ce plan.

Soit donné un plan inférieur, et soit A le point donné dans ce plan; il faut du point A élever une ligne droite perpendiculaire au plan inférieur.

Νενόησθω μετέωρον τι σημεῖον τὸ Β, καὶ ἀπο τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἦχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημεῖου τῆ ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΔ.

Intelligatur sublime aliquod punctum Β, et a puncto Β ad subjectum planum perpendicularis ducatur ΒΓ, et per punctum Α ipsi ΒΓ parallela ducatur ΑΔ.



Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημεῖου τοῦ Α πρὸς ὀρθάς ἀνίσταται ἡ ΑΔ³. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur duæ rectæ parallelæ sunt ΑΔ, ΓΒ, una autem ipsarum ΒΓ subjecto plano ad rectos est; et reliqua igitur ΑΔ subjecto plano ad rectos est.

Dato igitur plano, a puncto Α in ipso ad rectos constituta est ipsa ΑΔ. Quod oportebat facere.

Imaginons un point quelconque Β; du point Β menons ΒΓ perpendiculaire au plan inférieur (11. 11), et par le point Α menons ΑΔ parallèle à ΒΓ (31. 1).

Puisque les deux droites ΑΔ, ΓΒ sont parallèles, et que ΒΓ, l'une de ces droites, est perpendiculaire au plan inférieur, l'autre droite ΑΔ est aussi perpendiculaire au plan inférieur (8. 11).

D'un point donné Α dans le plan donné, on a donc élevé une perpendiculaire ΑΔ à ce plan. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

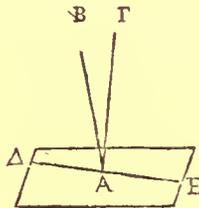
PROPOSITIO XIII.

Από τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, δύο εὐθεῖαι πρὸς ἑρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ἑρθὰς ἀναστήσονται³ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον, τεμὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑπο-

Ab eodem puncto eidem subjecto plano, duæ rectæ ad rectos non constituentur ad easdem partes.

Si enim possibile, ab eodem puncto A subjecto plano duæ rectæ ΑΒ, ΑΓ ad rectos constituentur ad easdem partes, et ducatur planum per ΒΑ, ΑΓ, sectionem utique faciet per Α in subjecto plano



κειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑρθὰς ἐστὶ, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἑρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἀπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οἷσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ·

rectam. Faciat ipsam ΔΑΕ; ipsæ igitur ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ rectæ in uno sunt plano. Et quoniam ΓΑ subjecto plano ad rectos est, et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam, et existentes in subjecto plano rectos faciet angulos. Contingit autem ipsam ipsa ΔΑΕ existens in subjecto plano;

PROPOSITION XIII.

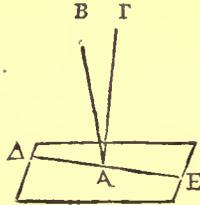
Du même point on ne peut élever du même côté deux perpendiculaires à un même plan inférieur.

Car si cela est possible ; du même point A soient élevées du même côté deux droites ΑΒ, ΑΓ perpendiculaires au plan inférieur ; conduisons un plan par les deux droites ΒΑ, ΑΓ ; ce plan, passant par le point Α, fera dans le plan inférieur une section qui sera une ligne droite (3. 11) ; que cette section soit ΔΑΕ ; les droites ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ seront dans un seul plan. Et puisque ΓΑ est perpendiculaire au plan inférieur, elle est perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans le plan inférieur (déf. 3. 11). Mais la droite ΔΑΕ, qui est dans le

30 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἢ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ εἰσιν ἐν τῷ ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

ergo ΓΑΕ angulus rectus est. Propter eadem utique et ipse ΒΑΕ rectus est; æqualis igitur ΓΑΕ ipsi ΒΑΕ, et sunt in uno plano, quod est impossibile.



Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ⁵ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Non igitur ab eodem puncto eidem plano duæ rectæ ad rectos constituentur ad easdem partes. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Ad quæ plana eadem recta perpendicularis est, parallela erunt plana.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Recta enim quædam ΑΒ ad utrumque ipsorum ΓΔ, ΕΖ planorum ad rectos sit; dico parallela esse plana.

plan inférieur, rencontre cette droite; l'angle ΓΑΕ est donc droit. L'angle ΒΑΕ est droit par la même raison; l'angle ΓΑΕ est donc égal à l'angle ΒΑΕ; mais ces angles sont dans un seul plan, ce qui est impossible (ax. 9).

Du même point on ne peut donc pas élever du même côté deux perpendiculaires à un même plan. Ce qu'il fallait démontrer.

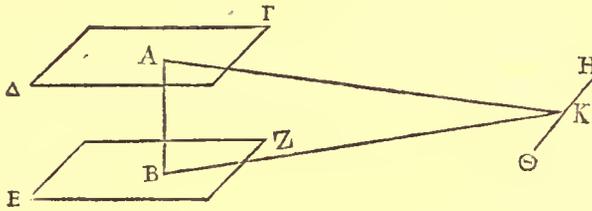
PROPOSITION XIV.

Les plans auxquels une même droite est perpendiculaire sont parallèles entr'eux.

Que la droite ΑΒ soit perpendiculaire à chacun des plans ΓΔ, ΕΖ; je dis que ces plans sont parallèles.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Συμ-
πιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν.

Si enim non, producta convenient inter se.
Convenient; facient utique communem sectio-



Ποιήτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ
τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ
ΑΚ, ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ
ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν εὔσαν
ἐν τῷ ΕΖ ἐκβλητέντι² ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστίν ἡ ΑΒ·
ἢ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ
δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστίν, τριγώνου δὴ³ τοῦ
ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν
ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι⁴, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ
ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπε-
σοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ
ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

nem rectam. Faciant ipsam ΗΘ, et sumatur in
ipsâ ΗΘ quodlibet punctum Κ, et jungantur ipsæ
ΑΚ, ΒΚ. Et quoniam ΑΒ perpendicularis est
ad planum ΕΖ, et ad ΒΚ igitur rectam exist-
tentem in ΕΖ producto plano perpendicularis
est ΑΒ; ergo angulus ΑΒΚ rectus est. Propter
eadem utique et angulus ΒΑΚ rectus est, trian-
guli igitur ΑΒΚ duo anguli ΑΒΚ, ΒΑΚ duo-
bus rectis sunt æquales, quod est impossibile;
non igitur plana ΓΔ, ΕΖ producta convenient;
parallela igitur sunt ΓΔ, ΕΖ plana.

Ad quæ igitur, etc.

Car si cela n'est point, ces plans étant prolongés se rencontreront. Qu'ils se rencontrent; leur section sera une ligne droite (5. 11). Que cette section soit ΗΘ; prenons dans ΗΘ un point quelconque Κ, et joignons ΑΚ, ΒΚ. Puisque la droite ΑΒ est perpendiculaire au plan ΕΖ, la droite ΑΒ est perpendiculaire à la droite ΒΚ qui est dans le prolongement du plan ΕΖ (déf. 5. 11); l'angle ΑΒΚ est donc droit. L'angle ΒΑΚ est droit par la même raison; les deux angles ΑΒΚ, ΒΑΚ du triangle ΑΒΚ sont donc égaux à deux angles droits, ce qui est impossible (17. 1); les plans ΓΔ, ΕΖ étant prolongés, ne se rencontreront donc point; les plans ΓΔ, ΕΖ sont donc parallèles. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

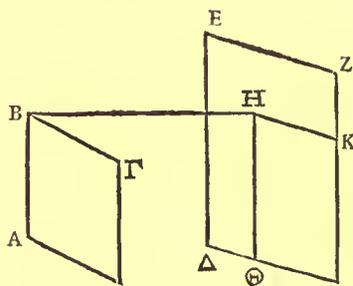
Εὰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρά δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὥσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι· παραλλήλα ἔστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB , $BΓ$ παρά δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς $ΔE$, EZ ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν AB , $BΓ$, $ΔE$, EZ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ sese tangentes duabus rectis sese tangentibus parallelæ sint, non in eodem plano existentes; parallela sunt per ipsas plana.

Duæ enim rectæ sese tangentes AB , $BΓ$ duabus rectis sese tangentibus $ΔE$, EZ sint parallelæ, non in eodem plano existentes; dico producta plana per AB , $BΓ$, $ΔE$, EZ non convenire inter se.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπίπεδον κάθετος ἡ BH , καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ H σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ H τῇ μὲν $EΔ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $HΘ$,

Ducatur enim a puncto B ad planum per $ΔE$, EZ perpendicularis BH , et occurrat plano in H puncto, et per H ipsi quidem $EΔ$ parallela ducatur $HΘ$, ipsi vero EZ ipsa HK .

PROPOSITION XV.

Si deux droites qui se touchent sont parallèles à deux droites qui se touchent, et qui ne sont pas dans le même plan, les plans qui passent par ces droites sont parallèles.

Que les droites AB , $BΓ$ qui se touchent soient parallèles aux deux droites $ΔE$, EZ qui se touchent et qui ne sont pas dans le même plan; je dis que les plans qui passent par les droites AB , $BΓ$, $ΔE$, EZ ne se rencontreront point, s'ils sont prolongés.

Car du point B menons au plan qui passe par les droites $ΔE$, EZ la perpendiculaire BH , et que cette droite rencontre ce plan au point H (31. 1); par le point H

τῆ δὲ EZ ἢ HK. Καὶ ἐπεὶ ἡ BH ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ, EZ ἐπιπέδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕτως ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, EZ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἀπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, HK οὕτως ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, EZ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΒΗΚ γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ ἢ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ΒΗ καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΗ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἢ ΒΗ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδον ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἢ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ δὲ καὶ τῷ διὰ

Et quoniam BH perpendicularis est ad planum per ΔΕ, ΕΖ, et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam et existentes in plano per ΔΕ, ΕΖ rectos faciet angulos. Contingit autem ipsam utraque ipsarum ΗΘ, ΗΚ existent in plano per ΔΕ, ΕΖ; rectus igitur uterque angulorum ΒΗΘ, ΒΗΚ. Et quoniam parallela est ΒΑ ipsi ΗΘ; ipsi igitur ΗΒΑ, ΒΗΘ anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem ΒΗΘ; rectus igitur et ΗΒΑ; ipsa igitur ΗΒ ipsi ΒΑ ad rectos est. Propter eadem utique ΒΗ et ipsi ΒΓ est ad rectos. Quoniam igitur recta ΒΗ duabus rectis ΒΑ, ΒΓ se mutuo secantibus ad rectos insistit; ipsa igitur ΒΗ et plano per ΒΑ, ΒΓ ad rectos est. Propter eadem utique ΒΗ et plano per ΗΘ, ΗΚ ad rectos est. Sed planum per ΗΘ, ΗΚ est ipsum per ΔΕ, ΕΖ; ipsa igitur ΒΗ plano per ΔΕ, ΕΖ est ad rectos. Ostensa autem est ΗΒ et plano per ΑΒ, ΒΓ ad rectos; est

menons ΗΘ parallèle à ΕΔ et ΗΚ parallèle à ΕΖ (31. 1). Puisque la droite ΒΗ est perpendiculaire au plan des droites ΔΕ, ΕΖ, elle fera des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans le plan des droites ΑΕ, ΕΖ (déf. 3. 11). Mais cette droite est rencontrée par chacune des droites ΗΘ, ΗΚ qui sont dans le plan des droites ΔΕ, ΕΖ; les angles ΒΗΘ, ΒΗΚ sont donc droits l'un et l'autre. Et puisque ΒΑ est parallèle à ΗΘ, les angles ΗΒΑ, ΒΗΘ seront égaux à deux angles droits (29. 1). Mais l'angle ΒΗΘ est droit; l'angle ΗΒΑ est donc droit; donc ΗΒ est perpendiculaire à ΒΑ. Par la même raison, ΒΗ est perpendiculaire à ΒΓ. Et puisque la droite ΒΗ est perpendiculaire aux deux droites ΒΑ, ΒΓ qui se coupent mutuellement, la droite ΗΒ sera perpendiculaire au plan des deux droites ΒΑ, ΒΓ (4. 11). Par la même raison, la droite ΒΗ est perpendiculaire au plan des droites ΗΘ, ΗΚ. Mais le plan des droites ΗΘ, ΗΚ est le même que celui des droites ΔΕ, ΕΖ; la droite ΒΗ est donc perpendiculaire au plan des droites ΔΕ, ΕΖ. Mais on a démontré que la droite ΗΒ est aussi perpendiculaire au plan des droites ΑΒ, ΒΓ; et cette droite est aussi perpendiculaire au plan des

τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθῇ· ἢ ΒΗ ἄρα πρὸς
 'κάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέ-
 δων ὀρθή ἐστὶ³. Πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἢ αὐτῇ εὐ-
 θεῖα ὀρθή ἐστὶ, παράλληλά ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα·
 παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπι-
 πεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

autem et plano per ΔΕ, ΕΖ perpendicularis ;
 ipsa igitur ΒΗ ad utrumque planorum per ΑΒ,
 ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ perpendicularis est. Ad quæ vero
 plana eadem recta perpendicularis est, parallela
 sunt ea plana ; parallelum igitur est planum per
 ΑΒ, ΒΓ ipsi per ΔΕ, ΕΖ.

Si igitur duæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου
 τινὸς τέμνῃται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομαὶ πα-
 ράλληλοί εἰσι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ
 ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τέμνισθω, κοινὰ
 δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω
 ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἢ τρεῖς
 ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η συμπεσοῦνται.
 Εκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, καὶ συμπιπ-

PROPOSITIO XVI.

Si duo plana parallela a plano aliquo secentur,
 communes ipsorum sectiones parallelae sunt.

Duo enim plana parallela ΑΒ, ΓΔ a plano
 ΕΖΗΘ secantur, communes autem ipsorum sec-
 tiones sint ipsæ ΕΖ, ΗΘ ; dico parallelam esse
 ΕΖ ipsi ΗΘ.

Si enim non, productæ ΕΖ, ΗΘ, vel ad partes
 Ζ, Θ, vel ad Ε, Η convenient. Producantur
 ut ad partes Ζ, Θ, et convenient primum in Κ.

droites ΔΕ, ΕΖ ; la droite ΒΗ est donc perpendiculaire à chacun des plans des
 droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ. Mais les plans auxquels une même droite est per-
 pendiculaire sont parallèles entre eux (14. 11) ; le plan des droites ΑΒ, ΒΓ est
 donc parallèle à celui des droites ΔΕ, ΕΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

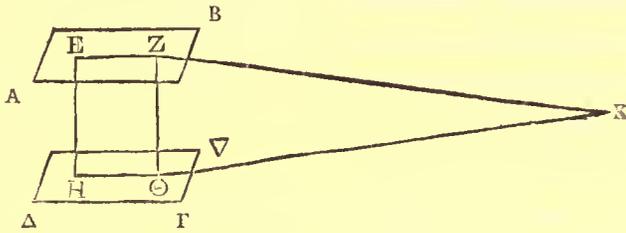
Si deux plans parallèles sont coupés par un plan quelconque, leurs com-
 munes sections sont parallèles.

Car que les plans parallèles ΑΒ, ΓΔ soient coupés par un plan ΕΖΗΘ,
 et que leurs communes sections soient ΕΖ, ΗΘ ; je dis que ΕΖ est parallèle à ΗΘ.

Car que cela ne soit point ; prolongeons les droites ΕΖ, ΗΘ ; ces droites se ren-
 contrent ou du côté des points Ζ, Θ, ou du côté des points Ε, Η. Prolongeons

τίτωσαν πρότερον² κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἵπεί ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημειᾶ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ³. Ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημειῶν ἐστὶ τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν

Et quoniam ipsa ΕΖΚ in ΑΒ est plano, et omnia igitur in ipsâ ΕΖΚ puncta in ΑΒ sunt plano. Unum autem ipsorum in rectâ ΕΖΚ punctum est Κ; ipsum igitur Κ in ΑΒ est plano. Propter eadem



τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκειῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη συμπεσοῦνται. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ⁵ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

utique ipsum Κ et in ΓΔ est plano; ipsa igitur ΑΒ, ΓΔ plana producta convenient. Non conveniunt autem, cum parallela supponantur; non igitur ΕΖ, ΗΘ rectæ productæ ad partes Ζ, Θ convenient. Similiter utique demonstrabimus rectas ΕΖ, ΗΘ neque ad partes Ε, Η productas convenire. Ipsæ autem neutrà ex parte convenientes parallelæ sunt; parallela igitur est ΕΖ ipsi ΗΘ.

Si igitur duo, etc.

ces droites vers les points Ζ, Θ, et qu'elles se rencontrent d'abord au point Κ. Puisque la droite ΕΖΚ est dans le plan ΑΒ, tous les points pris dans ΕΖΚ seront dans le plan ΑΒ. Mais le point Κ est un point de la droite ΕΖΚ; le point Κ est donc dans le plan ΑΒ. Par la même raison, le point Κ est dans le plan ΓΔ; les plans ΑΒ, ΓΔ prolongés se rencontreront donc entr'eux. Mais ces plans ne se rencontrent point, puisqu'ils sont parallèles par supposition; les droites ΕΖ, ΗΘ prolongées ne se rencontreront donc pas du côté des points Ζ, Θ. Nous démontrerons semblablement que les droites ΕΖ, ΗΘ prolongées ne se rencontreront point du côté des points Ε, Η. Mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35. 1); la droite ΕΖ est donc parallèle à la droite ΗΘ. Donc si, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

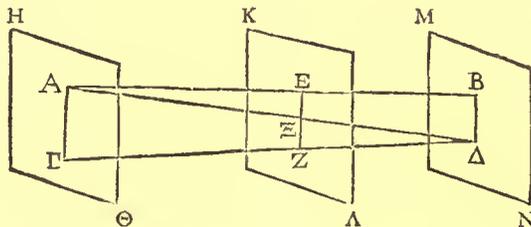
PROPOSITIO XVII.

Εάν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν $H\Theta$, $K\Lambda$, MN τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ A , E , B , Γ , Z , Δ σημεία· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AE εὐθεῖα πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$.

Si duæ rectæ a parallelis planis secantur, in eadem ratione secabuntur.

Duæ enim rectæ AB , $\Gamma\Delta$ a parallelis planis $H\Theta$, $K\Lambda$, MN secantur in punctis A , E , B , Γ , Z , Δ ; dico esse ut recta AE ad EB ita ipsam ΓZ ad $Z\Delta$.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ $A\Gamma$, $B\Delta$, $A\Delta$, καὶ συναλλέτω ἡ $A\Delta$ τῷ $K\Lambda$ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $E\Xi$, ΞZ . Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ $K\Lambda$, MN ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ $EB\Delta\Xi$ τέμνεται, αἰκοινὰ αὐτῶν τομαὶ αἱ $E\Xi$, $B\Delta$ παράλληλοί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ

Jungantur enim ipsæ $A\Gamma$, $B\Delta$, $A\Delta$, et occurrat $A\Delta$ plano $K\Lambda$ in puncto Ξ , et jungantur ipsæ $E\Xi$, ΞZ . Et quoniam duo plana parallela $K\Lambda$, MN a plano $EB\Delta\Xi$ secantur, communes ipsorum sectiones $E\Xi$, $B\Delta$ parallelæ sunt. Propter eadem

PROPOSITION XVII.

Si deux droites sont coupées par des plans parallèles, elles seront coupées en même raison.

Que les deux droites AB , $\Gamma\Delta$ soient coupées par les plans parallèles $H\Theta$, $K\Lambda$, MN aux points A , E , B , Γ , Z , Δ ; je dis que AE est à EB comme ΓZ est à $Z\Delta$.

Car joignons $A\Gamma$, $B\Delta$, $A\Delta$, et que la droite $A\Delta$ rencontre le plan $K\Lambda$ au point Ξ , et joignons $E\Xi$, ΞZ . Puisque les deux plans parallèles $K\Lambda$, MN sont coupés par le plan $EB\Delta\Xi$, leurs sections communes $E\Xi$, $B\Delta$ sont parallèles (16. 11). Par

δη, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ, ΚΑ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ παράλληλοι εἶσι. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΑ εὐθεῖα ἤκται ἡ ΕΞ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν² ὡς ΑΕ πρὸς τὴν³ ΕΒ οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς τὴν⁴ ΞΔ. Πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἤκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογον ἐστὶν⁵ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν⁶ ΞΔ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν⁷ ΖΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν⁸ ΞΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν⁹ ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν¹⁰ ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν¹¹ ΖΔ.

Εὰν ὅρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Εὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν¹.

utique, quoniam duo plana parallela ΗΘ, ΚΑ a plano ΑΞΖΓ secantur, communes ipsorum sectiones ΑΓ, ΞΖ parallelae sunt. Et quoniam trianguli ΑΒΔ ad unum laterum ipsum ΒΑ recta ducta est ΕΞ, proportionaliter igitur est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΑΞ ad ΞΔ. Rursus quoniam trianguli ΑΔΓ ad unum laterum ipsum ΑΓ recta ducta est ΞΖ, proportionaliter est ut ΑΞ ad ΞΔ ita ΓΖ ad ΖΔ. Ostensum est autem et ut ΑΞ ad ΞΔ ita ΑΕ ad ΕΒ; et ut igitur ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ.

Si igitur duæ, etc.

PROPOSITIO XVIII.

Si recta plano alicui ad rectos sit, et omnia per ipsam plana eidem plano ad rectos erunt.

Recta enim quædam ΑΒ subjecto plano ad rectos sit; dico et omnia per ipsam ΑΒ plana eidem subjecto plano ad rectos esse.

la même raison, puisque les deux plans parallèles ΗΘ, ΚΑ sont coupés par le plan ΑΞΖΓ, leurs sections communes ΑΓ, ΞΖ seront parallèles. Et puisque la droite ΕΞ est menée parallèlement à un des côtés ΒΑ du triangle ΑΒΔ, la droite ΑΕ sera à la droite ΕΒ comme la droite ΑΞ est à la droite ΞΔ (2. 6). De plus, puisque la droite ΞΖ est menée parallèlement à un des côtés ΑΓ du triangle ΑΔΓ, la droite ΑΞ est à la droite ΞΔ comme la droite ΓΖ est à la droite ΖΔ. Mais on a démontré que la droite ΑΞ est à la droite ΞΔ comme la droite ΑΕ est à la droite ΕΒ; la droite ΑΕ est donc à la droite ΕΒ comme la droite ΓΖ est à la droite ΖΔ (11. 5). Donc si, etc.

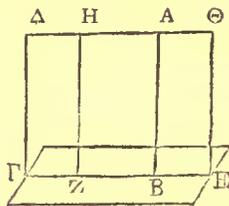
PROPOSITION XVIII.

Si une droite est perpendiculaire à un plan, tous les plans qui passeront par cette droite seront perpendiculaires à ce même plan.

Qu'une droite quelconque ΑΒ soit perpendiculaire à un plan inférieur; je dis que tous les plans qui passent par la droite ΑΒ sont perpendiculaires à ce même plan inférieur.

Εκβεβλήσθω γάρ διὰ τῆς AB ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἢ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἢ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστὶ, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς

Producatur enim per ipsam AB planum ΔΕ, et sit communis sectio plani ΔΕ et plani subjecti ipsa ΓΕ, et sumatur in ΓΕ quodlibet punctum Z, et ab ipso Z ipsi ΓΕ ad rectos ducatur in plano ΔΕ ipsa ΖΗ. Et quoniam AB ad subjectum planum perpendicularis est, et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam, et exis-



εὐθείας καὶ εὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶν ἡ AB· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστὶν· ἢ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθή ἐστὶν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ HZB ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν² ἡ AB τῇ ΖΗ. Ἡ δὲ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ· καὶ ἡ HZ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Καὶ ἐπίπτεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων

tentés in subjecto plano perpendicularis est AB; quare et ipsa ad ΓΕ perpendicularis est; angulus igitur ABZ rectus est. Est autem et ipse HZB rectus; parallela igitur est AB ipsi ΖΗ. Ipsa autem AB subjecto plano ad rectos est; et ipsa HZ igitur subjecto plano ad rectos est. Et planum ad planum rectum est, quando communi sectioni planorum ad rectos ductæ rectæ in uno planorum reliquo plano ad rectos sunt,

Car menons le plan ΔΕ par la droite AB, et que la droite ΓΕ soit la commune section du plan ΔΕ et du plan inférieur; dans la droite ΓΕ prenons un point quelconque Z; de ce point Z et dans le plan ΔΕ menons la droite ΖΗ perpendiculaire à la droite ΓΕ. Puisque la droite AB est perpendiculaire au plan inférieur, cette droite AB sera perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans ce plan (déf. 5. 11); la droite AB est donc perpendiculaire à la droite ΓΕ; l'angle ABZ est donc droit. Mais l'angle HZB est droit aussi; AB est donc parallèle à ΖΗ (28. 1). Mais AB est perpendiculaire au plan inférieur; HZ est donc perpendiculaire au plan inférieur (8. 11). Mais un plan est perpendiculaire à un plan, lorsque les droites menées dans l'un de ces plans sont perpendicu-

τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄσει, καὶ τῇ κοινῇ
τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων
τῷ ΔΕ³ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἢ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑπο-
κειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον
ὀρθὸν ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον⁴. Ομοίως
δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα
ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ
τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἦ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ
αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ
ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ
ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ
πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.

Μὴ γὰρ, καὶ ἤχθωσαν ὑπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν
μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς

et comuni sectioni ΓΕ planorum in uno
planorum plano ΔΕ ad rectos ducta ΖΗ ostensa
est subjecto plano ad rectos; ergo ΔΕ planum
rectum est ad subjectum planum. Similiter
utique demonstrabuntur et omnia per ipsam ΑΒ
plana recta quælibet ad subjectum planum.

Si igitur recta, etc.

PROPOSITIO XIX.

Si duo plana se mutuo secantia plano alicui ad
rectos sint, et communis ipsorum sectio eidem
plano ad rectos erit.

Duo enim plana ΑΒ, ΒΓ subjecto plano ad
rectos sint, communis autem ipsorum sectio
sit ΒΔ; dico ΒΔ subjecto plano ad rectos esse.

Non enim, et ducatur a puncto Δ in plano
quidem ΑΒ rectæ ΑΔ ad rectos ipsa ΔΕ, in

laïres à leur commune section et à l'autre plan (déf. 4. 11'), et l'on a démontré
que la droite ΖΗ menée dans le plan ΔΕ perpendiculairement à la droite ΓΕ, com-
mune section des plans, est aussi perpendiculaire au plan inférieur; le plan ΔΕ
est donc perpendiculaire au plan inférieur. Nous démontrerons semblablement
que tous les autres plans qui passent par la droite ΑΒ sont aussi perpendiculaires
au plan inférieur. Donc si, etc.

PROPOSITION XIX.

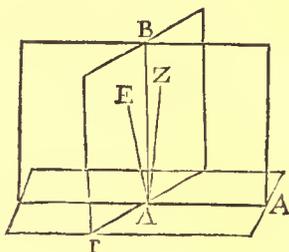
Si deux plans qui se coupent mutuellement sont perpendiculaires à un plan,
leur commune section sera aussi perpendiculaire à ce plan.

Que deux plans ΑΒ, ΒΓ soient perpendiculaires à un plan inférieur, et que
leur commune section soit ΒΔ; je dis que la droite ΒΔ est perpendiculaire au plan
inférieur.

Car que cela ne soit pas; du point Δ menons dans le plan ΑΒ la droite ΔΕ
perpendiculaire à la droite ΑΔ (11.1), et du même point et dans le plan ΒΓ

ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα

plano autem ΒΓ ipsi ΓΔ ad rectos ipsa ΔΖ. Et quoniam planum ΑΒ rectum est ad subjectum, et communi ipsorum sectioni ΑΔ ad rectos in plano ΑΒ ducta est ΔΕ; ergo ΔΕ perpendicularis est ad subjectum planum. Similiter utique demonstrabimus et ΔΖ perpendiculararem esse ad subjectum planum; ergo ab



σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκείμενῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῷ ὑποκείμενῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς^α, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

eadem puncto Δ subjecto plano duæ rectæ ad rectos constitutæ sunt ex eadem parte, quod est impossibile; non igitur subjecto plano a puncto Δ constituentur ad rectos, præter ipsam ΔΒ communem sectionem planorum ΑΒ, ΒΓ.

Si igitur duo, etc.

menons la droite ΔΖ perpendiculaire à la droite ΓΔ. Puisque le plan ΑΒ est perpendiculaire au plan inférieur, et que la droite ΔΕ a été menée dans le plan ΑΒ perpendiculairement à la commune section ΑΔ de ces plans, la droite ΔΕ sera perpendiculaire au plan inférieur. Nous démontrerons semblablement que ΔΖ est perpendiculaire au plan inférieur; du même point Δ on a donc mené du même côté deux perpendiculaires au plan inférieur, ce qui est impossible (13. 11); du point Δ on ne peut donc pas mener d'autres droites qui soient perpendiculaires au plan inférieur, si ce n'est la commune section ΔΒ des plans ΑΒ, ΒΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

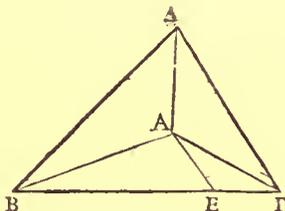
PROPOSITIO XX.

Εάν στερεά γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται, δύο ὁποιαοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἴσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεά γὰρ γωνία ἢ πρὸς τῷ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ περιέχεται λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιαοῦν τῶν λοιπῆς μείζονες εἴσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Si solidus angulus sub tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt quomodocunque sumpti.

Solidus enim angulus ad A sub tribus angulis planis ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ contineatur; dico angulorum ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ duos quoslibet reliquo majores esse quomodocunque sumptos.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἴσι, φανερόν ὅτι δύο ὁποιαοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἴσιν¹. Εἰ δὲ οὐ, ἔστω μείζων ἢ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἢ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἢ ΑΕ,

Si quidem igitur ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ anguli æquales inter se sint, evidens est duos quoslibet reliquo majores esse. Si autem non, sit major angulus ΒΑΓ, et constituatur ad rectam ΑΒ, et ad punctum in ipsâ Α angulo ΔΑΒ in plano per ΒΑΓ æqualis angulus ΒΑΕ, et ponatur ipsi ΑΔ æqualis ΑΕ, et per punctum Ε

PROPOSITION XX.

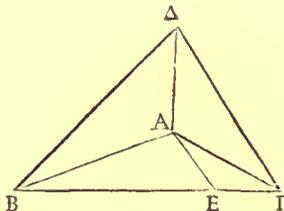
Si un angle solide est compris sous trois angles plans, deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, sont plus grands que l'angle restant.

Que l'angle solide A soit compris sous les trois angles plans ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ; je dis que deux quelconques des trois angles plans ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ, de quelque manière qu'on les prène, sont plus grands que l'angle restant.

Car si les angles ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ sont égaux entr'eux, il est évident que deux quelconques de ces angles sont plus grands que l'angle restant. Si cela n'est point, que l'angle ΒΑΓ soit le plus grand. Sur la droite ΑΒ et au point Α de cette droite, construisons dans le plan ΒΑΓ l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΔΑΒ (23. 11); faisons ΑΕ égal à ΑΔ (3. 1); que la droite ΒΕΓ, menée par le point Ε, coupe

καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ τεμνέται
τὰς ΑΒ, ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β, Γ σημεία, καὶ
ἐπεξέχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ
τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, δύο δὲ ἡ ΔΑ, ΑΒ δυσὶν ΑΕ,
ΑΒ ἴσαι³, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ
ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ
ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ, ΔΓ τῇ ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ
ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς
τῆς ΕΓ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ
ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς
ΕΓ μείζων ἐστὶν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία

ducta ΒΕΓ secet rectas ΑΒ, ΑΓ in Β, Γ punctis,
et jungantur ipsæ ΔΒ, ΔΓ. Et quoniam æqualis
est ΔΑ ipsi ΔΕ, communis autem ΑΒ, duæ igitur
ΔΑ, ΑΕ duabus ΑΕ, ΑΒ æquales, et an-
gulus ΔΑΒ angulo ΒΑΕ æqualis; basis igitur
ΔΒ basi ΒΕ est æqualis. Et quoniam duæ ΔΒ,
ΔΓ ipsâ ΒΓ majores sunt, ex quibus ΔΒ ipsi
ΒΕ ostensa est æqualis; reliqua igitur ΔΓ reli-
quâ ΕΓ major est. Et quoniam æqualis est ΔΑ
ipsi ΑΕ, communis autem ΑΓ, et basis ΔΓ
basi ΕΓ major est; angulus igitur ΔΑΓ angulo



τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστὶν. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ
ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ,
ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. Ομοίως δὲ
δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι
τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Εὰν ἄρα στερεὰ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΕΑΓ major est. Ostensus est autem et angulus
ΔΑΒ ipsi ΒΑΕ æqualis; anguli igitur ΔΑΒ, ΔΑΓ
angulo ΒΑΓ majores sunt. Similiter utique de-
monstrabimus et reliquos duos quoslibet sumptos
reliquo majores esse.

Si igitur, etc.

les droites ΑΒ, ΑΓ aux points Β, Γ, et joignons ΔΒ, ΔΓ. Puisque ΔΑ est égal à ΔΕ, et que la droite ΑΒ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΒ sont égales aux deux droites ΑΕ, ΑΒ; mais l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΒΑΕ; la base ΔΒ est donc égale à la base ΒΕ (4. 1). Et puisque les deux droites ΔΒ, ΔΓ sont plus grandes que la droite ΒΓ, et qu'on a démontré que la droite ΔΒ est égale à la droite ΒΕ, la droite restante ΔΓ sera plus grande que la droite restante ΕΓ. Et puisque la droite ΔΑ est égale à la droite ΑΕ, que la droite ΑΓ est commune, et que la base ΔΓ est plus grande que la base ΕΓ, l'angle ΔΑΓ sera plus grand que l'angle ΕΑΓ (25. 1). Mais on a démontré que l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΒΑΕ; les angles ΔΑΒ, ΔΑΓ sont donc plus grands que l'angle ΒΑΓ. Si l'on prend deux autres angles quelconques, nous démontrerons semblablement qu'ils sont plus grands que l'angle restant. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κá.

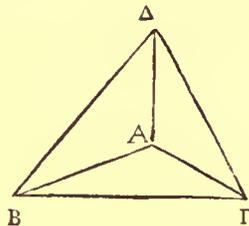
PROPOSITIO XXI.

Ἀπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἑλασσόνων ἢ τεσσάρων ἑρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἐστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ἑρθῶν ἑλάσσονές εἰσιν.

Omnis solidus angulus sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A contentus planis angulis ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ; dico angulos ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ quatuor rectis minores esse.



Εἰλήψω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπέξέυχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιασοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὴν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν. Αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές

Sumantur enim in unâquâque ipsarum ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ quælibet puncta Β, Γ, Δ, et jungantur ipsæ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Et quoniam solidus angulus ad B sub tribus angulis planis continetur ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, duo quilibet reliquo majores sunt; anguli igitur ΓΒΑ, ΑΒΔ angulo ΓΒΔ majores sunt. Propter eadem utique et anguli quidem ΒΓΑ, ΑΓΔ angulo ΒΓΔ majores sunt. Anguli autem ΓΔΑ, ΑΔΒ angulo ΓΔΒ majores sunt;

PROPOSITION XXI.

Tout angle solide est compris sous des angles plans qui sont plus petits que quatre angles droits.

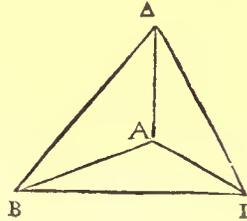
Soit l'angle solide A compris sous les angles plans ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ; je dis que les angles ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ sont plus petits que quatre angles droits.

Car dans chacune des droites ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, prenons des points quelconques Β, Γ, Δ, et joignons ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Puisque l'angle solide B est compris sous les trois angles plans ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, deux quelconques de ces angles seront plus grands que l'angle restant (20. 11); les angles ΓΒΑ, ΑΒΔ sont donc plus grands que l'angle ΓΒΔ. Par la même raison, les angles ΒΓΑ, ΑΓΔ sont plus grands que l'angle ΒΓΔ, et les angles ΓΔΑ, ΑΔΒ plus grands que l'angle ΓΔΒ; les six angles ΓΒΑ, ΑΒΔ,

44 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είσιν· αὶ ἐξ ἄρα γωνίαι αὶ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αὶ τρεῖς αὶ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αὶ ἄρα ἐξ³

sex igitur anguli ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ tribus ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ majores sunt. Sed tres anguli ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ duobus rectis æquales sunt; sex igitur anguli ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ,



αὶ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἐκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αὶ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αὶ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αὶ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἐξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αὶ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἐξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσὶ μείζονες⁴. λοιπαὶ ἄρα αὶ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς γωνίαι⁵ περιέχουσιν τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ duobus rectis majores sunt. Et quoniam uniuscujusque triangulorum ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ tres anguli duobus rectis æquales sunt, ergo trium triangulorum novem anguli ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ sex rectis æquales sunt, ex quibus anguli ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ sex anguli duobus rectis sunt majores; reliqui igitur ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ tres anguli continent solidum angulum quatuor rectis minores sunt.

Ἀπανα ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Omnis igitur, etc.

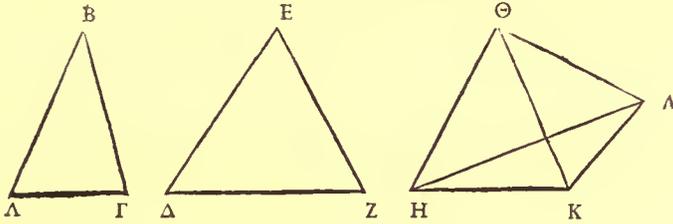
ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ sont donc plus grands que les trois angles ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ. Mais les trois angles ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ sont égaux à deux droits (32. 1); les six angles ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ sont donc plus grands que deux droits. Et puisque les trois angles de chacun des triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ sont égaux à deux droits, les neuf angles ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ de ces trois triangles sont égaux à six angles droits; mais les six angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ sont plus grands que deux droits; les angles restants ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ qui comprennent l'angle solide sont donc plus petits que quatre angles droits. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

PROPOSITIO XXII.

Εάν ὡσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτάς ἴσαι εὐθείαι· δυνατόν ἐστίν ἐκ τῶν ἐπιζευγυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo majores sunt quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos æquales rectæ; possibile est ex iis conjungentibus æquales rectas triangulum constituere.



Εστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ἐπὶ ἄβγ, Δεζ, Ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι² πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὴν ὑπὸ ἄβγ, Δεζ τῆς ὑπὸ Ηθκ, αἱ δ' ὑπὸ Δεζ, Ηθκ τῆς ὑπὸ ἄβγ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ Ηθκ, ἄβγ τῆς ὑπὸ Δεζ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ἄβ, βγ, Δε, εζ, Ηθ, Θκ εὐθείαι, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ἀγ, Δζ, Ηκ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστίν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ἀγ,

Sint tres anguli plani ἄβγ, Δεζ, Ηθκ, quorum duo reliquo majores sint quomodocunque sumpti, anguli quidem ἄβγ, Δεζ angulo Ηθκ, anguli vero Δεζ, Ηθκ angulo ἄβγ, et adhuc anguli Ηθκ, ἄβγ angulo Δεζ, et sint æquales ἄβ, βγ, Δε, εζ, Ηθ, Θκ rectæ, et jungantur ipsæ ἀγ, Δζ, Ηκ; dico possibile esse ex æqualibus ipsis ἀγ, Δζ, Ηκ trian-

PROPOSITION XXII.

Si l'on a trois angles plans, si deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, sont plus grands que l'angle restant, et si ces angles sont compris par des droites égales, on pourra construire un triangle avec les droites qui joignent ces droites égales.

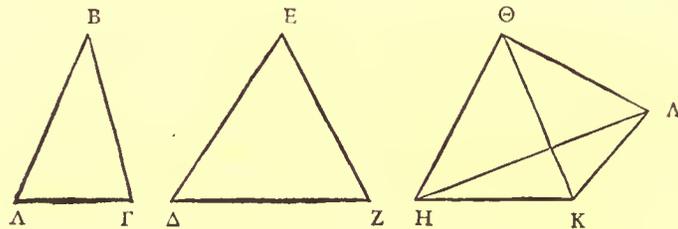
Soient les trois angles plans ἄβγ, Δεζ, Ηθκ; que deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, soient plus grands que l'angle restant, c'est-à-dire que les deux angles ἄβγ, Δεζ soient plus grands que l'angle Ηθκ, que les deux angles Δεζ, Ηθκ soient plus grands que l'angle ἄβγ, et que les deux angles Ηθκ, ἄβγ soient plus grands que l'angle Δεζ; que les droites ἄβ, βγ, Δε, εζ, Ηθ, Θκ soient égales; joignons ἀγ, Δζ, Ηκ; je dis qu'on peut construire un triangle

ΔZ , HK τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν $ΑΓ$, ΔZ , HK δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν³.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $\Delta ΕΖ$, $ΗΘΚ$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερόν ὅτι καὶ τῶν $ΑΓ$, ΔZ , HK ἴσων γενομένων δυνατὸν ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $ΑΓ$, ΔZ , HK τρίγωνον συστήσασθαι. Εἰ δὲ οὐ, ἔστωσαν ἀνισοί, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ $ΘΚ$ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Θ$, τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ $ΚΘΛ$ καὶ κείσθω μιᾶ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $\Delta Ε$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$ ἴση ἢ $ΘΛ$, καὶ

gulum constituere, hoc est ipsarum $ΑΓ$, ΔZ , HK duas quaslibet reliquá majores esse.

Si quidem igitur anguli $ΑΒΓ$, $\Delta ΕΖ$, $ΗΘΚ$ æquales inter se sunt, evidens est et ipsis $ΑΓ$, ΔZ , HK æqualibus factis possibile esse ex æqualibus ipsis $ΑΓ$, ΔZ , HK triangulum constitui. Si autem non, sint inæquales, et constituatur ad rectam $ΘΚ$, et ad punctum $Θ$, angulo $ΑΒΓ$ æqualis $ΚΘΛ$; et ponatur uni ipsarum $ΑΒ$, $ΒΓ$, $\Delta Ε$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$ æqualis $ΘΛ$, et jungantur



ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΚΛ$, $ΗΛ$. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$ δυοὶ ταῖς $ΚΘ$, $ΘΛ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἢ πρὸς τῷ $Β$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΚΘΛ$ ἴση· βᾶσις ἄρα ἢ $ΑΓ$ βᾶσι τῇ $ΚΛ$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΗΘΚ$ τῆς ὑπὸ $\Delta ΕΖ$ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἢ ὑπὸ

ipsæ $ΚΛ$, $ΗΛ$. Et quoniam duæ $ΑΒ$, $ΒΓ$ duabus $ΚΘ$, $ΘΛ$ æquales sunt, et angulus ad $Β$ angulo $ΚΘΛ$ æqualis; basis igitur $ΑΓ$ basi $ΚΛ$ est æqualis. Et quoniam anguli $ΑΒΓ$, $ΗΘΚ$ angulo $\Delta ΕΖ$ majores sunt, æqualis autem an-

avec des droites égales aux droites $ΑΓ$, ΔZ , HK ; c'est-à-dire que deux quelconques des droites $ΑΓ$, ΔZ , HK , sont plus grandes que la droite restante.

Si les angles $ΑΒΓ$, $\Delta ΕΖ$, $ΗΘΚ$ sont égaux entr'eux, il est évident que les droites $ΑΓ$, ΔZ , HK étant égales, on pourra construire un triangle avec des droites égales aux droites $ΑΓ$, ΔZ , HK . Si cela n'est point, que ces angles soient inégaux. Sur la droite $ΘΚ$ et au point $Θ$ de cette droite, construisons l'angle $ΚΘΛ$ égal à l'angle $ΑΒΓ$ (23. 1); faisons la droite $ΘΛ$ égale à une des droites $ΑΒ$, $ΒΓ$, $\Delta Ε$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, et joignons $ΚΛ$, $ΗΛ$. Puisque les deux droites $ΑΒ$, $ΒΓ$ sont égales aux deux droites $ΚΘ$, $ΘΛ$, et que l'angle $Β$ est égal à l'angle $ΚΘΛ$, la base $ΑΓ$ est égale à la base $ΚΛ$ (4. 1). Et puisque les angles $ΑΒΓ$, $ΗΘΚ$ sont plus grands que l'angle $\Delta ΕΖ$, et que

ΑΒΓ τῆ ὑπὸ ΚΘΛ· ἢ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δυσι⁶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΚΛ μείζονές εἰσι· πολλῶ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῆ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. Ομοίως δὴ⁸ δεῖξομεν ἔτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

gulus ΑΒΓ angulo ΚΘΛ; angulus igitur ΗΘΛ angulo ΔΕΖ major est. Et quoniam duæ ΗΘ, ΘΛ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, et angulus ΗΘΛ angulo ΔΕΖ major; basis igitur ΗΛ basi ΔΖ major est. Sed ipsæ ΗΚ, ΚΛ ipsâ ΚΛ majores sunt; multo igitur ipsæ ΗΚ, ΚΛ ipsâ ΔΖ majores sunt. Æqualis autem ΚΛ ipsi ΑΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΗΚ reliquâ ΔΖ majores sunt. Similiter utique demonstrabimus et quidem ΑΓ, ΔΖ ipsâ ΗΚ majores esse, et adhuc ipsas ΔΖ, ΗΚ ipsâ ΑΓ majores esse; possibile igitur est ex æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum constituere. Quod oportebat ostendere.

l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΚΘΛ, l'angle ΗΘΛ est plus grand que l'angle ΔΕΖ. Et puisque les deux droites ΗΘ, ΘΛ sont égales aux deux droites ΔΕ, ΕΖ, et que l'angle ΗΘΛ est plus grand que l'angle ΔΕΖ, la base ΗΛ est plus grande que la base ΔΖ (24. 1). Mais les droites ΗΚ, ΚΛ sont plus grandes que la droite ΚΛ (20. 1); donc, à plus forte raison, les droites ΗΚ, ΚΛ sont plus grandes que la droite ΔΖ. Mais ΚΛ est égal à ΑΓ; les droites ΑΓ, ΗΚ sont donc plus grandes que la droite restante ΔΖ. Nous démontrerons semblablement que les droites ΑΓ, ΔΖ sont plus grandes que la droite ΗΚ, et que les droites ΔΖ, ΗΚ sont aussi plus grandes que la droite ΑΓ; on peut donc construire un triangle avec des droites égales aux droites ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ (22. 1). Ce qu'il fallait démontrer.

Α Λ Λ Ω Σ.

ALITER.

Ἐτώσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἕστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτάς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$. λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς $Β$, $Ε$, $Θ$ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. Εἰ δὲ οὐ, ἕστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς $Β$, $Ε$, $Θ$ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἢ πρὸς τῷ $Β$ ἐκατέρως τῶν πρὸς τοῖς $Ε$, $Θ$ μείζων ἄρα ἔσται² καὶ ἡ $ΑΓ$ εὐθεῖα ἐκατέρως τῶν $ΔΖ$, $ΗΚ$. Καὶ φανερόν ὅτι ἡ $ΑΓ$ μεθ' ἐκατέρως τῶν $ΔΖ$, $ΗΚ$ τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί³. λέγω ὅτι καὶ αἱ $ΔΖ$,

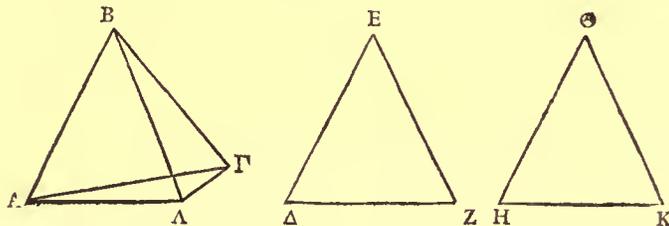
Sint dati tres anguli plani $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$, quorum duo reliquo majores sint quomocunque sumpti; contincant autem ipsos æquales rectæ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, et jungantur ipsæ $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$; dico possibile esse ex æqualibus ipsis $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$ triangulum constituere, hoc est rursus duas reliquâ majores esse quomocunque sumptas. Si quidem igitur rursus anguli ad puncta $Β$, $Ε$, $Θ$ æquales sint, æquales erunt et ipsæ $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$, et erunt duæ reliquâ majores. Si autem non, sint inæquales anguli ad puncta $Β$, $Ε$, $Θ$, et major ipse ad $Β$ utrolibet ipsorum ad $Ε$, $Θ$; major igitur erit et recta $ΑΓ$ utrâlibet ipsarum $ΔΖ$, $ΗΚ$. Et manifestum est ipsam $ΑΓ$ cum alterutrâ ipsarum $ΔΖ$, $ΗΚ$ reliquâ majorem esse. Dico et ipsas $ΔΖ$, $ΗΚ$ ipsâ $ΑΓ$ majores

A U T R E M E N T.

Soient donnés les trois angles plans $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$; que deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, soient plus grands que l'angle restant; que ces angles soient compris par les droites égales $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, et joignons $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$; je dis qu'on peut construire un triangle avec des droites égales aux droites $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$; c'est-à-dire que deux de ces droites, de quelque manière qu'on les prène, sont plus grandes que la droite restante. Si les angles $Β$, $Ε$, $Θ$ sont égaux, les droites $ΑΓ$, $ΔΖ$, $ΗΚ$ seront égales (4. 1), et deux de ces droites seront plus grandes que la droite restante. Si cela n'est point, que ces angles soient inégaux, et que l'angle $ΑΒΓ$ soit plus grand que chacun des angles $Ε$, $Θ$, la droite $ΑΓ$ sera plus grande que chacune des droites $ΔΖ$, $ΗΚ$ (24. 1); et il est évident que la droite $ΑΓ$ avec l'une ou l'autre des droites $ΔΖ$, $ΗΚ$ sera plus grande que la droite restante. Je dis que les droites $ΔΖ$, $ΗΚ$ sont plus grandes que la droite $ΑΓ$.

HK τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΑΒΑ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἢ ΒΑ, καὶ ἐπέξέυχθωσαν αἱ ΑΑ, ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ

esse. Constituat^r ad rectam AB et ad punctum in eâ B angulo ΗΘΚ æqualis ΑΒΑ, et ponatur uni ipsarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ æqualis ΒΑ, et jungantur ipsæ ΑΑ, ΑΓ. Et quoniam



ΑΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. Βάσις ἄρα ἢ ΑΑ βάσει τῇ ΗΚ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἢ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΑ ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστί. Βάσις ἄρα ἢ ΔΖ βάσεως τῆς ΑΓ μείζων

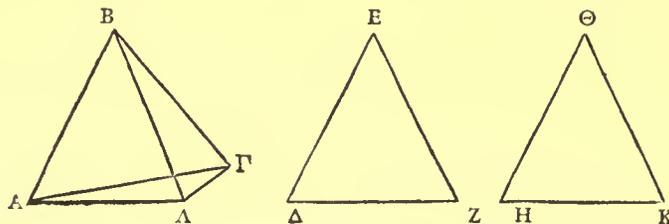
duæ ΑΒ, ΒΑ duabus ΗΘ, ΘΑ æquales sunt utraque utrique, et angulos æquales continent; basis igitur ΑΑ basi ΗΚ æqualis est. Et quoniam anguli ad puncta Ε, Θ angulo ΑΒΓ majores sunt, quorum angulus ΗΘΚ angulo ΑΒΑ est æqualis; reliquus igitur angulus ad Ε angulo ΑΒΓ major est. Et quoniam duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt utraque utrique, et angulus ΔΕΖ angulo ΑΒΓ major est; basis igitur ΔΖ basi ΑΓ major est. Æqualis autem

Sur la droite AB et au point B de cette droite coustruisons l'angle ABA égal à l'angle ΗΘΚ (23. 1); faisons la droite ΒΑ égale à une des droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, et joignons les droites ΑΑ, ΑΓ. Puisque les deux droites ΑΒ, ΒΑ sont égales aux deux droites ΗΘ, ΘΚ, chacune à chacune, et qu'elles comprennent des angles égaux, la base ΑΑ est égale à la base ΗΚ (4. 1). Et puisque les angles Ε, Θ sont plus grands que l'angle ΑΒΓ, et que l'angle ΗΘΚ est égal à l'angle ΑΒΑ, l'angle restant Ε sera plus grand que l'angle ΑΒΓ. Et puisque les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux deux droites ΔΕ, ΕΖ, chacune à chacune, et que l'angle ΔΕΖ est plus grand que l'angle ΑΒΓ, la base ΔΖ sera plus grande que la base ΑΓ

50 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστίη⁶. Ἴση δὲ εἰδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΛ, ΑΓ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΑΓ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· πολλῶν ἄρα αἱ ΔΖ, ΗΚ

ostensa est ΗΚ ipsi ΑΛ; ipsæ igitur ΔΖ, ΗΚ ipsis ΑΛ, ΑΓ majores sunt. Sed ipsæ ΑΛ, ΑΓ ipsâ ΑΓ majores sunt; multo igitur ipsæ ΔΖ, ΗΚ ipsâ ΑΓ



τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι⁷, τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβάνόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐστίν⁸ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

majores sunt; ipsarum ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ igitur rectorum duæ reliquâ majores sunt quomocunque sumptæ; possibile igitur est ex æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum constitui. Quod oportebat ostendere.

(24. 1). Mais on a démontré que la droite ΗΚ est égale à la droite ΑΛ; les droites ΔΖ, ΗΚ sont donc plus grandes que les droites ΑΛ, ΑΓ. Mais les droites ΑΛ, ΑΓ sont plus grandes que la droite ΑΓ (20. 1); donc à plus forte raison les droites ΔΖ, ΗΚ sont plus grandes que la droite ΑΓ; deux des droites ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, de quelque manière qu'on les prène, sont donc plus grandes que la droite restante. On peut donc construire un triangle avec trois droites égales aux droites ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ (22. 1). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

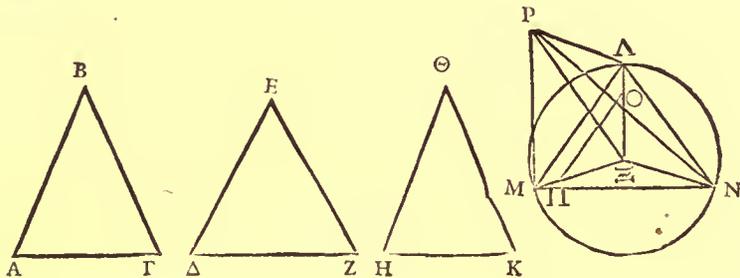
PROPOSITIO XXIII.

Εκ τριῶν ᾠγωνίων ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνομεναι, στερεὰν ᾠγωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἐστωσαν αἱ δεθεῖσαι τρεῖς ᾠγωνία ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβάνομεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν ᾠγωνίαν συστήσασθαι.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo reliquo majores sunt quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere; oportet utique tres angulos quatuor rectis minores esse.

Sint dati tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo majores sint quomodocunque sumpti, adhuc autem tres anguli quatuor rectis minores; oportet utique ex æqualibus ipsis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ solidum angulum constituere.



Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ

Abscindantur æquales ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, et jungantur ipsæ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ; possibile igitur est ex iis æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ

PROPOSITION XXIII.

Construire un angle solide avec trois angles plans, deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, étant plus grands que l'angle restant; il faut que ces trois angles soient plus petits que quatre angles droits.

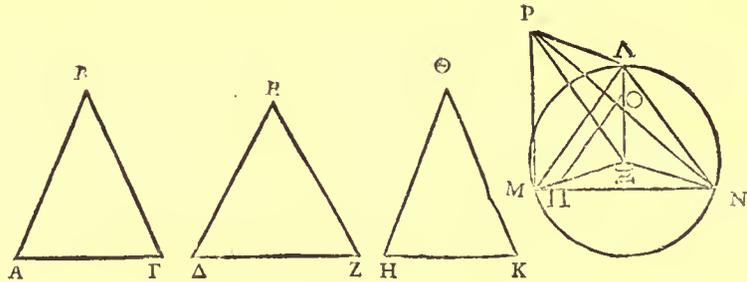
Soient donnés les trois angles plans ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ; que deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, soient plus grands que l'angle restant, et que ces trois angles soient plus petits que quatre droits; il faut avec des angles égaux aux angles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ construire un angle solide.

Faisons les droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ égales entr'elles, et joignons ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. On pourra, avec des droites égales aux droites ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ construire un triangle (22. 1).

52 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τρίγωνον συστήσασθαι. Συνιστάτω τὸ ΔMN , ὥστε ἴσῃν εἶναι τὴν μὲν $\Delta\Gamma$ τῇ ΔM , τὴν δὲ ΔZ τῇ MN , καὶ ἔτι τὴν HK τῇ ΔN , καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΔMN τρίγωνον κύκλος ὁ ΔMN , καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον· ἔσται δὲ ἡτοι εἰτὸς τοῦ ΔMN τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

triangulum constituere. Constituatur ipsum ΔMN , ita ut æqualis sit quidem $\Delta\Gamma$ ipsi ΔM , ipsa vero ΔZ ipsi MN , et adhuc ipsa HK ipsi ΔN , et describatur circa ΔMN triangulum circulus ΔMN , et sumatur ipsius centrum; erit utique vel intra ΔMN triangulum, vel in uno laterum ipsius, vel extra.



Ἐστω πρότερον ἐντός¹, καὶ ἔστω τὸ Ξ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Delta\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$; λέγω ὅτι ἡ AB μείζων ἐστὶ τῆς $\Delta\Xi$. Εἰ γὰρ μὴ, ἡτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Delta\Xi$, ἢ ἐλάττω. Ἐστω πρότερον ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Delta\Xi$, ἀλλ' ἡ μὲν AB τῇ $B\Gamma$ ἐστὶν ἴση· ἡ $\Delta\Xi$ ἄρα τῇ $B\Gamma$ ἐστὶν ἴση². Ἡ δὲ $\Delta\Xi$ τῇ ΞM , δύο δὲ αἱ AB , $B\Gamma$ δυσὶ³

Sit primum intra, et sit ipsum Ξ , et jungantur ipsæ $\Delta\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$; dico AB majorem esse ipsâ $\Delta\Xi$. Si enim non, vel æqualis est AB ipsi $\Delta\Xi$, vel minor. Sit primum æqualis. Et quoniam æqualis est AB ipsi $\Delta\Xi$, sed quidem AB ipsi $B\Gamma$ est æqualis; ergo $\Delta\Xi$ ipsi $B\Gamma$ est æqualis. Ipsa autem $\Delta\Xi$ ipsi ΞM , duæ igitur

Construisons le triangle ΔMN , de manière que $\Delta\Gamma$ soit égal à ΔM , ΔZ égal à MN , et HK égal à ΔN (22. 1). Décrivons ensuite une circonférence de cercle ΔMN autour du triangle ΔMN (5. 4); prenons le centre de ce cercle, le centre de ce cercle sera ou en dedans du triangle ΔMN ou sur un de ses côtés, ou hors de ce triangle.

Que le centre du cercle soit d'abord en dedans du triangle; et que son centre soit le point Ξ ; joignons $\Delta\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$; je dis que AB est plus grand que $\Delta\Xi$. Car si cela n'est point, la droite AB sera égale à la droite $\Delta\Xi$ ou plus petite que cette droite. Que la droite AB soit d'abord égale à $\Delta\Xi$. Puisque AB est égal à $\Delta\Xi$, et que AB est égal à $B\Gamma$, la droite $\Delta\Xi$ est égale à $B\Gamma$. Mais $\Delta\Xi$ est égal à ΞM ; les deux droites AB ,

ταῖς $\Lambda\Xi$, ΞM ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ
 βάσεις ἢ $\text{A}\Gamma$ βάσει τῆ AM ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα
 ἢ ὑπὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$ τῆ ὑπὸ AEM ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ
 δὴ καὶ ἢ μὲν ὑπὸ AEZ τῆ ὑπὸ MEN ἐστὶν ἴση,
 καὶ ἔτι ἢ ὑπὸ HOK τῆ ὑπὸ $\text{N}\text{E}\Lambda$ · αἱ ἄρα τρεῖς
 αἱ ὑπὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$, AEZ , HOK γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ
 AEM , MEN , $\text{N}\text{E}\Lambda$ εἰσὶν ἴσαι⁵. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς
 αἱ ὑπὸ AEM , MEN , $\text{N}\text{E}\Lambda$ τέτρασιν ἑρθαῖς
 εἰσὶν ἴσαι⁶· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ⁷ ὑπὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$, AEZ ,
 HOK τέτρασιν ἑρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὑπόκεινται δὲ
 καὶ τισσάρων ἑρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἄτοπον·
 οὐκ ἄρα ἢ AB τῆ AE ἴση ἐστὶ⁸. λέγω δὴ ὅτι
 οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ AB τῆ AE . εἰ γὰρ δυνατόν
 ἔστω· καὶ κείσθω τῆ μὲν AB ἴση ἢ EO , τῆ δὲ $\text{B}\Gamma$ ἴση
 ἢ EP , καὶ ἐπέξέυχθω ἢ OP . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ
 AB τῆ $\text{B}\Gamma$, ἴση ἐστὶ καὶ ἢ EO τῆ EP · ὥστε καὶ
 λοιπὴ ἢ AO λοιπῆ¹⁰ τῆ PM ἐστὶν ἴση· παράλληλος
 ἄρα ἢ AM τῆ OP , καὶ ἰσογώνιον τὸ AME τῷ OPE ·
 ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ $\text{E}\Lambda$ πρὸς τὴν AM οὕτως ἢ EO
 πρὸς τὴν¹¹. OP · ἐναλλάξ ἄρα¹² ὡς ἢ AE πρὸς

AB , $\text{B}\Gamma$ duabus AE , EM æquales sunt utraque
 utriusque, et basis $\text{A}\Gamma$ basi AM supponitur æqua-
 lis; angulus igitur $\text{A}\text{B}\Gamma$ angulo AEM est æqualis.
 Propter eadem utique et quidem angulus AEZ
 angulo MEN est æqualis, et adhuc angulus
 HOK angulo $\text{N}\text{E}\Lambda$; tres igitur anguli $\text{A}\text{B}\Gamma$,
 AEZ , HOK tribus AEM , MEN , $\text{N}\text{E}\Lambda$ sunt æqua-
 les. Sed tres anguli AEM , MEN , $\text{N}\text{E}\Lambda$ quatuor
 rectis sunt æquales; et tres igitur anguli $\text{A}\text{B}\Gamma$,
 AEZ , HOK quatuor rectis æquales sunt. Sup-
 ponuntur autem et quatuor rectis minores,
 quod absurdum; non igitur AB ipsi AE æqualis
 est. Dico igitur neque minorem esse AB ipsâ
 AE . Si enim possibile, sit; et ponatur ipsi
 quidem AB æqualis EO , ipsi vero $\text{B}\Gamma$ æqualis EP ,
 et jungatur ipsa OP . Et quoniam æqualis est
 AB ipsi $\text{B}\Gamma$, æqualis est et EO ipsi EP ; quare
 et reliqua AO reliquæ PM est æqualis; paral-
 lela igitur AM ipsi OP , et æquiangulum AME
 ipsi OPE ; est igitur ut $\text{E}\Lambda$ ad AM ita EO ad
 OP ; permutando igitur ut AE ad EO ita AM

$\text{B}\Gamma$ sont donc égales aux deux droites AE , EM , chacune à chacune; mais la base
 $\text{A}\Gamma$ est supposée égale à la base AM ; l'angle $\text{A}\text{B}\Gamma$ est donc égal à l'angle AEM
 (S. 1). Par la même raison, l'angle AEZ est égal à l'angle MEN , et l'angle HOK égal à
 l'angle $\text{N}\text{E}\Lambda$; les trois angles $\text{A}\text{B}\Gamma$, AEZ , HOK sont donc égaux aux trois angles
 AEM , MEN , $\text{N}\text{E}\Lambda$. Mais les trois angles AEM , MEN , $\text{N}\text{E}\Lambda$ sont égaux à quatre droits;
 les trois angles $\text{A}\text{B}\Gamma$, AEZ , HOK sont donc égaux à quatre droits. Mais on les a sup-
 posés plus petits que quatre droits, ce qui est absurde; la droite AB n'est donc
 pas égale à la droite AE . Je dis de plus que la droite AB n'est pas plus petite que AE .
 Qu'elle le soit, si cela est possible; faisons la droite EO égale à AB , la droite EP égale
 à $\text{B}\Gamma$, et joignons OP . Puisque AB est égal à $\text{B}\Gamma$, et la droite EO égale à la droite EP ; la
 droite restante AO est égale à la droite restante PM ; la droite AM est donc paral-
 lèle à la droite OP (2. 6); les triangles AME , OPE sont donc équiangles; la droite $\text{E}\Lambda$
 est donc à AM comme EO est à OP (4. 6); donc, par permutation, la droite AE est

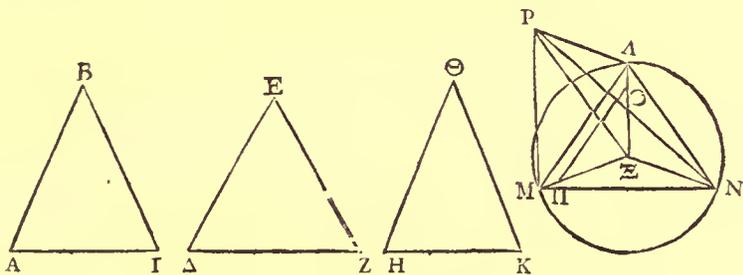
τὴν ΞO οὕτως ἢ ΛM πρὸς τὴν¹⁴ $\text{O}\Pi$. Μείζων δὲ ἢ $\Lambda\Xi$ τῆς ΞO · μείζων ἄρα καὶ ἢ ΛM τῆς $\text{O}\Pi$. ΑΛΛ' ἢ ΛM κείται τῇ $\text{A}\Gamma$ ἴση· καὶ ἢ $\text{A}\Gamma$ ἄρα τῆς $\text{O}\Pi$ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι¹⁵ αἱ AB , $\text{B}\Gamma$ δυσὶ ταῖς $\text{O}\Xi$, ΞP ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἢ $\text{A}\Gamma$ βάσιως τῆς $\text{O}\Pi$ μείζων ἐστὶ· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$ γωνίας τῆς ὑπὸ $\text{O}\Xi\text{P}$ μείζων ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἢ μὲν ὑπὸ $\Delta\text{E}\text{Z}$ τῆς ὑπὸ $\text{M}\Xi\text{N}$ μείζων ἐστίν, ἢ δὲ ὑπὸ HOK τῆς ὑπὸ $\text{N}\Xi\Lambda$ · αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, HOK τριῶν τῶν ὑπὸ $\Lambda\Xi\text{M}$, $\text{M}\Xi\text{N}$, $\text{N}\Xi\Lambda$ μείζονές εἰσι. ΑΛΛ' αἱ ὑπὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, HOK τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῶν ἄρα αἱ ὑπὸ $\Lambda\Xi\text{M}$, $\text{M}\Xi\text{N}$, $\text{N}\Xi\Lambda$ τεσσάρων ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες¹⁶. ΑΛΛὰ καὶ ἴσαι, ἔπειρ ἐστίν¹⁷ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἢ AB ἐλάσσων ἐστὶ τῆς $\Lambda\Xi$. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἢ AB τῆς $\Lambda\Xi$. Ἀρεστάτω δὲ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ $\Lambda\text{M}\text{N}$ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΞP · καὶ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς $\Lambda\Xi$, ἐκείνῳ ἴσον

ad $\text{O}\Pi$. Major autem $\Lambda\Xi$ ipsâ ΞO ; major igitur et ΛM ipsâ $\text{O}\Pi$. Sed ΛM posita est ipsi $\text{A}\Gamma$ æqualis; et igitur $\text{A}\Gamma$ ipsâ $\text{O}\Pi$ major est. Quoniam igitur duæ rectæ AB , $\text{B}\Gamma$ duabus $\text{O}\Xi$, ΞP æquales sunt, et basis $\text{A}\Gamma$ basi $\text{O}\Pi$ major est; angulus igitur $\text{A}\text{B}\Gamma$ angulo $\text{O}\Xi\text{P}$ major est. Similiter utique demonstrabimus et quidem angulum $\Delta\text{E}\text{Z}$ angulo $\text{M}\Xi\text{N}$ majorem esse, angulum autem HOK angulo $\text{N}\Xi\Lambda$; ergo tres anguli $\text{A}\text{B}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, HOK tribus $\Lambda\Xi\text{M}$, $\text{M}\Xi\text{N}$, $\text{N}\Xi\Lambda$ majores sunt. Sed anguli $\text{A}\text{B}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, HOK quatuor rectis minores supponuntur; multo igitur anguli $\Lambda\Xi\text{M}$, $\text{M}\Xi\text{N}$, $\text{N}\Xi\Lambda$ quatuor rectis minores sunt. Sed et æquales, quod est absurdum; non igitur AB minor est ipsâ $\Lambda\Xi$. Ostensum est autem neque æqualem; major igitur AB ipsâ $\Lambda\Xi$. Constituatur utique a puncto Ξ circuli $\Lambda\text{M}\text{N}$ plano ad rectos ipsa ΞP ; et quo majus est quadratum ex AB quadrato ex $\Lambda\Xi$, huic æquale sit quadratum ex ΞP , et jun-

à ΞO comme ΛM est à $\text{O}\Pi$ (16. 5). Mais $\Lambda\Xi$ est plus grand que ΞO ; ΛM est donc plus grand que $\text{O}\Pi$. Mais nous avons fait ΛM égal à $\text{A}\Gamma$; la droite $\text{A}\Gamma$ est donc plus grande que $\text{O}\Pi$. Et puisque les deux droites AB , $\text{B}\Gamma$ sont égales aux deux droites $\text{O}\Xi$, ΞP , et que la base $\text{A}\Gamma$ est plus grande que la base $\text{O}\Pi$, l'angle $\text{A}\text{B}\Gamma$ est plus grand que l'angle $\text{O}\Xi\text{P}$ (24. 1). Nous démontrerons semblablement que l'angle $\Delta\text{E}\text{Z}$ est plus grand que l'angle $\text{M}\Xi\text{N}$, et l'angle HOK plus grand que l'angle $\text{N}\Xi\Lambda$; les trois angles $\text{A}\text{B}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, HOK sont donc plus grands que les trois angles $\Lambda\Xi\text{M}$, $\text{M}\Xi\text{N}$, $\text{N}\Xi\Lambda$. Mais les angles $\text{A}\text{B}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, HOK sont supposés plus petits que quatre droits; donc à plus forte raison les trois angles $\Lambda\Xi\text{M}$, $\text{M}\Xi\text{N}$, $\text{N}\Xi\Lambda$ sont plus petits que quatre droits. Mais ils sont égaux à quatre droits, ce qui est absurde; la droite AB n'est donc pas plus petite que la droite $\Lambda\Xi$. Mais on a démontré qu'elle ne lui est point égale; la droite AB est donc plus grande que la droite $\Lambda\Xi$. Du point Ξ élevons la droite ΞP perpendiculaire au plan du cercle $\Lambda\text{M}\text{N}$ (12. 11); faisons en sorte que le carré de ΞP soit égal à l'excès du carré de AB sur le carré de $\Lambda\Xi$ (lem. suiv.), et joignons $\text{P}\Lambda$, PM , PN .

ἔστω¹⁸ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΡ, καὶ ἐπέζευχθῶσαν αἱ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΜΝ κύκλου ἐπιπέδον· καὶ πρὸς ἐκάστην ἄρα τῶν ΑΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστὶν ἡ ΡΞ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΡ· βάσις ἄρα ἡ ΡΑ βάσει τῇ ΡΜ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΡΝ ἰκατέρα

gantur ipsæ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ. Et quoniam ΡΞ perpendicularis est ad planum ΑΜΝ circuli; et ad unamquamque igitur ipsarum ΑΞ, ΜΞ, ΝΞ perpendicularis est ΡΞ. Et quoniam æqualis est ΑΞ ipsi ΞΜ, communis autem et ad rectos ipsa ΕΡ; basis igitur ΡΑ basi ΡΜ æqualis est. Propter eadem utique ΡΝ utrique ipsarum ΡΑ,



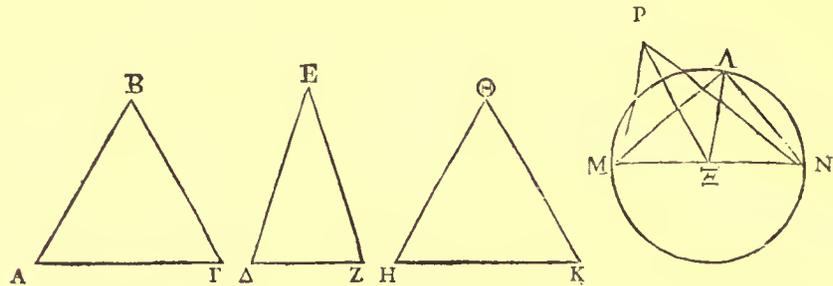
τῶν ΡΑ, ΡΜ ἴσιν¹⁹. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΕΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΕΡ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΕΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΡ, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ ΑΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΑ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΑ. ἀλλὰ τῇ

ΡΜ est æqualis; tres igitur rectæ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ æquales inter se sunt. Et quoniam quomajus est quadratum ex ΑΒ quadrato ex ΑΞ, huic æquale supponitur quadratum ex ΕΡ; quadratum igitur ex ΑΒ æquale est quadratis ex ΑΞ, ΕΡ. Quadratis autem ex ΑΞ, ΕΡ æquale est quadratum ex ΑΡ, rectus enim ipse ΑΞΡ; quadratum igitur ex ΑΒ æquale est quadrato ex ΡΑ; æqualis

Puisque la droite ΡΞ est perpendiculaire au plan du cercle ΑΜΝ, la droite ΡΞ sera perpendiculaire à chacune des droites ΑΞ, ΜΞ, ΝΞ (déf. 3. 11). Et puisque ΑΞ est égal à ΞΜ, que la droite ΞΡ est commune, et qu'elle est perpendiculaire à ces deux droites, la base ΡΑ est égale à la base ΡΜ (4. 1). Par la même raison, la droite ΡΝ est égale à chacune des droites ΡΑ, ΡΜ; les trois droites ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ sont donc égales entr'elles. Et puisque le carré de ΕΡ est supposé égal à l'excès du carré de ΑΒ sur le carré de ΑΞ, le carré de ΑΒ est donc égal aux carrés des droites ΑΞ, ΕΡ. Mais le carré de ΑΡ est égal aux carrés des droites ΑΞ, ΕΡ (47. 1), car l'angle ΑΞΡ est droit; le carré de ΑΒ est donc égal au carré de ΡΑ; la droite ΑΒ est donc égale à la droite ΡΑ. Mais chacune des

μὲν AB ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΑ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκαστῇ τῶν ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση·

igitur AB ipsi PA. Sed ipsi quidem AB æqualis est unaquæque ipsarum ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, ipsi autem PA æqualis utraque ipsarum ΡΜ, ΡΝ; unaquæque igitur ipsarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ unicuique ipsarum ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ æqualis est. Et quoniam duæ ΑΡ, ΡΜ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales sunt, et basis ΑΜ basi ΑΓ



γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΡΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΡΜΝ γωνία²⁰ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΡΠΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ· ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΑΡΜ, ΡΜΝ, ΑΡΝ, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΡΜ, ΡΜΝ, ΑΡΝ γωνιῶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι²¹.

supponitur æqualis; angulus igitur ΑΡΜ angulo ΑΒΓ est æqualis. Propter eadem utique et quidem angulus ΡΜΝ angulo ΔΕΖ est æqualis, angulus autem ΡΠΝ angulo ΗΘΚ; ex tribus igitur angulis planis ΑΡΜ, ΡΜΝ, ΑΡΝ, qui sunt æquales tribus datis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, solidus angulus constitutus est ad Ρ contentus sub ΑΡΜ, ΡΜΝ, ΑΡΝ angulis. Quod oportebat ostendere.

droites ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ est égale à la droite ΑΒ, et chacune des droites ΡΜ, ΡΝ est égale à la droite ΡΑ; chacune des droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ est donc égale à chacune des droites ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ. Et puisque les deux droites ΑΡ, ΡΜ sont égales aux deux droites ΑΒ, ΒΓ, et que la base ΑΜ est supposée égale à la base ΑΓ, l'angle ΑΡΜ est égal à l'angle ΑΒΓ (8. 1.). Par la même raison, l'angle ΡΜΝ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΡΠΝ égal à l'angle ΗΘΚ; avec les trois angles plans ΑΡΜ, ΡΜΝ, ΑΡΝ, qui sont égaux aux trois angles donnés ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, on a donc construit un angle solide Ρ qui est compris sous les angles ΑΡΜ, ΡΜΝ, ΑΡΝ. Ce qu'il fallait démontrer.

Αλλὰ δὴ ἔστω τὸ²² κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς MN, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΞΑ· λέγω πάλιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μὴ, ἢτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. Ἐστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ AB, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΑ, τουτέστι τῇ MN, ἴσαι εἰσίν. Αλλὰ ἡ MN τῇ ΔΖ ἐστὶν²³ ἴση· καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἐστὶν²⁴ ἀδυνάτον· οὐκ ἄρα ἡ AB ἴση ἐστὶ²⁵ τῇ ΛΞ. Ομοίως δὴ²⁶ οὐδὲ ἐλάττων, πολλῶ γὰρ τὸ ἀδυνάτον μείζον· ἢ ἄρα AB μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Καὶ ἐὰν ὁμοίως ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῃ ἴσον πρὸς ἑρβάς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, συσταθῆσεται τὸ πρέβλημα.

Αλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ AMN τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ²⁷. λέγω δὴ καὶ οὕτως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μὴ, ἢτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. Ἐστω πρότερον

At vero sit centrum circuli in uno laterum MN trianguli, et sit ipsum Ξ, et jungatur ipsa ΞΑ; dico rursus majorem esse AB ipsâ ΛΞ. Si enim non, vel æqualis est AB ipsi ΛΞ, vel minor. Sit primum æqualis; duæ igitur AB, ΒΓ, hoc est ipsæ ΔΕ, ΕΖ, duabus ΜΞ, ΞΑ, hoc est ipsi MN, æquales sunt. Sed MN ipsi ΔΖ est æqualis; et igitur ipsæ ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, quod est impossibile; non igitur AB æqualis est ipsi ΛΞ. Similiter utique neque minor, multo enim impossibile majus; ergo AB major ipsâ ΛΞ. Et si similiter quo majus est quadratum ex AB quadrato ex ΛΞ, huic æquale ad rectos plano circuli constituamus, ut quadratum ex ΞΡ, constituetur problema.

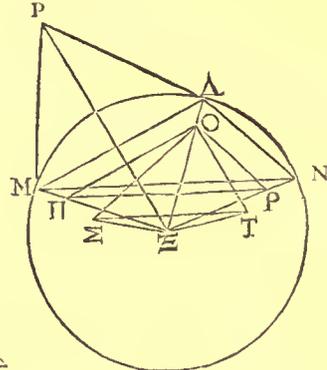
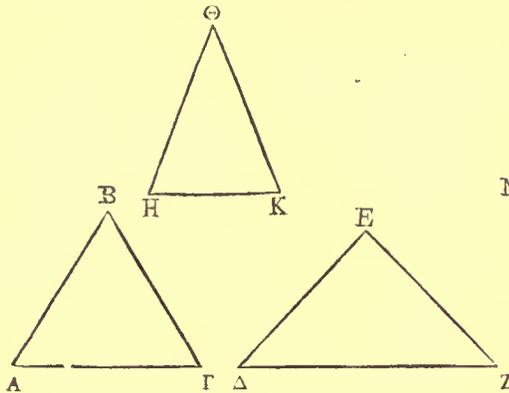
At vero sit centrum circuli extra AMN triangulum, et sit ipsum Ξ, et jungantur ipsæ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ; dico utique et ita majorem esse AB ipsâ ΛΞ. Si enim non, vel æqualis est, vel minor. Sit primum æqualis; duæ igitur AB,

Que le centre du cercle soit dans un des côtés MN du triangle; que ce soit le point Ξ, et joignons ΞΑ; je dis encore que AB est plus grand que ΛΞ. Car si cela n'est point, la droite AB sera égale à ΛΞ, ou elle sera plus petite. Qu'elle lui soit d'abord égale; les deux droites AB, ΒΓ, c'est-à-dire ΔΕ, ΕΖ, seront égales aux deux droites ΜΞ, ΞΑ, c'est-à-dire à la droite MN. Mais MN est égal à ΔΖ; les droites ΔΕ, ΕΖ sont donc égales à ΔΖ, ce qui ne peut être (20. 1); la droite AB n'est donc point égale à ΛΞ. On démontrerait semblablement qu'elle n'est pas plus petite, car il s'ensuivrait une plus grande absurdité; la droite AB est donc plus grande que ΛΞ. Si l'on mène la droite ΞΡ perpendiculaire au plan du cercle, et si l'on fait en sorte que le carré de ΞΡ soit égal à l'excès du carré de AB sur le carré ΛΞ (lem. suiv.), le problème sera résolu.

Que le centre du cercle soit enfin hors du triangle AMN, et que ce soit le point Ξ; joignons ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ; je dis que AB est plus grand que ΛΞ; car si cela n'est point, AB sera égal à ΛΞ, ou plus petit. Premièrement que ΔΒ soit

ἴση· δύο οὖν αἰ AB, ΒΓ δυοὶ²⁸ ταῖς ΜΞ, ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΜΛ ἴστί²⁹ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΞΛ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΟΚ τῇ ὑπὸ ΛΞΝ ἐστὶν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δυοὶ ταῖς ὑπὸ³⁰ ΑΒΓ, ΗΟΚ ἐστὶν ἴση· ἀλλ' αἰ³¹ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΟΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζο-

BF duabus ME, EA æquales sunt utraque utriusque, et basis AG basi MA est æqualis; angulus igitur ABG angulo MEL est æqualis. Propter eadem utique et angulus HOK angulo LEN est æqualis; totus igitur MEN duobus ABG, HOK est æqualis. Sed anguli ABG, HOK angulo DEZ majores sunt;



νές εἰσι· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἰ ΔΕ, ΕΖ δυοὶ³² ταῖς ΜΞ, ΞΝ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴστί³³ ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα ἴση ἐστί³³ ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ. Εξῆς δὲ δείζομεν, ὅτι οἱδὲ ἐλάττων· μείζων ἄρα. Καὶ εἰάν πρὸς

et igitur angulus MEN angulo DEZ major est. Et quoniam duæ DE, EZ duabus ME, EN æquales sunt, et basis DZ basi MN æqualis; angulus igitur MEN angulo DEZ est æqualis. Ostensus est autem et major, quod absurdum; non igitur æqualis est AB ipsi LE. Deinceps vero ostendemus, neque minorem esse; major igitur. Et

égal à LE; les deux droites AB, BF seront égales aux deux droites ME, EA, chacune à chacune; mais la base AG est égale à la base MA; l'angle ABG est donc égal à l'angle MEL (S. 1). Par la même raison, l'angle HOK est égal à l'angle LEN; l'angle entier MEN est donc égal aux deux angles ABG, HOK. Mais les angles ABG, HOK sont plus grands que l'angle DEZ; l'angle MEN est donc plus grand que l'angle DEZ. Et puisque les deux droites DE, EZ sont égales aux deux droites ME, EN, et que la base DZ est égale à la base MN, l'angle MEN est égal à l'angle DEZ (S. 1). Mais on a démontré qu'il est plus grand, ce qui est absurde; la droite AB n'est donc pas égale à la droite LE. Nous démontrerons ensuite qu'elle n'est pas plus petite; elle est donc plus grande. Si nous menons encore la droite EP perpendi-

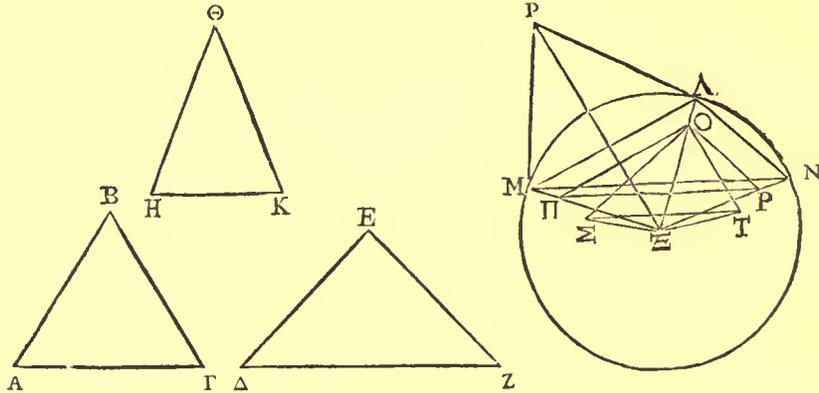
ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀνα-
στήσωμεν τὴν³⁴ ΞP , καὶ ἴσην αὐτὴν ὑπο-
θώμεθα, ἧ μείζον δυνατόν τὸ ἀπὸ τῆς AB
τοῦ ἀπὸ τῆς ΛE , συσταθήσεται τὸ πρόβλη-
μα³⁵. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ AB τῆς
 ΛE . Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν
 AB ἴση ἡ ΞO , τῇ δὲ $BΓ$ ἴση ἡ $\Xi Π$, καὶ ἐπι-
ζεύχθω ἡ $OΠ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$,
ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞO τῇ $\Xi Π$. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ
 $OΛ$ λοιπῇ τῇ $ΠΜ$ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα
ἐστὶν ἡ ΛM τῇ $ΠO$, καὶ ἰσογώνιον τὸ $\Lambda MΞ$ τρί-
γωνον τῷ $ΠΞO$ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $\Xi Λ$
πρὸς τὴν ΛM οὕτως³⁶ ἡ ΞO πρὸς τὴν $OΠ$, καὶ
ἐναλλάξ ὡς ἡ ΛE πρὸς τὴν ΞO οὕτως ἡ ΛM πρὸς
τὴν $OΠ$. Μείζων δὲ ἡ ΛE τῆς ΞO · μείζων ἄρα
καὶ ἡ ΛM τῆς $OΠ$. Ἀλλὰ ἡ ΛM τῇ $ΑΓ$ ἐστὶν
ἴση· καὶ ἡ $ΓΑ$ ἄρα τῆς $OΠ$ ἐστὶ μείζων. Ἐπεὶ
οὖν δύο αἱ AB , $BΓ$ δυσὶ³⁷ ταῖς $OΞ$, $\Xi Π$ ἴσαι
εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ $ΑΓ$ βάσιως
τῆς $OΠ$ μείζων ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$
γωνίας τῆς ὑπὸ $OΞΠ$ μείζων ἐστίν. Ὀμοίως δὲ
καὶ τὴν ΞP ἴσην ἑκατέρα τῶν ΞO , $\Xi Π$ ἀπολά-

si ad rectos circuli plano constituamus rursus
 ΞP , et æqualem ipsam ponamus lateri quadrati
quo superat ipsum ex AB ipsum ex ΛE , consti-
tuetur problema. Dico et neque minorem esse AB
ipsâ ΛE . Si enim possibile, sit; et ponatur ipsi
quidem AB æqualis ΞO , ipsi vero $BΓ$ æqualis
 $\Xi Π$, et jungatur ipsa $OΠ$. Et quoniam æqualis
est AB ipsi $BΓ$, æqualis est et ΞO ipsi $\Xi Π$;
quare et reliqua $OΛ$ reliquæ $ΠΜ$ est æqualis;
parallela igitur est ΛM ipsi $ΠO$, et æquian-
gulum $\Lambda MΞ$ triangulum ipsi $ΠΞO$ triangulo; est
igitur ut $\Xi Λ$ ad ΛM ita ΞO ad $OΠ$, et alterne ut ΛE
ad ΞO ita ΛM ad $OΠ$. Major autem ΛE ipsâ ΞO ;
major igitur et ΛM ipsâ $OΠ$. Sed ΛM ipsi $ΑΓ$
est æqualis; et igitur $ΑΓ$ ipsâ $OΠ$ est major.
Quoniam igitur duæ AB , $BΓ$ duabus $OΞ$, $\Xi Π$
æquales sunt utraque utrique, et basis $ΑΓ$ basi
 $OΠ$ major est; angulus igitur $ΑΒΓ$ angulo $OΞΠ$
major est. Similiter utique et si ΞP æqualem
utrique ipsarum ΞO , $\Xi Π$ sumamus, et jungamus

eulaire au plan du cercle, et si nous faisons eette perpendiculaire égale à une droite dont le quarré soit égal à l'excès du quarré de AB sur le quarré de ΛE (lem. suiv.), le problème sera résolu. Je dis que la droite AB n'est pas plus petite que ΛE . Qu'elle le soit, si cela est possible; faisons ΞO égal à AB , et $\Xi Π$ égal à $BΓ$ et joignons $OΠ$. Puisque AB est égal à $BΓ$, la droite ΞO sera égale à la droite $\Xi Π$; la droite restante $OΛ$ sera donc égale à la droite restante $ΠΜ$; la droite ΛM est donc parallèle à la droite $ΠO$ (2. 6); les deux triangles $\Lambda MΞ$, $ΠΞO$ sont donc équiangles; $\Xi Λ$ est donc à ΛM comme ΞO est à $OΠ$ (4. 6); donc, par permutation, ΛE est à ΞO eomme ΛM est à $OΠ$. Mais ΛE est plus grand que ΞO ; donc ΛM est plus grand que $OΠ$. Mais ΛM est égal à $ΑΓ$; donc $ΓΑ$ est plus grand que $OΠ$. Et puisque les deux droites AB , $BΓ$ sont égales aux deux droites $OΞ$, $\Xi Π$, chacune à chacune, et que la base $ΑΓ$ est plus grande que la base $OΠ$, l'angle $ΑΒΓ$ est plus grand que l'angle $OΞΠ$ (25. 1). Si l'on prend la droite ΞP égale à chacuue des droites ΞO , $\Xi Π$, et si l'on joint OP , nous démontrerons semblablement que l'angle

ἔωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ; δείξομεν ὅτι καὶ³⁸ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστί. Συνεστάτω δὴ πρὸς τὴν ΑΞ εὐθείαν³⁹ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρωθεν τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ,

ipsam ΟΡ, demonstrabimus et angulum ΗΘΚ angulo ΟΞΡ majorem esse. Constituatur ad rectam ΑΞ et ad punctum in ipsâ Ξ angulo quidem ΑΒΓ æqualis ΑΞΣ, angulo autem ΗΘΚ æqualis ΑΞΤ, et ponatur utraque ipsarum ΞΣ, ΞΤ ipsi ΟΞ æqualis, et jungantur ipsæ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ,



ΣΤ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ⁴⁰ ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΑΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΝ τῇ ΟΤ ἴση ἐστίν⁴¹. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΑ, ΑΝ δυσὶ⁴² ταῖς ΣΟ, ΟΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΑΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστί· βάσις

ΣΤ. Et quoniam duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΟΞ, ΞΣ æquales sunt, et angulus ΑΒΓ angulo ΟΞΣ æqualis; basis igitur ΑΓ, hoc est ΑΜ, basi ΟΣ est æqualis. Propter eadem utique et ΑΝ ipsi ΟΤ æqualis est. Et quoniam duæ ΜΑ, ΑΝ duabus ΣΟ, ΟΤ æquales sunt, et angulus ΜΑΝ angulo ΣΟΤ major est; basis igitur ΜΝ basi ΣΤ major

ΗΘΚ est plus grand que l'angle ΟΞΡ. Sur la droite ΑΞ et au point Ξ de cette droite, construisons l'angle ΑΞΣ égal à l'angle ΑΒΓ, et l'angle ΑΞΤ égal à l'angle ΗΘΚ; faisons chacune des droites ΞΣ, ΞΤ égale à la droite ΟΞ, et joignons ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. Puisque les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux deux droites ΟΞ, ΞΣ, et que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΟΞΣ, la base ΑΓ, c'est-à-dire la droite ΑΜ, est égale à la base ΟΣ (4. 1). Par la même raison, la droite ΑΝ sera égale à la droite ΟΤ. Et puisque les deux droites ΜΑ, ΑΝ sont égales aux deux droites ΣΟ, ΟΤ et que l'angle ΜΑΝ est plus grand que l'angle ΣΟΤ, la base ΜΝ est plus grande que la base ΣΤ

ἄρα ἢ MN βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἢ MN τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἢ ΔΖ ἄρα τῇ ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυοῖ⁴³ ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἢ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἢ ὑπὸ ΣΞΤ τοῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ· ἢ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἕπερ ἀδύνατον.

A H M M A.

Ὁν δὲ τρόπον ᾧ μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἢ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΑΞ μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἢ ΑΓ', καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΒΓ.

est. Sed MN ipsi ΔΖ est æqualis; et ΔΖ igitur ipso ΣΤ major est. Quoniam igitur duæ ΔΕ, ΕΖ duabus ΣΞ, ΞΤ æquales sunt, et basis ΔΖ basi ΣΤ major; angulus igitur ΔΕΖ angulo ΣΞΤ major est. Æqualis autem angulus ΣΞΤ angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ; angulus igitur ΔΕΖ angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ major est. Sed et minor, quod impossibile.

L E M M A.

Quo autem modo quo majus est quadratum ex ΑΒ quam quadratum ex ΑΞ, huic æquale sumere sit quadratum ex ΞΡ, ita ostendemus.

Exponentur rectæ ΑΒ, ΑΞ, et sit major ΑΒ, et describatur ab ipsâ semicirculus ΑΒΓ, et in semicirculo ΑΒΓ aptetur ipsi ΑΞ non minori existenti diametri ΑΒ æqualis recta ΑΓ', et jungatur ipsa ΒΓ.

(24. 1). Mais MN est égal à ΔΖ ; ΔΖ est donc plus grand que ΣΤ. Et puisque les deux droites ΔΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites ΣΞ, ΞΤ, et que la base ΔΖ est plus grande que la base ΣΤ, l'angle ΔΕΖ sera plus grand que l'angle ΣΞΤ (25. 1). Mais l'angle ΣΞΤ est égal aux angles ΑΒΓ, ΗΘΚ ; l'angle ΔΕΖ est donc plus grand que les angles ΑΒΓ, ΗΘΚ ; mais il est plus petit ; ce qui est impossible.

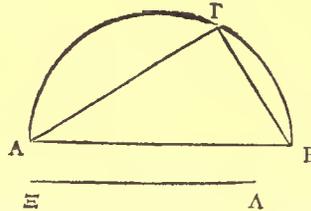
L E M M E.

Nous démontrerons ainsi comment l'on trouve un carré d'une droite ΞΡ égal à l'excès du carré de ΑΒ sur le carré de ΑΞ.

Soient les droites ΑΒ, ΑΞ ; que ΑΒ soit la plus grande, et sur cette droite décrivons le demi-cercle ΑΒΓ, et appliquons dans le demi-cercle ΑΒΓ une droite ΑΓ qui, n'étant pas plus grande que le diamètre ΑΒ, soit égale à la droite ΑΞ, et joignons ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ $ΑΒΓ$ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$, ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ². ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ μείζον

Quoniam igitur in semicirculo $ΑΒΓ$ angulus est $ΑΓΒ$, rectus igitur est $ΑΓΒ$; quadratum igitur ex $ΑΒ$ æquale est quadratis ex $ΑΓ$, $ΓΒ$; quare quadratum ex $ΑΒ$ quam ipsum ex $ΑΓ$ majus



ἐστὶ³ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$. Ἴση δὲ ἔστω $ΑΓ$ τῇ $ΑΞ$. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΞ$ μείζον ἐστὶ⁴ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$. Ἐὰν οὖν τῇ $ΒΓ$ ἴσην τῇ $ΞΡ$ ἀπολάβωμεν, ἴσται τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΞΑ$ μείζον⁵ τῷ ἀπὸ τῆς $ΞΡ$. Ὅπερ προείκειτο⁶ ποιῆσαι.

est ipso ex $ΓΒ$. $ΑΞ$ qualis autem $ΑΓ$ ipsi $ΑΞ$; quare quadratum ex $ΑΒ$ quam ipsum ex $ΑΞ$ majus est ipso ex $ΓΒ$. Si igitur ipsi $ΓΒ$ æqualem sumamus $ΞΡ$, erit quadratum ex $ΑΒ$ quam ipsum ex $ΑΞ$ majus ipso ex $ΞΡ$. Quod susceptum erat facere.

Puisque l'angle $ΑΓΒ$ est compris dans le demi-cercle $ΑΒΓ$, l'angle $ΑΓΒ$ est droit (31. 3); le carré de la droite $ΑΒ$ est donc égal aux carrés des droites $ΑΓ$, $ΓΒ$ (47. 1); le carré de $ΑΒ$ surpasse donc le carré de $ΑΓ$ du carré de $ΓΒ$. Mais $ΑΓ$ est égal à $ΑΞ$; le carré de $ΑΒ$ surpasse donc le carré de $ΑΞ$ du carré de $ΓΒ$; si donc nous faisons la droite $ΞΡ$ égale à la droite $ΓΒ$, le carré de la droite $ΑΒ$ surpassera le carré de la droite $ΑΞ$ du carré de la droite $ΞΡ$; ce que nous voulions faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

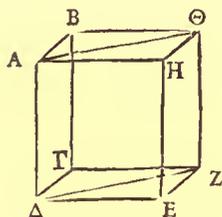
PROPOSITIO XXIV.

Εὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχεται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμα ἐστί.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Si solidum sub parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana et æqualia et parallelogramma sunt.

Solidum enim ΓΔΘΗ sub parallelis planis contineatur ipsis ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ; dico opposita ipsius plana et æqualia et parallelogramma esse.



Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ.

Quoniam enim duo plana parallela ΒΗ, ΓΕ a plauo ΑΓ secantur, communes ipsorum sectiones parallelae sunt; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΔΓ. Rursus, quoniam duo plana parallela ΒΖ, ΑΕ a plano ΑΓ secantur, communes ipsorum sectiones parallelae sunt; parallela igitur est ΒΓ ipsi ΑΔ. Ostensa est autem et ΑΒ ipsi ΔΓ pa.

PROPOSITION XXIV.

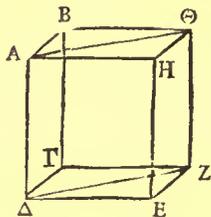
Si un solide est compris sous des plans parallèles, les plans opposés sont des parallélogrammes égaux.

Que le solide ΓΔΘΗ soit compris sous les plans parallèles ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ; je dis que les plans opposés sont des parallélogrammes égaux.

Car puisque les deux plans parallèles ΒΗ, ΓΕ sont coupés par le plan ΑΓ, leurs communes sections sont parallèles (16. 11); la droite ΑΒ est donc parallèle à la droite ΔΓ. De plus, puisque les deux plans parallèles ΒΖ, ΑΕ sont coupés par le plan ΑΓ, leurs communes sections sont parallèles; la droite ΒΓ est donc parallèle

Εδείχθη δὲ καὶ ἡ AB τῆ $\Delta\Gamma$ παράλληλος· πα-
ραλληλόγραμμον ἄρα τὸ $ΑΓ$. Ομοίως δὲ δείξο-
μεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔZ , ZH , HB , BZ , AE
παραλληλόγραμμόν ἐστίν.

parallela; parallelogrammum igitur $ΑΓ$. Simi-
liter utique demonstrabimus et unumquodque
ipsorum ΔZ , ZH , HB , BZ , AE parallelogram-
mum esse.



Επιζεύχθωσαν αἱ $AΘ$, ΔZ . Καὶ ἐπεὶ παράλ-
ληλός ἐστίν ἡ μὲν AB τῆ $\Delta\Gamma$, ἡ δὲ $BΘ$ τῆ ΓZ .
δύο δὴ αἱ AB , $BΘ$ ἀπτόμεται ἀλλήλων παρά²
δύο εὐθείας τὰς $\Delta\Gamma$, ΓZ ἀπτομένας ἀλλήλων
εἶσιν³, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἴσας ἄρα γω-
νίας περιέξουσιν⁴. Ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ABΘ$ γωνία τῆ
ὑπὸ $\Delta\Gamma Z$. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB , $BΘ$ δυσὶ ταῖς
 $\Delta\Gamma$, ΓZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ABΘ$ γωνία
τῆ ὑπὸ $\Delta\Gamma Z$ ἐστίν⁵ ἴση· βᾶσις ἄρα ἡ $AΘ$ βᾶσις
τῆ ΔZ ἐστίν ἴση⁶, καὶ τὸ $ABΘ$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Gamma Z$
τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν $ABΘ$ δι-
πλάσιον τὸ BH παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ
 $\Delta\Gamma Z$ διπλάσιον τὸ ΓE παραλληλόγραμμον· ἴσον

Jungantur ipsæ $AΘ$, ΔZ . Et quoniam paral-
lela est AB quidem ipsi $\Delta\Gamma$, ipsa vero $BΘ$ ipsi
 ΓZ ; duæ utique AB , $BΘ$ sese tangentes duabus
rectis $\Delta\Gamma$, ΓZ sese tangentibus parallelæ sunt,
non in eodem plano; æquales igitur angulos con-
tinebunt; æqualis igitur angulus $ABΘ$ ipsi $\Delta\Gamma Z$.
Et quoniam duæ AB , $BΘ$ duabus $\Delta\Gamma$, ΓZ æquales
sunt, et angulus $ABΘ$ angulo $\Delta\Gamma Z$ est æqualis;
basis igitur $AΘ$ basi ΔZ est æqualis, et $ABΘ$
triangulum triangulo $\Delta\Gamma Z$ æquale est. Atque est
ipsius quidem $ABΘ$ duplum BH parallelogram-
mum, ipsius vero $\Delta\Gamma Z$ duplum ΓE parallelo-
grammum; æquale igitur BH parallelogram-

à la droite $ΑΔ$. Mais l'on a démontré que la droite AB est parallèle à la droite $\Delta\Gamma$; le plan $ΑΓ$ est donc un parallélogramme. Nous démontrerons semblablement que chacun des plans ΔZ , ZH , HB , BZ , AE est un parallélogramme.

Joignons $AΘ$, ΔZ . Puisque AB est parallèle à $\Delta\Gamma$, et $BΘ$ parallèle à ΓZ , les deux droites AB , $BΘ$ qui se rencontrent seront parallèles aux deux droites $\Delta\Gamma$, ΓZ qui se rencontrent, et qui ne sont pas dans le même plan; ces droites comprendront donc des angles égaux (10. 11); l'angle $ABΘ$ est donc égal à l'angle $\Delta\Gamma Z$. Et puisque les deux droites AB , $BΘ$ sont égales aux deux droites $\Delta\Gamma$, ΓZ (34. 1), et que l'angle $ABΘ$ est égal à l'angle $\Delta\Gamma Z$, la base $AΘ$ sera égale à la base ΔZ (4. 1), et le triangle $ABΘ$ égal au triangle $\Delta\Gamma Z$. Mais le parallélogramme BH est double du

ἄρα το ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἴστίιν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεόν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Similiter utique demonstrabimus et ipsum ΑΓ quidem ipsi ΗΖ esse æquale, ipsum vero ΑΕ ipsi ΒΖ.

Si igitur solidum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

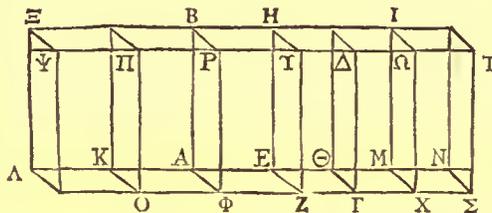
PROPOSITIO XXV.

Ἐὰν στερεόν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῆ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βᾶσις πρὸς τὴν βᾶσιν αὐτως τὸ στερεόν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεόν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βᾶσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βᾶσιν αὐτως τὸ ΑΒΖΥ στερεόν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.

Si solidum parallelepipedum a plano secetur parallelo existente oppositis planis, erit ut basis ad basim ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum ΑΒΓΔ a plano ΖΗ secetur parallelo existente oppositis planis ΡΑ, ΔΘ; dico esse ut basis ΑΕΖΦ ad basim ΕΘΓΖ ita ΑΒΖΥ solidum ad ΕΗΓΔ solidum.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁμοιωποῦναι

Producatur enim ΑΘ ex utraque parte, et ponantur ipsi quidem ΑΕ æquales quot-

triangle ΑΒΘ, et le parallélogramme ΓΕ double aussi du triangle ΔΓΖ (54. 1); le parallélogramme ΒΗ est donc égal au parallélogramme ΓΕ. Nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΑΓ est égal au parallélogramme ΗΖ, et le parallélogramme ΑΕ égal au parallélogramme ΒΖ. Donc si, etc.

PROPOSITION XXV.

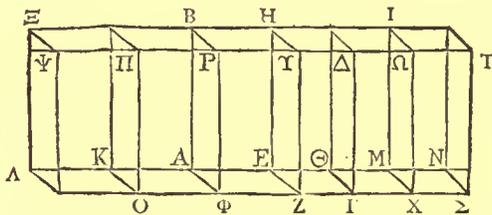
Si un parallélépipède est coupé par un plan parallèle à des plans opposés, la base sera à la base comme un solide est à un solide.

Que le parallélépipède ΑΒΓΔ soit coupé par un plan ΖΗ parallèle aux plans opposés ΡΑ, ΔΘ; je dis que la base ΑΕΖΦ est à la base ΕΘΓΖ comme le solide ΑΒΖΥ est au solide ΕΗΓΔ.

Car prolongeons de part et d'autre la droite ΑΘ, prenons autant de droites

AK, KA, τῆ δὲ ΕΘ ἴσαι ὅσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ, MN¹, καὶ συμπληρώσθω² τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ΔΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΚ, ΚΑ, ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶν³ ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΑΠ, ΚΡ, ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν⁴ ἴσα. Ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς

cunquæ AK, KA, ipsi vero ΕΘ æquales quotcunquæ ΘΜ, MN, et compleantur ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ parallelogramma, et ΔΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ solida. Et quoniam æquales sunt ΑΚ, ΚΑ, ΑΕ rectæ inter se, æqualia sunt et quidem ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ parallelogramma inter se, ipsa vero ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ inter se, et adhuc ipsa ΔΨ, ΚΠ, ΑΡ inter se; opposita enim. Propter eadem utique et ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ parallelogramma æqualia sunt quidem inter se, ipsa vero ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ æqualia sunt inter se, et adhuc ipsa ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ; tria igitur plana solidorum ΑΠ, ΚΡ, ΑΥ tribus planis sunt æqualia. Sed tria tribus oppositis



ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΔΠ, ΚΡ, ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν⁵. ὅσαπλασιῶν ἄρα ἐστὶν⁶ ἡ ΑΖ

sunt æqualia; tria igitur solida ΔΠ, ΚΡ, ΑΥ æqualia inter se sunt. Propter eadem utique et tria solida ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ æqualia inter se sunt; quotuplex igitur est basis ΑΖ ipsius ΑΖ basis

qu'on voudra AK, KA égales chacune à la droite AE; prenons aussi autant de droites qu'on voudra ΘΜ, MN égales chacune à la droite ΕΘ, et achevons les parallélogrammes ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ, et les parallélépipèdes ΔΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ. Puisque les droites ΑΚ, ΚΑ, ΑΕ sont égales entr'elles, les parallélogrammes ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ seront égaux entr'eux ainsi que les parallélogrammes ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ (38. 1); les parallélogrammes ΔΨ, ΚΠ, ΑΡ seront aussi égaux entr'eux (24. 11), parce que ces parallélogrammes sont opposés. Les parallélogrammes ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ sont égaux entr'eux par la même raison, ainsi que les parallélogrammes ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ, et les parallélogrammes ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ; trois plans des solides ΔΠ, ΚΡ, ΑΥ sont donc égaux à trois plans. Mais ces trois plans sont égaux aux trois plans opposés; les trois parallélépipèdes ΔΠ, ΚΡ, ΑΥ sont donc égaux entr'eux (déf. 10. 11). Les trois parallélépipèdes ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ sont égaux entr'eux, par la même raison; la base ΑΖ est

βάσις τῆς AZ βάσεως τοσαυταπλάσιον ἔστι καὶ τὸ AY στερεὸν τοῦ AY στερεοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσαπλάσιον ἔστιν ἡ NZ βάσις τῆς ZΘ βάσεως τοσαυταπλάσιον ἔστι καὶ τὸ NY στερεὸν τοῦ OY στερεοῦ. Καὶ εἰ ἴση ἔστιν ἡ AZ βάσις τῆς NZ βάσει ἴσον ἔστι καὶ τὸ AY στερεὸν τῷ NY στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ AZ βάσις τῆς NZ βάσεως ὑπερέχει καὶ τὸ AY στερεὸν τοῦ NY στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν AZ, ZΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν AY, YO, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν AZ βάσεως καὶ τοῦ AY στερεοῦ, ἢτε AZ βάσις καὶ τὸ AY στερεὸν, τῆς δὲ OZ βάσεως καὶ τοῦ OY στερεοῦ, ἢτε NZ βάσις καὶ τὸ NY στερεόν· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ AZ βάσις τῆς NZ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ AY στερεὸν τοῦ NY στερεοῦ^δ· καὶ εἰ ἴσηθ, ἴσον· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ βάσις πρὸς τὴν ZΘ βάσιν οὕτως τὸ AY στερεὸν πρὸς τὸ YO στερεόν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

totuplex est et AY solidum solidi AY. Propter eadem utique quotuplex est basis NZ ipsius ZO basis totuplex est et solidum NY solidi OY. Et si æqualis est basis AZ basi NZ æquale est et solidum AY solido NY, et si superat basis AZ basim NZ superat et solidum AY solidum NY; et si minor, minus; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem basibus AZ, ZO, duobus vero solidis AY, YO, sumpta sunt æqualiter multiplicia basis quidem AZ et solidi AY, et basis AZ et solidum AY, basis vero OZ et solidi OY, et basis NZ et solidum NY; et demonstratum est si superat basis AZ basim NZ, superare et solidum AY solidum NY; et si æqualis, æquale, et si deficit, deficere; est igitur ut AZ basis ad basim ZO ita AY solidum ad solidum YO. Quod oportebat ostendere.

donc le même multiple de la base AZ, que le parallélépipède AY l'est du parallélépipède AY. Par la même raison la base NZ est le même multiple de la base ZO que le parallélépipède NY l'est du parallélépipède OY. Si donc la base AZ est égale à la base NZ, le parallélépipède AY sera égal au parallélépipède NY; si la base AZ surpasse la base NZ, le parallélépipède AY surpassera le parallélépipède NY, et si la base AZ est plus petite que la base NZ, le parallélépipède AY sera plus petit que le parallélépipède NY. Ayant donc quatre grandeurs, les deux bases AZ, ZO et les deux parallélépipèdes AY, YO, et l'on a pris des équimultiples de la base AZ et du parallélépipède AY, savoir, la base AZ et le parallélépipède AY; on a pris aussi des équimultiples de la base OZ et du parallélépipède OY, savoir, la base NZ et le parallélépipède NY; et l'on a démontré que si la base AZ surpasse la base NZ, le parallélépipède AY surpasse le parallélépipède NY; que si la base AZ est égale à la base NZ, le parallélépipède AY est égal au parallélépipède NY, et que si la base AZ est plus petite que la base NZ, le parallélépipède AY est plus petit que le parallélépipède NY; la base AZ est donc à la base ZO comme le parallélépipède AY est au parallélépipède YO (déf. 6. 5). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Πρὸς τῆ δὸθεΐσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῆ σημείῳ τῆ δὸθεΐσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσῃν στερεᾷν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δὸθεΐσα¹ ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῆ² σημείον τὸ A , ἡ δὲ δὸθεΐσα στερεᾷ γωνίᾳ ἡ πρὸς τὸ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν³ $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὲ πρὸς τῆ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῆ σημείῳ τῷ A τῆ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσῃν στερεᾷν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔZ τυχὸν σημείον τὸ Z , καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ZH , καὶ συμβαλλέτω τῷ⁵ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ H , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔH , καὶ συνεστάτω πρὸς τῆ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῆ σημείῳ τῷ A τῆ μὲν ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ γωνίᾳ ἴσῃ ἢ ὑπὸ BAA , τῆ δὲ ὑπὸ $E\Delta H$ ἴσῃ ἢ ὑπὸ BAK , καὶ κείσθω τῆ ΔH ἴσῃ ἡ AK , καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ K σημείου τῷ διὰ τῶν BA , AA ἐπιπέδῳ πρὸς ἰρθὰς ἡ $K\Theta$, καὶ κείσθω ἴσῃ τῆ HZ ἡ $K\Theta$, καὶ

PROPOSITIO XXVI.

Ad datam rectam lineam et ad datum in ipsâ punctum dato solido angulo æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem AB , datum vero in ipsâ punctum A , datus autem solidus angulus ad Δ contentus sub $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ angulis planis; oportet utique ad rectam AB et ad punctum in ipsâ A solido angulo ad Δ æqualem solidum angulum constituere.

Sumatur enim in ipsâ ΔZ quodlibet punctum Z , et ducatur a puncto Z ad planum per $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ perpendicularis ZH , et occurrat plano in H puncto, et jungatur ipsa ΔH , et constituatur ad rectam AB et ad punctum A in ipsâ angulo quidem $E\Delta\Gamma$ æqualis BAA , angulo autem $E\Delta H$ æqualis BAK , et ponatur ipsi ΔH æqualis AK , et crigatur a puncto K plano per BA , AA ad rectos ipsa $K\Theta$, et ponatur æqualis ipsi HZ ipsa

PROPOSITION XXVI.

Sur une droite donnée et à un point donné de cette droite, construire un angle solide égal à un angle solide donné.

Soit AB la droite donnée, A le point donné de cette droite, et que l'angle solide Δ compris sous les angles plans $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ soit l'angle solide donné; il faut sur la droite donnée AB , et au point A donné dans cette droite construire un angle solide égal à l'angle solide donné Δ .

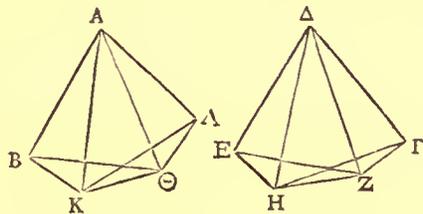
Car prenons dans la droite ΔZ un point quelconque Z ; du point Z menons une perpendiculaire ZH au plan des droites $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ (11. 11); que cette perpendiculaire rencontre ce plan au point H ; joignons ΔH . Sur la droite AB et au point A de cette droite construisons l'angle BAA égal à l'angle $E\Delta\Gamma$ (23. 1), et l'angle BAK égal à l'angle $E\Delta H$; faisons AK égal à ΔH (3. 1); du point K menons $K\Theta$ perpendiculaire au plan des droites BA , AA (12. 11); faisons $K\Theta$ égal à HZ , et joignons ΘA ; je dis que

ἐπιζεύχθω ἡ ΘA . λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ A στερεᾷ
γωνία περιεχομένη⁶ ὑπὸ τῶν BAA , $BA\Theta$, ΘAA
γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ
τῇ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ γω-
νιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ AB , ΔE , καὶ
ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΘB , KB , ZE , HE . Καὶ ἐπεὶ
ἡ ZH ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον,

$K\Theta$, et jungatur ipsa ΘA ; dico ad A angulum
solidum comprehensum sub BAA , $BA\Theta$, ΘAA
angulis æqualem esse ad Δ solido angulo com-
prehensio sub angulis $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$.

Sumantur enim æquales AB , ΔE , et jun-
gantur ipsæ ΘB , KB , ZE , HE . Et quoniam ZH
perpendicularis est ad subjectum planum, et



καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομέϊας αὐτῆς
εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκείμενῳ ἐπίπεδῳ ὀρθὰς
ποιήσει γωνίας ὀρθὰς ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν
ὑπὸ $ZH\Delta$, ZHE γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ
ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΘKA , ΘKB γωνιῶν ὀρθὴ ἐστὶ.
Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA , AB δυσὶ⁸ ταῖς $H\Delta$, ΔE ἴσαι
εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνίας ἴσας περιέ-
χουσι· βάσις ἄρα ἡ KB βάσει τῇ EH ἴση ἐστίν.
Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $K\Theta$ τῇ HZ ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς

ad omnes igitur contingentes ipsam et exis-
tentes in subjecto plano rectos faciet angulos;
rectus igitur uterque angulorum $ZH\Delta$, ZHE .
Propter eadem utique et uterque angulorum
 ΘKA , ΘKB rectus est. Et quoniam duæ KA ,
 AB duabus $H\Delta$, ΔE æquales sunt utraque
utrique, et angulos æquales continent; basis
igitur BK basi EH æqualis est. Est autem et
 $K\Theta$ ipsi HZ æqualis, et angulos rectos con-

l'anglẽ solide A , compris sous les angles BAA , $BA\Theta$, ΘAA , est égal à l'angle solide
 Δ , compris sous les angles $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$.

Car prenons les droites égales AB , ΔE , et joignons ΘB , KB , ZE , HE . Puisque la
droite ZH est perpendiculaire au plan inférieur, cette droite fera des angles droits
avec toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans le plan inférieur (déf. 3. 11);
chacun des angles $ZH\Delta$, ZHE est donc droit. Par la même raison, chacun des angles
 ΘKA , ΘKB est droit. Et puisque les deux droites KA , AB sont égales aux deux
droites $H\Delta$, ΔE , chacune à chacune, et que ces droites comprennent des angles
égaux, la base BK sera égale à la base EH (4. 1). Mais la droite $K\Theta$ est égale à la

περιέχουσιν ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘB τῇ ZE . Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ AK , $K\Theta$ δυσὶ ταῖς ΔH , HZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ $A\Theta$ βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση· δύο δὲ αἱ ΘA , AB δυσὶ ταῖς ΔZ , ΔE ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΘB βάσει τῇ ZE ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $BA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\Theta A\Lambda$ τῇ ὑπὸ $Z\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση¹⁰. ἐπειδὴ περὶ ἀπολάζωμεν ἴσας τὰς $A\Lambda$, $\Delta\Gamma$, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς $K\Lambda$, $\Theta\Lambda$, $H\Gamma$, $Z\Gamma$, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ BAA ὅλη τῇ ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ $E\Delta H$ ὑπόκειται ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ KAA λοιπῇ τῇ ὑπὸ $H\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA , $A\Lambda$ δυσὶ¹¹ ταῖς $H\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ $K\Lambda$ βάσει τῇ $H\Gamma$ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ $K\Theta$ τῇ HZ ἴση· δύο δὲ αἱ AK , $K\Theta$ δυσὶ ταῖς ΓH , HZ εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ $\Theta\Lambda$ βάσει τῇ $Z\Gamma$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘA , $A\Lambda$ δυσὶ ταῖς $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$, εἰσὶ ἴσαι¹², καὶ βάσις ἡ $\Theta\Lambda$ βάσει

tinent; æqualis igitur et ΘB ipsi ZE . Rursus quoniam duæ AK , $K\Theta$ duabus ΔH , HZ æquales sunt, et angulos rectos continent; basis igitur $A\Theta$ basi ΔZ æqualis est. Est autem et AB ipsi ΔE æqualis; duæ igitur ΘA , AB duabus ΔZ , ΔE æquales sunt, et basis ΘB basi ZE æqualis; angulus igitur $BA\Theta$ angulo $E\Delta Z$ est æqualis. Propter eadem utique et $\Theta A\Lambda$ angulo $Z\Delta\Gamma$ est æqualis; quoniam si assumamus æquales $A\Lambda$, $\Delta\Gamma$, et jungamus ipsas $K\Lambda$, $\Theta\Lambda$, $H\Gamma$, $Z\Gamma$, quoniam totus BAA toti $E\Delta\Gamma$ æqualis est, quorum angulus BAK angulo $E\Delta H$ supponitur æqualis; reliquus igitur KAA reliquo $H\Delta\Gamma$ est æqualis. Et quoniam duæ KA , $A\Lambda$ duabus $H\Delta$, $\Delta\Gamma$ æquales sunt, et angulos æquales continent; basis igitur $K\Lambda$ basi $H\Gamma$ est æqualis. Est autem et $K\Theta$ ipsi HZ æqualis; duæ igitur AK , $K\Theta$ duabus ΓH , HZ sunt æquales, et angulos rectos continent; basis igitur $\Theta\Lambda$ basi $Z\Gamma$ est æqualis. Et quoniam duæ ΘA , $A\Lambda$ duabus $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$ sunt æquales, et basis $\Theta\Lambda$ basi $Z\Gamma$ est

droite HZ , et ces droites comprennent des angles droits; la droite ΘB est donc égale à la droite ZE . De plus, puisque les deux droites AK , $K\Theta$ sont égales aux deux droites ΔH , HZ , et que ces droites comprennent des angles droits, la base $A\Theta$ est égale à la base ΔZ . Mais AB est égal à ΔE ; les deux droites ΘA , AB sont donc égales aux deux droites ΔZ , ΔE ; mais la base ΘB est égale à la base ZE ; l'angle $BA\Theta$ est donc égal à l'angle $E\Delta Z$. Par la même raison, l'angle $\Theta A\Lambda$ est égal à l'angle $Z\Delta\Gamma$; car si nous prenons les droites égales $A\Lambda$, $\Delta\Gamma$, et si nous joignons $K\Lambda$, $\Theta\Lambda$, $H\Gamma$, $Z\Gamma$, à cause que l'angle entier BAA est égal à l'angle entier $E\Delta\Gamma$, et que l'angle BAK est égal à l'angle $E\Delta H$, l'angle restant KAA sera égal à l'angle restant $H\Delta\Gamma$. Et puisque les deux droites KA , $A\Lambda$ sont égales aux deux droites $H\Delta$, $\Delta\Gamma$, et qu'elles comprennent des angles égaux, la base $K\Lambda$ sera égale à la base $H\Gamma$ (41. 1). Mais $K\Theta$ est égal à HZ ; les deux droites AK , $K\Theta$ sont donc égales aux deux droites ΓH , HZ ; mais ces deux droites renferment des angles droits; la base $\Theta\Lambda$ est donc égale à la base $Z\Gamma$. Et puisque les deux droites ΘA , $A\Lambda$ sont égales aux deux droites

τῆ ΖΓ ἴστίη ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΑ γωνία τῆ ὑπὸ ΖΔΓ ἴστίη ἴση. Ἐστίη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΑ τῆ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῆ δοθείση εὐθεία τῆ ΑΒ³ καὶ τῶ πρὸς αὐτῆ σημεῖω τῶ Α⁴ δοθείση στερεῶ γωνία τῆ πρὸς τῶ Δ ἴση¹⁵ συνίσταται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

æqualis; angulus igitur ΘΑΑ angulo ΖΔΓ est æqualis. Est autem et angulus ΒΑΑ angulo ΕΔΓ æqualis.

Ad datam igitur reetam ΑΒ et ad datum punctum Α in ipsâ dato solido angulo ad Δ æqualis constitutus est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

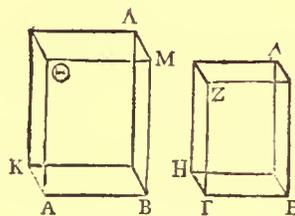
Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῶ δοθέντι στερεῶ παραλληλεπίπεδω ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθέν

PROPOSITIO XXVII.

Α datâ reetâ dato solido parallelepipedo et simile et similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit data quidem recta ΑΒ, datum vero so-



στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΔΓ· δεῖ δὲ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῶ δοθέντι στερεῶ παραλληλεπίπεδω τῶ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

lidum parallelepipedum ΔΓ; oportet utique a datâ reetâ ΑΒ dato solido parallelepipedo ΓΔ et simile et similiter positum solidum parallelepipedum describere.

ΖΔ, ΔΓ, et que la base ΘΑ est égale à la base ΖΓ, l'angle ΘΑΑ sera égal à l'angle ΖΔΓ (8. 1). Mais l'angle ΒΑΑ est égal à l'angle ΕΔΓ.

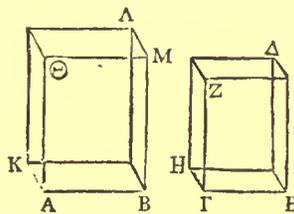
Sur une droite donnée et au point Α de cette droite, on a donc construit un angle solide égal à un angle solide donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVII.

Sur une droite donnée décrire un parallélépipède semblable à un parallélépipède donné, et semblablement placé.

Soit ΑΒ la droite donnée, et ΔΓ le parallélépipède donné; il faut décrire sur la droite ΑΒ un parallélépipède semblable au parallélépipède donné ΔΓ, et semblablement placé.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνία ἴση, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν BAΘ, ΘAK, KAB, ὥστε ἴσων εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ BAΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ EZZ, τὴν δὲ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ EGH, τὴν δὲ ὑπὸ KAΘ τῇ ὑπὸ HΓZ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἢ EG πρὸς τὴν ΓH οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AK, ὡς δὲ ἢ HG πρὸς τὴν ΓZ οὕτως ἢ KA πρὸς τὴν AΘ· καὶ² δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ GE πρὸς τὴν ZΓ οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AΘ. Καὶ συμπληρώσω τὸ BΘ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ AΛ στερεόν.



Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ EG πρὸς τὴν ΓH οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AK, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ EGH, BAK αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι· ὁμοίον ἄρα ἐστὶ³ τὸ HE παραλληλόγραμμον τῷ KB παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ

Et quoniam est ut EG ad GH ita BA ad AK, et circa æquales angulos EGH, BAK latera proportionalia sunt; simile igitur est parallelogrammum HE parallelogrammo KB. Propter

Car sur la droite AB, et au point A de cette droite construisons un angle solide qui, étant compris sous les angles BAΘ, ΘAK, KAB, soit égal à l'angle solide Γ, de manière que l'angle BAΘ soit égal à l'angle EZZ, l'angle BAK égal à l'angle EGH, et l'angle KAΘ égal à l'angle HΓZ, et faisons en sorte que EG soit à GH comme BA est à AK, et que HG soit à ΓZ comme KA est à AΘ (12. 6); par égalité GE sera à ΓZ comme BA est à AΘ (25. 5); achevons le parallélogramme BΘ et le parallépipède AΛ.

Puisque EG est à GH comme BA est à AK, les côtés qui sont autour des angles égaux EGH, BAK seront proportionnels; le parallélogramme HE est donc semblable au parallélogramme KB (4. 6). Par la même raison, le parallélogramme KΘ est

τὸ μὲν $\kappa\theta$ παραλληλόγραμμον τῶ HZ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστὶ, καὶ ἔτι τὸ ZE τῶ θB τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ $\Gamma\Delta$ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ AA στερεοῦ ὁμοιά ἐστίν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὁμοία, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα⁴ τέ ἐστὶ καὶ ὁμοία· ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν ὅλον τῶ AA στερεοῦ ὁμοίον ἐστίν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα⁵ εὐθείας τῆς AB τῶ δοθέντι στερεῶ παραλληλεπιπέδῳ τῶ $\Gamma\Delta$ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ AA . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

eadem utique et quidem parallelogrammum $\kappa\theta$ parallelogrammo HZ simile est, et adhuc ipsum ZE ipsi θB ; tria igitur parallelogramma solidi $\Gamma\Delta$ tribus parallelogrammis solidi AA similia sunt. Sed tria quidem tribus oppositis æqualia et sunt et similia, tria vero tribus oppositis et æqualia sunt et similia; totum igitur $\Gamma\Delta$ solidum toti solido AA simile est.

A datâ igitur rectâ AB dato solido parallelepipedo $\Gamma\Delta$ et simile et similiter positum descriptum est ipsum AA . Quod oportebat facere.

semblable au parallélogramme HZ , et le parallélogramme ZE semblable au parallélogramme θB ; trois parallélogrammes du parallélépipède $\Gamma\Delta$ sont donc semblables à trois parallélogrammes du parallélépipède AA . Mais les trois premiers parallélogrammes sont égaux et semblables aux trois parallélogrammes opposés, et les trois derniers parallélogrammes sont aussi égaux et semblables aux trois parallélogrammes opposés (24. 1). Le parallélépipède entier $\Gamma\Delta$ est donc semblable au parallélépipède entier AA .

Sur la droite donnée AB , on a donc construit un parallélépipède AA semblable à un parallélépipède donné $\Gamma\Delta$ et semblablement placé. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

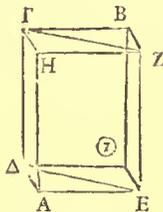
PROPOSITIO XXVIII.

Ἐάν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῆῖ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ AB ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους¹ τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ. λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ AB στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

Si solidum parallelepipedum a plano secetur per diagonales oppositorum planorum, bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

Solidum enim parallelepipedum AB a plano ΓΔΕΖ. secetur per diagonales ΓΖ, ΔΕ oppositorum planorum; dico bifariam secari solidum AB a plano ΓΔΕΖ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἴσσι δὲ καὶ² τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον, ἀπεναντίον γάρ, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγῶνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλο-

Quoniam enim æquale est quidem ΓΗΖ triangulum triangulo ΓΖΒ, ipsum vero ΑΔΕ ipsi ΔΕΘ, sed est et quidem ΓΑ parallelogrammum ipsi ΕΒ æquale, oppositum enim, ipsum vero ΗΕ ipsi ΓΘ; et prisma igitur contentum quidem sub duobus triangulis ΓΗΖ, ΑΔΕ,

PROPOSITION XXVIII.

Si un parallélépipède est coupé par un plan selon les diagonales de deux plans opposés, le parallélépipède sera coupé en deux parties égales par ce plan.

Que le parallélépipède AB soit coupé par le plan ΓΔΕΖ selon les diagonales des deux plans opposés ΓΖ, ΔΕ; je dis que le parallélépipède AB sera coupé en deux parties égales par le plan ΓΔΕΖ.

Car puisque le triangle ΓΗΖ est égal au triangle ΓΖΒ (34. 1), et le triangle ΑΔΕ égal au triangle ΔΕΘ, et que de plus le parallélogramme ΓΑ est égal au parallélogramme ΕΒ (24. 11), car ces deux parallélogrammes sont opposés, et que le parallélogramme ΗΕ est aussi égal au parallélogramme ΓΘ, le prisme compris sous les deux triangles ΓΗΖ, ΑΔΕ, et sous les trois parallélogrammes ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ, sera

γραμμῶν τῶν HE, AG, GE ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγῶνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε³ πλίθει καὶ τῷ μεγέθει· ὥστε ὅλον τὸ AB στερεὸν δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tribus vero parallelogrammis HE, AG, GE æqualis est prismati contento sub duobus triangulis ΓΖΒ, ΔΕΘ, tribus vero parallelogrammis ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, namque sub æqualibus planis continentur et multitudine et magnitudine; ergo totum AB solidum bifariam secatur a plano ΓΔΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXIX.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

In eadem basi existentia solida parallelepipeda et eadem altitudine, quorum insistentes ipsæ in eisdem sunt rectis, æqualia inter se sunt.

Ἐστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς AB στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα¹, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΑΜ, ΑΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἕστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda ΓΜ, ΓΝ eadem altitudine existentia, quorum insistentes ipsæ ΑΗ, ΑΖ, ΑΜ, ΑΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ in eisdem sint rectis ΖΝ, ΔΚ; dico æquale esse ΓΜ solidum solido ΓΝ.

égal au prisme compris sous les deux triangles ΓΖΒ, ΔΕΘ, et sous les trois parallélogrammes ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, car ils sont compris sous des plans égaux en nombre et en grandeur (déf. 10. 11); le parallélépipède entier AB est donc coupé en deux parties égales par le plan ΓΔΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

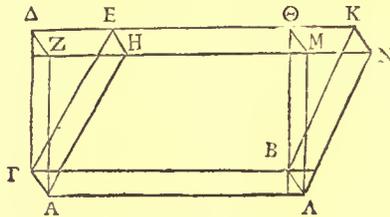
PROPOSITION XXIX.

Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les côtés sont placés dans les mêmes droites, sont égaux entr'eux.

Que les parallélépipèdes ΓΜ, ΓΝ aient la même base AB et la même hauteur, et que les côtés ΑΗ, ΑΖ, ΑΜ, ΑΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ soient dans les mêmes droites ΖΝ, ΔΚ; je dis que le parallélépipède ΓΜ est égal au parallélépipède ΓΝ.

Ἐπιὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἔστιν ἐκάτερον τῶν $\Gamma\Theta$, ΓK , ἴση ἔστιν ἡ ΓB ἐκατέρα τῶν $\Delta\Theta$, EK ὥστε καὶ ἡ $\Delta\Theta$ τῆ EK ἔστιν ἴση. Κοινὴ ἀφῆρῖσθω ἡ $\text{E}\Theta$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ΔE λοιπῆ τῆ ΘK ἔστιν ἴση ὥστε καὶ τὸ μὲν $\Delta\text{E}\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΘKB τριγώνῳ ἴσον ἔστι, τὸ δὲ ΔH παραλληλόγραμμον τῷ ΘN παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ZAH τρίγωνον τῷ MAN τριγώνῳ ἴσον ἔστιν. Ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓZ παραλληλόγραμμον τῷ BM παραλλη-

Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum $\Gamma\Theta$, ΓK , æqualis est ΓB utrique ipsarum $\Delta\Theta$, EK ; quare et $\Delta\Theta$ ipsi EK est æqualis. Communis auferatur $\text{E}\Theta$; reliqua igitur ΔE reliquæ ΘK est æqualis; quare et quidem $\Delta\text{E}\Gamma$ triangulum triangulo ΘKB æquale est, sed parallelogrammum ΔH parallelogrammo ΘN . Propter eadem utique et ZAH triangulum triangulo MAN æquale est. Sed est et quidem ΓZ parallelogram-



λογογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓH τῷ BN , ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν AZH , $\Gamma\Delta\text{E}$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν AD , ΔH , HG ἴσον ἔστι τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν MAN , ΘBK , τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν BM , ΘN , NB . Κοινὸν προσκείσθω

mum parallelogrammo BM æquale, ipsum vero ΓH ipsi BN , oppositum enim; et prisma igitur contentum quidem sub duobus triangulis AZH , $\Gamma\Delta\text{E}$, tribus vero parallelogrammis AD , ΔH , HG , æquale est prismati contento quidem sub duobus angulis MAN , ΘBK , tribus vero parallelogrammis BM , ΘN , BN . Commune apponatur solidum, cujus basis quidem AB paral-

Car puisque chacune des figures $\Gamma\Theta$, ΓK est un parallélogramme, la droite ΓB est égale à chacune des droites $\Delta\Theta$, EK (34. 1); la droite $\Delta\Theta$ est donc égale à la droite EK . Retranchons la partie commune $\text{E}\Theta$, la droite restante ΔE sera égale à la droite restante ΘK ; le triangle $\Delta\text{E}\Gamma$ est donc égal au triangle ΘKB (8. 1), et le parallélogramme ΔH égal au parallélogramme ΘN (36. 1). Par la même raison le triangle ZAH est égal au triangle MAN . Mais le parallélogramme AZ est égal au parallélogramme BM , et le parallélogramme GH égal au parallélogramme BN (24. 11), car ces parallélogrammes sont opposés; le prisme contenu sous les deux triangles AZH , $\Gamma\Delta\text{E}$, et sous les trois parallélogrammes AD , ΔH , HG est donc égal au prisme contenu sous les deux triangles MAN , ΘBK , et sous les trois parallélogrammes BM , ΘN , BN (déf. 10. 11). Ajoutons le solide commun, dont une des bases est le parallé-

τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ AB παραλληλό-
 γραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ HEΘM· ὅλον
 ἄρα τὸ ΓM στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἕλω τῶ
 ΓN στερεῶ παραλληλεπίπεδῶ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἐξῆς.

leloegrammum, oppositum vero HEΘM; totum
 igitur ΓM solidum parallelepipedum toti ΓN
 solido parallelepipedo æquale est.

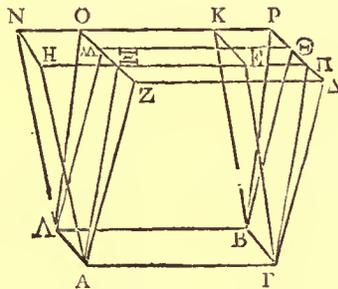
In eadem igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλ-
 ληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφε-
 στῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα
 ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXX.

In eadem basi existentia solida parallelepi-
 peda et eadem altitudine, quorum ipsæ insis-
 tentes non sunt in eisdem rectis, æqualia inte-
 se sunt.



Ἐστω γάρ ἐπὶ αὐτῆς βάσεως τῆς AB στερεὰ
 παραλληλεπίπεδα τὰ ΓM, ΓN, καὶ ὑπὸ τὸ
 αὐτὸ ὕψος, ὧν ἐφεστῶσαι³ αἱ AZ, AH, AM, AN,
 ΓΔ, ΓE, BΘ, BK μὴ ἕστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν
 εὐθειῶν· λέγω ὅτι ἴσον ἐστί τὸ ΓM στερεὸν τῶ ΓN
 στερεῶ.

Sint enim in eadem basi AB solida paralle-
 lepieda ΓM, ΓN, et eadem altitudine, quorum
 ipsæ insistentes AZ, AH, AM, AN, ΓΔ, ΓE,
 BΘ, BK non sint in eisdem rectis; dico æquale
 esse ΓM solidum solido ΓN.

logramme AB, et dont la base opposée est le parallélogramme HEΘM, le parallélé-
 pipède entier ΓM sera égal au parallélépipède entier ΓN. Donc, etc.

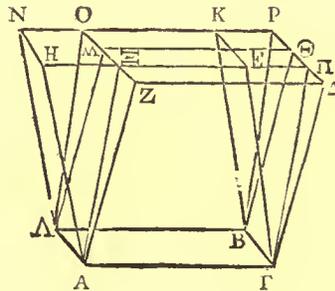
PROPOSITION XXX.

Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les
 côtés ne sont point placés dans les mêmes droites, sont égaux entr'eux.

Soient ΓM, ΓN des parallélépipèdes qui ont la même base AB et la même hau-
 teur, et dont les côtés AZ, AH, AM, AN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK ne sont point placés dans
 les mêmes droites; je dis que le parallélépipède ΓM est égal au parallélépi-
 pède ΓN.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ NK , $\Delta\Theta$, καὶ συμπιπτεύωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ P^5 , καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ZM , HE ἐπὶ τὰ O , Π , καὶ⁶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ⁷ $AΞ$, ΛO , $\Gamma\Pi$, BP . Ἴσον δὴ ἔστι ΓM στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ $A\Gamma B\Lambda$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $Z\Delta\Theta M$ τῷ ΓO στερεῶ, οὗ βάσις μὲν τὸ $A\Gamma B\Lambda$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Xi\Pi P O$, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς $A\Gamma B\Lambda$, ὧν αἱ ἐφιστῶσαι⁸ αἱ AZ , $AΞ$, ΛM , ΛO , $\Gamma\Delta$, ΓE , $B\Theta$, BP ἐπὶ τῶν

Produceantur enim ipsæ NK , $\Delta\Theta$, et convenient inter se in puncto P , et adhuc produceantur ipsæ ZM , HE in ipsis O , Π , et jungantur $AΞ$, ΛO , $\Gamma\Pi$, BP . Æquale utique est ΓM solidum, cujus basis quidem $A\Gamma B\Lambda$ parallelogrammum, oppositum vero $Z\Delta\Theta M$ solido ΓO , cujus basis quidem $A\Gamma B\Lambda$ parallelogrammum, oppositum vero $\Xi\Pi P O$, etenim in eadem sunt basi $A\Gamma B\Lambda$, et quorum insistentes ipsæ AZ , $AΞ$, ΛM , ΛO , $\Gamma\Delta$, ΓE , $B\Theta$, BP in eisdem



αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ZO , ΔP . Ἀλλὰ τὸ ΓO στερεὸν, οὗ βάσις μὲν ἔστι⁹ τὸ $A\Gamma B\Lambda$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Xi\Pi P O$, ἴσον ἔστι τῷ ΓN στερεῶ, οὗ βάσις μὲν¹⁰ τὸ $A\Gamma B\Lambda$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $HEKN$, ἐπὶ τε γὰρ πάλιν¹¹ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς $AB\Gamma\Delta$,

sunt rectis ZO , ΔP . Sed solidum ΓO , cujus basis quidem est $A\Gamma B\Lambda$ parallelogrammum, oppositum vero $\Xi\Pi P O$, æquale est solido ΓN , cujus basis quidem $A\Gamma B\Lambda$ parallelogrammum, oppositum vero $HEKN$, etenim in eadem sunt basi $AB\Gamma\Delta$, quorum insistentes ipsæ AH , $AΞ$,

Car prolongeons NK , $\Delta\Theta$, et que ces droites se rencontrent au point P ; prolongeons aussi les droites ZM , HE vers les points O , Π , et joignons $AΞ$, ΛO , $\Gamma\Pi$, BP . Le parallélépipède ΓM , dont la base est le parallélogramme $A\Gamma B\Lambda$ opposé au parallélogramme $Z\Delta\Theta M$, sera égal au parallélépipède ΓO , dont la base est le parallélogramme $A\Gamma B\Lambda$ opposé au parallélogramme $\Xi\Pi P O$ (29. 11), car ces deux parallélogrammes ont la même base $AB\Gamma\Delta$, et leurs côtés AZ , $AΞ$, ΛM , ΛO , $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Pi$, $B\Theta$, BP sont dans les mêmes droites ZO , ΔP . Mais le parallélépipède ΓO dont la base est le parallélogramme $A\Gamma B\Lambda$ opposé au parallélogramme $\Xi\Pi P O$ est égal au parallélépipède ΓN dont la base est le parallélogramme $A\Gamma B\Lambda$ opposé au parallélogramme $HEKN$ (29. 11); car ces deux parallélépipèdes ont la même base $AB\Gamma\Delta$, et leurs côtés AH , $AΞ$, ΓE , $\Gamma\Pi$, ΛN , ΛO , BK , BP sont dans les

ὧν αἰ ἐφεστῶσαι αἰ¹² AH, ΛΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΑΝ, ΑΟ, ΒΚ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν¹³ ΗΠ, ΝΡ· ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῶ.

Τὰ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἐξῆς.

GE, GP, AN, AO, BK, BR in eisdem sunt rectis HP, NP; quare et solidum GM æquale est solido GN.

In eadem igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ.

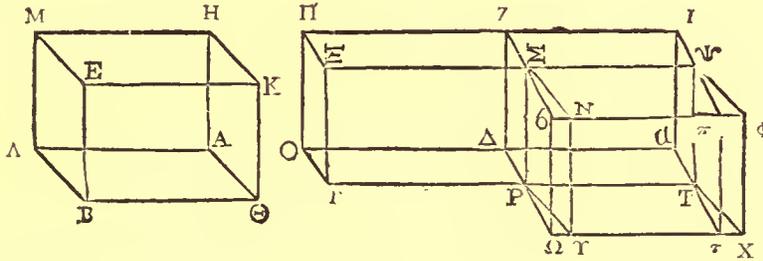
Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν AB, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ, καὶ ἰπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῶ.

PROPOSITIO XXXI.

Solida in æqualibus basibus existentia parallelepida et eadem altitudine æqualia inter se sunt.

Sint in æqualibus basibus AB, ΓΔ solida parallelepida AE, ΓZ, et in eadem altitudine; dico æquale esse solidum AE solido ΓZ.



Ἐστωσαν δὴ πρότερον αἰ ἐφεστηκυῖαι αἰ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΑΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΞ πρὸς ὀρθὰς

Sint utique primum insistentes ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ; ΑΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΞ ad rectos basibus AB,

mêmes droites ΗΠ, ΝΡ; le parallépipède ΓΜ est donc égal au parallépipède ΓΝ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXI.

Les parallépipèdes qui ont des bases égales et la même hauteur, sont égaux entr'eux.

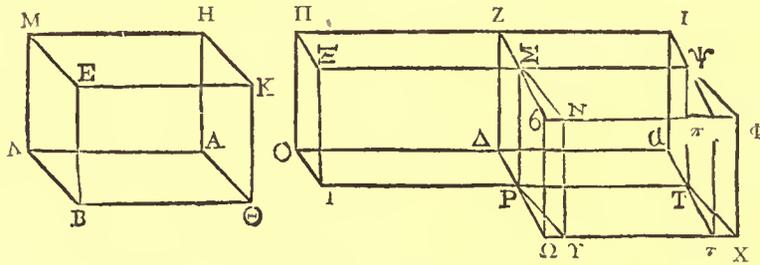
Que les parallépipèdes ΑΕ, ΓΖ ayent des bases égales AB, ΓΔ, et la même hauteur; je dis que le parallépipède ΑΕ est égal au parallépipède ΓΖ.

Que les côtés ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΑΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΞ soient d'abord perpendicu-

80 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ταῖς AB , $\Gamma\Delta$ βάσειν², καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐ-
 θείας τῆ GP εὐθεία ἡ PT , καὶ συνεστάρτω πρὸς
 τῆ PT εὐθεία καὶ τῷ πρὸς αὐτῆ σημείῳ τῷ P
 τῆ ὑπὸ $ΑΒΒ$ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ TPY , καὶ κείσθω
 τῆ μὲν $ΑΑ$ ἴση ἢ PT , τῆ δὲ $ΑΒ$ ἴση ἢ PY ³, καὶ
 συμπληρώσθω ἢτε PX βάσις καὶ τὸ $\Psi\Upsilon$ στε-
 ρεόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ TP , PY δυοὶ ταῖς $ΑΑ$, $ΑΒ$
 ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν ἴσον ἄρα
 καὶ ὅμοιον τὸ PX παραλληλόγραμμον τῷ $\Theta\Lambda$
 παραλληλόγραμμῳ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν

$\Gamma\Delta$, et producatur in directum rectæ GP ipsa
 PT , et constituatur ad rectam PT et ad punctum
 in ipsâ P angulo $ΑΒΒ$ æqualis ipse TPY ,
 et ponatur ipsi quidem $ΑΑ$ æqualis PT , ipsi
 vero $ΑΒ$ æqualis PY , et compleantur basis PX
 et solidum $\Psi\Upsilon$. Et quoniam duæ TP , PY duabus
 $ΑΑ$, $ΑΒ$ æquales sunt, et angulos æquales
 continent; æquale igitur et simile PX parallelogrammum
 parallelogrammo $\Theta\Lambda$. Et quoniam



ἢ μὲν $ΑΑ$ τῆ PT , ἢ δὲ $ΑΜ$ τῆ $PΣ$, καὶ γωνίας
 ὀρθὰς περιέχουσιν ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ $P\Psi$
 παραλληλόγραμμον τῷ $ΑΜ$ παραλληλογράμμῳ.
 Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔE τῷ $\Sigma\Upsilon$ ἴσον τέ ἐστι
 καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ $\Psi\Upsilon$
 στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ $\Psi\Upsilon$ στε-
 ρεοῦ ἴσα τέ⁵ ἐστὶ καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία
 τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ὅμοια,

rursus æqualis est quidem $ΑΑ$ ipsi PT , ipsa vero
 $ΑΜ$ ipsi $PΣ$, et angulos rectos continent;
 æquale igitur et simile est $P\Psi$ parallelogrammum
 parallelogrammo $ΑΜ$. Propter eadem utique
 et ΔE ipsi $\Sigma\Upsilon$ et æquale est et simile; tria igitur
 parallelogramma solidi $\Psi\Upsilon$ et æqualia sunt et similia. Sed
 quidem tria tribus oppositis et æqualia sunt et

laires aux bases AB , $\Gamma\Delta$; menons la droite PT dans la direction de la droite GP ;
 sur la droite PT et au point P de cette droite, construisons l'angle TPY égal à
 l'angle $ΑΒΒ$ (23. 1); faisons PT égal à $ΑΑ$, et PY égal à $ΑΒ$; et achevons la base PX
 et le parallélépipède $\Psi\Upsilon$. Puisque les deux droites TP , PY sont égales aux deux
 droites $ΑΑ$, $ΑΒ$, et qu'elles comprennent des angles égaux, le parallélogramme PX
 sera égal et semblable au parallélogramme $\Theta\Lambda$. De plus, puisque $ΑΑ$ est égal à
 PT et $ΑΜ$ égal à $PΣ$, et que ces droites comprennent des angles droits, le paral-
 lélégramme $P\Psi$ sera égal et semblable au parallélogramme $ΑΜ$. Le parallélogramme
 ΔE est égal et semblable au parallélogramme $\Sigma\Upsilon$, par la même raison; trois paral-
 lélégrammes du parallélépipède $\Psi\Upsilon$ sont donc égaux et semblables à trois paral-
 lélégrammes du parallélépipède $\Psi\Upsilon$. Mais les trois premiers parallélogrammes sont

τὰ δὲ τρία τρισὶ τῷ ἀπεναντίον⁶. ἕλον ἄρα τῷ
 ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἕλω τῷ ΨΥ στε-
 ρεῷ παραλληλεπίπεδῳ ἴσον ἐστὶ. Διήχθωσαν αἱ
 ΔΡ, ΧΥ καὶ συμπίπτουσιν ἀλλήλαις κατὰ
 τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω
 ἡ Ττ, καὶ ἐκβελέθωσαν ἡ Ττ καὶ ἡ ΟΔ
 καὶ συνεζεύχθωσαν⁷ κατὰ τὸ α, καὶ συμ-
 πεπληρώσθωσαν τὰ ΩΨ, ΡΙ στερεά· ἴσον δὲ
 ἐστὶ τὸ ΨΩ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ
 ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ωπ
 τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν⁸ ἐστὶ τὸ ΡΨ παραλ-
 ληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ, ἐπὶ τε γὰρ
 τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΨ, καὶ ὑπὸ τὸ
 αὐτὸ ἕψος, ὧν αἱ ἐφιστάσαι⁹, αἱ ΡΩ, ΡΥ,
 Ττ, ΤΧ, Σσ, ΣΝ, Ψπ, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν
 εὐθειῶν τῶν ΩΧ, σφ. Ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ
 ἐστὶν ἴσον¹⁰ καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στειρεῷ
 ἐστὶν ἴσον¹¹. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλ-
 ληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλόγραμμῳ, ἐπὶ τε
 γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΥ, καὶ ἐν ταῖς
 αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ, ΩΧ, ἀλλὰ τὸ

similia, tria vero tribus oppositis; totum igitur
 ΑΕ solidum parallelepipedum toti ΨΥ solido pa-
 rallelepipedo æquale est. Producantur ipsæ ΔΡ,
 ΧΥ et convenient inter se in puncto Ω, et per
 Τ ipsi ΔΩ parallela ducatur Ττ, et producantur
 ipsa Ττ et ipsa ΟΔ et convenient in α, et com-
 pleantur ΩΨ, ΡΙ solida; æquale igitur est ΨΩ
 solidum, cujus basis quidem est ΡΨ paralle-
 logrammum, oppositum vero Ωπ, solido ΨΥ,
 ejus basis quidem est ΡΨ parallelogrammum,
 oppositum vero ΥΦ, et enim in eadem sunt
 basi ΡΨ, et in eadem altitudine, quorum ipsæ
 insistentes ΡΩ, ΡΥ, Ττ, ΤΧ, Σσ, ΣΝ, Ψπ, ΨΦ
 in eisdem sunt rectis ΩΧ, σφ. Sed ΨΥ solidum
 ipsi ΑΕ est æquale; et igitur ΨΩ solidum
 solido ΑΕ est æquale. Et quoniam æquale est
 ΡΥΧΤ parallelogrammum parallelogrammo ΩΤ,
 et enim in eadem sunt basi ΡΥ, et in eisdem pa-
 rallelis ΡΤ, ΩΧ, sed ΡΥΧΤ ipsi ΓΔ est æquale,

égaux et semblables à trois parallélogrammes opposés, et les trois derniers pa-
 rallélogrammes sont aussi égaux et semblables aux trois parallélogrammes op-
 posés (24. 11); le parallélépipède entier ΑΕ est donc égal au parallélépipède
 entier ΨΥ (déf. 10. 1). Prolongeons les droites ΔΡ, ΧΥ, et que ces droites se rencon-
 trent au point Ω; par le point Τ menons la droite Ττ parallèle à la droite ΔΩ; pro-
 longeons les droites Ττ, ΟΔ; que ces droites se rencontrent au point α, et ache-
 vons les parallélépipèdes ΩΨ, ΡΙ. Le parallélépipède ΨΩ qui a pour base le pa-
 rallélogramme ΡΨ opposé au parallélogramme Ωπ sera égal au parallélépipède ΨΥ
 qui a pour base le parallélogramme ΡΨ opposé au parallélogramme ΥΦ (29. 11), parce
 que ces deux parallélépipèdes ont la même base ΡΨ et la même hauteur, et que
 leurs côtés ΡΩ, ΡΥ, Ττ, ΤΧ, Σσ, ΣΝ, Ψπ, ΨΦ sont placés dans les mêmes droites
 ΑΧ, σφ. Mais le parallélépipède ΨΥ est égal au parallélépipède ΑΕ; le parallé-
 lépipède ΨΩ est donc égal au parallélépipède ΑΕ. Mais le parallélogramme ΡΥΧΤ
 est égal au parallélogramme ΩΤ (35. 1), car ces deux parallélogrammes ont la
 même base ΡΥ et sont compris entre les mêmes parallèles ΡΤ, ΩΧ, et le parallélo-
 gramme ΡΥΧΤ est égal au parallélogramme ΓΔ, parce que le parallélogramme ΡΥΧΤ

ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἴσιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ· καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἴσιν ἴσον. Ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· ἴσιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΔΤ οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέμνεται, παραλλήλω ἔντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἴσιν ὡς ἡ ΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΔΤ βᾶσιν οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέμνεται, παραλλήλω ἔντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἴσιν ὡς ἡ ΩΤ βᾶσις πρὸς τὴν ΔΤ βᾶσιν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν¹². Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΔΤ οὕτως ἡ ΩΤ βᾶσις¹³ πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν¹⁴· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΓΖ, ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἴσιν¹⁵ τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. Ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἰσὺν ἴσιν· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα τῷ ΓΖ ἴσιν ἴσον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι¹⁶.

Μὴ ἴστωσαν δὲ αἱ ἐφεστῆκυῖαι αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΑΜ, ΓΞ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς

quoniam et ipsi AB; et igitur ΩΤ parallelogrammum ipsi ΓΔ est æquale. Aliud autem ΔΤ; est igitur ut basis ΓΔ ad ΔΤ ita ΩΤ ad ΔΤ. Et quoniam solidum parallelepipedum ΓΙ plano ΡΖ secatur, parallelo existente oppositis planis, est ut basis ΓΔ ad basim ΔΤ ita solidum ΓΖ ad ΡΙ solidum. Propter eadem utique, quoniam parallelepipedum ΩΙ plano ΡΨ secatur, parallelo existente oppositis planis, est ut basis ΩΤ ad basim ΔΤ ita ΩΨ solidum ad ΡΙ solidum. Sed ut basis ΓΔ ad ΔΤ ita basis ΩΤ ad ΔΤ; et ut igitur ΓΖ solidum ad solidum ΡΙ ita ΩΨ solidum ad ΡΙ solidum; utrumque igitur solidorum ΓΖ, ΩΨ ad ΡΙ eandem habet rationem; æquale igitur est ΓΖ solidum solido ΩΨ. Sed ipsum ΩΨ ipsi ΑΕ demonstratum est æquale; et igitur ΑΕ ipsi ΓΖ est æquale. Quod oportebat ostendere.

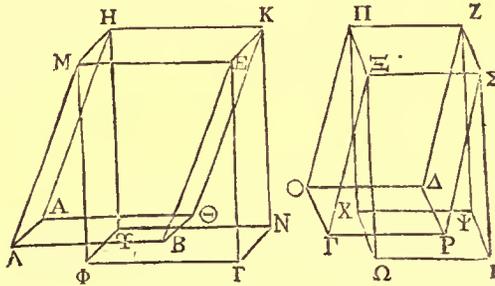
Non sint utique insistentes ipsæ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΑΜ, ΓΞ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ ad rectos basibus ΑΒ, ΓΔ;

est égal au parallélogramme AB; le parallélogramme ΩΤ est donc égal au parallélogramme ΓΔ. Mais ΔΤ est un autre parallélogramme; la base ΓΔ est donc à la base ΔΤ comme la base ΩΤ est à la base ΔΤ (7. 5). Et puisque le parallélépipède ΓΙ est coupé par le plan ΡΖ parallèle aux plans opposés, la base ΓΔ sera à la base ΔΤ comme le parallélépipède ΓΖ est au parallélépipède ΡΙ (25. 11). Par la même raison, la base ΩΤ est à la base ΔΤ comme le parallélépipède ΩΨ est au parallélépipède ΡΙ, parce que le parallélépipède ΩΙ est coupé par le plan ΡΨ parallèle aux plans opposés. Mais la base ΓΔ est à la base ΔΤ comme la base ΩΤ est à la base ΔΤ; le parallélépipède ΓΖ est donc au parallélépipède ΡΙ comme le parallélépipède ΩΨ est au parallélépipède ΡΙ (11. 5); chacun des parallélépipèdes ΓΖ, ΩΨ a donc la même raison avec le parallélépipède ΡΙ; le parallélépipède ΓΖ est donc égal au parallélépipède ΩΨ (9. 5). Mais on a démontré que le parallélépipède ΩΨ est égal au parallélépipède ΑΕ; le parallélépipède ΑΕ est donc égal au parallélépipède ΓΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais que les côtés ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΑΜ, ΓΞ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ ne soient point

AB, ΓΔ βάσεισι λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ¹⁷ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. Ηχθωσαν γάρ¹⁸ ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπιπέδον¹⁹ κάθετοι αἱ ΚΝ, ΕΤ,

dico rursus æquale esse solidum ΑΕ solido ΓΖ. Ducantur enim a punctis Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ ad subiectum planum perpendicularares ΚΝ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ, et occurrant



ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΤ, ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ ἴσον²⁰, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστὶν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἐξῆς.

plano in punctis Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι, et jungantur ipsæ ΝΤ, ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ; æquale igitur est ΚΦ solidum solido ΠΙ; etenim in æqualibus sunt basibus ΚΜ, ΠΣ et in eadem altitudine, quorum ipsæ insistentes ad rectos sunt basibus. Sed quidem ΚΦ solidum solido ΑΕ est æquale, ipsum vero ΠΙ ipsi ΓΖ, etenim in eadem basi sunt et in eadem altitudine, quorum ipsæ insistentes non sunt in eisdem rectis; et igitur ΑΕ solidum solido ΓΖ est æquale.

Solida igitur, etc.

perpendiculaires aux bases AB, ΓΔ; je dis encore que le parallélépipède ΑΕ est égal au parallélépipède ΓΖ. Car des points Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ menons au plan inférieur les perpendiculaires ΚΝ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ qui rencontrent ces plans aux points Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι (11. 11), et joignons ΝΤ, ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ. Le parallélépipède ΚΦ sera égal au parallélépipède ΠΙ (31. 11), parce que ces parallélépipèdes ont des bases égales ΚΜ, ΠΣ, et la même hauteur, et que leurs côtés sont perpendiculaires aux bases. Mais le parallélépipède ΚΦ est égal au parallélépipède ΑΕ (30. 11), et le parallélépipède ΠΙ est égal au parallélépipède ΓΖ; parce que ces parallélépipèdes ont la même base et la même hauteur, et que leurs côtés ne sont pas dans les mêmes droites; le parallélépipède ΑΕ est donc égal au parallélépipède ΓΖ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ'.

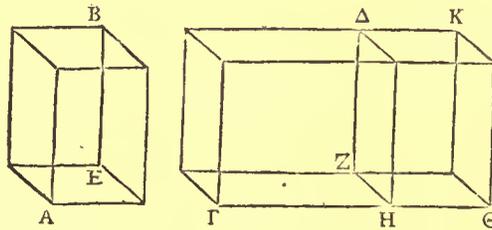
PROPOSITIO XXXII.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστω¹ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB, ΓΔ· λέγω ὅτι τὰ AB, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ἐστὶν ὅτι² ὡς ἡ AE βᾶσις πρὸς τὴν ΓΖ βᾶσιν οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

In eadem altitudine existentia solida parallelepipedaliter inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine solida parallelepipedaliter AB, ΓΔ; dico AB, ΓΔ solida parallelepipedaliter inter se esse ut bases, hoc est ut basis AE ad basim ΓΖ ita esse AB solidum ad ΓΔ solidum.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ AE ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ³ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπληρώσθω τῷ ΗΚ· ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῶν, ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βᾶσεῶν εἰσι τῶν AE, ΖΘ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ

Applicetur enim ad ΖΗ ipsi AE æquale ΖΘ, et a basi quidem ΖΘ, altitudine vero eadem cum ipso ΓΔ solidum parallelepipedum compleatur ΗΚ; æquale igitur est AB solidum solidum ΗΚ, etenim in eisdem sunt basibus AE, ΖΘ et in eadem altitudine. Et quoniam solidum parallelepipedum ΓΚ plano ΔΗ secatur, paral-

PROPOSITION XXXII.

Les parallélépipèdes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient AB, ΓΔ des parallélépipèdes qui ayent la même hauteur; je dis que ces parallélépipèdes sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire que la base AE est à la base ΓΖ comme le parallélépipède AB est au parallélépipède ΓΔ.

Car appliquons à ΖΗ un parallélogramme ΖΘ qui soit égal au parallélogramme AE (45. 1), et sur la base ΖΘ construisons le parallélépipède ΗΚ de même hauteur que le parallélépipède ΓΔ. Le parallélépipède AB sera égal au parallélépipède ΗΚ (51. 11), car ces parallélépipèdes ont des bases égales AE, ΖΘ et la même hauteur. Et puisque le parallélépipède ΓΚ est coupé par un plan ΔΗ parallèle aux

ΔΗ τέμνεται, παραλλήλων ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΘΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεόν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Τὰ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἀλλήλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμολογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ,

plans opposés, la base ΘΖ est à la base ΓΖ comme le parallélépipède ΘΔ est au parallélépipède ΔΓ (25. 11). Mais la base ΘΖ est égale à la base ΑΕ, et le parallélépipède ΗΚ égal au parallélépipède ΑΒ; la base ΑΕ est donc à la base ΓΖ comme le parallélépipède ΑΒ est au parallélépipède ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Les parallélépipèdes semblables sont entr'eux en raison triplée de leurs côtés homologues.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux parallélépipèdes semblables, et que le côté ΑΕ soit l'homologue du côté ΓΖ; je dis que le parallélépipède ΑΒ a avec le parallélépipède ΓΔ une raison triplée de celle que ΑΕ a avec ΓΖ.

Car menons les droites ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ dans la direction des droites ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ; faisons ΕΚ égal à ΓΖ, ΕΛ égal à ΖΝ, et ΕΜ égal à ΖΡ; achevons le parallélogramme

lelo existente oppositis planis, est igitur ut basis ΘΖ ad basim ΓΖ ita ΘΔ solidum ad solidum ΔΓ. Sed æqualis quidem basis ΖΘ basi ΑΕ, solidum vero ΗΚ solido ΑΒ; est igitur et ut basis ΑΕ ad basim ΓΖ ita ΑΒ solidum ad ΓΔ solidum.

Solida igitur, etc.

PROPOSITIO XXXIII.

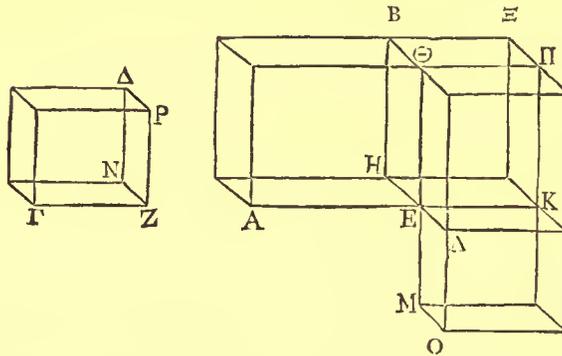
Similia solida parallelepipeda inter se in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda ΑΒ, ΓΔ; homologum autem sit latus ΑΕ ipsi ΓΖ; dico ΑΒ solidum ad solidum ΓΔ triplicatam rationem habere ejus quam ΑΕ ad ΓΖ.

Producantur enim in directum ipsis ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ ipsæ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, et ponatur ipsi quidem ΓΖ æqualis ΕΚ, ipsi vero ΖΝ æqualis ΕΛ, et

καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ ΚΟ στερεόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσα εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ ᾠγωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ ᾠγωνία τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση, ἐπειδὴ περ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση διὰ τὴν ὁμοί-

adhuc ipsi ΖΡ æqualis ΕΜ, et compleatur ΚΛ parallelogrammum, et solidum ΚΟ. Et quoniam duæ ΚΕ, ΕΛ duabus ΓΖ, ΖΝ æquales sunt, sed et angulus ΚΕΛ angulo ΓΖΝ est æqualis, quoniam et angulus ΑΕΗ ipsi ΓΖΝ est æqualis



τητα τὴν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ παραλληλογράμμῳ³, καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ³ καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια⁴, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια⁵. Ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεόν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. Συμπεπλη-

ob similitudinem solidorum ΑΒ, ΓΔ; æquale igitur est et simile ΚΛ parallelogrammum parallelogrammo ΓΝ. Propter eadem utique et quidem ΚΜ parallelogrammum æquale est simile parallelogrammo ΓΡ, et adhuc ipsum ΕΟ ipsi ΔΖ; tria igitur parallelogramma solidi ΚΟ tribus parallelogrammis solidi ΓΔ æqualia sunt et similia. Sed quidem tria tribus oppositis æqualia sunt, similia vero tria tribus oppositis æqualia sunt et similia; totum igitur ΚΟ solidum toti solido ΓΔ æquale est et simile. Com-

ΚΑ et le parallélepède ΚΟ. Puisque les deux droites ΚΕ, ΕΛ sont égales aux deux droites ΓΖ, ΖΝ, et que l'angle ΚΕΛ est égal à l'angle ΓΖΝ, l'angle ΑΕΗ étant égal à ΓΖΝ, à cause de la similitude des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ; le parallélogramme ΚΑ sera égal et semblable au parallélogramme ΓΝ. Par la même raison, le parallélogramme ΚΜ est égal et semblable au parallélogramme ΓΡ, et le parallélogramme ΟΕ égal et semblable au parallélogramme ΔΖ; trois parallélogrammes du parallélépipède ΚΟ sont donc égaux et semblables à trois parallélogrammes du parallélépipède ΓΔ. Mais les trois premiers parallélogrammes sont égaux et semblables à trois parallélogrammes opposés, et les trois derniers parallélogrammes sont aussi égaux aux trois parallélogrammes opposés (24. 11), le parallélépipède entier ΚΟ est donc égal et semblable au parallélépipède entier ΓΔ (déf. 10. 11). Achevons le

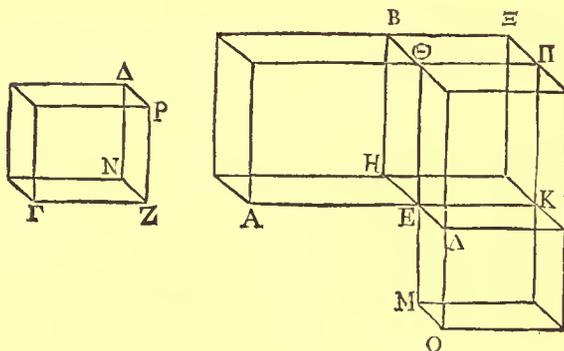
ράσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ, στερεὰ συμπληρώσθω τὰ ΕΞ, ΑΠ. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ἰμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΓ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον^δ πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΚΗ πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεὸν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ, καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μὲν

pleatur ΗΚ parallelogrammum, et a basibus quidem ΗΚ, ΚΛ parallelogrammorum, altitudine vero eadem cum ipso ΑΒ, solida compleantur ΕΞ, ΑΠ. Et quoniam ob similitudinem solidorum ΑΒ, ΓΔ est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΕΗ ad ΖΝ, et ΕΘ ad ΖΡ, sed æqualis quidem ΖΓ ipsi ΕΚ, ipsa vero ΖΝ ipsi ΕΛ, ipsa autem ΖΡ ipsi ΕΜ; est igitur ut ΑΕ ad ΕΚ ita ΗΕ ad ΕΛ, et ΘΕ ad ΕΜ. Sed ut quidem ΑΕ ad ΕΚ ita ΑΗ parallelogrammum ad parallelogrammum ΗΚ, ut vero ΗΕ ad ΕΛ ita ΗΚ ad ΚΛ, ut autem ΘΕ ad ΕΜ ita ΠΕ ad ΚΜ; et ut igitur ΑΗ parallelogrammum ad ipsum ΗΚ ita ΗΚ ad ΚΛ et ΠΕ ad ΚΜ. Sed ut quidem ΑΗ ad ΗΚ ita ΑΒ solidum ad solidum ΕΞ, ut vero ΗΚ ad ΚΛ ita ΞΕ solidum ad solidum ΠΛ, ut autem ΠΕ ad ΚΜ ita ΠΛ solidum ad solidum ΚΟ; et ut igitur ΑΒ solidum ad ΕΞ ita ΕΞ ad ΠΛ, et ΠΛ ad ΚΟ. Si

parallélogramme ΗΚ, et sur les bases ΗΚ, ΚΛ, construisons deux parallélépipèdes ΕΞ, ΑΠ de même hauteur que le parallélépipède ΑΒ. Puisqu'à cause de la similitude des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ, la droite ΑΕ est à ΓΖ comme ΕΗ est à ΖΝ, et comme ΕΘ est à ΖΡ; mais ΖΓ est égal à ΕΚ, ΖΝ égal à ΕΛ, et ΖΡ égal à ΕΜ, la droite ΑΕ sera à ΕΚ comme ΗΕ est à ΕΛ, et comme ΘΕ est à ΕΜ. Et puisque ΑΕ est à ΕΚ comme le parallélogramme ΑΗ est au parallélogramme ΗΚ (1. 6), que ΗΕ est à ΕΛ comme le parallélogramme ΗΚ est au parallélogramme ΚΛ, et que ΘΕ est à ΕΜ comme le parallélogramme ΠΕ est au parallélogramme ΚΜ; le parallélogramme ΑΗ sera au parallélogramme ΗΚ comme le parallélogramme ΗΚ est au parallélogramme ΚΛ, et comme le parallélogramme ΠΕ est au parallélogramme ΚΜ. Mais ΑΗ est à ΗΚ comme le parallélépipède ΑΒ est au parallélépipède ΕΞ (32. 11), et ΗΚ est à ΚΛ comme le parallélépipède ΞΕ est au parallélépipède ΠΛ, et de plus ΠΕ est à ΚΜ comme le parallélépipède ΠΛ est au parallélépipède ΚΟ; le parallélépipède ΑΒ est donc au parallélépipède ΕΞ comme le parallélépipède ΕΞ est au parallélépipède ΠΛ, et comme le parallélépipède ΠΛ est au parallélépipède ΚΟ.

γέθῃ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ⁶ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ τὸ AB ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ KO τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ τὸ AB πρὸς τὸ EΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν⁸ τὸ AB πρὸς τὸ EΞ οὕτως τὸ AH παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ HK,

autem quatuor magnitudines deinceps proportionales sint, prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam ad secundam; et igitur AB solidum ad ipsum KO triplicatam rationem habet ejus quam AB ad EΞ. Sed ut quidem AB ad EΞ ita AH parallelogrammum ad HK,



καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὸν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ KO τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν⁹ KO στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῶ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ AB ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.

et recta AE ad EK; quare et AB solidum ad KO triplicatam rationem habet ejus quam AE ad EK. Sed æquale quidem KO solidum solido ΓΔ, recta vero EK ipsi ΓΖ; et igitur AB solidum ad solidum ΓΔ triplicatam rationem habet ejus quam AE ipsius latus homologum ad homologum latus ΓΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς¹⁰,

Similia igitur, etc.

Mais si quatre grandeurs sont successivement proportionnelles, la première a, avec la quatrième, une raison triplée de celle que la première a avec la seconde; le parallélépipède AB a donc avec le parallélépipède KO, une raison triplée de celle que AB a avec EΞ. Mais AB est à EΞ comme le parallélogramme AH est au parallélogramme HK, et comme la droite AE est à la droite EK (1. 6); le parallélépipède AB a donc avec le parallélépipède KO une raison triplée de celle que AE a avec EK. Mais le parallélépipède KO est égal au parallélépipède ΓΔ, et la droite EK égale à la droite ΓΖ; le parallélépipède AB a donc avec le parallélépipède ΓΔ une raison triplée de celle que son côté homologue AE a avec son côté homologue ΓΖ. Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὁμοίον καὶ ἰσοίως ἀναγραφόμενον ἔπειδ' ἡ πρώτη καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν δευτέραν.

Ex hoc utique evidens est, si quatuor rectæ proportionales sint, fore ut prima ad quartam, ita a primâ solidum parallelepipedum ad solidum a secundâ simile et similiter descriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam ad secundam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

PROPOSITIO XXXIV.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἔστιν ἐκεῖνα.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus; et quorum solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus, æqualia sunt illa.

Ἐστὼ ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι,

Sint æqualia solida parallelepipeda ΑΒ, ΓΔ; dico ΑΒ, ΓΔ solidorum parallelepipedorum reciprocas esse bases altitudinibus, et esse ut ΕΘ

COROLLAIRE.

D'après cela il est évident, que si quatre droites sont proportionnelles, la première sera à la quatrième comme le parallélépipède construit sur la première est au parallélépipède semblable; et semblablement construit sur la seconde; parce que la première droite a avec la quatrième une raison triplée de celle que la première a avec la seconde.

PROPOSITION XXXIV.

Les bases des parallélépipèdes égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; et les parallélépipèdes dont les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs sont égaux entr'eux.

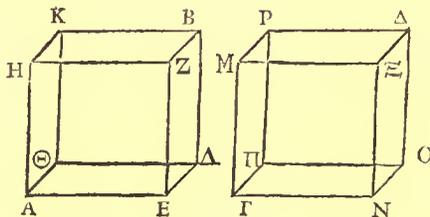
Soient les parallélépipèdes égaux ΑΒ, ΓΔ; je dis que leurs bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; c'est-à-dire que la base ΕΘ est à la

καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν
 οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ
 στερεοῦ ὕψος.

Ἐστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἰφιστήκυϊαι αἱ ΑΗ,
 ΕΖ, ΑΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ἑρθῶς
 ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ
 βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς
 τὴν ΑΗ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἔστιν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ
 βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ
 ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση· τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ
 αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλ-

basis ad ΝΠ basim ita ΓΔ solidi altitudinem
 ad ΑΒ solidi altitudinem.

Sint enim primum insistentes ΑΗ, ΕΖ, ΑΒ, ΘΚ,
 ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ ad rectos basibus ipsorum;
 dico esse ut ΕΘ basis ad ΝΠ basim ita ipsam ΓΜ ad
 ΑΗ. Si quidem igitur æqualis est basis ΕΘ basi
 ΝΠ, est autem et ΑΒ solidum solido ΓΔ æquale,
 erit et ΓΜ ipsi ΑΗ æqualis; sub eadem enim
 altitudine solida parallelepipeda inter se sunt



ληλά ἔστιν ὡς αἱ βάσεις. Εἰ γὰρ, τῶν ΕΘ, ΝΠ
 βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἶη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη
 ἴσα· οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ.
 Υπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἀνίσον ἐστι τὸ ΓΜ ὕψος
 τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ
 βάσις πρὸς τὴν ΝΠ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ,

ut bases. Si enim, basibus ΕΘ, ΝΠ æqualibus
 existentibus, non sint altitudines ΑΗ, ΓΜ æqua-
 les; non igitur ΑΒ solidum æquale erit ipsi ΓΔ.
 Supponitur autem æquale; non igitur inæqualis
 est altitudo ΓΜ altitudini ΑΗ; æqualis igitur,
 et erit ut basis ΕΘ ad ipsam ΝΠ ita ΓΜ ad

base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélé-
 pipède ΑΒ.

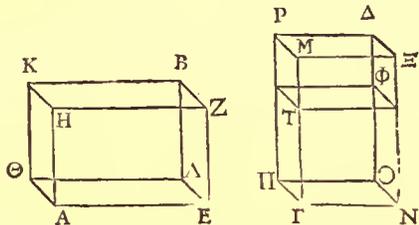
Que les côtés ΑΗ, ΕΖ, ΑΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ soient d'abord perpendiculaires
 aux bases; je dis que la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme ΓΜ est à ΑΗ. Si donc la base
 ΕΘ est égale à la base ΝΠ, et le parallélépipède ΑΒ égal au parallélépipède ΓΔ, la
 hauteur ΓΜ sera égale à la hauteur ΑΗ; parce que les parallélépipèdes de même
 hauteur étant entr'eux comme leurs bases, si les bases ΕΘ, ΝΠ étant égales,
 les hauteurs ΑΗ, ΓΜ n'étaient pas égales, le parallélépipède ΑΒ ne serait
 point égal au parallélépipède ΓΔ (31. 11); mais ces parallélépipèdes sont sup-
 posés égaux; les hauteurs ΓΜ, ΑΗ ne sont donc pas inégales; elles sont donc
 égales; la base ΕΘ est donc à la base ΝΠ comme ΓΜ est à ΑΗ; il est donc évident

καὶ φανερόν ὅτι τῶν $AB, \Gamma\Delta$ στερεῶν παραλλη-
λεπιπέδων ἀντιπεπίνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ $E\Theta$ βάσις τῆ $N\Pi$ βάσει,
ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ $E\Theta$. Ἔστι δὲ καὶ τὸ AB στερεὸν
τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ³ καὶ ἡ ΓM
τῆς AH . Εἰ γὰρ μὴ, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ $AB,$
 $\Gamma\Delta$ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα.
Κείσθω οὖν τῆ AH ἴση ἡ ΓT , καὶ συμπλη-
ρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς $N\Pi$, ὕψους δὲ τοῦ
 ΓT , στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ $\Phi\Gamma$. Καὶ ἐπεὶ

AH , et evidens est $AB, \Gamma\Delta$ solidorum parallele-
pipedorum reciprocas esse bases altitudinibus.

Non sit autem æqualis $E\Theta$ basis basi $N\Pi$,
sed sit major $E\Theta$. Est autem et AB solidum
solido $\Gamma\Delta$ æquale; major igitur est ΓM ipsâ AH .
Si enim non, neque igitur rursus solida $AB, \Gamma\Delta$
æqualia essent; supponuntur autem æqualia.
Ponatur igitur ipsi AH æqualis ΓT , et com-
pleatur a basi quidem $N\Pi$, altitudine vero ΓT ,
solidum parallelepipedum $\Phi\Gamma$. Et quoniam



ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ, ἄλλο δὲ
τι τὸ $\Gamma\Phi$ ⁵, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν
ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς⁶ τὸ AB στερεὸν πρὸς
τὸ $\Gamma\Phi$ στερεὸν οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ
 $\Gamma\Phi$ στερεόν. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ
 $\Gamma\Phi$ στερεὸν οὕτως ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$
βάσιν, ἰσοῦσ' ἢ γὰρ τὰ $AB, \Gamma\Phi$ στερεὰ· ὡς δὲ
τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεὸν οὕτως ἡ $M\Pi$

æquale est AB solidum solido $\Gamma\Delta$, aliud autem
quoddam ipsum $\Gamma\Phi$, æqualia vero ad idem
eamdem habent rationem; est igitur ut AB so-
lidum ad solidum $\Gamma\Phi$ ita $\Gamma\Delta$ solidum ad $\Gamma\Phi$
solidum. Sed ut quidem AB solidum ad $\Gamma\Phi$
solidum ita $E\Theta$ basis ad $N\Pi$ basim, æque alta
enim $AB, \Gamma\Phi$ solida; ut autem $\Gamma\Delta$ solidum ad

que les bases des parallélépipèdes $AB, \Gamma\Delta$ sont réciproquement proportionnelles
aux hauteurs.

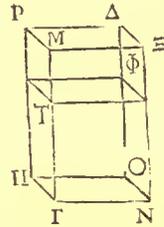
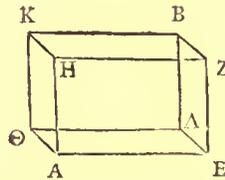
Que la base $E\Theta$ ne soit pas égale à la base $N\Pi$, et que la base $E\Theta$ soit la plus
grande. Puisque le parallélépipède AB est égal au parallélépipède $\Gamma\Delta$, la hauteur
 ΓM sera plus grande que la hauteur AH ; car si cela n'était point, les parallélépi-
pèdes $AB, \Gamma\Delta$ ne seraient pas égaux (31. 11); mais ils sont supposés égaux.
Faisons ΓT égal à AH , et sur la base $N\Pi$ construisons un parallélépipède $\Phi\Gamma$ dont
la hauteur soit ΓT . Puisque le parallélépipède AB est égal au parallélépipède $\Gamma\Delta$,
que $\Gamma\Phi$ est un autre parallélépipède, et que des grandeurs égales ont la même
raison avec la même grandeur (7. 5), le parallélépipède AB sera au parallélépipède
 $\Gamma\Phi$ comme le parallélépipède $\Gamma\Delta$ est au parallélépipède $\Gamma\Phi$. Mais le parallélépi-
pède AB est au parallélépipède $\Gamma\Phi$ comme la base $E\Theta$ est à la base $N\Pi$ (32. 11),
car les parallélépipèdes $AB, \Gamma\Phi$ sont égaux en hauteur, et le parallélépipède

βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΑΗ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὲ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεποσθέντων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἴστί τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

ΓΦ solidum ita ΜΠ basis ad ΠΤ basim, et ΜΓ ad ΓΤ; et ut igitur ΕΘ basis ad ΝΠ basim ita ΜΓ ad ΓΤ. Æqualis autem ΓΤ ipsi ΑΗ; et ut igitur ΕΘ basis ad ΝΠ basim ita ΜΓ ad ΑΗ; ipsorum igitur ΑΗ, ΓΔ solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus.

Rursus utique ΑΒ, ΓΔ solidorum parallelepipedorum reciprocæ sint bases altitudinibus, et sit ut ΕΘ basis ad basim ΝΠ ita solidi ΓΔ altitudo ad altitudinem solidi ΑΒ; dico æquale esse ΑΒ solidum solido ΓΔ.



Ἐστωσαν γάρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ἑρθάσ ταῖς βάσεις. Καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΗ βάσει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ

Sint enim rursus insistentes ad rectos basibus. Et si quidem æqualis est ΕΘ basi ΝΠ, et est ut ΕΘ basis ad basim ΝΠ ita solidi ΓΔ altitudo ad ΑΒ solidi altitudinem; æquale igitur

ΓΔ est au parallélépipède ΓΦ comme la base ΜΠ est à la base ΠΤ (25. 11), et comme ΜΓ est à ΓΤ (1. 6); la base ΕΘ est donc à la base ΝΠ comme ΜΓ est à ΓΤ. Mais ΓΤ est égal à ΑΗ; la base ΕΘ est donc à la base ΝΠ comme ΜΓ est à ΑΗ; les bases des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs.

Que les bases des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ soient réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base ΕΘ soit à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ; je dis que le parallélépipède ΑΒ est égal au parallélépipède ΓΔ.

Car que les côtés soient encore perpendiculaires aux bases. Si la base ΕΘ est égale à la base ΝΠ, et si la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ, la hauteur du parallélépi-

τοῦ AB στερεοῦ ὕψος· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ $\Gamma\Delta$ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ AB στερεοῦ ὕψει. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων⁸ βάσεων ὅτι στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῶ.⁹

Μὴ ἔστω δὲ ἡ $E\Theta$ βᾶσις τῆ $N\Pi$ ἴση, ἀλλ'¹⁰ ἔστω μείζων ἢ $E\Theta$ · μείζων ἄρα ἐστὶ¹¹ καὶ τοῦ $\Gamma\Delta$ στερεοῦ ὕψος τοῦ¹² AB στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἢ ΓM τῆς AH . Κείσθω τῆ AH ἴση πάλιν ἢ ΓT , καὶ συμπληρώσθω ὁμοίως τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν. Ἐπεὶ οὖν¹³ ἐστὶν ὡς ἡ $E\Theta$ βᾶσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βᾶσιν οὕτως ἢ ΓM πρὸς τὴν AH , ἴση δὲ ἢ AH τῆ ΓT · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $E\Theta$ βᾶσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βᾶσιν οὕτως ἢ $M\Gamma$ πρὸς τὴν ΓT . Ἀλλ' ὡς μὲν ἢ $E\Theta$ βᾶσις¹⁴ πρὸς τὴν $N\Pi$ βᾶσιν οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν, ἰσοῦψῆ γάρ ἐστι τὰ AB , $\Gamma\Phi$ στερεά, ὡς δὲ ἢ $M\Gamma$ πρὸς τὴν ΓT οὕτως ἢτε $M\Pi$ βᾶσις πρὸς τὴν ΠT βᾶσιν, καὶ τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ ¹⁵· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν¹⁶ οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν· ἐκότερον ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ¹⁷ τὸ AE στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῶ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

est et solidi $\Gamma\Delta$ altitudo solidi AB altitudini. Sed in æqualibus basibus existentia solida parallelepipedæ et in eadem altitudine æqualia inter se sunt; æquale igitur est AB solidum solido $\Gamma\Delta$.

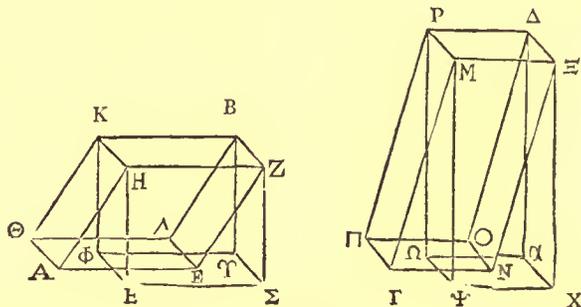
Non sit utique $E\Theta$ basis ipsi $N\Pi$ æqualis, sed sit major $E\Theta$; major igitur est et solidi $\Gamma\Delta$ altitudo solidi AB altitudine, hoc est ΓM ipsâ AH . Ponatur ipsi AH æqualis rursus ΓT , et compleatur similiter $\Gamma\Phi$ solidum. Quoniam igitur est ut $E\Theta$ basis ad $N\Pi$ basim ita ΓM ad AH , æqualis autem AH ipsi ΓT ; est igitur ut basis $E\Theta$ ad basim $N\Pi$ ita $M\Gamma$ ad ΓT . Sed ut quidem basis $E\Theta$ ad basim $N\Pi$ ita AB solidum ad $\Gamma\Phi$ solidum, æque alta enim sunt AB , $\Gamma\Phi$ solida, ut vero $M\Gamma$ ad ΓT ita et basis $M\Pi$ ad basim ΠT , et $\Gamma\Delta$ solidum ad $\Gamma\Phi$ solidum; et ut igitur AB solidum ad $\Gamma\Phi$ solidum ita $\Gamma\Delta$ solidum ad $\Gamma\Phi$ solidum; utrumque igitur ipsorum AB , $\Gamma\Delta$ ad $\Gamma\Phi$ eandem habet rationem; æquale igitur est AE solidum solido $\Gamma\Delta$. Quod oportebat ostendere.

pède $\Gamma\Delta$ sera égale à la hauteur du parallélépipède AB . Mais les parallélépipèdes qui ont des bases égales et la même hauteur sont égaux entr'eux (31. 11); le parallélépipède AB est donc égal au parallélépipède $\Gamma\Delta$.

Que la base $E\Theta$ ne soit point égale à la base $N\Pi$, et que $E\Theta$ soit la plus grande base; la hauteur du parallélépipède $\Gamma\Delta$ sera plus grande que la hauteur du parallélépipède AB , c'est-à-dire que ΓM sera plus grand que AH . Faisons encore ΓT égal à AH , et achevons semblablement le parallélépipède $\Gamma\Phi$. Puisque la base $E\Theta$ est à la base $N\Pi$ comme $M\Gamma$ est à AH , et que AH est égal à ΓT , la base $E\Theta$ sera à la base $N\Pi$ comme ΓM est à ΓT . Mais la base $E\Theta$ est à la base $N\Pi$ comme le parallélépipède AB est au parallélépipède $\Gamma\Phi$ (32. 11), car les parallélépipèdes AB , $\Gamma\Phi$ sont égaux en hauteur; et ΓM est à ΓT comme la base $M\Pi$ est à la base ΠT (1. 6), et comme le parallélépipède $\Gamma\Delta$ est au parallélépipède $\Gamma\Phi$ (25. 11); le parallélépipède AB est donc au parallélépipède $\Gamma\Phi$ comme le parallélépipède $\Gamma\Delta$ est au parallélépipède $\Gamma\Phi$; chacun des parallélépipèdes AB , $\Gamma\Delta$ a donc la même raison avec le parallélépipède $\Gamma\Phi$; le parallélépipède AB est donc égal au parallélépipède $\Gamma\Delta$ (9. 5). Ce qu'il fallait démontrer.

Μὴ ἕστωσαν δὲ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἐπίπεδα¹⁸ κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω σημεία¹⁹, καὶ συμπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἀντιπεπίνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάση πρὸς τὴν ΝΠ βάση οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς

Non sint utique insistentes ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ ad rectos basibus ipsorum, et ducantur a punctis Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ ad plana basium ΕΘ, ΝΠ perpendiculares, et occurrant planis in punctis Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω, et compleantur solida ΖΦ, ΞΩ; dico et ita æqualibus existentibus ΑΒ, ΓΔ solidis, reciprocas esse bases altitudinibus, atque esse ut ΕΘ basis ad basim ΝΠ ita solidi ΓΔ altitudinem ad solidi ΑΒ altitudinem.



τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Ἐπεὶ γὰρ²⁰ ἴσον ἔστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒ τὸ ΒΤ ἔστιν ἴσον, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆ ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ

Quoniam enim æquale est ΑΒ solidum solido ΓΔ, sed ipsi quidem ΑΒ ipsum ΒΤ est æquale, etenim in eadem sunt basi ΖΚ et in eadem altitudine, quorum insistentes non sunt in

Que les côtés ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ ne soient pas perpendiculaires aux bases des parallélépipèdes. Des points Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ menons aux plans des bases ΕΘ, ΝΠ des perpendiculaires qui rencontrent ces plans aux points Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω, et achevons les parallélépipèdes ΖΦ, ΞΩ (11. 11); je dis que les bases des parallélépipèdes égaux ΑΒ, ΓΔ sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ. Puisque le parallélépipède ΑΒ est égal au parallélépipède ΓΔ, et le parallélépipède ΒΤ égal au parallélépipède ΑΒ (30. 11), car ils ont la même base ΖΚ et la même hauteur, leurs côtés n'étant point placés dans les mêmes droites, et que le parallélépipède

ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἴσον²¹ ἴσον, ἐπὶ τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφιστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῶ ἴσον ἐστί. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθὰς ἐστὶταις βάσειν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. Ἰση δὲ ἡ μὲν ἡ ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ²² ὕψος. Γὰρ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν²³ παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὲ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθῆτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν

eisdem rectis; sed solidum ΓΔ ipsi ΔΨ est æquale, et enim rursus in eadem sunt basi ΡΞ et in eadem altitudine, quorum insistentes non sunt in eisdem rectis; et igitur ΒΤ solidum solido ΔΨ æquale est. Sed æqualium solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines ad rectos sunt basibus ipsorum, reciproe sunt bases altitudinibus; est igitur ut basis ΖΚ ad basim ΞΡ ita solidi ΔΨ altitudo ad solidi ΒΤ altitudinem. Sed æqualis quidem basis ΖΚ basi ΕΘ, ipsa vero ΞΡ basis basi ΝΠ; est igitur ut basis ΕΘ ad basim ΝΠ ita solidi ΔΨ altitudo ad solidi ΒΤ altitudinem. Eadem autem altitudines sunt solidorum ΔΨ, ΒΤ et ipsorum ΔΓ, ΒΑ; est igitur ut basis ΕΘ ad basim ΝΠ ita solidi ΔΓ altitudo ad solidi ΑΒ altitudinem; ergo ΑΒ, ΓΔ solidorum parallelepipedorum reciproe sunt bases altitudinibus.

Rursus utique ipsorum ΑΒ, ΓΔ solidorum parallelepipedorum reciproe sunt bases altitudinibus, et sit ut basis ΕΘ ad ΝΠ basim ita solidi

ΔΓ est encore égal au parallélépipède ΔΨ, car ces deux parallélépipèdes ont la même base ΡΞ et la même hauteur, leurs côtés n'étant point dans les mêmes droites; le parallélépipède ΒΤ sera égal au parallélépipède ΔΨ. Mais les bases des parallélépipèdes égaux, dont les hauteurs sont perpendiculaires aux bases, sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; la base ΖΚ est donc à la base ΞΡ comme la hauteur du parallélépipède ΔΨ est à la hauteur du parallélépipède ΒΤ. Mais la base ΖΚ est égale à la base ΕΘ (24. 11), et la base ΞΡ égale à la base ΝΠ; la base ΕΘ est donc à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΔΨ est à la hauteur du parallélépipède ΒΤ. Mais les hauteurs des parallélépipèdes ΔΨ, ΒΤ sont les mêmes que celles des parallélépipèdes ΔΓ, ΒΑ; la base ΕΘ est donc à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΔΓ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ; les bases des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs.

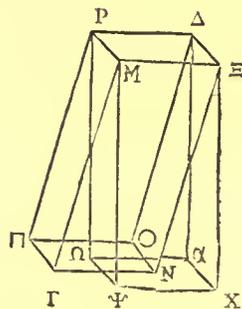
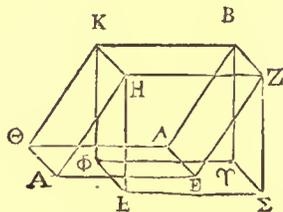
Que les bases des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ soient enfin réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base ΕΘ soit à la base ΝΠ comme la

οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ

ΓΔ altitudo ad solidi ΑΒ altitudinem; dico æquale esse ΑΒ solidum solido ΓΔ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut basis ΕΘ ad basim ΝΠ ita solidi ΓΔ altitudo ad solidi ΑΒ altitudinem, sed æqualis quidem b basis ΕΘ basi ΖΚ, ipsa vero ΝΠ ipsi ΕΡ; est



δὲ ΝΠ τῇ ΕΡ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΕΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΕΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ὡν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων

igitur ut basis ΖΚ ad basim ΕΡ ita solidi ΓΔ altitudo ad solidi ΑΒ altitudinem. Eædem vero altitudines sunt solidorum ΑΒ, ΓΔ et ipsorum ΒΤ, ΔΨ; est igitur ut basis ΖΚ ad basim ΕΡ ita solidi ΔΨ altitudo ad solidi ΒΤ altitudinem; ipsorum igitur ΒΤ, ΔΨ solidorum parallelepipedorum reciproæ sunt bases altitudinibus; quorum autem solidorum parallelepipedorum alti-

hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ; je dis que le parallélépipède ΑΒ est égal au parallélépipède ΓΔ.

Car faisons la même construction. Puisque la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ, que la base ΕΘ est égale à la base ΖΚ, et la base ΝΠ égale à la base ΕΡ, la base ΖΚ sera à la base ΕΡ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ. Mais les hauteurs des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ sont les mêmes que celles des parallélépipèdes ΒΤ, ΔΨ; la base ΖΚ est donc à la base ΕΡ comme la hauteur du parallélépipède ΔΨ est à la hauteur du parallélépipède ΒΤ; les bases des parallélépipèdes ΒΤ, ΔΨ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs. Mais les parallélépipèdes qui ont leurs hauteurs perpendiculaires sur les

τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεις αὐ-
 τῶν, ἀντιπεπόνθασιν δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψε-
 σιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BT
 στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. Ἀλλὰ τὸ μὲν BT
 τῷ AB² ἴσον ἐστὶν, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς
 βάσεώς εἰσι τῆς ZK καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν
 αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν,
 τὸ δὲ ΔΨ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἐστὶν,
 ἐπὶ τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς
 EP καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς
 αὐταῖς εὐθείαις· καὶ τὸ AB ἄρα στερεὸν τῷ
 ΓΔ στερεῷ ἴσον. Ὅπερ ἕδει δείξαι.

tudines ad rectos sunt basibus ipsorum, reci-
 proca. vero bases altitudinibus, æqualia sunt
 ea; æquale igitur est BT solidum solido ΔΨ. Sed
 quidem BT ipsi AB æquale est, et enim in
 eadem sunt basi ZK et in eadem altitudine,
 quorum insistentes non sunt in eisdem rectis,
 solidum vero ΔΨ solido ΔΓ æquale est, et enim
 rursus in eadem sunt basi EP et in eadem alti-
 tudine et non in eisdem rectis; et igitur AB
 solidum solido ΓΔ est æquale. Quod oporteba
 ostendere.

bases et qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles aux hauteurs sont
 égaux entr'eux; le parallélépipède BT est donc égal au parallélépipède ΔΨ. Mais
 le parallélépipède BT est égal au parallélépipède AB (50. 11), car ces deux
 parallélépipèdes ont la même base ZK et la même hauteur, et leurs côtés ne sont
 point dans les mêmes droites, et le parallélépipède ΔΨ est égal au parallélépi-
 pède ΔΓ, parce que ces deux parallélépipèdes ont la même base EP et la même
 hauteur, et que leurs côtés ne sont pas dans les mêmes droites; le parallélé-
 pipède AB est donc égal au parallélépipède ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΙ΄.

PROPOSITIO XXXV.

Εάν ὡσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρα, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῆ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κἀθετοὶ ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γυνομέων σημείων ὑπὸ τῶν καθετῶν¹, ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἕπι τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἐστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφιστάτωσαν αἱ ΑΗ, ΔΜ ἴσας γωνίας περιέχουσαι² μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ὑπὸ ΜΔΕ τῇ ὑπὸ ΗΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΜΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ εἰλήφθω³ ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα, τὰ Η, Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Μ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ ἐπίπεδα

Si sint duo anguli plani æquales, et in ipsorum verticibus sublimes rectæ constituentur æquales angulos continentes cum rectis a principio, utrumque utrique, in sublimibus autem sumantur quælibet puncta, et ab ipsis ad plana in quibus sunt a principio anguli, perpendiculares ducantur, a factis vero punctis in planis ad angulos a principio jungantur rectæ; æquales angulos continebunt cum sublimibus.

Sint duo anguli rectilinei æquales ΒΑΓ, ΕΔΖ, sed a punctis Α, Δ sublimes rectæ constituentur ΑΗ, ΔΜ æquales angulos continentes cum rectis a principio, utrumque utrique, angulum quidem ΜΔΕ ipsi ΗΑΒ, angulum vero ΜΔΖ ipsi ΗΑΓ, et sumantur in ipsis ΑΗ, ΔΜ quælibet puncta Η, Μ, et ducantur a punctis Η, Μ ad plana ΒΑΓ, ΕΔΖ perpendiculares ΗΑ, ΜΝ,

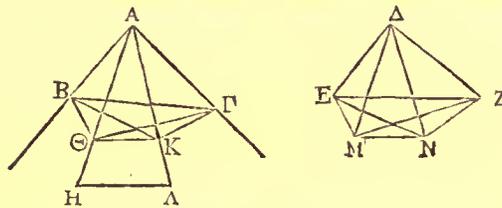
PROPOSITION XXXV.

Si l'on a deux angles plans égaux; si de leurs sommets on mène, au-dessus de leurs plans, des droites qui fassent des angles égaux avec les côtés de ces angles plans; si dans ces droites on prend des points quelconques; si de ces points on mène des perpendiculaires aux plans des premiers angles, et si des points où ces perpendiculaires rencontrent ces plans, on mène des droites aux sommets de ces mêmes angles, ces droites feront des angles égaux avec les droites menées au-dessus des plans des premiers angles.

Soient les deux angles rectilignes égaux ΒΑΓ, ΕΔΖ; des points Α, Δ menons au-dessus des plans de ces angles, les droites ΑΗ, ΔΜ qui fassent avec les côtés de ces mêmes angles des angles égaux chacun à chacun, savoir, l'angle ΜΔΕ égal à l'angle ΗΑΒ, et l'angle ΜΔΖ égal à l'angle ΗΑΓ; prenons dans les droites ΑΗ, ΔΜ des points quelconques Η, Μ; des points Η, Μ menons aux plans des angles ΒΑΓ,

κάθετοι αὶ ΗΑ, ΜΝ, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Ἀ, Ν, καὶ ἐπέζευχθωσαν αὶ ΔΑ, ΝΔ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΑΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ γωνίᾳ.

et occurrant planis in punctis Λ , N , et jungantur ipsæ $\Lambda\Lambda$, $N\Delta$; dico æqualem esse angulum HAA angulo $M\Delta N$.



Κείσθω τῇ ΔΜ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ ΗΑ παράλληλος ἡ ΘΚ. Ἡ δὲ ΗΑ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον. Ἡχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ εὐθείας κάθετοι αὶ ΚΒ, ΚΓ, ΝΖ, ΝΕ καὶ ἐπέζευχθωσαν αὶ ΟΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. Καὶ^δ ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα ἐστὶ^ε τὰ ἀπὸ τῶν ΚΓ, ΓΑ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ΓΑ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΟΓ, ΓΑ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν^ζ ἡ ὑπὸ ΟΓΑ γωνία. Διὰ τὰ

Ponatur ipsi ΔM æqualis $A\Theta$, et ducatur per punctum Θ ipsi HA parallela ΘK . Sed HA perpendicularis est ad planum per BA , AG ; et igitur ΘK perpendicularis est ad planum per BA , AG . Ducantur a punctis K , N ad rectas AB , AG , ΔZ , ΔE perpendiculares KB , $K\Gamma$, NZ , NE , et jungantur ipsæ $\Theta\Gamma$, ΓB , MZ , ZE . Et quoniam quadratum ex ΘA æquale est quadratis ex ΘK , KA , quadrato autem ex KA æqualia sunt quadrata ex $K\Gamma$, GA ; et quadratum igitur ex ΘA æquale est quadratis ex ΘK , $K\Gamma$, GA . Quadratis autem ex ΘK , $K\Gamma$ æquale est quadratum ex $\Theta\Gamma$; quadratum igitur ex ΘA æquale est quadratis ex $\Theta\Gamma$, GA ; rectus igitur est ΘGA angulus. Propter eadem utique et angulus

$E\Delta Z$ les perpendiculaires HA , MN qui rencontrent ces plans aux points Λ , N , et joignons $\Lambda\Lambda$, $N\Delta$; je dis que l'angle HAA est égal à l'angle $M\Delta N$.

Faisons $A\Theta$ égal à ΔM , et par le point Θ menons ΘK parallèle à HA . Puisque HA est perpendiculaire au plan des droites BA , AG , la droite ΘK sera perpendiculaire au plan des droites AB , AG (S. 11); des points K , N menons aux droites AB , AG , ΔZ , ΔE les perpendiculaires KB , $K\Gamma$, NZ , NE , et joignons $\Theta\Gamma$, ΓB , MZ , ZE . Puisque le carré de la droite ΘA est égal aux carrés des droites ΘK , KA , et que les carrés des droites $K\Gamma$, GA sont égaux au carré de la droite KA (47. 1), le carré de la droite ΘA sera égal aux carrés des droites ΘK , $K\Gamma$, GA . Mais le carré de la droite $\Theta\Gamma$ est égal aux carrés des droites ΘK , $K\Gamma$; le carré de la droite ΘA est donc égal aux carrés des droites $\Theta\Gamma$, GA ; l'angle ΘGA est donc droit. L'angle ΔZM est

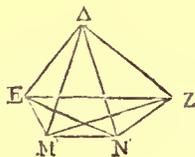
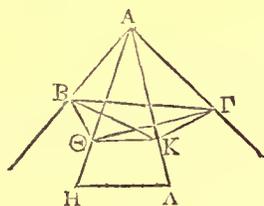
αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\Delta Z M$ γωνία ὀρθή ἐστίν· ἴση ἄρα ἐστίν⁸ ἡ ὑπὸ $A \Gamma \Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta Z M$. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\Theta A \Gamma$ τῇ ὑπὸ $M \Delta Z$ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $M \Delta Z$, $\Theta A \Gamma$ τὰς⁹ δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν $A \Theta$ τῇ ΔM · καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἴση ἄρα ἐστίν¹⁰ ἡ $A \Gamma$ τῇ ΔZ . Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση ἐστίν¹¹. Ἐπέξέυχθωσαν αἱ ΘB , ME . Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $A \Theta$ ἴσον ἐστὶ τοῖς¹² ἀπὸ τῆς AK , $K \Theta$, τῶν δὲ ἀπὸ τῆς AK ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , BK · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , BK , $K \Theta$ ἴσα ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς¹³ $A \Theta$. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν BK , $K \Theta$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B \Theta$, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ $\Theta K B$ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΘK κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $A \Theta$ ἴσον ἐστὶ¹⁴ τοῖς ἀπὸ τῶν AB , $B \Theta$ · ὀρθὴ ἄρα ἐστίν¹⁵ ἡ ὑπὸ $AB \Theta$ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\Delta E M$ γωνία ὀρθή ἐστίν.

$\Delta Z M$ rectus est; æqualis igitur est angulus $A \Gamma \Theta$ ipsi $\Delta Z M$. Est autem et angulus $\Theta A \Gamma$ ipsi $M \Delta Z$ æqualis; duo igitur triangula sunt $M \Delta Z$, $\Theta A \Gamma$ duos angulos duobus angulis æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, subtendens unum æqualium angulorum, ipsum $A \Theta$ ipsi ΔM ; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique; æqualis igitur est $A \Gamma$ ipsi ΔZ . Similiter utique demonstrabimus et AB ipsi ΔE æqualem esse. Jungantur ipsæ ΘB , ME . Et quoniam quadratum ex $A \Theta$ æquale est quadratis ex AK , $K \Theta$, quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB , BK ; quadrata igitur ex AB , BK , $K \Theta$ æqualia sunt quadrato ex $A \Theta$. Sed quadratis ex BK , $K \Theta$ æquale est quadratum ex $B \Theta$, rectus enim angulus $\Theta K B$, propterea quod ΘK perpendicularis est ad subjectum planum; quadratum igitur ex $A \Theta$ æquale est quadratis ex AB , $B \Theta$; rectus igitur $AB \Theta$ angulus. Propter eadem utique et angulus $\Delta E M$

droit, par la même raison; l'angle $A \Gamma \Theta$ est donc égal à l'angle $\Delta Z M$. Mais l'angle $\Theta A \Gamma$ est égal à $M \Delta Z$; les deux triangles $M \Delta Z$, $\Theta A \Gamma$ ont donc deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et deux côtés égaux, c'est-à-dire les côtés $A \Theta$, ΔM qui sont opposés à des angles égaux; ces deux triangles ont donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26. 1); $A \Gamma$ est donc égal à ΔZ . Nous démontrerons semblablement que AB est égal à ΔE . Joignons ΘB , ME . Puisque le carré de la droite $A \Theta$ est égal aux carrés des droites AK , $K \Theta$, et que les carrés des droites AB , BK sont égaux au carré de la droite AK , les carrés des droites AB , BK , $K \Theta$ seront égaux au carré de la droite $A \Theta$. Mais le carré de la droite $B \Theta$ est égal aux carrés des droites BK , $K \Theta$, car l'angle $\Theta K B$ est droit, la droite ΘK étant perpendiculaire au plan intérieur; le carré de la droite $A \Theta$ est donc égal aux carrés des droites AB , $B \Theta$; l'angle $AB \Theta$ est donc droit. L'angle $\Delta E M$ est droit, par la même raison. Mais l'angle $BA \Theta$ est égal à l'angle

Εἶστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $BA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta M$ ἴση¹⁶. ὑπόκεινται¹⁷ γάρ, καὶ ἔστιν ἡ $A\Theta$ τῇ ΔM ἴση· ἴση ἄρα καὶ ὁ AB τῇ ΔE . Ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ μὲν AG τῇ ΔZ , ἡ δὲ AB τῇ ΔE . δύο δὲ αἱ GA , AB δυσὶ¹⁸ ταῖς $Z\Delta$, ΔE ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ GAB γωνία τῇ ὑπὸ $Z\Delta E$ ἔστιν ἴση· βάσις ἄρα ὁ $B\Gamma$ βάσις

rectus est. Est autem et angulus $BA\Theta$ ipsi $E\Delta M$ æqualis, supponuntur enim, et est $A\Theta$ ipsi ΔM æqualis; æqualis igitur et AB ipsi ΔE . Quoniam igitur æqualis est quidem AG ipsi ΔZ , ipsa vero AB ipsi ΔE ; duæ igitur GA , AB duabus $Z\Delta$, ΔE æquales sunt. Sed et angulus GAB angulo $Z\Delta E$ est æqualis; basis igitur $B\Gamma$ basi



τῇ EZ ἴση ἔστί· καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τρίγωνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ AGB γωνία τῇ ὑπὸ ΔZE . Ἐστί δὲ καὶ ἑρῆῃ ἡ ὑπὸ AGK ἑρῆῃ τῇ ὑπὸ ΔZN ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $B\Gamma K$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ EZN ἴση ἔστί¹⁹. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $B\Gamma K$ τῇ ὑπὸ ZEN ἔστιν ἴση²⁰. Δύο δὲ τρίγωνα ἔσσι τὰ $B\Gamma K$, ZEN τὰς δύο γωνίας ταῖς²¹ δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς

EZ æqualis est; et triangulum triangulo, et reliqui anguli reliquis angulis; æqualis igitur AGB angulus ipsi ΔZE . Est autem et rectus AGK recto ΔZN æqualis; et reliquus igitur $B\Gamma K$ reliquo EZN æqualis est. Propter eadem utique et angulus $B\Gamma K$ ipsi ZEN est æqualis. Duo utique triangula sunt $B\Gamma K$, ZEN duos angulos duobus angulis æquales habentia, utrumque utriusque, et unum latus $B\Gamma$ uni lateri EZ æquale ad æquales

$E\Delta M$, par supposition, et la droite $A\Theta$ est égale à la droite ΔM ; la droite AB est donc égale à la droite ΔE . Et puisque AG est égal à ΔZ et AB égal à ΔE , les deux droites GA , AB sont égales aux deux droites $Z\Delta$, ΔE . Mais l'angle GAB est égal à l'angle $Z\Delta E$; la base $B\Gamma$ est donc égale à la base EZ (4. 1), le triangle égal au triangle, et les autres angles égaux aux autres angles; l'angle AGB est donc égal à l'angle ΔZE . Mais l'angle droit AGK est égal à l'angle droit ΔZN ; l'angle restant $B\Gamma K$ est donc égal à l'angle restant EZN . Par la même raison, l'angle $B\Gamma K$ est égal à l'angle ZEN ; les deux triangles $B\Gamma K$, ZEN ont donc deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et deux côtés égaux, c'est-à-dire les côtés $B\Gamma$, EZ , qui sont adjacents aux angles égaux; ces deux triangles ont donc les autres

ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν ΒΓ τῆς ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν²² ἢ ΓΚ τῆς ΖΝ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ ἴση, δύο δὲ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶ καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βᾶσις ἄρα ἢ ΑΚ βᾶσει τῆς ΔΝ ἴση ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῆς ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῶν ἀπὸ τῆς ΔΜ. Ἀλλὰ τῶν μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, ὀρθὴ γὰρ ἢ ὑπὸ ΑΚΘ, τῶν δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ἰρθὴ γὰρ ἢ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς²³ ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἢ ΘΚ τῆς ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ βᾶσις ἢ ΘΚ βᾶσει τῆς ΝΜ ἐδείχθη ἴση· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΘΑΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΜΔΝ ἐστὶν ἴση²⁴.

Ἐὰν ἄρα ᾧσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

angulos; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur est ΓΚ ipsi ΖΝ. Est autem et ΑΓ ipsi ΔΖ æqualis, duæ igitur ΑΓ, ΓΚ duabus ΔΖ, ΖΝ æquales sunt et rectos angulos continent; basis igitur ΑΚ basi ΔΝ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΑΘ ipsi ΔΜ, æquale est et quadratum ex ΑΘ quadrato ex ΔΜ. Sed quadrato quidem ex ΑΘ æqualia sunt quadrata ex ΑΚ, ΚΘ, rectus enim ipse ΑΚΘ, quadrato autem ex ΔΜ æqualia quadrata ex ΔΝ, ΝΜ, rectus enim ipse ΔΝΜ; quadrata igitur ex ΑΚ, ΚΘ æqualia sunt quadratis ex ΔΝ, ΝΜ, quorum quadratum ex ΑΚ æquale est quadrato ex ΔΝ; reliquum igitur quadratum ex ΚΘ æquale est quadrato ex ΝΜ; æqualis igitur ΘΚ ipsi ΜΝ. Et quoniam duæ ΘΑ, ΑΚ duabus ΜΔ, ΔΝ æquales sunt utraque utrique, et basis ΘΚ basi ΝΜ ostensa est æqualis; angulus igitur ΘΑΚ angulo ΜΔΝ est æqualis.

Si sint igitur duo, etc.

côtés égaux aux autres côtés (26. 1); le côté ΓΚ est donc égal au côté ΖΝ. Mais ΑΓ est égal à ΔΖ; les deux droites ΑΓ, ΓΚ sont donc égales aux deux droites ΔΖ, ΖΝ, et ces droites comprennent des angles droits; la base ΑΚ est donc égale à la base ΔΝ (4. 1). Et puisque ΑΘ est égal à ΔΜ, le carré de ΑΘ est égal au carré de ΔΜ. Mais les carrés des droites ΑΚ, ΚΘ sont égaux au carré de la droite ΑΘ (47. 1), car l'angle ΑΚΘ est droit, et les carrés des droites ΔΝ, ΝΜ sont égaux au carré de la droite ΔΜ, parce que l'angle ΔΝΜ est droit; les carrés des droites ΑΚ, ΚΘ sont donc égaux aux carrés des droites ΔΝ, ΝΜ; mais le carré de ΑΚ est égal au carré de ΔΝ; le carré restant de ΚΘ est donc égal au carré de ΝΜ; la droite ΘΚ est donc égale à la droite ΜΝ. Et puisque les deux droites ΘΑ, ΑΚ sont égales aux deux droites ΜΔ, ΔΝ, chacune à chacune, et qu'on a démontré que la base ΘΚ est égale à la base ΝΜ, l'angle ΘΑΚ est égal à l'angle ΜΔΝ (8. 1). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἰάν ὧσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἀπ' αὐτῶν² μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρα, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι, ἀγούμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν³.

Ex hoc utique manifestum est, si sint duo anguli plani æquales, constituentur ab ipsis sublimes rectæ æquales æquales angulos continentes cum ipsis a principio rectis, utrumque utrique, ab ipsis perpendiculares, ductæ ad plana in quibus sunt a principio anguli, æquales inter se sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

PROPOSITIO XXXVI.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὧσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μίσης στερεῷ παραλληλεπίπιδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Si tres rectæ proportionales sint; a tribus solidum parallelepipedum æquale est solido a mediâ parallelepipedo, æquilatèro quidem, æqui-angulo autem antedicto.

Ἐστῶσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἢ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω

Sint tres rectæ proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico ex ipsis Α, Β, Γ

COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident que si deux angles plans sont égaux, et que si de leurs sommets on mène au-dessus des plans de ces angles des droites égales qui fassent avec les côtés de ces mêmes angles des angles égaux, chacun à chacun, les perpendiculaires menées de ces droites aux plans des premiers angles seront égales entr'elles.

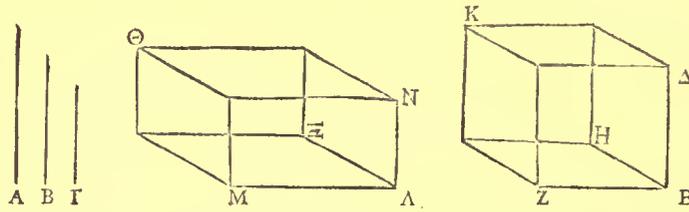
PROPOSITION XXXVI.

Si trois droites sont proportionnelles; le parallélépipède construit avec ces trois droites est égal au parallélépipède construit avec la droite moyenne, ce parallélépipède étant équilatéral et équiangle avec le premier parallélépipède.

Soient trois droites proportionnelles Α, Β, Γ, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le parallélépipède construit avec les trois droites Α, Β, Γ

ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλευρῷ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

solidum æquale esse ex B solido, æquilatèro quidem, æquiangulo autem antedicto.



Ενεκείθω στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ Ε περιγεμένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΕΚ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α κείσθω ἴση ἢ ΑΜ, καὶ συνστάτω πρὸς τῇ ΑΜ εὐθεία καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Ε στερεῇ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΝΑΞ, ΞΑΜ, ΜΑΝ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἢ ΑΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἢ ΑΝ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἢ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἢ μὲν Α τῇ ΑΜ, ἢ δὲ Β ἑκατέρα τῶν ΑΞ, ΕΔ, ἢ δὲ Γ τῇ ΑΝ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ ΑΜ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἢ ΔΕ πρὸς τὴν ΑΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ ΜΑΝ, ΔΕΖ αἰ

Exponantur solidus angulus ad E contentus sub tribus angulis planis ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, et ponatur ipsi quidem Β æqualis unaquæque ipsarum ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, et compleatur ΕΚ solidum parallelepipedum, ipsi vero Α ponatur æqualis ΑΜ, et constituatur ad rectam ΑΜ et ad punctum Α in ipsâ ad Ε angulo solido æqualis solidus angulus contentus sub ipsis ΝΑΞ, ΞΑΜ, ΜΑΝ, et ponatur ipsi quidem Β æqualis ΑΞ, ipsi vero Γ æqualis ΑΝ. Et quoniam est ut Α ad Β ita Β ad Γ, sed æqualis quidem Α ipsi ΑΜ, ipsa vero Β utrique ipsarum ΑΞ, ΕΔ, ipsa autem Γ ipsi ΑΝ; est igitur ut ΑΜ ad ΕΖ ita ΔΕ ad ΑΝ. Et circum æquales angulos ΜΑΝ, ΔΕΖ latera reciproce proportionalia;

est égal au parallélepède construit avec la droite Β, ce parallélepède étant équilatéral et équiangle avec le premier parallélepède.

Soit exposé l'angle solide E compris sous les trois angles plans ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ; faisons les droites ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ égales chacune à la droite Β; achevons le parallélepède ΕΚ; faisons ΑΜ égal à Α; sur la droite ΑΜ et au point Α de cette droite, construisons un angle solide qui étant compris sous les plans ΝΑΞ, ΞΑΜ, ΜΑΝ soit égal à l'angle solide E (26. 11); faisons ΑΞ égal à Β, et ΑΝ égal à Γ. Puisque Α est à Β comme Β est à Γ, que Α est égal à ΑΜ, que Β est égal à chacune des droites ΑΞ, ΕΔ, et que Γ est égal à ΑΝ, la droite ΑΜ sera à la droite ΕΖ comme la droite ΔΕ est à la droite ΑΝ; les côtés placés autour des angles égaux ΜΑΝ, ΔΕΖ sont donc réciproquement proportionnels; le parallélogramme ΜΝ est donc

πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν ἴσον ἄρα ἐστὶ⁵ τὸ MN παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ, ΝΑΜ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφροσθήκασιν⁶ αἱ ΛΞ, ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ σημείων κἀθετοί, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΑΜ, ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ὥστε τὰ ΛΘ, ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστὶ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΛ τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεόν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεόν⁸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλευρῷ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Εάν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquale igitur MN parallelogrammum parallelogrammo ΔΖ. Et quoniam duo anguli plaii rectilinei æquales sunt ΔΕΖ, ΝΑΜ, et ab ipsis sublimes rectæ constituuntur ΛΞ, ΕΗ et æquales inter se et æquales angulos continentes cum ipsis a principio rectis utramque utrique; ipsæ igitur a punctis Η, Ξ perpendiculares, ductæ ad plana per ΝΑΜ, ΔΕΖ, æquales inter se sunt; quare solida ΛΘ, ΕΚ in eadem altitudine sunt. Solida autem in æqualibus basibus parallelepipeda et in eadem altitudine æqualia inter se sunt; æquale igitur est ΑΘ solidum solido ΕΚ. Et est quidem ex ipsis Α, Β, Γ solidum ΘΛ; ipsum vero ΕΚ ex Β solidum; ergo ex ipsis Α, Β, Γ solidum æquale est ex Β solido, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Si igitur tres, etc.

égal au parallélogramme ΔΖ (14. 6). Et puisque les deux angles plans rectilignes ΔΕΖ, ΝΑΜ sont égaux, que les droites ΛΞ, ΕΗ qui sont égales entr'elles, et qui sont menées au-dessus des plans des angles égaux ΔΕΖ, ΝΑΜ font avec leurs côtés des angles égaux, chacun à chacun, les perpendiculaires menées des points Ξ, Η aux plans ΝΑΜ, ΔΕΖ seront égales entr'elles (corol. 35. 11); les parallélépipèdes ΛΘ, ΕΚ ont donc la même hauteur. Mais les parallélépipèdes qui ont des bases égales et la même hauteur sont égaux entre eux (31. 11); le parallélépipède ΘΛ est donc égal au parallélépipède ΕΚ. Mais le parallélépipède ΘΛ a été construit avec les trois droites Α, Β, Γ, et le parallélépipède ΕΚ a été construit avec la droite Β; le parallélépipède construit avec les trois droites Α, Β, Γ est donc égal au parallélépipède construit avec la droite Β, ce parallélépipède étant équilatéral et équiangle avec le premier parallélépipède. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

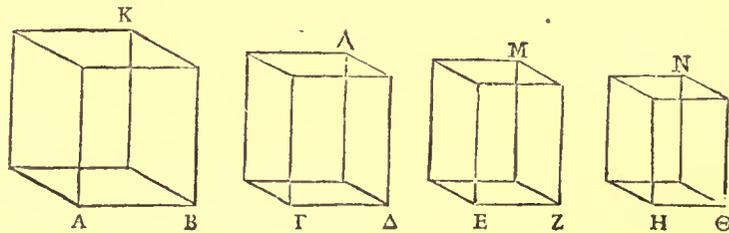
PROPOSITIO XXXVII.

Εάν τέσσαρες εὐθείαι ἀνάλογον ᾧσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐάν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾧ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως

Si quatuor rectæ proportionales sint; et ab ipsis solida parallelepipeda et similia et similiter descripta proportionalia erunt; et si ab ipsis solida parallelepipeda et similia et similiter proportionalia sint; et ipsæ rectæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ, ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ, et describantur ab ipsis AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ et similia et similiter posita solida parallelepipeda KA, ΑΓ,



κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ KA, ΑΓ, ME, NH; dico esse ut KA ad ΑΓ ita ME ad NH. λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ KA πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ME πρὸς τὸ NH.

PROPOSITION XXXVII.

Si quatre droites sont proportionnelles, les parallélépipèdes semblables et semblablement construits sur ces droites sont proportionnels; et si des parallélépipèdes semblables et semblablement construits sur quatre droites sont proportionnels, ces mêmes droites seront aussi proportionnelles entr'elles.

Soient quatre droites proportionnelles AB; ΓΔ, EZ, ΗΘ, de manière que AB soit à ΓΔ comme EZ est à ΗΘ; construisons sur les droites AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ les parallélépipèdes semblables et semblablement placés KA, ΑΓ, ME, NH; je dis que KA est à ΑΓ comme ME est à NH.

Επει γὰρ ὁμοίων³ ἔστι τὸ ΚΑ στερεὸν πα-
ραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ⁴, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ
ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΑΒ πρὸς
τὴν ΓΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ
ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΕΖ πρὸς
τὴν ΗΘ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ
οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· καὶ⁵ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ
πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ
ΛΓ στερεὸν οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ
ΝΗ· λέγω ἔτι ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς
τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Επει γὰρ πάλιν τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλα-
σίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ,
ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα
λόγον ἢπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔστιν ὡς
τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ·
καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ
πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐάν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim simile est KA solidum pa-
rallelepipedum ipsi ΛΓ, ergo KA ad ΛΓ tripli-
catam rationem habet ejus quam AB ad ΓΔ.
Propter eadem utique et ME ad NH triplica-
tam rationem habet ejus quam EZ ad ΗΘ.
Atque est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ; et ut
igitur AK ad ΛΓ ita ME ad NH.

At vero sit ut AK solidum ad ΛΓ solidum
ita ME solidum ad NH; dico esse ut recta AB
ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ.

Quoniam enim rursus KA ad ΛΓ triplicatam
rationem habet ejus quam AB ad ΓΔ; habet autem
et ME ad NH triplicatam rationem ejus quam
EZ ad ΗΘ, et est ut KA ad ΛΓ ita ME ad
NH; et ut igitur AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ.

Si igitur quatuor, etc.

Car puisque le parallépipède KA est semblable au parallépipède ΛΓ, le pa-
rallépipède KA aura avec le parallépipède ΛΓ une raison triplée de celle que
AB a avec ΓΔ (53. 11). Par la même raison, le parallépipède ME aura avec le
parallépipède NH une raison triplée de celle que EZ a avec ΗΘ. Mais AB est à
ΓΔ comme EZ est à ΗΘ; donc AK est à ΛΓ comme ME est à NH.

Mais que le parallépipède AK soit au parallépipède ΛΓ comme le parallé-
pipède ME est au parallépipède NH; je dis que la droite AB est à ΓΔ comme
EZ est à ΗΘ.

Car puisque le parallépipède KA a avec le parallépipède ΛΓ une raison tri-
plée de celle que AB a avec ΓΔ, que ME a avec NH une raison triplée de celle
que EZ a avec ΗΘ, et que KA est à ΛΓ comme ME est à NH, la droite AB sera à la
droite ΓΔ comme la droite EZ est à la droite ΗΘ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

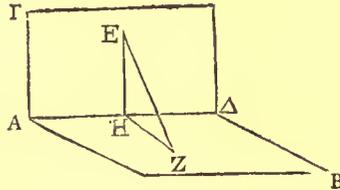
PROPOSITIO XXXVIII.

Εάν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾦ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τοῦ ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῆ· ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἢ ἀγομένη κάθετος.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ἈΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημείον το Ε· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΑΔ πεσεῖται.

Si planum ad planum rectum sit, et ab aliquo puncto eorum in uno planorum ad alterum planum perpendicularis ducatur, in communem sectionem planorum cadet ducta perpendicularis.

Planum enim ΓΔ plano ΑΒ ad rectos sit, communis autem ipsorum sectio sit ΑΔ, et sumatur in plano ΓΔ quodlibet punctum Ε; dico a puncto Ε ad planum ΑΒ perpendicularem ductam in ipsam ΑΔ cadere.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημείον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ

Non enim, sed si possibile cadat extra ut ΕΖ, et occurrat plano ΑΒ in puncto Ζ, et a puncto Ζ ad ΑΔ in plano ΑΒ perpen-

PROPOSITION XXXVIII.

Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, et si d'un point pris dans un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l'autre plan, cette perpendiculaire tombera sur la section commune des plans.

Que le plan ΓΔ soit perpendiculaire au plan ΑΒ, que leur commune section soit ΑΔ, et prenons dans le plan ΓΔ un point quelconque Ε; je dis que la perpendiculaire menée du point Ε au plan ΑΒ tombera sur la droite ΑΔ.

Car que cela ne soit point, mais, si cela est possible, qu'elle tombe en dehors comme ΕΖ, et qu'elle rencontre le plan ΑΒ au point Ζ; du point Ζ

τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κάθετος ἦχθω¹
 ἢ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑρθάς
 ἴστι, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ
 τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑρθάς ἐστίν, ἀπτεται
 δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ, οὔσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ
 ἑρθὴ ἄρα ἐστίν² ἢ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. Ἀλλὰ δὴ³
 καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑρθάς ἐστίν
 ἢ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ἑρθὴ ἴστι. Τριγώνου δὲ τοῦ
 ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι δυσὶν⁴ ἑρθαῖς ἴσαι εἰσίν,
 ὅπερ ἀδύνατον⁴. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ
 ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται
 τῆς ΔΑ· ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον, καὶ τα ἐξῆς.

dicularis ducatur ZH, quæ quidem et plano ΓΔ
 ad rectos est, et jungatur ipsa EH. Quoniam
 igitur ZH plano ΓΔ ad rectos est, contingit
 autem ipsam ipsa EH, existens in plano ΓΔ;
 rectus igitur est angulus ZHE. At vero et EZ
 plano ΑΒ ad rectos est; angulus igitur EZH
 rectus est. Sed trianguli EZH duo anguli duo-
 bus rectis æquales sunt, quod impossibile;
 non igitur a puncto E ad planum ΑΒ perpen-
 dicularis ducta cadet extra ipsam ΔΑ; ergo in
 ipsam ΔΑ cadet.

Si igitur planum, etc.

et dans le plan AB menons la droite ZH perpendiculaire à ΔΑ (10. 1), cette droite sera perpendiculaire au plan ΓΔ (déf. 4. 11); joignons ΕΗ. Puisque la droite ZH est perpendiculaire au plan ΓΔ, et qu'elle est rencontrée par la droite ΕΗ, qui est dans le plan ΓΔ; l'angle ZHE sera droit. Mais la droite ΕΖ est perpendiculaire au plan ΑΒ; l'angle ΕΖΗ est donc droit; deux angles du triangle ΕΖΗ sont égaux à deux droits, ce qui est impossible (17. 1); la perpendiculaire menée du point E au plan ΑΒ ne tombe donc pas hors de la droite ΔΑ; elle tombe donc sur la droite ΔΑ. Donc si, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 39'.

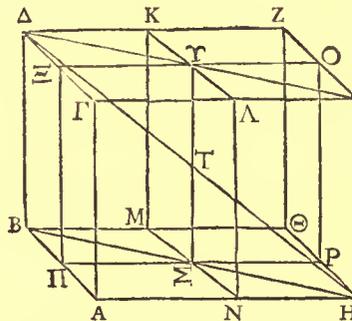
PROPOSITIO XXXIX.

Εάν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου¹ τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῆ² ἢ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου² διάμετρος δίχα τίμνουσιν ἴσας.

Si solidi parallelepipedum oppositorum planorum latera bifariam secentur, per sectiones vero plana producantur, communis sectio planorum et solidi parallelepipedum diameter bifariam se secabunt.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου³ τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ

Solidi enim ΑΖ parallelepipedum oppositorum planorum ΓΖ, ΑΘ latera secantur in Κ, Λ,



δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΝ, ΕΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΓΣ, τοῦ δὲ ΑΖ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου⁵ διαγώνιος ἡ ΔΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ⁶, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.

Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ punctis; per sectiones autem plana producantur ipsa ΚΝ, ΕΡ, communis vero sectio planorum sit ΓΣ, solidi ΑΖ autem parallelepipedum diameter ΔΗ; dico æqualem esse ipsam quidem ΥΤ ipsi ΤΣ, ipsam vero ΔΤ ipsi ΤΗ.

PROPOSITION XXXIX.

Si l'on coupe en deux parties égales les côtés des plans opposés d'un parallélépipède, et si par leurs sections on mène des plans, la commune section de ces plans et le diamètre du parallélépipède se couperont mutuellement en deux parties égales.

Que les côtés des plans opposés ΓΖ, ΑΘ du parallélépipède ΑΖ soient coupés en deux parties égales aux points Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ, et par ces points menons les plans ΚΝ, ΕΡ; que la commune section de ces plans soit ΓΣ, et que le diamètre du parallélépipède ΑΖ soit ΔΗ; je dis que ΥΤ est égal à ΤΣ et ΔΤ égal à ΤΗ.

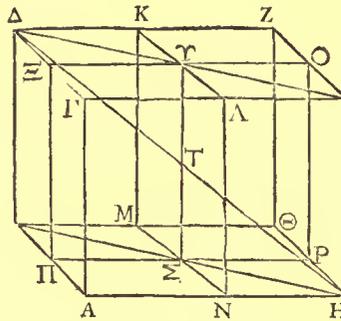
Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλάξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον⁸, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι⁹. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνία· διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖα ἐστὶν ἡ ΔΥΕ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖα ἐστὶ καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστὶ καὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστὶ¹⁰ καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΒ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν¹¹ ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. Καὶ εἰλήθθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Υ, Η, Σ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΗ, ΥΣ· ἢ ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ, ΥΣ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ, ἴση ἄρα ἡ μὲν¹² ὑπὸ ΕΔΥ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΥ, ἐναλλάξ γάρ. Η δὲ¹³

Jungantur enim ipsæ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΕ. Et quoniam parallela est ipsa ΔΞ ipsi ΟΕ; alterni igitur anguli ΔΞΥ, ΥΟΕ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ipsa quidem ΔΞ ipsi ΟΕ; ipsa vero ΞΥ ipsi ΥΟ, et angulos æquales continent; basis igitur ΔΥ ipsi ΥΕ est æqualis, et ΔΞΥ triangulum ipsi ΟΥΕ triangulo est æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales; æqualis igitur ΞΥΔ angulus ipsi ΟΥΕ angulo, æqualis igitur ΞΥΔ angulus ipsi ΟΥΕ angulo; ob id utique recta est ipsa ΔΥΕ; propter eadem utique ipsa ΒΣΗ recta est, et æqualis ΒΣ ipsi ΣΗ. Et quoniam ΓΑ ipsi ΔΒ æqualis est parallela; sed ΓΑ et ipsi ΕΗ æqualis est et parallela; et ΔΒ igitur ipsi ΕΗ æqualis est et parallela. Et conjungunt ipsas rectæ ΔΕ, ΗΒ; parallela igitur est ΔΕ ipsi ΒΗ. Et sumpta sunt in utràque ipsarum quælibet puncta Δ, Υ, Η, Σ, et junctæ sunt ipsæ ΔΗ, ΥΣ; in uno igitur sunt plano ipsæ ΔΗ, ΥΣ. Et quoniam parallela est ΔΕ ipsi ΒΗ, æqualis igitur quidem ΕΔΥ angulus ipsi ΒΗΥ,

Car joignons ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Puisque ΔΞ est parallèle à ΟΕ, les angles alternes ΔΞΥ, ΥΟΕ sont égaux entr'eux (29. 1). Et puisque ΔΞ est égal à ΟΕ, et ΞΥ égal à ΥΟ, et que ces droites comprennent des angles égaux, la base ΔΥ sera égale à la base ΥΕ, le triangle ΔΞΥ égal au triangle ΟΥΕ, et les autres angles égaux aux autres angles (4. 1); l'angle ΞΥΔ est donc égal à l'angle ΟΥΕ, la ligne ΔΥΕ est donc une ligne droite (14. 1). Par la même raison, la ligne ΒΣΗ est aussi une ligne droite, et la droite ΒΣ égale à la droite ΣΗ. Et puisque la droite ΓΑ est égale et parallèle à ΔΒ, et que la droite ΓΑ est aussi égale et parallèle à la droite ΕΗ, la droite ΔΒ sera égale et parallèle à la droite ΕΗ (30. 1). Mais ces droites sont jointes par les droites ΔΕ, ΗΒ; la droite ΔΕ est donc parallèle à la droite ΒΗ (33. 1). Mais on a pris dans chacune de ces droites des points quelconques Δ, Υ, Η, Σ, et on a joint ΔΗ, ΥΣ; les droites ΔΗ, ΥΣ sont donc dans un seul plan (7. 11). Et puisque la droite ΔΕ est parallèle à la droite ΒΗ, les angles ΕΔΥ, ΒΗΥ sont égaux, car ils sont alternes (29. 1). Mais l'angle ΔΥΥ est égal à l'angle ΗΥΣ (15. 1); les deux

ὑπὸ $\Delta\Upsilon\Upsilon$ τῆ ὑπὸ $\text{HT}\Sigma$ ἴση¹⁴. δύο δὲ τρίγωνά
 ἴσσι τὰ $\Delta\Upsilon\Upsilon$, $\text{HT}\Sigma$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοῖ
 γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾶ
 πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν

alterni enim. Ipse autem $\Delta\Upsilon\Upsilon$ ipsi $\text{HT}\Sigma$ æqualis ;
 duo igitur triangula $\Delta\Upsilon\Upsilon$, $\text{HT}\Sigma$ sunt duos angu-
 los duabus angulis æquales habentia , et unum
 latus uni lateri æqualem subtendens unum



ἴσων γωνιῶν, τὴν $\Delta\Upsilon$ τῆ $\text{H}\Sigma$, ἡμίσειαι γάρ
 εἰσι τῶν ΔE , BH καὶ τὰς λοιπὰς ἀρα¹⁵ πλευρὰς
 ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς¹⁶ ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα
 ἢ μὲν $\Delta\Upsilon$ τῆ TH , ἢ δὲ $\Upsilon\Upsilon$ τῆ $\text{T}\Sigma$.

æqualium angulorum , ipsum $\Delta\Upsilon$ ipsi $\text{H}\Sigma$, di-
 midia enim sunt ipsorum ΔE , BH ; reliqua igitur
 latera reliquis lateribus æqualia habebunt ; æqua-
 lis igitur quidem ipsa $\Delta\Upsilon$ ipsi TH , ipsa vero
 $\Upsilon\Upsilon$ ipsi $\text{T}\Sigma$.

Ἐὰν ἄρα στερεοῦ, καὶ τὰ ἐξῆς¹⁷.

Si igitur solidi, etc.

triangles $\Delta\Upsilon\Upsilon$, $\text{HT}\Sigma$ ont deux angles égaux à deux angles, et deux côtés égaux, c'est-à-dire les côtés $\Delta\Upsilon$, $\text{H}\Sigma$ qui sont opposés à des angles égaux, car ces côtés sont les moitiés des droites ΔE , BH ; ces deux triangles auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés (26. 1) ; la droite $\Delta\Upsilon$ est donc égale à TH , et la droite $\Upsilon\Upsilon$ égale à $\text{T}\Sigma$. Donc , etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

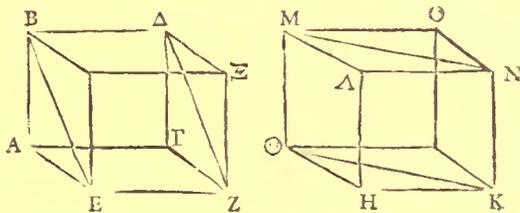
PROPOSITIO XL.

Εάν ἦ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχη βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἦ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἐστω πρίσματα ἰσοῦψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΑΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΑΜΝ πρίσματι.

Si sint duo prismata æque alta, et unum quidem habeat basim parallelogrammum, alterum vero triangulum, duplum autem sit parallelogrammum trianguli, æqualia erunt prismata.

Siut prismata æque alta ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΑΜΝ, et unum quidem habeat basim ΑΖ parallelogrammum, alterum vero ΗΘΚ triangulum, duplum sit autem ΑΖ parallelogrammum ipsius ΗΘΚ trianguli; dico æquale esse ΑΒΓΔΕΖ prisma ipsi ΗΘΚΑΜΝ prismati.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΘ στερεά. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ

Compleantur enim ΑΞ, ΗΘ solida. Et quoniam duplum est ΑΖ parallelogrammum trianguli ΗΘΚ, est autem et ΘΚ parallelogrammum

PROPOSITION XL.

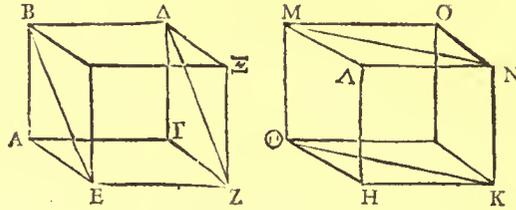
Si deux prismes sont égaux en hauteur, si l'un d'eux a pour base un parallélogramme, et l'autre un triangle, et si le parallélogramme est double du triangle, ces prismes seront égaux.

Soient ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΑΜΝ des prismes égaux en hauteur, que l'un d'eux ait pour base le parallélogramme ΑΖ, et l'autre le triangle ΗΘΚ, et que le parallélogramme ΑΖ soit double du triangle ΗΘΚ; je dis que le prisme ΑΒΓΔΕΖ est égal au prisme ΗΘΚΑΜΝ.

Car achevons les parallélépipèdes ΑΞ, ΗΘ. Puisque le parallélogramme ΑΖ est double du triangle ΗΘΚ, et le parallélogramme ΘΚ double aussi du triangle ΗΘΚ (34.1),

ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ
 τριγώνου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλό-
 γραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογρᾶμμῳ. Τὰ δὲ
 ἐπὶ ἴσων βάσεων ἔντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα

duplum ipsius ΗΘΚ trianguli; æquale igitur est
 ΑΖ parallelogrammum ipsi ΘΚ parallelogram-
 mo. In æqualibus autem basibus existentia so-
 lida parallelepipeda et in eadem altitudine æqua-



καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοισι εἰσὶν ἴσον ἄρα
 ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. Καὶ ἐστὶ τοῦ
 μὲν ΑΞ στερεοῦ ἡμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ
 ΗΟ στερεοῦ ἡμισυ τὸ ΗΘΚΑΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα
 ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΑΜΝ πρίσματι.
 Ἐὰν ἄρα ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

lia inter se sunt; æquale igitur est ΑΞ solidum
 ipsi ΗΟ solido. Et est ipsius quidem ΑΞ solidi
 dimidium prisma ΑΒΓΔΕΖ, ipsius autem ΗΟ solidi
 dimidium prisma ΗΘΚΑΜΝ; æquale igitur est
 ΑΒΓΔΕΖ prisma ipsi ΗΘΚΑΜΝ prismati.
 Si igitur sint, etc.

le parallélogramme ΑΖ sera égal au parallélogramme ΘΚ. Mais les parallélépipèdes
 qui ont des bases égales et la même hauteur sont égaux entr'eux (31. 11); le
 parallélépipède ΑΞ est donc égal au parallélépipède ΗΟ. Mais le prisme ΑΒΓΔΕΖ
 est la moitié du parallélépipède ΑΞ, et le prisme ΗΘΚΑΜΝ la moitié du parallélé-
 pipède ΗΟ; le prisme ΑΒΓΔΕΖ est donc égal au prisme ΗΘΚΑΜΝ. Donc, etc.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R D U O D E C I M U S .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

PROPOSITIO I.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα ἔστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγώνων.

Ἐστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, διαμέτροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω

In circulis similia polygona inter se sunt ut ex diametris quadrata.

Sint circuli ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, et in ipsis similia polygona sint ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, diametri autem circulorum sint ipsæ ΒΜ, ΗΝ; dico esse ut

LE DOUZIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

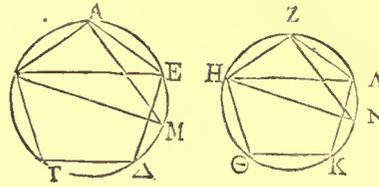
PROPOSITION I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les quarrés des diamètres.

Soient les cercles ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ; soient dans ces cercles les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, et que les diamètres de ces cercles soient ΒΜ, ΗΝ; je dis que

ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον.

quadratum ex BM ad ipsum ex HN quadratum ita ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum.



Επιζεύχθωσαν γὰρ αἱ BE, AM, HA, ZN. Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΑ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΑ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. δύο δὲ τριγῶνά ἐστι τὰ ΒΑΕ, ΗΖΑ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσων ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΑ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΑ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἐστὶν ἴση, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασι; ἡ δὲ ὑπὸ ΖΑΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ

Jungantur enim ipsæ BE, AM, HA, ZN. Et quoniam simile est ΑΒΓΔΕ polygonum ipsi ΖΗΘΚΑ polygono, æqualis est et ΒΑΕ angulus ipsi ΗΖΑ, et est ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΗΖ ad ΖΑ; duo igitur triangula sunt ΒΑΕ, ΗΖΑ unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum ΒΑΕ ipsi ΗΖΑ, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangulum igitur est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΑ triangulo, æqualis igitur est ΑΕΒ angulus ipsi ΖΑΗ. Sed ipse quidem ΑΕΒ ipsi ΑΜΒ est æqualis; in eadem enim circumferentiâ consistunt; ipse autem ΖΑΗ ipsi ΖΝΗ; et

le carré de BM est au carré de HN comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΑ.

Car joignons BE, AM, HA, ZN. Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΑ, que l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΑ (déf. 1. 6), et que ΒΑ est à ΑΕ comme ΗΖ est à ΖΑ, les deux triangles ΒΑΕ, ΗΖΑ ont un angle égal à un angle; savoir, l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΗΖΑ, et les côtés, placés autour de ces angles, proportionnels; les triangles ΑΒΕ, ΖΗΑ sont donc équiangles (6. 6); l'angle ΑΕΒ est donc égal à l'angle ΖΑΗ. Mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΑΜΒ (21. 3), car ces angles sont appuyés sur le même arc, et l'angle ΖΑΗ est aussi égal à l'angle ΖΝΗ; l'angle ΑΜΒ est donc égal à l'angle ΖΝΗ. Mais l'angle

ὕπὸ AMB ἄρα τῆ ὕπὸ ZNH ἐστὶν ἴση⁴. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἢ ὕπὸ BAM ἑρθῆ τῆ ὕπὸ HZN ἴση· καὶ ἢ λοιπὴ ἄρα τῆ λοιπῆ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ⁵ τὸ ABM τρίγωνον τῶ ZHN τριγώνω· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ BM πρὸς τὴν HN οὕτως ὁ BA πρὸς τὴν HZ. Ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς BM πρὸς τὴν HN λόγου διπλασίον ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς BM τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς⁶ HN τετραγώνου, τοῦ δὲ τῆς BA πρὸς τὴν HZ διπλασίον ἐστὶν ὁ τοῦ ABΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ZHΘΚΑ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BM τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετραγώνου οὕτως τὸ ABΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ZHΘΚΑ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipse AMB igitur ipsi ZNH est æqualis. Est autem et rectus BAM recto HZN æqualis; et reliquus igitur reliquo est æqualis; æquiangulum igitur est ABM triangulum triangulo ZHN; proportiona-liter igitur est ut BM ad HN ita BA ad HZ. Sed ratio quidem ipsius BM ad ipsam HN duplicata est ratio quadrati ex BM ad quadratum ex HN, rationis vero ipsius BA ad HZ duplicata est ratio polygoni ABΓΔΕ ad polygonum ZHΘΚΑ; et ut igitur quadratum ex BM ad quadratum ex HN ita polygonum ABΓΔΕ ad polygonum ZHΘΚΑ.

In circulis igitur, etc.

droit BAM est égal à l'angle droit HZN (31. 5); l'angle restant est donc égal à l'angle restant; les deux triangles ABM, ZHN sont donc équiangles; BM est donc à HN comme BA est à HZ (4. 6). Mais la raison du carré de BM au carré de HN est double de la raison BM à HN (20. 6), et la raison du polygone ABΓΔΕ au polygone ZHΘΚΑ est double de la raison de BA à HZ; le carré de BM est donc au carré de HN comme le polygone ABΓΔΕ est au polygone ZHΘΚΑ (11. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἐστωσαν κύκλοι οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$, διαμέτρων δὲ αὐτῶν ἕστωσαν αἱ $ΒΔ$, $ΖΘ$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΘ$ οὕτως ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον¹.

Εἰ γὰρ μή ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΘ$ οὕτως ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον², ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ τετράγωνον³ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΘ$ οὕτως ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος ἢ τοῖς πρὸς ἕλασσόν τι τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μείζον. Ἐστω πρότερον πρὸς ἕλασσον τὸ $Σ$. Καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον τετράγωνον τὸ $ΕΖΗΘ$. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$ σημείων ἐφαπτομένης εὐθείας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισυ

Circuli inter se sunt ut ex diametris quadrata.

Sint circuli $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$, diametri autem ipsorum sint $ΒΔ$, $ΖΘ$; dico esse ut quadratum ex $ΒΔ$ ad ipsum ex $ΖΘ$ ita circulum $ΑΒΓΔ$ ad circulum $ΕΖΗΘ$.

Si enim non est ut quadratum ex $ΒΔ$ ad ipsum ex $ΖΘ$ ita circulus $ΑΒΓΔ$ ad circulum $ΕΖΗΘ$, erit ut quadratum ex $ΒΔ$ ad quadratum ex $ΖΘ$ ita circulus $ΑΒΓΔ$ vel ad spatium aliquod minus circulo $ΕΖΗΘ$ vel ad majus. Sit primum ad minus $Σ$. Et describatur in circulo $ΕΖΗΘ$ quadratum $ΕΖΗΘ$; descriptum utique quadratum majus est quam dimidium circuli $ΕΖΗΘ$, quoniam si per $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$ puncta rectas contingentes circulum ducamus, descripti circulum quadrati dimidium est $ΕΖΗΘ$ quadra-

PROPOSITION II.

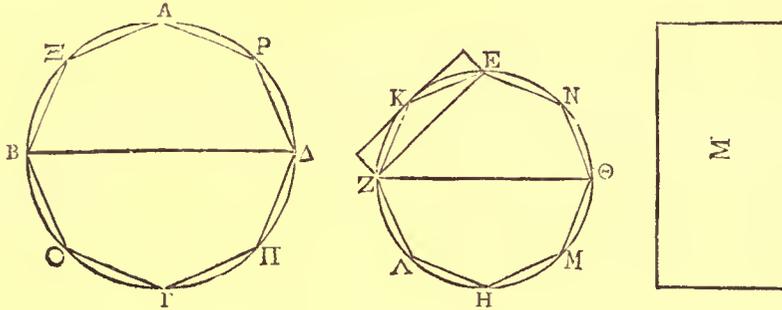
Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Soient les cercles $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$, et que leurs diamètres soient $ΒΔ$, $ΖΘ$; je dis que le quarré de $ΒΔ$ est au quarré de $ΖΘ$ comme le cercle $ΑΒΓΔ$ est au cercle $ΕΖΗΘ$.

Car si le quarré de $ΒΔ$ n'est pas au quarré de $ΖΘ$ comme le cercle $ΑΒΓΔ$ est au cercle $ΕΖΗΘ$, le quarré $ΒΔ$ sera au quarré de $ΖΘ$ comme le cercle $ΑΒΓΔ$ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle $ΕΖΗΘ$. Que ce soit d'abord à une surface $Σ$ plus petite. Dans le cercle $ΕΖΗΘ$ décrivons le quarré $ΕΖΗΘ$; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle $ΕΖΗΘ$, parce que, si par les points $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$ nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré $ΕΖΗΘ$ sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 11 et 51. 3).

ἔστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον. Τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἔστιν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἔστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ,

tum. Circumscripto autem quadrato minor est circulus; quare ΕΖΗΘ inscriptum quadratum majus est dimidio circuli ΕΖΗΘ. Secentur bifariam ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ circumferentiæ in Κ, Λ, Μ, Ν punctis, et jungantur ipsæ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ;



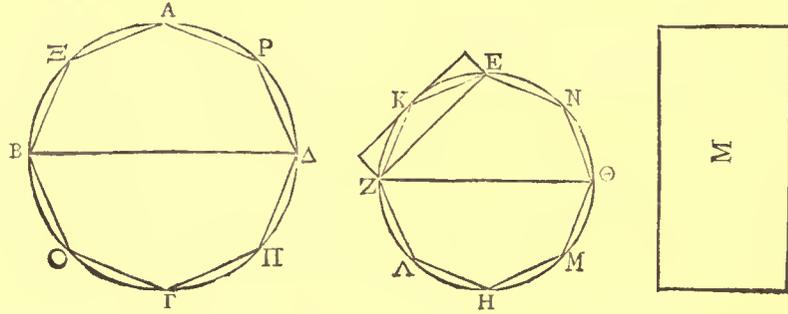
ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνον μείζον ἔστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· ἐπειδὴ περὶ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ἐφαπτιμένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἀπὸ⁵ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα⁶, ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται

que igitur triangulorum ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ majus est dimidio segmenti circuli in quo est; quoniam si per Κ, Λ, Μ, Ν puncta contingentes circulum ducamus, si compleamus parallelogramma super ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ rectas, unumquodque ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ triangulorum dimidium erit parallelogrammi in quo

Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit ΕΖΗΘ est donc plus grand que la moitié du cercle ΕΖΗΘ. Partageons les arcs ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ en deux parties égales aux points Κ, Λ, Μ, Ν, et joignons ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. Chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points Κ, Λ, Μ, Ν nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus

τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμήμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου ὥστε ἕκαστον τῶν EKZ , ZAH , $HM\Theta$, ΘNE τριγώνων μείζον ἐστὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ

est. Sed segmentum minus est parallelogrammo in quo est; quare unumquodque EKZ , ZAH , $HM\Theta$, ΘNE triangulorum majus est dimidio segmenti circuli in quo est; secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, et jungentes



ἐπιζευγνόντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψμεν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσοι αὐτῆς ὑπερχῆς, ἢ ὑπερχει ὁ $EZH\Theta$ κύκλος τοῦ Σχωρίου. Εδείχθη γάρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἰὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἡμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἡμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνεται, λειφθήσεται τι

reetas, et hoc semper facientes, relinquemus quædam segmenta circuli quæ erunt minora excessu quo superat circulus $EZH\Theta$ spatium Σ . Ostensum enim est ut in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majore auferatur majus quam dimidium, et a relicto majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relinquendam esse aliquam

petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles EKZ , ZAH , $HM\Theta$, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle $EZH\Theta$ sur la surface Σ ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des gran-

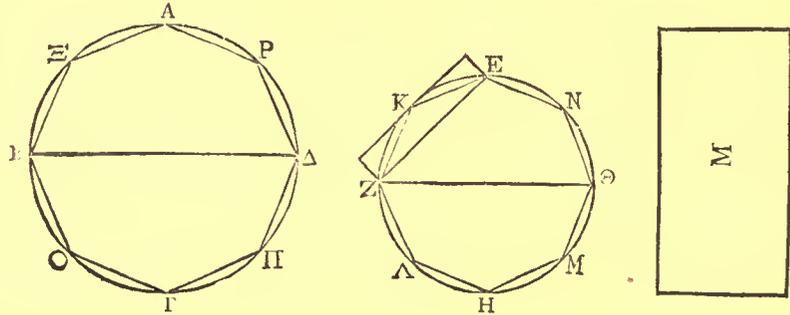
μέγροθος ὁ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονις
 μεγέθους. Λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν
 ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΔΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήμα-
 τα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς
 ἢ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου.
 λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μείζον
 ἔστι τοῦ Σ χωρίου. Εγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν
 ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον
 πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ
 ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ
 τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΗΔΡ πολύγωνον
 πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. Ἀλλὰ καὶ
 ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον·
 καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον
 οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ
 ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ
 ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον οὕτως
 τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον.
 Μείζον δὲ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυ-
 γώνου· μείζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ
 ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον,
 ἔπερ ἔστιν¹⁰ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔστιν¹¹ ὡς τὸ

magnitudinem quæ minor erit expositâ minore
 magnitudine. Relicta sint igitur, et sint segmata
 super ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΔΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ
 minora quam circulus ΕΖΗΘ excessu quo superat
 circulus ΕΖΗΘ spatium Σ; reliquum igitur poly-
 gonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ majus est spatio Σ. Descri-
 batur et in circulo ΑΒΓΔ polygono ΕΚΖΛΗΜΘΝ
 simile polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ; est igitur ut
 quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita poly-
 gonum ΑΞΒΟΓΗΔΡ ad polygonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ.
 Sed et ut quadratum ex ΒΔ ad ipsum ex ΖΘ ita
 circulus ΑΒΓΔ ad spatium Σ; et ut igitur circulus
 ΑΒΓΔ ad spatium Σ ita polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ
 ad polygonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ; permutando igitur
 ut circulus ΑΒΓΔ ad polygonum quod in ipso
 est ita spatium Σ ad polygonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ.
 Major autem circulus ΑΒΓΔ polygono quod
 in ipso est; majus igitur et spatium Σ poly-
 gonο ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Sed et minus, quod est
 impossibile; non igitur est ut quadratum ex

deurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle ΕΖΗΘ placés sur les droites ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΔΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; le polygone restant ΕΚΖΛΗΜΘΝ sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ΑΒΓΔ un polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ semblable au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; le quarré de ΒΔ sera au quarré de ΖΘ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ (1. 12). Mais le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Σ; le cercle ΑΒΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; donc, par permutation, le cercle ΑΒΓΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais le cercle ΑΒΓΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible;

ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον. Λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ

ΒΔ ad ipsum ex ΖΘ ita circulus ΑΒΓΔ ad spatium aliquod minus circulo ΕΖΗΘ. Similiter utique ostendemus neque ut ipsum ex ΖΘ ad ipsum ex ΒΔ ita circulum ΕΖΗΘ ad spatium aliquod minus circulo ΑΒΓΔ. Dico etiam neque



ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Σ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν¹⁴ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ κύκλον· ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος¹⁵ πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου

ut ipsum ex ΒΔ ad ipsum ex ΖΘ ita circulum ΑΒΓΔ ad aliquod spatium majus circulo ΕΖΗΘ. Si enim possibile, sit ad majus Σ. Invertendo igitur est ut quadratum ex ΖΘ ad ipsum ex ΒΔ ita spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ; sed ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad aliquod spatium minus circulo ΑΒΓΔ; et ut igitur ipsum

le carré de ΒΔ n'est donc point au carré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Nous démontrerons semblablement que le carré de ΖΘ n'est point au carré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Je dis ensuite que le carré de ΒΔ n'est point au carré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Car si cela est possible, que le carré de ΒΔ soit au carré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le carré de ΖΘ sera au carré de ΒΔ comme la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface

χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ¹⁶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἕλαττον τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη¹⁷. οὐκ ἄρα ἐστίν¹⁸ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἕλασσαν ἐστίν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον¹⁹ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

cx ZΘ ad ipsum ex ΒΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad spatium aliquod minus circulo ΑΒΓΔ, quod impossibile ostensum est. Non igitur est ut quadratum ex ΒΔ ad ipsum ex ΖΘ ita circulus ΑΒΓΔ ad spatium aliquod majus circulo ΕΖΗΘ. Ostensum est autem neque ad minus; est igitur ut quadratum cx ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita circulus ΑΒΓΔ ad circulum ΕΖΗΘ.

Circuli igitur, etc.

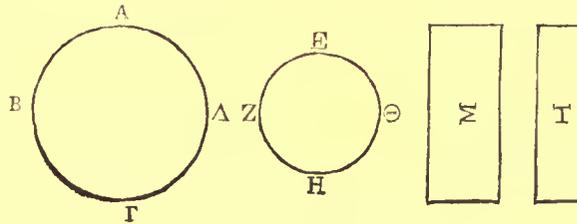
plus petite que le cercle ΑΒΓΔ; le carré de ΖΘ est donc au carré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le carré de ΒΔ n'est donc pas au carré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Mais on a démontré que le carré de ΒΔ n'est point au carré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ; le carré de ΒΔ est donc au carré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ. Donc, etc.

Α Η Μ Μ Α.

LEMMA.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἕλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Dico utique, spatio Σ majore existente circulo ΕΖΗΘ, esse ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulum ΕΖΗΘ ad spatium aliquod minus circulo ΑΒΓΔ.



Γεγονέτω γάρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· λέγω ὅτι ἕλασσόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· ἐναλλάξ ἄρα² ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. Μείζον δὲ τὸ

Fiat enim ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad spatium Τ; dico minus esse spatium Τ circulo ΑΒΓΔ. Quoniam enim est ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad spatium Τ; permutando igitur est ut spatium Σ ad circulum ΕΖΗΘ ita circulus ΑΒΓΔ ad spatium Τ. Majus autem spatium

L E M M E.

Je dis que si la surface Σ est plus grande que le cercle ΕΖΗΘ, la surface Σ sera au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ.

Car que la surface Σ soit au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface Τ; je dis que la surface Τ est plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Car puisque la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à la surface Τ, par permutation, la surface Σ sera au cercle ΕΖΗΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Τ (16. 5). Mais la surface Σ est plus grande que le cercle ΕΖΗΘ; le cercle

Σ χωρίον³ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου· ὥστε ἴστιν⁴ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι⁵.

Σ circulo ΕΖΗΘ. Major igitur et circulus ΑΒΓΔ spatio Τ; quare est ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad spatium aliquod minus circulo ΑΒΓΔ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Πᾶσα πυραμὶς τριγώνων ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἔχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ἔλει· καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἐστω πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας² ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις

Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides et æquales et similes inter se, triangulares bases habentes, et similes toti; et in duo prismata æqualia; et duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

Sit pyramis, cujus basis quidem ΑΒΓ triangulum, vertex vero Δ punctum; dico ΑΒΓΔ pyramidem dividi in duas pyramides et æquales et similes inter se, triangulares bases haben-

ΑΒΓΔ est donc plus grand que la surface τ; la surface Σ est donc au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

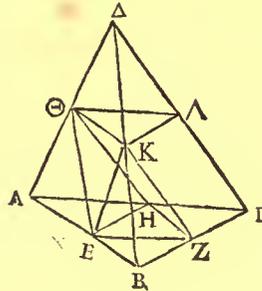
PROPOSITION III.

Toute pyramide triangulaire peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; et ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière.

Soit la pyramide dont la base est le triangle ΑΒΓ, et dont le sommet est le point Δ; je dis que la pyramide ΑΒΓΔ peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles, et semblables à la pyramide entière, et

ἔχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

tes, et similes toti, et in duo prismata æqualia; et duo prismata majora esse dimidio totius pyramidis.



Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ AB, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ E, Z, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. Καὶ³ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΘΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλος ἐστὶ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. Ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΕΑ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ⁵ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν

Secentur enim ipsæ AB, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ bifariam in E, Z, H, Θ, Κ, Δ punctis, et jungantur ipsæ ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. Et quoniam æqualis est quidem ipsa ΑΕ ipsi ΕΒ, ipsa vero ΑΘ ipsi ΘΔ, parallela igitur est ΕΘ ipsi ΔΒ. Propter eadem utique et ΘΚ ipsi ΑΒ parallela est; parallelogrammum igitur est ipsum ΘΕΒΚ; æqualis igitur est ΘΚ ipsi ΕΒ. Sed ΕΒ ipsi ΕΑ est æqualis; et ΕΑ igitur ipsi ΘΚ est æqualis. Est autem ΑΘ ipsi ΘΔ æqualis; duæ igitur ΕΑ, ΑΘ duabus ΚΘ,

en deux prismes égaux, et que ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière.

Car coupons les droites AB, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ en deux parties égales aux points E, Z, H, Θ, Κ, Λ, et joignons ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. Puisque ΑΕ est égal à ΕΒ, et ΑΘ égal à ΘΔ; la droite ΕΘ sera parallèle à la droite ΔΒ (2. 6). Par la même raison, la droite ΘΚ est parallèle à la droite ΑΒ; la figure ΘΕΒΚ est donc un parallélogramme; ΘΚ est donc égal à ΕΒ (34. 1). Mais ΕΒ est égal à ΕΑ; ΕΑ est donc égal à ΘΚ. Mais ΑΘ est égal à ΘΔ; les deux droites ΕΑ, ΑΘ sont donc

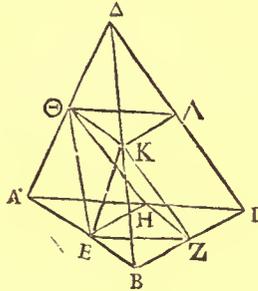
ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέστι καὶ ὅμοιον. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεται ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν⁷. ἴση ἄρα ἐστὶν⁸ ἡ ὑπὸ ΕΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνία. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν⁹ ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΑ τριγώνῳ ἴσον τέστι καὶ ὅμοιον¹⁰. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ¹¹ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὅμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ¹² τὸ ΘΚΑ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν

ΘΔ æquales sunt utraq̄ue utriq̄ue, et angulus ΕΑΘ ipsi ΚΘΔ æqualis; basis igitur ΕΘ basi ΚΔ est æqualis; æquale igitur et simile est triangulum ΑΕΘ triangulo ΘΚΔ. Propter eadem utique et triangulum ΑΘΗ triangulo ΘΛΔ et æquale est et simile. Et quoniam duæ rectæ sese tangentes ΕΘ, ΘΗ parallelæ sunt duabus rectis sese tangentibus ΚΔ, ΔΛ, non in eodem plano existentes, æquales angulos continebunt; æqualis igitur est angulus ΕΘΗ angulo ΚΔΛ. Et quoniam duæ rectæ ΕΘ, ΘΗ duabus ΚΔ, ΔΛ æquales sunt utraq̄ue utriq̄ue, et angulus ΕΘΗ angulo ΚΔΛ est æqualis; basis igitur ΕΗ basi ΚΛ est æqualis; æquale igitur et simile est triangulum ΕΘΗ triangulo ΚΔΛ. Propter eadem utique et triangulum ΑΕΗ triangulo ΘΚΑ et æquale est et simile; ergo pyramis cujus basis quidem est ΑΕΗ triangulum, vertex autem Θ punctum, æqualis et similis est pyramidi, cujus basis quidem est ΘΚΑ triangulum, vertex vero Δ punctum. Et quoniam uni latrum ΑΒ trianguli ΑΔΒ pa-

égales aux deux droites ΚΘ, ΘΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΕΑΘ est égal à l'angle ΚΘΔ; la base ΕΘ est donc égale à la base ΚΔ (29. 1); le triangle ΑΕΘ est donc égal et semblable au triangle ΘΚΔ. Par la même raison, le triangle ΑΘΗ est égal et semblable au triangle ΘΛΔ. Et puisque les deux droites ΕΘ, ΘΗ qui se touchent sont parallèles aux deux droites ΚΔ, ΔΛ qui se touchent et qui ne sont pas dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux (10. 11); l'angle ΕΘΗ est donc égal à l'angle ΚΔΛ. Et puisque les deux droites ΕΘ, ΘΗ sont égales aux deux droites ΚΔ, ΔΛ, chacune à chacune, et que l'angle ΕΘΗ est égal à l'angle ΚΔΛ, la base ΕΗ sera égale à la base ΚΛ; le triangle ΕΘΗ est donc égal et semblable au triangle ΚΔΛ. Par la même raison, le triangle ΑΕΗ est égal et semblable au triangle ΘΚΑ; la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ est donc égale et semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΘΚΑ et dont le sommet est le point Δ. Et puisque la droite ΘΚ est menée

τῶν πλευρῶν τὴν AB ἥκται ἡ ΘK , ἰσογώνιον ἔστι τὸ $A\Delta B$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Theta K$ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἔστι¹³ τὸ $A\Delta B$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Theta K$ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ μὲν $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta K\Lambda$

ralla ducta est ΘK , æquiangulum est triangulum $A\Delta B$ triangulo $\Delta\Theta K$, et latera proportionalia habent. Simile igitur est triangulum $A\Delta B$ triangulo $\Delta\Theta K$. Propter eadem utique et $\Delta B\Gamma$ quidem triangulum triangulo $\Delta K\Lambda$ simile est,



τριγώνῳ ὅμοιον ἔστι, τὸ δὲ $A\Delta\Gamma$ τῷ $\Delta\Lambda\Theta$ ¹⁴. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ BA , $A\Gamma$ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένης ἀλλήλων τὰς $K\Theta$, $\Theta\Lambda$ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι¹⁵, ἴσας γωνίας περιέξουσιν¹⁶. Ἴση ἄρα ἐστίν¹⁷ ἡ ὑπὸ $B\Lambda\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Theta\Lambda$. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$ οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς τὴν $\Lambda\Theta$. ὅμοιον ἄρα ἔστι¹⁸ τὸ $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Theta K\Lambda$ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὅμοιον ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον,

ipsum vero $A\Delta\Gamma$ ipsi $\Delta\Lambda\Theta$. Et quoniam duæ rectæ sese tangentes BA , $A\Gamma$ parallelæ sunt duabus rectis sese tangentibus $K\Theta$, $\Theta\Lambda$, non in eodem plano existentes, æquales angulos contincbunt; æqualis igitur est angulus $B\Lambda\Gamma$ ipsi $K\Theta\Lambda$. Et est ut BA ad $A\Gamma$ ita $K\Theta$ ad $\Lambda\Theta$; simile igitur est triangulum $\Delta B\Gamma$ triangulo $\Theta K\Lambda$; et pyramis igitur, cujus basis quidem est $\Delta B\Gamma$ triangulum, vertex autem Δ punctum, similis est pyramidi, cujus basis quidem est $\Theta K\Lambda$ triangulum

parallèlement à un des côtés AB du triangle $A\Delta B$, le triangle $A\Delta B$ sera ἄνγλιον avec le triangle $\Delta\Theta K$ (29. 1); mais ces deux triangles ont leurs côtés proportionnels (4. 6), le triangle $A\Delta B$ est donc semblable au triangle $\Delta\Theta K$. Par la même raison, le triangle $\Delta B\Gamma$ est semblable au triangle $\Delta K\Lambda$, et le triangle $A\Delta\Gamma$ semblable au triangle $\Delta\Lambda\Theta$. Et puisque les deux droites BA , $A\Gamma$ qui se touchent sont parallèles aux deux droites $K\Theta$, $\Theta\Lambda$ qui se touchent et qui ne sont pas dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux (10. 11); l'angle $B\Lambda\Gamma$ est donc égal à l'angle $K\Theta\Lambda$. Mais BA est à $A\Gamma$ comme $K\Theta$ est à $\Theta\Lambda$; le triangle $\Delta B\Gamma$ est donc semblable au triangle $\Theta K\Lambda$ (6. 6); la pyramide dont la base est le triangle $\Delta B\Gamma$ et dont le sommet est le point Δ est donc semblable à la pyramide dont la base est le triangle $\Theta K\Lambda$ et dont le sommet est le

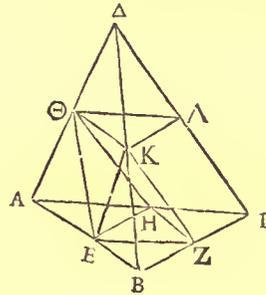
κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἀλλὰ πυραμῖς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΘΚΑ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη¹⁹ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμῖς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον²⁰. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΑΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ἔλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. Καὶ ἐπεὶ ἐάν ἦ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ ἄσι²¹, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἦ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ²² τὰ πρίσματα· ἴσων ἄρα ἐστὶ²³ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΑ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΑ, ΑΓΗΘ, ΘΚΖΗ. Καὶ φανερόν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε

vertex autem Δ punctum. Sed pyramis, cujus basis quidem est ΘΚΑ triangulum, vertex autem Δ punctum, similis ostensa est pyramidi, cujus basis quidem est ΑΕΗ triangulum, vertex autem Θ punctum; quare et pyramis, cujus basis quidem est ΑΒΓ triangulum, vertex autem Δ punctum, similis est pyramidi, cujus basis quidem est ΑΕΗ triangulum, vertex autem Θ punctum; utraque igitur ΑΕΗΘ, ΘΚΑΔ pyramidum similis est toti ΑΒΓΔ pyramidi. Et quoniam aequalis est ΒΖ ipsi ΖΓ, duplum est parallelogrammum ΕΒΖΗ trianguli ΗΖΓ. Et quoniam si sint duo prismata aequalita, et habeat unum quidem basim parallelogrammum, alterum vero triangulum, duplum autem sit parallelogrammum trianguli, aequalia sunt prismata; aequale igitur est prisma contentum sub duobus quidem triangulis ΒΚΖ, ΕΘΗ, tribus autem parallelogrammis ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ prismati contento sub duobus quidem triangulis ΗΖΓ, ΘΚΑ, tribus autem parallelogrammis ΚΖΓΑ, ΑΓΗΘ, ΘΚΖΗ. Et evidens utramque prismatum et cujus basis ΕΒΖΗ parallelogrammum, oppo-

point Δ. Mais on a démontré que la pyramide dont la base est le triangle ΘΚΑ, et le sommet le point Δ, est semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ; la pyramide dont la base est le triangle ΑΒΓ, et dont le sommet est le point Δ est donc semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ; chacune des pyramides ΑΕΗΘ, ΘΚΑΔ est donc semblable à la pyramide entière ΑΒΓΔ. Et puisque ΒΖ est égal à ΖΓ, le parallélogramme ΕΒΖΗ sera double du triangle ΗΖΓ (41. 1). Mais deux prismes de même hauteur, dont l'un a pour base un parallélogramme, et dont l'autre a pour base un triangle, sont égaux entre eux, lorsque le parallélogramme est double du triangle (40. 11); le prisme compris sous les deux triangles ΒΚΖ, ΕΘΗ et sous les trois parallélogrammes ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ est donc égal au prisme qui est compris sous les deux triangles ΗΖΓ, ΘΚΑ et sous les trois parallélogrammes ΚΖΓΑ, ΑΓΗΘ, ΘΚΖΗ. Mais il est évident que chacun de ces prismes et celui dont la base est le paral-

βάσις τὸ EBZH παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεΐα, καὶ οὗ βάσις²⁴, τὸ HZΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον μείζον ἔστι ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΑ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα· ἐπειδήπερ καὶ²⁵ εἰς ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ EBZH παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεΐα, μείζον ἔστι τῆς πυρα-

sita autem ΘΚ recta, et cujus basis HZΓ triangulum, oppositum autem ΚΛΘ triangulum, majus esse utraq̄ue pyramidum, quarum bases quidem ΑΕΗ, ΘΚΑ triangula, vertex autem Θ, Α puncta; quoniam et si jungamus ΕΖ, ΕΚ rectas, prisma quidem, cujus basis EBZH parallelogrammum, opposita autem ΘΚ recta, majus est pyramide, cujus basis quidem EBZ triangulum,



μίδος, ἥς βάσις μὲν τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν²⁶ τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἴστί πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν²⁷ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται· ὥστε καὶ τὸ

vertex autem Κ punctum. Sed pyramis, cujus basis quidem EBZ triangulum, vertex autem Κ punctum, æqualis est pyramidi, cujus basis quidem ΑΕΗ, triangulum, vertex autem Θ punctum, sub æqualibus enim et similibus planis continentur; quare et prisma, cujus basis quidem

lécogramme EBZH opposé à la droite ΘΚ, et celui dont la base est le triangle HZΓ opposé au triangle ΚΑΘ est plus grand que chacune des pyramides dont les bases sont ΑΕΗ, ΘΚΑ et les sommets les points Θ, Δ; parce que si nous joignons ΕΖ, ΕΚ; le prisme dont la base est le parallélogramme EBZH opposé à la droite ΘΚ, est plus grand que la pyramide qui a pour base le triangle EBZ et pour sommet le point Κ. Mais la pyramide qui a pour base le triangle EBZ et pour sommet le point Κ, est égale à la pyramide qui a pour base le triangle ΑΕΗ et pour sommet le point Θ (def. 10. 11), car elles sont comprises sous des plans égaux et semblables; le prisme qui a pour base le parallélogramme EBZH opposé à la droite ΘΚ, est donc

πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ EBZH παραλληλό-
 γραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεΐα, μείζον
 ἐστὶ πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ AEH τρί-
 γωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον. Ἴσον δὲ τὸ μὲν
 πρίσμα, οὗ βάσις μὲν²⁸ τὸ EBZH παρα-
 λληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεΐα, τῷ
 πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ HZΓ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΑ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμὶς,
 ἧς βάσις μὲν²⁹ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ
 τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις
 μὲν³⁰ τὸ ΘΚΑ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ ση-
 μεῖον· τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά
 ἐστὶ τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις
 μὲν τὰ AEH, ΘΚΑ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ,
 Ε σημεία· ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ
 ABΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, διήρηται
 εἰς τε δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλ-
 λήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ³¹, καὶ εἰς δύο
 πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά
 ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. Ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

EBZH parallelogrammum, opposita autem ΘΚ
 recta, majus est pyramide, ejus basis qui-
 dem AEH triangulum, vertex autem Θ punc-
 tum. Sed æquale prisma quidem, ejus basis
 quidem EBZH parallelogrammum, opposita au-
 tem ΘΚ recta, prismati, ejus basis quidem
 HZΓ triangulum, oppositum autem ΘΚΑ trian-
 gulum; pyramis vero, ejus basis quidem AEH
 triangulum, vertex autem Θ punctum, æqualis
 est pyramidi, ejus basis quidem ΘΕΑ trian-
 gulum, vertex autem Δ punctum; ergo dicta
 duo prismata majora sunt dictis duabus py-
 ramidibus, quarum bases AEH, ΘΚΑ triangu-
 la, vertices autem Θ, Δ puncta; tota igitur py-
 ramis, ejus basis ABΓ triangulum, vertex
 autem Δ punctum, divisa est et in duas py-
 ramides æquales et similes inter se, et similes
 toti, et in duo prismata æqualia; et duo pris-
 mata majora sunt dimidio totius pyramidis.
 Quod oportebat ostendere.

plus grand que la pyramide qui a pour base le triangle AEH et pour sommet le point Θ. Mais le prisme qui a pour base le parallélogramme EBZH opposé à la droite ΘΚ, est égal au prisme qui a pour base le triangle HZΓ opposé au triangle ΘΚΑ; et la pyramide qui a pour base le triangle AEH et pour sommet le point Θ est égale à la pyramide qui a pour base le triangle ΘΚΑ et pour sommet le point Δ; les deux prismes dont nous venons de parler sont donc plus grands que les deux pyramides qui ont pour bases les triangles AEH, ΘΚΑ et pour sommets les points Θ, Δ; la pyramide entière qui a pour base le triangle ABΓ et pour sommet le point Δ, a donc été divisée en deux pyramides égales et semblables entr'elles, et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux qui sont plus grands que la moitié de la pyramide entière. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Εάν ᾧσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῆ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο παραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο αἰὲ γίνηται· ἔσται ὡς ἢ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν οὕτως καὶ² τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἐστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κερφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διηρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νεοῖσθω διηρημένη, καὶ τοῦτο αἰὲ γιγνέσθω³. λέγω ἔτι ἔστιν ὡς ἢ ΑΒΓ βάσις

PROPOSITIO IV.

Si sint duæ pyramides sub eadem altitudine, triangulares habentes bases, dividatur autem utraque ipsarum et in duas pyramides æquales inter se et similes toti, et in duo prismata æqualia, et ortarum pyramidum utraque eodem modo, et hoc semper fiat, erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim ita et prismata omnia in unâ pyramide ad omnia prismata in alterâ pyramide numero æqualia.

Sint duæ pyramides sub eadem altitudine, triangulares habentes bases ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem Η, Θ puncta, et dividatur utraque ipsarum et in duas pyramides æquales inter se et similes toti, et in duo prismata æqualia, et ortarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur, et hoc semper fiat; dico esse ut

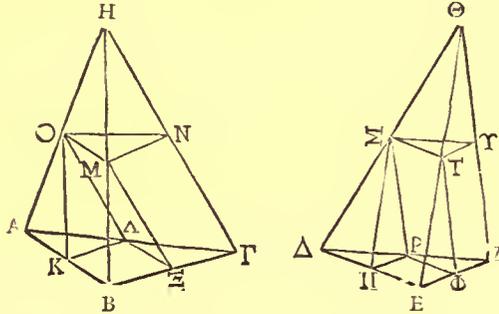
PROPOSITION IV.

Si deux pyramides triangulaires de même hauteur sont divisées l'une et l'autre en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière et en deux prismes égaux, si chacune des pyramides engendrées est divisée de la même manière, et si l'on fait toujours la même chose, la base de l'une de ces pyramides sera à la base de l'autre pyramide comme tous les prismes contenus dans l'une de ces pyramides sont à tous les prismes contenus dans l'autre pyramide, ces prismes étant égaux en nombre.

Soient deux pyramides triangulaires de même hauteur ayant pour bases les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et pour sommets les points Η, Θ; que chaeune de ces pyramides soit divisée en deux pyramides égales entr'elles et semblables aux pyramides entières et en deux prismes égaux; concevons que chaeune des pyramides engendrées soit divisée de la même manière, et faisons toujours la même chose; je dis que la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme tous les prismes contenus dans

πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ
 πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ
 ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ABΓ basis ad ΔΕΖ basim ita prismata omnia in
 ΑΒΓΗ pyramide ad prismata omnia in pyra-
 mide ΔΕΖΘ numero æqualia.



Ἐπιὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ
 ΑΛ τῇ ΛΓ· παράλληλος ἄρα ἡ ΞΑ τῇ ΑΒ,
 καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΞΓ τριγώνῳ.
 Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ
 τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶδ. Καὶ ἐπιὶ διπλασίῳ
 ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ· ἐστὶν
 ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν
 ΖΦ. Καὶ ἀναγράφεται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ
 ὁμοία τε καὶ ὁμοίως κειμένα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ,
 ΑΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὁμοία τε^δ καὶ ὁμοίως
 κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· ἐστὶν ἄρα
 ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΞΓ τρίγωνον
 οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον·

Quoniam enim æqualis est quidem ipsa ΒΞ
 ipsi ΞΓ, ipsa vero ΑΛ ipsi ΛΓ; parallela igitur
 ΞΑ ipsi ΑΒ, et simile ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΞΓ
 triangulo. Propter eadem utique et ΔΕΖ trian-
 gulum ipsi ΡΦΖ triangulo simile est. Et quo-
 niam dupla est quidem ipsa ΒΓ ipsius ΓΞ, ipsa
 autem ΕΖ ipsius ΖΦ; est igitur ut ΒΓ ad ΓΞ
 ita ΕΖ ad ΖΦ. Et descripta sunt quidem ab
 ipsis ΒΓ, ΓΞ et similia et similiter posita rec-
 tilinea ΑΒΓ, ΑΞΓ, ab ipsis autem ΕΖ, ΖΦ et
 similia et similiter posita rectilinea ΔΕΖ, ΡΦΖ;
 est igitur ut ΑΒΓ triangulum ad ΑΞΓ triangu-
 lum ita ΔΕΖ triangulum ad ΡΦΖ triangulum;

la pyramide ΑΒΓΗ sont à tous les prismes contenus dans la pyramide ΔΕΖΘ, ces prismes étant égaux en nombre.

Car puisque ΒΞ est égal à ΞΓ, et ΑΛ égal à ΛΓ, la droite ΞΑ sera parallèle à la droite ΑΒ (2. 6), et le triangle ΑΒΓ sera semblable au triangle ΑΞΓ (4. 6). Par la même raison, le triangle ΔΕΖ sera semblable au triangle ΡΦΖ. Et puisque la droite ΒΓ est double de la droite ΓΞ, et la droite ΕΖ double de la droite ΖΦ, la droite ΒΓ sera à la droite ΓΞ comme la droite ΕΖ est à la droite ΖΦ. Mais les figures rectilignes semblables et semblablement placées ΑΒΓ, ΑΞΓ ont été décrites sur les droites ΒΓ, ΓΞ, et les figures rectilignes semblables et semblablement placées ΔΕΖ, ΡΦΖ ont été décrites sur les droites ΕΖ, ΖΦ; le triangle ΑΒΓ est donc au triangle ΑΞΓ comme le triangle ΔΕΖ est au triangle ΡΦΖ (22. 6); donc, par permutation,

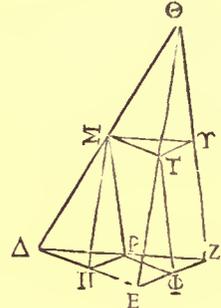
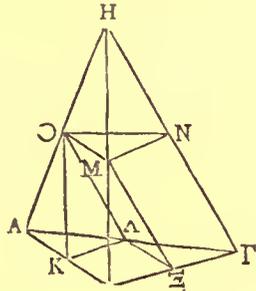
ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔΕΖ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΛΞΓ$ τρίγωνον^δ πρὸς τὸ $ΡΦΖ$ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς τὸ $ΛΞΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΡΦΖ$ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν ἐστὶ^θ τὸ $ΛΞΓ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΟΜΝ$ πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ $ΡΦΖ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΣΤΥ$. καὶ ὡς ἄρα τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔΕΖ$ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ $ΛΞΓ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΟΜΝ$, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ $ΡΦΖ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΣΤΥ$. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ $ABΓΗ$ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ $ΚΛΞΒ$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ $ΜΟ$ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ $ΛΞΓ$ -τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΟΜΝ$, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν $ΕΠΡΦ$, ἀπεναντίον δὲ ἡ $ΣΤ$ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ $ΡΦΖ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΣΤΥ$. συνθέντι ἄρα ὡς τὰ $ΚΒΞΛΜΟ$, $ΛΞΓΜΝΟ$ πρίσματα πρὸς τὸ

permutando igitur est ut $ABΓ$ triangulum ad $ΔΕΖ$ triangulum ita $ΛΞΓ$ triangulum ad $ΡΦΖ$ triangulum. Sed ut $ΛΞΓ$ triangulum ad $ΡΦΖ$ triangulum ita prisma, cujus basis quidem est $ΛΞΓ$ triangulum, oppositum autem $ΟΜΝ$, ad prisma, cujus basis quidem $ΡΦΖ$ triangulum, oppositum autem $ΣΤΥ$; et ut igitur $ABΓ$ triangulum ad $ΔΕΖ$ triangulum ita prisma, cujus basis quidem $ΛΞΓ$ triangulum, oppositum autem $ΟΜΝ$, ad prisma, cujus basis quidem $ΡΦΖ$ triangulum, oppositum autem $ΣΤΥ$. Et quoniam in $ABΓΗ$ pyramide duo prismata æqualia sunt inter se; sed et in $ΔΕΖΘ$ pyramide prismata æqualia sunt inter se; est igitur ut prisma cujus basis quidem $ΚΛΞΒ$ parallelogrammum, opposita autem $ΜΟ$ recta, ad prisma, cujus basis quidem $ΛΞΓ$ triangulum, oppositum autem $ΟΜΝ$ ita prisma, cujus basis quidem $ΕΠΡΦ$, opposita autem $ΣΤ$ recta, ad prisma, cujus basis quidem $ΡΦΖ$ triangulum, oppositum autem $ΣΤΥ$; componendo igitur ut $ΚΒΞΛΜΟ$, $ΛΞΓΜΝΟ$ prismata ad

le triangle $ABΓ$ est au triangle $ΔΕΖ$ comme le triangle $ΛΞΓ$ est au triangle $ΡΦΖ$. Mais le triangle $ΛΞΓ$ est au triangle $ΡΦΖ$ comme le prisme qui a pour base le triangle $ΛΞΓ$ opposé à $ΟΜΝ$ est au prisme qui a pour base le triangle $ΡΦΖ$ opposé à $ΣΤΥ$; le triangle $ABΓ$ est donc au triangle $ΔΕΖ$ comme le prisme qui a pour base le triangle $ΛΞΓ$ opposé à $ΟΜΝ$ est au prisme qui a pour base le triangle $ΡΦΖ$ opposé à $ΣΤΥ$. Et puisque les deux prismes qui sont dans la pyramide $ABΓΗ$ sont égaux entr'eux, et que les prismes qui sont dans la pyramide $ΔΕΖΘ$ sont aussi égaux entr'eux, le prisme qui a pour base le parallélogramme $ΚΛΞΒ$ opposé à la droite $ΜΟ$ sera au prisme qui a pour base le triangle $ΛΞΓ$ opposé à $ΟΜΝ$ comme le prisme qui a pour base le parallélogramme $ΕΠΡΦ$ opposé à la droite $ΣΤ$ est au prisme qui a pour base le triangle $ΡΦΖ$ opposé à $ΣΤΥ$; donc par addition (18. 5), les prismes $ΚΒΞΛΜΟ$, $ΛΞΓΜΝΟ$ sont au prisme $ΛΞΓΜΝΟ$ comme les prismes $ΠΕΦΡΣΤ$, $ΡΦΖΣΥ$ sont au prisme

ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα· ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. Ὡς δὲ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα οὕτως εἰδείχθη ἢ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, καὶ ἢ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ

ΛΞΓΜΝΟ prisma ita ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ prismata ad ΡΦΖΣΤΥ prisma ; permutando igitur ut ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ ad ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ prismata ita ΛΞΓΜΝΟ prisma ad ΡΦΖΣΤΥ prisma. Ut autem ΛΞΓΜΝΟ prisma ad ΡΦΖΣΤΥ prisma ita otensa est ΛΞΓ basis ad ΡΦΖ basim, et ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basim, et ut igitur ΑΒΓ



τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ὀμοίως δὲ καὶ τὰς γενόμενας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον ὅσον ὡς τὰ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται ὡς ἢ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ΑΛΛ'

triangulum ad ΔΕΖ triangulum ita in ΑΒΓΗ pyramide duo prismata ad in ΔΕΖΘ pyramide duo prismata. Similiter autem et si factas pyramides dividamus eodem modo velut ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, erit ut ΟΜΝ basis ad ΣΤΥ basim ita in ΟΜΝΗ pyramide duo prismata ad duo prismata in ΣΤΥΘ pyramide. Sed ut ΟΜΝ basis

ΡΦΖΣΤΥ ; donc, par permutation, les prismes ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ sont aux prismes ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ comme le prisme ΛΞΓΜΝΟ est au prisme ΡΦΖΣΤΥ. Mais on a démontré que le prisme ΛΞΓΜΝΟ est au prisme ΡΦΖΣΤΥ comme la base ΛΞΓ est à la base ΡΦΖ, et la base ΛΞΓ est à la base ΡΦΖ comme la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ ; le triangle ΑΒΓ est donc au triangle ΔΕΖ comme les deux prismes qui sont dans la pyramide ΑΒΓΗ sont aux deux prismes qui sont dans la pyramide ΔΕΖΘ. Si nous partageons de la même manière les nouvelles pyramides ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, la base ΟΜΝ sera à la base ΣΤΥ comme les deux prismes de la pyramide ΟΜΝΗ sont aux deux prismes de la pyramide ΣΤΥΘ. Mais la base ΟΜΝ est à

ὡς ἡ OMN βάσις πρὸς τὴν $ΣΤΥ$ βάσιν οὕτως ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν OMN , $ΣΤΥ$ τριγῶνων ἑκατέρω τῶν $ΛΞΓ$, $ΡΦΖ$ ¹¹, καὶ ὡς ὅρα ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν οὕτως καὶ ἐν τῇ $ABΓH$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ $OMNH$ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $ΣΤΥΘ$ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ δεῖχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμαίων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν $AKAO$ καὶ $ΔΠΡΣ$ πυραμίδων καὶ πάντων ἀπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν¹². Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad $ΣΤΥ$ basim ita $ABΓ$ basis ad $ΔΕΖ$ basim; æquale enim utrumque triangulorum OMN , $ΣΤΥ$ utriusque triangulorum $ΛΞΓ$, $ΡΦΖ$; et ut igitur basis $ABΓ$ ad $ΔΕΖ$ basim ita et in $ABΓH$ pyramide duo prismata ad duo prismata in $ΔΕΖΘ$ pyramide, et in $OMNH$ duo prismata ad duo prismata in $ΣΤΥΘ$ pyramide, et quatuor ad quatuor. Eadem autem ostendentur et in prismatibus factis divisione pyramidum $AKAO$ et $ΔΠΡΣ$, et omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod oportebat ostendere.

la base $ΣΤΥ$ comme la base $ABΓ$ est à la base $ΔΕΖ$; car chacun des triangles OMN , $ΣΤΥ$ est égal à chacun des triangles $ΛΞΓ$, $ΡΦΖ$; la base $ABΓ$ est donc à la base $ΔΕΖ$ comme les deux prismes de la pyramide $ABΓH$ sont aux deux prismes de la pyramide $ΔΕΖΘ$, comme les deux prismes de la pyramide $OMNH$ sont aux deux prismes de la pyramide $ΣΤΥΘ$, et comme quatre prismes sont à quatre prismes. On démontrera la même chose pour tous les autres prismes qu'on obtiendra par la division des pyramides $AKAO$ et $ΔΠΡΣ$, et enfin de toutes les pyramides égales en nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

ΛΗΜΜΑ.

COROLLARIUM.

Οτι δὲ ἐστὶν ὡς τὸ $\Lambda\Xi\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $\rho\phi\zeta^1$ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις τὸ $\Lambda\Xi\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN , πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ $\rho\phi\zeta$ τρίγωνον², ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Sigma\tau\phi$, οὕτως δικτείν.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νοηθῶσαν ἀπὸ τῶν H , Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τρίγωνα³ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοῦσις ὑποκείσθαι τὰς πυραμίδας. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι, ἥτε $H\Gamma$ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ H κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν $AB\Gamma$, OMN τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθίσονται. Καὶ τέμνεται ἡ $H\Gamma$ δίχα ὑπὸ τοῦ OMN ἐπιπέδου κατὰ τὸ N · καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ H ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ $AB\Gamma$ ἐπίπεδον δίχα τμηθίσεται ὑπὸ τοῦ OMN ἐπιπέδου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔEZ

Esse autem ut $\Lambda\Xi\Gamma$ triangulum ad $\rho\phi\zeta$ triangulum, ita prisma, cujus basis triangulum $\Lambda\Xi\Gamma$, oppositum autem ipsum OMN , ad prisma, cujus basis quidem triangulum $\rho\phi\zeta$, oppositum autem $\Sigma\tau\phi$, ita ostendere est.

In eadem enim figurâ intelligatur a punctis H , Θ perpendiculares ad $AB\Gamma$, ΔEZ triangula plana, quæ æquales crunt, propterea quod æquealtæ ponuntur pyramidēs. Et quoniam duæ rectæ, et $H\Gamma$ et a puncto H perpendicularis a parallelis planis $AB\Gamma$, OMN secantur, in eadem ratione secabuntur. Et secatur $H\Gamma$ bifariam a plano OMN in N ; et a puncto H igitur perpendicularis ad $AB\Gamma$ planum bifariam secabitur a plano OMN . Propter eadem utique, et a puncto Θ perpendicularis ad ΔEZ planum bifariam secabitur a

LEMME.

Nous démontrerons de la manière suivante que le triangle $\Lambda\Xi\Gamma$ est au triangle $\rho\phi\zeta$ comme le prisme qui a pour base le triangle $\Lambda\Xi\Gamma$ opposé à OMN , est au prisme qui a pour base le triangle $\rho\phi\zeta$ opposé à $\Sigma\tau\phi$.

Car dans la même figure imaginons des perpendiculaires menées des points H , Θ aux plans des triangles $AB\Gamma$, ΔEZ ; ces perpendiculaires seront égales entr'elles, parce que ces pyramides sont supposées égales en hauteur. Et puisque la droite $H\Gamma$ et la perpendiculaire menée du point H sont coupées par les plans parallèles $AB\Gamma$, OMN , ces deux droites seront coupées proportionnellement (17. 11). Or la droite $H\Gamma$ est coupée en deux parties égales au point N par le plan OMN ; la perpendiculaire menée du point H au plan $AB\Gamma$ sera donc coupée en deux parties égales par le plan OMN . Par la même raison, la perpendiculaire menée du point Θ au plan ΔEZ sera coupée en deux parties égales par le plan $\Sigma\tau\phi$. Mais les

ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπίπεδου. Καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι· ἰσοῦψῆ ἄρα ἐστὶ⁵ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΛΞΓ, ΡΦΖ τρίγωνο, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ· ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημέων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοῦψῆ τυγχάνον⁶, πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν⁷ ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν⁸, ὡς ἡ ΛΞΓ βᾶσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βᾶσιν οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἀλλήλα. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

plano ΣΤΥ. Et sunt æquales a punctis Η, Θ perpendiculares ad ΑΒΓ, ΔΕΖ plana; æquales igitur ipsæ a triangulis ΟΜΝ, ΣΤΥ ad ipsa ΑΒΓ, ΔΕΖ perpendiculares; æquealta igitur sunt prismata, quorum bases quidem sunt ΛΞΓ, ΡΦΖ triangula, opposita autem ipsa ΟΜΝ, ΣΤΥ; quare et solida parallelepipeda a dictis prismetibus descripta, et æquealta, inter se sunt ut bases; et dimidia igitur sunt ut ΛΞΓ basis ad ΡΦΖ basim ita dicta prismata inter se. Quod oportebat ostendere.

perpendiculaires menées des points Η, Θ aux plans ΑΒΓ, ΔΕΖ sont égales entr'elles; les perpendiculaires menées des triangles ΟΜΝ, ΣΤΥ aux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont donc égales entr'elles; les prismes qui ont pour bases les triangles ΛΞΓ, ΡΦΖ opposés à ΟΜΝ, ΣΤΥ sont donc égaux en hauteur; les parallélépipèdes composés des prismes égaux en hauteur, dont nous venons de parler, sont donc entr'eux comme leurs bases (32. 11), et il en sera de même de leurs moitiés, c'est-à-dire que les bases ΛΞΓ, ΡΦΖ seront entr'elles comme les prismes dont nous avons parlé. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

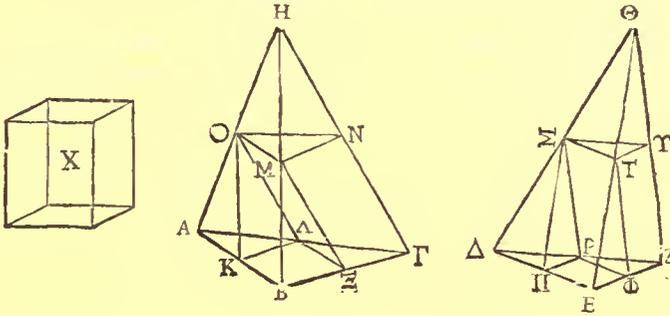
PROPOSITIO V.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστώσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ $Η$, $Θ$ σημεία· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βᾶσις, πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βᾶσιν οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΔΕΖΘ$ πυραμίδα.

Pyramides in eadem altitudine existentes et habentes triangulares bases inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, vertices autem puncta $Η$, $Θ$; dico esse ut $ΑΒΓ$ basis ad basim $ΔΕΖ$ ita pyramidem $ΑΒΓΗ$ ad $ΔΕΖΘ$ pyramidem.



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βᾶσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βᾶσιν οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΔΕΖΘ$ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βᾶσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βᾶσιν οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς ἢτοι πρὸς ἑλαττόν τι τῆς $ΔΕΖΘ$ πυραμίδος στερεὸν ἢ

Si enim non est ut basis $ΑΒΓ$ ad basim $ΔΕΖ$ ita pyramis $ΑΒΓΗ$ ad pyramidem $ΔΕΖΘ$, erit ut $ΑΒΓ$ basis ad basim $ΔΕΖ$ ita $ΑΒΓΗ$ pyramis vel ad solidum aliquod minus pyramide $ΔΕΖΘ$ vel ad

PROPOSITION V.

Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.

Que les pyramides dont les bases sont les triangles $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, et dont les sommets sont les points $Η$, $Θ$, ayent la même hauteur; je dis que la base $ΑΒΓ$ est à la base $ΔΕΖ$ comme la pyramide $ΑΒΓΗ$ est à la pyramide $ΔΕΖΘ$.

Car si la base $ΒΓ$ n'est pas à la base $ΔΕΖ$ comme la pyramide $ΑΒΓΗ$ est à la pyramide $ΔΕΖΘ$; la base $ΑΒΓ$ sera à la base $ΔΕΖ$ comme la pyramide $ΑΒΓΗ$ est à un solide plus petit que la pyramide $ΔΕΖΘ$ ou à un solide plus grand. Que ce soit

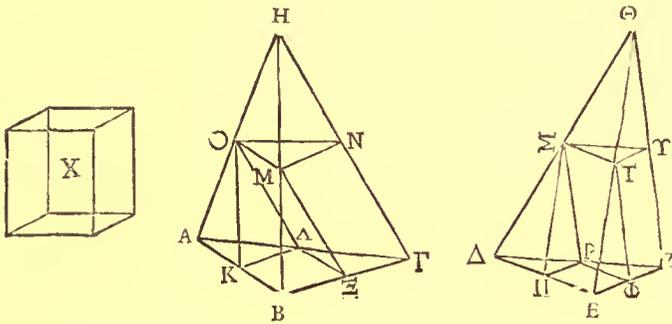
πρὸς μείζον. Ἐστὼ πρότερον πρὸς ἕλαττον τὸ X καὶ διηρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὲ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. Καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διηρήσθωσαν², καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω ἕως οὗ λεφθᾶσιν τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἱ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς ἢς³ ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ X στερεοῦ. Δελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκά αἱ ΔΠΡΞ, ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ X στερεοῦ. Διηρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βᾶσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βᾶσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. Ἀλλὰ καὶ^δ ὡς ἡ ΑΒΓ βᾶσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βᾶσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ X στερεὸν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ X στερεὸν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ

majus. Sit primum ad minus X; et dividatur pyramis ΔΕΖΘ in duas pyramides æquales inter se, et similes toti, et in duo prismata æqualia; ergo duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis. Et rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, et hoc semper fiat quoad sumantur quædam pyramides a pyramide ΔΕΖΘ, quæ sint minores excessu, quo superat pyramis ΔΕΖΘ solidum X. Sumantur, et sint verbi causa pyramides ΔΠΡΞ, ΣΤΥΘ; reliqua igitur in pyramide ΔΕΖΘ prismata majora sunt solido X. Dividatur et ΑΒΓΗ pyramis similiter et in totidem partes atque pyramis ΔΕΖΘ; est igitur ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita in pyramide ΑΒΓΗ prismata ad prismata in pyramide ΔΕΖΘ. Sed et ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita pyramis ΑΒΓΗ ad solidum X; et ut igitur ΑΒΓΗ pyramis ad solidum X ita in ΑΒΓΗ pyramide prismata ad prismata in pyramide ΔΕΖΘ; per-

d'abord à un solide X plus grand; divisons la pyramide ΔΕΖΘ en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; les deux prismes seront plus grands que la moitié de la pyramide entière (5. 12). Que les pyramides engendrées par cette division soient divisées de la même manière, et faisons toujours cela jusqu'à ce qu'il nous reste de la pyramide ΔΕΖΘ certaines pyramides qui soient plus petites que l'excès de la pyramide ΔΕΖΘ sur le solide X. Cherchons ces pyramides, et qu'elles soient par exemple ΔΠΡΞ, ΣΤΥΘ; les prismes restants de la pyramide ΔΕΖΘ seront plus grands que le solide X. Divisons semblablement la pyramide ΑΒΓΗ en autant de parties que la pyramide ΔΕΖΘ; la base ΑΒΓ sera à la base ΔΕΖ comme les prismes de la pyramide ΑΒΓΗ sont aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ (4. 12). Mais la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est au solide X; la pyramide ΑΒΓΗ est donc au solide X comme les prismes de la pyramide ΑΒΓΗ sont aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ;

ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. Μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μείζων ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἔπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι

mutando igitur ut ΑΒΓΗ pyramis ad prismata quæ in ipsâ sunt, ita solidum Χ ad prismata in pyramide ΔΕΖΘ. Major autem pyramis ΑΒΓΗ prismatibus quæ in ipsâ; majus igitur et solidum Χ prismatibus quæ in pyramide ΔΕΖΘ. Sed et minus, quod est impossibile; non igitur est ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita pyramis ΑΒΓΗ ad solidum aliquod minus pyramide ΔΕΖΘ.



τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ομοίως δὲ δεχθήσεται ἔτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν. Λέγω δὲ ὅτι οὐκ ἐστὶν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μείζον τι

Similiter utique ostendetur neque ut ΔΕΖ basis ad basim ΑΒΓ ita pyramidem ΔΕΖΘ ad solidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ. Dico etiam neque esse ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita ΑΒΓΗ pyramidem ad solidum aliquod

donc, par permutation, la pyramide ΑΒΓΗ est aux prismes qu'elle renferme comme le solide Χ est aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ. Mais la pyramide ΑΒΓΗ est plus grande que les prismes qu'elle renferme; le solide Χ est donc plus grand que les prismes que renferme la pyramide ΔΕΖΘ. Mais, au contraire, il est plus petit; ce qui est impossible; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΔΕΖΘ. Nous démontrerons semblablement que la base ΔΕΖ n'est point à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ. Je dis enfin que la base ΑΒΓ n'est point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Car, si cela est possible, que ce

τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστίν⁷ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. Ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἕλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν εἰδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἕλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ἔπερ ἄτοπον εἰδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστίν⁷ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μείζον τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Εἰδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἕλαττον ἐστίν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Αἱ ἄρα ὑπὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

majus pyramide ΔΕΖΘ. Si enim possibile, sit ad majus X; invertendo igitur est ut ΔΕΖ basis ad basim ΑΒΓ ita solidum X ad ΑΒΓΗ pyramidem. Ut autem solidum X ad ΑΒΓΗ pyramidem ita ΔΕΖΘ pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ, ut proxime ostensum fuit; et ut igitur ΔΕΖ basis ad basim ΑΒΓ ita pyramis ΔΕΖΘ ad solidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ, quod absurdum ostensum est; non igitur est ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita ΑΒΓΗ pyramis ad solidum aliquod majus pyramide ΔΕΖΘ. Ostensum autem est neque ad minus; est igitur ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita pyramis ΑΒΓΗ ad ΔΕΖΘ pyramidem.

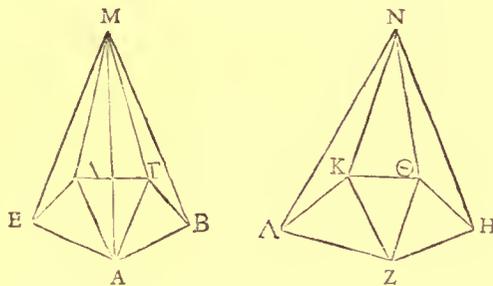
Pyramides igitur, etc.

soit à un solide X plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ; donc, par inversion; la base ΔΕΖ sera à la base ΑΒΓ comme le solide X est à la pyramide ΑΒΓΗ. Mais le solide X est à la pyramide ΑΒΓΗ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ainsi que cela est démontré; la base ΔΕΖ est donc à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ce qui a été démontré absurde; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Mais on a démontré que ce n'est point non plus à un solide X plus petit; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστῶσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν αἱ βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βᾶσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΑ βᾶσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΑΝ πυραμίδα.



Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσων, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βᾶσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βᾶσιν οὕτως ἡ

Pyramides in eadem altitudine existentes et polygona habentes bases inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ polygona, vertices autem Μ, Ν puncta; dico esse ut ΑΒΓΔΕ basis ad basim ΖΗΘΚΑ ita ΑΒΓΔΕΜ pyramidem ad pyramidem ΖΗΘΚΑΝ.

Jungantur enim ipsæ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Quoniam igitur duæ pyramides sunt ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ, triangulares habentes bases, et altitudinem æqualem, inter se sunt ut bases; est igitur ut ΑΒΓ basis ad ΑΓΔ basim ita ΑΒΓΜ pyra-

PROPOSITION VI.

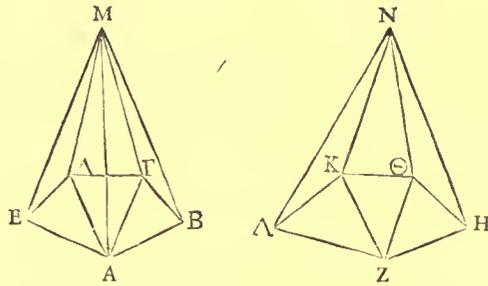
Les pyramides qui ont la même hauteur, et qui ont des polygones pour bases, sont entr'elles comme leurs bases.

Que les pyramides dont les bases sont les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et dont les sommets sont les points Μ, Ν ayent la même hauteur; je dis que la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΖΗΘΚΑ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΖΗΘΚΑΝ.

Car joignons ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Puisque l'on a deux pyramides ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ qui ont des bases triangulaires et la même hauteur, ces pyramides sont entr'elles comme leurs bases; la base ΑΒΓ est donc à la base ΑΓΔ comme la pyramide ΑΒΓΜ est à la

ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα· καὶ συντίθεται ὡς ἡ ΑΒΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βᾶσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Αλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βᾶσιν οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· διῆσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βᾶσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα.

mis ad ΑΓΔΜ pyramidem; et componendo ut ΑΒΓΔ basis ad ΑΓΔ basim ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad ΑΓΔΜ pyramidem. Sed et ut ΑΓΔ basis ad ΑΔΕ basim ita pyramis ΑΓΔΜ ad ΑΔΕΜ pyramidem; ex æquo igitur ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΑΔΕ ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. Et componendo rursus, ut ΑΒΓΔΕ



καὶ συντίθεται πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βᾶσις πρὸς τὴν ΑΔΕ οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι ἡ ΖΗΘΚΑ βᾶσις πρὸς τὴν ΖΚΑ βᾶσιν οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΑΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΑΝ πυραμίδα. Καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΚΑΝ τρίγωνα⁵ ἔχουσαι βᾶσεις, καὶ ὕψος ἴσον⁶. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βᾶσις πρὸς τὴν ΖΚΑ βᾶσιν οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν

basis ad basim ΑΔΕ ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. Similiter utique ostendetur et ut ΖΗΘΚΑ basis ad basim ΖΚΑ ita et ΖΗΘΚΑΝ pyramidem ad ΖΚΑΝ pyramidem. Et quoniam duæ pyramides sunt ΑΔΕΜ, ΖΚΑΝ, triangulares habentes bases, et eandem altitudinem; est igitur ut basis ΑΔΕ ad ΖΚΑ basim ita ΑΔΕΜ pyramis ad ΖΚΑΝ pyramidem. Quoniam igitur

pyramide ΑΓΔΜ; donc, par addition, la base ΑΒΓΔ est à la base ΑΓΔ comme la pyramide ΑΒΓΔΜ est à la pyramide ΑΓΔΜ. Mais la base ΑΓΔ est à la base ΑΔΕ comme la pyramide ΑΓΔΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ; donc, par égalité, la base ΑΒΓΔ est à la base ΑΔΕ comme la pyramide ΑΒΓΔΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ (22. 5). Donc, par addition, la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΑΔΕ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ. Nous démontrerons semblablement que la base ΖΗΘΚΑ est à la base ΖΚΑ comme la pyramide ΖΗΘΚΑΝ est à la pyramide ΖΚΑΝ. Et puisque l'on a deux pyramides ΑΔΕΜ, ΖΚΑΝ qui ont des bases triangulaires et une hauteur égale, la base ΑΔΕ sera à la base ΖΚΑ comme la pyramide ΑΔΕΜ est à la pyramide

ΖΚΑΝ πυραμίδα. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ
βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ
πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· ὡς δὲ ἡ
ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΑ βάσιν οὕτως ἡ
ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΑΝ πυραμίδα·
διήσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΑ
βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν
ΖΚΑΝ πυραμίδα. Ἀλλὰ μὲν καὶ ὡς ἡ ΖΚΑ
βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΑ βάσιν οὕτως ἦν καὶ
ἡ ΖΚΑΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΑΝ πυραμίδα·
καὶ διήσου πάλιν^δ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς
τὴν ΖΗΘΚΑ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς
πρὸς τὴν ΖΗΘΚΑΝ πυραμίδα.

Πυραμίδες ἄρα, καὶ τὰ ἰζήεις.

ut ΑΒΓΔΕ basis ad ΑΔΕ basim ita ΑΒΓΔΕΜ
pyramis ad ΑΔΕΜ pyramidem; ut autem ΑΔΕ
basis ad ΖΚΑ basim ita ΑΔΕΜ pyramis ad
ΖΚΑΝ pyramidem; ex æquo igitur, ut basis
ΑΒΓΔΕ ad ΖΚΑ basim ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis
ad ΖΚΑΝ pyramidem. Sed quidem et ut ΖΚΑ
basis ad ΖΗΘΚΑ basim ita erat et ΖΚΑΝ pyramis
ad ΖΗΘΚΑΝ pyramidem; et ex æquo rursus
igitur ut ΑΒΓΔΕ basis ad ΖΗΘΚΑ basim ita
ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad ΖΗΘΚΑΝ pyramidem.

Pyramides igitur, etc.

ΖΚΑΝ. Et puisque la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΑΔΕ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ, et que la base ΑΔΕ est à la base ΖΚΑ comme la pyramide ΑΔΕΜ est à la pyramide ΖΚΑΝ; donc, par égalité, la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΖΚΑ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΖΚΑΝ (22. 5). Mais la base ΖΚΑ est à la base ΖΗΘΚΑ comme la pyramide ΖΚΑΝ est à la pyramide ΖΗΘΚΑΝ; donc; par égalité, la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΖΗΘΚΑ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΖΗΘΚΑΝ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἔχούσας.

Ἐστω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΔΕΖ$. λέγω ὅτι τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους ἔχούσας βάσεις¹.

Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΒΔ$, $ΕΓ$, $ΓΔ$. Καὶ² ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ΑΒΕΔ$, διαμέτρος δὲ αὐτοῦ ἐστίν³ ἡ $ΒΔ$. ἴσον ἄρα ἐστὶ⁴ τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον τῷ $ΕΔΒ$ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΕΔΒ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ⁵ τὸ $ΕΔΒ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον, ἡ αὐτὴ ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ⁶ τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυ-

Omne prisma triangularem habens basim dividitur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

Sit prisma cujus basis quidem triangulum $ΑΒΓ$, oppositum autem $ΔΕΖ$; dico $ΑΒΓΔΕΖ$ prisma dividi in tres pyramides æquales inter se, triangulares habentes bases.

Jungantur enim ipsæ $ΒΔ$, $ΕΓ$, $ΓΔ$. Et quoniam parallelogrammum est $ΑΒΕΔ$, diameter autem ipsius est $ΒΔ$; æquale igitur est $ΑΒΔ$ triangulum triangulo $ΕΔΒ$; et pyramis igitur, cujus basis quidem $ΑΒΔ$ triangulum, vertex autem punctum $Γ$, æqualis est pyramidi, ejus basis quidem est $ΕΔΒ$ triangulum, vertex autem punctum $Γ$. Sed pyramis, ejus basis quidem est $ΕΔΒ$ triangulum, vertex autem punctum $Γ$, eadem est cum pyramide, cujus basis quidem est triangulum $ΕΒΓ$, vertex autem punctum $Δ$, iisdem enim planis continetur; et pyramis

PROPOSITION VII.

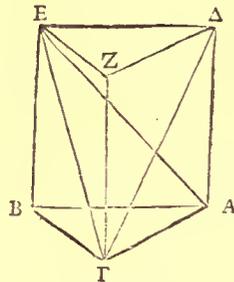
Tout prisme ayant une base triangulaire peut se diviser en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires.

Soit le prisme dont la base est le triangle $ΑΒΓ$ opposé au triangle $ΔΕΖ$; je dis que le prisme $ΑΒΓΔΕΖ$ peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires.

Car joignons $ΒΔ$, $ΕΓ$, $ΓΔ$. Puisque la figure $ΑΒΕΔ$ est un parallélogramme, dont $ΒΔ$ est la diagonale, le triangle $ΑΒΔ$ sera égal au triangle $ΕΔΒ$ (34. 1); la pyramide qui a pour base le triangle $ΑΒΔ$ et pour sommet le point $Γ$ est donc égale à la pyramide qui a pour base le triangle $ΕΔΒ$ et pour sommet le point $Γ$ (5. 12). Mais la pyramide qui a pour base le triangle $ΕΔΒ$, et pour sommet le point $Γ$, est égale à la pyramide qui a pour base le triangle $ΕΒΓ$, et pour sommet le point $Δ$, car elles sont comprises sous les mêmes plans; la pyramide qui a pour base le

ραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $EB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ $Z\Gamma BE$, διάμετρος δὲ ἐστὶν αὐτοῦ ἡ ΓE , ἴσον ἐστὶ τὸ $E\Gamma Z$ τρίγωνον τῷ ΓBE τρίγωνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $BE\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $E\Gamma Z$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἡ δὲ

igitur, cujus basis quidem est triangulum $AB\Delta$, vertex autem punctum Γ , æqualis est pyramidi, cujus basis quidem est $EB\Gamma$ triangulum, vertex autem punctum Δ . Rursus, quoniam parallelogrammum est $Z\Gamma BE$, diameter autem ipsius est ipsa ΓE , æquale est $E\Gamma Z$ triangulum triangulo ΓBE ; et pyramis igitur, cujus basis quidem est $BE\Gamma$ triangulum, vertex autem punctum Δ , æqualis est pyramidi, cujus basis quidem est $E\Gamma Z$ triangulum, vertex autem punctum



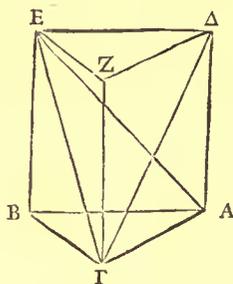
πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $B\Gamma E$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Gamma E Z$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διήρηται ἄρα

tum Δ . Pyramis autem, cujus basis quidem est $B\Gamma E$ triangulum, vertex autem punctum Δ , æqualis ostensa est pyramidi, cujus basis quidem est $AB\Delta$ triangulum, vertex autem punctum Γ ; et pyramis igitur, cujus basis quidem est $\Gamma E Z$ triangulum, vertex autem punctum Δ , æqualis est pyramidi, cujus basis quidem est $AB\Delta$ triangulum, vertex autem punctum Γ ; dividitur igitur

triangle $AB\Delta$, et pour sommet le point Γ , est donc égale à la pyramide qui a pour base le triangle $EB\Gamma$, et pour sommet le point Δ . De plus, puisque la figure $Z\Gamma BE$ est un parallélogramme qui a pour diagonale la droite ΓE , le triangle $E\Gamma Z$ est égal au triangle ΓBE (54. 1); la pyramide qui a pour base le triangle $BE\Gamma$, et pour sommet le point Δ , est donc égale à la pyramide qui a pour base le triangle ERZ , et pour sommet le point Δ (5. 11). Mais on a démontré que la pyramide qui a pour base le triangle $B\Gamma E$, et pour sommet le point Δ , est égale à la pyramide qui a pour base le triangle $AB\Delta$, et pour sommet le point Γ ; la pyramide qui a pour base le triangle $\Gamma E Z$, et pour sommet le point Δ , est donc égale à la pyramide qui a pour base le triangle $AB\Delta$, et pour sommet le point Γ ; le prisme $AB\Gamma\Delta E Z$ est donc

τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους ἔχούσας βάσεις⁹. Καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἔστι τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον, ἡ αὐτὴ ἔστι πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν¹⁰ τὸ $ΓΑΒ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν

$ΑΒΓΔΕΖ$ prisma in tres pyramides æquales inter se, triangulares habentes bases. Et quoniam pyramis, cujus basis quidem est $ΑΒΔ$ triangulum, vertex autem punctum $Γ$, eadem est cum pyramide, cujus basis quidem $ΓΑΒ$ triangulum, vertex autem punctum $Δ$, iisdem namque planis



αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται, ἡ δὲ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν¹¹ τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον, τρίτον εἰδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΔΕΖ$. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον, τρίτον ἔστι τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντες βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΔΕΖ$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι¹².

continentur; pyramis autem, cujus basis quidem triangulum $ΑΒΔ$, vertex autem punctum $Γ$, tertia pars ostensa prisnatis, cujus basis $ΑΒΓ$ triangulum, oppositum autem $ΔΕΖ$; et pyramis igitur, cujus basis triangulum $ΑΒΓ$, vertex autem $Δ$ punctum, tertia pars est prisnatis habentis basim eandem, triangulum $ΑΒΓ$, oppositum autem triangulum $ΔΕΖ$. Quod oportebat ostendere.

divisé en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires. Mais la pyramide qui a pour base le triangle $ΑΒΔ$, et pour sommet le point $Γ$, est la même que la pyramide qui a pour base le triangle $ΓΑΒ$ et pour sommet le point $Δ$, car ces pyramides sont comprises sous les mêmes plans, et l'on a démontré que la pyramide qui a pour base le triangle $ΑΒΔ$, et pour sommet le point $Γ$, est la troisième partie du prisme qui a pour base le triangle $ΑΒΓ$ opposé au triangle $ΔΕΖ$; la pyramide qui a pour base le triangle $ΑΒΓ$, et pour sommet le point $Δ$, est donc la troisième partie d'un prisme qui a la même base, savoir, le triangle $ΑΒΓ$ opposé au triangle $ΔΕΖ$. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βᾶσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ τὸ ὕψος ἴσον· ἐπειδὴ περὶ κἄν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχη ἢ βᾶσις τοῦ πρίσματος, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνους ἔχοντα βᾶσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

Ex hoc evidens est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis eamdem basim habentis cum illâ et altitudinem æqualem; quoniam et si aliam quamdam figuram rectilineam obtineat basis prismatis, et opposita eamdem, dividitur in prismata triangulares habentia bases, et oppositas.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

PROPOSITIO VIII.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τρίγωνους ἔχουσαι βᾶσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Similes pyramides, et triangulares habentes bases, in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum.

Ἐστῶσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βᾶσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κερυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἢ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Sint similes et similiter positæ pyramides, quarum bases quidem sunt triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem Η, Θ puncta; dico ΑΒΓΗ pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habere ejus quam ΒΓ ad ΕΖ.

COROLLAIRE.

D'après cela il est évident que toute pyramide est la troisième partie d'un prisme qui a la même base et la même hauteur qu'elle; car si l'une des bases du prisme est une autre figure rectiligne, la base opposée étant la même figure, ce prisme pourra être divisé en prismes qui auront des bases triangulaires, et dont les bases opposées seront des triangles.

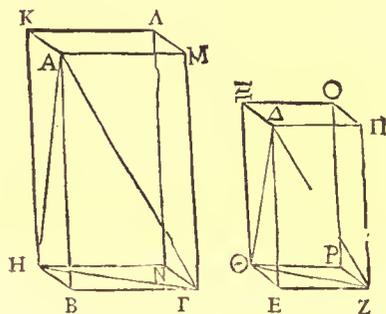
PROPOSITION VIII.

Les pyramides semblables, qui ont des bases triangulaires, sont entr'elles en raison triplée de leurs côtés homologues.

Que des pyramides semblables et semblablement placées ayent pour bases les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et pour sommets les points Η, Θ; je dis que la pyramide ΑΒΓΗ a avec la pyramide ΔΕΖΘ a une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ.

Συμπεπληρώσω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀναλογόν εἰσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὁμοίον ἐστὶ, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ

Compleantur enim ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ solida parallelepipedā. Et quoniam similis est ΑΒΓΗ pyramis pyramidi ΔΕΖΘ; æqualis igitur est quidem angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, angulus autem ΗΒΓ angulo ΘΕΖ, angulus vero ΑΒΗ angulo ΔΕΘ, et est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ, et ΒΗ ad ΕΘ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ, et circum æquales angulos latera proportionalia sunt; simile igitur est parallelogrammum ΒΜ parallelogrammum ΕΠ. Propter eadem utique et parallelogrammum quidem ΒΝ parallelogrammo ΕΡ simile est, parallelogrammum autem ΒΚ ipsi ΕΞ parallelogrammo; tria



ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὁμοία ἐστὶν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοία ἐστὶ, τὰ

igitur parallelogramma ΜΒ, ΒΚ ΒΝ tribus ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ similia sunt. Sed tria quidem ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ tribus oppositis et æqualia et similia sunt,

Achevons les parallélépipèdes ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Puisque la pyramide ΑΒΓΗ est semblable à la pyramide ΔΕΖΘ, l'angle ΑΒΓ sera égal à l'angle ΔΕΖ (déf. 9. 11), l'angle ΗΒΓ égal à l'angle ΘΕΖ, l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΘ, et ΑΒ sera à ΔΕ comme ΒΓ est à ΕΖ, et comme ΒΗ est à ΕΘ. Et puisque ΑΒ est à ΔΕ comme ΒΓ est à ΕΖ, et que les côtés placés autour d'angles égaux sont proportionnels, le parallélogramme ΒΜ sera semblable au parallélogramme ΕΠ. Par la même raison, le parallélogramme ΒΝ sera semblable au parallélogramme ΕΡ, et le parallélogramme ΒΚ semblable au parallélogramme ΕΞ; les trois parallélogrammes ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ sont donc semblables aux trois parallélogrammes ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ. Mais les trois parallélogrammes ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ sont égaux et semblables aux trois parallélogrammes

δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι⁵. τὰ ΒΗΜΑ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται⁶. ὁμοίων ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῶ. Τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τὸ ΒΗΜΑ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὁμολογος πλευρὰ ὁ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμολογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν οὕτως ἢ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδὴ περ ἢ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἡμισυ ἐν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπίπεδου τριπλασίον εἶναι τῆς πυραμίδος· καὶ ἢ ΑΒΓΗ ἄρα⁸ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

tria vero ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ tribus oppositis et æqualia et similia sunt; solida ΒΗΜΑ, ΕΘΠΟ igitur similibus planis numero æqualibus continentur; simile igitur est ΒΗΜΑ solidum solido ΕΘΠΟ. Similia autem solida parallelepipedà in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum; solidum igitur ΒΗΜΑ ad solidum ΕΘΠΟ triplicatam rationem habet ejus quam habet latus homologum ΒΓ ad homologum latus ΕΖ. Ut autem ΒΗΜΑ solidum ad solidum ΕΘΠΟ ita ΑΒΓΗ pyramis ad pyramidem ΔΕΖΘ, quia pyramis sexta pars est ipsius solidi; et prisma, dimidium existens solidi parallelepipedì, triplum est pyramidis; et pyramis igitur ΑΒΓΗ ad pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

opposés, et les trois parallélogrammes ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ sont aussi égaux et semblables aux trois parallélogrammes opposés (24. 11); les parallélépipèdes ΒΗΜΑ, ΕΘΠΟ sont donc compris par des plans semblables et égaux en nombre; le parallélépipède ΒΗΜΑ est donc semblable au parallélépipède ΕΘΠΟ (déf. 9. 11). Mais les parallélépipèdes semblables sont entre eux en raison triplée de leurs côtés homologues (53. 11); le parallélépipède ΒΗΜΑ a donc, avec le parallélépipède ΕΘΠΟ, une raison triplée de celle que le côté homologue ΒΓ a avec le côté homologue ΕΖ. Mais le parallélépipède ΒΗΜΑ est au parallélépipède ΕΘΠΟ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΞ (15. 5), parce que la pyramide est la sixième partie du parallélépipède, et que le prisme triangulaire qui est la moitié du parallélépipède est le triple de la pyramide; la pyramide ΑΒΓΗ a donc avec la pyramide ΔΕΖΘ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ'.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιοι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰς τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Διαριθειῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τρίγωνους βάσεις ἔχούσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαριθίσθω, καὶ² ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἴσται ὡς ἐν τῇ ἐτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἐτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν³ οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἔχούσας· τοῦτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδαί, ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἀρὰ βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίας βάσεις ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν⁵.

COROLLARIUM.

Ex hoc evidens est et similes pyramides, polygonas habentes bases, inter se esse in triplicatâ ratione homologorum laterum. Ipsis enim divisus in pyramides triangulares bases habentes, quia et similia polygonas basium in similia triangula dividuntur, et æqualia numero et homologa totis; erit ut una pyramis in alterâ pyramides triangularum habens basim ad unam pyramidem in alterâ triangularem habentem basim ita et omnes pyramides in alterâ pyramide triangulares habentes bases ad pyramides in alterâ pyramidi triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis polygonam basim habens ad pyramidem quæ polygonam basim habet; sed habens basim triangularum pyramis ad pyramidem triangularem basim habentem in triplicatâ ratione est homologorum laterum; et igitur pyramis polygonam habens basim ad pyramidem similes bases habentem triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum ad homologum latus.

COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident que les pyramides semblables qui ont des polygones pour bases sont entr'elles en raison triplée de leurs côtés homologues. Parce que ces pyramides peuvent être divisées en pyramides triangulaires, et que les polygones semblables qui sont les bases de ces pyramides peuvent être divisés en un même nombre de triangles semblables entr'eux et proportionnels à ces polygones (20. 6); une des pyramides triangulaires contenue dans la première pyramide sera à une autre des pyramides triangulaires contenue dans la seconde pyramide comme la somme de toutes les pyramides triangulaires contenues dans la première pyramide est à la somme de toutes les pyramides triangulaires contenues dans l'autre pyramide, c'est-à-dire comme une des pyramides qui a pour base un polygone est à l'autre pyramide qui a aussi pour base un polygone. Mais les pyramides triangulaires semblables sont entr'elles en raison triplée de leurs côtés homologues; les pyramides semblables qui ont pour bases des polygones sont donc entr'elles en raison triplée de leurs côtés homologues.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

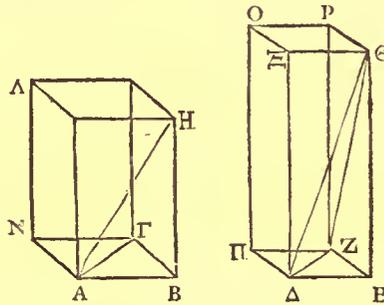
PROPOSITIO IX.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόσθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκείναι.

Ἐστώσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες, τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάση πρὸς τὴν ΔΕΖ βάση οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.

Æqualium pyramidum et triangulares bases habentium, reciprocæ sunt bases altitudinibus; et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocæ sunt bases altitudinibus, illæ æquales sunt inter sc.

Sint enim æquales pyramidæ triangulares bases habentes ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices vero Η, Θ puncta; dico pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ reciprocas esse bases altitudinibus, et esse ut ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basin ita pyramidis ΔΕΖΘ altitudinem ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΑ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ

Compleantur enim ΒΗΜΑ, ΕΘΠΟ solida parallelepipeda. Et quoniam æqualis est ΑΒΓΗ pyramis

PROPOSITION IX.

Les bases des pyramides égales qui ont des bases triangulaires sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs de ces pyramides; et les pyramides triangulaires qui ont des bases réciproquement proportionnelles aux hauteurs, sont égales entr'elles.

Soient deux pyramides égales qui ayent les bases triangulaires ΑΒΓ, ΔΕΖ, et dont les sommets soient les points Η, Θ; je dis que les bases des pyramides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs de ces pyramides, c'est-à-dire que la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la hauteur de la pyramide ΔΕΖΘ est à la hauteur de la pyramide ΑΒΓΗ.

Car achevons les parallélépipèdes ΒΗΜΑ, ΕΘΠΟ. Puisque la pyramide ΑΒΓΗ est

ΑΒΓΗ πυραμὶς τῆ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμίδος ἕξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἕξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπίπιδων ἀντιπεπύθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν² οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· τῶν ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ³ πυραμίδων ἀντιπεπύθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονήθωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ

pyramidi ΔΕΖΘ, et est pyramidis quidem ΑΒΓΗ sextupulum ΒΗΜΑ solidum, pyramidis vero ΔΕΖΘ sextupulum solidum ΕΘΠΟ; æquale igitur ΒΗΜΑ solidum solido ΕΘΠΟ. Æqualium autem solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus; est igitur ut ΒΜ basis ad ΕΠ basim ita ΕΘΠΟ solidi altitudo ad altitudinem solidi ΒΗΜΑ. Sed ut ΒΜ basis ad ΕΠ basim ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ; et ut igitur ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ ita solidi ΕΘΠΟ altitudo ad altitudinem solidi ΒΗΜΑ. Sed solidi quidem ΕΘΠΟ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ΔΕΖΘ; solidi vero ΒΗΜΑ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ΑΒΓΗ; est igitur ut ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basim ita ΔΕΖΘ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ; pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ igitur bases sunt reciprocæ altitudinibus.

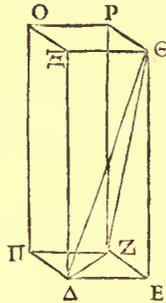
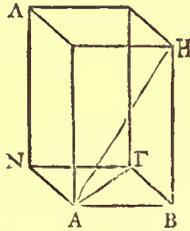
At vero pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ reciprocæ sint bases altitudinibus, et sit ut ΑΒΓ basis ad

égale à la pyramide ΔΕΖΘ, que le parallélépipède ΒΗΜΑ est le sextuple de la pyramide ΑΒΓΗ, et que le parallélépipède ΕΘΠΟ est aussi le sextuple de la pyramide ΔΕΖΘ, le parallélépipède ΒΗΜΑ sera égal au parallélépipède ΕΘΠΟ (15. 5). Mais les bases des parallélépipèdes égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs (34. 11); la base ΒΜ est donc à la base ΕΠ comme la hauteur du parallélépipède ΕΘΠΟ est à la hauteur du parallélépipède ΒΗΜΑ. Mais la base ΒΜ est à la base ΕΠ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΔΕΖ; le triangle ΑΒΓ est donc au triangle ΔΕΖ comme la hauteur du parallélépipède ΕΘΠΟ est à la hauteur du parallélépipède ΒΗΜΑ. Mais la hauteur du parallélépipède ΕΘΠΟ est la même que la hauteur de la pyramide ΔΕΖΘ, et la hauteur du parallélépipède ΒΗΜΑ est la même que la hauteur de la pyramide ΑΒΓΗ; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme la hauteur de la pyramide ΔΕΖΘ est à la hauteur de la pyramide ΑΒΓΗ; les bases des pyramides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs.

Si les bases des pyramides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ sont réciproquement proportionnelles

ἔστω ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν ὡς τὸ τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι.

ΔEZ basim ita $\Delta EZ\Theta$ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$; dico æqualem esse $AB\Gamma H$ pyramidem pyramidi $\Delta EZ\Theta$.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν ὡς τὸ τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος· ἀλλ' ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν ὡς τὸ BM παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ EP παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ BM παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ EP παραλληλόγραμμον ὡς τὸ τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν^δ τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ $E\Theta PO$ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ $BHMA$ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM βάσις^δ πρὸς τὴν EP βάσιν ὡς τὸ

Isidem enim constructis, quoniam est ut $AB\Gamma$ basis ad ΔEZ basim ita $\Delta EZ\Theta$ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$; sed ut $AB\Gamma$ basis ad ΔEZ basim ita BM parallelogrammum ad EP parallelogrammum; et ut igitur BM parallelogrammum ad EP parallelogrammum ita altitudo pyramidis $\Delta EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$. Sed pyramidis quidem $\Delta EZ\Theta$ altitudo eadem est cum altitudine parallelepipedi $E\Theta PO$; pyramidis vero $AB\Gamma H$ altitudo eadem est cum altitudine parallelepipedi $BHMA$; est igitur ut BM basis ad EP basim ita $E\Theta PO$ solidi parallelepipedi

aux hauteurs, c'est-à-dire, si la base $AB\Gamma$ est à la base ΔEZ comme la hauteur de la pyramide $\Delta EZ\Theta$ est à la hauteur de la pyramide $\Delta B\Gamma H$; je dis que la pyramide $AB\Gamma H$ est égale à la pyramide $\Delta EZ\Theta$.

Faisons la même construction. Puisque la base $AB\Gamma$ est à la base ΔEZ comme la hauteur de la pyramide $\Delta EZ\Theta$ est à la hauteur de la pyramide $AB\Gamma H$, et que la base $AB\Gamma$ est à la base ΔEZ comme le parallélogramme BM est au parallélogramme EP , le parallélogramme BM sera au parallélogramme EP comme la hauteur de la pyramide $\Delta EZ\Theta$ est à la hauteur de la pyramide $AB\Gamma H$. Mais la hauteur de la pyramide $\Delta EZ\Theta$ est la même que la hauteur du parallélépipède $E\Theta PO$, et la hauteur de la pyramide $AB\Gamma H$ est la même que la hauteur du parallélépipède $BHMA$; la base BM est donc à la base EP comme la hauteur du parallélépipède $E\Theta PO$ est à la hauteur du

τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ παραλληλεπιπέδου ὕψος. Ὡν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσα ἰστὶν ἐκεῖνα ἴσον ἄρα ἰστὶ^δ τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν παραλληλεπιπέδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. Καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΑ ἕκτον μέρος ἢ ΑΒΓΗ πυραμῖς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ στερεοῦ^θ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἢ ΔΕΖΘ πυραμῖς ἴση ἄρα ἢ ΑΒΓΗ πυραμῖς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

altitudo ad altitudinem parallelepipedī BHMA. Quorum autem solidorum parallelepipedorum reciprocae sunt bases altitudinibus, ea sunt æqualia; æquale igitur est solidum parallelepipedum BHMA solido parallelepipedo EΘΠΟ. Et est ipsius quidem BHMA sexta pars pyramis ABΓH, solidi vero parallelepipedī EΘΠΟ sexta pars pyramis ΔΕΖΘ; æqualis igitur ABΓH pyramis pyramidi ΔΕΖΘ.

Ergo æqualium, etc.

parallélépipède BHMA. Mais les parallélépipèdes qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs sont égaux entr'eux (34. 11); le parallélépipède BHMA est donc égal au parallélépipède EΘΠΟ. Mais la pyramide ABΓH est la sixième partie du parallélépipède BHMA, et la pyramide ΔΕΖΘ est aussi la sixième partie du parallélépipède EΘΠΟ; la pyramide ABΓH est donc égale à la pyramide ΔΕΖΘ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

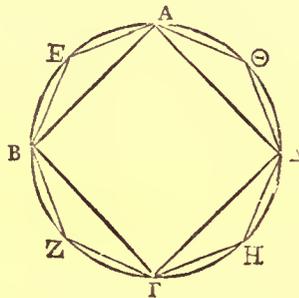
PROPOSITIO X.

Πᾶς κώνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἔστι τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κώνος κυλίνδρω βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω ὅτι ὁ κώνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἔστι μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἔστιν¹.

Omnis conus cylindri tertia pars est eandem basim habentis et altitudinem æqualem.

Habeat enim conus cum cylindro et basim eandem circulum ΑΒΓΔ, et altitudinem æqualem; dico conum esse tertiam cylindri partem, hoc est cylindrum conii triplum esse.



Εἰ μὴ γάρ² ἔστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἢτοι μείζων ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. Ἐστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετραγώνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὲ ΑΒΓΔ τετράγωνον

Si enim non sit cylindrus conii triplus, erit cylindrus conii major vel minor quam triplus. Sit primum major quam triplus; et describatur in ΑΒΓΔ circulo quadratum ΑΒΓΔ; quadra-

PROPOSITION X.

Un cône est la troisième partie d'un cylindre qui a la même base, et une hauteur égale.

Qu'un cône ait la même base qu'un cylindre, savoir, le cercle ΑΒΓΔ, et une hauteur égale; je dis que ce cône est la troisième partie de ce cylindre, c'est-à-dire qu'un cylindre est le triple d'un cône.

Car si le cylindre n'est pas le triple du cône, le cylindre sera plus grand que le triple ou plus petit; qu'il soit d'abord plus grand que le triple. Décrivons dans le cercle ΑΒΓΔ le quarré ΑΒΓΔ; le quarré ΑΒΓΔ sera plus grand que la moitié du cercle ΑΒΓΔ. Sur le quarré ΑΒΓΔ élevons un prisme qui ait la même hauteur que

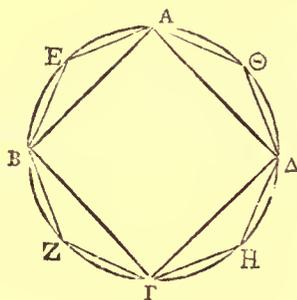
μειζόν ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετραγώνου πρίσμα ἰσοῦψις τῷ κυλίνδρῳ, τὸ δὲ ἀνεσταμένον πρίσμα μειζόν ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ καὶ περὶ τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου, καὶ ἐστὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνεστάμεια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοῦψι· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἀλληλά³ ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ $ΑΒΓΔ$ ἄρα τετραγώνου⁴ ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, καὶ ἐστὶν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετραγώνου ἰσοῦψις τῷ κυλίνδρῳ μειζόν ἐστὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. Τετμήσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$, $ΔΘ$, $ΘΑ$ · καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$, τριγώνων μειζόν ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ

tum $ΑΒΓΔ$ utique majus est quam dimidium $ΑΒΓΔ$ circuli. Et erigatur a quadrato $ΑΒΓΔ$ prisma æquealtum atque cylindrus, erectum utique prisma majus est quam dimidium cylindri; quoniam si circa circulum $ΑΒΓΔ$ quadratum describatur; inscriptum in circulo $ΑΒΓΔ$ quadratum dimidium est circumscripti; et sunt ab iis erecta solida parallelepipedata prismata æquealta; sub eadem autem altitudine existentia solida parallelepipedata inter se sunt ut bases; et sub $ΑΒΓΔ$ igitur quadrato erectum prisma dimidium est erecti prismatis a quadrato descripto circa circulum $ΑΒΓΔ$, et est cylindrus minor prismate erecto a descripto quadrato circa $ΑΒΓΔ$ circulum; ergo prisma erectum a quadrato $ΑΒΓΔ$ æquealtumatque cylindrus majus est dimidio cylindri. Secentur circumferentiæ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ bifariam in punctis $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$, et jungantur ipsæ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$, $ΔΘ$, $ΘΑ$; et unumquodque igitur triangulorum $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ majus est di-

le cylindre; ce prisme sera plus grand que la moitié du cylindre; parce que si l'on circonscrit un quarré au cercle $ΑΒΓΔ$, le quarré inscrit sera la moitié du quarré circonscrit; mais les parallélépipèdes, c'est-à-dire les prismes élevés sur ces bases ont la même hauteur; ces prismes sont donc entr'eux comme leurs bases; le prisme élevé sur le quarré $ΑΒΓΔ$ est donc la moitié du prisme élevé sur le quarré circonscrit au cercle $ΑΒΓΔ$; mais le cylindre est plus petit que le prisme élevé sur le quarré circonscrit au cercle $ΑΒΓΔ$; le prisme élevé sur le quarré $ΑΒΓΔ$, qui a une hauteur égale à celle du cylindre, est donc plus grand que la moitié du cylindre. Divisons les arcs $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ en deux parties égales aux points $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$, et joignons $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$, $ΔΘ$, $ΘΑ$; chacun des triangles $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ sera plus grand que le demi-segment du cercle $ΑΒΓΔ$

τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν εἰδείκνυμεν. Ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρίσματος μείζον ἔστιν ἢ τὸ ἡμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου ἐπειδὴ ἵππερ ἂν διὰ τῶν Ε, Ζ, Θ σημείων πα-

midio segmenti circuli ΑΒΓΔ, in quo est, ut superius ostendimus. Erigantur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ prismata æquealta atque cylindrus; et unumquodque igitur erectorum prismatum majus est quam dimidia pars segmenti cylindri in quo est, quoniam si per puncta Ε, Ζ, Η, Θ parallelas ipsis ΑΒ, ΒΓ,



ραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἔστι τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων· καὶ ἔστι τὰ τοῦ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ

ΓΔ, ΔΑ ducamus et compleamus ad ipsas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ parallelogramma, et ab ipsis erigamus solida parallelepipeda æquealta atque cylindrus, uniuscujusque erectorum dimidia sunt prismata in ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ triangulis; et sunt cylindri segmenta minora erectis solidis parallelepipedis; quare et in triangulis ΑΕΒ,

où il est placé, comme nous l'avons démontré plus haut (2. 12). Sur chacun des triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ élevons des prismes qui ayent une hauteur égale à celle du cylindre; chacun de ces prismes sera plus grand que la moitié du segment du cylindre dans lequel il est placé, parce que si par les points Ε, Ζ, Η, Θ on mène des parallèles aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, et si sur les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ on achève les parallélogrammes, et sur ces parallélogrammes on élève des parallélépipèdes qui ayent la même hauteur que le cylindre, les prismes qui auront pour bases les triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ seront les moitiés de chacun de ces parallélépipèdes. Mais les segments du cylindre sont plus petits que ces

τὰ ἐπὶ τῶν AEB, BZΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγῶνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγῶνων πρίσματα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείφομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιον ἐστὶ τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κερυφὴ δὲ ἢ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κερυφὴ δὲ ἢ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. Ἀλλὰ

BZΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ prismata majora sunt quam dimidium segmentorum cylindri in quibus sunt; secantes utique reliquas circumferentias bifariam, et jungentes rectas, et erigentes ab unoquoque triangulorum prismata æquealta atque cylindrus, et hoc semper facientes, relinquemus quædam segmenta cylindri quæ erunt minora excessu, quo superat cylindrus triplum conii. Reliquantur, et sint AB, EB, BZ, ZΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum AEBZΓΗΔΘ, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum conii. Sed prisma, cujus basis quidem est AEBZΓΗΔΘ polygonum, altitudo autem eadem quæ cylindri, triplum est pyramidis, cujus basis quidem polygonum AEBZΓΗΔΘ, vertex autem idem qui conii; et pyramis igitur, cujus basis quidem polygonum AEBZΓΗΔΘ, vertex autem idem conii, major est cono basim habente ΑΒΓΔ circumulum. Sed

parallélépipèdes; les prismes qui ont pour bases les triangles AEB, BZΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ sont donc plus grands que les moitiés des segments du cylindre dans lequel ils sont placés. Partageons les arcs restants en deux parties égales, menons les cordes, sur chacun des triangles élevons des prismes qui ayent la même hauteur que le cylindre, et faisons toujours la même chose, il restera certains segments du cylindre qui seront plus petits que l'excès du cylindre sur le triple du cône (1. 10). Qu'on ait ces segments restants; que ce soient les segments AE, EB, BZ, ZΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; le prisme restant, dont la base est le polygone AEBZΓΗΔΘ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, sera plus grand que le triple du cône. Mais le prisme dont la base est le polygone AEBZΓΗΔΘ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est triple de la pyramide dont la base est le polygone AEBZΓΗΔΘ, et dont le sommet est le même que celui du cône (7. 12); la pyramide dont la base est le polygone AEBZΓΗΔΘ, et dont le sommet est le même que celui du cône est plus grande que le cône dont la base est le cercle

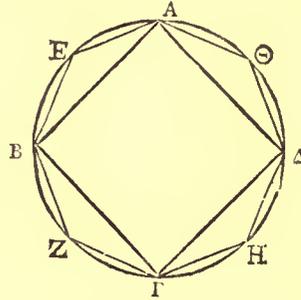
καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπὸ αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἄδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν⁸ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος⁹. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ ἐστὶν ἢ τριπλάσιος¹⁰ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κώνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Εἰρηγράφηθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἕμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κρυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἢ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἕμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδὴ περὶ αὐτὴν ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετραγώνον¹¹ περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἕμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντου τετραγώνου¹²· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίδα ἀναστήσωμεν ἰσοῦσιν τῷ κώνῳ, αὗτὰ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθέν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἕμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, πρὸς ἀλλήλα

et minor, comprehenditur enim ab ipso, quod est impossibile; non igitur est cylindrus major quam triplus conii. Dico et neque minorem esse cylindrum quam triplum conii. Si enim possibile, sit minor cylindrus quam triplus conii; invertendo igitur conus major est quam tertia pars cylindri. Describatur igitur in ΑΒΓΔ circulo quadratum ΑΒΓΔ; quadratum igitur ΑΒΓΔ majus est quam dimidium circuli ΑΒΓΔ. Et erigatur a quadrato ΑΒΓΔ pyramis, verticem eundem habens quem conus; erecta igitur pyramis major est quam dimidia pars conii; quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describamus, erit quadratum ΑΒΓΔ dimidium descripti quadrati circa circulum; et si a quadratis solida parallelepida erigamus æque alta atque conus, quæ et appellentur prismata; erit erectum a quadrato ΑΒΓΔ dimidium erecti a quadrato descripto circa circulum, inter se eum sunt ut bases; quare et tertix

ΑΒΓΔ. Mais la pyramide est plus petite, car le cône la contient, ce qui est impossible; le cylindre n'est donc pas plus grand que le triple du cône. Je dis enfin que le cylindre n'est pas plus petit que le triple du cône. Car que le cylindre soit plus petit que le triple du cône, si cela est possible; par inversion, le cône sera plus grand que la troisième partie du cylindre. Dans le cercle ΑΒΓΔ décrivons le quarré ΑΒΓΔ; le quarré ΑΒΓΔ sera plus grand que la moitié du cercle ΑΒΓΔ. Sur le quarré ΑΒΓΔ élevons une pyramide qui ait le même sommet que le cône; cette pyramide sera plus grande que la moitié du cône; parce que si nous circonscrivons un quarré au cercle, le quarré ΑΒΓΔ sera la moitié du quarré circonscrit à ce cercle, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, et si sur ces quarrés nous élevons des parallélépipèdes de même hauteur que le cône, c'est-à-dire des prismes, celui qui sera élevé sur le quarré ΑΒΓΔ sera la moitié du prisme élevé sur le quarré circonscrit, car ces prismes sont entr'eux comme leurs bases (52. 11);

γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὅστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἡμισὺ ἐστὶ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. Καὶ ἐστὶ μείζων ἢ πυραμὶς ἢ ἀνασταθείσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτὴν· ἢ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κρυφὴ δὲ ἢ αὐτῇ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ¹³ ἡμισυ τοῦ

partes ; et pyramis igitur eujus basis quadratum ΑΒΓΔ, dimidia est pyramidis erectæ a quadrato circa circulum descripto. Et est pyramis erecta a quadrato descripto circa circulum major cono ; comprehendit enim ipsum ; ergo pyramis, eujus basis ΑΒΓΔ quadratum, vertex autem idem qui conii, major est quam conii



κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτωσαν ἀφ' ἕκαστου τῶν ΑΗΔ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες,

dimidium. Secentur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, et jungantur ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ ; et unumquodque igitur triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majus est quam dimidia pars segmenti circuli ΑΒΓΔ in quo est. Et erigantur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ pyramides, verticem eundem ha-

il en sera de même pour leurs troisièmes parties ; la pyramide qui a pour base le carré ΑΒΓΔ est donc la moitié de la pyramide élevée sur le carré circonscrit au cercle. Mais la pyramide élevée sur le carré circonscrit au cercle est plus grande que le cône, car elle le contient ; la pyramide dont la base est le carré ΑΒΓΔ, et dont le sommet est le même que celui du cône, est donc plus grande que la moitié du cône. Divisons les arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ en deux parties égales aux points Ε, Ζ, Η, Θ, et joignons les droites ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ ; chacun des triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ sera plus grand que la moitié du segment du cercle ΑΒΓΔ dans lequel il est placé. Sur chacun des triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ élevons des pyramides qui aient le même sommet que le cône ; cha-

τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κώνου¹⁴. Τέμνοντες δὲ τὰς ὑπολειπόμενης περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύοντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἐκάστου τῶν τριγῶνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινὰ τμήματα¹⁵ τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττωνα τῆς ὑπεροχής, ἢ ὑπερέχει ὁ κώνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Δελεῖσθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος¹⁶ τοῦ πρίσματος, οὗ βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, οὗ βᾶσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. Ἀλλὰ

bentes quem conus; et unaquæque igitur pyramidum sic erectarum major est quam dimidium segmenti conici in quo est. Secantes itaque reliquas circumferentias bifariam, et jungentes rectas, et erigentes ab unoquoque triangulorum pyramidem eundem verticem habentem quem conus, et hoc semper facientes, relinquemus quasdam portiones conici quæ minores erunt excessu, quo superat conus tertiam partem cylindri. Relinquantur, et sint quæ in ipsis ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; reliqua igitur pyramis, cujus basis quidem est polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ, vertex autem idem qui conici, major est quam tertia pars cylindri. Sed pyramis, cujus basis quidem est polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ, altitudo autem eadem quæ conici; tertia pars est prismatis, cujus basis quidem est ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum, altitudo eadem quæ cylindri; prisma igitur, cujus basis quidem est ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est cylindro, cujus basis est circulus ΑΒΓΔ.

cune de ces pyramides sera plus grande que la moitié du segment du cône dans lequel elle est placée. Divisons les arcs restants en deux parties égales, et menons leurs cordes; sur chacun de ces triangles élevons une pyramide qui ait le même sommet que le cône, et faisons toujours la même chose, il restera enfin certains segments de cône qui seront plus petits que l'excès du cône sur la troisième partie du cylindre (1. 10). Qu'on ait ces segments restants du cône, et qu'ils soient ceux qui ont pour bases les segments ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; la pyramide restante qui a pour base le polygone ΑΕΒΖΓΗΔΘ, et qui a le même sommet que le cône, sera plus grande que la troisième partie du cylindre. Mais la pyramide dont la base est le polygone ΑΕΒΖΓΗΔΘ, et dont le sommet est le même que celui du cône, est la troisième partie du prisme dont la base est le polygone ΑΕΒΖΓΗΔΘ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre (7. 12); le prisme dont la base est le polygone ΑΕΒΖΓΗΔΘ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est donc plus grand que le cylindre dont la base est le cercle

καὶ ἕλαττον, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπὸ αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἰσὺν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἕλαττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κώνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κώνος, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν¹ οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ $ΚΛ$, MN , διαμέτροι δὲ τῶν βάσεων αἱ $ΑΓ$, $ΕΗ$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον οὕτως ὁ $ΑΑ$ κώνος πρὸς τὸν $ΕΝ$ κώνον².

Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται³ ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον οὕτως ὁ $ΑΑ$ κώνος ἢ τοῖς⁴ πρὸς

Sed et minus; comprehenditur enim ab ipso, quod est impossibile; non igitur cylindrus quam conus triplus minor est. Ostensum autem est neque majorem esse quam triplum; triplus est igitur cylindrus conus; quare conus tertia pars est cylindri.

Omnis igitur conus, etc.

PROPOSITIO XI.

In eadem altitudine existentes conus et cylindri inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine conus et cylindri, quorum bases circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, axes autem $ΚΛ$, MN , diametri vero basium $ΑΓ$, $ΕΗ$; dico esse ut $ΑΒΓΔ$ circulus ad circulum $ΕΖΗΘ$ ita conum $ΑΑ$ ad $ΕΝ$ conum.

Si enim non, erit ut $ΑΒΓΔ$ circulus ad circulum $ΕΖΗΘ$ ita conus $ΑΑ$ vel ad solidum

$ΑΒΓΔ$. Mais le prisme est plus petit que le cylindre, car le cylindre contient ce prisme; ce qui est impossible; le cylindre n'est donc pas plus petit que le triple du cône. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus grand que le triple; le cylindre est donc le triple du cône; le cône est donc la troisième partie du cylindre. Donc, etc.

PROPOSITION XI.

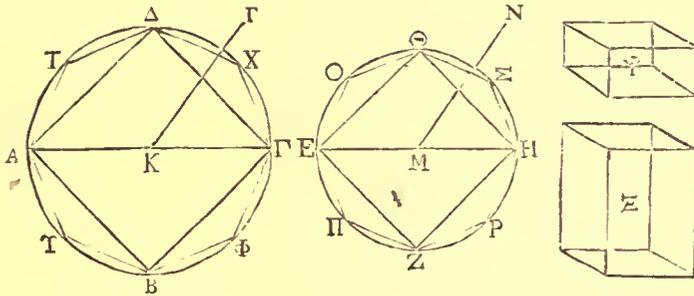
Les cônes et les cylindres qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les cônes et les cylindres de même hauteur, dont les bases sont les cercles $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$, dont les axes sont les droites $ΚΛ$, MN , et qui ont pour diamètres de leurs bases les droites $ΑΓ$, $ΕΗ$; je dis que le cercle $ΑΒΓΔ$ sera au cercle $ΕΖΗΘ$ comme le cône $ΑΑ$ est au cône $ΕΝ$.

Car si cela n'est point, le cercle $ΑΒΓΔ$ sera au cercle $ΕΖΗΘ$ comme le cône $ΑΑ$

ἐλαττόν τι τοῦ EN κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μείζον.
 Ἐστω πρότερον πρὸς ἐλάττον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἕλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ EN κώνου ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν ὁ EN κώνος ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EZHΘ κύκλον τετράγωνον τὸ EZHΘ· τὸ ἄρα τετραγώνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνεστάντω ἀπὸ τοῦ EZHΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ κώνῳ· ἢ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς

aliquod minus cono EN vel ad majus. Sit primum ad minus Ξ, et quo minus est solidum Ξ cono EN huic æquale sit Ψ solidum; conus igitur EN est æqualis ipsis Ξ, Ψ solidis. Describatur in EZHΘ circulo quadratum EZHΘ; quadratum igitur majus est quam dimidium circuli. Erigatur a quadrato EZHΘ pyramis æquealta atque conus; erecta igitur pyramis major est quam dimidium



μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου· ἐπειδὴ περὶ εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοῦψῆ τῷ κώνῳ, ἢ ἐγγεγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, πρὸς ἀλλήλας γὰρ εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἐλάττων δὲ ὁ κώνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος· ἢ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ EZHΘ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἢ αὐτὴ τῷ

coni; nam describamus circa circulum quadratum, et ab ipso erigamus pyramidem æquealtam atque conus; inscripta pyramis dimidia est pyramidis circumscriptæ, inter se enim sunt ut bases. Minor autem conus circumscriptâ pyramide; ergo pyramis, cujus basis quadratum EZHΘ, vertex autem idem qui coni, major est quam

sera à un solide plus petit ou plus grand que le cône EN. Que ce soit d'abord à un solide Ξ plus petit, et que l'excès du cône EN sur le solide Ξ soit égal au solide Ψ, le cône EN sera égal aux solides Ξ, Ψ. Dans le cercle EZHΘ décrivons le carré EZHΘ; ce carré sera plus grand que la moitié de ce cercle. Sur le carré EZHΘ élevons une pyramide qui ait la même hauteur que le cône; cette pyramide sera plus grande que la moitié du cône; car si nous décrivons un carré autour du cercle, et si sur ce carré nous élevons une pyramide qui ait la même hauteur que le cône, la pyramide inscrite sera la moitié de la pyramide circonscrite, parce que ces pyramides sont entre elles comme leurs bases (6. 12). Mais le cône est plus petit que la pyramide circonscrite; la pyramide dont la base est le carré EZHΘ, et dont le sommet est le même que celui du cône, est donc

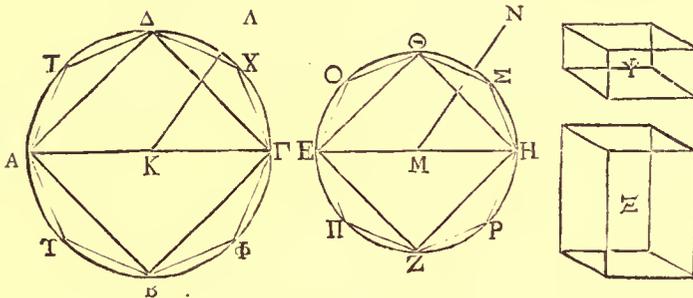
κόνω, μείζων ἔστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου^δ. Τετμήσθωσαν αἱ EZ, ZH, HΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μείζων ἔστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀρεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμῖς ἰσοῦψῆς τῷ κώνω· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἔστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτοῦ^ε τμήματος τοῦ κώνου· τέμνοντες δὲ τὰς ὑπολειπομένας περιφέρειας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀριστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοῦψῆς τῷ κώνω, καὶ αἰ τοῦτο^ς ποιοῦντες, καταλείψομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται^θ ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμῖς, ἧς βᾶσις τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνω, μείζων ἔστι τοῦ Ξ στερεοῦ. Εγγεγράψθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον

dimidium conī. Secentur circumferentiæ EZ, ZH, HΘ, ΘΕ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ; et jungantur ipsæ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ; unumquodque igitur triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ majus est quam dimidium segmenti circuli in quo est. Er gatur ab unoquoque triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ pyramidis æquealta atque conus; et unaquæque igitur erectarum pyramidum major est quam dimidium segmenti conī in quo est. Secantes igitur reliquas circumferentias bifariam; jungentes rectas et erigentes ab unoquoque triangulorum pyramidum æquealtas atque conus, et hoc semper facientes, relinquemus aliqua segmenta conī quæ erunt minora solido Ψ. Relinquantur, et sint quæ in ipsis ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ; reliqua igitur pyramis, cujus basis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ, altitudo autem eadem quæ conī, major est solido Ξ. Describatur in cir-

plus grande que la moitié du cône. Coupons les arcs EZ, ZH, HΘ, ΘΕ en deux parties égales aux points Ο, Π, Ρ, Σ, et joignons ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ; chacun des triangles ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ sera plus grand que la moitié du segment du cercle dans lequel il est placé. Sur chacun des triangles ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ élevons une pyramide qui ait la même hauteur que le cône; chacune de ces pyramides sera plus grande que la moitié du segment du cône dans lequel elle est placée. Divisons en deux parties égales les arcs restants, menons leurs cordes; sur chacun des triangles élevons des pyramides qui aient la même hauteur que le cône, et faisons toujours la même chose; il restera enfin certains segments du cône qui seront plus petits que le solide Ψ (1. 10). Que l'on ait ces segments restants et que ce soient ceux qui ont pour bases les segments circulaires ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. La pyramide restante dont la base est le polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ, et dont la hauteur est la même que celle du cône, sera plus grande que le solide Ξ. Dans le cercle ΑΒΓΔ décrivons

τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ ΑΛ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸν ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως τὸ

culo ΑΒΓΔ ipsi ΘΟΕΠΖΡΗΣ polygono et simile et similiter positum polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ, et crigatur ab ipso pyramis æqualta atque conus ΑΛ. Quoniam igitur est ut quadratum cx ΑΓ ad ipsum ex ΕΗ ita ΔΤΑΥΒΦΓΧ polygoun ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ, ut autem quadratum cx ΑΓ ad quadratum ex ΕΗ ita ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ; et ut igitur ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita polygo-



ΔΤΑΥΒΦΓΘ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. Ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κώνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βᾶσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ

num ΔΤΑΥΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ. Ut autem ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ ad Ξ solidum; et ut vero polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ ita pyramis, cujus basis quidem ΔΤΑΥΒΦΓΧ polygonum, vertex autem punctum Α, ad pyramidem, cujus basis quidem polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ,

un polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ qui soit semblable au polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ, et semblablement placé, et sur le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ élevons une pyramide qui ait la même hauteur que le cône ΑΛ. Puisque le quarré de ΑΓ est au quarré de ΕΗ comme le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ est au polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ (20. 6, et 1. 12), et que le quarré de ΑΓ est au quarré de ΕΗ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ (2. 12); le cercle ΑΒΓΔ sera au cercle ΕΖΗΘ comme le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ est au polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ (11. 5). Mais le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ comme le cône ΑΛ est au solide Ξ, et le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ est au polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ comme la pyramide qui a pour base le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ, et pour sommet le point Α est à la pyramide qui a pour base le polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ, et pour som-

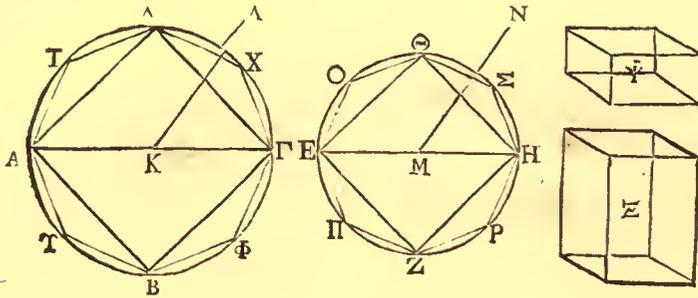
δὲ τὸ Ν σημεῖον· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν οὕτως ἢ πυραμῖς, ἥς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν, τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κῶνῳ πυραμίδα. Μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μείζων ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κῶνῳ πυραμίδος. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κῶνου στερεόν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστίν¹⁰ ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κῶνου στερεόν. Λέγω δὲ ὅτι οὐδέ ἐστίν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΝ κῶνου στερεόν. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Ξ ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ

vertex autem punctum N; et ut igitur conus ΑΛ ad Ξ solidum ita pyramis, cujus basis quidem polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ, vertex autem Α punctum, ad pyramidem, cujus basis quidem polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ, vertex autem Ν punctum; permutando igitur est ut conus ΑΛ ad pyramidem quæ in ipso est ita solidum Ξ ad pyramidem quæ est in cono ΕΝ. Major autem conus ΑΛ pyramide quæ est in ipso; majus igitur et solidum Ξ pyramide quæ in cono ΕΝ. Sed et minus, quod absurdum; non igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circum ΕΖΗΘ ita ΑΛ conus ad solidum aliquod minus cono ΕΝ. Similiter ostendemus, necque esse ut ΕΖΗΘ circulus ad circum ΑΒΓΔ ita conum ΕΝ ad solidum aliquod minus cono ΑΛ. Dico necque quidem esse ut ΑΒΓΔ circulus ad circum ΕΖΗΘ ita ΑΛ conum ad solidum aliquod majus cono ΕΝ. Si enim possibile, sit ad majus Ξ, invertendo igitur est ut ΕΖΗΘ circulus ad circum ΑΒΓΔ ita solidum Ξ ad ΑΛ co-

met le point N (G. 12); le cône ΑΛ est donc au solide Ξ comme la pyramide dont la base est le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ, et le sommet le point Α, est à la pyramide dont la base est le polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ et le sommet le point Ν; donc, par permutation, le cône ΑΛ est à la pyramide qui lui est inscrite comme le solide Ξ est à la pyramide inscrite dans le cône ΕΝ. Mais le cône ΑΛ est plus grand que la pyramide qui lui est inscrite; le solide Ξ est donc plus grand que la pyramide qui est inscrite dans le cône ΕΝ. Mais le solide Ξ est plus petit que cette pyramide, ce qui est absurde; le cercle ΑΒΓΔ n'est donc point au cercle ΕΖΗΘ comme le cône ΑΛ est à un solide plus petit que le cône ΕΝ. Nous démontrerons semblablement que le cercle ΕΖΗΘ n'est point au cercle ΑΒΓΔ comme le cône ΕΝ est à un solide plus petit que le cône ΑΛ. Je dis enfin que le cercle ΑΒΓΔ n'est point au cercle ΕΖΗΘ comme le cône ΑΛ est à un solide plus grand que le cône ΕΝ. Car que ce soit à un solide Ξ plus grand, si cela est possible; par inversion, le cercle ΕΖΗΘ sera au cercle ΑΒΓΔ comme le solide Ξ est au cône ΑΛ.

κῶνον. ΑΛΛ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΑ$ κῶνον οὕτως ὁ $ΕΝ$ κῶνος πρὸς ἕλαττόν τι τοῦ $ΑΑ$ κῶνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον οὕτως ὁ $ΕΝ$ κῶνος πρὸς ἕλαττόν τι τοῦ $ΑΑ$ κῶνου στερεόν, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη¹¹. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον οὕτως ὁ $ΑΑ$ κῶνος πρὸς μείζον

num. Sed ut Ξ solidum ad $ΑΑ$ conum ita conus $ΕΝ$ ad solidum aliquod minus cono $ΑΑ$; et ut igitur $ΕΖΗΘ$ circulus ad circulum $ΑΒΓΔ$ ita conus $ΕΝ$ ad solidum aliquod minus cono $ΑΑ$, quod impossibile ostensum est; non igitur est ut $ΑΒΓΔ$ circulus ad circulum $ΕΖΗΘ$ ita conus $ΑΑ$ ad solidum aliquod majus cono $ΕΝ$.



τι τοῦ $ΕΝ$ κῶνου στερεόν. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἕλαττον· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον¹² οὕτως ὁ $ΑΑ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΕΝ$ κῶνον. ΑΛΛ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον οὕτως¹³ ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίον γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου· καὶ ὡς ἄρα ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοῦφεις τοῖς κῶνοις κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Ostensum autem est neque ad minus; est igitur ut $ΑΒΓΔ$ circulus ad circulum $ΕΖΗΘ$ ita conus $ΑΑ$ ad $ΕΝ$ conum. Sed ut conus ad conum ita est cylindrus ad cylindrum, triplus enim uterque utriusque; et ut igitur $ΑΒΓΔ$ circulus ad circulum $ΕΖΗΘ$ ita cylindri in ipsis æquealti conis.

Sub eadem igitur, etc.

Mais le solide Ξ est au cône $ΑΑ$ comme le cône $ΕΝ$ est à un solide plus petit que le cône $ΑΑ$; le cercle $ΕΖΗΘ$ est donc au cercle $ΑΒΓΔ$ comme le cône $ΕΝ$ est à un solide plus petit que le cône $ΑΑ$, ce que nous avons démontré impossible; le cercle $ΑΒΓΔ$ n'est donc point au cercle $ΕΖΗΘ$ comme le cône $ΑΑ$ est à un solide quelconque plus grand que le cône $ΕΝ$. Mais on a démontré que ce n'est point à un solide plus petit; le cercle $ΑΒΓΔ$ est donc au cercle $ΕΖΗΘ$ comme le cône $ΑΑ$ est au cône $ΕΝ$. Mais un cône est à un cône comme un cylindre est à un cylindre, car un cylindre est le triple d'un cône (10. 12); les cercles $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ sont donc entr'eux comme les cylindres qui ont ces cercles pour bases et dont les hauteurs sont égales à celles des cônes. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

PROPOSITIO XII.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἐστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διαμέτροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κῶνων καὶ κύλινδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστίν² ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν ἐστίν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφή δὲ³ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει⁴ ὁ ΑΒΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἢ περ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔξει ὁ ΑΒΓΔ κῶνος ἢ πρὸς ἕλαττον τι τοῦ ΕΖΗΘ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς μείζον. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἕλαττον⁵ τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μείζον ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ

Similes conii et cylindri inter se in triplicatâ ratione sunt diametrorum basium.

Sint similes conii et cylindri, quorum bases quidem circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, diametri vero basium ΒΔ, ΖΘ, axes autem conorum et cylindrorum ΚΛ, ΜΝ; dico conum, ejus basis ΑΒΓΔ circulus, vertex autem punctum Α, ad conum, ejus basis quidem est circulus ΕΖΗΘ, vertex autem Ν punctum, triplicatam habere rationem ejus quam habet ΒΔ ad ΖΘ.

Si enim non habet conus ΑΒΓΔ ad conum ΕΖΗΘ triplicatam rationem ejus quam ΒΔ ad ΖΘ, habebit ΑΒΓΔ conus vel ad solidum aliquod minus cono ΕΖΗΘ triplicatam rationem, vel ad majus. Habeat primum ad minus Ξ, et describatur in ΕΖΗΘ circulo quadratum ΕΖΗΘ; quadratum igitur ΕΖΗΘ majus est dimidio ΕΖΗΘ circuli. Et erigatur a qua-

PROPOSITION XII.

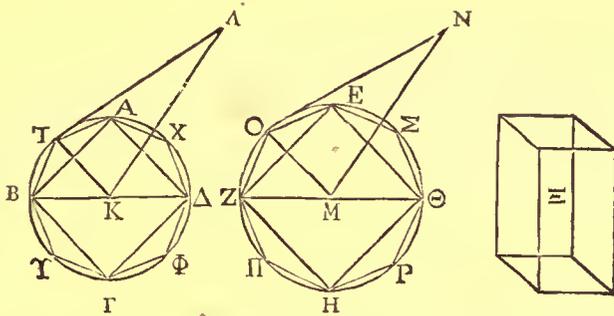
Les cônes et cylindres semblables sont entr'eux en raison triplée des diamètres de leurs bases.

Soient les cônes et les cylindres semblables dont les bases sont les cercles ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, dont les bases ont ΒΔ, ΖΘ pour diamètres, et dont les axes sont les droites ΚΛ, ΜΝ; je dis que le cône dont la base est le cercle ΑΒΓΔ, et le sommet le point Α, a avec le cône dont la base est le cercle ΕΖΗΘ, et le sommet le point Ν une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ.

Car si le cône ΑΒΓΔ n'a pas avec le cône ΕΖΗΘ une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ, le cône ΑΒΓΔ aura avec un solide quelconque plus petit ou plus grand que le cône ΕΖΗΘ une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ. Que ce soit d'abord à un solide Ξ plus petit. Dans le cercle ΕΖΗΘ décrivons le quarré ΕΖΗΘ; le quarré ΕΖΗΘ sera plus petit que la moitié du cercle ΕΖΗΘ. Sur le quarré

κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα⁶ τῷ κώνῳ· ἢ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπέξυχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ'

drato ΕΖΗΘ pyramis eundem verticem habens quem conus; ergo erecta pyramis major est quam dimidia pars conii. Itaque secantur ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ circumferentiæ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ, et jungantur ipsæ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ; unumquodque igitur triangulorum ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ majus est quam dimidia pars segmenti circuli ΕΖΗΘ in quo



ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἕκαστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφέρειας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας,

est. Et erigatur ab unoquoque triangulorum ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ pyramis eundem verticem habens quem conus; ergo et unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidia pars segmenti conii in quo est. Secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, et erigentes ab unoquoque triangulorum pyramides eundem verticem habentes

ΕΖΗΘ élevons une pyramide qui ait la même hauteur que le cône; la pyramide élevée sera plus grande que la moitié du cône. Coupons les arcs ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ en deux parties égales aux points Ο, Π, Ρ, Σ, et joignons ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ; chacun des triangles ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ sera plus grand que la moitié du segment du cercle ΕΖΗΘ dans lequel il est placé. Sur chacun des triangles ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ élevons des pyramides qui ayent le même sommet que le cône; chacune de ces pyramides sera plus grande que la moitié du segment du cône où elle est placée. Coupant les arcs restants en deux parties égales, menant leurs arcs, et élevant sur chacun de ces triangles des pyramides qui

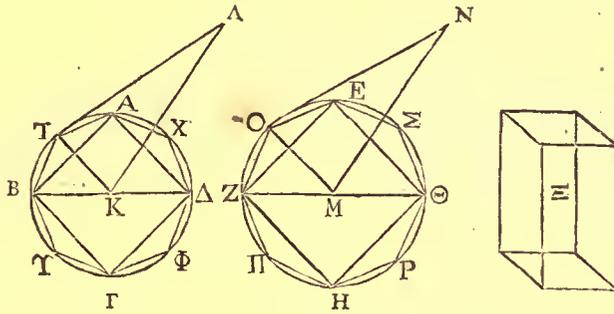
τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο αἰ ποιοῦντες, καταλείφομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττωτα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπέριχει ὁ ΕΖΗΘΝ κώνος τοῦ Ξ στερεοῦ. Αὐλείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον; κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημείον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. Εἰρηγράψω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου^δ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημείον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΑΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημείον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΟΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. Καὶ ἐπεὶ ὁμοίος ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔΛ κώνος τῷ ΕΖΗΘΝ κώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ὁ ΚΑ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξωνα. Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς

quem conus, et hoc semper facientes, relin-
quemus quædam segmenta conii, quæ erunt
minora excessu quo superat conus ΕΖΗΘΝ ipsum
Ξ solidum. Relinquantur, et sint quæ super
ipsa ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ;
reliqua igitur pyramis, ejus basis quidem est
polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ, vertex autem Ν punc-
tum, major est solido Ξ. Describatur et in circulo
ΑΒΓΔ polygono ΕΟΖΠΗΡΘΣ et simile et simi-
liter positum polygonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ et erigatur
super polygonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ pyramis eundem
verticem habens quem conus, et continentium
quidem pyramidem, ejus basis quidem est poly-
gonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ, vertex vero Α punctum,
unum triangulum sit ΑΒΤ, continentium vero
pyramidem, ejus basis quidem est ΕΟΖΠΗΡΘΣ
polygonum, vertex vero punctum Ν, unum
triangulum sit ΝΟΖ; et jungantur ipsæ ΚΤ,
ΜΟ. Et quoniam similis est conus ΑΒΓΔΛ cono
ΕΖΗΘΝ; est igitur ut ΒΔ ad ΖΘ ita ΚΑ axis
ad axem ΜΝ. Ut autem ΒΔ ad ΖΘ ita ΒΚ ad ΖΜ;

ayent le même sommet que le cône, et faisant toujours la même chose, il restera enfin certains segments de cône, qui seront plus petits que l'excès du cône ΕΖΗΘΝ sur le solide Ξ (1. 10). Qu'on ait ces restes, que ce soient ceux qui sont placés sur ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ; la pyramide restante, dont la base est le polygone ΕΟΖΠΗΡΘΣ, et le sommet le point Ν sera plus grande que le solide Ξ. Dans le cercle ΑΒΓΔ décrivons un polygone ΑΤΒΥΓΦΔΧ semblable au polygone ΕΟΖΠΗΡΘΣ, et semblablement placé; sur le polygone ΑΤΒΥΓΦΔΧ élevons une pyramide qui ait le même sommet que le cône; que ΑΒΤ soit un des triangles qui comprennent la pyramide dont la base est le polygone ΑΤΒΥΓΦΔΧ, et dont le sommet est le point Α, que ΝΖΟ soit un des triangles qui comprennent la pyramide dont la base est le polygone ΕΟΖΠΗΡΘΣ, et dont le sommet est le point Ν, et joignons ΚΤ, ΜΟ. Puisque le cône ΑΒΓΔΛ est semblable au cône ΕΖΗΘΝ, la droite ΒΔ sera à la droite ΖΘ comme l'axe ΚΑ est à l'axe ΜΝ (déf. 24. 11). Mais ΒΔ est

τὴν ΖΘ οὕτως ἢ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ οὕτως ἢ ΚΑ πρὸς τὴν ΜΝ· καὶ ἰναλλάξ ὡς ἢ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΑ οὕτως ἢ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΑ, ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα⁹, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΑ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ¹⁰ τὸ ΒΚΑ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ

et ut igitur BK ad ZM ita KA ad MN; et permutando ut BK ad KA ita ZM ad MN, et anguli BKA, ZMN æquales, rectus enim uterque, et circa æquales angulos BKA, ZMN latera proportionalia sunt; simile igitur est BKA triangulum triangulo ZMN. Rursus, quoniam est ut



οὕτως ἢ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδὴ περὶ ὁ μέρος ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἢ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. Ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ¹¹ τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ὁ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΑ οὕτως ἢ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ

BK ad KT ita ZM ad MO, et circa æquales angulos BKT, ZMO, etenim quæ pars est angulus BKT illorum qui sunt ad K centrum quatuor rectorum, eadem pars est et angulus ZMO illorum qui sunt ad centrum M quatuor rectorum; et quoniam circa æquales angulos latera proportionalia sunt; simile igitur est triangulum BKT triangulo ZMO. Rursus, quoniam ostensum est ut BK ad KA ita ZM

à ZΘ comme BK est à ZM; la droite BK est donc à ZM comme KA est à MN; donc, par permutation, BK est à KA comme ZM est à MN. Mais les angles BKA, ZMN sont égaux, parce qu'ils sont droits l'un et l'autre, et les côtés autour des angles égaux BKA, ZMN sont proportionnels; le triangle BKA est donc semblable au triangle ZMN (6. 6). De plus, puisque BK est à KT comme ZM est à MO, que ces droites sont autour des angles égaux BKT, ZMO, car l'angle BKT est la même partie des quatre angles droits placés au centre K que l'angle ZMO l'est des quatre angles droits placés au centre M, et que les côtés qui comprennent les angles égaux sont proportionnels, le triangle BKT sera semblable au triangle ZMO (6. 6). De plus, puisqu'on a démontré que BK est à KA comme ZM est à MN, et à cause que BK

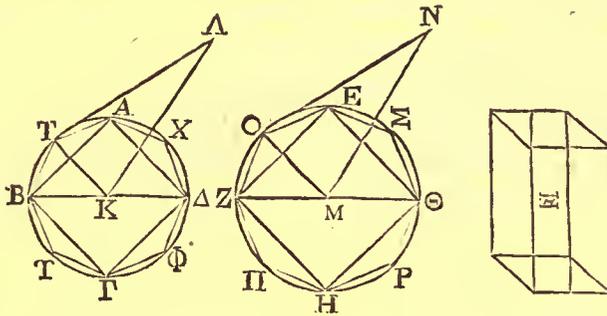
ἡ μὲν BK τῆς ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῆς ΟΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΚΑ οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΑ, ΟΜΝ, ὀρθαὶ γὰρ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ¹² τὸ ΑΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ¹³ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΚΒ, ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΚ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ· δίσσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. Πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΚ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΚΒΤ, ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ· δίσσου ἄρα ὡς ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΒ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ· δίσσου ἄρα ὡς ἡ ΤΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ· τῶν ΑΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ· ἰσογῶνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὁμοία· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυ-

ad MN; sed æqualis quidem BK ipsi KT, ipsa vero ZM ipsi OM; est igitur ut KT ad KA ita OM ad MN. Et circa æquales angulos TKA, OMN, recti enim, latera proportionalia sunt; simile igitur est AKT triangulum triangulo NMO. Et quoniam ob similitudinem triangulorum AKB, NMZ, est ut AB ad BK ita NZ ad ZM; ob similitudinem vero triangulorum BKT, ZMO est ut KB ad BT ita MZ ad ZO; ex æquo igitur ut AB ad BT ita NZ ad ZO. Rursus, quoniam ob similitudinem triangulorum ATK, NOM, est ut AT ad TK ita NO ad OM, ob similitudinem vero triangulorum KBT, OMZ, est ut KT ad TB ita MO ad OZ; ex æquo igitur ut AT ad TB ita NO ad OZ. Ostensum autem est et ut TB ad BA ita OZ ad ZN; ex æquo igitur ut TA ad AB ita ONZ ad NZ; triangulorum igitur ATB, NOZ proportionalia sunt latera; æquiangula igitur sunt ATB, NOZ triangula; quare et similia; et pyramis igitur, cujus basis quidem triangulum BKT, vertex vero Δ punctum, similis est

est égal à KT, et ZM égal à OM, la droite KT sera à KA comme OM est à MN. Mais les côtés autour des angles droits TKA, OMN sont proportionnels; le triangle AKT est donc semblable au triangle NMO. Mais à cause de la similitude des triangles AKB, NMZ, la droite AB est à la droite BK comme la droite NZ est à la droite ZM, et à cause de la similitude des triangles BKT, ZMO, la droite KB est à BT comme MZ est à ZO; donc, par égalité, AB est à BT comme NZ est à ZO (22. 5). De plus, à cause de la similitude des triangles ATK, NOM, la droite AT est à TK comme NO est à OM, et à cause de la similitude des triangles KBT, OMZ, la droite KT est à TB comme MO est à OZ; donc, par égalité, AT est à TB comme NO est à OZ. Mais on a démontré que TB est à BA comme OZ est à ZN; donc, par égalité, TA est à AB comme ON est à NZ; les côtés des triangles ATB, NOZ sont donc proportionnels; les triangles ATB, NOZ sont donc équiangles (5. 6), et par conséquent semblables; la pyramide dont la base est le triangle BKT, et le sommet

ραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ZMO τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. Αἱ δὲ ὁμοίαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἢ ἄρα BKTA πυραμὶς πρὸς τὴν ZMQN πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ BK πρὸς τὴν ZM.

pyramidi, cujus basis quidem ZMO triangulum; vertex autem N punctum; similibus enim planis continentur æqualibus multitudine. Pyramides autem similes triangulares bases habentes in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum; ergo pyramis BKTA ad pyramidem ZMON triplicatam rationem habet ejus quam BK ad



Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγύντες ἀπὸ τῶν A, X, Δ, Φ, T, Γ ἐπὶ τὸ K εὐθείας¹⁵, καὶ ἀπὸ τῶν E, Σ, Θ, P, Η, Π ἐπὶ τὸ M, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἐκάστου¹⁶ τῶν τριγῶνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς¹⁷ ἔχούσας τοῖς κώνοις, δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἐκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔξει ἢ περ ἢ BK ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZM ὁμόλογον πλευρᾶν, ταυτέστιν ἢ περ ἢ BΔ πρὸς τὴν ZΘ.

ZM. Similiter utique ducentes rectas a punctis A, X, Δ, Φ, T, Γ ad K, et a punctis E, Σ, Θ, P, Η, Π ad M, et erigentes ab unoquoque triangulorum pyramides eodem vertice habentes quos cono, ostendemus et unamquamque pyramidum cujusdam ordinis ad unamquamque ejusdem ordinis pyramidem triplicatam rationem habere ejus quam BK latus homologum ad homologum latus ZM, hoc est quam BΔ ad ZΘ.

le point A, est donc semblable à la pyramide dont la base est le triangle ZMO, et le sommet le point N (déf. 9. 11); car ces pyramides sont contenues sous des plans semblables et égaux en nombre. Mais les pyramides semblables qui ont des bases triangulaires sont en raison triplée de leurs côtés homologues (8. 12); la pyramide BKTA a donc avec la pyramide ZMON une raison triplée de celle que BK a avec ZM. Menant semblablement des droites des points A, X, Δ, Φ, T, Γ au point K, et des droites des points E, Σ, Θ, P, Η, Π au point M, et élevant au-dessus de chacun des triangles des pyramides qui ont les mêmes sommets que les cônes, nous démontrerons semblablement que chacune des pyramides d'un certain ordre aura avec chaque pyramide du même ordre une raison triplée de celle que le côté analogue BK a avec le côté homologue ZM, c'est-à-dire que BΔ a avec ZΘ. Mais un

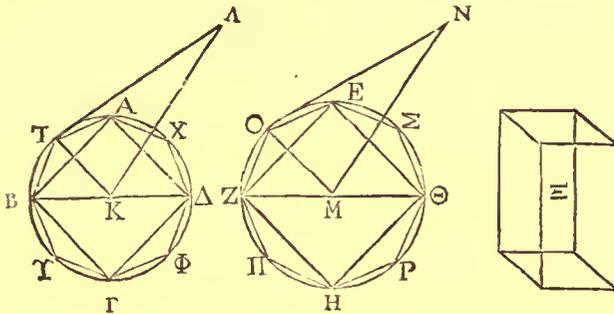
Ἀλλ' ¹⁸ ὡς ἐν τῶν ἠγούμενων πρὸς ἐν τῶν ἐπομέ-
 ιων οὕτως ἅπαντα τὰ ἠγούμενα πρὸς ἅπαντα
 τὰ ἐπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΒΚΤΑ πυραμῖς
 πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα οὕτως ἢ ὅλην πυρα-
 μῖς, ἥς βᾶσις τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ
 δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἥς
 βᾶσις μὲν τὸ ¹⁹ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ
 δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμῖς, ἥς βᾶσις μὲν
 τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ ση-
 μεῖον ²⁰ πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βᾶσις μὲν ²¹ τὸ
 ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον,
 τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.
 Ὑπόκειται δὲ καὶ ²² ὁ κῶνος, οὗ βᾶσις μὲν ²³ ὁ
 ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ
 Ξ στερεόν, τριπλασίονα λόγον ἔχων ἢ περ ἢ ΒΔ
 πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βᾶσις
 μὲν ἔστιν ²⁴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ ση-
 μεῖον ²⁵, πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἢ πυραμῖς,
 ἥς βᾶσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον ²⁶, κορυφὴ
 δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βᾶσις μὲν
 ἔστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν·
 ἐναλλάξ ²⁷ ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βᾶσις μὲν ἔστιν ²⁷

Sed ut unum antecedentium ad unum consequen-
 tium ita omnia antecedentia ad omnia conse-
 quentia ; est igitur et ut ΒΚΤΑ pyramis ad pyra-
 midem ΖΜΟΝ ita tota pyramis, cujus basis
 ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum, vertex autem punctum
 Λ, ad totam pyramidem, cujus basis quidem poly-
 gonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ et vertex punctum Ν; quare
 et pyramis, cujus basis quidem ΑΤΒΥΓΦΔΧ poly-
 gonum, vertex autem punctum Λ ad pyramidem,
 cujus basis quidem polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ,
 vertex autem punctum Ν, triplicatam rationem
 habet ejus quam ΒΔ ad ΖΘ. Ponitur autem et co-
 nus, cujus basis quidem circulus ΑΒΓΔ, vertex
 autem punctum Λ, ad solidum Ξ, triplicatam
 rationem habere ejus quam ΒΔ ad ΖΘ; est igitur
 ut conus, cujus basis quidem est circulus ΑΒΓΔ,
 vertex autem punctum Λ, ad solidum Ξ, ita
 pyramis, cujus basis quidem ΑΤΒΥΓΦΔΧ
 polygonum, vertex autem punctum Λ, ad
 pyramidem, cujus basis quidem polygonum
 ΕΟΖΠΗΡΘΣ, vertex autem punctum Ν; permuta-
 tando igitur ut conus, cujus basis quidem est

des antécédents est à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5); la pyramide ΒΚΤΑ est donc à la pyramide ΖΜΟΝ comme la pyramide entière, dont la base est le polygone ΑΤΒΥΓΦΔΧ, et le sommet le point Λ, est à la pyramide entière dont la base est le polygone ΕΟΖΠΗΡΘΣ, et le sommet le point Ν; la pyramide dont la base est le polygone ΑΤΒΥΓΦΔΧ, et le sommet le point Λ, a donc avec la pyramide dont la base est le polygone ΕΟΖΠΗΡΘΣ, et le sommet le point Ν, une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ. Mais on a supposé que le cône dont la base est le cercle ΑΒΓΔ, et le sommet le point Λ, a avec le solide Ξ une raison triplée de celle que ΒΑ a avec ΖΘ; le cône dont la base est le cercle ΑΒΓΔ, et le sommet le point Λ, est donc au solide Ξ comme la pyramide dont la base est le polygone ΑΤΒΥΓΦΔΧ, et le sommet le point Λ est à la pyramide dont la base est le polygone ΕΟΖΠΗΡΘΣ et le sommet le point Ν; donc, par permutation, le cône dont la base est le

ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Α$ σημεῖον²⁸, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ $ΑΤΒΥΓΦΔΧ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Α$, οὕτως τὸ $Ξ$ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἔστι τὸ $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Ν$. Μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν· μείζων ἄρα καὶ τὸ $Ξ$ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν ἔστι τὸ $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Ν$. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν²⁹ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἔστιν³⁰ ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος,

circulus $ΑΒΓΔ$, vertex autem punctum $Α$, ad pyramidem quæ in ipso est, cujus basis quidem $ΑΤΒΥΓΦΔΧ$ polygonum, vertex autem $Α$, ita solidum $Ξ$ ad pyramidem, cujus basis quidem polygonum $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$, vertex autem punctum $Ν$. Major autem dictus conus est pyramide quæ in ipso est; ille eam enim comprehendit; majus igitur est solidum $Ξ$ pyramide, cujus basis quidem est polygonum $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$, vertex autem punctum $Ν$. Sed et minus, quod impossibile; non igitur conus, cujus quidem basis



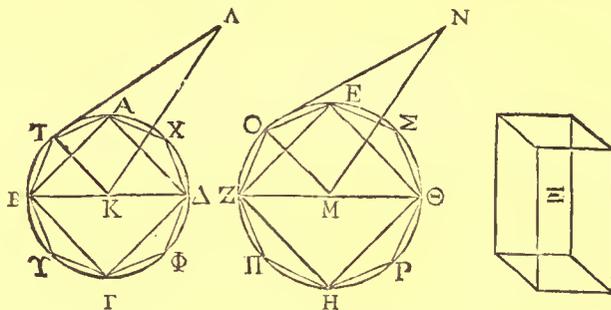
κορυφή δὲ τὸ $Α$ σημείον³¹, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κῶνου στερεὸν, οὗ βάσις μὲν ἔστιν³² ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Ν$ σημείον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνος πρὸς ἔλατ-

est $ΑΒΓΔ$ circulus, vertex autem punctum $Α$, ad aliquod solidum minus cono, cujus basis quidem est circulus $ΕΖΗΘ$, vertex autem punctum $Ν$, triplicatam rationem habet ejus quam $ΒΔ$ ad $ΖΘ$. Similiter utique demonstrabimus neque conum $ΕΖΗΘΝ$ ad solidum aliquod minus cono

cercle $ΑΒΓΔ$, et le sommet le point $Α$ est à la pyramide dont la base est le polygone $ΑΤΒΥΓΦΔΧ$, et le sommet le point $Α$, comme le solide $Ξ$ est à la pyramide dont la base est le polygone $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$, et le sommet le point $Ν$. Mais le cône dont nous venons de parler est plus grand que la pyramide, parce que le cône la contient; le solide $Ξ$ est donc plus grand que la pyramide, dont la base est le polygone $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$, et le sommet le point $Ν$. Mais il est plus petit, ce qui est impossible; le cône dont la base est le cercle $ΑΒΓΔ$, et le sommet le point $Α$, n'a donc pas avec un solide plus petit que le cône dont la base est le cercle $ΕΖΗΘ$, et le sommet le point $Ν$, une raison triplée de celle que $ΒΔ$ a avec $ΖΘ$. Nous démontrerons semblablement que le cône $ΕΖΗΘΝ$ n'a pas avec un solide plus

τόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΛ κώνος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς

ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habere ejus quam ΖΘ ad ΒΔ. Dico neque ΑΒΓΔΛ conum ad solidum aliquod majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam habere rationem ejus quam ΒΔ ad ΖΘ. Si enim possibile, habeat ad solidum aliquod majus, ip-



μείζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κώνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κώνον οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κώνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν· καὶ ΕΖΗΘΝ ἄρα κώνος³³ πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ, ἔπερ ἀδύνατον εἰδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κώνος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλαττόν· ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κώνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κώνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

sum Ξ; invertendo igitur solidum Ξ ad conum ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habet ejus quam ΖΘ ad ΒΔ. Ut autem Ξ solidum ad ΑΒΓΔΛ conum ita ΕΖΗΘΝ conus ad solidum aliquod minus cono ΑΒΓΔΛ; et ΕΖΗΘΝ igitur conus ad solidum aliquod minus cono ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habet ejus quam ΖΘ ad ΒΔ, quod impossibile demonstratum est; non igitur ΑΒΓΔΛ conus ad solidum aliquod majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ ad ΖΘ. Demonstratum est autem neque ad minus; conus igitur ΑΒΓΔΛ ad conum ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ ad ΖΘ.

petit que le cône ΑΒΓΔΛ une raison triplée de celle que ΖΘ a avec ΒΔ. Je dis enfin que le cône ΑΒΓΔΛ n'a pas avec un solide plus grand que le cône ΕΖΗΘΝ une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ. Car si cela est possible, que ce soit à un solide Ξ plus grand; par inversion, le solide Ξ aura avec le cône ΑΒΓΔΛ une raison triplée de celle que ΖΘ a avec ΒΔ. Mais le solide Ξ est au cône ΑΒΓΔΛ comme le cône ΕΖΗΘΝ est à un solide plus petit que le cône ΑΒΓΔΛ; le cône ΕΖΗΘΝ a donc avec un solide plus petit que le cône ΑΒΓΔΛ une raison triplée de celle que ΖΘ a avec ΒΔ, ce qui est démontré impossible; le cône ΑΒΓΔΛ n'a donc pas avec un solide plus grand que le cône ΕΖΗΘΝ une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ. Mais nous avons démontré que ce n'est point non plus avec un solide plus petit; le cône ΑΒΓΔΛ a donc avec le cône ΕΖΗΘΝ une raison triplée de celle que ΒΔ

Ὡς δὲ ὁ κώνος πρὸς τὸν κώνον οὕτως³⁴ ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψῆς αὐτῷ· ἐδείχθη γὰρ πᾶς κώνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον³⁵. καὶ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλάσιον λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Εάν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῆ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἴσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον¹ κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω ὅτι ἴσται² ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

a avec ΖΘ. Mais un cône est à un cône comme un cylindre est à un cylindre, car un cylindre est le triple d'un cône qui a la même base et la même hauteur; car on a démontré que tout cône est la troisième partie d'un cylindre qui a la même base et la même hauteur que le cône (10. 12); un cylindre a donc avec un cylindre une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Si un cylindre est coupé par un plan parallèle aux plans opposés, l'un des cylindres sera à l'autre cylindre comme l'axe du premier est à l'axe du second.

Car que le cylindre ΑΔ soit coupé par un plan ΗΘ parallèle aux plans opposés ΑΒ, ΓΔ, et que le plan ΗΘ rencontre l'axe ΕΖ au point Κ; je dis que le cylindre ΒΗ est au cylindre ΗΔ comme l'axe ΕΚ est à l'axe ΚΖ.

Ut autem conus ad conum ita cylindrus ad cylindrum, triplus enim cylindrus coni qui est in eadem basi et altitudine in qua ipse; ostensus est enim omnis conus tertia pars cylindri habentis eandem basim quam conus et altitudinem æqualem; et cylindrus igitur ad cylindrum triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ ad ΖΘ.

Similes igitur, etc.

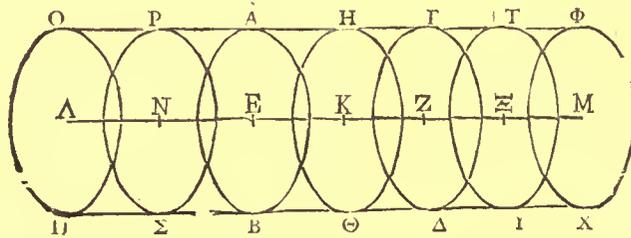
PROPOSITIO XIII.

Si cylindrus plano secetur parallelo existente oppositis planis, erit ut cylindrus ad cylindrum ita axis ad axem.

Cylindrus enim ΑΔ plano ΗΘ secetur parallelo existente oppositis planis ΑΒ, ΓΔ, et occurrat axi ΕΖ planum in Κ puncto; dico esse ut ΒΗ cylindrus ad cylindrum ΗΔ ita ΕΚ axem ad axem ΚΖ.

Εκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῶ μὲν³ ΕΚ ἄξονι ἴσοι ἰσοειδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῶ δὲ ΖΚ ἴσοι ἰσοειδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΑΜ ἄξωνος κύλινδρος ὁ ΟΧ οὗ βάσεις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι· καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν, Ζ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου· καὶ ποιήτωσαν τοὺς ΡΣ, ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ

Producatur enim EZ axis ex utraque parte ad puncta Λ, Μ, et ponantur axi quidem ΕΚ æquales quotcunque rectæ ΕΝ, ΝΛ, ipsi vero ΖΚ æquales quotcunque ΖΞ, ΞΜ, et intelligatur circa ΑΜ axem cylindrus ΟΧ cujus bases circuli ΟΠ, ΦΧ; et ducantur per Ν, Ζ puncta plana parallela ipsis ΑΒ, ΓΔ, et basibus cylindri ΟΧ; et faciant ΡΣ, ΤΥ circules circa Ν, Ξ



κέντρα. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· οἱ ἀραὶ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἰσοὶ δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις· ἴσοι ἀρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις⁵. Ἐπεὶ οὖν καὶ οἱ⁶ ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν⁷ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ τῶν πλῆθει τῶν ΠΡ, ΡΒ,

centra. Et quoniam axes ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ æquales inter se sunt; ergo cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ inter se sunt ut bases. Æquales autem sunt bases; æquales igitur et ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ cylindri inter se. Quoniam igitur et ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ axes æquales sunt inter se, sunt autem et cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ æquales inter se, et æqualis est multitudo ipsarum ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ multitudini ipsarum ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ; quotu-

Car prolongeons de part et d'autre l'axe EZ vers les points Λ, Μ; faisons tant de droites EN, ΝΛ qu'on voudra égales chacune à l'axe EK, et tant d'autres droites ΖΞ, ΞΜ qu'on voudra égales chacune à l'axe ΖΚ; autour de l'axe ΑΜ concevons le cylindre ΟΧ, ayant pour bases les cercles ΟΠ, ΦΧ; par les points Ν, Ζ, soient menés des plans parallèles aux plans ΑΒ, ΓΔ, et aux bases du cylindre ΟΧ, et que ces plans engendrent les cercles ΡΣ, ΤΥ, autour des centres Ν, Ξ. Puisque les axes ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ sont égaux entre eux, les cylindres ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ seront entre eux comme leurs bases. Mais leurs bases sont égales; les cylindres ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ sont donc égaux. Puisque les axes ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ sont égaux entre eux; que les cylindres ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ sont aussi égaux entre eux, et que le nombre des droites ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ est égal au nombre des droites ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ, l'axe ΑΚ sera le même multiple

ΒΗ^δ. ὁσαπλασίων ἄρα ὁ ΑΚ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος
 τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ
 ΗΒ κύλινδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων
 ἔστιν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ. ἄξονος τοσαυταπλα-
 σίων ἔστί καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κύλινδρου.
 Καὶ εἰ μὲν ἴσος ἔστιν ὁ ΚΑ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξωνι,
 ἴσος ἔσται^θ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κύλιν-
 δρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων
 καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κύλινδρου¹⁰, καὶ εἰ ἐλάσσων,
 ἐλάσσων· τεσσάρων δὲ μεγεθῶν ὄντων¹¹, ἄξόνων
 μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κύλινδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴ-
 ληπται ἰσάκεις πολλαπλασία, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος
 καὶ τοῦ ΒΗ κύλινδρου, ὅ, τε ΑΚ ἄξων καὶ ὁ
 ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ
 κύλινδρου, ὅ, τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος¹².
 Καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΑ ἄξων τοῦ ΚΜ
 ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυ-
 λίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων·
 ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα οὕτως
 ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον. Ὅπερ εἶδει
 δεῖξαι.

plex igitur axis ΑΚ ipsius ΕΚ axis, totuplex erit et
 ΠΗ cylindrus cylindri ΗΒ. Propter eadem utique
 quotuplex est ΜΚ axis ipsius ΚΖ axis totuplex est
 et ΧΗ cylindrus cylindri ΗΔ. Et si quidem æqua-
 lis sit axis ΚΑ axi ΚΜ, æqualis erit et ΠΗ cylin-
 drus cylindro ΗΧ; si autem major axis axe major
 et cylindrus cylindro, et si minor, minor; qua-
 tuor igitur magnitudinibus existentibus, axibus
 quidem ΕΚ, ΚΖ, cylindris vero ΒΗ, ΗΔ, sumpta
 sunt æquemultiplicia, axis quidem ΕΚ et cylindri
 ΒΗ, et axis ΑΚ et cylindri ΠΗ; axis vero ΚΖ et
 cylindri ΗΔ, axis ΚΜ et cylindrus ΗΧ. Et
 demonstratum est, si superat ΚΑ axis axem
 ΚΜ, superare et cylindrum ΠΗ cylindrum ΗΧ;
 et si æqualis æqualem; et si minor, minorem;
 est igitur ut axis ΕΚ ad axem ΚΖ ita cylindrus
 ΒΗ ad cylindrum ΗΔ. Quod oportebat osten-
 dere.

de l'axe ΕΚ que le cylindre ΠΗ l'est du cylindre ΗΒ. Par la même raison, l'axe ΜΚ
 est le même multiple de l'axe ΚΖ que le cylindre ΧΗ l'est du cylindre ΗΔ. Si donc
 l'axe ΚΑ est égal à l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ sera égal au cylindre ΗΧ; si l'axe ΚΑ
 est plus grand que l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ sera plus grand que le cylindre ΗΧ,
 et si l'axe ΚΑ est plus petit que l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ sera plus petit que le
 cylindre ΗΧ. On a donc quatre grandeurs, les axes ΕΚ, ΚΖ, et les cylindres
 ΒΗ, ΗΔ; l'on a pris des équimultiples de l'axe ΕΚ et du cylindre ΒΗ, savoir,
 l'axe ΑΚ et le cylindre ΠΗ; on a pris aussi des équimultiples de l'axe ΚΖ et du
 cylindre ΗΔ, savoir, l'axe ΚΜ et le cylindre ΗΧ; et l'on a démontré que si l'axe
 ΚΑ surpasse l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ surpassera le cylindre ΗΧ, que si l'axe ΚΑ
 est égal à l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ sera égal au cylindre ΗΧ, et que si l'axe ΚΑ
 est plus petit que l'axe ΚΜ, le cylindre ΚΜ sera plus petit que le cylindre ΗΧ;
 l'axe ΕΚ est donc à l'axe ΚΖ comme le cylindre ΒΗ est au cylindre ΗΔ (déf. 4. 5).
 Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

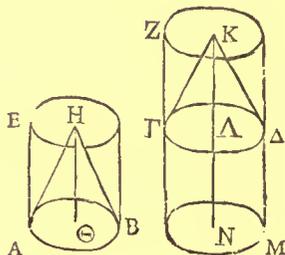
PROPOSITIO XIV.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

Ἐστωσαν γάρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν AB , $\Gamma\Delta$ κύλινδροι οἱ EB , $Z\Delta$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον οὕτως ὁ $H\Theta$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξωνα.

In æqualibus basibus existentes conus et cylindri inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus AB , $\Gamma\Delta$ cylindri EB $Z\Delta$; dico esse ut EB cylindrus ad $Z\Delta$ cylindrum ita $H\Theta$ axem ad $ΚΑ$ axem.



Ἐκτελέσθω γάρ ἡ $ΚΑ$ ἄξων ἐπὶ τὸ N σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ $H\Theta$ ἄξωνι ἴσος ὁ AN , καὶ περὶ ἄξωνα τὴν AN κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓM . Ἐπεὶ οὖν οἱ EB , ΓM κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις ἀλλήλαις ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ EB ,

Producatur enim $ΚΑ$ axis ad punctum N , ponaturque ipsi $H\Theta$ axi æqualis ipse AN , et circa axem AN intelligatur cylindrus ΓM . Quoniam igitur cylindri EB , ΓM in eadem altitudine sunt, inter se sunt ut bases. Æquales autem sunt bases inter se; æquales igitur sunt et cylindri

PROPOSITION XIV.

Les cônes et les cylindres qui ont des bases égales sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Que les cylindres EB , $Z\Delta$ aient des bases égales AB , $\Gamma\Delta$; je dis que le cylindre EB est au cylindre $Z\Delta$ comme l'axe $H\Theta$ est à l'axe $ΚΑ$.

Car prolongeons l'axe $ΚΑ$ vers le point N , faisons AN égal à l'axe $H\Theta$, et autour de l'axe AN concevons le cylindre ΓM . Puisque les cylindres EB , ΓM ont la même hauteur, ces cylindres sont entr'eux comme leurs bases (11. 12). Mais leurs bases sont égales entr'elles; les cylindres EB , ΓM sont donc égaux entr'eux.

ΓΜ κύλινδρος ἀλλήλοις³. Καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΖΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΑΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξωνα. Ἴσος δὲ ἔστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κύλινδρῳ, ὁ δὲ ΑΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξωνι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξωνα. Ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξωνα οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

EB, GM inter se. Et quoniam cylindrus ZM secatur plano ΓΔ parallelo existente oppositis planis est igitur ut ΓΜ cylindrus ad ΖΔ cylindrum ita ΑΝ axis ad ΚΑ axem. Æqualis autem est quidem ΓΜ cylindrus cylindro ΕΒ, axis vero ΑΝ axi ΗΘ; est igitur ut ΕΒ cylindrus ad ΖΔ cylindrum ita ΗΘ axis ad ΚΑ axem. Ut autem ΕΒ cylindrus ad ΖΔ cylindrum ita ΑΒΗ conus ad ΓΔΚ conum; et igitur ut ΗΘ axis ad ΚΑ axem ita est ΑΒΗ conus ad ΓΔΚ conum, et ΕΒ cylindrus ad ΖΔ cylindrum. Quod oportebat ostendere.

Et puisque le cylindre ZM est coupé par le plan ΓΔ parallèle aux plans opposés, le cylindre ΓΜ sera au cylindre ΖΔ comme l'axe ΑΝ est à l'axe ΚΑ. Mais le cylindre ΓΜ est égal au cylindre ΕΒ, et l'axe ΑΝ égal à l'axe ΗΘ; le cylindre ΕΒ est donc au cylindre ΖΔ comme l'axe ΗΘ est à l'axe ΚΑ (15. 12). Mais le cylindre ΕΒ est au cylindre ΖΔ comme le cône ΑΒΗ est au cône ΓΔΚ (10. 12); l'axe ΗΘ est donc à l'axe ΚΑ comme le cône ΑΒΗ est au cône ΓΔΚ, et comme le cylindre ΕΒ est au cylindre ΖΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

PROPOSITIO XV.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν ἐκείνοι.

Ἐστῶσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ κύκλοι, διαμέτροι δὲ αὐτῶν αἱ $ΑΓ$, $ΕΗ$, ἄξιοις δὲ οἱ $ΚΑ$, $ΜΝ$, οἵ τινες καὶ ὕψη εἰσὶν τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπληρώσθωσαν οἱ $ΑΞ$, $ΕΟ$ κύλινδροι λέγω ὅτι τῶν $ΑΞ$, $ΕΟ$ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάση πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάση οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος.

Τὸ γὰρ $ΚΑ$ ὕψος τῷ $ΜΝ$ ὕψει ἢτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὐ. Ἐστῶ πρότερον ἴσον. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κυλίνδρῳ ἴσος. Οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλή-

Æqualium conorum et cylindrorum reciproæ sunt bases altitudinibus; et quorum conorum et cylindrorum reciproæ sunt bases altitudinibus, æquales sunt illi.

Sint æquales cono et cylindri, quorum bases quidem $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ circuli, diametri autem ipsorum ipsæ $ΑΓ$, $ΕΗ$, axes vero $ΚΑ$, $ΜΝ$, quæ et altitudines sunt conorum vel cylindrorum; et compleantur cylindri $ΑΞ$, $ΕΟ$; dico $ΑΞ$, $ΕΟ$ cylindrorum reciprocas bases esse altitudinibus, et esse ut $ΑΒΓΔ$ basis ad $ΕΖΗΘ$ basim ita $ΜΝ$ altitudinem ad $ΚΑ$ altitudinem.

Enim $ΚΑ$ altitudo altitudini $ΜΝ$ vel æqualis est, vel non. Sit primum æqualis. Est autem $ΑΞ$ cylindrus cylindro $ΕΟ$ æqualis. In eadem autem altitudine existentes cono et cylindri

PROPOSITION XV.

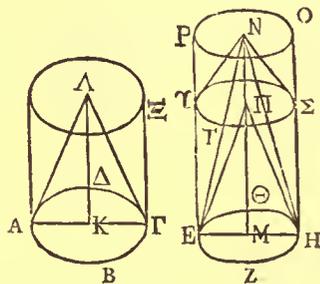
Les bases des cônes et des cylindres égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; et si les bases des cônes et des cylindres sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs, les cônes et les cylindres sont égaux entr'eux.

Soient les cônes et les cylindres égaux, dont les bases sont les cercles $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$, qui ont pour diamètres de leurs bases les droites $ΑΓ$, $ΕΗ$, et dont les axes sont les droites $ΚΑ$, $ΜΝ$, qui sont aussi les hauteurs des cônes ou des cylindres; achevons les cylindres $ΑΞ$, $ΕΟ$; je dis que les bases des cylindres $ΑΞ$, $ΕΟ$ sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; c'est-à-dire que la base $ΑΒΓΔ$ est à la base $ΕΖΗΘ$ comme la hauteur $ΜΝ$ est à la hauteur $ΚΑ$.

Car la hauteur $ΚΑ$ est égale à la hauteur $ΜΝ$ ou elle ne lui est pas égale. Qu'elle lui soit d'abord égale: puisque le cylindre $ΑΞ$ est égal au cylindre $ΕΟ$, et que les cônes et les cylindres qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs

λους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάση τῆ $EZH\Theta$ βάσει· ὥστε καὶ ἀντιπεπόμεν³, ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάση πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάση οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ $ΚΑ$ ὕψος τῶ MN ἴσον, ἀλλ' ἔστω μείζον τὸ MN ⁴, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ MN ὕψους τῶ $ΚΑ$ ἴσον τὸ ΠM , καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τεμνίσθω ὁ EO κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῶ $\Gamma\Upsilon\Kappa$ παραλλήλῳ τοῖς τῶν $EZH\Theta$, PO κύκλων ἐπιπέδοις⁵, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ ΠM κύλινδρος νε-

inter se sunt ut bases; æqualis igitur et $AB\Gamma\Delta$ basis basi $EZH\Theta$; quare et reciproce, ut $AB\Gamma\Delta$ basis ad $EZH\Theta$ basim ita MN altitudo ad $ΚΑ$ altitudinem. At vero non sit $ΚΑ$ altitudo altitudini MN æqualis, sed major sit MN , et auferatur ab ipsâ MN altitudine ipsi $ΚΑ$ æqualis ΠM , et per Π punctum secetur EO cylindrus plano $\Gamma\Upsilon\Kappa$ parallelo oppositis planis circumulorum $EZH\Theta$, PO , et in basi quidem $EZH\Theta$, altitudine vero ΠM cylindrus intelligatur $ΕΣ$. Et



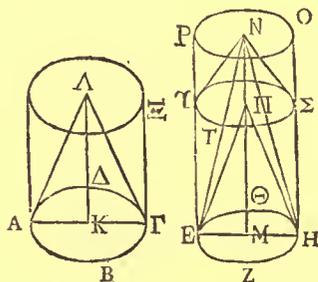
κῆσθω ὁ $ΕΣ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῶ EO κύλινδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ $ΕΣ$ κύλινδρος⁶· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον οὕτως ὁ EO κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον⁷ οὕτως ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάση πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάση⁸, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ $ΑΞ$, $ΕΣ$ κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ EO κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ οὕτως τὸ MN

quoniam æqualis est $ΑΞ$ cylindrus cylindro EO , alius autem aliquis cylindrus $ΕΣ$; est igitur ut $ΑΞ$ cylindrus ad $ΕΣ$ cylindrum ita EO cylindrus ad $ΕΣ$ cylindrum. Sed ut quidem $ΑΞ$ cylindrus ad $ΕΣ$ cylindrum ita $AB\Gamma\Delta$ basis ad $EZH\Theta$ basim; sub enim altitudine eadem sunt $ΑΞ$, $ΕΣ$ cylindri; ut autem EO cylindrus ad $ΕΣ$ ita MN

bases (11. 12), la base $AB\Gamma\Delta$ sera égale à la base $EZH\Theta$; les bases sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base $AB\Gamma\Delta$ est à la base $EZH\Theta$ comme la hauteur MN est à la hauteur $ΚΑ$. Mais que la hauteur $ΚΑ$ ne soit point égale à la hauteur MN , et que la hauteur MN soit la plus grande. De la hauteur MN retranchons la droite ΠM égale à la droite $ΚΑ$, et par le point Π coupons le cylindre EO par le plan $\Gamma\Upsilon\Kappa$ parallèle aux plans des cercles $EZH\Theta$, PO , et concevons un cylindre $ΕΣ$ dont la base soit le cercle $EZH\Theta$, et dont la hauteur soit ΠM . Et puisque le cylindre $ΑΞ$ est égal au cylindre EO , et que $ΕΣ$ est un autre cylindre, le cylindre $ΑΞ$ sera au cylindre $ΕΣ$ comme le cylindre EO est au cylindre $ΕΣ$ (7. 5). Mais le cylindre $ΑΞ$ est au cylindre $ΕΣ$ comme la base $AB\Gamma\Delta$ est à la base $EZH\Theta$ (11. 12), car les cylindres $ΑΞ$, $ΕΣ$ ont la même hauteur, et le cylindre EO est

ὑψος πρὸς τὸ ΜΠ ὑψος, ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὑψος πρὸς τὸ ΜΠ ὑψος. Ἴσον δὲ τὸ ΜΠ ὑψος τῷ ΚΑ ὑψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὑψος πρὸς τὸ ΚΑ ὑψος· τῶν ἄρα ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπώνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὑψεσιν.

altitudo ad ΜΠ altitudinem; etenim cylindrus ΕΟ secatur plano ΤΥΣ parallelo existente oppositis planis; est igitur et ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad ΜΠ altitudinem. Æqualis autem est ΜΠ altitudo altitudini ΚΑ; est igitur ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad ΚΑ altitudinem; cylindrorum igitur ΑΞ, ΕΟ reciprocarum sunt bases altitudinibus.



Αλλὰ δὴ τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπώνθῃτων αἱ βάσεις τοῖς ὑψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὑψος πρὸς τὸ ΚΑ ὑψος· λέγω ἔτι ἴσος ἔστιν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων· ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ

At vero ΑΞ, ΕΟ cylindrorum reciprocarum bases sint altitudinibus, et sit ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad ΚΑ altitudinem; dico æqualem esse ΑΞ cylindrum cylindro ΕΟ.

hisdem enim constructis, quoniam est ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad

au cylindre ΕΣ comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΜΠ (13. 12), car le cylindre ΕΟ est coupé par le plan ΤΥΣ parallèle aux plans opposés; la base ΑΒΓΔ est donc à la base ΕΖΗΘ comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΜΠ. Mais la hauteur ΜΠ est égale à la hauteur ΚΑ; la base ΑΒΓΔ est donc à la base ΕΖΗΘ comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΚΑ; les bases des cylindres ΑΞ, ΕΟ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs de ces cylindres.

Mais que les bases des cylindres ΑΞ, ΕΟ soient réciproquement proportionnelles aux hauteurs, et que la base ΑΒΓΔ soit à la base ΕΖΗΘ comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΚΑ; je dis que le cylindre ΑΞ est égal au cylindre ΕΟ.

Car faisons la même construction. Puisque la base ΑΒΓΔ est à la base ΕΖΗΘ

MN ὕψος πρὸς τὸ ΚΑ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΑ ὕψος τῷ ΜΠ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βᾶσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος¹⁰. ΑΛΛ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βᾶσιν οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος¹¹ οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον¹². Ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΚΑ altitudinem, æqualis autem ΚΑ altitudo altitudini ΜΠ; est igitur ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad ΜΠ altitudinem. Sed ut quidem ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΑΞ cylindrus ad ΕΣ cylindrum, etenim sub eadem altitudine sunt; ut autem ΜΝ altitudo ad ΜΠ altitudinem ita ΕΟ cylindrus ad ΕΣ cylindrum; est igitur ut ΑΞ cylindrus ad ΕΣ cylindrum ita ΕΟ cylindrus ad ΕΣ cylindrum; æqualis igitur ΑΞ cylindrus ΕΟ cylindro. Similiter autem et in conis. Quod oportebat ostendere.

comme la hauteur MN est à la hauteur ΚΑ, que la hauteur ΚΑ est égale à la hauteur ΜΠ, la base ΑΒΓΔ sera à la base ΕΖΗΘ comme la hauteur MN est à la hauteur ΜΠ. Mais la base ΑΒΓΔ est à la base ΕΖΗΘ comme le cylindre ΑΞ est au cylindre ΕΣ (11. 12), car ils ont la même hauteur, et la hauteur MN est à la hauteur ΜΠ comme le cylindre ΕΟ est au cylindre ΕΣ (13. 12); le cylindre ΑΞ est donc au cylindre ΕΣ comme le cylindre ΕΟ est au cylindre ΕΣ; le cylindre ΑΞ est donc égal au cylindre ΕΟ (9. 5). Il en serait de même pour les cônes. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Δύο κύκλων περι τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἐστωσαν οἱ δεθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περι τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον¹ ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἡχθῶ γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῆ ΒΔ εὐθεῖα² πρὸς ἐρθᾶς ἡχθῶ ἡ ΗΑ, καὶ διήχθῶ ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο αἰ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς ΑΔ. Λελείφθῶ, καὶ ἴστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ καθέτος ἡχθῶ ἡ ΑΜ, καὶ διήχθῶ ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεξεύχ-

PROPOSITIO XVI.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo polygonum et æquilaterum et parilaterum describere, non tangentem minorem circumulum.

Sint dati duo circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ circa idem centrum Κ; oportet igitur in majori circulo ΑΒΓΔ polygonum et æquilaterum et parilaterum describere, non tangentem ΕΖΗΘ circumulum.

Ducatur enim per Κ centrum recta ΒΚΔ, et a puncto Η ipsi ΒΔ ad rectos angulos ducatur ΗΑ, et producatum ad Γ; ergo ΑΓ tangit ΕΖΗΘ circumulum; secantes utique ΒΑΔ circumferentiam bifariam, et dimidium ejus bifariam, et hoc semper facientes, relinquemus circumferentiam minorem ipsâ ΑΔ. Relinquatur, et sit ΛΔ, et a puncto Α ad ΒΔ perpendicularis ducatur ΑΜ, et producatum ad Ν, et jungantur ΑΔ,

PROPOSITION XVI.

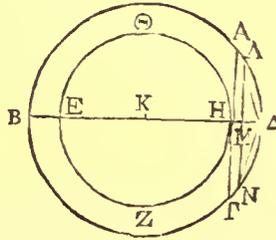
Deux cercles étant concentriques, décrire dans le plus grand un polygone dont les côtés égaux et pairs en nombre ne touchent pas le plus petit cercle.

Soient les deux cercles ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ayant le même centre Κ; il faut dans le plus grand cercle ΑΒΓΔ, décrire un polygone dont les côtés, égaux et pairs en nombre, ne touchent point le plus petit cercle ΕΖΗΘ.

Car par le centre Κ menons la droite ΒΚΔ, du point Η menons la droite ΗΑ perpendiculaire à ΒΔ, et prolongeons cette droite vers le point Γ; la droite ΑΓ touchera le cercle ΕΖΗΘ (16. 3). Partageons l'arc ΒΑΔ en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et faisons toujours la même chose; il restera un arc plus petit que l'arc ΑΔ (1. 10). Qu'on ait cet arc, et que cet arc soit ΑΔ; du point Α menons la droite ΑΜ perpendiculaire à ΒΔ; prolongeons cette perpendiculaire vers le point Ν, et joignons ΑΔ, ΑΝ; la droite ΑΔ sera égale à la droite ΑΝ.

θωσαν αὖ $\Lambda\Delta$, ΔN ἴση ἄρα ἐστίν³ ἢ $\Lambda\Delta$ τῆ ΔN . Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛN τῆ $A\Gamma$, ἢ δὲ $A\Gamma$ ἐφάπτεται τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου· ἢ ΛN ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου· πολλὰ

ΔN ; æqualis igitur est $\Lambda\Delta$ ipsi ΔN . Et quoniam parallela est ΛN ipsi $A\Gamma$, ipsa vero $A\Gamma$ tangit $EZH\Theta$ circulum, ipsa igitur ΛN non tangit $EZH\Theta$ circulum; a fortiori igitur $\Lambda\Delta$,



ἄρα αὖ $\Lambda\Delta$, ΔN οὐκ ἐφάπτονται τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. Ἐὰν δὴ τῆ $\Lambda\Delta$ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ἐγγράψονται⁵ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε⁶ καὶ ἀρτίόπλευρον, μὴ ψαῦδον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ $EZH\Theta$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΔN non tangunt $EZH\Theta$ circulum. Si autem ipsi $\Lambda\Delta$ rectæ æquales deinceps aptabimus in $AB\Gamma\Delta$ circulo, describetur in $AB\Gamma\Delta$ circulo polygonum et æquilaterum et parilaterum, non tangens minorem circulum $EZH\Theta$. Quod oportebat facere.

Et puisque ΛN est parallèle à $A\Gamma$, et que $A\Gamma$ touche le cercle $EZH\Theta$, la droite ΛN ne touchera point le cercle $EZH\Theta$; les droites $\Lambda\Delta$, ΔN ne toucheront point le cercle $EZH\Theta$, à plus forte raison. Si donc l'on applique au cercle $AB\Gamma\Delta$, à la suite les unes des autres, des droites égales à la droite $\Lambda\Delta$ (1.4), on décrira dans le cercle $AB\Gamma\Delta$, un polygone dont les côtés égaux et pairs en nombre ne toucheront pas le plus petit cercle $EZH\Theta$. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

PROPOSITIO XVII.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφᾶραν στερεὸν πολυέδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν¹.

Νειοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφᾶραν στερεὸν πολυέδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρον· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδὴ πᾶρ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο² ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ³ καθ' οἷας ἂν θέσως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δὲ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. Καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδὴ πᾶρ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφᾶραν διαγχο-

Duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in majori sphaera solidum polyedrum describere, non tangens minorem sphaeram secundum superficiem.

Intelligentur duae sphaerae circa idem centrum A; oportet igitur in majori sphaera solidum polyedrum describere, non tangens sphaeram minorem secundum superficiem.

Secentur sphaerae plano aliquo per centrum ducto; sectiones igitur erunt circuli, quoniam manente diametro et circumducto semicirculo facta est sphaera; quare et in quacunque si intelligamus semicirculum, planum ejus productum planum efficiet in superficie sphaerae circumulum. Et evidens est, et maximum, quia diameter sphaerae quae est et semicirculi diameter scilicet et circuli, major est omnibus rectis in circulo vel sphaera ductis. Sit igitur

PROPOSITION XVII.

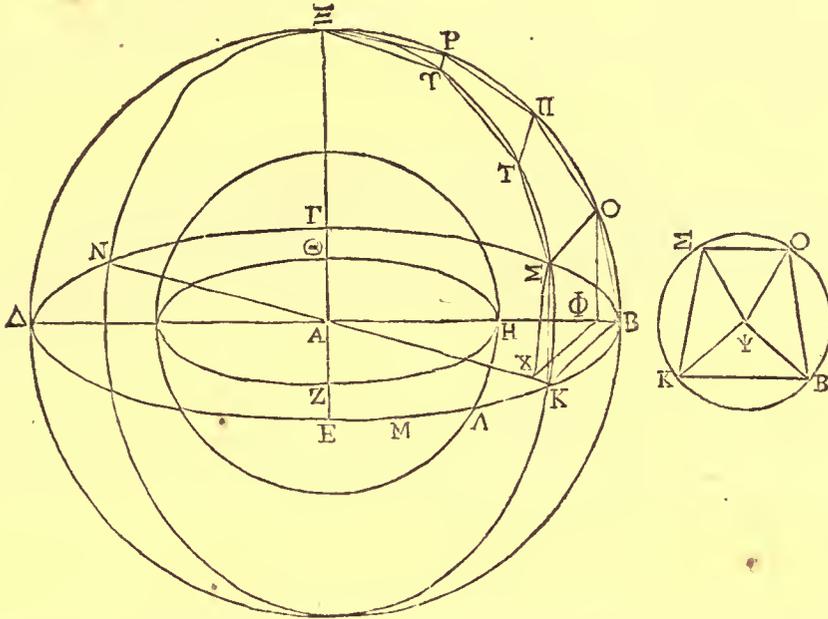
Deux sphères étant concentriques, décrire dans la plus grande sphère un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère.

Concevons deux sphères autour du même centre A; il faut dans la plus grande sphère décrire un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère.

Coupons ces sphères par un plan mené par le centre; les sections seront des cercles, car une sphère étant engendrée par un demi-cercle qui tourne autour de son diamètre immobile (déf. 14. 11), dans quelque position que nous concevions ce demi-cercle, le plan de ce demi-cercle étant prolongé produira un cercle dans la surface de la sphère. Et il est évident que ce sera un grand cercle, parce que le diamètre de la sphère, qui est aussi celui du demi-cercle, c'est-à-dire du cercle, est la plus grande de toutes les droites menées dans le cercle ou dans

μείων εὐθειῶν⁴. Ἐστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαί-
ρα κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρα
κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἦχθωσαν αὐτῶν δύο διαμέ-
τροι πρὸς ἑρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο
κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ,

in majori quidem sphaerâ circulus ΒΓΔΕ; in
minori autem sphaerâ circulus ΖΗΘ; et du-
cantur ipsorum duæ diametri ΒΔ, ΓΕ ad rec-
tos inter se, et duobus circulis ΒΓΔΕ, ΗΘΖ



ΖΗΘ, εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολυῶ-
νον ἰσόπλευρόν τε⁵ καὶ ἀρτίπλευρον ἐγγεγράφθω,
μὴ ψαῦδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ
πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ,
ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα β, ἡ ΚΑ διήχθω
ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ

circa idem centrum existentibus, in majori
ΒΓΔΕ circulo polygonum et æquilaterum et pa-
rilaterum describatur, non tangens minorem
circulum ΖΗΘ, cujus latera sint in ΒΕ qua-
drante ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, et juncta ΚΑ
producatur ad Ν, et erigatur a puncto Α plano

la sphère (15. 3). Que ΒΓΔΕ soit un cercle de la plus grande sphère, et que ΖΗΘ soit un cercle de la plus petite sphère; menons leurs deux diamètres ΒΔ, ΓΕ perpendiculaires l'un à l'autre; les deux cercles ΒΓΔΕ, ΖΗΘ ayant le même centre, décrivons dans le plus grand cercle ΒΓΔΕ un polygone, dont les côtés égaux et pairs en nombre ne touchent pas le plus petit cercle ΖΗΘ (16. 12); que les côtés de ce polygone qui sont dans le quart de cercle ΒΕ soient ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ; joignons ΚΑ, et prolongeons cette droite vers le point Α

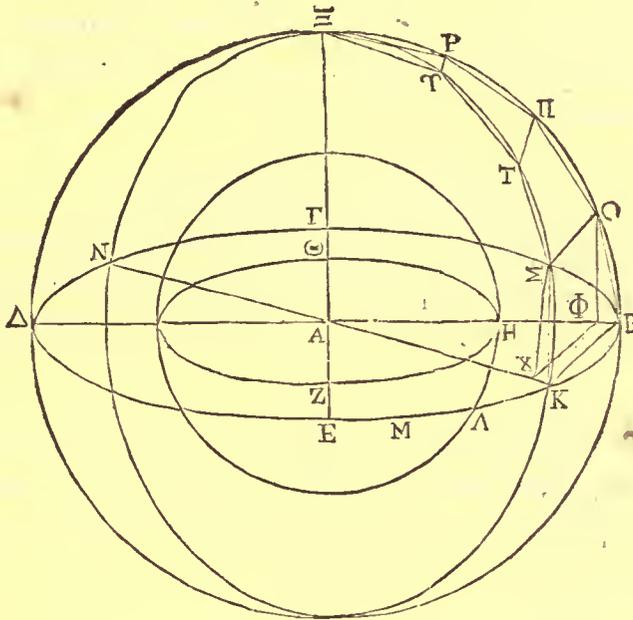
τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΑΞ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημμένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. Ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστωτ' ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδα ἐστὶν ὀρθὰ⁸ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ, ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ, ΚΑ, ΑΜ, ΜΕ εὐθείαις. Εγγεγράψωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦν-

circuli ΒΓΔΕ ad rectos ipsa ΑΞ, et occurrat superficiei sphaeræ in Ξ; et per ΑΞ et utramque ipsarum ΒΔ, ΚΝ plana ducantur, facient utique ex dictis in superficie sphaeræ maximos circulos. Faciant, quorum semicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ sint ex diametris ΒΔ, ΚΝ. Et quoniam ΞΑ recta est ad ΒΓΔΕ circuli planum, et omnia igitur per ΞΑ plana sunt recta ad ΒΓΔΕ circuli planum; quare et ΒΞΔ, ΚΞΝ semicirculi recti sunt ad ΒΓΔΕ circuli planum. Et quoniam æquales sunt ΒΞΔ, ΚΞΝ semicirculi, etenim super æquales sunt diametros ΒΔ, ΚΝ, æquales sunt et ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ quadrantes inter se; quot igitur sunt in ΒΕ quadrante latera polygoni tot sunt et in ΒΞ, ΚΞ quadrantibus æqualia rectis ΒΚ, ΚΑ, ΑΜ, ΜΕ. Describantur, et sint ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, et jungantur ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, et ab ipsis Ο, Σ ad ΒΓΔΕ, circuli planum perpendiculararcs ducantur; cadent utique ipsæ in communes ΒΔ, ΚΝ

élevons la droite ΑΞ perpendiculaire au plan du cercle ΒΓΔΕ; que cette droite rencontre la surface de la sphère au point Ξ; menons des plans par la droite ΑΞ et par chacune des droites ΒΔ, ΚΝ; ces plans, d'après ce qui a été dit, produiront des grands cercles dans la surface de la sphère. Qu'ils soient produits, et que leurs moitiés ΒΞΔ, ΚΞΝ ayent ΒΔ, ΚΝ pour diamètres. Puisque la droite ΞΑ est perpendiculaire au plan du cercle ΒΓΔΕ, tous les plans qui passeront par ΞΑ seront perpendiculaires au plan du cercle ΒΓΔΕ (18. 11); les demi-cercles ΒΞΔ, ΚΞΝ sont donc perpendiculaires au plan du cercle ΒΓΔΕ. Mais les demi-cercles ΒΞΔ, ΚΞΝ sont égaux, car ils sont sur les diamètres égaux ΒΔ, ΚΝ; les quarts de cercle ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ sont donc égaux entre eux; chacun des quarts de cercle ΒΞ, ΚΞ contient donc autant de droites égales à chacune des droites ΒΚ, ΚΑ, ΑΜ, ΜΕ que le quart de cercle ΒΕ. Inscrivons ces droites, et qu'elles soient ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ; et joignons ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, et des points Ο, Σ menons des perpendiculaires au plan du cercle ΒΓΔΕ; ces perpendiculaires tomberont

ται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς
 ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδὴ περ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπι-
 πεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπε-
 δον. Πιπτέτωσαν, καὶ ἕστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ
 ἐπιζεύχθω ἡ ΦΧ. Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις

sectiones planorum, quoniam et ΒΞΔ, ΚΞΝ
 plana recta sunt ad ΒΓΔΕ circuli planum.
 Cadant, et sint ΟΦ, ΣΧ, et jungatur ΦΧ. Et
 quoniam in æqualibus semicirculis ΒΞΔ, ΚΞΝ



τοῖς ΒΞΔ, ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμένοι εἰσὶν αἱ ΒΟ,
 ΚΣ, καὶ κάθετοι ἡγμένοι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση
 ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. Ἔστι
 δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλη τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα
 ἡ ΦΑ λοιπὴ τῇ ΧΑ ἐστὶν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ
 ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· πα-

æqualesumptæ sunt ΒΟ, ΚΣ, et perpendicularæ
 ductæ sunt ΟΦ, ΣΧ, æqualis igitur est quidem
 ΟΦ ipsi ΣΧ, ipsa vero ΒΦ ipsi ΚΧ. Est autem
 et tota ΒΑ toti ΚΑ æqualis; et reliquæ igitur
 ΦΑ reliquæ ΧΑ est æqualis; est igitur ut ΒΦ
 ad ΦΑ ita ΚΧ ad ΧΑ; parallela igitur est ΧΦ

dans les communes sections ΒΔ, ΚΝ des plans (38. 11), parce que les plans ΒΞΔ, ΚΞΝ sont perpendiculaires au plan du cercle ΒΓΔΕ. Que ces perpendiculaires tombent dans les communes sections, et qu'elles soient ΟΦ, ΣΧ; joignons ΦΧ. Puisqu'on a pris les arcs égaux ΒΟ, ΚΣ dans les demi-cercles égaux ΒΞΔ, ΚΞΝ, et qu'on a mené les perpendiculaires ΟΦ, ΣΧ, la droite ΟΦ sera égale à ΣΧ, et la droite ΒΦ égale à la droite ΚΧ. Mais la droite entière ΒΑ est égale à la droite entière ΚΑ; la droite restante ΦΑ est donc égale à la droite restante ΧΑ; la droite ΒΦ est donc à ΦΑ comme ΚΧ est à ΧΑ; la droite ΧΦ est donc parallèle à la droite ΚΒ (2. 6).

ράλληλος ἄρα ἐστὶν ἢ $\chi\phi$ τῇ $\kappa\beta$. Καὶ ἐπεὶ ἴσα-
 τέρα τῶν $\omicron\phi$, $\sigma\chi$ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ $\beta\gamma\delta\epsilon$
 κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἢ $\omicron\phi$
 τῇ $\sigma\chi$. Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ $\chi\phi$,
 $\sigma\omicron$ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. Καὶ ἐπεὶ πα-
 ράλληλος ἐστὶν ἢ $\chi\phi$ τῇ $\sigma\omicron$, ἀλλὰ ἢ $\chi\phi$ τῇ $\kappa\beta$
 ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἢ $\sigma\omicron$ ἄρα τῇ $\kappa\beta$ ἐστὶ πα-
 ράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνυῦσιν αὐτὰς αἱ $\beta\omicron$, $\kappa\sigma$.
 τὸ $\kappa\beta\omicron\sigma$ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ,
 ἐπειδήπερ ἐὰν ὄσιν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ
 ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἢ
 ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ
 ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. Διὰ τὰ αὐτὰ
 δὴ καὶ ἑκατέρον¹⁰ τῶν $\sigma\omicron\omicron\pi\tau$, $\tau\pi\pi\gamma$ τετρα-
 πλεύρων ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ἐστὶ δὲ καὶ¹¹ τὸ

ipsi $\kappa\beta$. Et quoniam utraque ipsarum $\omicron\phi$, $\sigma\chi$
 recta est ad $\beta\gamma\delta\epsilon$ circuli planum; parallela igitur
 est $\omicron\phi$ ipsi $\sigma\chi$. Ostensa autem est ipsi et æqualis;
 et $\kappa\phi$, $\sigma\omicron$ igitur æquales sunt et parallelae. Et
 quoniam parallela est $\chi\phi$ ipsi $\sigma\omicron$, sed $\kappa\phi$ ipsi $\kappa\beta$
 est parallela; et igitur $\sigma\omicron$ ipsi $\kappa\beta$ est parallela. Et
 conjungunt eas ipsæ $\beta\omicron$, $\kappa\sigma$; et $\kappa\beta\omicron\sigma$ igitur
 quadrilaterum in uno est plano, quoniam si sint
 duæ rectæ parallelae, et in utraq; ipsarum sumpta
 sint quævis puncta, puncta conjungens recta in
 eodem plano est in quo parallelae (*). Propter ca-
 dem utique et utrumque ipsorum $\sigma\omicron\omicron\pi\tau$, $\tau\pi\pi\gamma$
 quadrilaterum in uno est plano. Est autem et $\gamma\pi\epsilon$

Mais chacune des droites $\omicron\phi$, $\sigma\chi$ est perpendiculaire au plan du cercle $\beta\gamma\delta\epsilon$; la droite $\omicron\phi$ est donc parallèle à la droite $\sigma\chi$ (6. 11). Mais on a démontré que ces droites sont égales; les droites $\chi\phi$, $\sigma\omicron$ sont donc égales et parallèles (33. 11). Et puisque $\chi\phi$ est parallèle à $\sigma\omicron$, et $\chi\phi$ à $\kappa\beta$, la droite $\sigma\omicron$ est parallèle à $\kappa\beta$ (9. 11). Mais ces droites sont jointes par les droites $\beta\omicron$, $\kappa\sigma$; le quadrilatère $\kappa\beta\omicron\sigma$ est donc dans un seul plan, car si deux droites sont parallèles, et si dans chacune de ces droites on prend des points quelconques, les droites qui joignent ces points sont dans le même plan que ces parallèles (7. 11) (*). Par la même raison, chacun des quadrilatères $\sigma\omicron\omicron\pi\tau$, $\tau\pi\pi\gamma$ est dans un seul plan; et le triangle

(*) Euclides hæc addere potuisset :

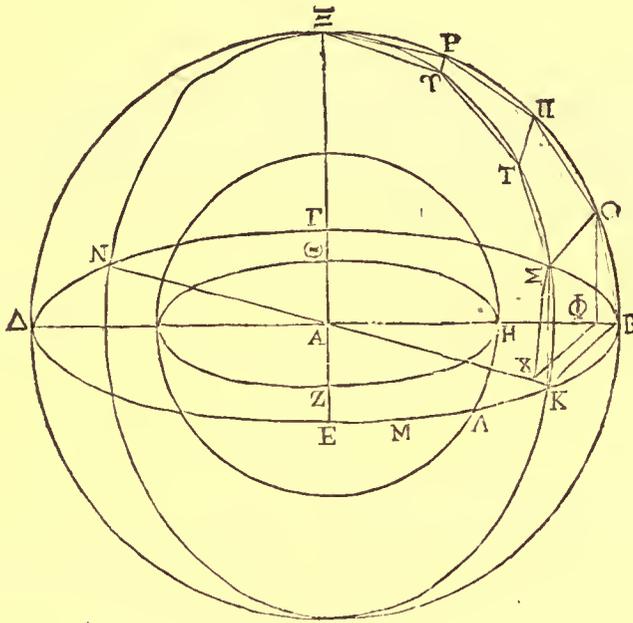
Rursus a punctis Π , τ ad $\beta\gamma\delta\epsilon$ circuli planum perpendiculares ducantur; cadent utique in communes planorum sectiones $\beta\delta$, $\kappa\eta$; conjungantur puncta in quibus perpendiculares occurrunt rectis $\beta\delta$, $\kappa\eta$, et jungantur ipsæ $\pi\beta$, $\tau\kappa$. Similiter utique ostendemus rectam $\kappa\beta$ parallelam esse ipsi $\tau\pi$. Ostensum est autem et rectam $\kappa\beta$ parallelam esse ipsi $\sigma\omicron$; recta igitur $\sigma\omicron$ parallela est ipsi $\tau\pi$; quadrilaterum igitur $\sigma\omicron\omicron\pi\tau$ in uno est plano. Propter eadem utique et quadrilaterum $\tau\pi\pi\gamma$ est in uno plano.

(*) Euclide aurait pu ajouter ce qui suit :

Des points Π , τ menons des perpendiculaires au plan du cercle $\beta\gamma\delta\epsilon$. Ces perpendiculaires tomberont dans les communes sections $\beta\delta$, $\kappa\eta$ des plans. Joignons les points où ces perpendiculaires rencontrent les droites $\beta\delta$, $\kappa\eta$, et joignons aussi $\pi\beta$, $\tau\kappa$. Nous démontrerons semblablement que la droite $\kappa\beta$ est parallèle à $\tau\pi$. Mais on a démontré que la droite $\kappa\beta$ est parallèle à $\sigma\omicron$; la droite $\sigma\omicron$ est donc parallèle à $\tau\pi$; le quadrilatère $\sigma\omicron\omicron\pi\tau$ est donc dans un seul plan. Le quadrilatère $\tau\pi\pi\gamma$ est dans un seul plan, par la même raison.

ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ. Ἐάν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν πολυέδρον μεταξὺ τῶν ΒΞ, ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημείον.

triangulum in uno plano. Si igitur intelligamus a punctis Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ ad Α punctum junctas rectas, constituetur quædam figura polyedra inter circumferentias ΒΞ, ΚΞ ex pyramidibus composita, quarum bases quidem ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ quadrilatera et ΥΡΞ triangulum, vertex autem punctum Α. Si autem et



Ἐάν δὲ καὶ ἐπὶ ἐκάστης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ΚΒ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου¹²

in unoquoque laterum ΚΑ, ΛΜ, ΜΞ, quemadmodum in ΚΒ eadem construamus, et etiam in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo hemisphærio, constituetur quædam figura poly-

ΥΡΞ est aussi dans un seul plan (2. 11). Si des points Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ on conçoit des droites menées au point Α, on aura construit entre les arcs ΒΞ, ΚΞ un certain polyèdre composé des pyramides, dont les bases seront les quadrilatères ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ et le triangle ΥΡΞ, et dont le sommet commun sera le point Α. Si sur chacun des côtés ΚΑ, ΛΜ, ΜΕ, nous faisons la même construction que nous avons faite sur le côté ΚΒ, si nous faisons ensuite la même chose dans les trois autres quarts de cercle, et dans l'autre hémisphère, nous aurons inscrit dans la

συσταθήσεται τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον¹³ εἰς τὴν σφαῖραν ἐκ πυραμίδων συκείμενον ὧν βάσεις μὲν¹⁴ τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ $\Gamma\text{P}\Xi$ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφή δὲ τὸ A σημείον.

Λέγω δὲ ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάπτεται¹⁵ τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστὶν ὁ $\text{ZH}\Theta$ κύκλος. ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ $\text{KBO}\Sigma$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ $\text{A}\Psi$, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημείον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\text{B}\Psi$, ΨO . Καὶ ἐπεὶ ἡ $\text{A}\Psi$ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ $\text{KBO}\Sigma$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ εὐσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶν ἡ $\text{A}\Psi$ ¹⁶, ἡ $\text{A}\Psi$ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν¹⁷ τῶν $\text{B}\Psi$, ΨO . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ AO , ἴσον ἐστὶ¹⁸ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς¹⁹ AO . Καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $\text{A}\Psi$, ΨB , ὀρθὴ γάρ ἡ πρὸς τῷ Ψ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AO ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $\text{A}\Psi$, ΨO ; τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\text{A}\Psi$, ΨB ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\text{A}\Psi$,

dra descripta in sphaerâ ex pyramidibus compositâ, quarum bases quidem dicta quadrilatera et $\Gamma\text{P}\Xi$ triangulum, et quæ sunt ejusdem ordinis eum ipsis, vertex autem punctum A .

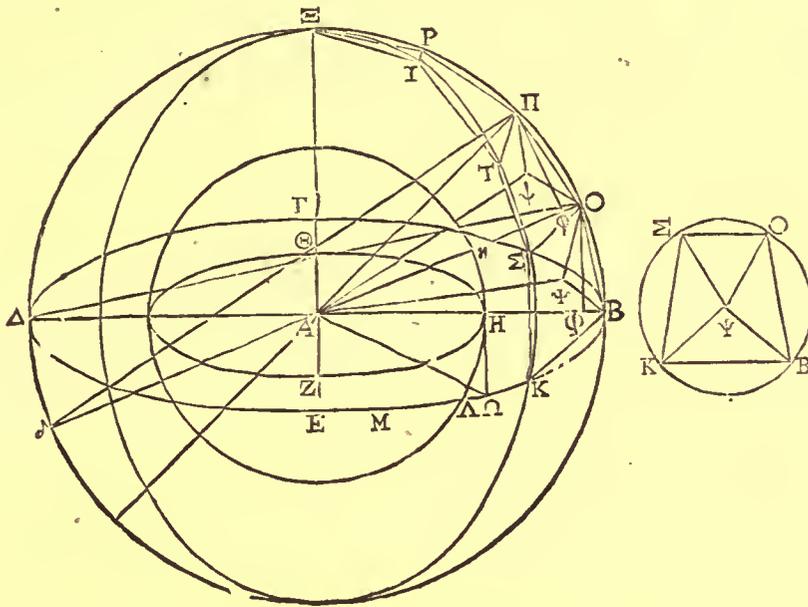
Dico etiam dictum polyedrum non tacturum esse minorem sphaeram, secundum superficiem in qua est $\text{ZH}\Theta$ circulus. Ducatur a puncto A ad $\text{KBO}\Sigma$ quadrilateri planum perpendicularis $\text{A}\Psi$, et ipsa occurrat plano in puncto Ψ , et jungantur ipsæ $\text{B}\Psi$, ΨO . Et quoniam $\text{A}\Psi$ recta est ad $\text{KBO}\Sigma$ quadrilateri planum, et ad omnes igitur rectas eam tangentes, et existentes in quadrilateri plano, perpendicularis est ipsa $\text{A}\Psi$; ergo $\text{A}\Psi$ perpendicularis est ad utramque ipsarum $\text{B}\Psi$, ΨO . Et quoniam æqualis est AB ipsi AO , æquale est et quadratum ex AB quadrato ex AO . Et sunt quadrato quidem ex AB æqualia quadrata ex $\text{A}\Psi$, ΨB , rectus enim angulus ad Ψ , quadrato autem ex AO æqualia, quadrata ex $\text{A}\Psi$, ΨO ; quadrata igitur ex $\text{A}\Psi$, ΨB æqualia

sphère un certain polyèdre composé des pyramides qui ont pour bases les quadrilatères $\text{KBO}\Sigma$, ΣOPT , THPY et le triangle $\text{TP}\Xi$, et les quadrilatères et les triangles du même ordre que ces quadrilatères et que ce triangle, le point A étant le sommet commun de ces pyramides.

Je dis que les faces de ce polyèdre ne toucheront point la plus petite sphère dans laquelle est le cercle $\text{ZH}\Theta$. Du point A menons la droite $\text{A}\Psi$ perpendiculaire au plan du quadrilatère $\text{KBO}\Sigma$ (11. 11), que cette perpendiculaire rencontre ce plan au point Ψ , et joignons $\text{B}\Psi$, ΨO . Puisque $\text{A}\Psi$ est perpendiculaire au plan du quadrilatère $\text{KBO}\Sigma$, la droite $\text{A}\Psi$ sera perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan (déf. 3. 11); la droite $\text{A}\Psi$ est donc perpendiculaire à chacune des droites $\text{B}\Psi$, ΨO . Mais AB est égal à AO ; le carré de AB est donc égal au carré de AO . Mais les carrés des droites $\text{A}\Psi$, ΨB sont égaux au carré de AB , et les carrés de $\text{A}\Psi$, ΨO sont égaux au carré de AO (47. 1), car l'angle en Ψ est droit; les carrés des droites $\text{A}\Psi$, ΨB sont donc égaux aux carrés

ΨΟ. Κοινὸν ἀφῆρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῶ τῶ ἀπὸ τῆς ΨΟ ἴσον ἴστί· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΟ. Ομοίως δὲ δείξομεν

sunt quadratis ex ΑΨ, ΨΟ. Commune auferatur quadratum ex ΑΨ; reliquum igitur quadratum ex ΒΨ reliquo ex ΨΟ æquale est; æqualis igitur ΒΨ



ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Κ, Σ ἐπιζευγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΟ· ὁ ἄρα κέντρον τῶ Ψ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΨΒ, ΨΟ γραφόμενος κύκλος ἤξει καὶ διὰ τῶν Κ, Σ, καὶ ἴσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον.

ipsi ΨΟ. Similiter utique ostendemus et a puncto Ψ ad Κ, Σ ductas rectas æquales esse utrique ipsarum ΒΨ, ΨΟ; ergo centro Ψ et intervallo quod sit una ipsarum ΨΒ, ΨΟ descriptus circulus transibit et per puncta Κ, Σ, et erit in circulo quadrilaterum ΚΒΟΣ (*).

des droites ΑΨ, ΨΟ. Retraçons le carré commun de ΑΨ, le carré restant de ΒΨ sera égal au carré restant de ΨΟ; la droite ΒΨ est donc égale à la droite ΨΟ. Nous démontrerons semblablement que les droites menées du point Ψ aux points Κ, Σ sont égales aux droites ΒΨ, ΨΟ; le cercle décrit du centre Ψ, et d'un intervalle égal à une des droites ΨΒ, ΨΟ passera donc par les points Κ, Σ; le quadrilatère ΚΒΟΣ sera donc décrit dans un cercle (*).

(*) Si a puncto Α ad reliquorum quadrilaterorum plana perpendiculares ducantur, similiter utique ostendemus reliqua quadrilatera descripta fore in circulis.

(*) Si du point Α nous menons des perpendiculaires aux plans des autres quadrilatères, nous démontrerons semblablement que les autres quadrilatères seront décrits dans des cercles.

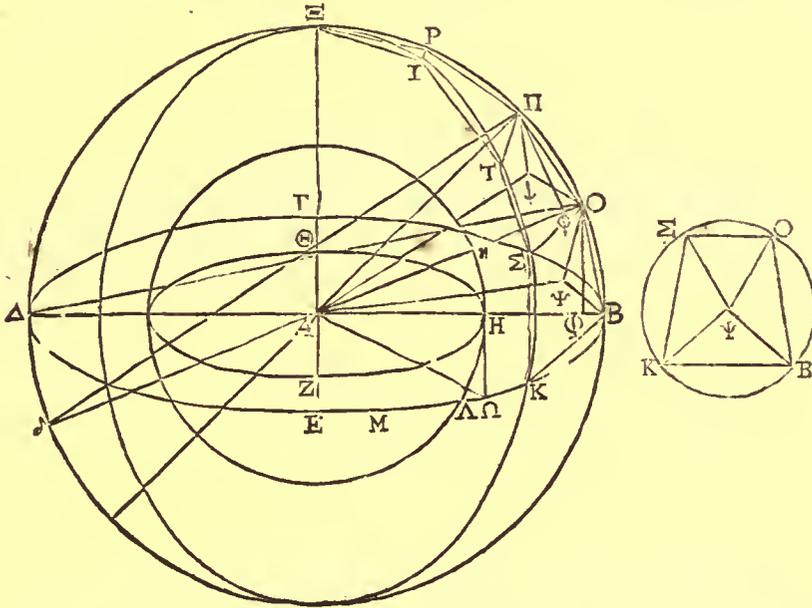
Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ· μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. Ἴση δὲ ἡ ΚΒ ἐκατέρᾳ τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἐκατέρᾳ ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μείζον ἐστὶν ἡ διπλάσιον. Καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ο σημεῖου²⁰ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΟΦ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΦ ἐλάττων ἐστὶν ἡ διπλῆ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΦ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΦ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ· ἀναγραφομένου δὴ²¹ ἀπὸ τῆς ΒΦ τετραγώνου, καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΦΔ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν²² ΔΒ, ΒΦ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ ἐλαττόν ἐστὶν ἡ διπλάσιον. Καὶ ἔτι²³ τῆς ΑΟ ἐπιζευγυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΦ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΟ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΦ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΟΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΦ ἐλαττόν ἐστὶν ἡ διπλάσιον. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μείζον ἐστὶν ἡ διπλά-

Et quoniam major est ΚΒ ipsa ΧΦ, æqualis autem ΧΦ ipsi ΣΟ; major igitur ΚΒ ipsa ΣΟ. Æqualis autem ΚΒ utrique ipsarum ΚΣ, ΒΟ; et utraque igitur ipsarum ΚΣ, ΒΟ ipsa ΣΟ major est. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ΚΒΟΣ, et æquales ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, et minor ΟΣ, et ex centro circuli est ipsa ΒΨ, ergo ipsum ex ΒΟ majus est quam duplum ipsius ex ΒΨ. Et ducatur a puncto Ο ad ΒΔ perpendicularis ΟΦ. Et quoniam ΒΔ minor est quam dupla ipsius ΔΦ, et est ut ΒΔ ad ΔΦ ita rectangulum sub ΔΒ, ΒΦ ad rectangulum sub ΔΦ, ΦΒ; descripto igitur ex ΒΦ quadrato, et completo super ipsam ΦΔ parallelogrammo, et rectangulum igitur sub ΔΒ, ΒΦ majus est quam duplum rectanguli sub ΔΦ, ΦΒ. Et adhuc ΑΟ juncta, rectangulum quidem sub ΔΒ, ΒΦ æquale est quadrato est ΒΟ, rectangulum autem sub ΔΦ, ΦΒ æquale est quadrato ex ΟΦ; quadratum igitur ex ΟΒ minus est quam duplum quadrati ex ΟΦ. Sed quadratum ex ΒΟ majus est quam duplum quadrati ex ΒΨ; ma-

Puisque la droite ΚΒ est plus grande que la droite ΧΦ, et que la droite ΧΦ est égale à la droite ΣΟ, la droite ΚΒ sera plus grande que la droite ΣΟ. Mais la droite ΚΒ est égale à chacune des droites ΚΣ, ΒΟ; chacune des droites ΚΣ, ΒΟ est donc plus grande que la droite ΣΟ. Et puisque le quadrilatère ΚΒΟΣ est décrit dans un cercle, que les droites ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ sont égales, que la droite ΟΣ est la plus petite, et que la droite ΒΨ est un rayon du cercle, le carré de ΒΟ sera plus grand que le double du carré de ΒΨ (12. 2). Du point Ο menons la droite ΟΦ perpendiculaire à ΒΔ. Puisque ΒΔ est plus petit que le double de ΔΦ, et que ΒΔ est à ΔΦ comme le rectangle sous ΔΒ, ΒΦ est au rectangle sous ΔΦ, ΦΒ (1. 6), si l'on décrit un carré sur ΒΦ, et si sur ΦΔ, on complète le parallélogramme, le rectangle compris sous ΔΒ, ΒΦ sera plus petit que le double du rectangle compris sous ΔΦ, ΦΒ. Joignons ΑΟ; le rectangle sous ΔΒ, ΒΦ sera égal au carré de ΒΟ (8. 6), et le rectangle sous ΔΦ, ΦΒ égal au carré de ΟΦ; le carré de ΒΟ est donc plus petit que le double du carré de ΟΦ. Mais le carré de ΒΟ est plus grand que le double du carré de ΒΨ; le carré de ΟΦ est donc plus grand que

σιον· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΟ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΟ. Καὶ ἐστὶ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΟΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΟΦ, ΦΑ· τὰ ἄρα

jus igitur quadratum ex ΟΦ quadrato ex ΒΨ. Et quoniam æqualis est ΒΑ ipsi ΑΟ, æquale est quadratum ex ΒΑ quadrato ex ΑΟ. Et sunt quadrato quidem ex ΒΑ æqualia quadrata ex ΒΨ, ΨΑ, quadrato autem ex ΟΑ æqualia quadrata ex ΟΦ, ΦΑ; quadrata igitur ex ΒΨ,



ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΟΦ, ΦΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ μείζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΑ ἑλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΦ· πολλῶν ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πλυνέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ

ΨΑ æqualia sunt quadratis ex ΟΦ, ΦΑ, quorum quadratum ex ΟΦ majus est quadrato ex ΒΨ; reliquum igitur quadratum ex ΦΑ minus est quadrato ex ΨΑ; major igitur ΑΨ ipsâ ΑΦ; ergo multo major est ΑΨ ipsâ ΑΗ. Et est quidem ipsa ΑΨ ad unam polyedri basim,

le carré de ΒΨ. Mais ΒΑ est égal à ΑΟ; le carré de ΒΑ est donc égal au carré de ΑΟ. Mais les carrés des droites ΒΨ, ΨΑ sont égaux au carré de la droite ΒΑ (47. 1), et les carrés des droites ΟΦ, ΦΑ égaux au carré de la droite ΟΑ; les carrés des droites ΒΨ, ΨΑ sont donc égaux aux carrés des droites ΟΦ, ΦΑ; mais le carré de ΟΦ est plus grand que le carré de ΒΨ; le carré restant de ΦΑ est donc plus petit que le carré de ΨΑ; la droite ΑΨ est donc plus grande que la droite ΑΦ; la droite ΑΨ est donc, à plus forte raison, plus grande que la droite ΑΗ. Mais la

ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν ὥστε τὸ πολυέδρον οὐ ψαύσει²⁴ τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

ipsa autem AH ad minoris sphaeræ superficiem; quare polyedrum non tanget minorem sphaeram secundum superficiem (*).

droite $A\psi$ est perpendiculaire à une des bases du polyèdre, et la droite AH est un rayon de la plus petite sphère; les faces du polyèdre ne touchent donc pas la plus petite sphère (*).

(*) In omnibus manuscriptis, et in omnibus editionibus græcis, latinisque et aliis, figura ultimæ partis hujus propositionis, et ejus *aliter* a librariis ita vitiata erat ut ratiocinatio cujus ope Euclides ostendit quadrilaterum ΚΒΟΣ non tangere minorem sphaeram, nequaquam conveniret reliquis quadrilateris, neenon ΥΡΞ triangulo. Clavius et postea Robert Simson hanc demonstrationem compleverunt; et egomet ipse illam eodem modo complevi in Euclide gallico quem edidi anno 1804. Postea autem cum in figurâ erroris alicujus suspicionem habcrem, tentavi figuram quæ et reliquis quadrilateris trianguloque congruens esset non solum in ultimâ parte hujus propositionis, sed etiam et in *aliter*. Quam figuram tentaveram, illam denique reperi, ut in sequentibus unieuique videre licet.

Dico et planum ΣΟΠΤ necque tangere minorem sphaeram. Ducatur enim a puncto A ad ΣΟΠΤ quadrilateri planum perpendicularis $A\psi$, et jungantur Οψ, ψΠ. Et quoniam major est ΚΒ utraqûe ipsarum ΣΟ, ΤΠ; æqualis autem ΚΒ utrique ipsarum ΣΤ, ΟΠ; utraqûe igitur ipsarum ΣΤ, ΟΠ major

(*) Dans tous les manuscrits, et dans toutes les éditions grecques, latines et autres, la figure de la dernière partie de cette proposition, et de son *aliter* était tellement viciée par les copistes que le raisonnement par lequel Euclide démontre que le quadrilatère ΚΒΟΣ ne touche pas la plus petite sphère ne saurait convenir, en aucune manière, aux autres quadrilatères, ni au triangle ΥΡΞ. Clavius, et ensuite Robert Simson, ont complété cette démonstration; et moi-même, dans mon Euclide français, que je publiai en 1804, je la complétois à la manière de ces deux célèbres géomètres. Mais, dans la suite, ayant soupçonné quelque erreur dans la figure, j'en cherchai une qui pût convenir aux autres quadrilatères et au triangle, non-seulement dans la dernière partie de cette proposition, mais encore dans l'*aliter*. Je trouvai enfin la figure que je cherchais, comme on pourra le voir dans ce qui suit:

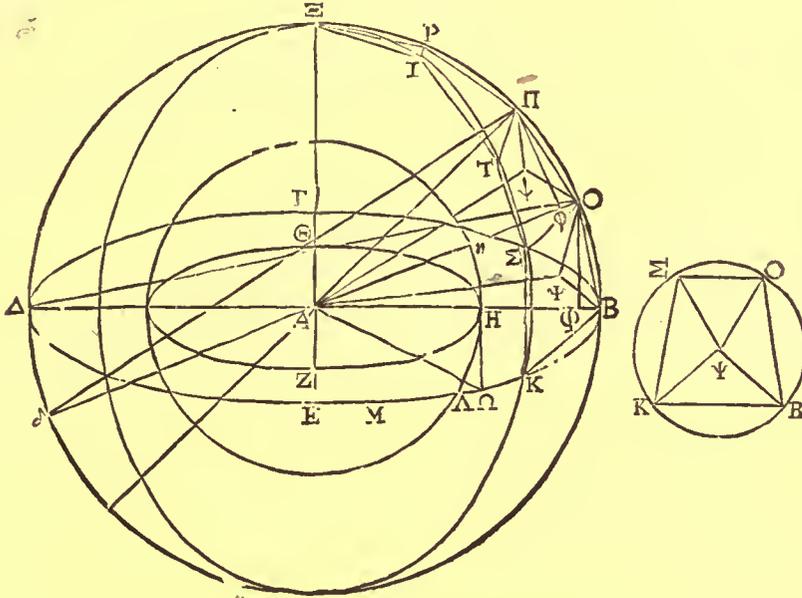
Je dis aussi que le quadrilatère ΣΟΠΤ ne touchera pas la plus petite sphère. Car menons du point A au plan du quadrilatère ΣΟΠΤ la perpendiculaire $A\psi$, et joignons Οψ, ψΠ. Puisque la droite ΚΒ est plus grande que chacune des droites ΣΟ, ΤΠ, et que la droite ΚΒ est égale à chacune des droites ΣΤ, ΟΠ, chaque des droites ΣΤ, ΟΠ sera plus grande

Α Λ Λ Ω Σ.

ALITER.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρας προχειρότερον, ὅτι
μείζων ἐστὶν ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. Ἡχθω ἀπὸ τοῦ Η

Ostendendum est autem aliter et expeditius
majorem esse ΑΨ ipsam ΑΗ. Ducatur a puncto Η



τῆ ΑΗ πρὸς ὀρθῶς ἢ ΗΩ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΩ.
Τέμνοντες δὲ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν

ipsi ΑΗ ad rectos ipsa ΗΩ, et jungatur ΑΩ.
Secantes igitur ipsam ΕΒ circumferentiam bifur-

AUTREMENT.

Nous allons démontrer autrement et d’une manière plus prompte que la droite ΑΨ est plus grande que la droite ΑΗ. Du point Η menons ΗΩ perpendiculaire à ΑΗ, et joignons ΑΩ. Si nous coupons en deux parties égales l’arc ΕΒ, la moitié

erit utraq̃ue ipsarum ΣΟ, ΤΠ. Et quoniam in circulo est quadrilaterum ΣΟΠΤ, æquales autem sunt ipsæ ΣΤ, ΟΠ, utraq̃ue vero ipsarum ΣΟ, ΤΠ minor est utraq̃ue ipsarum ΣΤ, ΟΠ, atque ex centro circuli est ipsa ΟΨ, erit angulus ΟΨΠ obtusus; quadratum igitur ex ΟΠ majus est quam duplum quadrati ex ΟΨ. Ducatur autem a puncto Π ad Οδ perpendicularis Πφ, et producat̃ur ΟΑ ad δ. Et quoniam Οδ minor

que chacune des droites ΣΟ ; ΤΠ. Et puisque le quadrilatère ΣΟΠΤ est décrit dans un cercle, que les droites ΣΤ, ΟΠ sont égales, que chacune des droites ΣΟ, ΤΠ est plus petite que chacune des droites ΣΤ, ΟΠ, et que ΟΨ est un rayon; l’angle ΟΨΠ sera obtus; le carré de ΟΠ est donc plus grand que le double du carré de ΟΨ (12. 2.) Du point Π menons Πφ perpendiculaire à Οδ, et prolongeons ΟΑ vers δ. Puisque

ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιοῦντες, καταλείβομεν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστὶν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφέρειας, ὑπὸ τῆς ἴσης τῆ ἩΩ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ

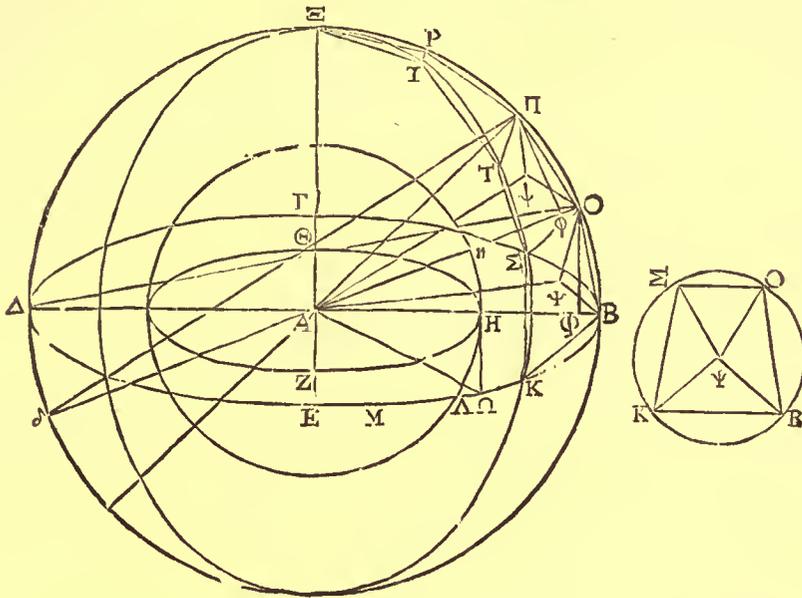
rīam, et dimidiam ipsius bifariam, et hoc semper facientes, relinquemus quamdam circumferentiam, quæ est minor circumferentiâ circuli ΒΓΔΕ subtensâ a rectâ æquali ipsi ΗΩ. Relinquatur, et sit ΚΒ circumferentia; minor igitur et

de cet arc en deux parties égales, et si nous faisons toujours la même chose, il restera enfin un certain arc plus petit que celui de la circonférence du cercle ΒΓΔΕ qui est soutendu par une droite égale à la droite ΗΩ (1. 10). Qu'on ait cet arc, et qu'il soit ΚΒ; la droite ΚΒ sera plus petite que la droite ΗΩ. Et

est duplâ ipsius $\delta\phi$, atque est ut $O\delta$ ad $\delta\phi$ ita rectangulum sub δO , $O\phi$ ad rectangulum sub $\delta\phi$, ϕO ; rectangulum igitur sub δO , $O\phi$ minus est duplo rectanguli sub $\delta\phi$, ϕO . Et jungatur ipsa $\Pi\delta$; rectangulum quidem sub δO , $O\phi$ æquale est quadrato ex $O\Pi$, rectangulum vero sub $\delta\phi$, ϕO æquale quadrato ex $\Pi\phi$; quadratum igitur ex $O\Pi$ minus est duplo quadrati ex $\Pi\phi$. Sed quadratum ex $O\Pi$ majus est duplo quadrati ex $O\psi$; quadratum igitur ex $\Pi\phi$ majus est quadrato ex $O\psi$. Et quoniam æqualis est OA ipsi $A\Pi$, æquale erit quadratum ex OA quadrato ex $A\Pi$. Et sunt quidem quadrato ex OA æqualia quadrata ex ipsis $O\psi$, ψA , quadrato autem ex $A\Pi$ æqualia quadrata ex ipsis $\Pi\phi$, ϕA ; quadrata igitur ex ipsis $O\psi$, ψA æqualia sunt quadratis ex $\Pi\phi$, ϕA , ex quibus quadratum ex $\Pi\phi$ majus est quadrato ex $O\psi$; reliquum igitur quadratum ex $A\psi$ majus est reliquo quadrato ex $A\phi$; major igitur recta $A\psi$ ipsâ $A\phi$; multo major igitur recta ψA ipsâ $A\eta$. Et est quidem recta $A\psi$ perpendicularis ad $\Sigma O\Pi T$ quadrilateri planum, recta vero $A\eta$ est recta ex centro minoris sphaeræ; quadrilaterum igitur $\Sigma O\Pi T$ non tangit minorem sphaeram. Similiter utique ostendetur neque quadrilaterum $T\Pi P Y$, neque triangulum $Y P Z$ tangere minorem sphaeram.

$O\delta$ est plus petit que le double de $\delta\phi$, et que $O\delta$ est à $\delta\phi$ comme le rectangle sous δO , $O\phi$ est au rectangle sous $\delta\phi$, ϕO , le rectangle sous δO , $O\phi$ sera plus petit que le double du rectangle sous $\delta\phi$, ϕO . Joignons $\Pi\delta$; le rectangle sous δO , $O\phi$ sera égal au carré de $O\Pi$, et le rectangle sous $\delta\phi$, ϕO égal au carré de $\Pi\phi$; le carré de $O\Pi$ est donc plus petit que le double du carré de $\Pi\phi$. Mais le carré de $O\Pi$ est plus grand que le double du carré de $O\psi$; le carré de $\Pi\phi$ est donc plus grand que le carré de $O\psi$. Et puisque AO est égal à $A\Pi$, le carré de OA sera égal au carré de $A\Pi$. Mais les carrés des droites $O\psi$, ψA sont égaux au carré de OA , et les carrés des droites $\Pi\phi$, ϕA sont égaux au carré de $A\Pi$; les carrés des droites $O\psi$, ψA sont donc égaux aux carrés des droites $\Pi\phi$, ϕA . Mais le carré de $\Pi\phi$ est plus grand que le carré de $O\psi$; le carré restant de $A\psi$ est donc plus grand que le carré restant de $A\phi$; la droite ψA est donc plus grande que la droite $A\phi$; donc, à plus forte raison, la droite de ψA sera plus grande que la droite $A\eta$. Mais $A\psi$ est perpendiculaire au plan du quadrilatère $\Sigma O\Pi T$, et $A\eta$ est un rayon de la plus petite sphère; le quadrilatère $\Sigma O\Pi T$ ne touche donc pas la plus petite sphère. On démontrera semblablement que le quadrilatère $T\Pi P Y$, et le triangle $Y P Z$ ne touchent pas la plus petite sphère.

εὐθεῖα τῆς ΗΩ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ *KB recta ipsa ΗΩ. Et quoniam in circulo est*
 τετράπλευρον, καὶ εἶσιν ἴσαι αἱ ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, *BΚΣΟ quadrilaterum, et sunt æquales ΟΒ,*



καὶ ἐλάσσων ἢ ΟΣ· ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΟ γωνία· μείζων ἄρα ἢ ΒΟ τῆς ΒΨ. Ἀλλὰ *BΚ, ΚΣ, et minor ΟΣ; obtusus igitur est*
BΨΟ angulus; major igitur ΒΟ ipsa ΒΨ. Sed

puisque le quadrilatère ΒΚΣΟ est inscrit dans un cercle, que les droites ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ sont égales, et que la droite ΟΣ est plus petite que chacune de ces droites, l'angle ΒΨΟ sera obtus; la droite ΒΟ est donc plus grande que la droite ΒΨ. Mais

Perpendicularis a puncto A ad ΣΚΒΟ quadrilateri planum ducta intra hoc quadrilaterum eadit; Euclides hoc non demonstrat, quia hæc demonstratioⁿ illum de viâ suâ amovisset sine ullâ necessitate. Etenim ut ostendatur ΣΚΒΟ quadrilateri planum non tangere minorem sphaeram, tantummodo est ostendendum perpendicularem a puncto A ad ΣΚΒΟ quadrilateri planum ductam minorem esse rectâ ΑΗ.

La perpendiculaire menée du point A au plan du quadrilatère ΣΚΒΟ tombe en dedans de ce quadrilatère; Euclide n'en donne pas la démonstration, parce que cette démonstration aurait retardé sa marche sans nécessité. En effet, pour démontrer que le quadrilatère ΣΚΒΟ ne touche pas la plus petite sphère, il suffit de faire voir que la perpendiculaire menée du point A au plan du quadrilatère ΣΚΒΟ est plus petite que la droite ΑΗ.

τῆς ΒΟ μείζων ἐστίν² ἢ ΗΩ· πολλῶν ἄρα ἢ ΗΩ μείζων ἐστὶ³ τῆς ΒΨ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΩ τῇ ΑΒ, ἴσον ἄρα⁵ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΩ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΩ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΩ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ

ipsâ BO major est ipsa ΗΩ; multo igitur major est ΗΩ ipsâ ΒΨ; majus igitur et quadratum ex ΗΩ quadrato ex ΒΨ. Et quoniam æqualis est ΑΩ ipsi ΑΒ, æquale igitur et quadratum ex ΑΩ quadrato ex ΑΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΩ æqualia quadrata ex ΑΗ, ΗΩ, quadrato autem

ΗΩ est plus grand que ΒΟ; la droite ΗΩ est donc à plus forte raison plus grande que la droite ΒΨ; le quarré de ΗΩ est donc plus grand que le quarré de ΒΨ. Mais ΑΩ est égal à ΑΒ; le quarré de ΑΩ est donc égal au quarré de ΑΒ. Mais les quarrés des droites ΑΗ, ΗΩ sont égaux au quarré de la droite ΑΩ, et les quarrés

Ut cumque autem se res habeat, sic ostendere licet circuli centrum cadere intra ΣΚΒΟ quadrilaterum. Etenim si circuli centrum non caderet intra hoc quadrilaterum, caderet vel in unum laterum ipsius, vel intra unum segmentorum circuli, quorum bases sunt quadrilateri latera. Dico circuli centrum non cadere in unum laterum quadrilateri ΣΚΒΟ. Etenim si circuli centrum caderet in unum laterum hujus quadrilateri, hoc latus, existens circuli diameter, majus esset aliis quadrilateri lateribus, quod non ponitur; etenim ΣΚ, ΚΒ, ΒΟ latera inter se sunt æqualia, et latus ΣΟ minus est unoquoque ipsorum ΣΚ, ΚΒ, ΒΟ laterum. Dico rursus circuli centrum non cadere intra unum segmentorum circuli, quorum bases sunt ΣΚΒΟ quadrilateri latera. Etenim si circuli centrum intra unum horum segmentorum caderet, hoc segmentum semicirculo esset majus, et hujus segmenti basis major esset unoquoque reliquorum ΣΚΒΟ quadrilateri laterum; quod non ponitur. Similiter utique ostendetur circuli centrum cadere et intra reliqua quadrilatera et intra triangulum ΥΡΞ.

Quoi qu'il en soit, on peut démontrer ainsi que le centre du cercle tombe en dedans du quadrilatère ΣΚΒΟ. Car si le centre du cercle ne tombait pas en dedans de ce quadrilatère, il tomberait ou sur un de ses côtés, ou en dedans d'un des segments de cercle, qui ont pour bases les côtés de ce même quadrilatère. Je dis que le centre du cercle ne tombe pas sur un des côtés du quadrilatère ΣΚΒΟ; car si le centre du cercle tombait sur un des côtés de ce quadrilatère, ce côté, qui serait alors un diamètre du cercle, serait plus grand que chacun des autres côtés de ce même quadrilatère, ce qui n'est point, puisque les côtés ΣΚ, ΚΒ, ΒΟ sont égaux entre eux, et que le côté ΣΟ est plus petit que chacun des côtes ΣΚ, ΚΒ, ΒΟ. Je dis de plus que le centre du cercle ne tombe pas en dedans d'un des segments de cercle, qui ont pour bases les côtés du quadrilatère ΣΚΒΟ. Car si le centre du cercle tombait en dedans d'un de ces segments, ce segment serait plus grand qu'un demi-cercle, et la base de ce même segment serait plus grande que chacun des autres côtés du quadrilatère ΣΚΒΟ, ce qui n'est point. On démontrera semblablement que le centre du cercle tombe en dedans des autres quadrilatères et en dedans du triangle ΥΡΞ.

τῶν ΒΨ, ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΩ ἴσα
 ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς
 ΒΨ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΩ· λοιπὸν ἄρα
 τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ.
 μείζων ἄρα ἢ ΑΨ τῆς ΑΗ.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν
 εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγέ-
 γραπται, μὴ ψαῦδον τῆς ἐλάττονος σφαίρας
 κατὰ τὴν ἐπιπέδουσαν. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ex AB æqualia quadrata ex ΒΨ, ΨΑ ; quadrata
 igitur ex ΑΗ, ΗΩ æqualia sunt quadratis ex
 ΒΨ, ΨΑ, ex quibus quadratum ex ΒΨ minus
 est quadrato ex ΗΩ ; reliquum igitur quadratum
 ex ΨΑ majus est quadrato ex ΑΗ ; major igitur
 ΑΨ ipsâ ΑΗ.

Duabus igitur sphæris circa idem centrum
 existentibus , in majori sphærâ solidum po-
 lyedrum descriptum est, non tangens minorem
 sphæram secundum superficiem. Quod oportebat
 facere.

des droites ΒΨ, ΨΑ sont égaux au quarré de la droite ΑΒ ; les quarrés des droites
 ΑΗ, ΗΩ sont donc égaux aux quarrés des droites ΒΨ, ΨΑ ; mais le quarré de ΒΨ
 est plus petit que le quarré de ΗΩ ; le quarré restant de ΨΑ est donc plus grand
 que le quarré de ΑΗ ; la droite ΑΨ est donc plus grande que la droite ΑΗ.

Deux sphères concentriques étant données, on a donc décrit dans la plus grande
 un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère. Ce qu'il
 fallait faire.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εάν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῶν ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρα στερεῶν πολυέδρων ὅμοιον στερεὸν πολυέδρον ἐγγραφεῖ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. Διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ἰσοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἢ πυραμὶς ἀρα², ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κρυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρα ὁμοταγεῖ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμολογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμολογον πλευρὰν, τουτέστιν, ἢπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ³ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. Ομοίως δὲ⁴ καὶ ἐκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ⁵ κέντρον τὸ Α σφαίρα

COROLLARIUM.

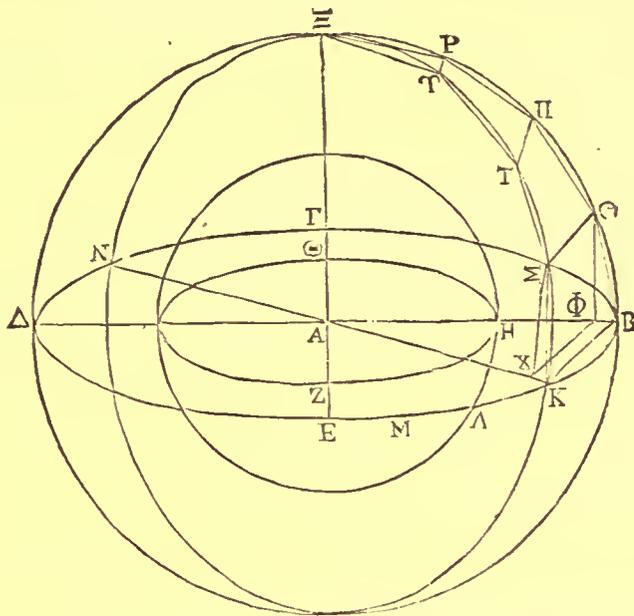
Si autem et in aliâ sphaerâ solido polyedro in ΒΓΔΕ sphaerâ simile solidum polyedrum describatur, solidum polyedrum in ΒΓΔΕ sphaerâ ad solidum polyedrum in alterâ sphaerâ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓΔΕ sphaeræ diameter ad alterius sphaeræ diametrum. Divisis enim solidis in pyramides numero æquales et ejusdem ordinis, erunt pyramides similes. Similes autem pyramides inter se in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum; pyramis igitur, cujus basis quidem est ΚΒΟΣ quadrilaterum, vertex autem Α punctum, ad pyramidem in alterâ sphaerâ ejusdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est ejus quam recta ΑΒ ex centro sphaeræ circa centrum Α ad rectam ex centro alterius sphaeræ. Similiter autem et unaquæque pyramis earum quæ sunt in sphaerâ circa centrum

COROLLAIRE.

Si l'on décrit dans une autre sphère un polyèdre semblable à celui qui est décrit dans la sphère ΒΓΔΕ, le polyèdre décrit dans la sphère ΒΓΔΕ aura avec le polyèdre décrit dans l'autre sphère une raison triplée de celle que le diamètre de la sphère ΒΓΔΕ a avec le diamètre de l'autre sphère. Car ayant divisé ces polyèdres en pyramides égales en nombre et du même ordre, on aura des pyramides semblables. Mais les pyramides semblables sont entre elles en raison triplée des côtés homologues (cor. 8. 12); la pyramide, qui a pour base le quadrilatère ΚΒΟΣ, et pour sommet le point Α, a donc avec la pyramide du même ordre de l'autre sphère une raison triplée de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue; c'est-à-dire, de celle que le rayon ΑΒ de la sphère qui a pour centre le point Α a avec le rayon de l'autre sphère. Semblablement chacune des pyramides de la sphère qui a pour centre le point Α aura avec chacune des pyramides du même

πρὸς ἐκάστην ἑμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἐτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἔξει ἢ περὶ ἢ AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐτέρας⁶ σφαίρας. Καὶ ὡς ἐν τῶν ἠγούμενων πρὸς ἐν τῶν ἐπιπέδων οὕτως ἅπαντα τὰ ἠγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπίμεινα.

A ad unamquamque ejusdem ordinis pyramidem earum quæ sunt in alterâ spherâ, triplicatam rationem habebit ejus quam AB ad rectam ex centro alterius spheræ. Et ut unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia



ὥστε καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον A σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἐτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔξει⁷ ἢ περὶ ἢ AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἢ περὶ ἢ BD διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἐτέρας σφαίρας διάμετρον. Ὁπερ ⁸δεῖ δεῖξαι.

antecedentia ad omnia consequentia; quare et totum iuspherâ circa centrum A solidum polyedrum ad totum in alterâ spherâ solidum polyedrum triplicatam rationem habebit ejus quam AB ad rectam ex centro alterius spheræ, hoc est ejus quam BD diameter ad alterius spheræ diametrum. Quod oportebat ostendere.

ordre comprise dans l'autre sphère une raison triplée de celle que le rayon AB a avec le rayon de l'autre sphère. Mais un des antécédents est à un des conséquents comme la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents (12. 5); le polyèdre entier compris dans la sphère qui a pour centre le point A a donc avec le polyèdre entier compris dans l'autre sphère une raison triplée de celle que le rayon AB a avec le rayon de l'autre sphère, c'est-à-dire de celle que le diamètre BD a avec le diamètre de l'autre sphère. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

PROPOSITIO XVIII.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν¹ σφαῖραι αἱ $ABΓ$, $ΔEZ$, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ $BΓ$, EZ . λέγω ὅτι ἡ $ABΓ$ σφαῖρα πρὸς τὴν $ΔEZ$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ .

Εἰ γὰρ μὴ ἡ $ABΓ$ σφαῖρα πρὸς τὴν $ΔEZ$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ ², ἔξει ἄρα ἡ $ABΓ$ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $ΔEZ$ σφαίρας ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον³ ἢ περ ἢ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ . Εἰδέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσοια τὴν $HΘK$, καὶ νενοήσθω ἡ $ΔEZ$ σφαῖρα⁴ τῇ $HΘK$ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν $ΔEZ$ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς $HΘK$ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράθω δὲ καὶ εἰς τὴν $ABΓ$ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ $ΔEZ$ σφαίρα στερεῷ πολύεδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον⁵. τὸ ἄρα ἐν τῇ $ABΓ$ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ $ΔEZ$ στερεὸν

Sphæræ inter se in triplicatâ ratione sunt suarum diametrorum.

Intelligentur sphæræ $ABΓ$, $ΔEZ$, diametri autem earum ipsæ $BΓ$, EZ ; dico $ABΓ$ sphæram ad $ΔEZ$ sphæram triplicatam rationem habere ejus quam $BΓ$ ad EZ .

Si enim non $ABΓ$ sphæra ad $ΔEZ$ sphæram triplicatam rationem habet ejus quam $BΓ$ ad EZ , habebit igitur $ABΓ$ sphæra ad quamdam minorem sphæram $ΔEZ$ vel ad majorem triplicatam rationem ejus quam $BΓ$ ad EZ . Habeat primum ad minorem $HΘK$, et intelligatur $ΔEZ$ sphæra circa idem centrum circa quod ipsa $HΘK$, et describatur in majori $ΔEZ$ sphæram solidum polyedrum non tangens minorem sphæram $HΘK$ secundum superficiem, describatur autem et in $ABΓ$ sphæram solido polyedro quod est in $ΔEZ$ simile solidum polyedrum; solidum igitur polyedrum in $ABΓ$ ad solidum polyedrum

PROPOSITION XVIII.

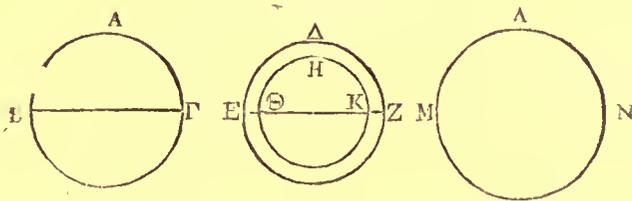
Les sphères sont entr'elles en raison triplée de leurs diamètres.

Concevons les sphères $ABΓ$, $ΔEZ$, dont les diamètres sont les droites $BΓ$, EZ ; je dis que la sphère $ABΓ$ a avec la sphère $ΔEZ$ une raison triplée de celle que $BΓ$ a avec EZ .

Car si la sphère $ABΓ$ n'a pas avec la sphère $ΔEZ$ une raison triplée de celle que $BΓ$ a avec EZ ; la sphère $ABΓ$ aura avec une sphère plus petite ou avec une sphère plus grande que la sphère $ΔEZ$ une raison triplée de celle que $BΓ$ a avec EZ . Que ce soit d'abord avec une sphère $HΘK$ plus petite; concevons la sphère $ΔEZ$ placée autour du même centre que la sphère $HΘK$; décrivons dans la plus grande sphère $ΔEZ$ un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère $HΘK$ (17. 12), et dans la sphère $ABΓ$ décrivons un polyèdre semblable à celui qui est décrit dans la sphère $ΔEZ$; le polyèdre décrit dans la sphère $ABΓ$ aura avec le polyèdre dé-

πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐχει δὲ καὶ⁵ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον⁶ ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαῖρα στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαῖρα στερεὸν πολύεδρον· ἐι ἀλλάξῃ ἄρα⁷ ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαῖρα στερεὸν πολύεδρον. Μείζων

in ΔΕΖ triplicatam habet rationem ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Habet autem et ΑΒΓ sphaera ad ΗΘΚ sphaeram triplicatam rationem ejus quam ΒΓ ad ΕΖ; est igitur ut ΑΒΓ sphaera ad ΗΘΚ sphaeram ita solidum polyedrum in ΑΒΓ sphaerâ ad solidum polyedrum in ΔΕΖ sphaerâ; permutando igitur ut ΑΒΓ sphaera ad polyedrum in ipsâ ita ΗΘΚ sphaera ad solidum polyedrum in ΔΕΖ sphaerâ.



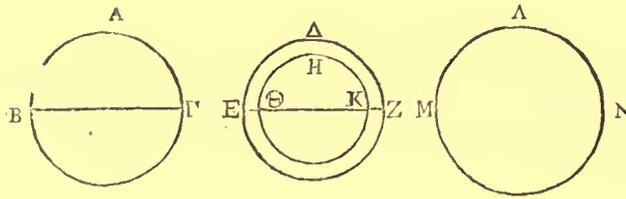
δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολύεδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαῖρα πολύεδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ἀπ' αὐτοῦ, ἔπερ ἀδύνατον⁸ οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα

Major autem ΑΒΓ sphaera polyedro quod est in ipsâ; major igitur et ΗΘΚ sphaera polyedro in ΔΕΖ sphaerâ. Sed et minor, comprehenditur enim ab ipso, quod impossibile; non igitur ΑΒΓ sphaera ad minorem sphaerâ ΔΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ diameter ad ΕΖ. Similiter utique ostendemus ne-

crit dans la sphère ΔΕΖ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ (eor. 17. 12). Mais la sphère ΑΒΓ a avec la sphère ΗΘΚ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ; la sphère ΑΒΓ est donc à la sphère ΗΘΚ eomme le polyèdre décrit dans la sphère ΑΒΓ est au polyèdre décrit dans la sphère ΔΕΖ (11. 5); done, par permutation, la sphère ΑΒΓ est au polyèdre décrit dans eette sphère eomme la sphère ΗΘΚ est au polyèdre décrit dans la sphère ΔΕΖ. Mais la sphère ΑΒΓ est plus grande que le polyèdre qui lui est inserit; la sphère ΗΘΚ est done plus grande que le polyèdre décrit dans la sphère ΔΕΖ. Mais elle est plus petite, car elle y est eomprise, ee qui est impossible; la sphère ΑΒΓ n'a done pas avec une sphère plus petite que la sphère ΔΕΖ une raison triplée de celle que le diamètre ΒΓ a avec ΕΖ. Nous démontrerons semblablement que la sphère ΔΕΖ n'a pas avec une sphère plus petite

πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΒΓ πρὸς

que ΔΕΖ sphaeram ad minorem sphaerá ΑΒΓ triplicatam habere rationem ejus quam ΕΖ ad ΒΓ. Dico etiam neque ΑΒΓ sphaeram ad quamdam majorem sphaerá ΔΕΖ triplicatam rationem habere



τὴν ΕΖ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΑΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΑΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. Ὡς δὲ ἡ ΑΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάττωτά τινα τῆς ΑΒΓ σφαῖρας, ἐπειδὴ ἢπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΜΝ τῆς ΔΕΖ, ὡς ἔμπροσθεν εἰδείχθη⁹· καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινά¹⁰ τῆς ΑΒΓ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινά¹¹ τῆς ΔΕΖ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει

ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Si enim possibile, habeat ad majorem ΑΜΝ; invertendo igitur ΑΜΝ sphaera ad ΑΒΓ sphaeram triplicatam rationem habet ejus quam diameter ΕΖ ad ΒΓ diametrum. Ut autem ΑΜΝ sphaera ad ΑΒΓ sphaeram ita ΔΕΖ sphaera ad quamdam minorem sphaerá ΑΒΓ, quoniam major est sphaera ΑΜΝ ipsá ΔΕΖ, ut antea demonstravimus; et ΔΕΖ igitur sphaera ad sphaeram quamdam minorem sphaerá ΑΒΓ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΖ ad ΒΓ, quod impossibile ostensum est; non igitur ΑΒΓ sphaera ad quamdam majorem sphaerá ΔΕΖ tri-

que la sphère ΑΒΓ une raison triplée de celle que ΕΖ a avec ΒΓ. Je dis de plus que la sphère ΑΒΓ n'a pas avec une sphère plus grande que la sphère ΔΕΖ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Car si cela se peut, que ce soit avec une sphère ΑΜΝ plus grande. Par inversion, la sphère ΑΜΝ aura avec la sphère ΑΒΓ une raison triplée de celle que le diamètre ΕΖ a avec le diamètre ΒΓ. Mais la sphère ΑΜΝ est à la sphère ΑΒΓ comme la sphère ΔΕΖ est à une sphère plus petite que la sphère ΑΒΓ, puisque la sphère ΑΜΝ est plus grande que la sphère ΔΕΖ, ainsi que cela a été démontré; la sphère ΔΕΖ a donc avec une sphère plus petite que la sphère ΑΒΓ une raison triplée de celle que ΕΖ a avec ΒΓ, ce qui a été démontré impossible; la sphère ΑΒΓ n'a donc pas avec une sphère plus grande que la sphère ΔΕΖ

ἢ περὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἢ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

plicatam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ostensum autem est neque ad minorem ; ergo ΑΒΓ sphæra ad ΔΕΖ sphæram triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais nous avons démontré que ce n'est pas non plus avec une sphère plus petite ; la sphère ΑΒΓ a donc avec la sphère ΔΕΖ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU DOUZIÈME LIVRE.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUSTERTIUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Εάν εὐθεία γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, τὸ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης'.

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ $A\Gamma$, καὶ ἐκτελέσθω ἐπ' εὐθείας

PROPOSITIO I.

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta fuerit, major portio assumens dimidiam totius quintuplum potest ipsius ex dimidiâ totius.

Recta enim linea AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ puneto, et sit $A\Gamma$ major portio, et produatur in directum ipsi $A\Gamma$ recta AD ,

LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, le carré du plus grand segment augmenté de la moitié de la droite entière, est égal au quintuple du carré de la moitié de la droite entière.

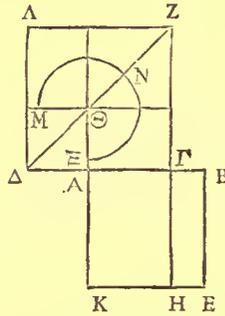
Que la ligne droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ , et que $A\Gamma$ soit le plus grand segment; menons la droite AD dans la direction de

τῆς $ΑΓ^2$ εὐθείᾳ ἢ $ΑΔ$, καὶ κείσθω τῆς³ $ΑΒ$ ἡμίσεια ἢ $ΑΔ$. λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΑ$.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν $ΑΒ, ΔΓ$ τετραγωναί τὰ $ΑΕ, ΔΖ$, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ $ΔΖ$ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ $ΖΓ$ ἐπὶ τὸ $Η$. Καὶ ἐπεὶ ἡ $ΑΒ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται

et ponatur $ΑΔ$ ipsius $ΑΒ$ dimidia; dico quintuplum esse quadratum ex $ΓΔ$ quadrati ex $ΔΑ$.

Describantur enim ex $ΑΒ, ΔΓ$ quadrata $ΑΕ, ΔΖ$, et describatur figura in $ΔΖ$, et producaturs $ΖΓ$ ad $Η$. Et quoniam $ΑΒ$ extremâ et mediâ ratione secatur in $Γ$; ipsum igitur sub $ΑΒ, ΒΓ$



κατὰ τὸ $Γ$ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ τὸ $ΓΕ$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τὸ $ΖΘ$. ἴσον ἄρα τὸ $ΓΕ$ τῷ $ΖΘ$. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ τῆς $ΑΔ$, ἴση δὲ ἡ μὲν $ΒΑ$ τῇ $ΚΑ$, ἡ δὲ $ΑΔ$ τῇ $ΑΘ$. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ $ΚΑ$ τῆς $ΑΘ$. Ὡς δὲ ἡ $ΚΑ$ πρὸς τὴν $ΑΘ$ οὕτως τὸ $ΚΓ$ πρὸς τὸ $ΓΘ$. διπλασίον ἄρα τὸ $ΚΓ$ τοῦ $ΓΘ$. Εἰσὶ δὲ καὶ τὰ $ΛΘ, ΘΓ$ τοῦ $ΓΘ$ διπλασίονα. ἴσον ἄρα τὸ $ΚΓ$ τοῖς $ΛΘ, ΘΓ$. Εδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΓΕ$ τῷ $ΖΘ$ ἴσον⁸. ὅλον ἄρα τὸ $ΑΕ$ τετραγώνων

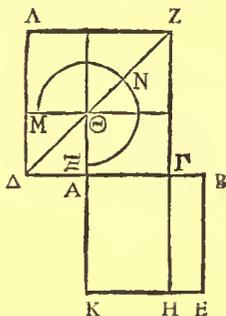
æquale est ipsi ex $ΑΓ$. Et est quidem ipsum sub $ΑΒ, ΒΓ$ ipsum $ΓΕ$, ipsum autem ex $ΑΓ$ ipsum $ΖΘ$; æquale igitur $ΓΕ$ ipsi $ΖΘ$. Et quoniam dupla est $ΒΑ$ ipsius $ΑΔ$, sed æqualis quidem $ΒΑ$ ipsi $ΚΑ$, ipsa vero $ΑΔ$ ipsi $ΑΘ$; dupla igitur et $ΚΑ$ ipsius $ΑΘ$. Ut autem $ΚΑ$ ad $ΑΘ$ ita $ΚΓ$ ad $ΓΘ$; duplum igitur $ΚΓ$ ipsius $ΓΘ$. Sunt autem et $ΛΘ, ΘΓ$ ipsius $ΓΘ$ dupla; æquale igitur $ΚΓ$ ipsis $ΛΘ, ΘΓ$. Ostensum autem est et $ΓΕ$ æquale ipsi $ΖΘ$; to-

$ΑΓ$, et faisons $ΑΔ$ égal à la moitié de $ΑΒ$; je dis que le carré de $ΓΔ$ est quintuple du carré de $ΔΑ$.

Car décrivons avec les droites $ΑΒ, ΔΓ$ les carrés $ΑΕ, ΔΖ$; achevons la figure dans $ΔΖ$, et prolongeons $ΖΓ$ vers le point $Η$. Puisque la droite $ΑΒ$ est coupée en extrême et moyenne raison au point $Γ$, le rectangle sous $ΑΒ, ΒΓ$ est égal au carré de $ΑΓ$ (déf. 3 et 17. 6). Mais le rectangle sous $ΑΒ, ΒΓ$ est égal à $ΓΕ$, et le carré de $ΑΓ$ est égal à $ΖΘ$; le rectangle $ΓΕ$ est donc égal à $ΖΘ$. Et puisque $ΒΑ$ est double de $ΑΔ$; que $ΒΑ$ est égal à $ΚΑ$, et $ΑΔ$ égal à $ΑΘ$, la droite $ΚΑ$ sera double de $ΑΘ$. Mais $ΚΑ$ est à $ΑΘ$ comme $ΚΓ$ est à $ΓΘ$ (1. 6); le rectangle $ΚΓ$ est donc double de $ΓΘ$. Mais les surfaces $ΛΘ, ΘΓ$ sont doubles de $ΓΘ$ (43. 1); $ΚΓ$ est donc égal aux surfaces $ΛΘ, ΘΓ$ (43. 1). Mais on a démontré que $ΓΕ$ est égal à $ΖΘ$; le carré entier

ἴσον ἐστὶ τῷ $MNΞ$ γνόμονι. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἢ BA τῆς AD , τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AD , τουτέστι τὸ AE τοῦ $\Delta\Theta$. Ἴσον δὲ τὸ AE τῷ $MNΞ$ γνόμονι, καὶ ὁ $MNΞ$

tum igitur AE quadratum æquale est gnomoni $MNΞ$. Et quoniam dupla est BA ipsius AD , quadruplum est quadratum ex BA quadrati ex AD , hoc est AE ipsius $\Delta\Theta$. Æquale autem AE gnomoni



ἄρα ὁ γνόμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ $\Delta\Theta$ ὅλον ἄρα τὸ ΔZ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ $\Delta\Theta$. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔZ τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$, τὸ δὲ $\Theta\Delta$ τὸ ἀπὸ τῆς ΔA . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA .

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

$MNΞ$; et $MNΞ$ igitur gnomon quadruplus est ipsius $\Delta\Theta$; totum igitur ΔZ quintuplum est ipsius $\Delta\Theta$. Et est ΔZ quidem ipsum ex $\Delta\Gamma$, ipsum vero $\Theta\Delta$ ipsum ex ΔA ; quadratum igitur ex $\Gamma\Delta$ quintuplum est quadrati ex ΔA .

Si igitur recta, etc.

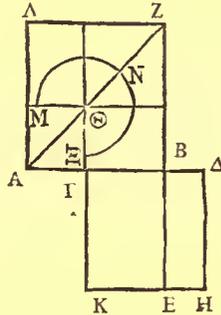
AE est donc égal au gnomon $MNΞ$. Mais BA est double de AD ; le carré de BA est donc quadruple du carré de AD (20. 6), c'est-à-dire que AE est quadruple de $\Delta\Theta$. Mais AE est égal au gnomon $MNΞ$; le gnomon $MNΞ$ est donc quadruple de $\Delta\Theta$; le carré entier ΔZ est donc quintuple de $\Delta\Theta$. Mais ΔZ est le carré de $\Delta\Gamma$, et $\Theta\Delta$ le carré de ΔA ; le carré de $\Gamma\Delta$ est donc quintuple du carré de ΔA . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

PROPOSITIO II.

Εάν εὐθεία γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης· τὸ μείζον τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Si recta linea partis suæ quintuplum possit, duplum autem dictæ partis extremâ et mediâ ratione secetur; major portio reliqua pars est rectæ a principio.



Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB τμήματος ἑαυτῆς τοῦ AG πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ AG διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΓΒ.

Recta enim linea AB partis suæ AG quintuplum possit, et ipsius AG dupla sit ΓΔ; dico, ipsius ΓΔ extremâ et mediâ ratione sectæ, portionem majorem esse ΓΒ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν AB, ΓΔ τετράγωνα τὰ AZ, ΓH, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ AZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ZB ἐπὶ τὸ E³. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AG πενταπλάσιόν ἐστι τὸ AZ τοῦ AΘ,

Describantur enim ex utraq̃ue ipsarum AB, ΓΔ quadrata AZ, ΓH, et describatur figura in AZ, et producat̃ur ZB ad E. Et quoniam quintuplum est ipsum ex BA ipsius ex AG, quintuplum est AZ ipsius AΘ; quadruplus igitur

PROPOSITION II.

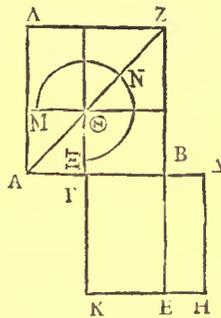
Si le carré d'une ligne droite est égal au quintuple du carré d'un de ses segments, et si le double de ce segment est coupé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est la partie restante de la droite premièrement exposée.

Que le carré de la droite AB soit égal au quintuple du carré de son segment AG, et que ΓΔ soit double de AG; je dis que si la droite ΓΔ est coupée en extrême et moyenne raison, la droite ΓΒ sera son plus grand segment.

Car décrivons avec les droites AB, ΓΔ, les carrés AZ, ΓH; achevons la figure dans AZ, et prolongeons ZB vers le point E. Puisque le carré de BA est quintuple du carré de AG, la surface AZ sera quintuple de AΘ; le gnomon MNΞ est donc

τετραπλάσιος⁵ ἄρα ὁ ΜΝΞ γνόμων τοῦ ΑΘ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ⁶, τουτέστι τὸ ΓΗ τοῦ ΑΘ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνόμων τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνόμων τῷ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ· διπλῆ ἄρα

MNΞ gnomon ipsius ΑΘ. Et quoniam dupla est ΔΓ ipsius ΓΑ, quadruplum igitur est ipsum ex ΔΓ ipsius ex ΓΑ, hoc est ΓΗ ipsius ΑΘ. Ostensus est autem et MNΞ gnomon quadruplus ipsius ΑΘ; æqualis igitur MNΞ gnomon ipsi ΓΗ. Et quoniam dupla est ΔΓ ipsius ΓΑ, sed æqualis quidem ΔΓ ipsi ΓΚ, ipsa vero



καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. Εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΒΘ τοῦ ΒΘ διπλάσια⁷. ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΑΘ, ΒΘ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνόμων ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ τῷ ΒΗ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ, ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ, τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ

ΑΓ ipsi ΓΘ; dupla igitur et ΚΓ ipsius ΓΘ; duplum igitur et ΚΒ ipsius ΒΘ. Sunt autem et ipsa ΑΘ, ΒΘ ipsius ΒΘ dupla; æquale igitur ΚΒ ipsis ΑΘ, ΒΘ. Ostensus est autem et totus MNΞ gnomon toti ΓΗ æqualis; et reliquum igitur ΘΖ ipsi ΒΗ est æquale. Et est quidem ΒΗ ipsum sub ΓΔ, ΔΒ, æqualis enim ipsa ΓΔ ipsi ΔΗ, ipsum ΘΖ vero ipsum ex ΒΓ; ipsum igitur sub ΓΔ, ΔΒ æquale est ipsi ex ΓΒ; est igitur ut ΔΓ ad ΓΒ ita ΓΒ ad ΒΔ. Major autem ΔΓ ipsa ΓΒ;

quadruple de ΑΘ. Mais ΔΓ est double de ΓΑ, le carré de ΔΓ est donc quadruple du carré de ΓΑ (20. 6), c'est-à-dire que ΓΗ est quadruple de ΑΘ. Mais on a démontré que le gnomon ΜΝΞ est quadruple de ΑΘ; le gnomon ΜΝΞ est donc égal à ΓΗ. Et puisque ΔΓ est double de ΓΑ, que ΔΓ est égal à ΓΚ, et ΑΓ égal à ΓΘ; la droite ΚΓ sera double de ΓΘ; le rectangle ΚΒ est donc double de ΒΘ. Mais les rectangles ΑΘ, ΒΘ pris ensemble sont doubles de ΒΘ (45. 11); le rectangle ΚΒ est donc égal aux rectangles ΑΘ, ΒΘ. Mais on a démontré que le gnomon entier ΜΝΞ est égal au rectangle entier ΓΗ; le carré restant ΘΖ est donc égal à ΒΗ. Mais ΒΗ est le rectangle sous ΓΔ, ΔΒ, car ΓΔ est égal à ΔΗ, et ΘΖ est le carré de ΒΓ; le rectangle sous ΓΔ, ΔΒ est donc égal au carré de ΒΓ; la droite ΔΓ est donc à ΒΓ comme ΒΓ est à ΒΔ (17. 6). Mais ΔΓ est plus grand que ΒΓ; la droite ΒΓ est

ἢ ΓΒ τῆς ΒΔ. Τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἢ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεία, καὶ τὰ ἐξῆς.

A H M M A.

Οτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΓΑ¹. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ². πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ². ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ². τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον³. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ-διπλασίον ἐστὶ³ τῆς ΓΑ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάττων τῆς ΒΓ διπλασίον⁴ ἐστὶ τῆς ΓΑ, πολλῶ γὰρ μείζον⁵ τὸ ἄτοπον. ἢ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ. Ὅπερ εἶδει δείξαι.

Major igitur et ΓΒ ipsâ ΒΔ. Rectæ igitur ΓΔ extremâ et mediâ ratione sectæ major portio est ipsa ΓΒ.

Si igitur recta, etc.

LEMMA.

Duplam autem ipsius ΑΓ majorem esse quam ΓΒ, sic ostendendum est.

Si enim non, sit, si possibile, ipsa ΒΓ dupla ipsius ΓΑ; quadruplum igitur quadratum ex ΒΓ quadrati ex ΓΑ; quintupla igitur quadrata ex ipsis ΒΓ, ΓΑ quadrati ex ΓΑ. Ponitur autem et quadratum ex ΒΑ quintuplum quadrati ex ΓΑ; quadratum igitur ex ΒΑ æquale est quadratis ex ipsis ΒΓ, ΓΑ, quod impossibile; non igitur ΒΓ dupla est ipsius ΓΑ. Similiter utique demonstrabimus neque minorem quam ΒΓ duplam esse ipsius ΓΑ; multo enim majus absurdum; ergo ipsius ΑΓ dupla major est quam ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

donc plus grande que ΒΔ. Si donc la droite ΓΔ est coupée en extrême et moyenne raison, la droite ΓΒ sera le plus grand segment. Donc, etc.

L E M M E.

On démontrera, de la manière suivante, que le double de ΑΓ est plus grand que ΓΒ.

Car que cela ne soit point, si cela est possible, et que ΒΓ soit double de ΓΑ; le carré de ΒΓ sera quadruple du carré de ΓΑ; les carrés des droites ΒΓ, ΓΑ pris ensemble seront donc quintuples du carré de ΓΑ. Mais on a supposé que le carré de ΒΑ est aussi quintuple du carré de ΓΑ; le carré de ΒΑ est donc égal aux carrés des droites ΒΓ, ΓΑ, ce qui est impossible (4. 2); la droite ΒΓ n'est pas double de ΓΑ. Nous démontrerons semblablement qu'une droite plus petite que ΒΓ n'est pas double de ΓΑ, car l'absurdité serait encore plus grande; le double de ΑΓ est donc plus grand que ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ· τὸ ἔλασσον τμήμα, προσλαβὼν τὴν ἡμισίαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἢ AG , καὶ τετμήσθω AG δίχα κατὰ τὸ Δ . λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AE , καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν² τὸ σχῆμα. Καὶ³ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἢ AG τῆς $\Gamma\Delta$. τετραπλάσιον ἄρα⁴ τὸ ἀπὸ τῆς AG τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$, τυτέστι τὸ $P\Sigma$ τοῦ ZH . Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG , καὶ ἔστι τὸ μὲν⁵ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τὸ ΓE , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG τὸ $P\Sigma$ ⁶. τὸ ἄρα ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ $P\Sigma$. Τετραπλάσιον δὲ τὸ $P\Sigma$ τοῦ ZH . τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓE

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta fuerit; minor portio, assumens dimidiam majoris portionis, quintuplum potest quadrati ex dimidiâ majoris portionis.

Recta enim quævis AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ puncto, et sit major portio AG , et secetur AG bifariam in Δ ; dico quintuplum esse quadratum ex BA quadrati ex $\Delta\Gamma$.

Describatur enim ex AB quadratum AE , et compleatur dupla figura. Et quoniam dupla est AG ipsius $\Gamma\Delta$; quadruplum igitur ipsum ex AG ipsius ex $\Gamma\Delta$, hoc est $P\Sigma$ ipsius ZH . Et quoniam rectangulum sub AB , $B\Gamma$ æquale est quadrato ex AG , et est rectangulum quidem sub AB , $B\Gamma$ ipsum ΓE , quadratum vero ex AG ipsum $P\Sigma$; ergo ΓE æquale est ipsi $P\Sigma$. Quadruplum autem $P\Sigma$ ipsius ZH ; quadruplum igitur et ΓE

PROPOSITION III.

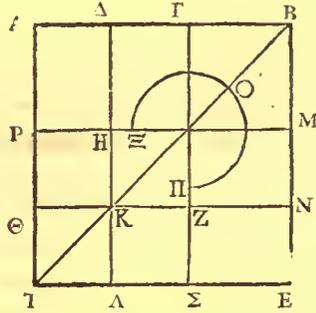
Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison; le carré du plus petit segment, augmenté de la moitié du plus grand segment, est égal au quintuple du carré de la moitié du plus grand segment.

Qu'une droite quelconque AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ , que AG soit le plus grand segment, et coupons AG en deux parties égales au point Δ ; je dis que le carré de BA est quintuple du carré de $\Delta\Gamma$.

Car décrivons avec AB le carré AE , et construisons une double figure. Puisque AG est double de $\Gamma\Delta$, le carré de AG est quadruple du carré de $\Gamma\Delta$, c'est-à-dire que $P\Sigma$ est quadruple de ZH . Et puisque le rectangle sous AB , $B\Gamma$ est égal au carré de AG (17. 6), que le rectangle sous AB , $B\Gamma$ est ΓE , et que le carré de AG est $P\Sigma$, le rectangle ΓE sera égal à $P\Sigma$. Mais $P\Sigma$ est quadruple de ZH ; le rectangle ΓE est

τοῦ ΖΗ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ· ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνω· ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσ- κείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ΞΟΗ γνῶμων ἴσος ἐστὶ τῷ

ipsius ΖΗ. Rursus quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΔΓ, æqualis est et ΘΚ ipsi ΚΖ; quare et ΗΖ quadratum æquale est quadrato ΘΛ; æqualis igitur ΗΚ ipsi ΚΛ, hoc est ΜΝ ipsi ΝΕ; quare et ΜΖ ipsi ΖΕ est æquale. Sed ΜΖ ipsi ΓΗ est æquale; et ΓΗ igitur ipsi ΖΕ est æquale. Commune apponatur ipsum ΓΝ; gnomon igitur ΞΟΠ æqualis est rectangulo



ΓΕ. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα⁸ γνῶμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου· ὁ ΞΟΠ ἄρα γνῶμων καὶ τὸ ΖΗ τετραγώνων πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΗ. Ἀλλ' ὁ ΞΟΠ γνῶμων καὶ τὸ ΖΗ τετραγώνον ἐστὶ τὸ ΔΝ⁹· καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

ΓΕ. Sed ΓΕ quadruplum ostensum est ipsius ΗΖ; et ΞΟΠ igitur gnomon quadruplus est ΖΗ quadrati; ergo ΞΟΠ gnomon et ΖΗ quadratum quintuplum est ipsius ΖΗ. Sed ΞΟΠ gnomon et ΖΗ quadratum sunt ipsum ΔΝ; et est quidem ΔΝ quadratum ex ΔΒ; ipsum vero ΗΖ quadratum ex ΔΓ; quadratum igitur ex ΔΒ quintuplum est quadrati ex ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

donc quadruple de ΖΗ. De plus, puisque ΑΔ est égal à ΔΓ, et ΘΚ égal à ΚΖ (4. 1), le carré ΗΖ sera égal au carré ΘΛ; la droite ΗΚ est donc égale à ΚΛ, c'est-à-dire ΜΝ égal à ΝΕ. Le rectangle ΜΖ est donc égal au rectangle ΖΕ (36. 1). Mais le rectangle ΜΖ est égal à ΓΗ (43. 1); le rectangle ΓΗ est donc égal à ΖΕ. Ajoutons le rectangle commun ΓΝ; le gnomon ΞΟΠ sera égal à ΓΕ. Mais on a démontré que ΓΕ est quadruple de ΖΗ; le gnomon ΞΟΠ est donc quadruple du carré de ΖΗ; le gnomon ΞΟΠ conjointement avec le carré ΖΗ est donc quintuple du carré de ΖΗ. Mais le gnomon ΞΟΠ avec le carré ΖΗ forment le carré ΔΝ, et ΔΝ est le carré de ΔΒ, et ΗΖ est le carré de ΔΓ; le carré de ΔΒ est donc quintuple du carré de ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἀπὸ τῆς ὀλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα, τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετράγωνου.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ AG . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς GA .

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ADEB$, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , καὶ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ AG . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τὸ AK , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG τὸ ΘH . ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK τῷ ΘH . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AZ τῷ ZE , κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΓΚ$. ὅλον ἄρα τὸ AK ὅλον τῷ $ΓΕ$ ἐστὶν ἴσον. τὰ ἄρα AK , $ΓΕ$ τοῦ AK ἐστὶ διπλάσια. Ἀλλὰ τὰ AK , $ΓΕ$ ὁ ΔMN γνόμων ἐστὶ καὶ τὸ $ΓΚ$ τετράγωνον.

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta fuerit; ipsa ex totâ et minore portione, utraque simul quadrata, tripla sunt quadrati ex majori portione.

Sit recta AB , et secetur extremâ et mediâ ratione in Γ , et sit major portio AG ; dico ipsa ex AB , $B\Gamma$ tripla esse ipsius ex AG .

Describatur enim ex AB quadratum $ADEB$; et compleatur figura. Quoniam igitur AB extremâ et mediâ ratione secta est in Γ , et major portio est AG ; rectangulum igitur sub AB , $B\Gamma$ æquale est quadrato ex AG . Et est quidem rectangulum sub AB , $B\Gamma$ ipsum AK , quadratum autem ex AG ipsum ΘH ; æquale igitur est AK ipsi ΘH . Et quoniam æquale est ipsum AZ ipsi ZE , commune apponatur ipsum $ΓΚ$; totum igitur AK toti $ΓΕ$ est æquale; ipsa igitur AK , $ΓΕ$ ipsius AK sunt dupla. Sed ipsa AK , $ΓΕ$ ipse ΔMN guomon

PROPOSITION IV.

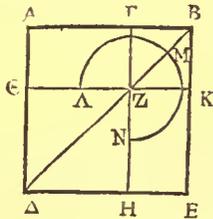
Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, le carré de la droite entière, conjointement avec le carré du plus petit segment, est triple du carré du plus grand segment.

Soit la droite AB ; qu'elle soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ , et que AG soit le plus grand segment; je dis que le carré de la droite AB , conjointement avec le carré de $B\Gamma$, est triple du carré de GA .

Car décrivons avec AB le carré $ADEB$, et complétons la figure. Puisque AB est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ , et que AG est le plus grand segment, le rectangle sous AB , $B\Gamma$ sera égal au carré de AG (17. 6). Mais le rectangle sous AB , $B\Gamma$ est AK , et le carré de AG est ΘH ; le rectangle AK est donc égal à ΘH . Et puisque AZ est égal à ZE (43. 1), ajoutons le carré commun $ΓΚ$; le rectangle entier AK sera égal au rectangle entier $ΓΕ$; le rectangle AK , conjointement avec $ΓΕ$, est donc double de AK . Mais les rectangles AK , $ΓΕ$ contiennent le gnomon

ὁ ἄρα ΛMN γνόμων καὶ τὸ ΓK τετράγωνον δι-
 πλάσιά ἐστι τοῦ ΘK . Ἀλλὰ μὲν καὶ τὸ ΔK τῶ
 ΘH εἰδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛMN γνόμων, καὶ τὸ
 ΓK τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘH · ὥστε καὶ
 ὁ ΛMN γνόμων καὶ τὰ ΓK , ΘH τετράγωνα τρι-

sunt et ΓK quadratum ; gnomon igitur ΛMN
 et quadratum ΓK dupla sunt ipsius ΘK . At vero
 et ipsum ΔK ipsi ΘH ostensum est æquale ; ergo
 ΛMN gnomon, et ΓK quadratum dupla sunt ip-
 sius ΘH ; quare et ΛMN gnomon et ΓK , ΘH qua-



πλάσιά ἐστι τοῦ ΘH τετραγώνου. Καὶ ἴστιν ὁ
 μὲν ΛMN γνόμων καὶ τὰ ΓK , ΘH τετράγωνα,
 ὅλον τὸ ΔE καὶ τὸ ΓK , ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν
 AB , BF τετράγωνα, τὸ δὲ $H\Theta$ τὸ ἀπὸ τῆς AF
 τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , BF τετρά-
 γωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AF τετρά-
 γωνου. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

drata tripla sunt quadrati ΘH . Et sunt quidem
 ΛMN gnomon et ΓK , ΘH quadrata, totum ΔE
 et ΓK , quæ sunt ex ipsis AB , BF quadrata,
 ipsum autem $H\Theta$ ipsum ex AF quadratum ;
 quadrata igitur ex AB , BF tripla sunt qua-
 drati ex AF . Quod oportebat ostendere.

ΛMN et le quarré ΓK ; le gnomon ΛMN , conjointement avec le quarré ΓK , est donc double du rectangle ΔK . Mais on a démontré que ΔK est égal à ΘH ; le gnomon ΛMN , conjointement avec le quarré ΓK , est donc double de ΘH ; le gnomon ΛMN , conjointement avec les quarrés ΓK , ΘH , est donc triple du quarré ΘH . Mais le gnomon ΛMN , conjointement avec les quarrés ΓK , ΘH , est le quarré entier ΔE conjointement avec ΓK . Mais ΔE , ΓK sont les quarrés des droites AB , BF , et $H\Theta$ est le quarré de AF ; le quarré de AB , conjointement avec le quarré de BF , est donc triple du quarré de AF . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Εάν εὐθεία γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, καὶ προστεθῆ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι· ἢ ὅλη εὐθεία ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεία.

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον³, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἢ AG , καὶ τῇ AG ἴση κείσθω ἢ AD . λέγω ὅτι ἢ DB εὐθεία ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεία ἢ AB .

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AE , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν⁵ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς⁶ AG . Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν⁷ AB , $B\Gamma$ τὸ GE , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG τὸ $G\Theta$, ἴσον ἄρα τὸ GE τῷ $G\Theta$. Ἀλλὰ τῷ μὲν GE ἴσον ἐστὶ τὸ $E\Theta$, τῷ δὲ $\Theta\Gamma$ ἴσον τὸ $\Delta\Theta$ ⁸· καὶ τὸ $\Delta\Theta$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE . Κοινὸν

PROPOSITIO V.

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta fuerit, et adjiciatur ipsi æqualis majori portioni; tota recta extremâ et mediâ ratione secta est, et major portio est ipsa a principio recta.

Recta enim linea AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ puncto, et sit AG major portio, et ipsi AG æqualis ponatur AD ; dico DB rectam extremâ et mediâ ratione secari in puncto A , et majorem portionem esse a principio rectam AB .

Describatur enim ex AB quadratum AE , et compleatur figura. Quoniam igitur AB extremâ et mediâ ratione secta est in Γ , ipsum igitur sub AB , $B\Gamma$ æquale est ipsi ex AG . Et est quidem ipsi sub AB , $B\Gamma$ ipsum GE ; ipsum vero ex AG ipsum $G\Theta$; æquale igitur GE ipsi $G\Theta$. Sed ipsi GE quidem æquale est $E\Theta$, ipsi vero $\Theta\Gamma$ æquale ipsum $\Delta\Theta$; et

PROPOSITION V.

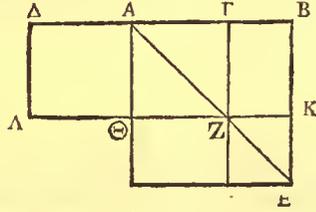
Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, et si on lui ajoute une droite égale au plus grand segment, la droite entière sera coupée en extrême et moyenne raison, et le plus grand segment sera la droite premièrement exposée.

Que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ , que AG soit le plus grand segment, et faisons AD égal à AG ; je dis que la droite DA est coupée en extrême et moyenne raison au point A , et que la droite AB premièrement exposée est le plus grand segment.

Car décrivons avec AB le carré AE , et achevons la figure. Puisque AB est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ , le rectangle sous AB , $B\Gamma$ sera égal au carré de AG (17. 6). Mais le rectangle sous AB , $B\Gamma$ est GE , et le carré de AG est $G\Theta$; le rectangle GE est donc égal à $G\Theta$. Mais $E\Theta$ est égal à GE , et $\Delta\Theta$ à

προκεισθω τὸ ΘB ὅλον ἄρα τὸ ΔK ὅλον τῶν ΔE
 ἴστιν ἴσον. Καὶ ἴστι τὸ μὲν ΔK τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$,
 ΔA , ἴση γὰρ ἡ ΔA τῇ $\Delta\Lambda$, τὸ δὲ ΔE τὸ ἀπὸ τῆς
 AB τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $B\Delta$, ΔA ἴσον ἴστι τῶν ἀπὸ

$\Delta\Theta$ igitur æquale est ipsi ΘE . Commune apponatur
 ΘB ; totum igitur ΔK toti ΔE est æquale. Et est ΔK
 quidem ipsum sub $B\Delta$, ΔA , æqualis enim ΔA ipsi
 $\Delta\Lambda$, ipsum autem ΔE ipsum ex AB ; ipsum igitur



τῆς AB ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BA οὕτως ἡ
 BA πρὸς τὴν ΔA . Μείζων δὲ ἡ ΔB τῆς BA · μεί-
 ζων ἄρα καὶ ἡ BA τῆς ΔA · ἡ ἄρα ΔB ἄκρον καὶ
 μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μεί-
 ζον τμήμα ἴστιν ἡ AB . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

sub $B\Delta$, ΔA æquale est ipsi ex AB ; est igitur
 ut ΔB ad BA ita BA ad ΔA . Major autem ΔB
 quam BA ; major igitur et BA quam ΔA ; ergo
 ΔB extremâ et mediâ ratione secta est in A ,
 et major portio est AB . Quod oportebat os-
 tendere.

$\Theta\Gamma$ (4. 1); le carré $\Delta\Theta$ est donc égal à ΘE . Ajoutons le rectangle commun ΘB ; le rectangle entier ΔK sera égal au carré entier ΔE . Mais ΔK est le rectangle sous $B\Delta$, ΔA , car ΔA est égal à $\Delta\Lambda$, et ΔE est le carré de AB ; le rectangle sous $B\Delta$, ΔA est donc égal au carré de AB ; la droite ΔB est donc à la droite BA comme BA est à ΔA (17. 6.) Mais ΔB est plus grand que BA ; la droite BA est donc plus grande que la droite ΔA ; la droite ΔB est donc coupée en extrême et moyenne raison au point A , et AB est le plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

Α Λ Λ Ω Σ'.

ALITER.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, ἔσται ὡς συναμφοτέρος ἢ ὅλη καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν ὅλην οὕτως ἢ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ AG . λέγω ὅτι ἔστιν ὡς συναμφοτέρος ἢ $BA\Gamma$ πρὸς τὴν BA οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG .

Κείσθω γὰρ τῇ AG ἴση ἢ AD . λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἢ ΔB πρὸς τὴν BA οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG . Ἐπεὶ γὰρ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , καὶ μείζον τμήμα ἔστι τὸ AG . ἔστιν ἄρα ὡς ἢ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἢ AG πρὸς τὴν GB . Ἴση δὲ ἢ AG τῇ AD . ἔστιν ἄρα ὡς ἢ BA πρὸς τὴν AD οὕτως ἢ AG πρὸς τὴν GB . ἀνάπαλιν ἄρα ἔστιν ὡς ἢ ΔA πρὸς τὴν AB οὕτως ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν GA . συνθέντι ἄρα ἔστιν ὡς ἢ ΔB πρὸς τὴν BA οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG . Ἴση δὲ ἔστιν ἢ ΔA τῇ AG . ἔστιν ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἢ $BA\Gamma$ πρὸς τὴν BA οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG . Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta fuerit, erit ut utraque simul tota et major portio ad totam ita tota ad majorem portionem.

Recta enim quædam AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ , et sit major portio AG ; dico esse ut utraque simul $BA\Gamma$ ad BA ita BA ad AG .

Ponatur enim ipsi AG æqualis AD ; dico esse ut ΔB ad BA ita BA ad AG . Quoniam enim AB extremâ et mediâ ratione secatur in Γ , et major portio est AG ; est igitur ut BA ad AG ita AG ad GB . Æqualis autem AG ipsi AD ; est igitur ut BA ad AD ita AG ad GB ; invertendo igitur est ut ΔA ad AB ita $B\Gamma$ ad GA ; componendo igitur est ut ΔB ad BA ita BA ad AG . Æqualis autem est ΔA ipsi AG ; est igitur ut utraque simul $BA\Gamma$ ad BA ita BA ad AG . Et quoniam

AUTREMENT.

Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, la droite entière, conjointement avec le plus grand segment, sera à la droite entière comme la droite entière est au plus grand segment.

Qu'une droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ , et que AG en soit le plus grand segment; je dis que les droites BA , AG , prises ensemble, sont à BA comme BA est à AG .

Car faisons AD égal à AG ; je dis que ΔB est à BA comme BA est à AG ; car puisque AB est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ , et que AG est le plus grand segment, BA sera à AG comme AG est à GB (17.6). Mais AG est égal à AD ; la droite BA est donc à AD comme AG est à GB ; donc, par inversion, ΔA est à AB comme $B\Gamma$ est à GA ; donc, par addition, ΔB est à BA comme BA est à AG . Mais ΔA est égal à AG ; les droites BA , AG , prises ensemble, sont donc à BA comme BA est à AG .

ἢ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἴση δὲ ἢ ΑΓτῆ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ostensum est ut ΔΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΓ; æqualis autem ΑΓ ipsi ΑΔ; est igitur ut ΔΒ ad ΒΑ



ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἡ ΔΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἔστιν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἢ ΑΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ita ΒΑ ad ΑΔ. Ipsa igitur ΔΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Α, et major portio est ipsa a principio recta ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

ANALYSIS ET SYNTHESIS.

Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστὶ σύνθεσις;

Quid est analysis et quid est synthesis?

Ανάλυσις μὲν οὖν³ ἐστὶ λήψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογουμένον.

Analys quidem est sumptio quæsiti tanquam concessi per consequentia in aliquod verum concessum.

Σύνθεσις δὲ⁴ λήψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληξιν ἢ κατάληψιν⁵.

Synthesis autem sumptio concessi per consequentia in quæsiti conclusionem vel deprehensionem.

Mais on a démontré que ΔΒ est à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΓ, et ΑΓ est égal à ΑΔ; la droite ΔΒ est donc à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΔ. La droite ΔΒ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Α, et la droite ΑΒ, premièrement exposée, est le plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

ANALYSE ET SYNTHÈSE.

Ce que c'est que l'analyse, et ce que c'est que la synthèse.

Dans l'analyse, on prend comme accordé ce qui est demandé, parce qu'on arrive de là à quelque vérité qui est accordée.

Dans la synthèse, on prend ce qui est accordé, parce qu'on arrive de là à la conclusion, ou à l'intelligence de ce qui est demandé.

ΤΟΥ ΠΡΟΤΟΥ ΘΗΟΡΗΜΑΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ
ΑΝΕΥ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ¹.

Εὐθεία γάρ τις ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἢ $A\Gamma$, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς AB ἴση κείσθω ἢ ΔA . λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA .

PRIMI THEOREMATIS ANALYSIS SINE
FIGURA.

Recta enim quædam AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ , et sit major portio $A\Gamma$, et dimidiæ ipsius AB æqualis ponatur ΔA ; dico quintuplum esse quadratum ex $\Gamma\Delta$ quadrati ex ΔA .



Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Delta^2$. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓA μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Delta^4$. Ἀλλὰ τῷ μὲν δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$, διπλῆ γὰρ ἢ BA τῆς $A\Delta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$, ἢ γὰρ AB

Quoniam enim quintuplum est ipsum ex $\Gamma\Delta$ ipsius ex ΔA , ipsum autem ex $\Gamma\Delta$ æquale est ipsa ex ΓA , $A\Delta$ cum ipso bis sub ΓA , $A\Delta$; quadrata igitur ex ΓA , $A\Delta$ cum ipso bis sub ΓA , $A\Delta$ quintupla sunt ipsius ex $A\Delta$; dividendo igitur ipsum ex ΓA cum ipso bis sub ΓA , $A\Delta$ quintuplum est ipsius ex $A\Delta$. Sed ipsi quidem bis sub ΓA , $A\Delta$ æquale est ipsum sub BA , $A\Gamma$, dupla enim BA ipsius $A\Delta$, ipsi autem ex $A\Gamma$ æquale est ipsum sub AB , $B\Gamma$, etenim

ANALYSE DU PREMIER THÉORÈME SANS FIGURE.

Que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ , que $A\Gamma$ soit le plus grand segment, et faisons ΔA égal à la moitié de AB ; je dis que le carré de $\Gamma\Delta$ est quintuple du carré de ΔA .

Car puisque le carré de $\Gamma\Delta$ est quintuple du carré de ΔA , et que le carré de $\Gamma\Delta$ est égal aux carrés des droites ΓA , $A\Delta$, conjointement avec le double rectangle sous ΓA , $A\Delta$ (4. 2), les carrés des droites ΓA , $A\Delta$, conjointement avec le double rectangle sous ΓA , $A\Delta$, seront quintuples du carré de la droite $A\Delta$; donc, par soustraction, le carré de ΓA , conjointement avec le double rectangle sous ΓA , $A\Delta$, sera quadruple du carré de $A\Delta$. Mais le rectangle sous BA , $A\Gamma$ est égal au double rectangle sous ΓA , $A\Delta$; car BA est double de $A\Delta$, et le rectangle sous AB , $B\Gamma$ est égal au carré de $A\Gamma$ (17. 6), car AB est coupé en extrême

ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BA, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς AB ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ⁵. Ἐστι δὲ, διπλῆ γάρ ἐστιν ἢ BA τῆς ΑΔ.

ipsa AB extremâ et mediâ ratione secta est; ipsum igitur sub BA, ΑΓ cum ipso sub AB, ΒΓ quadruplum est ipsius ex ΑΔ. Sed ipsum sub BA, ΑΓ cum ipso sub AB, ΑΓ est ipsum ex AB; ipsum igitur ex AB quadruplum est ipsius ex ΑΔ. Est autem, dupla enim est BA ipsius ΑΔ.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA, τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς² AB τὸ ὑπὸ τῶν³ BA, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς

SYNTHESIS.

Quoniam igitur quadruplum est ipsum ex BA ipsius ex ΑΔ, sed ipsum ex AB ipsum sub BA, ΑΓ est cum ipso sub AB, ΒΓ; ipsum igitur sub BA, ΑΓ cum ipso sub AB, ΒΓ quadruplum est ipsius ex ΑΔ. Sed ipsum quidem sub BA, ΑΓ æquale est ipsi bis sub ΔΑ, ΑΓ, ipsum autem sub AB, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ; ipsum igitur ex ΑΓ cum ipso bis sub ΔΑ, ΑΓ quadruplum est ipsius ex ΔΑ; quare ipsa ex ΔΑ, ΑΓ cum

et moyenne raison; le rectangle sous BA, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous AB, ΒΓ, est quadruple du carré de ΑΔ. Mais le rectangle sous BA, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous AB, ΒΓ, est le carré de AB (2. 2); le carré de AB est donc le quadruple du carré de ΑΔ. Mais cela est (cor. 20. 6), puisque BA est double de ΑΔ.

SYNTHESE.

Puisque le carré de BA est quadruple du carré de ΑΔ, et que le carré de AB est égal au rectangle sous BA, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous AB, ΒΓ (2. 2); le rectangle sous BA, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous AB, ΒΓ, sera quadruple du carré de ΑΔ. Mais le rectangle sous BA, ΑΓ est égal au double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, et le rectangle sous AB, ΒΓ est égal au carré de ΑΓ; le carré de ΑΓ, conjointement avec le double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, est donc quadruple du carré de ΔΑ; les carrés des droites ΔΑ, ΑΓ, conjointement avec le

ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Γὰρ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστὶ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipso bis sub ΔΑ, ΑΓ quintuplum est ipsius ex ΔΑ. Ipsa autem ex ΔΑ, ΑΓ cum ipso bis sub ΔΑ, ΑΓ ipsum ex ΓΔ est; ipsum igitur ex ΓΔ quintuplum est ipsius ex ΔΑ. Quod oportebat ostendere.

ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΥ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ
ΑΝΕΥ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ'.

SECUNDI THEOREMATIS ANALYSIS
SINE FIGURA.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Recta enim quædam ΓΔ partis ipsius ΔΑ quintuplum possit, ipsius autem ΔΑ dupla ponatur ΑΒ; dico ΑΒ extremâ et mediâ ratione sectam esse in Γ puncto, et majorem portionem esse ΑΓ, quæ est reliqua pars ipsius a principio rectæ.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον, διπλῆ γὰρ ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς

Quoniam enim ΑΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, et major portio est ΑΓ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ. Est autem et ipsum sub ΒΑ, ΑΓ ipsi bis sub ΔΑ, ΑΓ æquale, dupla enim est ΒΑ ipsius ΑΔ; ipsum igitur

double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, est donc quintuple du carré de ΔΑ. Mais les carrés des droites ΔΑ, ΑΓ, conjointement avec le double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, forment le carré de ΓΔ (4. 2); le carré de ΓΔ est donc quintuple du carré de ΔΑ. Ce qu'il fallait démontrer.

ANALYSE DU SECOND THÉORÈME SANS FIGURE.

Que le carré d'une droite ΓΔ soit quintuple du carré de sa partie ΔΑ, et que ΑΒ soit double de ΔΑ; je dis que la droite ΑΒ sera coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΑΓ, qui est la partie restante de la droite exposée d'abord, sera son plus grand segment.

Car puisque ΑΒ est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΑΓ est le plus grand segment, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ sera égal au carré de ΑΓ (17. 6). Mais le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est égal au double rectangle sous ΔΑ,

ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῶ δὲ³ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε καὶ⁴ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ἐστὶ δὲ⁵.

sub AB, BG cum ipso sub BA, AG, quod est ipsum ex AB, æquale est ipsi bis sub DA, AG cum ipso ex AG. Quadruplum autem ipsum ex AB ipsius ex DA; quadruplum igitur et ipsum bis sub DA, AG cum ipso ex AG ipsius ex AD; quare et ipsa ex DA, AG cum ipso bis sub DA, AG, hoc est ipsum ex GD, quintupla sunt ipsius DA. Est autem.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· διελόντι ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιον¹ ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς² ΑΔ· ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ

SYNTHESIS.

Quoniam igitur quintuplum est ipsum ex GD ipsius ex DA, ipsum autem ex GD ipsa ex DA, AG est cum ipso bis sub DA, AG; ipsa igitur ex DA, AG cum ipso bis sub DA, AG quintupla sunt ipsius ex DA; dividendo igitur ipsum bis sub DA, AG cum ipso ex AG quadruplum est ipsius ex AD. Est autem et ipsum ex AB quadruplum ipsius ex AD; ipsum igitur bis sub DA, AG, quod est ipsum semel sub BA, AG cum

AG, car BA est double de AD; le rectangle sous AB, BG, conjointement avec le rectangle sous BA, AG, ce qui est le carré de AB (2. 2), est donc égal au double rectangle sous DA, AG, conjointement avec le carré de AG. Mais le carré de AB est quadruple du carré de DA (20. 6); le double rectangle sous DA, AG, conjointement avec le carré de AG, est donc quadruple du carré de AD; les carrés des droites DA, AG, conjointement avec le double rectangle sous DA, AG, ce qui est le carré de GD (4. 2), sont donc quintuples du carré de DA. Mais cela est.

S Y N T H E S E.

Puisque le carré de GD est quintuple du carré de DA, et que le carré de GD est égal aux carrés des droites DA, AG, conjointement avec le double rectangle sous DA, AG (4. 2); les carrés des droites DA, AG, conjointement avec le double rectangle sous DA, AG, seront quintuples du carré de DA; donc, par soustraction, le double rectangle sous DA, AG, conjointement avec le carré de AG, est quadruple du carré de AD. Mais le carré de AB est quadruple du carré de AD (20. 6); le

ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ³ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρέντες τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Μείζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμημᾶ ἐστὶν ἡ ΑΓ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipso ex ΑΓ æquale est ipsi ex ΑΒ. Sed ipsum ex ΑΒ ipsum sub ΑΒ, ΒΓ est cum ipso sub ΒΑ, ΑΓ; ipsum igitur sub ΒΑ, ΔΓ cum ipso sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi sub ΒΑ, ΑΓ cum ipso ex ΑΓ; et communi ablato sub ΒΑ, ΑΓ, reliquum igitur sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. Major autem ΒΑ quam ΑΓ; major igitur et ΑΓ quam ΓΒ; ipsa igitur ΑΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, et major portio est ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

ΤΡΙΤΟΥ ΘΗΟΡΗΜΑΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ.

TERTII THEOREMATIS ANALYSIS.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμησθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμημᾶ ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

Recta enim linea ΑΒ extremâ et mediâ ratione secetur in Γ puncto, et sit major portio ΑΓ, et ipsius ΑΓ dimidia ipsa ΓΔ; dico quintuplum esse ipsum ex ΒΔ ipsius ex ΓΔ.

double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, qui est le rectangle compris une seule fois sous ΒΑ, ΑΓ conjointement avec le quarré de ΑΓ, est donc égal au quarré de ΑΒ. Mais le quarré de ΑΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ conjointement avec le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ (2. 2); le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, est donc égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ, conjointement avec le quarré de ΑΓ; retranchons le rectangle commun sous ΒΑ, ΑΓ; le rectangle restant sous ΑΒ, ΒΓ sera égal au quarré de ΑΓ; la droite ΒΑ est donc à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΒ (17. 6). Mais ΒΑ est plus grand que ΑΓ; la droite ΑΓ est donc plus grande que ΓΒ; la droite ΑΒ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Γ (déf. 3. 6), et ΑΓ est le plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

ANALYSE DU TROISIÈME THÉORÈME.

Que la droite ΑΒ soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, que ΑΓ soit le plus grand segment, et que ΓΔ soit la moitié de ΑΓ; je dis que le quarré de ΒΔ est quintuple du quarré de ΓΔ.

Επει γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλά-

Quoniam enim quintuplum est ipsum ex ΒΔ ex ΓΔ; ipsum autem ex ΔΒ ipsum sub ΑΒ, ΒΓ est cum ipso ex ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ cum ipso ex ΔΓ quintuplum est ipsius ex ΔΓ;

A Δ Γ B

σιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἢ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐστὶ δὲ διπλῆ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ.

dividendo igitur ipsum sub ΑΒ, ΒΓ quadruplum est ipsius ex ΔΓ. Ipsi autem sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsum ex ΑΓ, etenim ipsa ΑΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Γ; ipsum igitur ex ΑΓ quadruplum est ipsius ex ΓΔ. Est autem, dupla enim ΑΓ ipsius ΓΔ.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

SYNTHESIS.

Επει διπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam dupla ΑΓ est ipsius ΓΔ, quadruplum est ipsum ex ΑΓ ipsius ex ΔΓ. Sed ipsum ex ΑΓ æquale est ipsi sub ΑΒ, ΒΓ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ quadruplum est ipsius ex ΔΓ; componendo igitur ipsum sub ΑΒ, ΒΓ cum ipso ex ΔΓ, quod est ipsum ex ΔΒ, quintuplum est ipsius ex ΔΓ. Quod oportebat ostendere.

Car puisque le carré de ΒΔ est quintuple du carré de ΓΔ, que le carré de ΔΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le carré de ΓΔ (6. 2); le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le carré de ΔΓ, sera quintuple du carré de ΔΓ; donc, par soustraction, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est quadruple du carré de ΔΓ. Mais le carré de ΑΓ est égal au rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (17. 6), car la droite ΑΒ est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ; le carré de ΑΓ est donc quadruple du carré de ΓΔ. Mais cela est, puisque ΑΓ est double de ΓΔ.

SYNTHESE.

Puisque ΑΓ est double de ΓΔ, le carré de ΑΓ est quadruple du carré de ΔΓ. Mais le carré de ΑΓ est égal au rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (17. 6); le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est donc quadruple du carré de ΔΓ; donc, par addition, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le carré de ΔΓ, ce qui est le carré de ΔΒ (4. 2), est quintuple du carré de ΔΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΘΗΟΡΗΜΑΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ.

QUARTI THEOREMATIS ANALYSIS.

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ AG . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τριπλάσια ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς AG .

Recta enim linea AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ , et sit major portio AG ; dico quadrata ex AB , $B\Gamma$ tripla esse quadrati ex AG .

A ————— Γ ————— B

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τριπλάσια ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς AG , ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἔστι μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG . τὸ ἄρα δὲ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AG . διελόντι ἄρα τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AG . ὥστε τὸ ἀπᾶξ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . Ἐστι δὲ, ἢ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ .

Quoniam enim ipsa ex AB , $B\Gamma$ tripla sunt ipsius ex AG ; sed ipsa ex AB , $B\Gamma$ ipsum bis sub sub AB , $B\Gamma$ sunt eum ipso ex AG ; ipsum igitur bis sub AB , $B\Gamma$ eum ipso ex AG triplum est ipsius ex AG ; dividendo igitur ipsum bis sub AB , $B\Gamma$ duplum est ipsius ex AG ; quare ipsum semel sub AB , $B\Gamma$ æquale est ipsi ex AG . Est autem, ipsa enim AB extremâ et mediâ ratione secta est in puncto Γ .

ANALYSE DU QUATRIÈME THÉORÈME.

Que la ligne droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ , et que AG soit le plus grand segment; je dis que la somme des carrés des droites AB , $B\Gamma$ est triple du carré de AG .

Car puisque la somme des carrés des droites AB , $B\Gamma$ est triple du carré de AG , et que la somme des carrés des droites AB , $B\Gamma$ est égale au double rectangle sous AB , $B\Gamma$, conjointement avec le carré de AG , le double rectangle sous AB , $B\Gamma$, avec le carré de AG , sera triple du carré de AG (7. 2); donc, par soustraction, le double rectangle sous AB , $B\Gamma$ est double du carré de AG ; le rectangle compris une seule fois sous AB , $B\Gamma$ est donc égal au carré de AG . Mais cela est, puisque la droite AB est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ .

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

SYNTHESIS.

Επειὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστι μείζον τμήμα ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· συνθέντι ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τριπλάσιόν² ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἀλλὰ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἐστὶ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετράγωνα³ τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Quoniam igitur AB extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, et est major portio ipsa ΑΓ, et ipsum igitur sub AB, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ; ipsum igitur bis sub AB, ΒΓ duplum est ipsius ex ΑΓ; componendo igitur ipsum bis sub AB, ΒΓ cum ipso ex ΑΓ triplum est ipsius ex ΑΓ; sed ipsum bis sub AB, ΒΓ cum ipso ex ΑΓ ipsa ex AB, ΒΓ sunt quadrata; ipsa igitur ex AB, ΒΓ quadrata tripla sunt ipsius ex ΑΓ.

ΤΟΥ ΠΕΜΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ.

QUINTI THEOREMATIS ANALYSIS.

Εὐθεία γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΒΑ.

Recta enim quædam AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ, et sit major portio ΑΓ, et ipsi ΑΓ æqualis ponatur ΑΔ; dico ipsam ΔΒ extremâ et mediâ ratione secari in puncto Α, et majorem portionem esse ΒΑ.

SYNTHESE.

Puisque la droite AB est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΑΓ est le plus grand segment; le rectangle sous AB, ΒΓ sera égal au carré de ΑΓ (17. 6); le double rectangle sous AB, ΒΓ est donc double du carré de ΑΓ; donc, par addition, le double rectangle sous AB, ΒΓ, conjointement avec le carré de ΑΓ, est triple du carré de ΑΓ; mais le double rectangle sous AB, ΒΓ, conjointement avec le carré de ΑΓ, est égal aux carrés des droites AB, ΒΓ (7. 2); la somme des carrés des droites AB, ΒΓ est donc triple du carré de ΑΓ.

ANALYSE DU CINQUIÈME THÉORÈME.

Qu'une droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, que ΑΓ soit le plus grand segment, et faisons ΑΔ égal à ΑΓ; je dis que la droite ΔΒ est coupée en extrême et moyenne raison au point Α, et que ΒΑ est le plus grand segment.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἴστιν ἡ ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς

Quoniam enim ipsa ΔΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Α, et major portio est ΑΒ; est igitur ut ΔΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΔ. Sed æqualis ΑΔ ipsi ΑΓ; est igitur ΔΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΓ; conver-



ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέφαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἐστι δὲ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

tendo igitur ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΑΒ ad ΒΓ; dividendo igitur ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΑΓ ad ΓΒ. Æqualis autem ΑΔ ipsi ΑΓ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. Est autem, etenim ipsa ΑΒ extremâ et mediâ ratione secatur in Γ.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

SYNTHESIS.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέφαντι τε³ ὡς

Quoniam igitur ipsa ΑΒ extremâ et mediâ ratione secatur in Γ, est igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. Æqualis autem ΑΓ ipsi ΑΔ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΑΓ ad ΓΒ; componendo igitur ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΒΑ ad ΒΓ; et convertendo ut ΒΔ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΓ.

Car puisque ΔΒ est coupé en extrême et moyenne raison au point Α, et que ΑΒ est le plus grand segment, la droite ΔΒ sera à la droite ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΔ. Mais ΑΔ est égal à ΑΓ; la droite ΔΒ est donc à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΓ; donc, par conversion, ΒΔ est ΔΑ comme ΑΒ est à ΒΓ (19. 5); donc, par soustraction, ΒΑ est à ΑΔ comme ΑΓ est à ΓΒ (17. 5). Mais ΑΔ est égal à ΑΓ; la droite ΒΑ est donc à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΒ. Mais cela est, puisque la droite ΑΒ est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ.

SYNTHESE.

Puisque ΑΒ est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ, la droite ΒΑ est à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΒ. Mais ΑΓ est égal à ΑΔ; la droite ΒΑ est donc à ΑΔ comme ΑΓ est à ΓΒ; donc, par addition, ΒΔ est à ΔΑ comme ΒΑ est à ΒΓ (18. 5); donc, par conversion, ΒΔ est à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΓ (cor. 19. 5). Mais ΑΓ est

ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἰσὴ δὲ ἢ ΑΓ τῆ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἢ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτληται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστὶν ἢ ΑΒ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Æqualis autem ΑΓ ipsi ΑΔ; est igitur ut ΔΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΔ; ipsa ΔΒ igitur extremâ et mediâ ratione secatur in Α; et major portio est ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

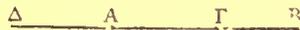
Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἀλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐστω εὐθεῖα ῥητὴ ἢ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμημα ἢ ΑΓ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

PROPOSITIO VI.

Si recta rationalis extremâ et mediâ ratione secta fuerit; utraque portionum irrationalis est quæ appellatur apotome.

Sit recta rationalis ΑΒ, et secetur extremâ et mediâ ratione in Γ, et sit major portio ΑΓ; dico utramque ipsarum ΑΓ, ΓΒ irrationalem esse quæ appellatur apotome.



Ἐκτεθλήσθω γάρ ἢ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ', καὶ κείσθω τῆ ΒΑ ἡμίσεια ἢ ΑΔ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμηματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἢ ΑΔ, ἡμί-

Produceatur enim ΒΑ in Δ, et ponatur ipsius ΒΑ dimidia ΑΔ. Quoniam igitur recta ΑΒ secatur extremâ et mediâ ratione in Γ, et majori portioni ΑΓ adjicitur ΑΔ, quæ dimidia est

égal à ΑΔ; la droite ΔΒ est donc à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΔ; la droite ΔΒ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Α (déf. 3. 6), et ΑΒ est le plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI.

Si une droite rationnelle est coupée en extrême et moyenne raison, chacun des segments sera l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Soit la droite rationnelle ΑΒ, et qu'elle soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ; je dis que chacune des droites ΑΓ, ΓΒ est l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Car prolongeons ΒΑ vers le point Δ, et que ΑΔ soit la moitié de ΒΑ. Puisque la droite ΑΒ est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΑΔ moitié de ΑΒ est ajouté au plus grand segment ΑΓ; le carré de ΓΔ sera quintuple

σεια οὖσα τῆς AB · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA πενταπλασίον ἔστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔA λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τῷ ἀπὸ τῆς ΔA . Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔA , ῥητὴ² γὰρ ἔστιν ἡ ΔA ἡμισεία οὖσα τῆς AB ῥητῆς οὖσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ ³· ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔA λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ ΔA · αἱ $\Gamma\Delta$, ΔA ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἔστιν ἡ AG . Πάλιν, ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον τμημᾶ ἔστιν ἡ AG , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , BG ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς AG · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AG ἀποτομῆς παρὰ τὴν AB ῥητὴν παραβλιθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν BG . Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ BG . Εδείχθη δὲ καὶ ἡ AG ἀποτομή.

Εὰν ἄρα εὐθεία, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsius AB ; quadratum igitur ex $\Gamma\Delta$ ipsius ex ΔA quintuplum est; ipsum igitur ex $\Gamma\Delta$ ad ipsum ex ΔA rationem habet quam numerus ad numerum; commensurable igitur ipsum ex $\Gamma\Delta$ ipsi ex ΔA . Rationale autem ipsum ex ΔA ; rationalis est enim ΔA dimidia existens ipsius AB rationalis existentis; rationale igitur et ipsum ex $\Gamma\Delta$; rationalis igitur est et $\Gamma\Delta$. Et quoniam ipsum ex $\Gamma\Delta$ ad ipsum ex ΔA rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, incommensurabilis igitur longitudine ipsa $\Gamma\Delta$ ipsi ΔA ; ipsæ $\Gamma\Delta$, ΔA igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est AG . Rursus, quoniam AB extremâ et mediâ ratione secta est, et major portio est AG ; ipsum igitur sub AB , BG æquale est ipsi ex AG ; ipsum igitur ex AG apotome ad AB rationalem applicatum latitudinem facit BG . Ipsum autem ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam; apotome igitur prima ipsa BG . Ostensa est autem et AG apotome.

Si igitur recta, etc.

du carré de ΔA (1. 13); le carré de $\Gamma\Delta$ a donc avec le carré de ΔA la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de $\Gamma\Delta$ est donc commensurable avec le carré de ΔA (6. 10). Mais le carré de ΔA est rationel, car la droite ΔA est rationelle, puisqu'elle est la moitié de AB qui est rationelle. Le carré de $\Gamma\Delta$ est donc aussi rationel (déf. 6. 10); la droite $\Gamma\Delta$ est donc rationelle (déf. 8. 10). Et puisque le carré de $\Gamma\Delta$ n'a pas avec le carré de ΔA la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite $\Gamma\Delta$ est incommensurable en longueur avec la droite ΔA (9. 10); les droites $\Gamma\Delta$, ΔA sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite AG est donc un apotome (74. 10). De plus, puisque AB est coupé en extrême et moyenne raison, et que AG est le plus grand segment, le rectangle sous AB , BG est donc égal au carré de AG ; le carré de l'apotome AG appliqué à la rationelle AB a donc pour largeur la droite BG . Mais le carré d'un apotome appliqué à une rationelle a pour largeur un apotome premier (98. 10); la droite BG est donc un apotome premier. Mais on a démontré que AG est un apotome. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

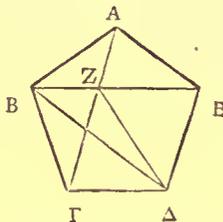
PROPOSITIO VII.

Εάν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἢτοι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἐξῆς, ἴσαι ᾖσιν ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔσται τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Si pentagoni æquilateri tres anguli, sive deinceps sive non deinceps, æquales sint; æquiangulum erit pentagonum.

Pentagoni enim æquilateri ΑΒΓΔΕ tres anguli primum deinceps ad Α, Β, Γ æquales inter se sint; dico æquiangulum esse ΑΒΓΔΕ pentagonum.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ δύο' αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὲ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστὶν ἴση· βάσεις ἄρα ἡ ΑΓ βάσεις τῆ ΒΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ὑφ' αἷς αἱ ἴσαι πλευρὰ ὑποτείνουσιν,

Jungantur enim ipsæ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Et quoniam duæ ΓΒ, ΒΑ duabus ΒΑ, ΑΕ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΓΒΑ angulo ΒΑΕ est æqualis; basis igitur ΑΓ basi ΒΕ est æqualis, et ΑΒΓ triangulum triangulo ΑΒΕ æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt, angu-

PROPOSITION VII.

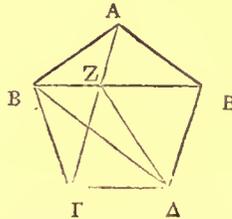
Si trois angles du pentagone équilatéral, soit de suite ou non de suite, sont égaux, le pentagone sera équiangle.

Que les trois angles de suite du pentagone équilatéral ΑΒΓΔΕ placés aux points Α, Β, Γ soient égaux entr'eux; je dis que le pentagone ΑΒΓΔΕ est équiangle.

Car joignons ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Puisque les deux droites ΓΒ, ΒΑ sont égales aux deux côtés ΒΑ, ΑΕ, chacune à chacune, et que l'angle ΓΒΑ est égal à l'angle ΒΑΕ; la base ΑΓ sera égale à la base ΒΕ; le triangle ΑΒΓ égal au triangle ΑΒΕ, et les angles restants, opposés à des côtés égaux, seront égaux, c'est-à-dire que l'angle ΒΓΑ

ἢ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῆ ὑπὸ ΒΕΑ, ἢ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῆ ὑπὸ ΓΑΒ ὥστε καὶ πλευρὰ ἢ ΑΖ πλευρᾶ τῆ ΒΖ ἐστὶν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἢ ΑΓ ὅλη τῆ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΖΓ λοιπῆ τῆ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἢ ΓΔ τῆ ΔΕ ἴση· δύο δὲ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἢ ΖΔ· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΖΓΔ γωνία τῆ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία² τῆ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἢ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλη τῆ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἢ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις^δ· καὶ ἢ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἢ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

lus quidem ΒΓΑ angulo ΒΕΑ, angulus vero ΑΒΕ angulo ΓΑΒ; quare et latus ΑΖ lateri ΒΖ est æquale. Ostensa autem est et tota ΑΓ toti ΒΕ æqualis; et reliqua igitur ΖΓ reliquæ ΖΕ est æqualis. Est autem et ΓΔ ipsi ΔΕ æqualis; duæ igitur ΖΓ, ΓΔ duabus ΖΕ, ΕΔ æquales sunt, et basis ipsorum ΖΔ communis; angulus igitur ΖΓΔ angulo ΖΕΔ est æqualis. Ostensus autem est et angulus ΒΓΑ angulo ΑΕΒ æqualis; totus igitur ΒΓΔ toti ΑΕΔ est æqualis. Sed angulus ΒΓΔ æqualis ponitur est angulis ad Α, Β; et ΑΕΔ igitur angulus angulis ad Α, Β æqualis est. Similiter utique demonstrabimus et ΓΔΕ angulum æqualem esse angulis ad Α, Β; æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum.



Αλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

At vero non sint æquales deinceps anguli, sed sint æquales ipsi ad Α, Γ, Δ punctis; dico et sic æquiangulum esse ΑΒΓΔΕ pentagonum.

sera égal à l'angle ΒΕΑ, et l'angle ΑΒΕ égal à l'angle ΓΑΒ (4. 1); le côté ΑΖ est donc égal au côté ΒΖ (6. 1). Mais on a démontré que la droite entière ΑΓ est égale à la droite entière ΒΕ; le reste ΖΓ est donc égal au reste ΖΕ. Mais ΓΔ est égal à ΔΕ; les deux droites ΖΓ, ΓΔ sont donc égales aux deux droites ΖΕ, ΕΔ; mais la base ΖΔ est commune; l'angle ΖΓΔ est donc égal à l'angle ΖΕΔ (8. 1). Mais on a démontré que l'angle ΒΓΑ est égal à l'angle ΑΕΒ; l'angle entier ΒΓΔ est donc égal à l'angle entier ΑΕΔ. Mais l'angle ΒΓΔ est supposé égal aux angles placés aux points Α, Β; l'angle ΑΕΔ est donc égal aux angles placés aux points Α, Β. Nous démontrerons semblablement que l'angle ΓΔΕ est égal aux angles placés aux points Α, Β; le pentagone ΑΒΓΔΕ est donc équiangle.

Mais que les angles égaux ne soient pas de suite, et que les angles égaux soient ceux qui sont placés aux points Α, Γ, Δ; je dis que le pentagone ΑΒΓΔΕ est encore équiangle de cette manière.

Επιζεύχθω γάρ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ
 δυοὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαις ἴσας
 περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῆ ΒΔ ἴση
 ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον
 ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις
 ἴσαι ἔσονται ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν·
 ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ⁸. Ἐστι δὲ
 καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ πλευρᾶ
 ἡ ΒΕ πλευρᾶ τῆ ΒΔ ἔστιν ἴση⁹. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ
 ΑΕΔ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ
 ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται
 ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς
 Α, Γ ἴση ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ
 ἴση ἐστὶν ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις· ἰσο-
 γώνιον ἄρα ἐστὶ¹⁰ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

Jungatur enim ΒΔ. Et quoniam duæ ΒΑ, ΑΕ
 duabus ΒΓ, ΓΔ æquales sunt, et angulos
 æquales continent; basis igitur ΒΕ basi ΒΔ æqua-
 lis est, et ΑΒΕ triangulum triangulo ΒΓΔ æquale
 est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales
 erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis
 igitur ΑΕΒ angulus angulo ΓΔΒ. Est autem et
 ΒΕΔ angulus ipsi ΒΔΕ æqualis, quoniam latus
 ΒΕ lateri ΒΔ est æquale; totus igitur ΑΕΔ an-
 gulus toti ΓΔΕ est æqualis. Sed angulus ΓΔΕ
 angulis ad Α, Γ ponitur æqualis; et ΑΕΔ igi-
 tur angulus angulis ad Α, Γ æqualis est. Propter
 eadem utique et ΑΒΓ angulus æqualis est an-
 gulis ad Α, Γ, Δ; æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ
 pentagonum. Quod oportebat ostendere.

Car joignons ΒΔ. Puisque les deux droites ΒΑ, ΑΕ sont égales aux deux droites ΒΓ, ΓΔ, et qu'elles comprennent des angles égaux, la base ΒΕ sera égale à la base ΒΔ (4. 1); le triangle ΑΒΕ sera égal au triangle ΒΓΔ, et les angles restants soutendus par des côtés égaux, seront égaux entre eux; l'angle ΑΕΒ est donc égal à l'angle ΓΔΒ. Mais l'angle ΒΕΔ est égal à l'angle ΒΔΕ (6. 1), parce que le côté ΒΕ est égal au côté ΒΔ; l'angle entier ΑΕΔ est donc égal à l'angle entier ΓΔΕ. Mais l'angle ΓΔΕ est supposé égal aux angles placés aux points Α, Γ; l'angle ΑΕΔ est donc égal aux angles placés aux points Α, Γ. Par la même raison, l'angle ΑΒΓ est égal aux angles placés aux points Α, Γ, Δ; le pentagone ΑΒΓΔΕ est donc équiangle. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

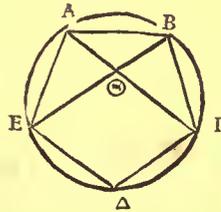
PROPOSITIO VIII.

Εάν πενταγώνου ἰσοπλευροῦ καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεΐαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλευροῦ καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας, τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, ὑποταίνετωσαν εὐθεΐαι αἱ ΑΓ, ΒΕ, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Θ σημεῖον¹, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Si pentagoni æquilateri et æquianguli deinceps duos angulos subtendant rectæ, extremâ et mediâ ratione se mutuo secant, et majores ipsarum portiones æquales sunt pentagoni lateri.

Pentagoni enim æquilateri et æquianguli ΑΒΓΔΕ duos angulos deinceps ad Α, Β subtendant rectæ ΑΓ, ΒΕ, se mutuo secant in Θ puncto; dico utramque ipsarum extremâ et mediâ ratione secari in Θ puncto, et majores earum portiones æquales esse pentagoni lateri.



Περιγεράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεΐαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυοὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας

Describatur enim circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulus ΑΒΓΔΕ. Et quoniam duæ rectæ ΕΑ, ΑΒ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales sunt et angulos

PROPOSITION VIII.

Si des droites soutendent deux angles de suite d'un pentagone équilatéral et équiangle, ces droites se couperont en extrême et moyenne raison, et leurs plus grands segments seront égaux au côté du pentagone.

Que les droites ΑΓ, ΒΕ, qui se coupent au point Θ, soutendent deux angles de suite en Α et Β du pentagone équilatéral ΑΒΓΔΕ; je dis que chacune de ces droites est coupée en extrême et moyenne raison au point Θ, et que leurs plus grands segments sont égaux au côté du pentagone.

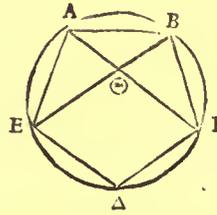
Car décrivons autour du pentagone ΑΒΓΔΕ le cercle ΑΒΓΔΕ. Puisque les deux droites ΕΑ, ΑΒ sont égales aux deux droites ΑΒ, ΒΓ, et que ces droites comprè-

ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἢ BE βάσει τῆς ΑΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ ABΓ τρίγωνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ABE διπλῆ ἄρα ἢ ὑπὸ AΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ABΘ τριγώνου³. Ἔστι δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδὴ περὶ καὶ περιφέρεια ἢ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἴσῃ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἢ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΘΕ ὥστε καὶ ἢ ΘΕ εὐθεῖα τῆς ΕΑ, τουτέστι τῆς ΑΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ ΒΑ εὐθεῖα τῆς ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ABE τῆς ὑπὸ AEB. Ἀλλὰ ἢ ὑπὸ ABE τῆς ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἢ ὑπὸ BEA ἄρα γωνία⁵ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ABE καὶ τοῦ ABΘ ἐστὶν ἢ ὑπὸ ABE· λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ BAE γωνία λοιπῆ τῆς ὑπὸ ΑΘΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ⁶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ ABΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ EB πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἢ AB πρὸς τὴν ΒΘ. Ἰση δὲ ἢ ΒΑ τῆς ΕΘ ὡς ἄρα ἢ BE πρὸς τὴν ΕΘ οὕτως ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. Μείζων δὲ ἢ BE τῆς

æquales continent; basis igitur BE basi ΑΓ æqualis est, et ABE triangulum triangulo ABΓ æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendant; æqualis igitur est ΒΑΓ angulus ipsi ABE; duplus igitur ipse ΑΘΕ anguli ΒΑΘ, est enim extra ABΘ triangulum. Est autem et ipse ΕΑΓ ipsius ΒΑΓ duplus, quoniam et circumferentia ΕΔΓ circumferentiæ ΓΒ est dupla; æqualis igitur ΘΑΕ angulus ipsi ΑΘΕ; quare et ΘΕ recta ipsi ΕΑ, hoc est ipsi ΑΒ, est æqualis. Et quoniam æqualis est ΒΑ recta ipsi ΑΕ, æqualis est et angulus ABE ipsi AEB. Sed angulus ABE angulo ΒΑΘ ostensus est æqualis; et BEA igitur angulus angulo ΒΑΘ est æqualis. Et communis duobus triangulis et ABE et ABΘ est ipse ABE; reliquus igitur BAE angulus reliquo ΑΘΒ est æqualis; æqui-angulum igitur est ABE triangulum triangulo ABΘ; proportionaliter igitur est ut EB ad ΒΑ ita AB ad ΒΘ. Æqualis autem ΒΑ ipsi ΕΘ; ergo ut BE ad ΕΘ ita ΕΘ ad ΘΒ. Major autem BE

nent des angles égaux, la base BE sera égale à la base ΑΓ, le triangle ABE sera égal au triangle ABΓ, et les angles restants, soutendus par des côtés égaux, seront égaux (4. 1); l'angle ΒΑΓ est donc égal à l'angle ABE; l'angle ΑΘΕ est donc double de l'angle ΒΑΘ (6 et 32. 1); car ABE est un angle extérieur au triangle ABΘ. Mais l'angle ΕΑΓ est double de l'angle ΒΑΓ (33. 6), parce que l'arc ΕΑΓ est double de l'arc ΓΒ; l'angle ΘΑΕ est donc égal à l'angle ΑΘΕ; la droite ΘΕ est donc égale à ΕΑ, c'est-à-dire à ΑΒ (6. 1). Et puisque la droite ΒΑ est égale à ΑΕ, l'angle ABE sera égal à l'angle AEB (5. 1). Mais on a démontré que l'angle ABE est égal à ΒΑΘ; l'angle BEA est donc égal à l'angle ΒΑΘ. Mais l'angle ABE est commun aux deux triangles ABE, ABΘ, l'angle BAE est donc égal à l'angle restant ΑΘΒ (32. 1); le triangle ABE est donc équiangle avec le triangle ABΘ; la droite EB est donc à ΒΑ comme AB est ΒΘ (4. 6). Mais ΒΑ est égal à ΕΘ; la droite BE est donc à ΕΘ comme ΕΘ est à ΘΒ. Mais BE est plus

$E\Theta$ · μείζων ἄρα καὶ ἡ $E\Theta$ τῆ ΘB · ἢ BE ἄρα ipsâ $E\Theta$; major igitur et $E\Theta$ ipsâ ΘB ; ipsa ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Θ , καὶ igitur BE extremâ et mediâ ratione secta est in



τὸ μείζον τμήμα τὸ ΘE ἴσον ἐστὶ τῆ τοῦ πενταγώνου πλευρᾶ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ $A\Gamma$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Θ , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα τὸ $\Gamma\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῆ τοῦ πενταγώνου πλευρᾶ. Ὅπερ ἴδει δείξαι.

Θ , et major portio ΘE æqualis est pentagoni lateri. Similiter utique demonstrabimus et $A\Gamma$ extremâ et mediâ ratione secari in Θ , et majorem ejus portionem $\Gamma\Theta$ æqualem esse pentagoni lateri. Quod oportebat ostendere.

grand que $E\Theta$; la droite $E\Theta$ est donc plus grande que ΘB ; la droite BE est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Θ (30.6), et le plus grand segment ΘE est égal au côté du pentagone. Nous démontrerons semblablement que la droite $A\Gamma$ est coupée en extrême et moyenne raison au point Θ , et que son plus grand segment $\Gamma\Theta$ est égal au côté du pentagone. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

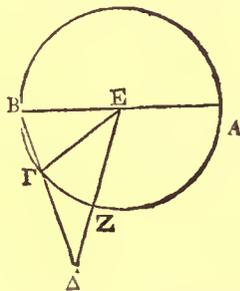
PROPOSITIO IX.

Εάν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἑγγραφομένων συντεθῶσιν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ.

Si hexagoni latus et latus decagoni in eodem circulo descriptorum componantur; tota recta extremâ et mediâ ratione secta est, et major ipsius portio est hexagoni latus.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ, τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἑγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας· λέγω ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ΑΒΓ circulo descriptorum figurarum, decagoni quidem sit latus ΒΓ, hexagoni vero ΓΔ, et sint in directum; dico totam rectam ΒΔ extremâ et mediâ ratione secari in Γ, et majorem ejus portionem esse ΓΔ.



Εἰλήφθω γάρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω³ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. Καὶ ἐπεὶ

Sumatur enim centrum circuli, et sit E punctum, et jungantur ipsæ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, et producatur ΒΕ ad Α. Et quoniam decagoni æqui-

PROPOSITION IX.

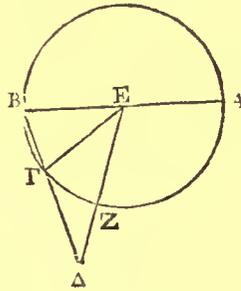
Si l'on ajoute ensemble le côté de l'hexagone et le côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle, la droite entière sera coupée en extrême et moyenne raison, et son plus grand segment sera le côté de l'hexagone.

Soit le cercle ΑΒΓ; décrivons ces polygones dans le cercle ΑΒΓ; que ΒΓ soit le côté du décagone, et ΓΔ le côté de l'hexagone, et que ces côtés soient placés en ligne droite; je dis que la droite entière ΒΔ est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΓΔ est son plus grand segment.

Car prenons le centre du cercle, et que ce soit le point Ε; joignons ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, et prolongeons ΒΕ vers le point Α. Puisque ΒΓ est le côté d'un décagone équi-

δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστίν ἡ ΒΓ, πενταπλασίον ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφέρειας· τετραπλασίον ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλασίον ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ ΕΓ εὐθεΐα τῇ ΓΔ, ἑκατέρα γὰρ

lateri latus est ΒΓ, quintupla igitur ΑΓΒ circumferentia circumferentiæ ΒΓ; quadrupla igitur ΑΓ circumferentia circumferentiæ ΓΒ. Ut autem ΑΓ circumferentia ad ipsam ΓΒ ita ΑΕΓ angulus ad ipsum ΓΕΒ; quadruplus igitur angulus ΑΕΓ anguli ΓΕΒ. Et quoniam æqualis est ΕΒΓ angulus ipsi ΕΓΒ, ergo ΑΕΓ angulus duplus est ipsius ΕΓΒ. Et quoniam æqualis est ΕΓ recta ipsi



αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένου⁴, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ⁵. διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία⁶ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία εἰδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. Εδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ

ΓΔ, utraque enim ipsarum æqualis est hexagoni lateri in ΑΒΓ circulo descripti, æqualis est et ΓΕΔ angulus angulo ΓΔΕ; duplus igitur angulus ΕΓΒ ipsius ΕΔΓ. Sed ΕΓΒ anguli duplus ostensus est ipse ΑΕΓ; quadruplus igitur ΑΕΓ ipsius ΕΔΓ. Ostensus autem est et anguli ΒΕΓ quadruplus ipse ΑΕΓ;

latéral, l'arc ΑΓΒ est quadruple de l'arc ΒΓ; l'axe ΑΓ est donc triple de l'arc ΓΒ. Mais l'arc ΑΓ est à l'arc ΓΒ comme l'angle ΑΕΓ est à l'angle ΓΕΒ (33. 6); l'angle ΑΕΓ est donc quadruple de l'angle ΓΕΒ. Et puisque l'angle ΕΒΓ est égal à l'angle ΕΓΒ (5. 1), l'angle ΑΕΓ sera double de l'angle ΕΓΒ (32. 1). Et puisque la droite ΕΓ est égale à ΓΔ, car chacune de ces droites est égale au côté de l'hexagone décrit dans le cercle ΑΒΓ (15. 4), l'angle ΓΕΔ sera égal à l'angle ΓΔΕ (5. 1); l'angle ΕΓΒ est donc double de l'angle ΕΔΓ (52. 1). Mais on a démontré que l'angle ΑΕΓ est double de l'angle ΕΓΒ; l'angle ΑΕΓ est donc quadruple de l'angle ΕΔΓ. Mais on a démontré que l'angle ΑΕΓ est quadruple de l'angle ΒΕΓ; l'angle ΕΔΓ est donc égal

ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἢ ὑπὸ ΕΔΓ τῆ ὑπὸ ΒΕΓ. Κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΔ καὶ τοῦ ΒΕΓ, ἢ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΒΕΔ λοιπῆ⁷ τῆ ὑπὸ ΕΓΒ ἔστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ⁸ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνω· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἢ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. Ἰση δὲ ἢ ΕΒ τῆ ΔΓ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἢ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Μείζων δὲ ἢ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα⁹ καὶ ἢ ΔΓ τῆς ΓΒ· ἢ ΒΔ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά¹⁰ ἐστὶν ἢ ΔΓ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

æqualis igitur ipse ΕΔΓ ipsi ΒΕΓ. Communis autem duobus triangulis, et ΒΕΔ et ΒΕΓ, angulus ΕΒΔ; et reliquus igitur ΒΕΔ reliquo ΕΓΒ est æqualis; æquiangulum igitur est ΕΒΔ triangulum triangulo ΕΒΓ; proportionaliter igitur est ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΕΒ ad ΒΓ. Æqualis autem ΕΒ ipsi ΔΓ; est igitur ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΔΓ ad ΓΒ. Major autem ΒΔ ipsâ ΔΓ; major igitur et ΔΓ ipsâ ΓΒ; ergo recta ΒΔ extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, et major ipsius portio est ΔΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ¹ ἢ τοῦ πεντάγωνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον¹ πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω² τὸ

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus potest et latus hexagoni et latus decagoni in eodem circulo descriptorum.

Sit circulus ΑΒΓΔΕ, et in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterum describatur ΑΒΓΔΕ;

à l'angle ΒΕΓ. Mais l'angle ΕΒΔ est commun aux deux triangles ΒΕΔ, ΒΕΓ; l'angle restant ΒΕΔ est donc égal à l'angle restant ΕΓΒ (32. 1); le triangle ΕΒΔ est donc équiangle avec le triangle ΕΒΓ; la droite ΔΒ est donc à ΒΕ comme ΕΒ est à ΒΓ (4. 6). Mais ΕΒ est égal à ΔΓ (15. 4); la droite ΒΔ est donc à ΔΓ comme ΔΓ est à ΓΒ. Mais la droite ΒΔ est plus grande que ΔΓ; la droite ΔΓ est donc plus grande que ΓΒ; la droite ΒΔ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Γ (déf. 3. 6), et ΔΓ est son plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION X.

Si l'on décrit dans un cercle uu pentagone équilatéral, le carré du côté du pentagone sera égal à la somme des carrés du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle.

Soit le cercle ΑΒΓΔΕ, et décrivons dans le cercle ΑΒΓΔΕ le pentagone équila-

ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν, τῶν εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον², καὶ ἐπιζεύχθεῖσα ἡ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἦχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἦχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. Καὶ³ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφέρεια, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πενταγώνου δὲ⁴ ἡ ΓΔ· δεκαγώνου⁵ ἄρα ἡ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ· ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· διπλὴ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρὰ ἴστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ⁶ ΚΜ ἴστί διπλῆ. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας,

dico ΑΒΓΔΕ pentagoni latus posse et latus hexagoni et latus decagoni in eodem ΑΒΓΔΕ circulo descriptorum.

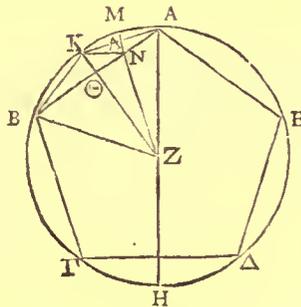
Sumatur enim centrum circuli punctum Ζ, et juncta ΑΖ producatuur ad Η punctum, et jungatur ΖΒ, et à puncto Ζ ad ΑΒ perpendicularis agatur ΖΘ, et producatuur ad Κ, et jungantur ipsæ ΑΚ, ΚΒ, et rursus a puncto Ζ ad ΑΚ perpendicularis agatur ΖΛ, et producatuur ad Μ, et jungatur ΚΝ. Et quoniam æqualis est ΑΒΓΗ circumferentia circumferentiæ ΑΕΔΗ, ex quibus ΑΒΓ ipsi ΑΕΔ est æqualis; reliqua igitur ΓΗ circumferentia reliquæ ΔΗ est æqualis. Pentagoni autem latus ipsa ΔΓ; decagoni igitur latus ipsa ΓΗ. Et quoniam æqualis est ΑΖ ipsi ΖΒ, et perpendicularis ΖΘ; æqualis igitur et ΑΖΚ angulus ipsi ΚΖΒ; quare et circumferentia ΑΚ ipsi ΚΒ est æqualis; dupla igitur ΑΒ circumferentia circumferentiæ ΒΚ; decagoni igitur latus est recta ΑΚ. Propter eadem utique et ΑΓ ipsius ΚΜ est dupla. Et quoniam dupla est ΑΒ circumferentia cir-

téral ΑΒΓΔΕ; je dis que le carré du côté du pentagone ΑΒΓΔΕ est égal à la somme des carrés de l'hexagone et du décagone, ces polygones étant décrits dans le cercle ΑΒΓΔΕ.

Car prenons Ζ le centre du cercle; ayant joint ΑΖ, prolongeons cette droite vers le point Η; joignons ΖΒ, du point Ζ menons la droite ΖΘ perpendiculaire à ΑΒ; prolongeons cette droite vers Κ; joignons ΑΚ, ΚΒ; du point Ζ menons ΖΑ perpendiculaire à ΑΚ; prolongeons cette droite vers Μ, et joignons ΚΝ. Puisque l'arc ΑΒΓΗ est égal à l'arc ΑΕΔΗ, et que l'arc ΑΒΓ est égal à l'arc ΑΕΔ, l'arc restant ΓΗ sera égal à l'arc restant ΔΗ. Mais ΓΔ est le côté du pentagone; la droite ΓΗ est donc le côté du décagone. Et puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que ΖΘ est une perpendiculaire, l'angle ΑΖΚ sera égal à ΚΖΒ; l'arc ΑΚ est donc égal à l'arc ΚΒ; l'arc ΑΒ est donc double de l'arc ΒΚ; la droite ΑΚ est donc le côté du décagone. Par la même raison, l'arc ΑΚ est double de l'arc ΚΜ. Et puisque l'arc

ἴση δὲ ἢ ΓΔ περιφέρεια τῆ AB περιφέρειᾶ· διπλῆ
 ἄρα καὶ ἢ ΓΔ περιφέρεια τῆς BK περιφέρειᾶς.
 Ἔστι δὲ ἢ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ· ἴση
 ἄρα ἢ ΓΗ περιφέρεια τῆ BK περιφέρειᾶ⁷. Ἀλλὰ ἢ
 BK τῆς KM ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἢ ΚΑ· καὶ ἢ
 ΓΗ ἄρα τῆς KM ἐστὶ διπλῆ. Ἀλλὰ μὲν καὶ⁸ ἢ
 ΓB περιφέρεια τῆς BK περιφέρειᾶς ἐστὶ διπλῆ,

cumferentiæ BK, æqualis autem ΓΔ circumferentia circumferentiæ AB; dupla igitur et ΓΔ circumferentia circumferentiæ BK. Est autem ΓΔ circumferentia et ipsius ΓΗ dupla; æqualis igitur ΓΗ circumferentia ipsi BK circumferentiæ. Sed BK ipsius KM est dupla, quoniam et ΚΑ; et ΓΗ igitur ipsius KM est dupla. Sed quidem et ΓB circumferentia circumferentiæ BK est du-



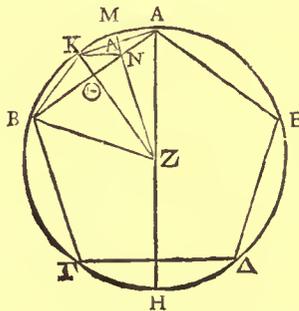
ἴση γὰρ ἢ ΓB περιφέρεια τῆ BA περιφέρειᾶ⁹.
 καὶ ὅλη ἄρα ἢ HB περιφέρεια τῆς¹⁰ BM ἐστὶ
 διπλῆ· ὥστε καὶ γωνία ἢ ὑπὸ HZB γωνίας τῆς
 ὑπὸ BZM ἐστὶ¹¹ διπλῆ. Ἔστι δὲ ἢ ὑπὸ HZB καὶ
 τῆς ὑπὸ ZAB διπλῆ, ἴση γὰρ ἢ ὑπὸ ZAB τῆ ὑπὸ
 ABΓ· καὶ ἢ ὑπὸ BZN ἄρα τῆ ὑπὸ ZAB ἐστὶν ἴση.
 Κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ABZ καὶ τοῦ
 BZN, ἢ ὑπὸ ABZ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ AZB
 λοιπῆ τῆ ὑπὸ BNZ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ
 καὶ¹² τὸ ABZ τρίγωνον τῷ BZN τριγώνῳ· ἀνά-

pla; æqualis enim ΓB circumferentia circumferentiæ BA; et tota igitur HB circumferentia ipsius BM est dupla; quare et angulus HZB anguli BZM est duplus. Est autem ipse HZB et ipsius ZAB duplus, æqualis enim ZAB ipsi ABΓ; et BZN igitur ipsi ZAB est æqualis. Communis autem duobus triangulis, et ABZ et BZN, angulus ABZ; reliquus igitur AZB reliquo BNZ est æqualis; æquiangulum igitur est et ABZ triangulum triangulo BZN; proportiona-

AB est double de l'arc BK, et que l'arc ΓΔ est égal à l'arc AB, l'arc ΓΔ sera double de l'arc BK. Mais l'arc ΓΔ est double de l'arc ΓΗ, l'arc ΓΗ est donc égal à l'arc BK. Mais l'arc BK est double de KM, parce que KA l'est de KM; l'arc ΓΗ est donc double de KM. Mais l'arc ΓB est double de l'arc BK, car l'arc ΓB est égal à l'arc BA; l'arc entier HB est donc double de l'arc BM; l'angle HZB est donc double de l'angle BZM (33. 6). Mais l'angle HZB est double de l'angle ZAB (32. 1), car l'angle ZAB est égal à l'angle ABΓ (5. 1); l'angle BZN est donc égal à l'angle ZAB. Mais l'angle ABZ est commun aux deux triangles ABZ, BZN; l'angle restant AZB est donc égal à l'angle restant BNZ (32. 1); le triangle ABZ est donc équiangle avec le triangle

λογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν BN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς¹³ BZ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AA τῆς AK, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ AN· βάσις ἄρα καὶ¹⁴ ἡ KN βάσει τῆς AN ἐστὶν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AKN γωνία τῆς ὑπὸ AAN ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ AAN τῆς ὑπὸ KBN ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AKN ἄρα τῆς ὑπὸ KBN ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ τῶν

liter igitur est ut recta AB ad BZ ita ZB ad BN; rectangulum igitur sub AB, BN æquale est quadrato ex BZ. Rursus quoniam æqualis est AA ipsi AK, communis autem et ad rectos ipsa AN; basis igitur et KN basi AN est æqualis; et angulus igitur AKN angulo AAN est æqualis. Sed angulus AAN angulo KBN est æqualis; et AKN igitur angulus angulo KBN est æqualis. Et communis duobus triangulis, et AKB et



δύο τριγώνων, τοῦ τε AKB καὶ τοῦ AKN, ἡ ὑπὸ NAK¹⁵. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AKB λοιπῆ τῆς ὑπὸ KNA ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ KBA τρίγωνον τῷ KNA τριγώνῳ. Ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BA εὐθεῖα πρὸς τὴν AK οὕτως ἡ KA¹⁶ πρὸς τὴν AN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA, AN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AK. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BN ἴσον

AKN, angulus NAK; reliquus igitur AKB reliquo KNA est æqualis; æquiangulum igitur est KBA triangulum triangulo KNA. Proportionaliter igitur est ut BA recta ad AK ita KA ad AN; rectangulum igitur sub BA, AN est æquale quadrato ex AK. Ostensum est autem et rectangulum sub AB, BN æquale quadrato ex BZ;

BZN; la droite AB est donc à BZ comme BZ est à BN (4. 6); le rectangle sous AB, BN est donc égal au carré de BZ (17. 6). De plus, puisque AA est égal à AK, et que la perpendiculaire AN est commune; la base KN sera égale à la base AN (4. 1); l'angle AKN est donc égal à l'angle AAN. Mais l'angle AAN est égal à l'angle KBN (5. 1); l'angle AKN est donc égal à l'angle KBN. Mais l'angle NAK est commun aux deux triangles AKB, AKN; l'angle restant AKB est donc égal à l'angle restant KNA (32. 1); le triangle KBA est donc équiangle avec le triangle KNA. La droite BA est donc à AK comme KA est à AN; le rectangle sous BA, AN est donc égal au carré de AK (17. 6). Mais on a démontré que le rectangle sous AB, BN est égal

τῶ ἀπὸ τῆς BZ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BN μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AN, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB, ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς BZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AK. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν AB πενταγώνου πλευρὰ, ἡ δὲ BZ ἑξαγώνου, ἡ δὲ AK δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

rectangulum igitur sub AB, BN cum rectangulo sub BA, AN, quod est quadratum ex AB, æquale est quadrato ex BZ cum quadrato ex AK. Et est quidem AB pentagoni latus, ipsa BZ vero latus hexagoni, ipsa AK autem latus decagoni.

Ergo pentagoni, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἀναλογὸς ἐστὶν ἡ καλουμένη ἑλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραψάτω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἑλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Z σημεῖον, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθω

Si in circulo rationalem habente diametrum pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus est irrationalis quæ appellatur minor.

In circulo enim ΑΒΓΔΕ rationalem habente diametrum pentagonum æquilaterum describatur ΑΒΓΔΕ; dico pentagoni latus irrationalem esse quæ appellatur minor.

Sumatur enim centrum circuli punctum Z; et jungantur AZ, ZB et producantur ad Η, Θ puncta, et jungatur ΑΓ; et ponatur ipsius AZ quarta

au carré de BZ; le rectangle sous AB, BN, conjointement avec le rectangle sous BA, AN, ce qui est le carré de AB, est donc égal au carré de BZ, conjointement avec le carré de AK (2. 2). Mais la droite AB est le côté du pentagone, la droite BZ le côté de l'hexagone, et AK le côté du décagone. Donc si, etc.

PROPOSITION XI.

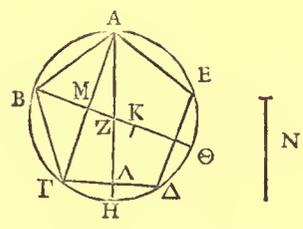
Si l'on décrit un pentagone équilatéral dans un cercle ayant un diamètre rationel, le côté du pentagone sera l'irrationelle qu'on appelle mineure.

Décrivons un pentagone équilatéral ΑΒΓΔΕ dans un cercle ΑΒΓΔΕ qui ait son diamètre rationel; je dis que le côté du pentagone est l'irrationelle qu'on appelle mineure.

Car prenons le centre Z du cercle; joignons AZ, ZB; prolongeons ces droites vers les points Η, Θ; joignons ΑΓ, et faisons ZK égal à la quatrième partie de AZ.

ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῆς² ΑΖ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. Ρητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητὴ· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητὴ ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῆ ΑΔΗ περιφέρειᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῆ ΑΕΔ ἴση ἐστὶ³. λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῆ τῆ ΗΔ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν⁴ τὴν ΑΔ, συναγόνται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Α γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΔΓ τῆς⁵ ΓΑ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ⁶ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαὶ εἰσι, καὶ διπλῆ ἄρα⁷ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΑΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΑΓ

pars ipsa ΖΚ. Rationalis autem ΑΖ; rationalis igitur et ΖΚ. Est autem et ΒΖ rationalis; tota igitur ΒΚ rationalis est. Et quoniam æqualis est ΑΓΗ circumferentia circumferentiæ ΑΔΗ, ex quibus ΑΒΓ ipsi ΑΕΔ æqualis est; reliqua igitur ΓΗ reliquæ ΗΔ est æqualis. Et si jungamus ΑΔ, fient recti anguli ad Α, et ΔΓ dupla ipsius ΓΑ. Propter eadem utique et anguli ad Μ recti sunt, et dupla igitur ΑΓ ipsius ΓΜ. Quoniam igitur æqualis est angulus ΑΑΓ ipsi ΑΜΖ, communis autem duobus triangulis, et ΑΑΓ



καὶ τοῦ ΑΜΖ, ἡ ὑπὸ ΑΑΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΑ λοιπῆ τῆ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ⁸ τὸ ΑΓΑ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνω· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν⁹ ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν¹⁰ ΖΑ, καὶ τῶν ἐγρουμένων τὰ

et ΑΜΖ, angulus ΑΑΓ; reliquus igitur ΑΓΑ reliquo ΜΖΑ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΓΑ triangulum triangulo ΑΜΖ; proportionaliter igitur est ut ΑΓ ad ΓΑ ita ΜΖ ad ΖΑ, et antecedentium dupla; ut igitur dupla ipsius ΑΓ ad

Puisque la droite AZ est rationnelle, la droite ZK sera rationnelle. Mais BZ est rationnel; la droite entière BK est donc rationnelle. Et puisque l'arc AGH est égal à l'arc ADH, et que l'arc ABG est égal à l'arc AED, l'arc restant GH sera égal à l'arc restant HD. Joignons AD; les angles seront droits en A, et ΔΓ sera double de ΓΑ (35. 1). Par la même raison, les angles seront droits en M, et ΑΓ sera double de ΓΜ. Et puisque l'angle ΑΑΓ est égal à l'angle ΑΜΖ, et que l'angle ΑΑΓ est commun aux deux triangles ΑΑΓ, ΑΜΖ, l'angle restant ΑΓΑ sera égal à l'angle restant ΜΖΑ (32. 1); le triangle ΑΓΑ est donc semblable au triangle ΑΜΖ; la droite ΑΓ est donc à ΓΑ comme ΜΖ est à ΖΑ (4. 6); doublant les antécédents, le double

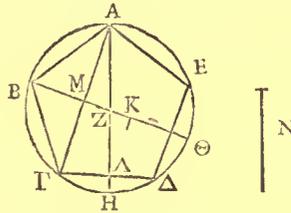
διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ. Ὡς δὲ¹¹ ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ, καὶ τῶν ἐπομένων τὰ ἡμίσεια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ΖΑ. Καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΑ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. Συνθέντι καὶ ὡς συναμφοτέρος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ¹². Καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου ὑποτείνουσας, οἷον τῆς ΑΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετραμμένης¹³, τὸ μείζον τμήμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τευτέστι τῇ¹⁴ ΔΓ· τὸ δὲ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμίσιας τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς ΑΓ ἡμίσεια

GA ita dupla ipsius MZ ad ZA. Ut autem ipsius MZ dupla ad ZA ita MZ ad dimidiam ipsius ZA ; et ut igitur dupla ipsius ΑΓ ad GA ita MZ ad dimidiam ipsius ZA , et consequentium dimidia ; ut igitur dupla ipsius ΑΓ ad dimidiam ipsius GA ita MZ ad quartam partem ipsius ZA. Et est ipsius quidem ΔΓ dupla ΔΓ, ipsius vero ΑΓ dimidia ΓΜ, ipsius autem ΖΑ quarta pars ΖΚ; est igitur ut ΔΓ ad ΓΜ ita MZ ad ΖΚ. Componendo et ut utraque ΔΓΜ ad ΓΜ ita ΜΚ ad ΚΖ ; et ut igitur ipsum ex utràque ΔΓΜ ad ipsum ex ΓΜ ita ipsum ex ΜΚ ad ipsum ex ΚΖ. Et quoniam duo latera pentagoni subtendentis, ut ΑΓ, extremâ et mediâ ratione sectæ, major portio æqualis est pentagoni lateri, hoc est ipsi ΔΓ; major autem portio assumens dimidium totius quintuplum potest dimidiæ totius, et est totius ΑΓ dimidia ΓΜ; ipsum igitur ex ipsâ ΔΓΜ

de ΑΓ sera à ΓΑ comme le double de ΜΖ est à ΖΑ. Mais le double de ΜΖ est à ΖΑ comme ΜΖ est à la moitié de ΖΑ; le double de ΑΓ est donc à ΓΑ comme ΜΖ est à la moitié de ΖΑ; prenant les moitiés des conséquents, le double de ΑΓ sera à la moitié de ΓΑ comme ΜΖ est au quart de ΖΑ. Mais la droite ΔΓ est double de ΑΓ, la droite ΓΜ est la moitié de ΑΓ, et ΖΚ est le quart de ΖΑ; la droite ΔΓ est donc à ΓΜ comme ΜΖ est à ΖΚ; donc, par addition, la somme des droites ΔΓ, ΓΜ est à ΓΜ comme ΜΚ est à ΚΖ (18. 5); le carré de la somme des droites ΔΓ, ΓΜ est donc au carré de ΓΜ comme le carré de ΜΚ est au carré de ΚΖ (22. 6). Et puisqu'une droite telle que ΑΓ, qui soutiend deux côtés du pentagone, est coupée en extrême et moyenne raison, que le plus grand segment est égal au côté du pentagone, c'est-à-dire à ΔΓ (8. 13); que le carré de la somme du plus grand segment et de la moitié de la droite entière est égal au quintuple du carré de la moitié de la droite entière (1. 13), et que ΓΜ est la moitié de la droite entière ΑΓ; le carré

ἢ ΓΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλασίον ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλασίον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὴν ἄρα ἔστι¹⁶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἔστιν

tanquam ex unâ quintuplum est ipsius ex ΓΜ. Ut autem ipsum ex ipsâ ΔΓΜ tanquam ex unâ ad ipsum ex ΓΜ ita ostensum est ipsi ex ΜΚ ad ipsum ex ΚΖ; quintuplum igitur ipsum ex ΜΚ ipsius ex ΚΖ. Rationale autem ipsum ex ΚΖ, rationalis enim diameter; rationale igitur est et ipsum ex ΜΚ; rationalis igitur est ipsa ΜΚ, ratio-



ἢ ΜΚ, λόγον γὰρ ἔχει ἐν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ¹⁷. Καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἔστιν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἔστιν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ¹⁸. εἴκοσι πενταπλασίον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ¹⁹. Πενταπλασίον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλασίον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ²⁰ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

nem enim habet quam numerus ad numerum ipsum ex ΜΚ ad ipsum ex ΚΖ. Et quoniam quadrupla est ΒΖ ipsius ΖΚ, quintupla igitur est ΒΚ ipsius ΚΖ; viginti quintuplum igitur ipsum ex ΜΚ ipsius ex ΚΖ; quintuplum igitur ipsum ex ΒΚ ipsius ex ΚΜ; ipsum igitur ex ΒΚ ad ipsum ex ΚΜ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommen-

de la somme des droites ΔΓ, ΓΜ sera quintuple du carré de ΓΜ. Mais on a démontré que le carré de la somme des droites ΔΓ, ΓΜ est au carré de ΓΜ comme le carré de ΜΚ est au carré de ΚΖ; le carré de ΜΚ est donc quintuple du carré de ΚΖ. Mais le carré de ΚΖ est rationel (déf. 6. 10), car le diamètre est rationel; le carré de ΜΚ est donc aussi rationel (6. 10); la droite ΜΚ est donc rationelle; car le carré de ΜΚ a avec le carré de ΚΖ la raison qu'un nombre a avec un nombre. Et puisque la droite ΒΖ est quadruple de ΖΚ, la droite ΒΚ sera quintuple de ΚΖ; le carré de ΒΚ est donc égal à vingt-cinq fois le carré de ΚΖ (côr. 20. 6). Mais le carré de ΜΚ est quintuple du carré de ΚΖ; le carré de ΒΚ est donc quintuple du carré de ΚΜ; le carré de ΒΚ n'a donc pas avec le carré de ΚΜ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la

ἀριθμὸν ἀσύμμετρος ἄρα ἢ ΒΚ²¹ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν αἰ ΒΚ, ΚΜ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἰ δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητῆ ἀφαιρεθῆ δυνάμει μόνον σύμμετρος εὔσα τῇ ἔλλῃ, ἢ λοιπὴ ἀλογός ἐστίν²². ἀποτομὴ ἄρα ἢ ΜΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἢ ΜΚ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. Ω δὴ²³ μείζον ἐστίν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Ν· ἢ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μείζον δύναται τῇ Ν. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστίν ἢ ΚΖ τῇ ΖΒ, καὶ συνθέντι σύμμετρος ἐστίν ἢ ΚΒ τῇ ΒΖ. Ἀλλὰ ἢ ΒΖ τῇ ΒΘ σύμμετρος ἐστίν μήκει²⁴. καὶ ἢ ΚΒ ἄρα τῇ ΒΘ σύμμετρος ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστίν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον ἔχει ὅν Ε πρὸς Α²⁵. ἀναστρέφαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ν λόγον ἔχει ὅν Ε πρὸς Δ, οὗχ ὅν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀσύμμετρος ἄρα μήκει²⁶ ἐστίν ἢ ΒΚ τῇ Ν· ἢ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου

surabilis igitur ΒΚ ipsi ΚΜ longitudine. Et est rationalis utraque ipsarum; ergo ΒΚ, ΚΜ rationales sunt potentia solum commensurabiles. Si autem a rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est; apotome igitur ΜΒ, congruens autem ipsi ipsa ΜΚ. Dico igitur et quartam. Quo igitur majus est ipsum ex ΒΚ ipso ex ΚΜ, illi æquale sit ipsum ex Ν; ipsa igitur ΒΚ plus potest quam ΚΜ ipsa Ν. Et quoniam commensurabilis est ΚΖ ipsi ΖΒ, et componendo commensurabilis est ΚΒ ipsi ΒΖ. Sed ΒΖ ipsi ΒΘ commensurabilis est longitudine; et ΚΒ igitur ipsi ΒΘ commensurabilis est. Et quoniam quintuplum est ipsum ex ΒΚ ipsius ex ΚΜ; ipsum igitur ex ΒΚ ad ipsum ex ΚΜ rationem habet quam quinque ad unum; convertendo igitur ipsum ex ΒΚ ad ipsum ex Ν rationem habet quam quinque ad quatuor, et non eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur longitudine est ΒΚ ipsi Ν; ipsa ΒΚ igitur plus potest quam ΚΜ qua-

droite ΒΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ (9. 10). Mais chacune de ces droites est rationelle; les droites ΒΚ, ΚΜ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais si d'une droite rationelle on ôte une droite rationelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière, la droite restante est irrationnelle (74. 10); la droite ΜΒ est donc un apotome, et la droite ΜΚ sa congruente. Je dis que ΜΒ est un quatrième apotome. Que le carré de Ν soit égal à la surface dont le carré de ΒΚ surpasse le carré de ΚΜ; la puissance de ΒΚ sera plus grande que la puissance de ΚΜ de la puissance de Ν. Et puisque ΚΖ est commensurable avec ΖΒ; par addition, ΚΒ sera commensurable avec ΒΖ. Mais ΒΖ est commensurable en longueur avec ΒΘ; la droite ΚΒ est donc commensurable avec ΒΘ (12. 10). Mais le carré de ΒΚ est quintuple du carré de ΚΜ; le carré de ΒΚ a donc avec le carré de ΚΜ la raison que cinq a avec un; donc, par conversion, le carré de ΒΚ a avec le carré de Ν la raison que cinq a avec quatre (cor. 19. 5), et non pas celle qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΚ est donc incommensurable en longueur avec Ν (9. 10); la puissance de ΒΚ surpasse donc la puissance de ΚΜ du carré d'une droite incommensurable

ἑαυτῆ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΒΚ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΚΜ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ μήκει²⁷, καὶ ὅλη ἡ ΒΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκείμενῃ ῥητῇ τῇ ΒΘ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΜΒ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ῥηθωγώνιον ἀλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἀλόγος ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων. Δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΒ, ΒΜ ἢ ΑΒ, διὰ τὸ ἐπιζευγυμένως τῆς ΑΘ ἰσογώνιον γίνεσθαι²⁸ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΑΒΜ τριγώνῳ²⁹, καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΜ· ἡ ἄρα ΑΒ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἀλόγος ἐστίν³⁰ ἡ καλεῖται ἐλάττων. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

drato ex rectâ sibi incommensurabili. Quoniam igitur tota ΒΚ quam congruens ΚΜ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et tota ΒΚ commensurabilis est expositæ rationali ΒΘ; apotome igitur quarta est ΜΒ. Ipsum autem sub rationali et apotome quartâ contentum rectangulum irrationale est, et potens ipsum irrationalis est, quæ appellatur minor. Potest autem ipsum sub ΘΒ, ΒΜ ipsa ΑΒ, propterea quod junctâ ΑΘ æquiangulum fit ΑΒΘ triangulum triangulo ΑΒΜ, et est ut ΘΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΜ; ipsa ΑΒ igitur pentagoni latus est irrationalis quæ appellatur minor. Quod oportebat ostendere.

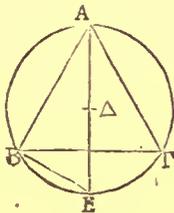
avec ΒΚ. Et puisque la puissance de la droite entière ΒΚ est plus grande que la puissance de la congruente ΚΜ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΒΚ, et que la droite entière ΒΚ est commensurable avec la rationelle exposée ΒΘ; la droite ΜΒ sera un quatrième apotome (déf. tr. 4. 10). Et puisque le rectangle compris sous une rationelle et sous un quatrième apotome est irrationnel (95. 10), que la droite qui peut cette surface est aussi irrationelle, et s'appèle mineure, et que ΑΒ peut le rectangle sous ΘΒ, ΒΜ (17. 6), parce qu'ayant joint ΑΘ, le triangle ΑΒΘ est équiangle avec ΑΒΜ (8. 6), et que ΒΘ est à ΒΑ comme ΑΒ est à ΒΜ (4. 6); le côté ΑΒ du pentagone sera l'irrationelle qu'on appèle mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

PROPOSITIO XII.

Εάν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἢ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίον ἔστί τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίον ἔστί τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεξευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ ΒΕΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἔστί τῆς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας· ἡ ἄρα ΒΕ περιφέρεια ἕκτον ἔστί μέρος² τῆς τοῦ κύκλου

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, trianguli latus potentiâ triplum est ejus quæ ex centro circuli.

Siq̄ circulus ΑΒΓ, et in ipso triangulum æquilaterum describatur ΑΒΓ; dico trianguli ΑΒΓ unum latus potentiâ triplum esse ejus quæ est ex centro circuli ΑΒΓ.

Sumatur enim circuli centrum Δ, et juncta ΑΔ producat̄ur ad Ε, et jungatur ΒΕ. Et quoniam æquilaterum est ΑΒΓ triangulum, ipsa ΒΕΓ igitur circumferentia tertia pars est circumferentiæ circuli ΑΒΓ; ergo ΒΕ circumferentia sexta est pars circumferentiæ circuli; hexagoni

PROPOSITION XII.

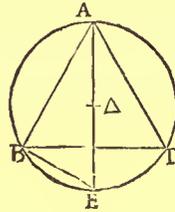
Si l'on décrit dans un cercle un triangle équilatéral, le quarré du côté du triangle sera triple du quarré du rayon.

Soit le cercle ΑΒΓ, et dans ce cercle décrivons le triangle équilatéral ΑΒΓ; je dis que le quarré du côté du triangle ΑΒΓ est triple du quarré du rayon du cercle ΑΒΓ.

Car prenons le centre Δ du cercle; joignons ΑΔ; prolongeons cette droite vers Ε, et joignons ΒΕ. Puisque le triangle ΑΒΓ est équilatéral, l'arc ΒΕΓ est la troisième partie de la circonférence du cercle ΑΒΓ; l'arc ΒΕ est donc la sixième partie de la circonférence du cercle; la droite ΒΕ est donc le côté de l'hexagone; cette

περιφερείας· ἕξαγώνου ἄρα πλευρά ἐστίν³ ἢ BE εὐθεία· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τῇ ΔΕ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιόν ἄρα⁴ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE. Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ

igitur latus est recta BE; æqualis igitur est ipsi ΔΕ quæ ex centro. Et quoniam dupla est ΑΕ ipsius ΕΔ, quadruplum igitur ipsum ex ΑΕ ipsius ex ΔΕ, hoc est ipsius ex BE. Æquale autem ipsum



τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BE· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BE τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς BE⁵. Ἴση δὲ ἡ BE τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου, καὶ τὰ ἕξῃς.

ex ΑΕ ipsis ex AB, BE; ipsa igitur ex AB, BE quadrupla sunt ipsius ex BE; dividendo igitur ipsum ex AB triplum est ipsius ex BE. Æqualis autem BE ipsi ΔΕ; ipsum igitur ex AB triplum est ipsius ex ΔΕ.

Trianguli igitur latus, etc.

droite est donc égale au rayon ΔΕ du cercle (15. 4). Et puisque ΑΕ est double de ΕΔ, le carré de ΑΕ sera quadruple du carré de ΕΔ, c'est-à-dire du carré de BE (cor. 20. 6). Mais le carré de ΑΕ est égal aux carrés des droites AB, BE (47. 1, et 31. 3); la somme des carrés des droites AB, BE est donc quadruple du carré de BE; donc, par soustraction, le carré de AB est triple du carré de BE. Mais BE est égal à ΔΕ; le carré de AB est donc triple du carré de ΔΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

PROPOSITIO XIII.

Πυραμίδα συστήσασθαι ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλευρών¹, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῆς δοθείσης· καὶ δείξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμισοῦ ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν AG τῆς GB · καὶ καταγεγράφθω² ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῆς AB πρὸς ἑρθᾶς ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔA · καὶ ἐκείσθω κύκλος ἡ EZH , ἴσων ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς $\Delta\Gamma$, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EZH κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ EZH · καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $E\Theta$, ΘZ , ΘH · καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ³ EZH κύκλου ἐπιπέδῳ

Pyramidem constituere ex quatuor triangulis æquilateris, et sphaerâ comprehendere datâ; et demonstrare sphaeræ diametrum esse potentiâ sesquialteram lateris pyramidis.

Exponatur datæ sphaeræ diameter AB , et secetur in Γ puncto, ita ut dupla sit AG ipsius GB ; et describatur super AB semicirculus $A\Delta B$, et ducatur a puncto Γ ipsi AB ad rectos $\Gamma\Delta$, et jungatur ΔA ; et exponatur circulus EZH æqualem habens eam quæ ex centro ipsi $\Delta\Gamma$, et describatur in EZH circulo triangulum æquilaterum EZH ; et sumatur centrum circuli ipsum Θ punctum, et jungantur ipsæ $E\Theta$, ΘZ , ΘH ; et crigatur a puncto Θ plano circuli EZH ad rectos ipsa

PROPOSITION XIII.

Construire une pyramide avec quatre triangles équilatéraux; la circonscrire par une sphère donnée, et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est égal aux trois moitiés du carré du côté de la pyramide.

Soit AB le diamètre de la sphère donnée; qu'il soit coupé au point Γ , de manière que AG soit double de GB ; sur AB , décrivons le demi-cercle $A\Delta B$; du point Γ menons $\Gamma\Delta$ perpendiculaire à AB , et joignons ΔA ; soit exposé le cercle EZH ayant pour rayon une droite égale à $\Delta\Gamma$; décrivons dans le cercle EZH le triangle équilatéral EZH (2. 4); prenons le centre Θ de ce cercle, et joignons $E\Theta$, ΘZ , ΘH ; du point Θ menons la droite ΘK perpendiculaire au plan du cercle EZH ; faisons

πρὸς ὀρθὰς ἢ ΘK , καὶ ἀφηρήσθω ἄπὸ τῆς ΘK τῆ $\Lambda\Gamma$ εὐθεία ἴση ἢ ΘK , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ KE , KZ , KH . Καὶ ἐπεὶ ἢ ΘK ὀρθή ἐστὶν πρὸς τὸ τοῦ EZH κύκλου ἐπιπέδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ EZH κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἀπτεται δὲ αἰτῆς ἐκάστη τῶν ΘE , ΘZ , ΘH · ἢ ΘK ἄρα πρὸς ἐκάστην τῶν ΘE , ΘZ , ΘH ὀρθή ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν $\Lambda\Gamma$ τῆ ΘK , ἢ δὲ $\Gamma\Delta$ τῆ ΘE , καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἢ ΔA βάσει τῆ KE ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκαστέρα τῶν KZ , KH τῆ ΔA ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ KE , KZ , KH ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἢ $\Lambda\Gamma$ τῆς ΓB , τριπλῆ ἄρα ἢ AB τῆς $\text{B}\Gamma$. Ὡς δὲ ἢ AB πρὸς τὴν $\text{B}\Gamma$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma^5$, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔA τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZE τοῦ ἀπὸ τῆς $\text{E}\Theta$ τριπλάσιον, καὶ ἐστὶν ἴση ἢ $\Delta\Gamma$ τῆ $\text{E}\Theta$ · ἴση ἄρα καὶ ἢ ΔA τῆ EZ . Ἀλλὰ ἢ ΔA ἐκάστη τῶν KE , KZ , KH ἐδείχθη ἴση· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν EZ , ZH , HE ἐκάστη τῶν KE , KZ , KH

ΘK , et auferatur ab ipsâ ΘK ipsi $\Lambda\Gamma$ rectæ æqualis ipsa ΘK , et jungantur ipsæ KE , KZ , KH . Et quoniam ΘK recta est ad planum circuli EZH ; et ad omnes igitur tangentes ipsam rectas, et existentes in EZH circuli plano, rectos faciet angulos. Contingit autem ipsam unaquæque ipsarum ΘE , ΘZ , ΘH ; ipsa ΘK igitur ad unamquamque ipsarum ΘE , ΘZ , ΘH perpendicularis est. Et quoniam æqualis est quidem ipsa $\Lambda\Gamma$ ipsi ΘK , ipsa vero $\Gamma\Delta$ ipsi ΘE , et rectos angulos continent; basis igitur ΔA basi KE est æqualis. Propter eadem utique et utraque ipsarum KZ , KH ipsi ΔA est æqualis; tres igitur KE , KZ , KH æquales inter se sunt. Et quoniam dupla est $\Lambda\Gamma$ ipsius ΓB , tripla igitur AB ipsius $\text{B}\Gamma$. Ut autem AB ad $\text{B}\Gamma$ ita ipsum ex ΔA ad ipsum ex $\Delta\Gamma$, ut deinceps demonstrabitur; triplum igitur ipsum ex ΔA ipsius ex $\Delta\Gamma$. Est autem et ipsum ex ZE ipsius ex $\text{E}\Theta$ triplum, et est æqualis $\Delta\Gamma$ ipsi $\text{E}\Theta$; æqualis igitur et ΔA ipsi EZ . Sed ΔA unicuique ipsarum KE , KZ , KH ostensa est æqualis; et unaquæque igitur ipsarum EZ , ZH ,

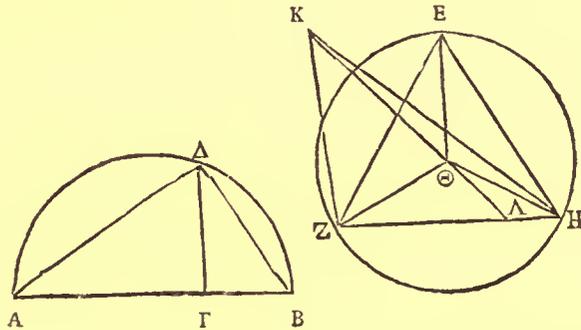
la droite ΘK égale à la droite $\Lambda\Gamma$, et joignons KE , KZ , KH . Puisque ΘK est perpendiculaire au plan du cercle EZH , cette droite fera des angles égaux avec toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans le plan du cercle EZH (déf. 3. 11). Mais chacune des droites ΘE , ΘZ , ΘH rencontre la droite ΘK ; la droite ΘK est donc perpendiculaire à chacune des droites ΘE , ΘZ , ΘH . Et puisque $\Lambda\Gamma$ est égal à ΘK , que $\Gamma\Delta$ est égal à ΘE , et que ces droites comprennent des angles droits, la base ΔA sera égale à la base KE (4. 1). Par la même raison, chacune des droites KZ , KH sera égale à ΔA ; les trois droites KE , KZ , KH sont donc égales entr'elles. Et puisque $\Lambda\Gamma$ est double de ΓB , la droite AB sera triple de $\text{B}\Gamma$. Mais AB est à $\text{B}\Gamma$ comme le quarré de ΔA est au quarré de $\Delta\Gamma$, ainsi qu'on le démontrera plus bas; le quarré de ΔA est donc triple du quarré de $\Delta\Gamma$. Mais le quarré de ZE est triple du quarré de $\text{E}\Theta$ (12. 13), et $\Delta\Gamma$ est égal à $\text{E}\Theta$; la droite ΔA est donc égale à EZ . Mais on a démontré que ΔA est égal à chacune des droites KE , KZ , KH ; chacune des droites EZ , ZH , HE est donc égale à chacune des droites

ἔστιν ἴση· ἰσόσλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρί-
 γωνα τὰ EZH, KEZ, KZH, KHE· πυραμὶς ἄρα
 συνίσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλευρῶν,
 ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ EZH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ
 τὸ Κ σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δο-
 θείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος
 δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυρα-
 μίδος.

HE unicuique ipsarum KE, KZ, KH est æqua-
 lis ; æquilatera igitur sunt quatuor trian-
 gula EZH, KEZ, KZH, KHE ; pyramis igitur
 constituta est ex quatuor triangulis æquilateris,
 cujus basis quidem est EZH triangulum, vertex
 autem Κ punctum.

Oportet igitur ipsam et spherà comprehen-
 dere datà, et ostendere spheræ diametrum
 potentià sesquialteram esse lateris pyramidis.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΚΘ εὐθεῖα
 ἡ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΘΛ. Καὶ ἐπεὶ
 ἔστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν
 ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ,
 ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ
 οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ,

Producantur enim in directum ipsi ΚΘ recta
 ΘΛ, et ponatur ipsi ΒΓ æqualis ipsa ΘΛ.
 Et quoniam est ut ΑΓ ad ΓΔ ita ΓΔ ad ΓΒ ; sed
 æqualis ΑΓ quidem ipsi ΚΘ, ΓΔ vero ipsi ΘΕ,
 ΓΒ autem ipsi ΘΛ ; est igitur ut ΚΘ ad ΘΕ ita
 ΕΘ ad ΘΛ ; ipsum igitur sub ΚΘ, ΘΛ æquale est

KE, KZ, KH ; les quatre triangles EZH, KEZ, KZH, KHE sont donc équilatéraux ; on a donc construit une pyramide comprise par quatre triangles équilatéraux, cette pyramide ayant pour base le triangle EZH, et pour sommet le point K.

Il faut circonscire cette pyramide par la sphère donnée, et démontrer que le carré du diamètre de cette sphère est égal aux trois moitiés du carré du côté de la pyramide.

Car menons ΘΛ dans la direction de ΚΘ, et faisons ΘΛ égal à ΒΓ. Puisque ΑΓ est à ΓΔ comme ΓΔ est à ΓΒ (8. 6), que ΑΓ est égal à ΚΘ, que ΓΔ est égal à ΘΕ, et que ΓΒ est égal à ΘΛ, la droite ΚΘ sera à ΘΕ comme ΕΘ est à ΘΛ ; le rectangle sous ΚΘ,

ΘΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΑ¹⁰ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΑ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ Ε. Επειδήπερ εἴαν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ ΔΕΚ γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι¹¹ τὸ ΕΔΚ τρίγωνον ἑκατέρω τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγώνων. Εἴαν δὲ μενούσης τῆς ΚΑ περινεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ ἕθεν ἤρξαστο φέρεσθαι, ἤξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ, ΛΗ, καὶ ὀρθῶν ὁμοίων γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἴσται¹² ἡ πυραμὶς σφαῖρα περιελημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ ΚΑ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κείται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω δὲ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Επεὶ γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία¹³ ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ. Ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ,

ipsi ex ΕΘ. Et est rectus uterque angulorum ΚΘΕ, ΕΘΑ; ergo super ΚΑ descriptus semicirculus transibit et per punctum Ε. Etenim si jungamus ΕΛ, rectus fiet angulus ΔΕΚ, quia æquiangulum fiet triangulum ΕΔΚ unicuique triangulorum ΕΛΘ, ΕΘΚ. Si igitur manente ΚΑ conversus semicirculus in eodem rursus locum restituatur a quo cœpit moveri, transibit et per puncta Ζ, Η, junctis ΖΛ, ΛΗ, et rectis similiter factis ad puncta Ζ, Η angulis, et erit pyramis sphaerâ comprehensa datâ, etenim sphaeræ diameter ΚΑ æqualis est diametro datæ sphaeræ ipsi ΑΒ, quoniam ipsi quidem ΑΓ æqualis ponitur ΚΘ, ipsi vero ΓΒ ipsa ΘΛ.

Dico denique sphaeræ diametrum sesquialtera esse potentiâ lateris pyramidis.

Quoniam enim dupla est ΑΓ ipsius ΓΒ, tripla igitur ΑΒ ipsius ΒΓ; convertendo igitur sesquialtera est ΒΑ ipsius ΑΓ. Ut autem ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΒΑ ad ipsum ex ΑΔ,

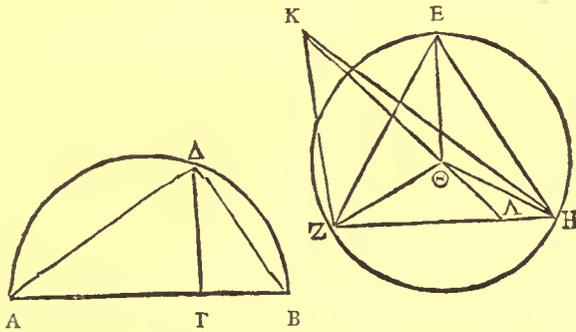
ΘΑ est donc égal au carré de ΕΘ. Mais chacun des angles ΚΘΕ, ΕΘΑ est droit; le demi-cercle décrit sur ΚΑ passera donc par le point Ε. Or, si nous joignons ΕΛ, l'angle ΔΕΚ sera droit, parce que le triangle ΕΔΚ est équiangle avec chacun des triangles ΕΛΘ, ΕΘΚ. Si donc la droite ΚΑ restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir, il passera aussi par les points Ζ, Η; car si l'on joint ΖΛ, ΛΗ, les angles seront semblablement droits en Ζ, Η; et la pyramide sera circonscrite par la sphère donnée, car le diamètre ΚΑ de la sphère est égal au diamètre ΑΒ de la sphère donnée, parce que l'on a fait ΚΘ égal à ΑΓ, et ΘΛ à ΓΒ.

Je dis enfin que le carré du diamètre de la sphère est égal aux trois moitiés du carré du côté de la pyramide.

Car puisque la droite ΑΓ est double de ΓΒ, la droite ΑΒ sera triple de ΒΓ; donc, par conversion, la droite ΒΑ sera égale aux trois moitiés de ΑΓ. Mais ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΒΑ est au carré de ΑΔ, car ayant joint ΒΔ, la droite ΒΑ sera

ἐπειδήπερ ἐπιζευγυμένῃς τῆς ΒΔ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, διὰ τὴν ἰσομοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγώνων, καὶ

quia, junctâ ΒΔ, est ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΔΑ ad ΑΓ, ob similitudinem ipsorum ΔΑΒ, ΔΑΓ triangularum, et quod est ut prima ad tertiam ita



εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ἡμίλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει¹⁴ ἡμίλιον ἔστι τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsam ex primâ ad ipsum ex secundâ; sesquialternum igitur et ipsum ex ΒΑ ipsius ex ΑΔ. Et est ΒΑ quidem datæ sphaeræ diameter, ΑΔ vero æqualis lateri pyramidis.

Sphaeræ igitur diameter potentiâ sesquialtera est lateris pyramidis. Quod oportebat ostendere.

à ΑΔ comme ΔΑ est à ΑΓ (8. 6), à cause de la similitude des triangles ΔΑΒ, ΔΑΓ, et à cause que la première droite est à la troisième comme le carré de la première est au carré de la seconde (cor. 20. 6); le carré de ΒΑ est donc égal aux trois moitiés du carré de ΑΔ. Mais ΒΑ est le diamètre de la sphère donnée, et ΑΔ est égal au côté de la pyramide.

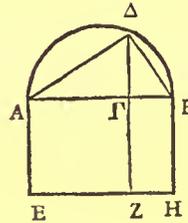
Le carré du diamètre de la sphère est donc égal aux trois moitiés du carré du côté de la pyramide. Ce qu'il fallait démontrer.

Λ Η Μ Μ Α.

LEMMA.

Δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Demonstrandum est, ut AB ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΔ ad ipsum ex ΔΓ.



Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΓ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΒΖ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ἴση γὰρ ἐστίν¹⁶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΓ, τὸ δὲ ΒΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς

Exponatur enim semicirculi figura, et jungatur ΔΒ, et describatur ex ΑΓ quadratum ΕΓ, et compleatur ΖΒ parallelogrammum. Quoniam igitur propterea quod æquiangulum est ΔΑΒ triangulum triangulo ΔΑΓ, est ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΔΑ ad ΑΓ; ipsum igitur sub ΒΑ, ΑΓ æquale est ipsi ex ΑΔ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΕΒ ad ΒΖ, et est ipsum quidem ΕΒ ipsum sub ΒΑ, ΑΓ, æqualis enim est ΕΑ ipsi ΑΓ; ipsum autem ΒΖ ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita

Λ Η Μ Μ Ε.

Il faut démontrer que AB est à ΒΓ comme le carré de ΑΔ est au carré de ΔΓ.
Soit exposée la figure du demi-cercle; joignons ΔΒ; décrivons avec ΑΓ le carré ΕΓ, et achevons le parallélogramme ΖΒ. Puisque le triangle ΔΑΒ est équiangle avec le triangle ΔΑΓ, la droite ΒΑ sera à ΑΔ comme ΔΑ est à ΑΓ (4. 6); le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donc égal au carré de ΑΔ (17. 6). Et puisque ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle ΕΒ est au rectangle ΒΖ (1. 6); que le rectangle ΕΒ est sous ΒΑ, ΑΓ, la droite ΑΕ étant égale à ΑΓ, et que le rectangle ΒΖ est compris sous ΑΓ,

τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ἢ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· ὡς ἄρα ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ὁπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΑΓ, ΓΒ; Et est ipsum quidem sub ΒΑ, ΑΓ æquale ipsi ex ΑΔ, ipsum vero sub ΑΓ, ΓΒ æquale ipsi ex ΔΓ, etenim ΔΓ perpendicularis inter basis portiones ΑΓ, ΓΒ media proportionalis est, quia rectus est angulus ΑΔΒ; ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita ipsum ex ΑΔ ad ipsum ex ΔΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Ὀκταέδρον συστήσασθαι, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν ἢ καὶ τὴν πυραμίδα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Octaedrum constituere, et sphaerâ comprehendere quâ et pyramidem; et demonstrare sphaeræ diametrum potentiâ duplam esse lateris octaedri.

Ἐκκείσθω ἢ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἢ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ῥχθῶ ἀπὸ τοῦ Γ τῆ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΓΔ, καὶ

Exponatur datæ sphaeræ diameter ΑΒ, et secetur bifariam in Γ, et describatur super ΑΒ semicirculus ΑΔΒ, et ducatur a puncto Γ ipsi ΑΒ ad rectos ipsa ΓΔ, et jungatur ΔΒ, et exponatur

ΓΒ, la droite ΑΒ sera à ΒΓ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est égal au carré de ΑΔ, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est égal au carré de ΔΓ, car la perpendiculaire ΔΓ est moyenne proportionnelle entre les segments ΑΓ, ΓΒ de la base (I. 6), à cause que l'angle ΑΔΒ est droit; la droite ΑΒ est donc à ΒΓ comme le carré de ΑΔ est au carré de ΔΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

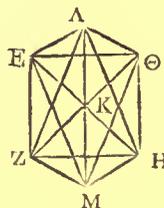
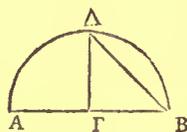
PROPOSITION XIV.

Construire un octaèdre, et le circoncrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit la pyramide; et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est double du carré du côté de l'octaèdre.

Soit ΑΒ le diamètre de la sphère donnée; qu'il soit coupé en deux parties égales au point Γ; décrivons sur ΑΒ le demi-cercle ΑΔΒ; menons du point Γ la droite ΓΔ perpendiculaire à ΑΒ; joignons ΔΒ; soit exposé le carré ΕΖΗΘ ayant chacun

ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσων ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῆ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεΐα ἡ ΚΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφῆρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ μιᾷ τῶν

quadratum ΕΖΗΘ æquale habens unumquodque laterum ipsi ΒΔ, et jungantur ipsæ ΘΖ, ΕΗ, et erigatur a puncto Κ plano quadrati ΕΖΗΘ ad rectos recta ΚΛ, et producat ad alteras partes plani ut ΚΜ, et auferatur ab utràque ipsarum ΚΛ, ΚΜ uni ipsarum ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ æqualis



ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῆ ΚΘ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῆ ΚΕ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛΚΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΕ τῆ ΕΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῆ

utraque ipsarum ΚΛ, ΚΜ, et jungantur ipsæ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Et quoniam æqualis est ΚΕ ipsi ΚΘ, et est rectus ΕΚΘ angulus; ipsum igitur ex ΘΕ duplum est ipsius ex ΕΚ. Rursus, quoniam æqualis est ΛΚ ipsi ΚΕ, et est rectus ΛΚΕ angulus; ipsum igitur ex ΕΛ duplum est ipsius ex ΕΚ. Ostensum est autem et ipsum ex ΘΕ duplum ipsius ex ΕΚ; ipsum igitur ex ΛΕ æquale est ipsi ex ΕΘ; æqualis igitur est ΛΕ ipsi ΕΘ. Propter eadem utique et ΛΘ ipsi ΘΕ

de ses côtés égal à ΒΔ; joignons ΘΖ, ΕΗ; élevons du point Κ la droite ΚΛ perpendiculaire au plan du quarré ΕΖΗΘ; prolongeons cette droite de l'autre côté du plan et que son prolongement soit ΚΜ; faisons chacune des droites ΚΛ, ΚΜ égale à une des droites ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ, et joignons ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Puisque la droite ΚΕ est égale à ΚΘ, et que l'angle ΕΚΘ est droit; le quarré de ΘΕ sera double du quarré de ΕΚ (47. 1). De plus, puisque ΛΚ est égal à ΚΕ, et que l'angle ΛΚΕ est droit, le quarré de ΕΛ sera double du quarré de ΕΚ. Mais on a démontré que le quarré de ΘΕ est double du quarré de ΕΚ; le quarré de ΛΕ est donc égal au quarré de ΕΘ; la droite ΛΕ est donc égale à ΕΘ. Par la même raison, la droite ΛΘ est égale à ΘΕ, le triangle ΛΕΘ est donc

ΘΕ ἔστιν ἴση· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΘ τρίγωνον. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγῶνων, ἃν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραὶ, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, Μ σημεῖα, ἰσοπλευρόν ἐστίν· ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται ὑπὸ ὀκτῶ τριγῶνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δείξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίον ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΑΚ, ΚΜ, ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΑΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ Ε. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, εἰάν μενούσης τῆς ΑΜ περιεγεθῆν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῆ ἕθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἤξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ σημεῖων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθάς^β περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΜ γωνία, ἐν

est æqualis; æquilaterum igitur est ΑΕΘ triangulum. Similiter utique ostendemus et unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases quidem sunt ΕΖΗΘ quadrati latera, vertices autem Λ, Μ puncta, æquilaterum esse; octaedrum igitur constitutum est sub octo triangulis æquilateris contentum.

Oportet vero ipsum et sphaerâ comprehendere datâ, et demonstrare sphaeræ diametrum potentiâ duplam esse lateris octaedri.

Quoniam enim tres rectæ ΑΚ, ΚΜ, ΚΕ æquales inter se sunt, ergo super ΑΜ descriptus semicirculus transibit et per punctum Ε. Et propter eadem, si manente ΑΜ, conversus semicirculus in eundem locum restituatur a quo cœpit moveri, transibit et per puncta Ζ, Η, Θ, et erit sphaerâ comprehensum octaedrum. Dico etiam et datâ. Quoniam enim æqualis est ΑΚ ipsi ΚΜ, communis autem ΚΕ, et angulos rectos continent, basis igitur ΑΕ basi ΕΜ est æqualis. Et quoniam rectus est ΑΕΜ angulus, etenim in se-

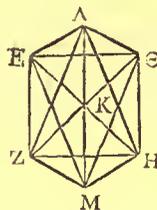
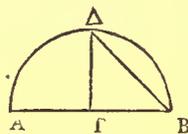
équilatéral. Nous démontrerons semblablement que chacun des triangles restants, dont les bases sont les côtés du carré ΕΖΗΘ, et les sommets les points Λ, Μ, est aussi équilatéral; on a donc construit un octaèdre compris sous huit triangles équilatéraux.

Il faut à présent circonscrire l'octaèdre par la sphère donnée, et démontrer que le carré du diamètre de cette sphère est double du carré du côté de l'octaèdre.

Car puisque les trois droites ΑΚ, ΚΜ, ΚΕ sont égales entr'elles, le demi-cercle décrit sur ΑΜ passera par le point Ε. Par la même raison, si la droite ΑΜ restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir, ce demi-cercle passera aussi par les points Ζ, Η, Θ, et l'octaèdre sera circonscrit par une sphère. Je dis qu'il le sera par la sphère donnée. Car puisque la droite ΑΚ est égale à ΚΜ, que la droite ΚΕ est commune, et que ces droites comprennent des angles droits, la base ΑΕ sera égale à la base ΕΜ (4. 1). Et puisque l'angle ΑΕΜ est droit (3 1. 3), car il est dans un demi-cercle,

ἡμικυκλίῳ γὰρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛM διπλασίον ἔστι⁸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛE . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\Lambda\Gamma$ τῇ ΓB , διπλασία ἐστὶν ἡ AB τῆς $\text{B}\Gamma$. Ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $\text{B}\Gamma$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{B}\Delta$ διπλασίον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς

micireulo, ipsum igitur ex ΛM duplum est ipsius ex ΛE . Rursus, quoniam æqualis est $\Lambda\Gamma$ ipsi ΓB , dupla est AB ipsius $\text{B}\Gamma$. Ut autem AB ad $\text{B}\Gamma$ ita ipsum ex AB ad ipsum ex $\text{B}\Delta$; duplum igitur est ipsum ex AB ipsius ex $\text{B}\Delta$. Ostensum



AB τοῦ ἀπὸ τῆς $\text{B}\Delta$. Εδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛM διπλασίον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛE . Καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς $\text{B}\Delta$ τῷ ἀπὸ τῆς ΛE . ἴση γὰρ κεῖται ἡ $\text{E}\Theta$ τῇ ΔB . Ἴσον ἐστὶν⁷ ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς ΛM . ἴση ἄρα ἡ AB τῇ ΛM . Καὶ ἔστιν ἡ AB ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛM ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

autem est et ipsum ex ΛM duplum ipsius ex ΛE . Et est æquale ipsum ex $\text{B}\Delta$ ipsi ex ΛE ; æqualis enim posita est ipsa $\text{E}\Theta$ ipsi ΔB . Æquale est igitur et ipsum ex AB ipsi ex ΛM ; æqualis igitur AB ipsi ΛM . Et est AB datæ sphaeræ diameter; ergo ΛM æqualis est datæ sphaeræ diametro.

Περιλείπεται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ· καὶ συναποδείκνυται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίον ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταίδρου πλευρᾶς. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Comprehensum est igitur octaedrum datæ sphaeræ; et simul demonstratum est sphaeræ diametrum potentiâ duplam esse lateris octaedri. Quod oportebat facere.

Le carré de ΛM sera double du carré de ΛE (47. 1). De plus, puisque $\Lambda\Gamma$ est égal à ΓB , la droite AB sera double de $\text{B}\Gamma$. Mais AB est à $\text{B}\Gamma$ comme le carré de AB est au carré de $\text{B}\Delta$ (8, et 20. 6); le carré de AB est donc double du carré de $\text{B}\Delta$. Mais on a démontré que le carré de ΛM est double du carré de ΛE , et le carré de $\text{B}\Delta$ est égal au carré de ΛE , car la droite $\text{E}\Theta$ est supposée égale à ΔB ; le carré de AB est donc égal au carré de ΛM ; la droite AB est donc égale à ΛM . Mais AB est le diamètre de la sphère donnée; la droite ΛM est donc égale au diamètre de la sphère donnée.

L'octaèdre a donc été circonscrit par la sphère donnée, et l'on a démontré, en même temps, que le carré du diamètre est double du carré du côté de l'octaèdre. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

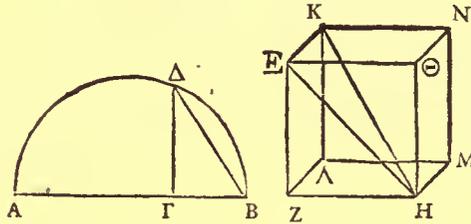
PROPOSITIO XV.

Κύβον συστήσασθαι¹, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν ἣ καὶ τὰ πρότερα², καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίω³ ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥστε διπλὴν εἶναι τὴν AG τῆς GB, καὶ γεγράθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ ADB, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῆ AB πρὸς

Cubum constituere, et sphaerâ comprehendere quâ et priores; et demonstrare sphaerâ diametrum potentiâ triplam esse lateris cubi.

Exponatur datæ sphaeræ diameter AB, et secetur in Γ, ita ut dupla sit AG ipsius GB, et describatur super AB semicirculus ADB, et a puncto Γ ipsi AB ad rectos ducatur ΓΔ, et



ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκείσθω τετράγωνον τὸ EZHΘ ἴσων ἔχον τὴν ἑλευθερὰν τῆ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν E, Z, H, Θ τῶ τοῦ EZHΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἦχθωσαν αἱ EK, ZA, HM, ΘN, καὶ ἀφηρήσθω ἀφ' ἐκάστης τῶν EK, ZA, HM, ΘN μιᾶ τῶν EZ, ZH, HΘ, ΘE ἴση ἐκάστη τῶν EK, ZA, HM, ΘN, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΑΜ, ΜΝ,

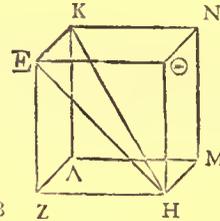
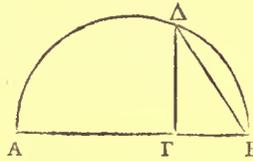
jungatur ΔΒ, et exponatur quadratum EZHΘ, æquale habens latus ipsi ΔΒ, et a punctis E, Z, H, Θ quadrati EZHΘ plano ad rectos ducantur EK, ZA, HM, ΘN, et auferatur ab unâquâque ipsarum EK, ZA, HM, ΘN uni ipsarum EZ, ZH, HΘ, ΘE æqualis unaquæque ipsarum EK, ZA, HM, ΘN, et jungantur ipsæ ΚΑ, ΑΜ,

PROPOSITION XV.

Construire un cube, et le circonscire par la même sphère par laquelle on a circonscrit les figures précédentes, et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est triple du carré du côté du cube.

Soit AB le diamètre de la sphère donnée; coupons AB au point Γ, de manière que AG soit double de GB; sur AB décrivons le demi-cercle ADB; du point Γ élevons ΓΔ perpendiculaire à AB; joignons ΔΒ; soit exposé un carré EZHΘ ayant son côté égal à ΔΒ; des points E, Z, H, Θ menons les droites EK, ZA, HM, ΘN perpendiculaires au plan du carré EZHΘ; faisons chacune des droites EK, ZA, HM, ΘN, égales à une des droites EZ, ZH, HΘ, ΘE, et joignons ΚΑ, ΑΜ, ΜΝ, ΝΚ; on aura

NK· κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ZN ὑπὸ ἕξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος⁵. Δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δεθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίον⁶ ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.



Ἐπιζεύχθωσαν γάρ αἱ KH, EH. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ KEH γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν KE ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ EH ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν EH εὐθείαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς KH γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ E σημείου. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ZH ὀρθή ἐστὶν πρὸς ἑκατέραν τῶν AZ, ZE, καὶ πρὸς τὸ ZK ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστὶν ἡ ZH· ὥστε καὶ ἐὰν ἰπιζεύξωμεν τὴν ZK, ἡ HZ ὀρθή ἐστὶ καὶ πρὸς τὴν ZK· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς HK γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει⁸ καὶ διὰ τοῦ Z. Ομοίως⁹ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἤξει. Ἐὰν δὴ, μειούσης

Jungantur enim ipsæ KH, EH. Et quoniam rectus est KEH angulus, propterea quod et KE perpendicularis sit ad EH planum, videlicet et ad EH rectam, ergo super KH descriptus semicirculus transibit et per punctum E. Rursus, quoniam ZH perpendicularis est ad utramque ipsarum AZ, ZE, et ad ZK igitur planum perpendicularis est ZH; quare et si jungamus ZK, ipsa HZ perpendicularis erit et ad ZK; et propter hoc rursus super HK descriptus semicirculus transibit et per punctum Z. Similiter et per reliqua cubi puneta transibit. Si igitur, manente

construit un cube ZN compris sous six quarrés égaux. Il faut circonscrire ce cube par la sphère donnée, et démontrer que le quarré du diamètre de la sphère est triple du quarré du côté du cube.

Joignons KH, EH. Puisque l'angle KEH est droit, parce que KE est perpendiculaire au plan EH, c'est-à-dire à la droite EH (déf. 3. 11); le demi-cercle décrit sur KH passera donc par le point E (31. 3). De plus, puisque la droite ZH est perpendiculaire à chacune des droites AZ, ZE, la droite ZH sera perpendiculaire au plan de ZK (4. 11); si donc nous joignons ZK, la droite HZ sera aussi perpendiculaire à ZK, et à cause de cela le demi-cercle décrit sur HK passera par le point Z. Ce demi-cercle passera semblablement par les autres points du cube. Si donc la droite KH, restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce

τῆς ΚΗ, περιεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν¹⁰ ἀποκατασταθῆ ἕθεν ἤρξατο φέρεται, ἔσται σφαῖρα περιελημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῆ δοθείσῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῆ ΖΕ, καὶ ἔστιν ἑρθὴ ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΕΖ τῆ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τριπλάσιον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ τριπλασίον ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. Καὶ κεῖται ἴση ἡ ΚΕ τῆ ΕΔ¹¹. Ἰση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῆ ΑΒ. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῆ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῆ δοθείσῃ¹² ἄρα σφαῖρα περιέληπται ὁ κύβος· καὶ συσποδείκνυται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίον ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. Ὅπερ ἔδει πειῆσαι.

ΚΗ, conversus semicirculus in eundem rursus locum restituatur a quo cœpit moveri, erit sphaera comprehensus cubus. Dico etiam et datâ. Quoniam enim æqualis est ΗΖ ipsi ΖΕ, et est rectus ad Ζ angulus; ipsum igitur ex ΓΗ duplum est ipsius ex ΕΖ. Æqualis autem ΕΖ ipsi ΕΚ; ipsum igitur ex ΕΗ duplum est ipsius ex ΕΚ; quare ipsa ex ΗΕ, ΕΚ, hoc est ipsum ex ΗΚ, triplum est ipsius ex ΕΚ. Et quoniam tripla est ΑΒ ipsius ΒΓ, ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita ipsum ex ΑΒ ad ipsum ex ΒΔ; triplum igitur ipsum ex ΑΒ ipsius ex ΒΔ. Ostensum est autem et ipsum ex ΗΚ ipsius ex ΚΕ triplum. Et posita est æqualis ΚΕ ipsi ΕΔ; æqualis igitur et ΚΗ ipsi ΑΒ. Et est ΑΒ datæ sphaeræ diameter; et ΚΗ igitur æqualis est datæ sphaeræ diametro.

Datâ igitur sphaerâ comprehensus est cubus; et simul demonstratum est sphaeræ diametrum potentia triplam esse lateris eubi. Quod oportebat facere.

qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir, le cube sera circonscrit par une sphère. Je dis à présent que le cube sera circonscrit par la sphère donnée. Car puisque ΗΖ est égal à ΖΕ, et que l'angle est droit en Ζ; le carré de ΓΗ sera double du carré de ΕΖ (47. 1). Mais ΕΖ est égal à ΕΚ; le carré de ΕΗ est donc double du carré de ΕΚ; la somme des carrés des droites ΗΕ, ΕΚ, c'est-à-dire le carré de ΗΚ, est donc triple du carré de ΕΚ. Et puisque ΑΒ est triple de ΒΓ, et que ΑΒ est à ΒΓ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΒΔ (8, et 26. 6); le carré de ΑΒ sera triple du carré de ΒΔ. Mais on a démontré que le carré de ΗΚ est triple du carré de ΚΕ, et l'on a fait ΚΕ égal à ΒΔ; la droite ΚΗ est donc égale à ΑΒ. Mais ΑΒ est le diamètre de la sphère donnée; la droite ΚΗ est donc égale au diamètre de la sphère donnée.

On a donc circonscrit le cube par la sphère donnée, et l'on a démontré, en même temps, que le carré du diamètre de la sphère est triple du carré du côté du cube. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

PROPOSITIO XVI.

Εἰκοσαέδρον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβῆν ἢ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ , ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν $A\Gamma$ τῆς GB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῆ AB πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔB , καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ $EZH\Theta K$, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῆ ΔB , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta K$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ $EZH\Theta K$, καὶ τετμήσθωσαν αἱ EZ , ZH , $H\Theta$, ΘK , KE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ , M , N , Ξ , O σημεία, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ $E\Lambda$, ΛZ , ZM , MH , HN , $N\Theta$, $\Theta\Xi$, ΞK , KO , OE , καὶ ὁμοίως ΛM , MN , $N\Xi$, ΞO , $O\Lambda$. ἰσόπλευρον ἔρα ἐστὶ καὶ τὸ $\Lambda MN\Xi O$ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ EO εὐθεῖα. Καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν E , Z , H , Θ , K

Icosaedrum constituere et sphaerá comprehendere quâ et prædictas figuras; et demonstrare icosaedri latus irrationalem esse quæ appellatur minor.

Exponatur datæ sphaeræ diameter AB , et sectetur in Γ , ita ut quadrupla sit $A\Gamma$ ipsius GB , et describatur super AB semicirculus $A\Delta B$, et ducatur a puncto Γ ipsi AB ad rectos angulos recta linea $\Gamma\Delta$, et jungatur ΔB , et exponatur circulus $EZH\Theta K$, cujus ea quæ ex centro æqualis sit ipsi ΔB , et describatur in circulo $EZH\Theta K$ pentagonum et æquilaterum et æquiangulum $EZH\Theta K$, et sccentur EZ , ZH , $H\Theta$, ΘK , KE circumferentiæ bifariam in Λ , M , N , Ξ , O punctis, et jungantur $E\Lambda$, ΛZ , ZM , MH , HN , $N\Theta$, $\Theta\Xi$, ΞK , KO , OE , et similiter ΛM , MN , $N\Xi$, ΞO , $O\Lambda$; æquilaterum igitur est et $\Lambda MN\Xi O$ pentagonum, et decagoni latus recta EO . Et erigantur a punctis E , Z ,

PROPOSITION XVI.

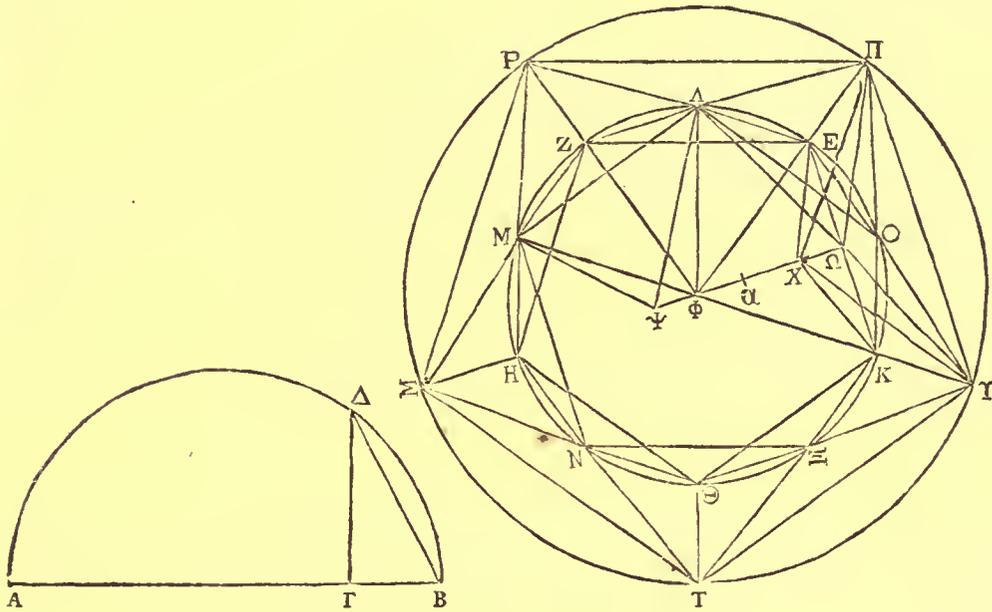
Construire un icosaèdre, et le circonscire par la même sphère par laquelle on a circonscrit les figures précédentes, et démontrer que le côté de l'icosaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle mineure.

Soit AB le diamètre de la sphère donnée; coupons AB au point Γ , de manière que $A\Gamma$ soit quadruple de GB ; sur AB décrivons le demi-cercle $A\Delta B$; du point Γ menons la ligne droite $\Gamma\Delta$ perpendiculaire à AB ; joignons ΔB ; soit $\Gamma\Delta$ un cercle $EZH\Theta K$ ayant pour rayon une droite égale à ΔB ; décrivons dans le cercle $EZH\Theta K$ un pentagone équilatéral et équiangle $EZH\Theta K$ (I I. 4); coupons les arcs EZ , ZH , $H\Theta$, ΘK , KE en deux parties égales aux points Λ , M , N , Ξ , O (30. 3), et joignons $E\Lambda$, ΛZ , ZM , MH , HN , $N\Theta$, $\Theta\Xi$, ΞK , KO , OE , ainsi que ΛM , MN , $N\Xi$, ΞO , $O\Lambda$; le pentagone $\Lambda MN\Xi O$ sera équilatéral, et la droite OE sera le côté du décagone. Des

LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 271

σημείων τῶ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεΐαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ἴσαι οὔσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΑ, ΑΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν

H, Θ, Κ plano circuli ad rectos angulos rectæ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ æquales existentes ei quæ ex circuli ΕΖΗΘΚ centro, et jungantur ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΑ, ΑΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Et quoniam utraque ipsarum ΕΠ, ΚΥ eidem plano ad rectos est, parallela igitur est ΕΠ ipsi ΚΥ.



ἢ ΕΠ τῇ ΚΥ. Ἐστὶ δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παράλληλους ἐπιζεύχουσας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη³ εὐθεΐαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ἢ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστίν⁴

Est autem ipsi et æqualis; ipsæ autem et æquales et parallelas conjungentes ad easdem partes rectæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt; ipsa ΠΥ igitur ipsi ΕΚ et æqualis et parallela est.

points E, Z, H, Θ, Κ menons les droites ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ perpendiculaires au plan du cercle (12. 11); faisons ces droites égales au rayon du cercle ΕΖΗΘΚ, et joignons ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΑ, ΑΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Puisque chacune des droites ΕΠ, ΚΥ est perpendiculaire à un même plan, la droite ΕΠ sera parallèle à ΚΥ (6. 11). Mais elle lui est égale; et les droites qui joignent du même côté des droites égales et parallèles sont égales et parallèles (33. 1); la

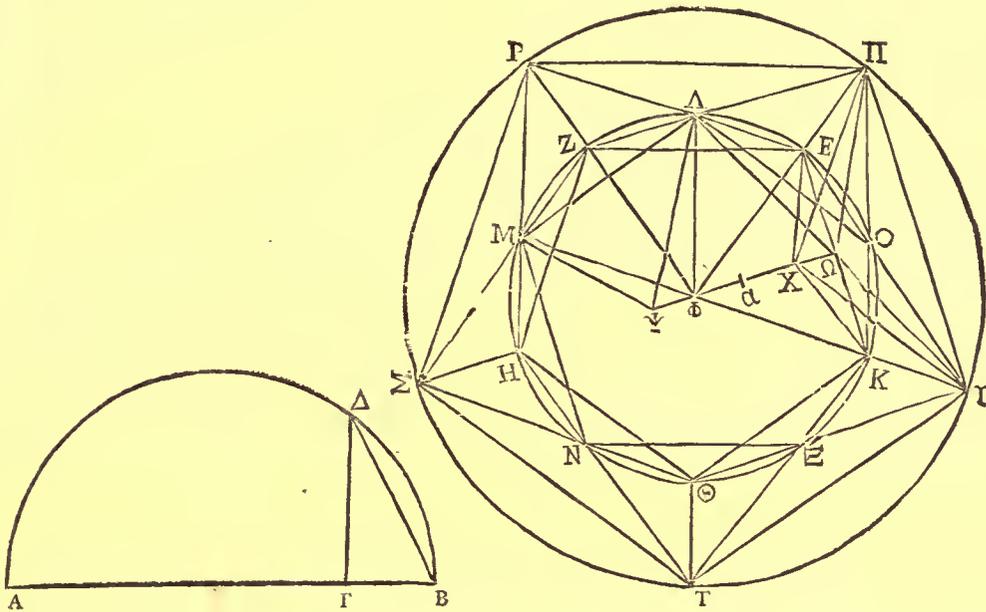
Πενταγώνου δὲ ἰσοπλευροῦ ἢ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλευροῦ, καὶ ἢ ΠΥ, τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον περιγραφομένου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶ ἰσοπλευροῦ τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἐστὶν ἢ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἢ ΕΟ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἢ ὑπὸ ΠΕΟ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἢ ΠΟ· ἢ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρὰ, ἐστὶ δὲ καὶ ἢ ΠΥ πεντάγωνου· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκαστον τῶν ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΕΥ τριγώνων ἰσοπλευρόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΑ, ΠΟ, ἐστὶ δὲ καὶ ἢ ΛΟ πενταγώνου· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΑΟ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκαστον τῶν ΑΡΜ, ΜΞΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσοπλευρόν ἐστιν. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου Θ τὸ Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τῷ

Pentagoni autem æquilateri latus ipsa ΕΚ; pentagoni igitur æquilateri in ΕΖΗΘΚ circulo descripti latus ipsa ΠΥ. Propter eadem utique et unaquæque ipsarum ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ pentagoni est t æquilateri in ΕΖΗΘΚ circulo descripti; æquilaterum igitur est ΠΡΣΤΥ pentagonum. Et quoniam hexagoni quidem est ipsa ΠΕ latus, decagoni vero ipsa ΕΟ, et est rectus ΠΕΟ angulus; pentagoni igitur est latus ipsa ΠΟ; latus enim pentagoni potest et hexagoni et decagoni latus in eodem circulo descriptorum. Propter eadem utique ipsa et ΟΥ pentagoni est latus, est autem et ipsa ΠΥ latus pentagoni; æquilaterum igitur est ΠΟΥ triangulum. Propter eadem utique et unumquodque triangulorum ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΕΥ æquilaterum est. Et quoniam pentagoni latus ostensa est utraque ipsarum ΠΑ, ΠΟ, est autem et ipsa ΛΟ pentagoni latus; æquilaterum igitur est ΠΑΟ triangulum. Propter eadem utique et unumquodque triangulorum ΑΡΜ, ΜΞΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ æquilaterum est. Sumatur centrum circuli ΕΖΗΘΚ, ipsum Φ punctum; et a puncto

droite ΠΥ est donc égale et parallèle à ΕΚ. Mais la droite ΕΚ est le côté d'un pentagone équilatéral; la droite ΠΥ est donc le côté du pentagone équilatéral décrit dans le cercle ΕΖΗΘΚ. Par la même raison, chacune des droites ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ est un côté du pentagone décrit dans le cercle ΕΖΗΘΚ; le pentagone ΠΡΣΤΥ est donc équilatéral. Mais la droite ΠΕ est le côté de l'hexagone; la droite ΕΟ est donc le côté du décagone, et l'angle ΠΕΟ est droit; la droite ΠΟ est donc le côté du pentagone; parce que le carré du côté du pentagone est égal au carré de la somme du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle (10. 15). Par la même raison, la droite ΟΥ est le côté du pentagone; mais la droite ΠΥ est le côté du pentagone; le triangle ΠΟΥ est donc équilatéral. Par la même raison, chacun des triangles ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΕΥ est aussi équilatéral. Et puisque l'on a démontré que chacune des droites ΠΑ, ΠΟ est le côté du pentagone, et à cause que ΛΟ est aussi le côté du pentagone, le triangle ΠΑΟ est équilatéral. Par la même raison, chacun des triangles ΑΡΜ, ΜΞΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ est équilatéral. Prenons le centre Φ du cercle ΕΖΗΘΚ (1. 3); du point Φ éle-

κύκλου επιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφηρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρᾳ τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν

Φ ipsi circuli plano ad rectos erigatur ΦΩ, et producatum ad alteras partes, ut ipsa ΦΨ, et auferatur hexagoni quidem latus ΦΧ, decagoni vero utraque ipsarum ΦΨ, ΧΩ, et jungantur ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. Et quo-



ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. Εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν. Ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ ἑξαγώνου

niam utraque ipsarum ΦΧ, ΠΕ circuli plano ad rectos est, parallela igitur est ΦΧ ipsi ΠΕ. Sunt autem et æquales; et ΕΦ, ΠΧ igitur et æquales et parallelæ sunt. Hexagoni autem ΕΦ

vous la droite ΦΩ perpendiculaire au plan du cercle; prolongeons cette droite de part et d'autre, comme ΦΨ; faisons la droite ΦΧ égale au côté de l'hexagone, faisons aussi les droites ΦΨ, ΧΩ égales chacune au côté du décagone, et joignons ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. Puisque chacune des droites ΦΧ, ΠΕ est perpendiculaire au plan du cercle, la droite ΦΧ sera parallèle à ΠΕ (6. 11). Mais ces deux droites sont égales; les droites ΕΦ, ΠΧ sont donc égales et parallèles (33. 1). Mais ΕΦ est le

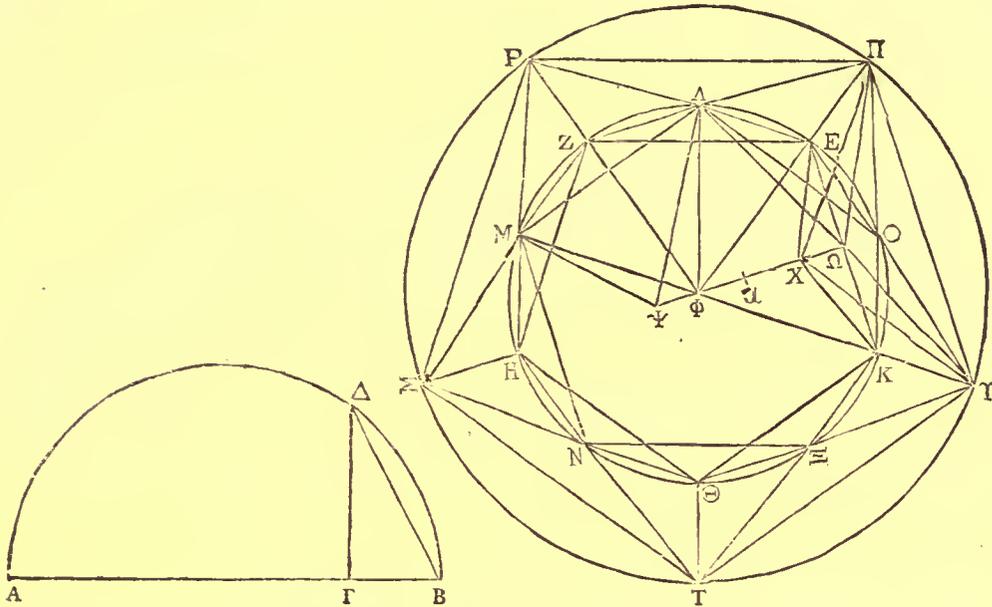
ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. Καὶ ἐπεὶ ἐξαγώνου μὲν ἐστὶν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστὶ ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστὶν, ἐπειδὴ περὶ εἰὸν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ ἴσαι, καὶ ἀπεναντίον ἴσονται, καὶ ἐστὶν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσα ἐξαγώνου· ἐξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. Δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ¹⁰ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγῶνων, ἃν βάσεις μὲν εἰσὶν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθείαι, κερυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Πάλιν, ἐπεὶ ἐξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ εἰὸν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΦΜ οὔσαν ἐξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ¹¹ ΑΜΨ τρίγωνον. Ομοίως δὴ¹² δειχθήσεται ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν

latus; hexagoni igitur et ΠΧ latus. Et quoniam hexagoni quidem est ΠΧ latus, decagoni vero ΧΩ, et rectus est ΠΧΩ angulus; pentagoni igitur est ΠΩ latus. Propter eadem utique et ΥΩ pentagoni est latus, quoniam si jungamus ΦΚ, ΧΥ, ipsæ æquales et oppositæ erunt, et est ipsa ΦΚ ex centro existens hexagoni latus; hexagoni igitur et ΧΥ latus. Decagoni autem ΧΩ, et rectus ΥΧΩ angulus; pentagoni igitur ΥΩ latus. Est autem et ΠΥ pentagoni latus; æquilaterum igitur est ΠΥΩ triangulum. Propter eadem utique et unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases quidem sunt ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ rectæ, vertex autem Ω punctum; æquilaterum est. Rursus, quoniam hexagoni quidem ipsa ΦΛ latus, decagoni vero ipsa ΦΨ latus, et rectus est ΛΦΨ angulus; pentagoni igitur est ipsa ΛΨ latus. Propter eadem utique si jungamus ipsam ΦΜ existentem hexagoni latus, concludetur et ΜΨ pentagoni latus esse. Est autem et ΑΜ pentagoni latus; æquilaterum igitur est ΑΜΨ triangulum. Similiter utique ostendetur et unumquodque reliquorum

côté de l'hexagone; la droite ΠΧ est donc aussi le côté de l'hexagone. Et puisque la droite ΠΧ est le côté de l'hexagone, que la droite ΧΩ est le côté du décagone, et que l'angle ΠΧΩ est droit; la droite ΠΩ sera le côté du pentagone (10. 15). Par la même raison, la droite ΥΩ est le côté du pentagone, puisque si nous joignons les droites ΦΚ, ΧΥ, ces droites seront égales et opposées; mais la droite ΦΚ qui est un rayon, est le côté de l'hexagone; la droite ΧΥ est donc le côté de l'hexagone. Mais ΧΩ est le côté du décagone, et l'angle ΥΧΩ est droit; la droite ΥΩ est donc le côté du pentagone. Mais ΠΥ est le côté du pentagone; le triangle ΠΥΩ est donc équilatéral. Par la même raison, chacun des triangles restants qui ont pour bases les droites ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, et pour sommet le point Ω, est équilatéral. De plus, puisque la droite ΦΛ est le côté de l'hexagone, que la droite ΦΨ est le côté du décagone, et que l'angle ΛΦΨ est droit; la droite ΛΨ sera le côté du pentagone (10. 13). Par la même raison, si nous joignons la droite ΦΜ, qui est le côté de l'hexagone, on conclura que ΜΨ est le côté du pentagone. Mais ΑΜ est aussi le côté du pentagone; le triangle ΑΜΨ est donc équilatéral. Nous démontrerons semblablement que chacun des triangles restants qui ont pour bases les

λοιπῶν τριγῶνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ MN, NΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφή δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν· συνίσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγῶνων ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον.

triangulorum, quorum bases quidem sunt MN, NΞ, ΞΟ, ΟΛ, vertex autem Ψ punctum, æquilaterum esse; constitutum igitur est icosædron sub viginti triangulis æquilateris contentum.



Δεῖ δὴ αὐτὸ¹³ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ¹⁴ γὰρ ἑξαγώνου μὲν¹⁵ ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ ἢ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα

Oportet utique ipsum et sphaerâ comprehendere datâ, et demonstrare icosædri lateris irrationalem esse quæ appellatur minor.

Quoniam enim hexagoni quidem ipsa ΦΧ lateris, decagoni vero ipsa ΧΩ; ipsa ΦΩ igitur et extremâ et mediâ ratione secta est in Χ, et

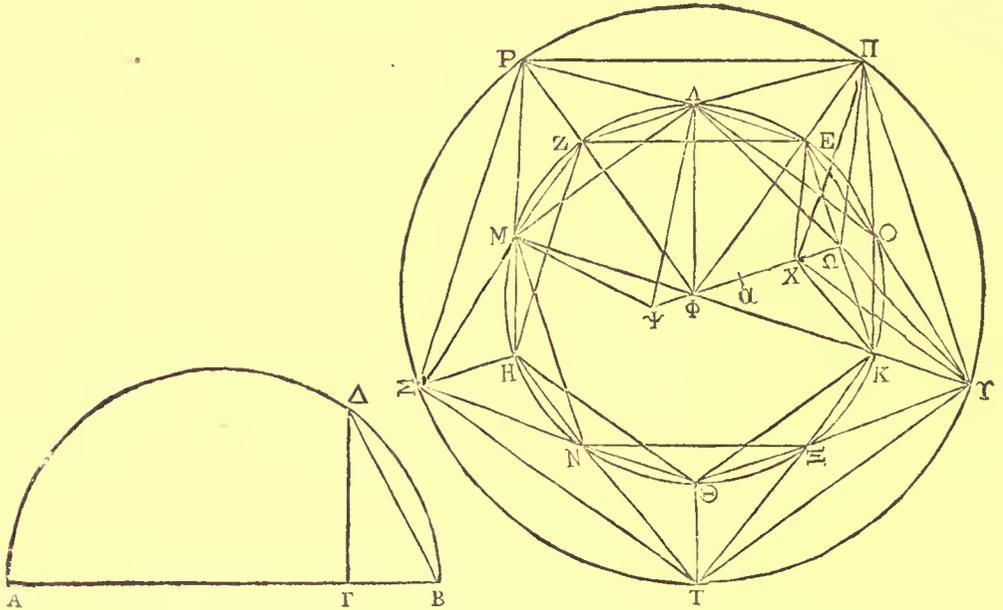
droites MN, NΞ, ΞΟ, ΟΛ, et pour sommet le point Ψ, est équilatéral. On a donc construit un icosædre compris sous vingt triangles équilatéraux.

Il faut à présent circonscrire l'icosædre par la sphère donnée, et démontrer que le côté de l'icosædre est l'irrationnelle qu'on appelle mineure.

Car puisque ΦΧ est le côté de l'hexagone, et ΧΩ le côté du décagone; la droite ΦΩ sera coupée en extrême et moyenne raison au point Χ (9. 13), et ΦΧ

ἴστιν ἡ ΦΧ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ
 οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ
 ΦΛ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς
 τὴν ΦΛ οὕτως ἡ ΛΦ πρὸς τὴν ΦΨ. Καὶ εἰσὶν
 ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΛ, ΛΦΨ γωνίαι· εἰάν ἄρα ἐπι-

major ipsius portio est ΦΧ; est igitur ut ΩΦ ad ΦΧ
 ita ΦΧ ad ΧΩ. Sed æqualis quidem ΦΧ ipsi
 ΦΛ, ipsa vero ΧΩ ipsi ΦΨ; est igitur ut ΩΦ
 ad ΦΛ ita ΛΦ ad ΦΨ. Et sunt recti ΩΦΛ,
 ΛΦΨ anguli. Si igitur jungamus ΛΩ rectam,



ζεύξωμεν τὴν ΛΩ εὐθείαν, ὀρθὴ ἴσται ἡ ὑπὸ
 ΨΛΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΛΦ, ΦΛΩ
 τριγώνων· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμι-
 κύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ⁶. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
 ἐπεὶ ἴστιν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ οὕτως ἡ ΦΧ
 πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ

rectus erit ΨΛΩ angulus ob similitudinem trian-
 gulorum ΨΛΦ, ΦΛΩ; ergo super ΨΩ descrip-
 tus semicirculus transibit et per Λ. Propter eadem
 utique quoniam est ut ΩΦ ad ΦΧ ita ΦΧ ad ΧΩ,
 sed æqualis quidem ipsa ΩΦ ipsi ΨΧ, ΦΧ vero

sera son plus grand segment ; la droite ΩΦ est donc à ΦΧ comme ΦΧ est à ΧΩ.
 Mais ΦΧ est égal à ΦΛ, et ΧΩ à ΦΨ; la droite ΩΦ est donc à ΦΛ comme ΛΦ est à
 ΦΨ. Mais les angles ΩΦΛ, ΛΦΨ sont droits ; si donc nous joignons la droite ΛΩ,
 l'angle ΨΛΩ sera droit, à cause de la similitude des triangles ΨΛΦ, ΦΛΩ ; le demi-
 cercle décrit sur ΨΩ passera donc par le point Λ. Par la même raison, puisque ΩΦ
 est à ΦΧ comme ΦΧ est à ΧΩ, que ΩΦ est égal à ΨΧ, et ΦΧ à ΧΠ, la droite ΨΧ sera

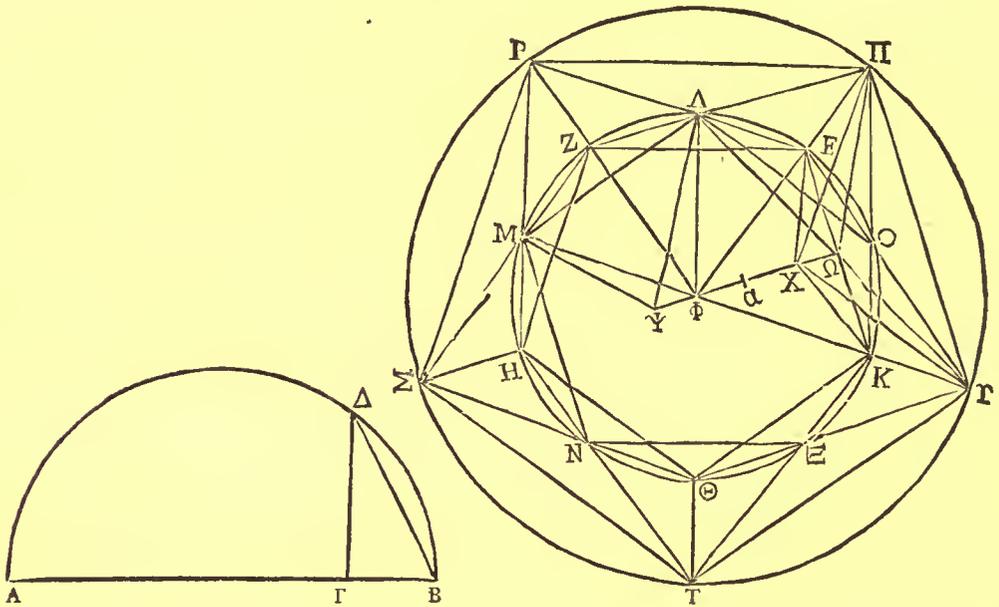
ΦΧ τῆ ΧΠ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΠ οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. Καὶ διὰ τοῦτο πάλιν εἰάν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ Π. Καὶ εἰάν μενούσης τῆς ΨΩ περιεγεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἤξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαῖρα περιελημμένον τὸ εἰκοσαέδρον. Λέγω δὴ ἔτι καὶ τῆ δευτέρῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ α. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΩΦ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἑλάττω αὐτῆς τμήμα ἔστιν ἡ ΩΧ· ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν Χα πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ωα τοῦ ἀπὸ τῆς αΧ. Καὶ ἐστὶ τῆς μὲν αΩ διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ αΧ διπλῆ ἡ ΧΦ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. Καὶ ἐπεὶ τετραπλάσιον¹⁷ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ¹⁸. Ως δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ

ίψις ΧΠ; est igitur ut ΦΧ ad ΧΠ ita ΠΧ ad ΧΩ. Et ob id rursus si jungamus ΠΨ, rectus erit ad Π angulus; semicirculus igitur super ΨΩ descriptus transibit et per Π. Et si manente ΨΩ conversus semicirculus in eundem rursus locum restituatur a quo cœpit moveri, transibit et per Π et per reliqua puncta icosædri, et erit sphæ-râ comprehensum icosædrum. Dico etiam et datâ. Secetur enim ΦΧ bifariam in α. Et quoniam recta linea ΩΦ extremâ et mediâ ratione secta est in Χ, et minor ipsius portio est ΩΧ; ipsa igitur ΩΧ assumens dimidiam majoris portionis, ipsam Χα, quintuplum potest quadrati ex dimidiâ majoris portionis; quintuplum igitur est quadratum ex Ωα quadrati ex αΧ. Et est ipsius quidem αΩ dupla ΩΨ, ipsius vero αΧ dupla ipsa ΧΦ; quintuplum igitur est quadratum ex ΩΨ quadrati ex ΦΧ. Et quoniam quadrupla est ΑΓ ipsius ΓΒ, quintupla igitur est ΑΒ ipsius ΒΓ. Ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΒ

à ΧΠ comme ΠΧ est à ΧΩ. Et à cause de cela, si nous joignons encore ΠΨ, l'angle sera droit en Π; le demi-cercle décrit sur ΨΩ passera donc par le point Π. Si donc la droite ΨΩ restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir, il passera par le point Π et par les autres points de l'icosaèdre, et l'icosaèdre sera circonscrit par une sphère. Je dis ensuite qu'il est circonscrit par la sphère donnée; car coupons ΦΧ en deux parties égales au point α. Puisque la ligne droite ΩΦ est coupée en extrême et moyenne raison au point Χ, et que ΩΧ est son plus petit segment; le carré de la somme de ΩΧ et de la moitié de Χα du plus grand segment, sera égal au quintuple du carré de la moitié du plus grand segment (3. 13); le carré de Ωα est donc quintuple du carré de αΧ. Mais ΩΨ est double de αΩ, et ΧΦ double de αΧ; le carré de ΩΨ est donc quintuple du carré de ΦΧ. Et puisque ΑΓ est quintuple de ΓΒ, la droite ΑΒ sera quintuple de ΒΓ. Mais ΑΒ est à ΒΓ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΒΔ (8, et 20. 6); le carré de ΑΒ est

ἀπὸ τῆς ΒΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Εδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΔΒ ἢ τῆς ΦΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου²⁰. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. Καὶ ἐστὶν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρα περιέλιπται τὸ εἰκοσαέδρον.

ad quadratum ex ΒΔ; quintuplum igitur est quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΒΔ. Ostensum autem est et quadratum ex ΩΨ quintuplum quadrati ex ΦΧ, et est æqualis ΔΒ ipsi ΦΧ, utraque enim ipsarum æqualis est ipsi quæ ex centro circuli ΕΖΗΘΚ; æqualis igitur et ΑΒ ipsi ΨΩ. Et est ipsa ΑΒ datæ sphaeræ diameter; et ipsa ΨΩ igitur æqualis est diametro datæ sphaeræ; ergo datâ sphaerâ comprehensum est icosædron.



λέγω δὲ ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἀλλο-
γός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐλάσσω. Ἐπεὶ γὰρ ῥητή

Dico et icosædri latus irrationalem esse
quæ appellatur minor. Quoniam enim ratio-

donc quintuple du quarré de ΒΔ. Mais on a démontré que le quarré de ΩΨ est quintuple du quarré de ΦΧ, et ΔΒ est égal à ΦΧ, car chacune de ces droites est égale au rayon du cercle ΕΖΗΘΚ; la droite ΑΒ est donc égale à ΨΩ. Mais ΑΒ est le diamètre de la sphère donnée; la droite ΨΩ est donc égale au diamètre de la sphère donnée; l'icosædre est donc circonscrit par la sphère donnée.

Je dis aussi que le côté de l'icosædre est l'irrationnelle qu'on appelle mi-

ἔστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλασίον τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητὴ ἔστιν. Ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἔστιν· ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι²¹.

nalis est sphaeræ diameter, et est potentiâ quintupla ejus quæ ex centro ΕΖΗΘΚ circuli; rationalis igitur est et quæ ex centro circuli ΕΖΗΘΚ; quare et diameter ipsius rationalis est. Si autem in circulo rationalem habente diametrum pentagonum æquilaterum describatur, latus pentagoni irrationalis est quæ appellatur minor. Sed ΕΖΗΘΚ pentagoni latus est icosædri; ergo icosædri latus irrationalis est quæ appellatur minor. Quod oportebat ostendere.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α .

C O R O L L A R I U M .

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίον ἔστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἐκ τε τοῦ¹ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν² τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφόμενων³.

Ex hoc utique manifestum est sphaeræ diametrum potentiâ quintuplam esse ejus quæ ex centro circuli, a quo icosædrum describitur, et sphaeræ diametrum compositam esse ex latere hexagoni et duobus decagoni lateribus, in eodem circulo descriptorum.

neure. Car puisque le diamètre de la sphère est rationnel, et que son carré est quintuple du carré du rayon du cercle ΕΖΗΘΚ; le rayon du cercle ΕΖΗΘΚ sera rationnel; le diamètre de ce cercle est donc rationnel (déf. 6. 10). Mais si l'on décrit un pentagone équilatéral dans un cercle dont le diamètre est rationnel, le côté du pentagone est l'irrationnelle qu'on appelle mineure (11. 13). Mais le côté du pentagone ΕΖΗΘΚ est le côté de l'icosaèdre; le côté de l'icosaèdre est donc l'irrationnelle qu'on appelle mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

C O R O L L A I R E .

D'après cela, il est évident que le carré du diamètre de la sphère est quintuple du carré du cercle d'après lequel l'icosaèdre a été construit, et que le diamètre de la sphère est composé du côté de l'hexagone et du double du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν ἢ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκάδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπιπέδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἐκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα¹· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἐκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ² ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἑκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ ἐκκείσθωσαν³ ἴσαι ταῖς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ· λέγω ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιον ἐστίν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα

PROPOSITIO XVII.

Dodecaedrum constituere, et sphaerâ comprehendere quâ et prædictas figuras; et demonstrare dodecaedri latus esse irrationalem quæ appellatur apotome.

Exponantur prædicti cubi duo plana ad rectos inter sese ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, et secetur unumquodque laterum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ bifariam in Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ punctis; et jungantur ipsæ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, et secetur unaquæque ipsarum ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ extremâ et mediâ ratione in Ρ, Σ, Τ punctis, et sint ipsarum majores portiones ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, et erigantur ab ipsis Ρ, Σ, Τ punctis planis cubi ad rectos ad exteriores partes cubi ipsæ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, et ponantur æquales ipsis ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, et jungantur ipsæ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ; dico ΥΒΧΓΦ pentagonum et æquilaterum et in uno plano, et præterea æquiangulum esse. Jungantur enim ipsæ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Et quoniam

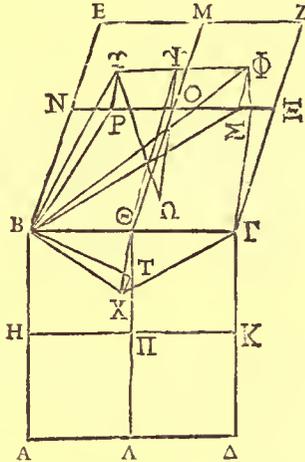
PROPOSITION XVII.

Construire un dodécaèdre, et le circonscrire par la même sphère que les figures précédentes, et démontrer aussi que le côté du dodécaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Que les deux plans ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ du cube dont nous avons parlé (15. 15), soient perpendiculaires l'un à l'autre; que chacun des côtés ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ soit coupé en deux parties égales aux points Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ; joignons les droites ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ; que chacune des droites ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ soit coupée en extrême et moyenne raison aux points Ρ, Σ, Τ, et que ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ soient leurs plus grands segments; des points Ρ, Σ, Τ élevons ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ perpendiculaires extérieurement aux plans du cube (12. 11), et faisons ces droites égales aux droites ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, et joignons ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ; je dis que le pentagone ΥΒΧΓΦ est équilatéral, qu'il est dans un seul plan, et de plus qu'il est équiangle. Car joignons ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Puisque

ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ P, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς⁴ τμήμα ἐστὶν ἡ OP· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ON, NP τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς PO. Ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῷ NB, ἡ δὲ OP τῇ PY· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν BN, NP τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς PY. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BN, NP τὸ ἀπὸ τῆς BP ἐστὶν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BP

recta NO extremâ et mediâ ratione secatur in P, et major ejus portio est OP ; ipsa igitur ex ON, NP tripla sunt ipsius ex PO. Æqualis autem ON quidem ipsi NB, ipsa vero OP ipsi PY ; ipsa igitur ex BN, NP tripla sunt ipsius ex PY. Ipsis autem ex BN, NP ipsum ex BP est æquale ; ipsum igitur ex BP triplum est ipsius ex PY ;



τριπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς PY· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν BP, PY τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς PY. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BP, PY ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BY· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BY τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς YP· διπλῆ ἄρα ἐστὶν⁵ ἡ BY τῆς YP. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ FY τῆς YP διπλῆ, ἰπειδήπερ καὶ ἡ PY τῆς PO, τουτέστι τῆς PY ἐστὶ διπλῆ·

quare ipsa ex BP, PY quadrupla sunt ipsius ex PY. Ipsis autem ex BP, PY æquale est ipsum ex BY ; ipsum igitur ex BY quadruplum est ipsius ex YP ; dupla igitur est BY ipsius YP. Est autem et FY ipsius YP dupla, quoniam et PY ipsius PO, hoc est ipsius PY est dupla ; æqualis igitur

la droite NO est coupée en extrême et moyenne raison au point P, et que son plus grand segment est OP, la somme des carrés des droites ON, NP est triple du carré de PO (4. 13). Mais ON est égal à NB, et OP à PY ; la somme des carrés des droites BN, NP est donc triple du carré de PY. Mais le carré de BP est égal à la somme des carrés des droites BN, NP (47. 1) ; le carré de BP est donc triple du carré de PY ; la somme des carrés des droites BP, PY est donc triple du carré de PY. Mais le carré de BY est égal à la somme des carrés des droites BP, PY ; le carré de BY est donc quadruple du carré de YP ; la droite BY est donc double de YP (20. 6). Mais FY est double de YP, parce que PY est

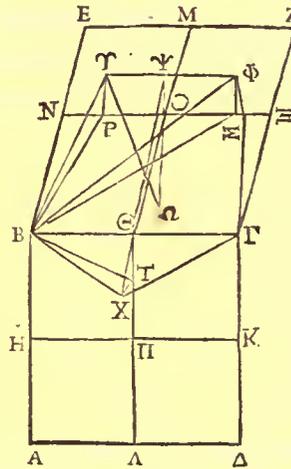
ἴση ἄρα ἢ ΒΥ τῇ ΥΦ. Ομοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ ἑκατέρα τῶν ΒΥ, ΥΦ ἴση ἐστίν⁶. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρα τῶν ΡΥ, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἢ ΟΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ, ΘΧ. λέγω ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖα ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ ΠΤ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΥΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΠΘ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρα τῶν ΤΧ, ΟΨ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΥΘ. Καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ τῇ ΤΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ἰρθάς ἐστίν, ἡ δὲ ΥΘ τῇ ΟΨ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΖ ἐπιπέδῳ πρὸς ἰρθάς ἐστίν· ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῆ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΘΘ, ΘΤΧ, τὰς δύο πλευρὰς τοῖς δυσὶ πλευραῖς⁸ ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ⁹ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσσονται· ἐπ'

BY ipsius ΥΦ. Similiter utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ utrivis ipsarum ΒΥ, ΥΦ æqualem esse; æquilaterum igitur est ΒΥΦΓΧ pentagonum. Dico etiam et in uno esse plano. Ducatur enim a puncto Ο utrivis ipsarum ΡΥ, ΣΦ parallela ad exteriores cubi partes ipsa ΟΨ, et jungantur ipsæ ΨΘ, ΘΧ; dico ipsam ΨΘΧ rectam esse. Quoniam enim ΘΠ extremâ et mediâ ratione secatur in Τ, et major ejus portio est ΠΤ; est igitur ut ΘΠ ad ΠΤ ita ΠΤ ad ΥΘ. Æqualis autem ΠΘ quidem ipsi ΘΟ, ΠΤ vero utrique ipsarum ΤΧ, ΟΨ; est igitur ut ΘΟ ad ΟΨ ita ΧΤ ad ΥΘ. Et est parallela quidem ΘΟ ipsi ΤΧ, utraque enim ipsarum ipsi ΒΔ plano ad rectos est, ipsa vero ΥΘ ipsi ΟΨ, utraque enim ipsarum ipsi ΒΖ plano ad rectos est. Si autem duo triangula componantur ad unum angulum, ut ΨΘΘ, ΘΤΧ, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia ita ut homologa ipsorum latera et parallela sint, reliquæ rectæ in directum erunt; in directum igitur est

double de ΡΟ, c'est-à-dire de ΡΥ; la droite ΒΥ est donc égale à ΥΦ. Nous démontrons semblablement que chacune des droites ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ est égale à chacune des droites ΒΥ, ΥΦ; le pentagone ΒΥΦΓΧ est donc équilatéral. Je dis qu'il est dans un même plan; car du point Ο menons extérieurement au cube la droite ΟΨ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΡΥ, ΣΦ, et joignons ΨΘ, ΘΧ; je dis que ΨΘΧ est une ligne droite. Car puisque la droite ΘΠ est coupée en extrême et moyenne raison au point Τ, et que ΠΤ est son plus grand segment, la droite ΘΠ sera à ΠΤ comme ΠΤ est à ΥΘ (déf. 3. 6). Mais ΠΘ est égal à ΘΟ, et la droite ΠΤ est égale à chacune des droites ΤΧ, ΟΨ; la droite ΘΟ est donc à ΟΨ comme ΧΤ est à ΥΘ. Mais la droite ΘΟ est parallèle à la droite ΤΧ, car ces deux droites sont perpendiculaires au plan ΒΔ (6. 11), et ΥΘ est parallèle à ΟΨ, car ces deux droites sont perpendiculaires au plan ΒΖ; or si deux triangles sont construits à un même point, comme les triangles ΨΘΘ, ΘΤΧ, ces triangles ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, et les côtés proportionnels étant parallèles, les droites restantes sont en lignes droites (32. 6); la droite ΨΘ est

εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $\Psi\Theta$ τῆς $\Theta\chi$. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν ἐνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ $\gamma\beta\chi\gamma\phi$ πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον ἐστὶν. Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P , καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ OP · ἐστὶν ἄρα ὡς συναμφοτέρες ἡ NO , OP πρὸς τὴν ON οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OP . Ἴση δὲ ἡ PO τῆς OS · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΣN πρὸς τὴν NO οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OS · ἡ $N\Sigma$ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ O , καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ

$\Psi\Theta$ ipsi $\Theta\chi$. Omnis autem recta in uno est plano; in uno igitur plano est $\gamma\beta\chi\gamma\phi$ pentagonum. Dico etiam et æquilaterum esse. Quoniam enim recta linea NO extremâ et mediâ ratione secatur in P , et major portio est OP ; est igitur ut simul utraque NO , OP ad ON ita NO ad OP . Æqualis autem PO ipsi OS ; est igitur ut ΣN ad NO ita NO ad OS ; ipsa $N\Sigma$ igitur extremâ et mediâ ratione secatur in O , et major portio est NO .



NO · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $N\Sigma$, ΣO τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ON . Ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῆς NB , ἡ δὲ OS τῆς $\Sigma\Phi$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $N\Sigma$, $\Sigma\Phi$ τετραγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB · ὥστε καὶ

Ipsa igitur $N\Sigma$, ΣO tripla sunt ipsius ex ON . Æqualis autem ON quidem ipsi NB , ipsa vero OS ipsi $\Sigma\Phi$; ipsa igitur ex $N\Sigma$, $\Sigma\Phi$ quadatra tripla sunt ipsius ex NB ; quare et ipsa ex $\Phi\Sigma$,

donc dans la direction de $\Theta\chi$. Mais toute droite est dans un seul plan; le pentagone $\gamma\beta\chi\gamma\phi$ est donc dans un seul plan. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque la ligne droite NO est coupée en extrême et moyenne raison au point P , et que OP est le plus grand segment, la somme des droites NO , OP sera à ON comme NO est à OP (5. 13). Mais la droite PO est égale à OS ; la droite ΣN est donc à NO comme NO est à OS ; la droite $N\Sigma$ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point O , et NO est son plus grand segment (déf. 3. 6); la somme des carrés des droites $N\Sigma$, ΣO est donc triple du carré de ON (4. 13). Mais ON est égal à NB , et OS égal à $\Sigma\Phi$; la somme des carrés des droites $N\Sigma$, $\Sigma\Phi$ est donc triple

τὰ ἀπὸ τῶν $\Phi\Sigma$, ΣN , NB τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB . Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣN , NB ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\text{B}\Sigma$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\text{B}\Sigma$, $\Sigma\Phi$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $\text{B}\Phi$, ἔρθῃ γὰρ ἡ ὑπὸ $\Phi\Sigma\text{B}$ γωνία, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB . διπλῆ ἄρα ἐστὶν¹¹ ἡ ΦB τῆς BN . Ἔστι δὲ καὶ ἡ $\text{B}\Gamma$ τῆς BN διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν¹² ἡ ΦB τῆ $\text{B}\Gamma$. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $\text{B}\Upsilon$, $\Upsilon\Phi$ δυσὶ ταῖς $\text{B}\chi$, $\Phi\Gamma$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΦB βάσει τῆ $\text{B}\Gamma$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὲρ $\text{B}\Upsilon\Phi$ γωνία τῆ ὑπὸ $\text{B}\chi\Gamma$ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ $\Upsilon\Phi\Gamma$ γωνία ἴση ἐστὶ τῆ ὑπὸ $\text{B}\chi\Gamma$. αἱ ἄρα ὑπὸ $\text{B}\chi\Gamma$, $\text{B}\Upsilon\Phi$, $\Upsilon\Phi\Gamma$ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλευρὸς αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσιν ἰσογώνιον ἐσται¹³ τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\text{B}\Upsilon\Phi\Gamma\chi$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὰ ἄρα $\text{B}\Upsilon\Phi\Gamma\chi$ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε¹⁴ ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἐστὶν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρῆς τῆς $\text{B}\Gamma$. Ἐὰν ἄρα ἐφ' ἐκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα¹⁴ πενταγώνων ἰσοπλευρῶν τε¹⁵ καὶ ἰσογώνιων περιεχόμενον ὃ καλεῖται δωδεκαέδρον¹⁶.

ΣN , NB quadrupla sunt ipsius ex NB . Ipsi autem ex ΣN , NB æquale est ipsum ex $\text{B}\Sigma$; ipsa igitur ex $\text{B}\Sigma$, $\Sigma\Phi$, hoc est ipsum ex $\text{B}\Phi$, rectus enim $\Phi\Sigma\text{B}$ angulus, quadruplum est ipsius ex NB ; dupla igitur est ΦB ipsius BN . Est autem et $\text{B}\Gamma$ ipsius BN dupla; æqualis igitur est ΦB ipsi $\text{B}\Gamma$. Et quoniam duæ $\text{B}\Upsilon$, $\Upsilon\Phi$ duabus $\text{B}\chi$, $\chi\Gamma$ æquales sunt, et basis ΦB basi $\text{B}\Gamma$ æqualis; angulus igitur $\text{B}\Upsilon\Phi$ angulo $\text{B}\chi\Gamma$ est æqualis. Similiter utique ostendemus et $\Upsilon\Phi\Gamma$ angulum æqualem esse ipsi $\text{B}\chi\Gamma$. Ipsi igitur $\text{B}\chi\Gamma$, $\text{B}\Upsilon\Phi$, $\Upsilon\Phi\Gamma$ tres anguli æquales inter se sunt. Si autem pentagoni æquilateri tres anguli æquales inter se sunt, æquiangulum est pentagonum; æquiangulum igitur est $\text{B}\Upsilon\Phi\Gamma\chi$ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum; ipsum igitur $\text{B}\Upsilon\Phi\Gamma\chi$ pentagonum et æquilaterum est et æquiangulum, et est super unum cubi latus $\text{B}\Gamma$. Si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem construamus, constituetur quædam figura solida duodecim pentagonis æquilateris et æquiangulis contenta quæ appellatur dodecaëdron.

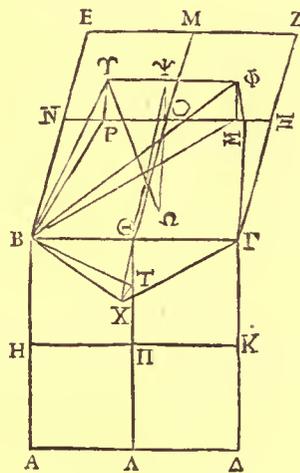
du carré de NB ; la somme des carrés des droites $\Phi\Sigma$, ΣN , NB est donc quadruple du carré de NB . Mais le carré de $\text{B}\Sigma$ est égal à la somme des carrés des droites ΣN , NB (47.1); la somme des carrés des droites $\text{B}\Sigma$, $\Sigma\Phi$, c'est-à-dire le carré de ΦB , est donc quadruple du carré de NB , à cause que l'angle droit $\Phi\Sigma\text{B}$; la droite ΦB est donc double de BN . Mais $\text{B}\Gamma$ est double de BN ; la droite ΦB est donc égale à $\text{B}\Gamma$. Et puisque les droites $\text{B}\Upsilon$, $\Upsilon\Phi$ sont égales aux droites $\text{B}\chi$, $\chi\Gamma$, et que la base ΦB est égale à la base $\text{B}\Gamma$, l'angle $\text{B}\Upsilon\Phi$ sera égal à l'angle $\text{B}\chi\Gamma$ (8. 1). Nous démontrerons semblablement que l'angle $\Upsilon\Phi\Gamma$ est égal à l'angle $\text{B}\chi\Gamma$; les trois angles $\text{B}\chi\Gamma$, $\text{B}\Upsilon\Phi$, $\Upsilon\Phi\Gamma$ sont donc égaux entr'eux. Mais si trois angles d'un pentagone équilatéral sont égaux entr'eux, le pentagone est équiangle (7. 13); le pentagone $\text{B}\Upsilon\Phi\Gamma\chi$ est donc équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; le pentagone $\text{B}\Upsilon\Phi\Gamma\chi$ est donc équilatéral et équiangle, et il est placé sur un côté $\text{B}\Gamma$ du cube; si donc nous faisons la même construction sur chacun des douze côtés du cube, nous aurons construit une figure solide contenue sous douze pentagones équilatéraux et équiangles, que l'on nomme dodécaèdre.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Εκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΟΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἐλλήλας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελευταίῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου¹⁷ βιβλίου. Τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΟΩ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς¹⁸ τοῦ κύβου. Επεξεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ

Oportet autem ipsum et sphaerâ comprehendere datâ, et ostendere dodecaedri lateris esse irrationalem quæ appellatur apotome.

Producatur enim ΨΟ, et sit ΟΩ; occurrat igitur ΟΩ diametro cubi, et bifariam se mutuo secant, hoc enim ostensum est in penultimo theoremate undecimi libri. Secent in Ω; ergo Ω centrum est sphaeræ comprehendentis cubum, et ΟΩ dimidia lateris cubi. Jungatur et ΥΩ. Et quoniam recta linea ΝΣ extremâ et mediâ ratione secatur in Ο, et major ipsius portio est ΝΟ; ipsa igitur ex ΝΣ, ΣΟ tripla sunt ipsius



Mais il faut circonscire cette figure par la sphère donnée, et démontrer que le côté du dodécaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Car prolongeons ΨΟ, et que son prolongement soit ΟΩ; la droite ΟΩ rencontrera le diamètre du cube, et ces deux droites se couperont en deux parties égales, car cela est démontré dans l'avant dernier théorème du livre onze. Que ces droites se coupent au point Ω; le point Ω sera le centre de la sphère circonscrite au cube, et la droite ΟΩ la moitié du côté du cube. Joignons ΥΩ. Puisque la ligne droite ΝΣ est coupée en extrême et moyenne raison au point Ο, et que ΝΟ est son plus grand segment, la somme des carrés des droites ΝΣ, ΣΟ sera

τῆς ΝΟ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδὴ πρὸς καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ· ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλασιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον ἐστὶ¹⁹ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδίδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει²⁰ τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου²¹. Εἰ δὲ ἔλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἐστὶν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. Καὶ ἐστὶ τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. Ομοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιέληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρα.

NO. Æqualis autem NS quidem ipsi ΨΩ, quoniam et NO quidem ipsi ΟΩ est æqualis, ipsa vero ΨΟ ipsi ΟΣ; at vero et ΟΣ ipsi ΨΥ, quoniam et ipsi ΡΟ; ipsa igitur ΩΨ, ΨΥ tripla sunt ipsius ex NO. Ipsis autem ex ΩΨ, ΨΥ æquale est ipsum ex ΨΩ. Ipsum igitur ex ΥΩ triplum est ipsius ex NO. Est autem et ipsa ex centro sphaeræ comprehendens cubum potentiâ tripla dimidii lateris eubi, prius enim ostensum est cubum constituere, et sphaerâ comprehendere, et ostendere sphaeræ diametrum potentiâ triplam esse lateris eubi. Si autem tota totius, et dimidia dimidia; et est NO dimidia lateris eubi; ergo ΥΩ æqualis est ipsi ex centro sphaeræ comprehendens cubum. Et est Ω centrum sphaeræ comprehendens cubum; ergo Υ punctum est ad superficiem sphaeræ. Similiter utique ostendemus et unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri esse ad superficiem sphaeræ; comprehensum igitur est dodecaedrum datâ sphaerâ.

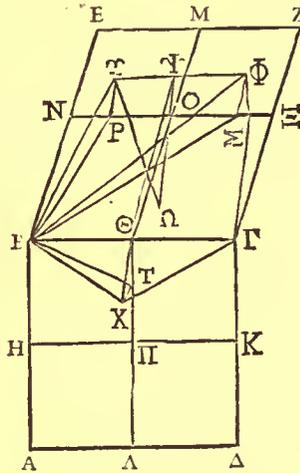
triple du carré de NO (4. 13). Mais la droite NS est égale à ΨΩ, parce que NO est égal à ΟΩ, la droite ΨΟ est égale à ΟΣ, et la droite ΟΣ est égale à ΨΥ, parce qu'elle est égale à ΡΟ; la somme des carrés des droites ΩΨ, ΨΥ est donc triple du carré de NO. Mais le carré de ΥΩ est égal aux carrés des droites ΩΨ, ΨΥ (47. 1); le carré de ΥΩ est donc triple du carré de NO. Mais le rayon de la sphère circonscrite au cube est égal en puissance au triple de la moitié du côté du cube, car on a enseigné à construire un cube, et à le circonscire par une sphère, et l'on a démontré que le diamètre de la sphère est égal en puissance au triple du côté du cube (15. 3); or les tous sont entre eux comme les moitiés, et NO est la moitié du côté du cube; la droite ΥΩ est donc égale au rayon de la sphère circonscrite au cube. Mais le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au cube; le point Υ est donc à la surface de la sphère. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles restants du dodécaèdre est à la surface de la sphère; le dodécaèdre est donc circonscrit par la sphère donnée.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς NO ἄκρον καὶ μέσον τετμημένης, τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ PO· τῆς δὲ OΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ OΣ²², ἔλθῃς ἄρα τῆς NΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ PΣ. Οἷον ἐπεὶ ἐστὶν²³ ὡς ἡ NO πρὸς τὴν OP οὕτως²⁴

Dico autem dodecaedri latus irrationalem esse quæ appellatur apotome.

Quoniam enim rectæ NO extremâ et mediâ sectæ major portio est PO, ipsius autem OΞ extremâ et mediâ ratione sectæ major portio est OΣ; totius igitur NΞ extremâ et mediâ ratione sectæ major portio est PΣ. Similiter quoniam est ut



ἡ OP πρὸς τὴν PN καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκεις²⁵ πολλαπλαστοῖς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ NΞ πρὸς τὴν PΣ οὕτως ἡ PΣ πρὸς συναμφοτέρον τὴν²⁶ NP, ΣΞ. Μείζων δὲ

NO ad OP ita OP ad PN, et dupla, partes enim cum æque multiplicibus eamdem habent rationem; ut igitur NΞ ad PΣ ita PΣ ad utramque simul NP, ΣΞ. Major autem NΞ ipsâ

Je dis enfin que le côté du dodécaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Car puisque PO est le plus grand segment de la droite NO coupée en extrême et moyenne raison, et que OΣ est le plus grand segment de la droite OΞ coupée en extrême et moyenne raison, la droite PΣ sera le plus grand segment de la droite entière NΞ coupée en extrême et moyenne raison. Car puisque NO est à OP comme OP est à PN, ainsi que les doubles de ces droites, parce que les parties ont la même raison que leurs équimultiples (15. 5); la droite NΞ sera à la droite PΣ comme la droite PΣ est à la somme des droites NP, ΣΞ. Mais la droite NΞ est plus grande que PΣ, la droite PΣ est donc plus grande que la

ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφο-
 τέρου τῆς²⁷ ΝΡ, ΣΞ· ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ
 μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς
 τμημά ἐστιν ἡ ΡΣ. Ἰση δὲ ἡ ΡΣ τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα
 ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον
 τμημά ἐστιν ἡ ΥΦ. Καὶ ἐπεὶ ῥητὴ ἐστὶν ἡ τῆς
 σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐστὶ δυνάμει τριπλασίων
 τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ
 πλευρὰ οὔσα τοῦ κύβου²⁷. Εὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ
 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, ἐκάτερον τῶν τμη-
 μάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη²⁸ ἀποτομή· ἡ
 ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὔσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός
 ἐστὶν ἡ καλουμένη²⁹ ἀποτομή. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι³⁰.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου
 πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ
 μείζον τμημά ἐστὶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ¹.

ΡΣ ; major igitur et ΡΣ utraq̄ue simul ΝΡ,
 ΣΞ ; ipsa ΝΞ igitur extremâ et mediâ ratione
 secatur, et major ipsius portio est ΡΣ. Æqualis
 autem ΡΣ ipsi ΥΦ ; rectæ igitur ΝΞ extremâ et
 mediâ ratione sectæ major portio est ΥΦ. Et quo-
 niam rationalis est sphaeræ diameter, et est po-
 tentiâ tripla lateris eubi ; rationalis igitur est
 ΝΞ latus existens cubi. Si autem rationalis
 linea extremâ et mediâ ratione secta sit, utraque
 portionum irrationalis est quæ appellatur apo-
 tome ; ipsa ΥΦ igitur latus existens dodecaedri
 irrationalis est quæ appellatur apotome. Quod
 oportebat ostendere.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est lateris eubi extremâ
 et mediâ secti majorem portionem esse dode-
 caedri latus.

somme des droites ΝΡ, ΣΞ ; la droite ΝΞ est donc coupée en extrême et moyenne
 raison, et ΡΣ est son plus grand segment. Mais ΡΣ est égal à ΥΦ ; la droite ΥΦ est
 donc le plus grand segment de la droite ΝΞ coupée en extrême et moyenne
 raison. Et puisque le diamètre de la sphère est rationnel, et qu'il est égal en
 puissance au triple du côté du cube (15. 13), la droite ΝΞ qui est le côté du
 cube sera rationnelle (déf. 6. 11). Mais si une ligne rationnelle est coupée en
 extrême et moyenne raison, chacun des segments est l'irrationnelle qu'on ap-
 pèle apotome (6. 13) ; le côté ΥΦ qui est le côté du dodécaèdre, est donc
 l'irrationnelle qu'on appelle apotome. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident que le côté du cube étant coupé en extrême et
 moyenne raison, le plus grand segment est le côté du dodécaèdre.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

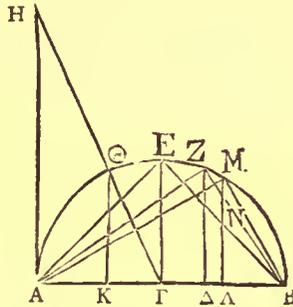
PROPOSITIO XVIII.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρίναι πρὸς ἀλλήλας.

Latera quinque figurarum exponere et comparare inter se.

Ἐκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τετμήσθω κατὰ μὲν¹ τὸ Γ ὥστε ἴσιν εἶναι τὴν AG τῇ GB , κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν $A\Delta$ τῆς ΔB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AEB , καὶ ἀπὸ τῶν Γ , Δ τῇ AB πρὸς ἑρθὰς ἤχθωσαν αἰ² GE , ΔZ , καὶ

Exponatur datae sphaerae diameter AB , et secetur quidem in Γ ita ut aequalis sit AG ipsi GB , in Δ vero ita ut dupla sit $A\Delta$ ipsius ΔB , et describatur super AB semicirculus AEB , et a punctis Γ , Δ ipsi AB ad rectos ducantur ipsae



ἐπεξέυχθωσαν αἰ AZ , ZB . Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῆς ΔB , τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Delta$. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῆς $A\Delta$. Ὡς δὲ ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ AZB τρίγωνον τῷ $AZ\Delta$ τριγώνῳ ἡμίλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AZ . Ἐστὶ δὲ

GE , ΔZ , et jungantur AZ , ZB . Et quoniam dupla est $A\Delta$ ipsius ΔB , tripla igitur est AB ipsius $B\Delta$; convertendo sesquialtera igitur est BA ipsius $A\Delta$. Ut autem BA ad $A\Delta$ ita ipsum ex BA ad ipsum ex AZ ; æquiangulum enim est AZB triangulum triangulo $AZ\Delta$; sesquialterum igitur est ipsum ex BA ipsius ex AZ . Est

PROPOSITION XVIII.

Exposer les côtés des cinq figures, et les comparer entre eux.

Soit AB le diamètre de la sphère donnée; qu'il soit coupé au point Γ , de manière que AG soit égal à GB ; et au point Δ , de manière que $A\Delta$ soit double de ΔB ; sur AB décrivons le demi-cercle AEB ; des points Γ , Δ menons les droites GE , ΔZ perpendiculaires à AB , et joignons AZ , ZB . Puisque la droite $A\Delta$ est double de ΔB , la droite AB sera triple de $B\Delta$; donc, par conversion, la droite BA sera égale aux trois moitiés de $A\Delta$. Mais BA est à $A\Delta$ comme le carré de BA est au carré de AZ (20. 6), car le triangle AZB est équiangle avec le triangle $AZ\Delta$ (8. 6); le carré de BA est donc égal aux trois moitiés du carré de AZ . Mais

καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμισελία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ AB ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ AZ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς³ πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ AD τῆς AB , τριπλασίων⁴ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BD . Ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BD οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ · τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ . Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου⁵ πλευρᾶς. Καὶ ἔστιν ἡ AB ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ BZ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , διπλῆ⁶ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BG . Ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BE · διπλάσιον ἄρα ἐστὶ⁶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BE . Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ AB ἢ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ BE ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἦχθω δὲ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ AH , καὶ κείσθω ἡ AH ἴση τῇ AB ⁷, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HG , καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν

autem et sphaeræ diameter potentiâ sesquialtera lateris pyramidis, et est AB sphaeræ diameter; ergo AZ æqualis est lateri pyramidis.

Rursus, quoniam dupla est AD ipsius AB , tripla igitur est AB ipsius BD . Ut autem AB ad BD ita ipsum ex AB ad ipsum ex BZ ; triplum igitur est ipsum ex AB ipsius ex BZ . Est autem et sphaeræ diameter potentiâ tripla lateris cubi, et est AB sphaeræ diameter; ergo ipsa BZ cubi est latus.

Et quoniam æqualis est AG ipsi GB , dupla igitur est AB ipsius BG . Ut autem AB ad BG ita ipsum ex AB ad ipsum ex BE ; duplum igitur est ipsum ex AB ipsius ex BE . Est autem et sphaeræ diameter potentiâ dupla lateris octaedri, et est ipsa AB datæ sphaeræ diameter; ipsum BE igitur octaedri est latus.

Ducatur autem a puncto A ipsi AB rectæ ad rectos ipsa AH , et ponatur AH æqualis ipsi AB , et jungatur HG , et a puncto Θ ad

le diamètre de la sphère est égal en puissance aux trois moitiés du côté de la pyramide (13. 13), et AB est le diamètre de la sphère; la droite AZ est donc égale au côté de la pyramide.

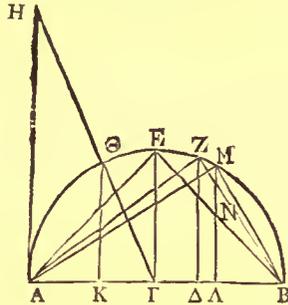
De plus, puisque AD est double de AB , la droite AB sera triple de BD . Mais AB est à BD comme le carré de AB est au carré de BZ (8, et 20. 6); le carré de AB est donc triple du carré de BZ . Mais le diamètre de la sphère est égal en puissance au triple du côté du cube (15. 13), et AB est le diamètre de la sphère; la droite BZ est donc le côté du cube.

Et puisque la droite AG est égale à GB , la droite AB sera double de BG . Mais AB est à BG comme le carré de AB est au carré de BE ; le carré de AB est donc double du carré de BE . Mais le diamètre de la sphère est égal en puissance au double du côté de l'octaèdre (14. 13), et AB est le diamètre de la sphère donnée; la droite BE est donc le côté de l'octaèdre.

Du point A menons la droite AH perpendiculaire à AB ; faisons AH égal à AB ; joignons HG , et du point Θ menons ΘK perpendiculaire à AB . Puisque HA est

ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ, ἴση γὰρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. Ἰση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ

ΑΒ perpendicularis ducatur ΘΚ. Et quoniam dupla est ΗΑ ipsius ΑΓ, æqualis enim ΗΑ ipsi ΑΒ, ut autem ΗΑ ad ΑΓ ita ΘΚ ad ΚΓ; dupla igitur et ΘΚ ipsius ΚΓ; quadruplum igitur est ipsum ex ΘΚ ipsius ex ΚΓ; ipsa igitur ex ΘΚ, ΚΓ, quod est ipsum ex ΘΓ, quintuplum est ipsius ex ΚΓ. Æqualis autem ΘΓ ipsi ΓΒ; quintuplum igitur est ipsum ex ΒΓ ipsius ex



τῆς ΓΚ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ἂν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστὶ διπλῆ· λοιπῆ ἄρα ἡ ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστὶ διπλῆ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· ἐναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ· μείζον ἄρα ἐστὶ⁸ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· μείζων ἄρα ἐστὶν⁹ ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. Κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ἑρθὰς ἤχθω ἡ ΑΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ.

ΓΚ. Et quoniam dupla est ΑΒ ipsius ΒΓ, quarum ipsa ΑΔ ipsius ΔΒ est dupla; reliqua igitur ΒΔ reliquæ ΔΓ est dupla; tripla igitur ΒΓ ipsius ΓΔ; nonuplum igitur ipsum ex ΒΓ ipsius ex ΓΔ. Quintuplum autem ipsum ex ΒΓ ipsius ex ΓΚ; majus igitur est ipsum ex ΓΚ ipso ex ΓΔ; major igitur est ΓΚ ipsâ ΓΔ. Ponatur ipsi ΓΚ æqualis ΓΛ, et a puncto Α ipsi ΑΒ ad rectos agatur

double de ΑΓ, car ΗΑ est égal à ΑΒ, et que ΗΑ est à ΑΓ comme ΘΚ est à ΚΓ (4. 6), la droite ΘΚ sera double de ΚΓ; le carré de ΘΚ est donc quadruple du carré de ΚΓ (20. 6); la somme des carrés des droites ΘΚ, ΚΓ, qui est égale au carré de ΘΓ (47. 1), est donc quintuple du carré de ΚΓ. Mais ΘΓ est égal à ΓΒ; le carré de ΒΓ est donc quintuple du carré de ΓΚ. Et puisque ΑΒ est double de ΒΓ, et ΑΔ double de ΔΒ, le reste ΒΔ sera double du reste ΔΓ; la droite ΒΓ est donc triple de ΓΔ; le carré de ΒΓ est donc égal à neuf fois le carré de ΓΔ (20. 6). Mais le carré de ΒΓ est quintuple du carré de ΓΚ; le carré de ΓΚ est donc plus grand que le carré de ΓΔ; la droite ΓΚ est donc plus grande que ΓΔ. Faisons ΓΛ égal à ΓΚ; du point Α menons ΑΜ perpendiculaire à ΑΒ, et

Καὶ ἵπεί πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἢ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἢ ΚΛ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλάσιον τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἢ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται¹⁰· ἢ ΚΛ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας¹¹ διάμετρος σύγκειται, ἐκ τε τῆς τοῦ¹² ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΒ ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἢ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἢ ΑΚ τῇ ΑΒ· ἑκάτερα ἄρα τῶν ΑΚ, ΑΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. Καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΑΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστιν ἑκάτερα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασίον τῆς ΚΓ· πεντα-

AM, et jungatur MB. Et quoniam quintuplum est ipsum ex ΒΓ ipsius ΓΚ, et est ipsius quidem ΒΓ dupla ΑΒ, ipsius vero ΓΚ dupla ΚΛ; quintuplum igitur est ipsum ex ΑΒ ipsius ex ΚΛ. Est autem et sphaeræ diameter potentiâ quintupla ipsius ex centro circuli a quo icosaedrum describitur. Et est ΑΒ ipsa sphaeræ diameter; ipsa ΚΛ igitur ex centro est circuli a quo icosaedrum describitur; ipsa ΚΛ igitur hexagoni est latus dicti circuli. Et quoniam sphaeræ diameter componitur et ex latere hexagoni et duobus decagoni lateribus in dicto circulo descriptorum, et est quidem ΑΒ sphaeræ diameter, ipsum vero ΚΛ hexagoni latus, et æqualis ΑΚ ipsi ΑΒ; utraque igitur ipsarum ΑΚ, ΑΒ decagoni est latus descripti in circulo, a quo icosaedrum describitur. Et quoniam decagoni quidem ΑΒ est latus, hexagoni vero ipsa ΜΛ, æqualis enim est ipsi ΚΛ, quoniam et ipsi ΘΚ, æqualiter enim distat a centro, et est utraque ipsarum ΘΚ, ΚΛ dupla ipsius ΚΓ; pentagoni igitur est ΜΒ latus. La-

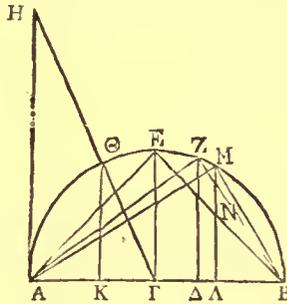
joignons MB. Puisque le carré de ΒΓ est quintuple du carré de ΓΚ, que ΑΒ est double de ΒΓ, et ΚΛ double de ΓΚ, le carré de ΑΒ sera quintuple du carré de ΚΛ. Mais le carré du diamètre de la sphère est quintuple du carré du rayon du cercle d'après lequel l'icosaèdre est décrit (cor. 16. 13), et ΑΒ est le diamètre de la sphère; la droite ΚΛ est donc le rayon du cercle d'après lequel l'icosaèdre est décrit; la droite ΚΛ est donc le côté de l'hexagone décrit dans le cercle dont nous venons de parler. Et puisque le diamètre de la sphère est composé du côté de l'hexagone et de deux côtés du décagone, ces polygones étant décrits dans le cercle dont nous venons de parler (16. 13), que ΑΒ est le diamètre de la sphère, que ΚΛ est le côté de l'hexagone, et que ΑΚ est égal à ΑΒ, chacune des droites ΑΚ, ΑΒ sera le côté du décagone décrit dans le cercle d'après lequel on a décrit l'icosaèdre. Et puisque ΑΒ est le côté du décagone, et ΜΛ le côté de l'hexagone, car la droite ΜΛ est égale à ΚΛ, parcequ'elle l'est à ΘΚ (14. 3), ces droites étant également éloignées du centre, et puisque chacune des droites ΘΚ, ΚΛ est double de ΚΓ,

γωνίου ἄρα ἐστὶν ἡ MB. Ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ MB.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ZB κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ N, καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ NB· ἡ NB ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρὰ.

tus autem pentagoni est latus icosaedri; icosaedri igitur est MB latus.

Et quoniam ZB cubi est latus, secetur extremâ et mediâ ratione in N, et sit major portio NB; ipsa NB igitur dodecaedri est latus.



Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν AZ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς¹³ BE δυνάμει διπλασίον¹⁴, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ZB δυνάμει τριπλασίον¹⁵, ὡς ἄρα ἡ¹⁵ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο· ἡ¹⁶ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ· ἡ δὲ

Et quoniam sphaeræ diameter ostensa est ipsius quidem AZ lateris pyramidis potentiâ sesquialtera, lateris vero BE octaedri potentiâ dupla, lateris autem ZB cubi potentiâ triplâ, quarum igitur partium sphaeræ diameter potentiâ est sex, earum pyramidis latus quatuor, octaedri trium, cubi autem duarum; ergo pyramidis latus quidem lateris octaedri potentiâ est sesquitertium, cubi vero potentiâ duplum; latus autem octae-

la droite MB sera le côté du pentagone (10. 13). Mais le côté du pentagone est le côté de l'icosaèdre (6. 13); la droite MB est donc le côté de l'icosaèdre.

Puisque la droite ZB est le côté du cube; que cette droite soit coupée en extrême et moyenne raison au point N, et que NB soit le plus grand segment; la droite NB sera le côté du dodécaèdre (17. 13).

Et puisque l'on a démontré que le carré du diamètre de la sphère est égal aux trois moitiés du carré du côté AZ de la pyramide, au double du carré du côté BE de l'octaèdre, et au triple du carré du côté ZB du cube, si le carré du diamètre de la sphère contient six parties, le carré du côté de la pyramide en contiendra quatre, le carré du côté de l'octaèdre trois, et le carré du côté du cube deux; le carré du côté de la pyramide est donc égal aux quatre tiers du carré du côté de l'octaèdre, et au double du carré du côté du cube; et le carré du côté de

τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. Αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἡτε¹⁷ τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἄλλοι γάρ εἰσιν, ἢ μὲν ἐλάττων, ἢ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι δὲ¹⁸ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἢ MB τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς NB δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ZAB τρίγωνον τῷ ZAB τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BZ οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν BA. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BA οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA. Τριπλῆ δὲ ἡ AB τῆς BA· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZB τοῦ

dri lateris cubi potentia sesquialterum. Latera igitur dicta trium figurarum, dico et pyramidis et octaedri et cubi inter se esse in rationibus rationalibus; reliqua vero duo, dico et icosaedri, et dodecaedri, neque inter se, neque ad dicta sunt in rationibus rationalibus, irrationales enim sunt, illa quidem minor, hæc vero apotome.

Majus vero esse icosaedri latus MB dodecædri latere NB ita ostendemus.

Quoniam enim æquiangulum est ZAB triangulum triangulo ZAB, proportionaliter est ut ΔB ad BZ ita ZB ad BA. Et quoniam tres rectæ proportionales sunt, est ut prima ad tertiam ita ipsum ex primâ ad ipsum ex secundâ; est igitur ut ΔB ad BA ita ipsum ex ΔB ad ipsum ex BZ; invertendo igitur ut AB ad BA ita ipsum ex ZB ad ipsum ex BA. Tripla autem AB ipsius BA;

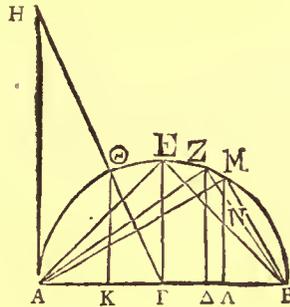
l'octoèdre sera égal aux trois moitiés du carré du côté du cube. Les côtés des trois figures dont nous avons parlé, je veux dire les côtés de la pyramide, de l'octaèdre, et du cube, sont donc entr'eux en raisons rationnelles; mais les deux côtés restants, je veux dire les côtés de l'icosaèdre et du dodécaèdre ne sont point entr'eux, ni avec les cotés dont nous avons parlé, en raisons rationnelles, parce qu'ils sont irrationnels, l'un étant une mineure (16. 13), et l'autre un apotome (17. 13).

Nous démontrâmes de la manière suivante que le côté MB de l'icosaèdre est plus grand que le côté NB du dodécaèdre.

Puisque le triangle ZAB est équiangle avec le triangle ZAB, la droite ΔB sera à BZ comme ZB est à BA (4. 6). Et puisque ces trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme le carré de la première est au carré de la seconde (cor. 20. 6); la droite ΔB est donc à BA comme le carré de ΔB est au carré de BZ; donc, par inversion, AB est à BA comme le carré de ZB est au carré de BA (cor. 4. 5). Mais AB est triple de BA; le carré de ZB est donc

ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζον ἄρα καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ¹⁹. πολλῶ ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ μείζων ἴστί. Καὶ τῆς μὲν ΑΑ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημά ἐστὶν ἡ ΚΑ, ἐπειδὴ περ ἡ μὲν ΑΚ ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου· τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον

tripulum igitur ipsum ex ΖΒ ipsius ex ΒΔ. Est autem et ipsum ex ΑΔ ipsius ex ΔΒ quadruplum; dupla enim ΑΔ ipsius ΔΒ; majus igitur ipsum ex ΑΔ ipso ex ΖΒ; major igitur et ΑΔ ipsa ΖΒ; multo major igitur est ΑΑ ipsa ΖΒ. Et rectæ quidem ΑΑ extremâ et mediâ ratione sectæ major portio est ΚΑ, quoniam ΑΚ quidem hexagoni est latus, ipsa vero ΚΑ decagoni;



λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημά ἐστὶν ἡ ΝΒ· μείζον ἄρα ἡ ΚΑ τῆς ΝΒ. Ἴση δὲ ἡ ΚΑ τῇ²⁰ ΑΜ· μείζον ἄρα ἡ ΑΜ τῆς ΝΒ. Τῆς δὲ ΑΜ μείζων ἐστίν²¹ ἡ ΜΒ· πολλῶ ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ οὔσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἴστί τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

rectæ autem ΖΒ extremâ et mediâ ratione sectæ major portio est ΝΒ; major igitur ΚΑ ipsa ΝΒ. Æqualis autem ΚΑ ipsi ΑΜ; major igitur ΑΜ ipsa ΝΒ. Ipsa autem ΑΜ major est ΜΒ; ergo ipsa ΜΒ, latus existens icosaedri, multo major est ipsa ΝΒ existente dodecaedri latere. Quod oportebat ostendere.

triple du carré de ΒΔ. Mais le carré de ΑΔ est quadruple du carré de ΔΒ, car ΑΔ est double de ΔΒ; le carré de ΑΔ est donc plus grand que le carré de ΖΒ; la droite ΑΔ est donc plus grande que la droite ΖΒ; la droite ΑΑ est donc à plus forte raison plus grande que ΖΒ. Mais ΚΑ est le plus grand segment de la droite ΑΑ coupée en extrême et moyenne raison, à cause que ΑΚ est le côté de l'hexagone, et ΚΑ le côté du décagone (9. 13), et que ΝΒ est le plus grand segment de la droite ΖΒ coupée aussi en extrême et moyenne raison; la droite ΚΑ est donc plus grande que ΝΒ. Mais ΚΑ est égal à ΑΜ; la droite ΑΜ est donc plus grande que ΝΒ. Mais la droite ΜΒ est plus grande que ΑΜ (19. 1); la droite ΜΒ, qui est le côté de l'icosaèdre, est donc à plus forte raison plus grande que ΝΒ, qui est le côté du dodécaèdre. Ce qu'il fallait démontrer.

Α Δ Λ Ω Σ'.

Επει γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΖΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΒ τρίγωνῳ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Εδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΑ πενταπλάσιον· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΑ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστίν· καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζον ἐστίν· ὥστε καὶ ἐν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἐνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζον ἐστὶ· μείζων ἄρα ἡ ΚΑ τῆς ΝΒ. Ἴση δὲ ἡ ΚΑ τῇ ΑΜ· μείζων ἄρα ἡ ΚΑ τῆς ΝΒ· πικλλῶ ἄρα ἡ ΜΒ τῆς ΒΝ μείζων ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ALITER.

Quoniam enim dupla est ΑΔ ipsius ΔΒ, tripla igitur ΑΒ ipsius ΒΔ. Ut autem ΑΒ ad ΒΔ ita ipsum ex ΑΒ ad ipsum ex ΒΖ, propterea quod æquiangulum est ΖΑΒ triangulum triangulo ΖΔΒ; triplum igitur ipsum ex ΑΒ ipsius ex ΒΖ. Ostensum est autem ipsum ex ΑΒ ipsius ex ΚΑ quintuplum; quinque igitur ipsa ex ΚΑ tribus ipsis ex ΖΒ æqualia sunt. Sed tria ipsa ex ΖΒ majora sunt sex ipsis ex ΝΒ; et quinque igitur ipsa ex ΚΑ sex ipsis ex ΝΒ majora sunt; quare et unum ex ΚΑ uno ex ΝΒ majus est; major igitur ΚΑ ipsâ ΝΒ. Æqualis autem ΚΑ ipsi ΑΜ; major igitur ΚΑ ipsâ ΝΒ; multo major igitur est ΜΒ ipsâ ΒΝ. Quod oportebat ostendere.

A U T R E M E N T.

Car puisque ΑΔ est double de ΔΒ, la droite ΑΒ est triple de ΒΔ. Mais la droite ΑΒ est à ΒΔ comme le quarré de ΑΒ est au quarré de ΒΖ, parce que le triangle ΖΑΒ est équiangle avec le triangle ΖΔΒ (8.6); le quarré de ΑΒ est donc triple du quarré de ΒΖ. Mais on a démontré que le quarré de ΑΒ est quintuple du quarré de ΚΑ; cinq fois le quarré de ΚΑ est donc égal à trois fois le quarré de ΖΒ. Mais trois fois le quarré de ΖΒ est plus grand que six fois le quarré de ΝΒ; cinq fois le quarré de ΚΑ est donc plus grand que six fois le quarré de ΝΒ; une fois le quarré de ΚΑ est donc plus grand qu'une fois le quarré de ΝΒ; la droite ΚΑ est donc plus grande que ΝΒ. Mais ΚΑ est égal à ΑΜ; la droite ΚΑ est donc plus grande que ΝΒ; la droite ΜΒ est donc à plus forte raison plus grande que la droite ΒΝ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΛΗΜΜΑ.

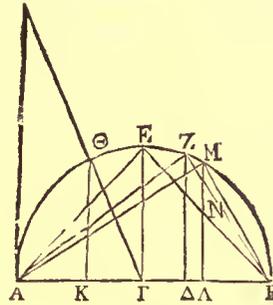
LEMMA.

Ότι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστι, δείξομεν οὕτως.

Tria vero ipsa ex ΖΒ majora esse quam sex ipsa ex ΒΝ, ita ostendemus.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΝ τῆς ΝΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΝ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΖΝ

Quoniam enim major est ΒΝ ipsά ΝΖ, ipsum igitur sub ΖΒ, ΒΝ majus est ipso sub ΒΖ, ΖΝ;



ΖΝ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΖΒ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶ τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΝ ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέ-

ipsum igitur sub ΒΖ, ΒΝ cum ipso sub ΒΖ, ΖΝ majus est quam duplum ipsius sub ΒΖ, ΖΝ. Sed ipsum quidem sub ΖΒ, ΒΝ cum ipso sub ΒΖ, ΖΝ ipsum ex ΖΒ est; ipsum autem sub ΒΖ, ΖΝ æquale ipsi ex ΒΝ; extremά enim et mediά ra-

LEMME.

Nous démontrerons de la manière suivante que trois fois le carré de ΖΒ est plus grand que six fois le carré de ΒΝ.

Car puisque ΒΝ est plus grand que ΝΖ, le rectangle sous ΖΒ, ΒΝ est plus grand que le rectangle sous ΒΖ, ΖΝ; le rectangle sous ΒΖ, ΒΝ, conjointement avec le rectangle sous ΒΖ, ΖΝ, est donc plus grand que le double rectangle sous ΒΖ, ΖΝ. Mais le rectangle sous ΖΒ, ΒΝ, conjointement avec le rectangle sous ΒΖ, ΖΝ, est le carré de ΖΒ (2. 2), et le rectangle sous ΒΖ, ΖΝ est égal au carré de ΒΝ,

τριπται ἢ BZ κατὰ τὸ N, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ZB μείζον ἔστι διπλασίον τοῦ ἀπὸ τῆς BN². Ἐν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZB δύο τῶν ἀπὸ τῆς³ BN μείζον ἔστιν· ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς⁴ BN μείζονά ἐστιν. Ὅπει ἔδει δείξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Λέγω δὴ ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Υπὸ μὲν γὰρ δύο τριγῶνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλον δύο ἐπιπέδων, στερεὰ γωνία οὐ συσταθήσεται¹. Υπὸ δὲ τριῶν τριγῶνων ἢ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἢ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἕξ τριγῶνων ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, οὐσὶς γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγῶνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς, ἔσονται αἱ

tione secta est BZ in N; et ipsum sub extremis æquale est ipsi ex mediâ; ipsum igitur ex ZB majus est duplo ipsius ex BN; unum igitur ex ZB duobus ipsis ex BN majus est; quare et tria ipsa ex ZB quam sex ipsa ex BN majora sunt. Quod oportebat ostendere.

SCHOLIUM.

Dico et præter dictas quinque figuras non constitui aliam figuram contentam sub et æquilateralis et æquiangulis æqualibus inter se.

Etenim ex duobus quidem triangulis, et aliis duobus planis, solidus angulus non constituetur. Ex tribus vero triangulis angulus pyramidis, ex quatuor autem ipse octaedri, ex quinque autem ipse icosaedri; ex sex vero triangulis et æquilateralis et æquiangulis ad unum punctum constitutis non erit solidus angulus, existente enim angulo æquilateri trianguli duabus tertiis recti, erunt illi sex anguli quatuor

parce que la droite BZ est coupée en extrême et moyenne raison au point N, et que le rectangle sous les droites extrêmes est égal au carré de la droite moyenne (17. 6); le carré de ZB est donc plus grand que le double du carré de BN; une fois le carré de ZB est donc plus grand que deux fois le carré de BN; trois fois le carré de ZB est donc plus grand que six fois le carré de BN. Ce qu'il fallait démontrer.

SCHOLIE.

Je dis aussi qu'excepté les cinq figures dont nous venons de parler, on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles.

Car on ne peut pas construire un angle solide avec deux triangles, ni avec deux autres plans (déf. 11. 11). Mais avec trois triangles, on construit l'angle de la pyramide; avec quatre, l'angle de l'octaèdre, et avec cinq, l'angle de l'icosaèdre. Avec six triangles équilatéraux et équiangles, on ne peut pas construire un angle solide en un même point; car un des angles d'un triangle équilatéral étant égal

ἕξ τεσσάρων ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, ἅπαντα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλείονων ἢ³ ἕξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. Ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἢ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ἴσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. Ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλευρῶν καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἢ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, οὕσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλευροῦ γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἴσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐδὲ μὲν ὑπὸ πολυγώνων ἐτέρων σχημάτων περισχθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ αὐτὸ⁵ ἄτοπον· οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα⁶ στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλευρῶν καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. Ὅπερ ἴδει δείξαι.

rectis æquales, quod impossibile; omnis enim solidus angulus sub minoribus quam quatuor rectis continetur. Propter eadem utique neque ex pluribus quam sex angulis planis solidus angulus constituitur. Sub quadratis autem tribus cubi angulus continetur; sub quatuor vero impossibile; essent enim rursus quatuor recti. Sub autem pentagonis æquilateris et æquiangulis, sub tribus quidem angulus dodecaedri; sub quatuor vero impossibile, etenim cum sit angulus pentagoni æquilateri rectus et ejus quinta pars, erunt quatuor anguli quam quatuor recti majores, quod impossibile. Neque quidem sub polygonis aliis figuris constituetur solidus angulus, propter idem absurdum; non igitur præter dictas quinque figuras alia figura solida constituetur sub æquilateris et æquiangulis contenta. Quod oportebat ostendere.

aux deux tiers d'un angle droit, six de ces angles seront égaux à quatre droits, ce qui est impossible, à cause que tout angle solide est contenu sous des angles dont la somme est plus petite que quatre droits (21. 11). Par la même raison, un angle solide ne pourra être construit avec plus de six de ces angles plans. L'angle du cube est contenu sous trois quarrés; or un angle solide ne peut pas être contenu sous quatre quarrés, car il serait contenu sous quatre angles droits. Quant aux pentagones équilatéraux et équiangles, l'angle du dodécaèdre est compris par trois de ces pentagones, et un angle solide ne peut pas être compris par quatre; car un des angles d'un pentagone équilatéral étant égal aux six cinquièmes d'un angle droit, quatre de ces angles seraient plus grands que quatre droits, ce qui est impossible. On ne pourra donc construire un angle solide avec d'autres polygones, à cause de la même absurdité. On ne peut donc pas, outre les cinq figures dont nous venons de parler, construire une autre figure solide comprise par des figures équilatérales et équiangles. Ce qu'il fallait démontrer.

Λ Η Μ Μ Α .

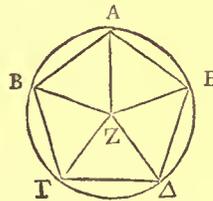
L E M M A .

Οτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τε¹ καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτον, οὕτως δεκτέον.

Ἐστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε² καὶ ἰσογωνίον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ³, καὶ ἐπέξέυχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ· δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, τοῦ⁴ πενταγώνου γωνίας. Καὶ ἐπεὶ αἱ

Et æquilateri autem et æquianguli pentagoni angulum reatum esse et quintum ita ostendendum est.

Sit enim pentagonum et æquilaterum et æquiangulum ΑΒΓΔΕ, et describatur circa ipsum circulus ΑΒΓΔΕ, et sumatur ipsius centrum Ζ, et jungantur ipsæ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ; bifariam igitur secant ipsos ad puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε pentagoni angulos. Et quoniam ipsi ad Ζ quin-



πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέσσαρσιν⁵ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ εἰσὶν ἴσαι· μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστὶ παρά πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτου⁶. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστὶ ὀρθῆς καὶ πέμπτου⁷. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

que anguli quatuor rectis æquales sunt, et sunt æquales; unus igitur ipsorum, ut ipse ΑΖΒ, unus reatus est præter quintam partem; reliqui igitur ΖΑΒ, ΑΒΖ unus sunt reatus et quinta pars. Æqualis autem ΖΑΒ ipsi ΖΒΓ; et totus igitur ΑΒΓ pentagoni angulus unus est reatus et quinta pars. Quod oportebat ostendere.

L E M M E .

On peut démontrer de la manière suivante qu'un angle d'un pentagone équilatéral et équiangle est égal aux six cinquièmes d'un angle droit.

Soit ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle; circoncrivons à ce polygone le cercle ΑΒΓΔΕ; prenons le centre Ζ de ce cercle, et joignons ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ; ces droites couperont en deux parties égales les angles en Α, Β, Γ, Δ, Ε (14. 4). Puisque les cinq angles en Ζ sont égaux à quatre droits, et qu'ils sont égaux, chacun de ces angles, comme ΑΖΒ, sera égal à un droit moins un cinquième; la somme des angles restants ΖΑΒ, ΑΒΖ est donc égale à un droit plus un cinquième (32. 1). Mais l'angle ΖΑΒ est égal à l'angle ΖΒΓ; l'angle entier ΑΒΓ du pentagone est donc égal à un droit plus un cinquième. Ce qu'il fallait démontrer.

E U C L I D I S

D A T A.

Ο Ρ Ο Ι.

α'. Δεδομένα τῶν μεγέθει λέγεται, χωρία τε, καὶ γραμμὰ, καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα περίσασθαι.

β'. Λόγος δεδóσθαι λέγεται, ᾧ δυνάμεθα τὸν αὐτὸν περίσασθαι.

γ'. Εὐθύγραμμα σχήματα τῶν εἰδῶν δεδóσθαι λέγεται, ὧν αἱ τε γωνίαι δεδομένοι εἰσὶ κατὰ μίαν, καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας¹ δεδομένοι.

δ'. Τῇ θέσει δεδóσθαι λέγονται², σημειῖά τε, καὶ γραμμὰ, καὶ γωνίαι, ἃ τὸν αὐτὸν αἰεὶ τόπον ἐπέχει³.

DEFINITIONES.

1. Data magnitudine dicuntur, et spatia, et lineæ, et anguli, quibus possumus æqualia invenire.

2. Ratio dari dicitur, cui possumus eandem invenire.

3. Rectilineæ figuræ species dari dicuntur, quarum et anguli dati sunt ad unum, et rationes laterum inter se datae.

4. Positione dari dicuntur, et puncta, et lineæ, et anguli, quæ eundem semper situm obtinent.

LES DONNÉES D'EUCLIDE.

1. Des espaces, des lignes, et des angles, auxquels nous pouvons trouver des grandeurs égales, sont dits donnés de grandeur.

2. Une raison est dite donnée, quand nous pouvons lui en trouver une qui soit la même.

3. Des figures rectilignes, dont chacun des angles est donné, et dont les raisons de leurs côtés entre eux sont données, sont dites données d'espace.

4. Des points, des lignes, et des angles qui conservent toujours la même situation, sont dits donnés de position.

ε. Κύκλος τῷ μεγέθει δεδόσθαι λέγεται, οὗ δέδοται ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει.

ς. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει κύκλος δεδόσθαι λέγεται, οὗ δέδοται τὸ μὲν κέντρον τῇ θέσει, ἢ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει.

ζ. Τμήματα κύκλων⁵ τῷ μεγέθει δεδόσθαι λέγεται, ἐν οἷς αἱ τε⁶ γωνίαι δεδομέναί εἰσι καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῷ μεγέθει.

η. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει τμήματα δεδόσθαι λέγεται, ἐν οἷς αἱ τε γωνίαι δεδομέναί εἰσι τῷ μεγέθει, καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

θ. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μείζον ἐστίν, ὅταν, ἀφαιρεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

ι. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, ἑλαττόν ἐστιν, ὅταν, προστεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ ὅλον τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

ια. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μείζον ἐστίν

5. Circulus magnitudinē dari dicitur, cujus datur ea quæ ex centro magnitudinē.

6. Positione autem et magnitudinē circulus dari dicitur, cujus datur centrum quidem positionis, ea vero ex centro magnitudinē.

7. Segmenta circulorum magnitudinē dari dicuntur, in quibus et anguli dati sunt, et bases segmentorum magnitudinē.

8. Positionis autem et magnitudinē segmenta dari dicuntur, in quibus et anguli dati sunt magnitudinē, et bases segmentorum positionis et magnitudinē.

9. Magnitudo quam magnitudo, datā, major est, quando, ablatā datā, reliqua eidem qualis est.

10. Magnitudo quam magnitudo, datā, minor est, quando, adjunctā datā, tota eidem æqualis est.

11. Magnitudo magnitudinē, datā, major

5. Un cercle, dont le rayon est donné de grandeur, est dit donné de grandeur.

6. Un cercle, dont le centre est donné de position, et le rayon de grandeur, est dit donné de position, et de grandeur.

7. Des segments de cercles sont dits donnés de grandeur, quand les angles qu'ils comprennent, et les bases de ces segments sont donnés de grandeur.

8. Des segments sont dits donnés de position et de grandeur, quand les angles qu'ils comprennent sont donnés de grandeur, et que les bases des segments sont données de position, et de grandeur.

9. Une grandeur est plus grande qu'une autre grandeur, d'une grandeur donnée, quand la grandeur donnée étant retranchée de la plus grande, le reste est égal à la plus petite.

10. Une grandeur est plus petite qu'une autre grandeur d'une grandeur donnée, quand la grandeur donnée étant ajoutée à la plus petite, la somme est égale à la plus grande.

11. Une grandeur est plus grande à l'égard d'une autre, d'une donnée, qu'en

ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν, ἀφαιρεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

16'. Μέγεθος μεγίθους, διθέντι, ἔλασσόν ἐστίν ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν, προστεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ ὅλον πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

17'. Κατηγμένη ἴστιν, ἢ ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει εὐθεΐαν ἀγομένη εὐθεΐα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

18'. Ἀνηγμένη ἴστιν, ἢ ἀπὸ δεδομένου σημείου πρὸς θέσει εὐθεΐα⁸ ἀγομένη εὐθεΐα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

19'. Παρὰ θέσει ἴστιν, ἢ διὰ δεδομένου σημείου δεδομένη⁹ θέσει εὐθεΐα παράλληλος ἀγομένη.

est quam in ratione, quando, oblatâ datâ, reliqua ad eandem rationem habet datam.

12. Magnitudo magnitudine, datâ, minor est quam in ratione, quando, adjunctâ datâ, tota ad eandem rationem habet datam.

15. Deducta recta est, quæ a dato puncto ad rectam positione ducitur in dato angulo.

14. Educta recta est, quæ a dato puncto in rectam positione ducitur in dato angulo.

15. Contra positione recta est, quæ per datum punctum datæ positione rectæ parallela ducitur.

raison, quand la grandeur donnée étant retranchée, le reste a avec l'autre une raison donnée.

12. Une grandeur est plus petite à l'égard d'une autre, d'une donnée, qu'en raison, quand la grandeur donnée étant ajoutée, leur somme a avec l'autre une raison donnée.

13. Une droite est dite abaissée, lorsqu'elle est menée, dans un angle donné, d'un point donné à une droite donnée de position.

14. Une droite est dite élevée, lorsqu'elle est menée, dans un angle donné, d'un point donné dans une droite donnée de position.

15. Une droite est dite de juxta-position, lorsqu'elle est menée par un point donné parallèlement à une droite donnée de position.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

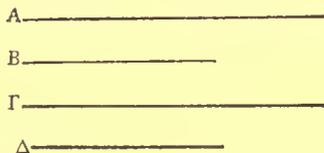
PROPOSITIO I.

Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ὁ λόγος ὁ πρὸς ἄλληλα δέδοται.

Ἐστω δεδομένα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς.

Datarum magnitudinum ratio inter se datur.

Sint datæ magnitudines Α, Β; dico ipsius Α ad Β rationem esse datam.



Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστὶν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πεπερίσθω, καὶ ἔστω τὸ Γ. Πάλιν ἐπεὶ δεδομένον ἐστὶ τὸ Β, δυνατόν ἐστὶν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πεπερίσθω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ, τὸ δὲ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ· ἐναλλάξ ἄρα² ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ. Τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς· ο αὐτὸς γὰρ αὐτῷ πεπόρισθαι ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι³.

Quoniam enim data est Α, possibile est illi æqualem invenire. Inveniatur, et sit Γ. Rursum, quoniam data est Β, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit Δ. Quoniam igitur æqualis est quidem Α ipsi Γ, Β vero ipsi Δ; est igitur ut Α ad Γ ita Β ad Δ; permutando igitur ut Α ad Β ita Γ ad Δ. Ipsius igitur Α ad Β ratio est data; eadem enim eidem inventa est, ea ipsius Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION I.

La raison qu'ont entre elles des grandeurs données, est donnée.

Que les grandeurs Α, Β soient données; je dis que la raison de Α à Β est donnée.

Car puisque Α est donné, il est possible de lui trouver une grandeur égale (déf. 1); qu'elle soit trouvée, et que ce soit γ. De plus, puisque Β est donné, il est possible de lui trouver une grandeur égale; qu'elle soit trouvée, et que ce soit Δ. Puisque Α est égal à γ, et que Β est égal à Δ, la grandeur Α sera à γ comme Β est à Δ; et, par permutation, Α sera à Β comme γ est à Δ (16. 5). La raison de Α à Β est donc donnée (déf. 2); car on lui en a trouvé une qui est la même, savoir, la raison de γ à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

PROPOSITIO II.

Εάν δεδομένον μέγεθος πρὸς ἄλλό τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον, δίδεται κακείνῳ τῷ μεγέθει.

Si data magnitudo ad aliam quamdam magnitudinem rationem habeat datam, datur et illa magnitudine.

Δεδομένον γὰρ μέγεθος τὸ Α πρὸς ἄλλό τι μέγεθος τὸ Β λόγον ἔχεται δεδομένον· λέγω ὅτι δίδεται τὸ Β τῷ μεγέθει.

Data enim magnitudo Α ad aliam quamdam magnitudinem Β rationem habeat datam; dico dari ipsam Β magnitudine.



Ἐπεὶ γὰρ δίδεται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον περιέσθαι. Πεπερίσθω, καὶ ἔστω τὸ² Γ. Καὶ ἐπεὶ δίδεται ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ τὴν ἴσον³ περιέσθαι. Πεπερίσθω, καὶ ἔστω ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ λόγος. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Ἰσὸν δὲ τὸ Α τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Β τῷ Δ· δίδεται ἄρα τὸ Β μέγεθος, ἴσον γὰρ αὐτῷ περιέσθαι τὸ Δ.

Quoniam enim data est Α, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit Γ. Et quoniam data est ipsius Α ad Β ratio, ita enim supponitur, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit ipsius Γ ad Δ ratio. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ; permutando igitur est ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Æqualis autem Α ipsi Γ; æqualis igitur et Β ipsi Δ; data igitur est Β magnitudo, æqualis enim ipsi inventa est ipsa Δ.

PROPOSITION II.

Si une grandeur donnée a une raison donnée avec une autre grandeur, celle-ci est donnée de grandeur.

Que la grandeur donnée Α ait une raison donnée avec une autre grandeur Β; je dis que Β est donné de grandeur.

Car puisque Α est donné, il est possible de lui trouver une grandeur égale (déf. 1); qu'elle soit trouvée, et que ce soit Γ. Et puisque la raison de Α à Β est donnée, par supposition, il est possible de lui trouver une raison qui soit la même. Qu'elle soit trouvée, et que ce soit la raison de Γ à Δ. Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, par permutation, Α sera à Γ comme Β est à Δ. Mais Α est égal à Γ; donc Β est égal à Δ; la grandeur Β est donc donnée, puisqu'on a trouvé son égale Δ (déf. 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

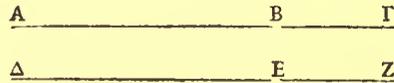
PROPOSITIO III.

Εάν δεδομένα μεγέθη ἴποσαῶν συντεθῆ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον δεδομένον ἔσται.

Συγκείσθω γάρ ἴποσαῶν δεδομένα μεγέθη, τὰ AB , $BΓ$; λέγω ὅτι καὶ τὸ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ συγκείμενον τὸ $ΑΓ$ δεδομένον ἔστί.

Si datæ magnitudines quotlibet componantur, et ex ipsis composita magnitudo data erit.

Componantur enim quotlibet datæ magnitudines AB , $BΓ$; dico et ipsam $ΑΓ$ ex ipsis AB , $BΓ$ compositam datam esse.



Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ AB , δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον περιίσασθαι. Πεπερίσθω, καὶ ἔστω τὸ $ΔE$. Πάλιν ἐπεὶ δέδοται τὸ $BΓ$, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον περιίσασθαι. Πεπερίσθω, καὶ ἔστω τὸ EZ . Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AB τῷ $ΔE$, τὸ δὲ $BΓ$ τῷ EZ ; ὅλον ἄρα τὸ $ΑΓ$ ὅλον τῷ $ΔZ$ ἐστὶν ἴσον· δέδοται ἄρα τὸ $ΑΓ$, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπερίσται τὸ $ΔZ$.

Quoniam enim data est AB , possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit $ΔE$. Rursus quoniam datur $BΓ$, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit EZ . Quoniam igitur AB æqualis est ipsi $ΔE$, $BΓ$ vero ipsi EZ ; tota igitur $ΑΓ$ toti $ΔZ$ est æqualis; datur igitur $ΑΓ$, æqualis enim ipsi inventa est $ΔZ$.

PROPOSITION III.

Si tant de grandeurs données qu'on voudra sont réunies, la grandeur composée de ces grandeurs sera donnée.

Que tant de grandeurs données qu'on voudra, AB , $BΓ$ soient réunies; je dis que la grandeur $ΑΓ$, composée des grandeurs AB , $BΓ$ est donnée.

Car puisque la grandeur AB est donnée, il est possible de trouver son égale (déf. 1); qu'elle soit trouvée, et que ce soit $ΔE$. De plus, puisque la grandeur $BΓ$ est donnée, il est possible de trouver son égale; qu'elle soit trouvée, et que ce soit EZ . Puisque AB est égal à $ΔE$, et $BΓ$ égal à EZ , la grandeur entière $ΑΓ$ sera égale à la grandeur entière $ΔZ$. Donc $ΑΓ$ est donné, puisqu'on a trouvé son égale $ΔZ$ (déf. 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

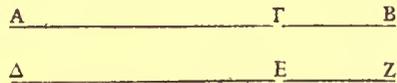
PROPOSITIO IV.

Εὰν ἀπὸ δεδομένου μεγέθους δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῆ, τὸ λοιπὸν δεδομένον ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου μεγέθους τοῦ ΑΒ δεδομένον μέγεθος ἀφηρήσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ ΓΒ δεδομένον ἔστί.

Si a datâ magitudine data magnitudo auferatur, reliqua data erit.

Etenim a datâ magnitudine ΑΒ data magnitudo auferatur ΑΓ; dico et reliquam ΓΒ datam esse.



Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒ, δυνατόν ἐστίν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πέπορισθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΖ. Πάλιν, ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΓ, δυνατόν ἐστίν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΔΖ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΔΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΒ λοιπῷ τῷ ΕΖ ἔστιν ἴσον· δέδοται ἄρα τὸ ΓΒ, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπόρισται τὸ ΕΖ.

Quoniam enim data est ΑΒ, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit ΔΖ. Rursus, quoniam data est ΑΓ, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit ΔΕ. Quoniam igitur æqualis est ΑΒ quidem ipsi ΔΖ, ΑΓ vero ipsi ΔΕ; reliqua igitur ΓΒ reliquæ ΕΖ est æqualis; data est igitur ΓΒ, æqualis enim ipsi inventa est ΕΖ.

PROPOSITION IV.

Si d'une grandeur donnée, on retranche une grandeur donnée, la grandeur restante sera donnée.

De la grandeur donnée ΑΒ, soit retranchée la grandeur donnée ΑΓ; je dis que la grandeur restante ΓΒ est aussi donnée.

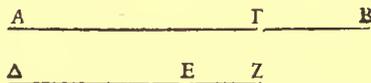
Car puisque la grandeur ΑΒ est donnée, il est possible de trouver son égale (déf. 1); qu'elle soit trouvée, et que ce soit ΔΖ. De plus, puisque la grandeur ΑΓ est donnée, il est possible de trouver son égale; qu'elle soit trouvée, et que ce soit ΔΕ. Puisque ΑΒ est égal à ΔΖ, et ΑΓ égal à ΔΕ, le reste ΓΒ sera égal au reste ΕΖ. Donc ΓΒ est donné (déf. 1), puisqu'on a trouvé son égal ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Εάν μέγεθος πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος λόγον ἔχη δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον¹ ἔξει δεδομένον.

Μέγεθος γὰρ τὸ AB πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος τὸ AG λόγον ἔχεται δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ BG λόγον ἔχει δεδομένοι.



Κείσθω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔZ. Καὶ ἐπει λόγος ἐστὶ δοθείς ὁ τοῦ BA πρὸς τὸ AG, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω² ὁ τοῦ ZΔ πρὸς ΔE· λόγος ἄρα ἔστιν ὁ τοῦ ZΔ πρὸς ΔE δοθείς. Δοθὲν δὲ τὸ ZΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔE· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EZ δοθὲν ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΔZ δοθὲν· λόγος ἄρα τοῦ ΔZ πρὸς τὸ ZE δοθείς ἐστίν³. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΔZ πρὸς ΔE οὕτως καὶ τὸ BA πρὸς AG· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΔZ πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ BG. Λόγος δὲ τοῦ ΔZ πρὸς ZE δοθείς ἐστίν⁴, ὡς δέδεικται· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AB πρὸς τὸ BG δοθείς ἐστίν⁵.

Si magnitudo ad sui ipsius aliquam partem rationem habeat datam, et ad reliquam rationem habebit datam.

Magnitudo enim AB ad sui ipsius partem AG rationem habeat datam; dico et illam ad reliquam BG rationem habere datam.

Exponatur enim data magnitudo ΔZ. Et quoniam ratio est data ipsius BA ad AG, eadem huic inveniatur ratio ipsius ZΔ ad ΔE; ratio igitur est ipsius ZΔ ad ΔE data. Data autem ZΔ. Data igitur et ΔE; et reliqua igitur EZ data est. Est autem et ΔZ data; ratio igitur ipsius ΔZ ad ZE data est. Et quoniam est ut ΔZ ad ΔE ita et BA ad AG; convertendo igitur est ut ΔZ ad ZE ita AB ad BG. Ratio autem ipsius ΔZ ad ZE data est, ut ostensum est; ratio igitur et ipsius AB ad BG data est.

PROPOSITION V.

Si une grandeur a une raison donnée avec une de ses parties, elle aura aussi une raison donnée avec l'autre partie.

Que la grandeur AB ait une raison donnée avec sa partie AG; je dis qu'elle a aussi une raison donnée avec l'autre partie BG.

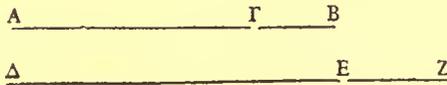
Car soit ΔZ une grandeur donnée. Puisque la raison de BA à AG est donnée, faisons en sorte que la raison de ZΔ à ΔE soit la même que celle-ci; la raison de ZΔ à ΔE sera donnée (déf. 2). Mais ΔZ est donné; donc ΔE est aussi donné (2). Le reste EZ est donc donné (4). Mais ZΔ est donné; la raison de ΔZ à ZE est donc donnée (1). Mais ΔZ est à ΔE comme BA est à AG; donc, par conversion, ΔZ est à ZE comme AB est à BG (19. 5). Mais la raison de ΔZ à ZE est donnée, ainsi qu'on l'a démontré; la raison de AB à BG est donc donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ϛ΄.

PROPOSITIO VI.

Εὰν δύο μεγέθη συντεθῆ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ τὸ ὅλον πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον ἔξει δεδομένον.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη τὰ² ΑΓ, ΓΒ, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον. Λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ λόγον ἔχει δεδομένον.



Εκκείσθω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔΕ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ³ ΓΒ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῶ πεποιήσθω ὁ τοῦ ΔΕ πρὸς ΕΖ. Ὁ ἄρα τοῦ ΔΕ πρὸς ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· δοθὲν δὲ τὸ ΔΕ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΕΖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ δοθὲν ἐστίν· ἐστὶν οὖν ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ δοθείς. Καὶ ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ⁵· συνθέντι ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ⁶· καὶ ἀστροφάντι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΕ⁷. Καὶ

Si duæ magnitudines componantur inter se rationem habentes datam, et tota ad utramque earum rationem habebit datam.

Componantur enim duæ magnitudines ΑΓ, ΓΒ, inter se rationem habentes datam; dico et totam ΑΒ ad utramque ipsarum ΑΓ, ΓΒ rationem habere datam.

Exponatur enim data magnitudo ΔΕ. Et quoniam ratio est ipsius ΑΓ ad ΓΒ data, eadem huic fiat ratio ipsius ΔΕ ad ΕΖ. Ergo ipsius ΔΕ ad ΕΖ ratio est data. Data autem ΔΕ; data igitur et ΕΖ; et tota igitur ΔΖ data est; est autem utraque ipsarum ΔΕ, ΕΖ data; ratio igitur ipsius ΔΖ ad utramque ipsarum ΔΕ, ΕΖ data. Et quoniam est ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΔΕ ad ΕΖ; componendo igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΖ ad ΖΕ; et convertendo ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΔΖ ad ΔΕ. Et

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs qui ont entre elles une raison donnée sont réunies, la grandeur entière aura une raison donnée avec chacune d'elles.

Ajoutous les deux grandeurs ΑΓ, ΓΒ qui ont entre elles une raison donnée; je dis que la grandeur entière ΑΒ a une raison donnée avec chacune des grandeurs ΑΓ, ΓΒ.

Car soit ΔΕ une grandeur donnée. Puisque la raison de ΑΓ à ΓΒ est donnée, faisons en sorte que la raison de ΔΕ à ΕΖ soit la même que celle-ci. La raison de ΔΕ à ΕΖ sera donnée (déf. 1). Mais ΔΕ est donné; donc ΕΖ est donné (2). La droite entière ΔΖ est donc donnée (1 et 3). Mais chacune des grandeurs ΔΕ, ΕΖ est donnée; la raison de ΔΖ avec chacune des grandeurs ΔΕ, ΕΖ est donc donnée (1 et 3). Mais ΑΓ est à ΓΒ comme ΔΕ est à ΕΖ; donc, par addition, ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΖ est à ΖΕ (18. 5) donc, par conversion, ΑΒ sera à ΑΓ comme ΔΖ est à ΔΕ (cor.

ἐπεὶ ὡς τὸ ΔΖ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ οὕτως
τὸ ΑΒ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΒ· λόγος ἄρα καὶ
τοῦ ΑΒ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΒ δοθείς.

quoniam ut ΔΖ ad utramque ipsarum ΔΕ, ΕΖ
ita ΑΒ ad utramque ipsarum ΑΓ, ΒΒ; ratio
igitur et ipsius ΑΒ ad utramque ipsarum ΑΓ,
ΒΒ data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον
διαιρεθῆ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων δεδομένον
ἔστί.

Δεδομένον γὰρ μέγεθος τὸ ΑΒ εἰς δεδομένον
λόγον διηρήσθω τὴν τοῦ ΑΓ πρὸς ΒΒ· λέγω ὅτι
ἐκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΒ δοθὲν ἔστι.

PROPOSITIO VII.

Si data magnitudo in datâ ratione secetur,
utrumque segmentorum datum est.

Data enim magnitudo ΑΒ in datâ ratione
secetur, in ratione ipsius ΑΓ ad ΒΒ; dico utram-
que ipsarum ΑΓ, ΒΒ datam esse.

A ————— Γ ————— B

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἔστι τοῦ ΑΓ πρὸς ΒΒ δοθείς·
λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΒ
δοθείς. Δοθὲν δὲ τὸ ΑΒ· δοθὲν ἄρα καὶ ἐκάτερον
τῶν ΑΓ, ΒΒ.

Quoniam enim ratio est ipsus ΑΓ ad ΒΒ data;
ratio igitur et ipsius ΑΒ ad utramque ipsarum
ΑΓ, ΒΒ data. Data autem ΑΒ; data igitur
et utraque ipsarum ΑΓ, ΒΒ.

19. 5); et puisque ΔΖ est à chacune des grandeurs ΔΕ, ΕΖ comme ΑΒ est à chacune des grandeurs ΑΓ, ΒΒ; la raison de ΑΒ à chacune des grandeurs ΑΓ, ΒΒ est donc donnée.

PROPOSITION VII.

Si une grandeur donnée est partagée en une raison donnée, chacun des segments est donné.

Que la grandeur donnée ΑΒ soit partagée en une raison donnée qui soit celle de ΑΓ à ΒΒ; je dis que chacun des segments ΑΓ, ΒΒ est donné.

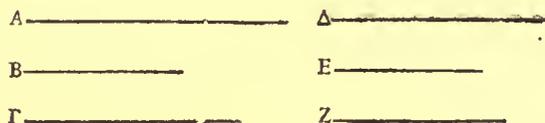
Car puisque la raison de ΑΓ à ΒΒ est donnée, la raison de ΑΒ à chacun des segments ΑΓ, ΒΒ est donnée (6). Mais ΑΒ est donné; chacun des segments ΑΓ, ΒΒ est donc donné (2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

PROPOSITIO VIII.

Τὰ πρὸς τὸ¹ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἐχέτω γὰρ ἐκάτερον τῶν Α, Γ πρὸς τὸ Β λόγον δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Γ λόγον ἔξει δεδομένον.



Ἐστω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ Δ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς τὸ² Ε. Δοθέν δὲ τὸ Δ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ε. Πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ δοθείς³. Δοθέν δὲ τὸ Ε· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ζ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ·

Quæ ad idem rationem habent datam, et inter se rationem habebunt datam.

Habeat enim utraque ipsarum Α, Γ ad Β rationem datam; dico et Α ad Γ rationem habituram esse datam.

Sit enim data magnitudo Δ. Et quoniam ratio est ipsius Α ad Β data, eadem huic fiat ratio ipsius Δ ad Ε. Data autem Δ; data igitur et Ε. Rursus, quoniam ratio est ipsius Β ad Γ data, eadem huic fiat ratio ipsius Ε ad Ζ data. Data autem Ε; data igitur et Ζ. Est autem et Δ data; ratio igitur ipsius Δ ad Ζ est data. Et quoniam est ut quidem Α ad Β ita Δ ad Ε; ut autem Β ad Γ ita Ε ad Ζ; ex æquo

PROPOSITION VIII.

Les grandeurs qui ont une raison donnée avec une même grandeur, auront entr'elles une raison donnée.

Que les grandeurs Α, Γ aient avec Β une raison donnée; je dis que Α aura avec Γ une raison donnée.

Car soit Δ une grandeur donnée. Puisque la raison de Α à Β est donnée, faisons en sorte que la raison de Δ à Ε soit la même que celle-ci. Mais Δ est donné; donc Ε est donné aussi (2). De plus, puisque la raison de Β à Γ est donnée, faisons en sorte que la raison de Ε à Ζ soit la même que celle-ci. Mais Ε est donné; donc Ζ l'est aussi. Mais Δ est donné; la raison de Δ à Ζ est donc donnée (1). Mais Α est à Β comme Δ est à Ε, et Β est à Γ comme Ε est à Ζ; donc, par éga-

διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Λόγος δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Γ δοθείς.

igitur est ut A ad Γ ita Δ ad Ζ. Ratio autem ipsius Δ ad Ζ data ; ratio igitur et ipsius A ad Γ data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐάν δύο ἢ πλείονα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχη δεδομένον, ἔχη δὲ τὰ αὐτὰ μεγέθη πρὸς ἄλλὰ τινα μεγέθη λόγους δεδομένους, εἰ καὶ μὴ τοὺς αὐτοῦς· κακεῖνα τὰ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγους ἔξει δεδομένους.

Δύο γάρ ἢ πλείονα μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχέτω δεδομένον, ἔχέτω δὲ τὰ αὐτὰ μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλλὰ τινα μεγέθη τὰ Δ, Ε, Ζ λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοῦς δέ· λέγω ὅτι καὶ τὰ Δ, Ε, Ζ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, τοῦ δὲ Α πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τοῦ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς

PROPOSITIO IX.

Si duæ vel plures magnitudines inter se rationem habeant datam, habeant autem eadem magnitudines ad alias quasdam magnitudines rationes datas, et si non easdem, et illæ magnitudines inter se rationes habebunt datas.

Duæ enim vel plures magnitudines Α, Β, Γ inter se rationem habeant datam, habeant autem eadem magnitudines Α, Β, Γ ad alias quasdam magnitudines Δ, Ε, Ζ rationes datas, non autem easdem ; dico et Δ, Ε, Ζ magnitudines inter se rationem habituras esse datam.

Quoniam enim ratio est ipsius Α ad Β data, ipsius autem Α ad Δ ratio est data ; et ipsius Δ igitur ad Β ratio est data. Sed ipsius Β ad Ε ratio est data ; et ipsius Δ igitur ad Ε ratio est data.

lité, A est à Γ comme Δ est à Ζ (22. 5). Mais la raison de Δ à Ζ est donnée ; donc la raison de Α à Γ est donnée.

PROPOSITION IX.

Si deux ou un plus grand nombre de grandeurs ont entr'elles une raison donnée, et si elles ont avec certaines autres grandeurs des raisons données, quoique non les mêmes, ces dernières grandeurs auront entre elles des raisons données.

Que deux ou un plus grand nombre de grandeurs Α, Β, Γ ayent entre elles une raison donnée, et que ces mêmes grandeurs Α, Β, Γ ayent avec certaines autres grandeurs Δ, Ε, Ζ des raisons données, mais non les mêmes ; je dis que les grandeurs Δ, Ε, Ζ auront entr'elles une raison donnée.

Car puisque la raison de Α à Β est donnée, et que la raison de Α à Δ est aussi donnée, la raison de Δ à Β sera donnée (8). Mais la raison de Β à Ε est donnée ; la raison

τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. Πάλιν, ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγος

Rursus, quoniam ratio est ipsius Β ad Γ data, ipsius autem Β ad Ε ratio est data; et ipsius Ε igitur ad Γ ratio est data. Ipsius autem



ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· τὰ Δ, Ε, Ζ ἄρα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον.

Γ ad Ζ ratio est data; et ipsius Ε igitur ad Ζ ratio est data; ipsæ Δ, Ε, Ζ igitur inter se rationem habent datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Εάν μέγεθος μεζέτους, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, καὶ τὸ συαμφότερον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἐάν τὸ συαμφότερον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ αὐτοῦ, ἢτοι δοθέντι, μεῖζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἢ τὸ λοιπὸν μετὰ τοῦ ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ ἕτερον λόγον ἔχει δεδομένον, δοθέν ἔστι.

Si magnitudo magnitudine, datâ, major sit quam in ratione, et utraque simul eâdem, datâ, major erit quam in ratione; et si utraque simul eâdem, datâ, major sit quam in ratione, et reliqua eâdem, vel datâ, major est quam in ratione, vel reliqua cum consequente, ad quem altera rationem habet datam, data est.

raison de Δ à Ε est donc donnée (8). De plus, puisque la raison de Β à Γ est donnée, et que la raison de Β à Ε est aussi donnée, la raison de Ε à Γ sera donnée (8). Mais la raison de Γ à Ζ est donnée, la raison de Ε à Ζ est donc donnée. Les grandeurs Δ, Ε, Ζ, ont donc entre elles une raison donnée.

PROPOSITION X.

Si une grandeur est plus grande à l'égard d'une autre grandeur, d'une donnée, qu'en raison, leur somme sera plus grande à l'égard de la dernière, d'une donnée, qu'en raison; et si leur somme est plus grande à l'égard de la dernière, d'une donnée, qu'en raison, le reste sera plus grand à l'égard de la dernière d'une donnée qu'en raison, ou bien la somme du reste et de la grandeur suivante, avec laquelle la seconde grandeur a une raison donnée, est donnée.

Μεγέθος γὰρ τὸ AB μεγέθους τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφοτέρον τὸ ΑΓ τοῦ αὐτοῦ τοῦ ΓΒ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Magnitudo enim AB magnitudine ΒΓ, datâ, major sit quam in ratione; dico et utramque simul ΑΓ eâdem ΓΒ, datâ, majorem esse quam in ratione.

A Δ B Γ

Ἐπεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθέν μέγεθος τὸ ΑΔ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ δοθέν τὸ ΑΔ· τὸ ΑΓ ἄρα τοῦ ΓΒ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Quoniam enim AB ipsâ ΒΓ, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΑΔ; reliquæ igitur ΔΒ ad ΒΓ ratio est data; et componendo ipsius ΔΓ ad ΓΒ ratio est data. Et est data ΑΔ; ipsa ΑΓ igitur ipsâ ΓΒ, datâ, major est quam in ratione.

Πάλιν δὴ τὸ ΑΓ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ λοιπὸν τὸ AB τοῦ αὐτοῦ τοῦ ΒΓ, ἥτοι δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ, ἢ τὸ AB μετὰ τοῦ ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ ΒΓ λόγον ἔχει δοθέντα, δοθέν ἔστιν.

Rursus autem ΑΓ ipsâ ΒΓ, datâ, major sit quam in ratione; dico reliquam AB eâdem ΒΓ, vel datâ, majorem fore quam in ratione, vel ipsam AB eum consequente, ad quam ipsa ΒΓ rationem habet datam, datam esse.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθέν μέγεθος. Τὸ δὴ

Quoniam enim ΑΓ ipsâ ΓΒ, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo.

A Δ B Γ

δοθέν ἥτοι ἔλασσόν ἐστι τοῦ AB, ἢ μείζον. Ἐστω Ipsa utique data vel minor est ipsâ AB, vel

Que la grandeur AB soit plus grande à l'égard de la grandeur ΒΓ, d'une donnée, qu'en raison; je dis que leur somme ΑΓ est plus grande à l'égard de ΓΒ d'une donnée qu'en raison.

Car puisque AB est plus grand à l'égard de ΒΓ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΑΔ; la raison du reste ΔΒ à ΒΓ sera donnée (déf. 11); donc, par addition, la raison de ΔΓ à ΓΒ est donnée (6). Mais ΑΔ est donné; la grandeur ΑΓ est donc plus grande à l'égard de ΓΒ, d'une donnée, qu'en raison.

Mais de plus que ΑΓ soit plus grand à l'égard de ΒΓ, d'une donnée, qu'en raison; je dis que le reste AB sera plus grand à l'égard de ΒΓ, d'une donnée, qu'en raison, ou bien que la somme de AB et du conséquent, avec lequel ΒΓ a une raison donnée, est donnée.

Car puisque ΑΓ est plus grand à l'égard de ΓΒ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée. La grandeur donnée sera ou plus petite ou plus

πρότερον ἔλασσον, καὶ ἔστω τὸ $\Lambda\Delta$ λοιποῦ ἄρα τοῦ $\Delta\Gamma$ πρὸς ΓB λόγος ἐστὶ δοθείς· διελόντι ἄρα τοῦ ΔB πρὸς $\text{B}\Gamma$ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι δοθὲν τὸ $\Lambda\Delta$ · τὸ AB ἄρα τοῦ $\text{B}\Gamma$, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ. Ἀλλὰ δὴ τὸ δοθὲν μείζον

major. Sit primum minor, et sit $\Lambda\Delta$; reliquæ igitur $\Delta\Gamma$ ad ΓB ratio est data; dividendo igitur ipsius ΔB ad $\text{B}\Gamma$ ratio est data. Et est data $\Lambda\Delta$; ipsa AB igitur ipsâ $\text{B}\Gamma$, datâ, major est quam in ratione. At vero

A _____ B _____ E _____ Γ

ἔστω τοῦ AB , καὶ κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ AE · λόγος ἄρα τοῦ³ λοιποῦ τοῦ $\text{E}\Gamma$ πρὸς τὸ ΓB ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ ἀνάπαλιν τοῦ $\text{B}\Gamma$ πρὸς τὸ $\text{E}\Gamma$ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι ὁ τοῦ ΓB πρὸς BE λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ EB μετὰ τοῦ BA δοθὲν, ὅλον γὰρ τὸ AE δοθὲν ἐστὶ· τὸ AB ἄρα μετὰ τοῦ ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ $\text{B}\Gamma$ λόγον ἔχει δοθέντα, δοθὲν ἐστὶ·

data major sit ipsâ AB , et ponatur ipsi æqualis ipsa AE ; ratio igitur reliquæ $\text{E}\Gamma$ ad ΓB est data; quare et permutando ipsius $\text{B}\Gamma$ ad $\text{E}\Gamma$ ratio est data; et convertendo ipsius ΓB ad BE ratio est data. Et est EB cum BA data, tota enim AE data est; ipsa AB igitur cum consequente, ad quam ipsa $\text{B}\Gamma$ rationem habet datam, data est.

grande que AB . Qu'elle soit d'abord plus petite, et que ce soit $\Lambda\Delta$; la raison du reste $\Delta\Gamma$ à ΓB sera donnée; donc, par soustraction, la raison de ΔB à $\text{B}\Gamma$ est donnée. Mais $\Lambda\Delta$ est donné; donc AB est plus grand à l'égard de $\text{B}\Gamma$, d'une donnée, qu'en raison. Enfin que la grandeur donnée soit plus grande que AB , et supposons que AE lui est égal; la raison du reste $\text{E}\Gamma$ à ΓB sera donnée; donc, par permutation, la raison de $\text{B}\Gamma$ à $\text{E}\Gamma$ est donnée; donc, par conversion, la raison de ΓB à BE est donnée (5). Mais la somme de EB et de BA est donnée, puisque la grandeur entière AE est donnée; la somme de AB et du conséquent, avec lequel $\text{B}\Gamma$ a une raison donnée, est donc donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Εάν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ συναμφοτέρου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ. Καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ συναμφοτέρου, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ τοῦ λοιποῦ, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Μέγεθος γὰρ τὸ AB τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΓ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΔ¹· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀνάπαλιν² καὶ συνθέντι λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΒ δοθείς. Ὁ αὐτός αὐτῶν γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ· λόγος ἄρα καὶ³ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ δοθείς. Δοθὲν δὲ τὸ ΑΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔΕ· ὥστε καὶ λοιπὸν τὸ ΑΕ δοθὲν ἔστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὅλου τοῦ ΑΓ πρὸς ὅλον τὸ ΕΒ

PROPOSITIO XI.

Si magnitudo magnitudine, datâ, major sit quam in ratione, eadem et utrâque simul, datâ, major erit quam in ratione. Et si eadem utrâque simul, datâ, major sit quam in ratione, eadem et reliquâ, datâ, major erit quam in ratione.

Magnitudo enim AB ipsâ ΒΓ, datâ, major sit quam in ratione; dico et eam ipsâ ΑΓ, datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim AB ipsâ ΒΓ, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΑΔ; reliquæ igitur ΔΒ ad ΒΓ ratio est data. Invertendo igitur et componendo ratio est ipsius ΓΔ ad ΔΒ data. Eadem huic fiat ipsius ΑΔ ad ΔΕ; ratio igitur et ipsius ΑΔ ad ΔΕ data. Data autem ΑΔ; data igitur et ΔΕ; quare et reliqua ΑΕ data est. Est autem et totius ΑΓ ad totam ΕΒ ratio data; quare et ipsius ΕΒ ad ΑΓ

PROPOSITION XI.

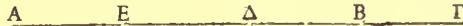
Si une grandeur est plus grande à l'égard d'une autre grandeur, d'une donnée, qu'en raison, la première sera plus grande à l'égard de leur somme, d'une donnée, qu'en raison; et si la première est plus grande à l'égard de leur somme, d'une donnée, qu'en raison, la première sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Que la grandeur AB soit plus grande à l'égard de la grandeur ΒΓ, d'une donnée, qu'en raison; je dis que AB est plus grand à l'égard de ΑΓ d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque AB est plus grand à l'égard de ΒΓ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΑΔ; la raison du reste ΔΒ à ΒΓ sera donnée (déf. 11). Donc, par inversion et par addition, la raison de ΓΔ à ΔΒ est donnée (6). Faisons en sorte que la raison de ΑΔ à ΔΕ soit la même que celle-ci; la raison de ΑΔ à ΔΕ sera donnée. Mais ΑΔ est donné; donc ΔΕ est donné (2); le reste ΑΕ est donc donné (4). Mais la raison de la grandeur entière

λόγος δοθείς ὥστε καὶ τοῦ EB πρὸς τὸ AG λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι δοθὲν τὸ AE· τὸ BA ἄρα τοῦ AG, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ratio est data. Et est data AE ; ipsa BA igitur ipsa AG, data, major est quam in ratione.

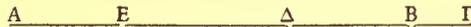


Ἀλλὰ δὴ τὸ BA συναμφοτέρου τοῦ AG, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ αὐτὸ τὸ AB καὶ τοῦ⁵ λοιποῦ τοῦ BΓ, δοθέντι, μείζον ἔσται⁶ ἢ ἐν λόγῳ.

At vero BA utraq̄ue simul ipsa AG, data, major sit quam in ratione ; dico eandem AB et reliqua BΓ, data, majorem futuram esse quam in ratione.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ AG, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ⁷, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ AE· λοιποῦ ἄρα τοῦ EB πρὸς τὸ AG λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ AG πρὸς τὸ EB λόγος ἐστὶ δοθείς. Ο αὐτὸς αὐτῷ γεγοιῆτω ὁ τοῦ ΔΔ

Quoniam enim AB ipsa AG, data, major est quam in ratione ; auferatur data magnitudo AE ; reliquæ igitur EB ad AG ratio est data ; quare et ipsius AG ad EB ratio est data. Eadem huic fiat ratio ipsius ΔΔ ad ΔE ; et ipsius ΔΔ igitur ad



πρὸς τὸ ΔE⁸· καὶ τοῦ ΔΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔE⁹ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι τοῦ ΔA πρὸς τὸ AE λόγος ἐστὶ¹⁰ δοθείς· καὶ ἀνάπαλιν τοῦ EA πρὸς τὸ ΔΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ δοθὲν τὸ EA· δοθέν ἄρα καὶ ὅλον τὸ ΔΔ. Καὶ ἐπεὶ ὅλου τοῦ AG πρὸς

ΔE ratio est data ; et convertendo ipsius ΔA igitur ad AE ratio est data ; et invertendo ipsius EA ad ΔΔ ratio est data. Et data EA ; data igitur et tota ΔΔ. Et quoniam totius AG

AG à la grandeur entière EB est donnée (12. 5) ; la raison de EB à AG est donc donnée. Mais AE est donné. Donc BA est plus grand à l'égard de AG, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

Mais que AB soit plus grand à l'égard de la somme AG, d'une donnée, qu'en raison ; je dis que la grandeur AB sera plus grande à l'égard de l'autre grandeur BG d'une donnée qu'en raison.

Car puisque AB est plus grand à l'égard de AG, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée AE, la raison du reste EB à AG sera donnée ; la raison de AG à EB est donc donnée. Faisons en sorte que la raison de ΔΔ à ΔE soit la même que celle-ci ; la raison de ΔΔ à ΔE sera donnée ; donc, par conversion, la raison de ΔA à AE est donnée (5) ; donc, par inversion, la raison de EA à ΔΔ est donnée. Mais AE est donné ; la grandeur entière ΔΔ est donc aussi donnée (2). Mais la raison de la grandeur entière AG à la grandeur entière EB est donnée ;

ἔλον τὸ ΕΒ λόγος ἐστὶ δοθείς ὡν τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ¹¹ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔσται δὴ¹² καὶ λοιποῦ τοῦ ΓΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΔ λόγος δοθείς· καὶ διελόντι τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ ΔΑ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ad totam EB ratio est data, quarum ipsius AD ad DE ratio est data; erit igitur et reliquæ GD ad reliquam BD ratio data; et dividendo ipsius GB ad BD ratio est data; quare et AB ad BG ratio est data. Et est data DA; ipsa AB igitur ipsâ BG, datâ, major est quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Εάν ἢ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου ἢ δοθὲν, ἢ δὲ καὶ τὸ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου δοθὲν· τὸ πρῶτον τῶ τρίτῳ ἤτοι ἴσον ἐστίν, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶ.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τὸ μὲν ΑΒ μετὰ τοῦ ΒΓ δοθὲν ἔστω τὸ ΑΓ, τὸ δὲ

PROPOSITIO XII.

Si sint tres magnitudines, et prima quidem cum secundâ sit data, sit vero et secunda cum tertiâ data; prima tertiæ vel æqualis est, vel altera alterâ, datâ, major est.

Sint tres magnitudines AB, BG, GD, et ipsa AB quidem cum BG data sit AG, ipsa vero

A ————— B ————— Γ ————— Δ

ΒΓ μετὰ τοῦ ΓΔ δοθὲν ἔστω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ τῶ ΓΔ ἤτοι ἴσον ἐστίν, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστίν.

BG cum GD data sit BD; dico ipsam AB ipsi GD vel æqualem esse, vel alteram alterâ, datâ, majorem esse.

et la raison de AD à ED est donnée; la raison du reste GD au reste BD est donc donnée; donc, par soustraction, la raison de GB à BD est donnée (6). La raison de AB à BG est donc donnée. Mais DA est donné; donc AB est plus grand à l'égard de BG, d'une donnée, qu'en raison.

PROPOSITION XII.

Si l'on a trois grandeurs, si la première avec la seconde est donnée, et si la seconde avec la troisième est aussi donnée, la première est ou égale à la troisième, ou l'une est plus grande que l'autre, d'une donnée.

Soient les trois grandeurs AB, BG, GD; que AB avec BG, c'est-à-dire BD soit aussi donné; je dis que AB est ou égal à GD ou que l'une est plus grande que l'autre, d'une donnée.

Επει γάρ δοθέν ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΔ·
τὰ δὲ δοθέντα ἢτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἄνισα. Ἐστῶ

Quoniam enim data est utraque ipsarum ΑΓ,
ΒΔ; datae igitur vel sunt æquales, vel inæqua-



πρότερον ἴσα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ τῷ ΒΔ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΒΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ λοιπῶ τῷ ΓΔ ἴσον ἐστί. Μὴ ἔστω δὲ ἴσα, ἀλλ' ἔστω μείζον τὸ ΑΓ τοῦ ΒΔ, καὶ κείσθω τῷ ΒΔ ἴσον τὸ ΓΕ. Δοθέν δὲ τὸ ΒΔ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΓΕ. Ἐστί δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΓ δοθέν, καὶ λοιπὸν ἄρα² τὸ ΑΕ δοθέν ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΒΔ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΒΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΕ λοιπῶ τῷ ΓΔ ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι δοθέν τὸ ΑΕ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μείζον ἐστίν.

les. Sint primum æquales; æqualis igitur ΑΓ ipsi ΒΔ. Communis auferatur ΒΓ; reliqua igitur ΑΒ, reliquæ ΓΔ æqualis est. Non sint autem æquales, sed sit major ΑΓ ipsâ ΒΔ, et ponatur ipsi ΒΔ æqualis ΓΕ. Data autem ΒΔ; data igitur et ΓΕ. Est autem et tota ΑΓ data; et reliqua igitur ΑΕ data est. Et quoniam æqualis est ΕΓ ipsi ΒΔ, communis auferatur ΒΓ; reliqua igitur ΒΕ reliquæ ΓΔ æqualis est. Et est data ΑΕ; ipsa igitur ΑΒ ipsâ ΓΔ, datâ, major est.

Car puisque chacune des grandeurs ΑΓ, ΒΔ est donnée, ces grandeurs données seront ou égales ou inégales. Qu'elles soient premièrement égales. Puisque ΑΓ est égal à ΒΔ, si l'on retranche la partie commune ΒΓ, le reste ΑΒ sera égal au reste ΓΔ. Mais qu'elles ne soient pas égales, et que la droite ΑΓ soit plus grande que ΒΔ, et faisons ΓΕ égal à ΒΔ. Puisque ΒΔ est donné, la grandeur ΓΕ sera donnée. Mais la grandeur entière ΑΓ est donnée; le reste ΑΕ est donc donné (4). Mais ΕΓ est égal à ΒΔ; donc, si nous retranchons la partie commune ΒΓ, le reste ΒΕ sera égal au reste ΓΔ. Mais ΑΕ est donné; donc ΑΒ est plus grand que ΓΔ, d'une donnée (déf. 9).

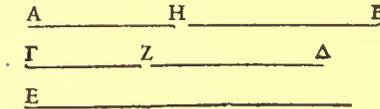
ΑΓ Ε Β Γ Δ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

PROPOSITIO XIII.

Εάν ἢ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον λόγον ἔχῃ δεδομένον, τὸ δὲ δεύτερον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ AB , $\Gamma\Delta$, E , καὶ τὸ μὲν AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ λόγον ἔχέτω δεδομένον, τὸ δὲ $\Gamma\Delta$ τοῦ E , δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ AB τοῦ E , δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\Gamma\Delta$ τοῦ E , δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓZ . λοιποῦ ἄρα τοῦ ΔZ πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθείς τοῦ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γηρονέτω ὁ τοῦ AH πρὸς τὸ ΓZ . λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓZ πρὸς τὸ AH δοθείς. Δοθὲν

Si sint tres magnitudines, et prima quidem ad secundam rationem habeat datam, secunda autem tertiâ, datâ, major sit quam in ratione; et prima secundâ, datâ, major erit quam in ratione.

Sint tres magnitudines AB , $\Gamma\Delta$, E , et AB quidem ad $\Gamma\Delta$ rationem habeat datam, ipsa vero $\Gamma\Delta$ ipsâ E , datâ, major sit quam in ratione; dico et ipsam AB ipsâ E , datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim $\Gamma\Delta$ ipsâ E , datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΓZ ; reliquæ igitur ΔZ ad E ratio est data. Et quoniam ratio est data ipsius AB ad $\Gamma\Delta$, eadem huic fiat ratio ipsius AH ad ΓZ ; ratio igitur et ipsius ΓZ ad AH data. Data autem ΓZ ; data

PROPOSITION XIII.

Si l'on a trois grandeurs, si la première a une raison donnée avec la seconde, et si la seconde est plus grande à l'égard de la troisième, d'une donnée, qu'en raison, la première sera plus grande à l'égard de la troisième, d'une donnée, qu'en raison.

Soient les trois grandeurs AB , $\Gamma\Delta$, E ; que AB ait avec $\Gamma\Delta$ une raison donnée, et que $\Gamma\Delta$ soit plus grand à l'égard de E , d'une donnée, qu'en raison; je dis que AB est plus grand à l'égard de E , d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque $\Gamma\Delta$ est plus grand à l'égard de E , d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΓZ ; la raison du reste ΔZ à E sera donnée (déf. 11). Et puisque la raison de AB à $\Gamma\Delta$ est donnée, faisons en sorte que la raison de AH à ΓZ soit la même que celle-ci; la raison de ΓZ à AH sera donnée. Mais ΓZ

δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ· καὶ λοιποῦ ἄρα³ τοῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ΔΖ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ ΑΗ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

igitur et AH; et reliquæ igitur ipsius HB ad reliquam ΔΖ ratio est data. Ipsius autem ΔΖ ad Ε ratio est data; et ipsius HB igitur ad Ε ratio est data. Et est data AH; ipsa AB igitur ipsâ Ε, datâ, major est quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

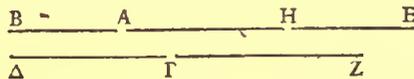
PROPOSITIO XIV.

Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ προστεθῇ ἑκατέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος· τὰ ἅλα πρὸς ἄλληλα ἦτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

Si duæ magnitudines inter se rationem habeant datam, et adjiciatur utrique ipsarum data magnitudo; totæ inter se vel rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχέτω δεδομένον, καὶ προσκείσθω ἑκατέρῳ αὐτῶν

Duæ enim magnitudines ΑΒ, ΓΔ inter se rationem habeant datam, et adjiciatur utrique



δεδομένον μέγεθος, τὸ τε ΑΕ καὶ τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι τὰ ὅλα τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἦτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ipsarum data magnitudo, et ΑΕ et ΓΖ; dico totas ΕΒ, ΖΔ ad inter se vel rationem habere datam; vel alteram alterâ, datâ, majorem esse quam in ratione.

est donné; donc AH est donné (2); la raison du reste HE au reste ΔΖ est donc donnée (19. 5). Mais la raison de ΔΖ à Ε est donnée; la raison de ΗΒ à Ε est donc donnée (8). Mais AH est donné; donc AB est plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison.

PROPOSITION XIV.

Si deux grandeurs ont entre elles une raison donnée, et si à chacune d'elles on ajoute une grandeur donnée, les grandeurs entières auront entr'elles une raison donnée, ou bien l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Que les deux grandeurs ΑΒ, ΓΔ aient entre elles une raison donnée; ajoutons à chacune d'elles une grandeur donnée, savoir, ΑΕ et ΓΖ; je dis que les grandeurs entières ΕΒ, ΖΔ, auront entre elles une raison donnée, ou bien que l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΑ, ΖΓ, λόγος ἄρα τοῦ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἔσται καὶ ὅλον τοῦ ΕΒ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὲ ὁ αὐτὸς, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ³. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΑ πρὸς τὸ ΖΓ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ ΓΖ³ δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΗΑ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΕΑ δοθέν³ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΗ δοθέν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΖΓ, λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΖΔ δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ⁴, δοθέν τὸ ΕΗ³ τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μείζον ἴσθιν ἢ ἐν λόγῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος³ τὰ λοιπὰ πρὸς ἀλλήλα ἢτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔσται¹ ἢ ἐν λόγῳ.

Car puisque chacune des grandeurs EA, ZΓ est donnée, la raison de EA à ZΓ sera donnée (1); donc si cette raison est la même que celle de AB à ΓΔ, la raison de la grandeur entière EB à la grandeur entière ΖΔ sera donnée (12. 5). Mais qu'elle ne soit pas la même, et faisons en sorte que AB soit à ΓΔ comme HA est à ΓΖ; la raison de HA à ΓΖ sera donnée. Mais ΓΖ est donné; donc HA est donné (2). Mais EA est donné; le reste EH est donc donné (4). Mais AB est à ΓΔ comme HA est à ΖΓ; la raison de HB à ΖΔ est donc donnée (12. 5). Mais EH est donné; donc EB est plus grand à l'égard de ΖΔ, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

PROPOSITION XV.

Si deux grandeurs ont entre elles une raison donnée, et si l'on retranche de chacune une grandeur donnée, les restes, ou auront entre eux une raison donnée, ou bien l'un sera plus grand à l'égard de l'autre d'une donnée qu'en raison.

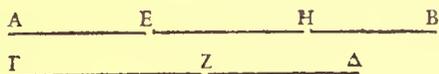
Quoniam enim data est utraque ipsarum EA, ZΓ, ratio igitur ipsius EA ad ZΓ data. Et si quidem eadem quæ ipsius AB ad ΓΔ, erit et totius EB ad totam ΖΔ ratio data. Non sit autem eadem, et fiat ut AB ad ΓΔ ita HA ad ΓΖ; ratio igitur et ipsius HA ad ΖΓ data. Data autem ΓΖ; data igitur et HA. Est autem et EA data; et reliqua igitur EH data est. Et quoniam ut AB ad ΓΔ ita HA ad ΖΓ; ratio igitur et ipsius HB ad ΖΔ data. Et est data EH; ipsa EB igitur ipsâ ΖΔ, datâ, major est quam in ratione.

PROPOSITIO XV.

Si duæ magnitudines inter se rationem habeant datam, et auferatur ab utraq̃ue ipsarum data magnitudo; reliquæ inter se vel rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ AB , $\Gamma\Delta$ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχεται δεδομένον, καὶ ἀφηρήσθω ἀφ' ἑατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος, ἀπὸ μὲν τοῦ AB τὸ AE , ἀπὸ δὲ τοῦ $\Gamma\Delta$ τὸ ΓZ . λέγω ὅτι τὰ λοιπὰ τὰ EB , $Z\Delta$ πρὸς ἄλληλα ἦτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἴσται³ ἢ ἐν λόγῳ.

Duæ enim magnitudines AB , $\Gamma\Delta$ inter se rationem habeant datam, et auferatur ab utraq̃ue ipsarum data magnitudo, ab ipsâ quidem AB ipsa AE , ab ipsâ vero $\Gamma\Delta$ ipsa ΓZ ; dico reliquas EB , $Z\Delta$ inter se vel rationem habituras esse datam, vel alteram alterâ, datâ, majorem fore quam in ratione.



Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν AE , ΓZ δοθέν ἐστι, λόγος ἄρα τοῦ AE πρὸς τὸ³ ΓZ ἐστὶ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ AB πρὸς τὸ⁴ $\Gamma\Delta$, ἴσται καὶ λοιποῦ τοῦ EB πρὸς λοιπὸν τὸ $Z\Delta$ λόγος δοθείς. Μὴ ἴστω δὴ ὁ αὐτός, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ AB πρὸς τὸ⁵ $\Gamma\Delta$ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓZ . Λόγος δὲ τοῦ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AH πρὸς τὸ ΓZ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ ΓZ · δοθέν ἄρα καὶ τὸ AH . Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ AE δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EH δοθέν ἐστὶ⁶. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓZ · λοιποῦ ἄρα τοῦ HB πρὸς λοιπὸν τὸ $Z\Delta$

Quoniam enim utraque ipsarum AE , ΓZ data est, ratio igitur ipsius AE ad ΓZ est data. At vero si eadem est quæ ipsius AB ad $\Gamma\Delta$, erit et reliquæ EB ad reliquam $Z\Delta$ ratio data. Non sit autem eadem, et fiat ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita AH ad ΓZ . Ratio autem ipsius AB ad $\Gamma\Delta$ data; ratio igitur et ipsius AH ad ipsam ΓZ data. Data autem ΓZ ; data igitur et AH . Est autem et AE data; et reliqua igitur EH data est. Et quoniam ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita AH ad ΓZ ; reliquæ igitur HB ad reliquam $Z\Delta$ ratio est data. Et est data EH ;

Que les deux grandeurs AB , $\Gamma\Delta$ aient entre elles une raison donnée; retranchons de chacune d'elles une grandeur donnée, c'est-à-dire de AB retranchons AE , et de $\Gamma\Delta$ retranchons ΓZ ; je dis que les restes EB , $Z\Delta$ auront entre eux une raison donnée, ou bien que l'un sera plus grand à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque chacune des grandeurs AE , ΓZ est donnée, la raison de AE à ΓZ sera donnée. Donc si cette raison est la même que celle de AB à $\Gamma\Delta$, la raison du reste EB au reste $Z\Delta$ sera donnée (19. 5). Mais qu'elle ne soit pas la même, et faisons en sorte que AB soit à $\Gamma\Delta$ comme AH est à ΓZ . Puisque la raison de AB à $\Gamma\Delta$ est donnée, la raison de AH à ΓZ est aussi donnée. Mais ΓZ est donné; donc AH est donné (2). Mais AE est donné; le reste EH est donc donné (4). Mais AB est à $\Gamma\Delta$ comme AH est à ΓZ ; la raison du reste HB au reste $Z\Delta$ est donc

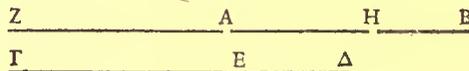
λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι δοθέν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ipsa EB igitur ipsâ ZΔ, datâ, major est quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχη δεδομένον, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ἑνὸς αὐτῶν δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῆ, τῷ δὲ ἑτέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος προστεθῆ τὸ ὅλον τοῦ λοιποῦ, δοθέντι, μείζον ἐστὶ ἢ ἐν λόγῳ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ λόγον ἔχεται δεδομένον, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ΓΔ δεδομένον μέγεθος ἀφαιρήσθω τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ΑΒ δεδομένον μέγεθος προσκείσθω τὸ ΖΑ· λέγω ὅτι ὅλον τὸ ΖΒ τοῦ ὅλου τοῦ ΕΔ δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.



Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονητῷ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΕΔ

Si duæ magnitudines inter se rationem habeant datam, et ab unâ quidem ipsarum data magnitudo auferatur, alteri autem ipsarum data magnitudo adjiciatur; tota reliquâ, datâ, major erit quam in ratione.

Duæ enim magnitudines ΑΒ, ΓΔ rationem habeant datam, et a ΓΔ quidem data magnitudo auferatur ΓΕ, ipsi vero ΑΒ data magnitudo adjiciatur ΖΑ; dico totam ΖΒ reliquâ ΕΔ, datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim ratio est ipsius ΑΒ ad ΓΔ data, eadem huic fiat ratio ipsius ΑΗ ad ΓΕ; ratio

donnée (19. 5). Mais ΕΗ est donné; donc ΕΒ est plus grand à l'égard de ΖΔ, d'une donnée, qu'en raison.

PROPOSITION XVI.

Si deux grandeurs ont entr'elles une raison donnée; si de l'une d'elles on retranche une grandeur donnée, et si l'on ajoute à l'autre une grandeur donnée, la grandeur entière sera plus grande à l'égard de la grandeur restante, d'une donnée, qu'en raison.

Que les deux grandeurs ΑΒ, ΓΔ ayent une raison donnée; soit retranché de ΓΔ une grandeur donnée ΓΕ, et soit ajouté à ΑΒ une grandeur donnée ΖΑ; je dis que la grandeur entière ΖΒ est plus grande à l'égard de la grandeur restante ΕΔ, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque la raison de ΑΒ à ΓΔ est donnée, faisons en sorte que la raison de ΑΗ à ΓΕ soit la même que celle-ci; la raison de ΑΗ à ΓΕ sera donnée (déf. 2). Mais

ΓΕ· λόγος ἄρα ἐστὶ⁵ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ δοθείς. Δοθὲν δὲ τὸ ΓΕ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. Ἐστι δὲ καὶ τὸ ΑΖ δοθὲν· ὅλον ἄρα τὸ ΖΗ δοθὲν ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ· καὶ λοιποῦ ἄρα⁶ τοῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ ΗΖ· τὸ ΖΒ ἄρα τοῦ ΕΔ, δοθέντι, μείζον ἐστίν ἢ ἐν λόγῳ.

igitur est ipsius ΑΗ ad ΓΕ data. Data autem ΓΕ; data igitur et ΑΗ. Est autem et ΑΖ data; tota igitur ΖΗ data est. Et quoniam ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΗ ad ΓΕ; et reliquæ igitur ΗΒ ad reliquam ΕΔ ratio est data. Et est data ΗΖ; ipsa ΖΒ igitur ipsâ ΕΔ, datâ, major est quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

PROPOSITION XVII.

Εὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ τὸ πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, ἢ δὲ καὶ τὸ τρίτον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ἢτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Si sint tres magnitudines, et prima secundâ, datâ, major sit quam in ratione, sit autem et tertia eâdem, datâ, major quam in ratione; prima ad tertiam vel rationem habebit datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, ΔΕ, καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΔΕ τοῦ Γ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, ΔΕ ἢτοι πρὸς ἄλ-

Sint tres magnitudines ΑΒ, Γ, ΔΕ, et utraque ipsarum ΑΒ, ΔΕ ipsâ Γ, datâ, major sit quam in ratione; dico ipsas ΑΒ, ΔΕ vel inter

ΓΕ est donné; donc ΑΗ est donné (2). Mais ΑΖ est donné; la grandeur entière ΖΗ est donc donnée (3). Mais ΑΒ est à ΓΔ comme ΑΗ est à ΓΕ; la raison du reste ΗΒ au reste ΕΔ est donc donnée (19. 5). Mais ΗΖ est donné; donc ΖΒ est plus grand à l'égard de ΕΔ, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

PROPOSITION XVII.

Si l'on a trois grandeurs, si la première est plus grande à l'égard de la seconde, d'une donnée, qu'en raison, et si la troisième est aussi plus grande à l'égard de la seconde d'une donnée qu'en raison, la première aura avec la troisième une raison donnée, ou l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

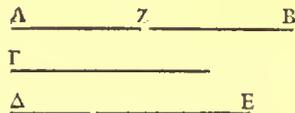
Soient les trois grandeurs ΑΒ, Γ, ΔΕ, et que chacune des grandeurs ΑΒ, ΔΕ soit plus grande à l'égard de Γ, d'une donnée, qu'en raison; je dis que les gran-

ληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ
 ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΔΕ τοῦ Γ, δοθέντι, μείζον ἔστιν
 ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΔΗ.
 λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΕ πρὸς τὸ Γ λόγος ἔστι δοθείς.

se rationem habere datam, vel alteram alterâ,
 datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim ΔΕ ipsâ Γ, datâ, major est
 quam in ratione, auferatur data magnitudo
 ΔΗ; reliquæ igitur ΗΕ ad Γ ratio est data.



Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος
 ἔστι δοθείς· καὶ τοῦ ΖΒ ἄρα πρὸς τὸ ΗΕ λόγος
 ἔστι δοθείς¹. Καὶ πρόσκειται αὐτοῖς δεδομένα μί-
 γθη τὰ ΑΖ, ΔΗ· τὰ ὅλα ἄρα τὰ ΑΒ, ΔΕ ἦτοι
 πρὸς ἀλλήλα² λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον
 τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Propter eadem utique et ipsius ΖΒ ad Γ ratio
 est data; et ipsius ΖΒ ad ΗΕ ratio est data.
 Et adjiciuntur ipsis datæ magnitudines ΑΖ, ΔΗ;
 totæ igitur ΑΒ, ΔΕ inter se vel rationem ha-
 bent datam, vel altera alterâ, datâ, major est
 quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ιη'.

Ἐὰν ἢ τρία μέγεθη, ἐν δὲ αὐτῶν ἑκατέρου
 τῶν λοιπῶν, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ· τὰ
 λοιπὰ δύο πρὸς ἀλλήλα ἦτοι λόγον ἔξει δεδο-
 μένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον
 ἔσται¹ ἢ ἐν λόγῳ.

PROPOSITIO XVIII.

Si sint tres magnitudines, una autem earum
 utrâque reliquarum, datâ, major sit quam in
 ratione, reliquæ duæ inter se vel rationem
 habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major
 erit quam in ratione.

deurs ΑΒ, ΔΕ ont entr'elles une raison donnée, ou que l'une est plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

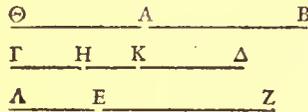
Car puisque ΔΕ est plus grand à l'égard de Γ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΔΗ; la raison du reste ΗΕ à Γ sera donnée (déf. 11). Semblablement la raison de ΖΒ à Γ est donnée; la raison de ΖΒ à ΗΕ est donc donnée (8). Mais les grandeurs données ΑΖ, ΔΗ sont ajoutées à celles-ci; les grandeurs entières ΑΒ, ΔΕ auront donc entre elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison (14).

PROPOSITION XVIII.

Si l'on a trois grandeurs, et si l'une d'elles est plus grande à l'égard de chacune des deux autres, d'une donnée, qu'en raison, les deux autres auront entre elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ AB, ΓΔ, EZ, ἐν δ' αὐτῶν τὸ ΓΔ τοῦ ἑκατέρου τῶν λοιπῶν τῶν AB, EZ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λίγω ὅτι τὸ AB πρὸς τὸ EZ ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστίν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ AB, δοθέντι, μείζον ἐστίν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΔ πρὸς τὸ AB λόγος ἐστὶ δοθείς. Ὁ αὐτὸς αὐτῷ γηρονέτω ὁ τοῦ ΓΗ πρὸς τὸ ΑΘ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΗ πρὸς τὸ ΑΘ δοθείς.



Δοθὲν δὲ τὸ ΓΗ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΘ· καὶ ὅλον τοῦ ΓΔ πρὸς ὅλον τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. Πάλιν ἐπεὶ τὸ ΓΔ τοῦ EZ, δοθέντι, μείζον ἐστίν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΚ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΚΔ πρὸς τὸ EZ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ὁ αὐτὸς αὐτῷ γηρονέτω, ὁ τοῦ ΓΚ πρὸς τὸ ΔΕ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΚ πρὸς τὸ ΔΕ δοθείς. Δοθὲν δὲ τὸ ΓΚ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔΕ· καὶ ὅλον τοῦ ΓΔ πρὸς ὅλον τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Sint tres magnitudines AB, ΓΔ, EZ, una autem earum ΓΔ utraq̄ue ipsarum AB, EZ, datâ, major sit quam in ratione; dico ipsam AB ad EZ vel rationem habere datam, vel alteram alterâ, datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim ΓΔ ipsâ AB, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΓΗ; reliquæ igitur ΗΔ ad AB ratio est data. Eadem huic fiat ratio ipsius ΓΗ ad ΑΘ; ratio igitur et ipsius ΓΗ ad ΑΘ data. Data

autem ΓΗ; data igitur et ΑΘ; et totius ΓΔ ad totam ΘΒ ratio est data. Rursus, quoniam ΓΔ ipsâ EZ, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΓΚ; reliquæ igitur ΚΔ ad EZ ratio est data. Eadem huic fiat ratio ipsius ΓΚ ad ΔΕ; ratio igitur et ipsius ΓΚ ad ΔΕ data. Data autem ΓΚ; data igitur et ΔΕ; et totius ΓΔ ad totam ΔΖ ratio est data.

Soient les trois grandeurs AB, ΓΔ, EZ, et que l'une d'elles ΓΔ soit plus grande à l'égard de chacune des deux autres AB, EZ, d'une donnée, qu'en raison; je dis que AB aura avec EZ une raison donnée, ou que l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque ΓΔ est plus grand à l'égard de AB, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la donnée ΓΗ; la raison du reste ΗΔ à AB sera donnée. Faisons en sorte que la raison de ΓΗ à ΑΘ soit la même que celle-ci; la raison de ΓΗ à ΑΘ sera donnée. Mais ΓΗ est donné; donc ΑΘ est donné; la raison de la grandeur entière ΓΔ à la grandeur entière ΘΒ est donc donnée (12. 5). De plus, puisque ΓΔ est plus grand à l'égard de EZ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΓΚ; la raison du reste ΚΔ à EZ sera donnée (déf. 11). Faisons en sorte que la raison de ΓΚ à ΔΕ soit la même que celle ci; la raison de ΓΚ à ΔΕ sera donnée. Mais ΓΚ est donné; donc ΔΕ est donné; la raison de la grandeur entière ΓΔ à

Τοῦ δὲ ΓΔ πρὸς τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΘΒ ἄρα πρὸς τὸν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἀφήρηται ἀπ' αὐτῶν δεδομένα μεγέθη τὰ ΘΑ, ΑΕ· τὰ ΑΒ, ΕΖ ἄρα ἤτοι πρὸς ἀλλήλα λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

Ipsius autem ΓΔ ad ΘΒ ratio est data ; et ipsius ΘΒ igitur ad ΑΖ ratio est data. Et auferuntur ab ipsis datæ magnitudines ΘΑ, ΑΕ ; ipsæ ΑΒ, ΕΖ igitur vel inter se rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major est quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Εάν ἢ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ, ἢ δὲ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

PROPOSITIO XIX.

Si sint tres magnitudines, et prima quidem secundâ, datâ, major sit quam in ratione, sit autem et secunda tertiâ, datâ, major quam in ratione ; et prima tertiâ, datâ, major erit quam in ratione.

Sint tres magnitudines ΑΒ, ΓΔ, Ε, et ipsa quidem ΑΒ ipsâ ΓΔ, datâ, major sit quam in ratione, ipsa vero ΓΔ ipsâ Ε, datâ, major sit quam in ratione ; dico et ipsam ΑΒ ipsâ Ε, datâ, majorem esse quam in ratione.

la grandeur entière ΑΖ est donc donnée (12. 5). Mais la raison de ΓΔ à ΘΒ est donnée ; la raison de ΘΒ à ΑΖ est donc donnée (8). Mais on a retranché de ces grandeurs, les grandeurs données ΘΑ, ΑΕ ; les grandeurs ΑΒ, ΕΖ auront donc entre elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande à l'égard de l'autre d'une donnée, qu'en raison (15).

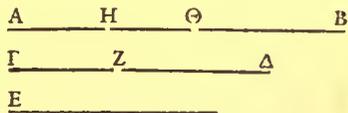
PROPOSITION XIX.

Si l'on a trois grandeurs, si la première est plus grande à l'égard de la seconde, d'une donnée, qu'en raison, et si la seconde est plus grande à l'égard de la troisième, d'une donnée, qu'en raison, la première sera plus grande à l'égard de la troisième d'une donnée qu'en raison..

Soient les trois grandeurs ΑΒ, ΓΔ, Ε ; que ΑΒ soit plus grand à l'égard de ΓΔ d'une donnée qu'en raison, et que ΓΔ soit plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison ; je dis que ΑΒ est plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. Πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ· ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ο αὐτὸς αὐτῶ γερονέτω τοῦ ΗΘ πρὸς

Quoniam enim ΓΔ ipsâ Ε, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΓΖ; reliquæ igitur ΖΔ ad Ε ratio est data. Rursus, quoniam ΑΒ ipsâ ΓΔ, datâ, major est quam in ratione; auferatur data magnitudo ΑΗ; reliquæ igitur ΗΒ ad ΓΔ ratio est data. Eadem huic fiat ratio ipsius ΗΘ ad ΓΖ; ratio igitur



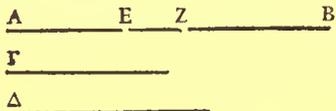
τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς· δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΗΘ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΗΑ δοθὲν· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΘΑ δοθὲν ἔστι. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως καὶ τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ λοιποῦ τοῦ ΘΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΘΒ ἄρα πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ δοθὲν τὸ ΘΑ· τὸ ΒΑ ἄρα τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

et ipsius ΗΘ ad ΓΖ data; data autem ΓΖ; data igitur et ΗΘ. Est autem et ΗΑ data; et tota igitur ΘΑ data est. Et quoniam est ut ΗΒ ad ΓΔ ita et ΗΘ ad ΓΖ, et reliquæ ΘΒ ad reliquam ΖΔ ratio est data. Ipsius autem ΖΔ ad Ε ratio est data; et ipsius ΘΒ igitur ad Ε ratio est data. Et data ΘΑ; ipsa ΒΑ igitur ipsâ Ε, datâ, major est quam in ratione.

Car puisque ΓΔ est plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΓΖ; la raison du reste ΖΔ à Ε sera donnée (déf. 11). De plus, puisque ΑΒ est plus grand à l'égard de ΓΔ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΑΗ; la raison du reste ΗΒ à ΓΔ sera donnée. Faisons en sorte que la raison de ΗΘ à ΓΖ soit la même que celle-ci. La raison de ΗΘ à ΓΖ sera donnée; mais ΓΖ est donné; donc ΗΘ est aussi donné. Mais ΗΑ est donné; la grandeur entière ΘΑ est donc donnée (5). Mais ΗΒ est à ΓΔ comme ΗΘ est à ΓΖ; la raison du reste ΘΒ au reste ΖΔ est donc donnée. Mais la raison de ΖΔ à Ε est donnée; la raison de ΘΒ à Ε est donc donnée (8). Mais ΘΑ est donné; donc ΒΑ est plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison. (déf. 11).

ΑΛΛΩΣ.

Εστω¹ τρία μέρη τὰ AB, Γ, Δ, καὶ τὸ μὲν AB τοῦ Γ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ Γ τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστω² ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ἔτι καὶ³ τὸ AB τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ Γ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δὸθέν μέγεθος τὸ AE· λοιποῦ ἄρα τοῦ EB πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὸ δὲ Γ τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, καὶ τὸ EB ἄρα τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ. Αφηρήσθω οὖν τὸ δὸθέν μέγεθος τὸ EZ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ZB πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι δοθὲν τὸ AZ· τὸ AB ἄρα τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Sint tres magnitudines AB, Γ, Δ, et ipsius quidem AB ipsa Γ, data, major sit quam in ratione, ipsa vero Γ ipsa Δ, data, major sit quam in ratione; dico et AB ipsa Δ, data, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim AB ipsa Γ, data, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo AE, reliquæ igitur EB ad Γ ratio est data. Ipsa Γ autem ipsa Δ, data, major est quam in ratione, et EB igitur ipsa Δ, data, major est quam in ratione. Auferatur itaque data magnitudo EZ; reliquæ igitur ZB ad Δ ratio est data. Et est data AZ; ipsa AB igitur ipsa Δ, data, major est quam in ratione.

AUTREMENT.

Soient les trois grandeurs AB, Γ, Δ; que AB soit plus grand à l'égard de Γ, d'une donnée, qu'en raison, et que Γ soit plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison; je dis que AB est plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison.

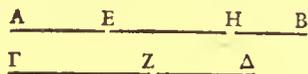
Car puisque AB est plus grand à l'égard de Γ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée AE; la raison du reste EB à Γ sera donnée (déf. 11). Mais Γ est plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison; donc EB est plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison (15). Retranchons la grandeur donnée EZ; la raison du reste ZB à Δ sera donnée. Mais AZ est donné (5); donc AB est plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Εάν ἡ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ ἀφαιρεθῆ ἀπὸ αὐτῶν μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· τὰ λοιπὰ πρὸς ἀλλήλα ἦτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἔν λόφω.

Ἐστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ AB, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ἀφηρήσθω μεγέθη τὰ AE, ΓΖ λόγον ἔχοντα πρὸς ἀλλήλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ EB, ΖΔ πρὸς ἀλλήλα ἦτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἔν λόφω.



Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἔστιν ἑκάτερον τῶν AB, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ AB πρὸς τὸ² ΓΔ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτὸς ἔστι τῶ AE πρὸς τὸ³ ΓΖ· ἔσται καὶ λοιποῦ τοῦ EB πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὲ ὁ αὐτὸς, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΔ. Λόγος δὲ

Si sint duæ magnitudines datæ, et auferantur ab ipsis magnitudines inter se rationem habentes datam; reliquæ inter se vel rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Sint duæ magnitudines datæ AB, ΓΔ, et ab ipsis AB, ΓΔ auferantur magnitudines AE, ΓΖ rationem habentes inter se datam; dico ipsas EB, ΖΔ inter se vel rationem habere datam, vel alteram alterâ, datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim data est utraque ipsarum AB, ΓΔ; ratio igitur ipsius AB ad ΓΔ data. At verò si eadem est quæ ipsius AE ad ΓΖ; erit et reliquæ EB ad reliquam ΖΔ ratio data. Non sit vero eadem, et fiat ut AE ad ΓΖ ita AH ad ΓΔ. Ratio autem ipsius AE ad ΓΖ data; ratio

PROPOSITION XX.

Si deux grandeurs sont données, et si l'on en retranche des grandeurs qui aient entr'elles une raison donnée, les restes auront entre eux une raison donnée, ou bien l'un sera plus grand à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs données AB, ΓΔ, et que des grandeurs AB, ΓΔ, soient retranchées les grandeurs AE, ΓΖ qui aient entre elles une raison donnée; je dis que les restes EB, ΖΔ ont entre eux une raison donnée; ou bien que l'un est plus grand à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque chacune des grandeurs AB, ΓΔ est donnée, la raison de AB à ΓΔ sera donnée (1); donc, si cette raison est la même que celle de AE à ΓΖ, la raison du reste EB au reste ΖΔ sera donnée (19. 5). Mais qu'elle ne soit pas la même, et faisons en sorte que AE soit à ΓΖ comme AH est à ΓΔ. Puisque la raison de AE

τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ δοθεῖς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ δοθεῖς. Δοθέν δὲ τὸ ΓΔ, δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ δοθέν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ λοιπὸν τοῦ ΕΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. Δοθέν δὲ τὸ ΗΒ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἢ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ προστεθῆ αὐτοῖς μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· τὰ ὅλα πρὸς ἀλλήλα ἢτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶ ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ προκείμεθα αὐτοῖς μεγέθη τὰ ΑΕ, ΓΖ λόγον ἔχοντα πρὸς ἀλλήλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ ὅλα τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἀλλήλα ἢτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

à FZ est donnée, la raison de AH à ΓΔ sera donnée. Mais ΓΔ est donné; donc AH est donné (2). Mais AB est donné; le reste HB est donc aussi donné (4). Et puisque AE est à FZ comme AH est à ΓΔ, la raison du reste EH au reste ΖΔ est donnée (19. 5). Mais HB est donné; donc EB est plus grand à l'égard de ΖΔ, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

PROPOSITION XXI.

Si l'on a deux grandeurs données, et si on leur ajoute des grandeurs qui aient entre elles une raison donnée, les grandeurs entières auront entre elles une raison donnée, ou bien l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Soient les deux grandeurs données AB, ΓΔ; ajoutons-leur des grandeurs AE, FZ qui aient entre elles une raison donnée; je dis que les grandeurs entières EB, ΖΔ auront entre elles une raison donnée, ou bien que l'une sera plus grande à l'égard de l'autre d'une donnée qu'en raison.

igitur et ipsius AH ad ΓΔ data. Data autem ΓΔ; data igitur et AH. Est autem et AB data; et reliqua igitur HB data est. Et quoniam est ut AE ad FZ ita AH ad ΓΔ, et reliquæ EH ad reliquam ΖΔ ratio est data. Data autem HB; ipsa EB igitur, ipsâ ΖΔ, datâ, major est quam in ratione.

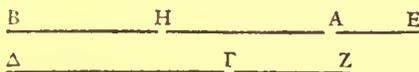
PROPOSITIO XXI.

Si sint duæ magnitudines datæ, et adjiciantur ipsis magnitudines inter se rationem habentes datam; totæ inter se vel rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Sint duæ magnitudines datæ AB, ΓΔ, et adjiciantur ipsis magnitudines AE, FZ rationem habentes inter se datam; dico totas EB, ΖΔ inter se vel rationem habituras esse datam, vel alteram, alterâ, datâ, majorem esse quam in ratione.

Ἐπεὶ γὰρ δεθὲν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AB, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ δεθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῶ τοῦ AE πρὸς τὸ ΓΖ, ἔσται καὶ ὅλου τοῦ EB πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δεθείς. Εἰ δὲ οὐ· πεποιήσθω ὡς τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ AH πρὸς τὸ

Quoniam enim data est utraque ipsarum AB, ΓΔ; ratio igitur ipsius AB ad ΓΔ data. At vero si eadem sit quæ ipsius AE ad ΓΖ, erit et totius EB ad totam ΖΔ ratio data. Si autem non; fiat ut AE ad ΓΖ ita AH ad ΓΔ; ratio igitur ipsius



ΓΔ δεθείς. Δεθὲν δὲ τὸ ΓΔ· δεθὲν ἄρα καὶ τὸ AH. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ AB δεθὲν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ HB δεθὲν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ EA πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΔ· καὶ ὅλου τοῦ EH πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δεθείς. Καὶ δεθὲν τὸ HB· τὸ EB ἄρα τοῦ ΖΔ, δεθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

AH ad ΓΔ data. Data autem ΓΔ; data igitur et AH. Est autem et AB data; et reliqua igitur HB data est. Et quoniam est ut EA ad ΓΖ ita AH ad ΓΔ; et totius EH ad totam ΖΔ ratio est data. Et data HB; ipsa EB igitur ipsâ ΖΔ, datâ, major est quam in ratione.

Car puisque chacune des grandeurs AB, ΓΔ est donnée, la raison de AB à ΓΔ est donnée. Donc, si cette raison est la même que celle de AE à ΓΖ, la raison de la grandeur entière EB à la grandeur entière ΖΔ sera donnée (12. 5). Mais si cela n'est point, faisons en sorte que AE soit à ΓΖ comme AH est à ΓΔ; la raison de AH à ΓΔ sera donnée. Mais ΓΔ est donné; donc AH est donné (2). Mais AB est donné; le reste HB est donc donné (4). Et puisque EA est à ΓΖ comme AH est à ΓΔ; la raison de la grandeur entière EH à la grandeur entière ΖΔ est donnée (12. 5). Mais HB est donné; donc EB est plus grand à l'égard de ΖΔ, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

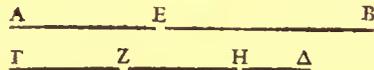
PROPOSITIO XXIII.

Εάν ὅλον πρὸς ὅλον λόγον ἔχη δεδομένον, ἔχη δὲ καὶ τὰ μέρη πρὸς τὰ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ. καὶ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἔξει δεδομένους.

Ἐχέτω γὰρ ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον, ἔχέτω δὲ καὶ τὰ AE, EB μέρη πρὸς τὰ ΓΖ, ΖΔ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· λέγω ὅτι καὶ τὰ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἔξει δεδομένους.

Si totum ad totum rationem habeat datam, habeant autem et partes ad partes rationes datas, non autem easdem; et omnia ad omnia rationes habebunt datas.

Habeat enim totum AB ad totum ΓΔ rationem datam, habeant autem et AE, EB partes ad ΓΖ, ΖΔ partes rationes datas, non autem easdem; dico et omnia ad omnia rationes habitura esse datas.



Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ AE πρὸς τὸ ΓΖ δεθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῶν γεγονέτω ὁ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΗ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΗ ἐστὶ² δεθείς. Ἔσται δὲ καὶ τοῦ λοιποῦ τοῦ³ EB πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΗ λόγος δεθείς. Τοῦ δὲ EB πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δεθείς· καὶ τοῦ ΖΔ ἄρα πρὸς τὸ ΖΗ λόγος ἐστὶ δεθείς· καὶ ἀναστρέψαντι⁴

Quoniam enim ratio est ipsius AE ad ΓΖ data, eadem huic fiat ratio ipsius AB ad ΓΗ; ratio igitur et ipsius AB ad ΓΗ est data; erit autem et reliquæ EB ad reliquam ΖΗ ratio data. Ipsius autem EB ad ΖΔ ratio est data; et ipsius ΖΔ igitur ad ΖΗ ratio est data; et convertendo

PROPOSITION XXIII.

Si un tout a avec un tout une raison donnée, et si les parties ont avec les parties des raisons données, mais non les mêmes, toutes ces grandeurs auront des raisons données avec toutes ces grandeurs.

Que le tout AB ait avec le tout ΓΔ une raison donnée, et que les parties AE, EB aient avec les parties ΓΖ, ΖΔ des raisons données, mais non les mêmes; je dis que toutes ces grandeurs auront des raisons données avec toutes ces grandeurs.

Car puisque la raison de AE à ΓΖ est donnée, faisons en sorte que la raison de AB à ΓΗ soit la même que celle-ci; la raison de AB à ΓΗ sera donnée; la raison du reste EB au reste ΖΗ est donc donnée (19, 5, et déf. 2). Mais la raison de EB à ΖΔ est donnée; la raison de ΖΔ à ΖΗ est donc donnée (8); donc, par conversion,

τοῦ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔΓ, ΓΗ δοθείς⁵· καὶ τοῦ ΔΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἀναστρέψαντι καὶ⁶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· Ἀλλὰ τοῦ ΗΔ πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τοῦ μὲν ΓΖ πρὸς τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε πάντων πρὸς πάντα λόγος ἐστὶ δοθείς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσιν, ἢ δὲ πρώτη πρὸς τὴν¹ τρίτην λόγον ἔχη δεδομένον· καὶ πρὸς τὴν δευτέραν λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, καὶ ἔστω² ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἢ δὲ Α πρὸς τὴν Γ λόγον ἔχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὴν³ Β λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἐκκείσθω γὰρ δοθεῖσα ἡ Δ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῶ

ipsius ΖΔ ad ΔΗ ratio est data. Et quoniam ratio est ipsius ΑΒ ad utramque ipsarum ΔΓ, ΓΗ data; et ipsius ΔΓ igitur ad ΓΗ ratio est data; convertendo et ipsius ΓΔ ad ΔΗ ratio est data. Sed ipsius ΗΔ ad ΔΖ ratio est data; et ipsius ΓΔ igitur ad ΔΖ ratio est data; quare et ipsius ΓΖ ad ΖΔ ratio est data. Sed ipsius quidem ΓΖ ad ΑΕ ratio est data; ipsius verò ΖΔ ad ΒΕ ratio est data; quare omnium ad omnia ratio est data.

PROPOSITIO XXIV.

Si tres rectæ porportionales sint, prima autem ad tertiam rationem habeat datam; et ad secundam rationem habebit datam.

Sint tres rectæ proportionales Α, Β, Γ, et sit ut Α ad Β ita Β ad Γ, ipsa autem Α ad Γ rationem habeat datam; dico et ad ipsam Β rationem habituram esse datam.

Exponatur enim data Δ. Et quoniam ratio est ipsius Α ad Γ data, eadem huic fiat ratio

la raison de ΖΔ à ΔΗ est donnée (5). Mais la raison de ΑΒ avec chacune des grandeurs ΔΓ, ΓΗ est donnée; la raison de ΔΓ à ΓΗ est donc donnée; donc, par conversion, la raison de ΓΔ à ΔΗ est donnée. Mais la raison de ΗΔ à ΔΖ est donnée; la raison de ΓΔ à ΔΖ est donc donnée (8), et par conséquent la raison de ΓΖ à ΖΔ (5). Mais la raison de ΓΖ à ΑΕ est donnée, et la raison de ΖΔ à ΒΕ est aussi donnée; la raison de toutes ces grandeurs à toutes ces grandeurs est donc donnée,

PROPOSITION XXIV.

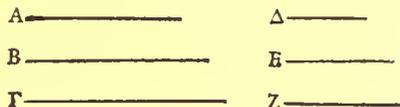
Si trois droites sont proportionnelles, et si la première a une raison donnée avec la troisième, elle aura aussi une raison donnée avec la seconde.

Que les trois droites Α, Β, Γ soient proportionnelles, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Β est à Γ, et que Α ait avec Γ une raison donnée; je dis que Α aura avec Β une raison donnée.

Car soit Δ une droite donnée. Puisque la raison de Α à Γ est donnée, faisons en

γεγονέντω ὁ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. Δοθείσα δὲ ἡ Δ· δοθείσα ἄρα καὶ⁵ ἡ Ζ. Εἰλήφθω τῶν Δ, Ζ μέση ἀνάλογον ἡ Ε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Ε. Δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ, δοθείσα γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ Ε. Ἐστί δὲ καὶ

ipsius Δ ad Z; ratio igitur est et ipsius Δ ad Z data. Data autem Δ; data igitur et Z. Sumatur ipsarum Δ, Z media proportionalis E; ipsum igitur sub Δ, Z æquale est ipsi ex E. Datum autem ipsum sub Δ, Z, data enim utraque earum; datum igitur et ipsum ex E; data igitur est E. Est autem et Δ data; ratio igitur est ipsius



ἡ Δ δοθείσα· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ε δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, ὡς δὲ ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Β, αἱ γὰρ Α, Β, Γ ἀνάλογον εἰσι· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ

Δ ad E data. Et quoniam est ut A ad Γ ita Δ ad Z; sed ut quidem A ad Γ ita ipsum ex A ad ipsum sub A, Γ, ut autem Δ ad Z ita ipsum ex Δ ad ipsum sub Δ, Z; ut igitur ipsum ex A ad ipsum sub A, Γ ita ipsum ex Δ ad ipsum sub Δ, Z. Sed ipsum quidem sub A, Γ æquale est ipsi ex B, ipsæ enim A, B, Γ proportionales sunt. Ipsi autem sub Δ, Z æquale est ipsum ex E; ut igitur ipsum ex A ad ipsum ex B ita ipsum ex Δ ad ipsum ex E; et ut igitur A ad B ita Δ ad E. Ratio

sorte que la raison de Δ à Z soit la même que celle-ci; la raison de Δ à Z sera donnée. Mais Δ est donné; donc Z est donné (2). Prenons une moyenne proportionnelle E entre Δ et Z (15. 6). Le rectangle sous Δ, Z sera égal au carré de E (17. 6). Mais le rectangle sous les droites Δ, Z est donné, car chacune d'elles est donnée; le carré de E est donc donné (déf. 1). Donc E est donné. Mais Δ est donné; la raison de Δ à E est donc donnée (1). Et puisque A est à Γ comme Δ est à Z, que A est à Γ comme le carré de A est au rectangle sous A, Γ (1. 6), et que Δ est à Z comme le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Z; le carré de A sera au rectangle sous A, Γ comme le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Z. Mais le rectangle sous A, Γ est égal au carré de B; car les droites A, B, Γ sont proportionnelles (17. 6), et le carré de E est égal au rectangle sous Δ, Z; le carré de A est donc au carré de B comme le carré de Δ est au carré de E; donc A est à B

A πρὸς τὴν B οὕτως ἢ Δ πρὸς τὴν E . Λόγος δὲ αὐτὸς ἴσος ἢ Δ πρὸς τὴν E δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς A πρὸς τὴν B δοθείς. *autem ipsius Δ ad E data ; ratio igitur et ipsius A ad B data.*

Α Α Λ Ω Σ.

ALITER.

Ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς A πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὡς δὲ ἢ A πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ δοθείς. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $A,$

Quoniam ratio est ipsius A ad Γ data, ut autem A ad Γ ita ipsum ex A ad ipsum sub A, Γ ; ratio igitur et ipsius ex A ad ipsum sub $A,$



Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς B · λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B δοθείς· ὥστε καὶ τῆς A πρὸς τὴν B λόγος ἐστὶ δοθείς· ἑκατέρα γὰρ τῶν A, B ἴσας ἐπιπορισάμεθα ἐν τῷ οἰκείῳ ἐκάστῳ τετραγώνῳ².

Γ data. Ipsi autem sub A, Γ æquale est ipsum ex B ; ratio igitur ipsius ex A ad ipsum ex B data. Quare et ipsius A ad B ratio est data; utriusque enim ipsarum A, B æquales invenimus in proprio unicuique quadrato.

comme Δ est à E (22. 6). Mais la raison de Δ à E est donnée; la raison de A à B est donc donnée.

AUTREMENT.

Puisque la raison de A à Γ est donnée, et que A est à Γ comme le carré de A est au rectangle sous A, Γ (1. 6), la raison du carré de A au rectangle sous A, Γ sera donnée. Mais le carré de B est égal au rectangle compris sous A, Γ (17. 6). La raison du carré de A au carré de B est donc donnée; la raison de A à B est donc donnée (déf. 2); car nous avons trouvé dans les carrés des droites A, B , des droites qui sont égales à ces droites.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ'.

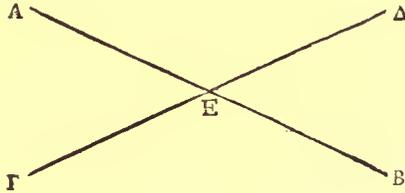
PROPOSITIO XXV.

Εὰν δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνωσιν ἀλλήλας· δίδεται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας τῇ θέσει'.

Δύο γὰρ γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι αἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον· λέγω ὅτι δοθὲν ἔστί τὸ E σημεῖον.

Si duæ lineæ positione datæ sese secant, datum est positione punctum in quo sese secant.

Duæ enim lineæ positione datæ AB, ΓΔ sese secant in E puncto; dico datum esse punctum E.



Εἰ γὰρ μὴ, μεταπεσεῖται τὸ E σημεῖον· μεταπεσεῖται ἄρα καὶ μιᾶς τῶν AB, ΓΔ ἢ τῆς θέσεως. Οὐ μεταπίπτει δὲ· δοθὲν ἄρα ἔστί τὸ E σημεῖον.

Si enim non, excidit E punctum; excidit igitur et unius rectarum AB, ΓΔ positio. Non excidit autem; datum igitur est punctum E.

PROPOSITION XXV.

Si deux lignes données de position se coupent, le point où elles se coupent est donné de position.

Que les lignes AB, ΓΔ, données de position, se coupent au point E; je dis que le point E est donné.

Car si cela n'est pas, le point E se déplacera, et alors l'une des lignes AB, ΓΔ changera de position. Mais aucune de ces lignes ne change de position; le point E est donc donné.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Εάν εὐθείας γραμμῆς τὰ πέρατα ἢ δεδομένα τῆ θέσει· δέδοται ἢ εὐθεῖα τῆ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς τῆς AB¹ τὰ πέρατα τὰ A, B δεδομένα ἔστω τῆ θέσει· λέγω ὅτι δέδοται ἢ AB τῆ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

A—————B

Εἰ γὰρ, μόνοντος τοῦ A σημείου², μεταπεσεῖται τῆς AB εὐθείας ἢτοι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος· μεταπεσεῖται ἄρα³ καὶ τὸ B σημεῖον. Οὐ μεταπίπτει δὲ· δέδοται ἄρα ἢ AB εὐθεῖα τῆ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Εάν εὐθείας γραμμῆς, τῆ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τὸ ἐν πέρασ δὴθεν ἢ· καὶ τὸ ἄτερον δοθῆσεται·

PROPOSITIO XXVI.

Si rectæ lineæ extrema sint data positione, data est recta positione et magnitudine.

Rectæ enim lineæ AB extrema A, B data sint positione; dico datam esse ipsam AB positione et magnitudine.

Si enim, manente A puncto, excidat ipsius AB rectæ vel positio vel magnitudo; excidet et punctum B. Non excidit autem. Data igitur est AB recta positione et magnitudine.

PROPOSITIO XXVII.

Si rectæ lineæ, positione et magnitudine datæ, unum extremum datum sit; et alterum datum erit.

PROPOSITION XXVI.

Si les extrémités d'une ligne droite sont données de position, cette droite est donnée de position et de grandeur.

Que les extrémités A, B d'une droite AB soient données de position; je dis que la droite AB est donnée de position et de grandeur.

Car si le point A restant immobile, la droite AB change de position ou de grandeur, le point B se déplacera. Mais il ne se déplace pas; la droite AB est donc donnée de position et de grandeur.

PROPOSITION XXVII.

Si l'une des extrémités d'une ligne droite, donnée de position et de grandeur, est donnée; l'autre extrémité sera donnée.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τῆς AB, τὸ ἐν πέρασ τὸ A δοθὲν ἔστω! λέγω ὅτι καὶ τὸ B δοθὲν ἔστιν.

Rectæ enim lineæ AB, positione et magnitudine data, unum extremum A datum sit; dico et ipsum B datum esse.



Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ A σημείου, μεταπησῆται τὸ B σημεῖον· μεταπησῆται ἄρα καὶ τῆς AB εὐθείας ἢτοι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος· οὐ μεταπίπτει δὲ δοθὲν ἄρα ἔστι τὸ B σημεῖον.

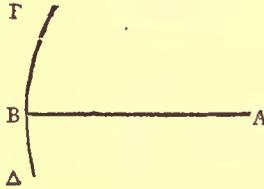
Si enim, manente A puncto, excidat B punctum; excidet igitur et ipsius AB rectæ vel positio vel magnitudo. Non excidit autem; datum igitur est B punctum.

Α Λ Λ Ω Σ'.

ALITER.

Κέντρῳ γὰρ τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AB, περιφέρεια γεγράφθη ἡ ΓΒΔ· θέσει ἄρα ἔστιν ἡ

Centro enim A, intervallo autem AB, circumferentia describatur ΓΒΔ; positione igitur



περιφέρεια ΓΒΔ. Θέσει δὲ καὶ ἡ AB εὐθεῖα· δοθὲν ἄρα ἔστι τὸ B σημεῖον.

est circumferentia ΓΒΔ. Positione autem et AB recta; datum igitur est B punctum.

Que l'extrémité A de la ligne droite AB, donnée de position et de grandeur, soit donnée; je dis que l'autre extrémité B est donnée.

Car si le point A restant immobile, le point B se déplace, la droite AB changera de position ou de grandeur; mais elle ne change ni de position, ni de grandeur; donc le point B est donné.

AUTREMENT.

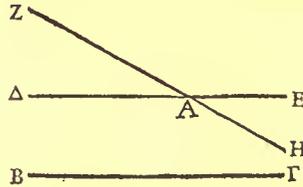
Du centre A et de l'intervalle AB décrivons la circonférence ΓΒΔ; la circonférence ΓΒΔ sera donnée de position (déf. 6). Mais AB est donné de position; le point B est donc donné (25).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

PROPOSITIO XXVIII.

Εάν διὰ δεδομένου σημείου παρὰ θέσει δεδομένην εὐθείαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ· δίδεται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Διὰ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν ΒΓ, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθῃ ἡ ΔΑΕ· λέγω ὅτι δίδεται ἡ ΔΑΕ τῇ θέσει.



Εἰ γὰρ μή· μένοντες τοῦ Α σημείου μεταπεισῆται τῆς ΔΑΕ ἡ θέσις. Διαμενούσης τῆς ΒΓ παραλλήλου μεταπισπτότω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΗ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΖΑΗ. Ἀλλὰ ἡ ΒΓ τῇ ΔΑΕ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΑΕ ἄρα τῇ ΖΑΗ παράλληλος ἐστὶν. Ἀλλὰ καὶ συμπίπτει, ὅπερ ἐστὶν ἀπορον· οὐκ ἄρα μεταπεισῆται τῆς ΔΑΕ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑΕ.

Si per datum punctum contra datam positione rectam recta linea ducatur, data est aeta positione.

Etenim per datum punctum Α, contra datam positione rectam ΒΓ, recta linea ducatur ΔΑΕ; dico datam esse ipsam ΔΑΕ positione.

Si enim non; manente Α puncto excidet ipsius ΔΑΕ positio. Manente ΒΓ parallelâ excidat, et sit ΖΑΗ; parallela igitur est ΓΒ ipsi ΖΑΗ. Sed ΒΓ ipsi ΔΑΕ est parallela; et ΔΑΕ igitur ipsi ΖΑΗ parallela est. Sed et concurrat, quod est absurdum; non igitur excidet ipsius ΔΑΕ positio; positione igitur est ΔΑΕ.

PROPOSITION XXVIII.

Si, par un point donné, une ligne droite est menée parallèlement à une droite donnée de position, la droite menée est donnée de position.

Par le point donné Α, menons la ligne droite ΔΑΕ parallèlement à la droite ΒΓ donnée de position; je dis que la droite ΔΑΕ est donnée de position.

Car si cela n'est pas, le point Α restant immobile, la position de la droite ΔΑΕ changera. Que sa position change, la droite ΒΓ lui restant parallèle, et que sa position soit ΖΑΗ; la droite ΓΒ sera parallèle à ΖΑΗ. Mais ΒΓ est parallèle à ΔΑΕ; donc ΔΑΕ est parallèle à ΖΑΗ (30. 1); ce qui est absurde, puisque ces droites se rencontrent; la position de ΔΑΕ ne change donc point; la droite ΔΑΕ est donc donnée de position.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

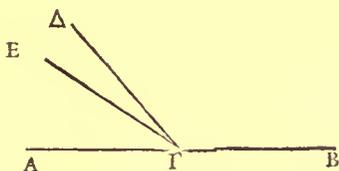
PROPOSITIO XXIX.

Εάν πρὸς θέσει δεδομένη εὐθεία καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ, εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δίδεται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Πρὸς θέσει γὰρ δεδομένη εὐθεία τῇ AB , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Γ , εὐθεῖα ἄχθω ἡ $\Gamma\Delta$, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ $\Delta\Gamma A$ · λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$.

Si ad datam positione rectam et punctum in eâ datum, recta linea ducatur datum faciens angulum, data est ducta positione.

Etenim ad datam positione rectam AB , et punctum Γ in eâ datum, recta ductatur $\Gamma\Delta$, datum faciens angulum $\Delta\Gamma A$; dico positione esse ipsam $\Gamma\Delta$.



Εἰ γὰρ μὴ, μένοντες τοῦ Γ σημείου, μεταπεσεῖται τῆς $\Gamma\Delta$ ἡ θέσις, διατηρεῦσα τῆς ὑπὸ $\Delta\Gamma A$ γωνίας τὸ μέγεθος μεταπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΓE . Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta\Gamma A$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma A$ ³, ἡ μείζων τῇ ἰσάσσοι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται τῆς $\Delta\Gamma$ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$.

Si enim non, manente Γ puncto, excidet ipsius $\Gamma\Delta$ positio, servans ipsius $\Delta\Gamma A$ anguli magnitudinem; excidat et sit ΓE . Æqualis igitur est $\Delta\Gamma A$ angulus ipsi sub $\Delta\Gamma A$, major minori, quod absurdum; non igitur excidet ipsius $\Delta\Gamma$ positio; positione igitur est $\Gamma\Delta$.

PROPOSITION XXIX.

Si d'un point donné dans une droite donnée, on mène à cette droite une ligne droite faisant un angle donné; la droite menée est donnée de position.

Du point donné Γ , dans la droite AB donnée de position, menons à cette droite la droite $\Gamma\Delta$, faisant un angle donné $\Delta\Gamma A$; je dis que $\Gamma\Delta$ est donné de position.

Car si cela n'est pas, le point Γ restant immobile, la position de $\Gamma\Delta$ changera, en conservant la grandeur de l'angle $\Delta\Gamma A$; que sa position change, et qu'elle soit ΓE ; l'angle $\Delta\Gamma A$ sera égal à l'angle $\Delta\Gamma A$, le plus grand au plus petit; ce qui est absurde. Donc $\Delta\Gamma$ ne changera point de position; donc $\Gamma\Delta$ est donné de position.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

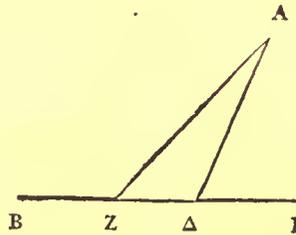
PROPOSITIO XXX.

Εάν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεϊάν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ, δεδομένην ποιούσα γωνίαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῆ θέσει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπεὶ θέσει δεδομένην εὐθεϊάν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ¹. λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΑΔ.

Si a dato puncto ad datam positione rectam recta linea ducatur, datum faciens angulum, data est ducta positione.

Etenim a dato puncto A ad datam positione rectam ΒΓ recta linea ducatur ΑΔ, datum faciens angulum, ΑΔΓ; dico positione esse ipsam ΑΔ.



Εἰ γὰρ μὴ, μένοντος τοῦ Α σημείου μεταπεσεῖται τῆς ΑΔ ἡ θέσις, διατιροῦσα τῆς ὑπὸ ΑΔΓ γωνίας τὸ μέγεθος. Μεταπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΑΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΑΖΓ γωνία², ἡ μείζων τῆ ἐλάσσωνι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον³. οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται τῆς ΑΔ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

Si enim non, manente A puncto excidet ipsius ΑΔ positio, servans ΑΔΓ anguli magnitudinem. Excidat et sit ΑΖ. Æqualis igitur est ΑΔΓ angulus ipsi ΑΖΓ angulo, major minori, quod est impossibile; non igitur excidet ipsius ΑΔ positio; positione igitur est ipsa ΑΔ.

PROPOSITION XXX.

Si d'un point donné, on mène à une droite donnée une ligne droite, faisant un angle donné, la droite menée est donnée de position.

Du point donné A, conduisons à la droite ΒΓ, donnée de position, la ligne droite ΑΔ faisant un angle donné ΑΔΓ; je dis que ΑΔ est donné de position.

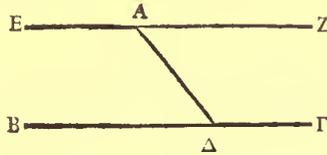
Car si cela n'est pas, le point A restant immobile, la position de ΑΔ changera, en conservant la grandeur de l'angle ΑΔΓ. Que sa position change, et qu'elle soit ΑΖ; l'angle ΑΔΓ sera égal à l'angle ΑΖΓ, le plus grand au plus petit (16. 1); ce qui est impossible; la position de ΑΔ ne changera donc point; donc ΑΔ est donné de position.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Ἦχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῆ ΒΔΓ εὐθεῖα πα-
ράλληλος ἡ ΕΑΖ¹. Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου
τοῦ Α παρὰ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν ΒΔΓ
εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ

Ducatur per punctum A ipsi ΒΔΓ rectæ pa-
rallela ΕΑΖ. Quoniam igitur per datum punctum
A contra datam positione rectam ΒΔΓ recta
linea ΕΑΖ ducta est; positione igitur est ipsa



ΕΑΖ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῆ
ΒΔΓ², καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΔΑ· ἴση ἄρα
ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΑΔ γωνία τῆ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία³.
Δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ
ΕΑΔ. Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖα τῆ
ΕΑΖ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Α,
εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιούσα
γωνίαν τὴν ὑπὸ⁴ ΕΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

ΕΑΖ. Et quoniam parallela est ipsa ΕΑΖ ipsi
ΒΔΓ, et in illas incidit ipsa ΔΑ; æqualis igitur
est ΕΑΔ angulus angulo ΑΔΓ. Datus autem
ipse ΑΔΓ; datus igitur et ipse ΕΑΔ. Quoniam
igitur ad datam positione rectam ΕΑΖ, et punc-
tum Α in cā datum, recta linea ΑΔ ducta
est, datum faciens angulum ΕΑΔ; positione
igitur est ipsa ΑΔ.

AUTREMENT.

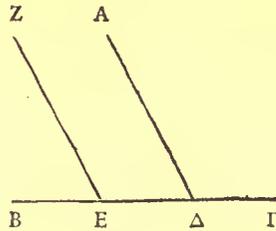
Par le point A, menons la droite ΕΑΖ parallèle à ΒΔΓ (31. 1). Puisque par
le point A l'on a mené la ligne droite ΕΑΖ parallèlement à la droite ΒΔΓ donnée
de position, la droite ΕΑΖ sera donnée de position (28). Et puisque ΕΑΖ est
parallèle à ΒΔΓ, et que ΔΑ tombe sur ces droites, l'angle ΕΑΔ sera égal à l'angle
ΑΔΓ (29.) Mais l'angle ΑΔΓ est donné; l'angle ΕΑΔ est donc donné. Mais à la
droite ΕΑΖ, donnée de position, on a mené, par le point donné Α, la ligne droite
ΑΔ faisant l'angle donné ΕΑΔ; la droite ΑΔ est donc donnée de position (29).

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ δοθὲν σημείον τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῆ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἢ ΕΖ. Καὶ ἵ ἐπεὶ παράλληλός ἐστίν ἢ ΖΕ τῆ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς² ἐμπέπτωκεν ἢ ΒΕΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν

Sumatur in ΒΓ datum punctum Ε, et per Ε punctum ipsi ΑΔ parallela ducatur ΕΖ. Et quoniam parallela est ΖΕ ipsi ΑΔ, et in ipsas incidit ipsa ΒΕΔ; æqualis igitur est ΖΕΔ an-



ἢ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία τῆ ὑπὸ ΑΔΓ³ γωνία. Δοθεῖσα δὲ ἢ ὑπὸ ΑΔΓ¹. Δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ὑπὸ ΖΕΓ⁵. Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένη εὐθεία τῆ ΒΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Ε, εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἢ ΕΖ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΖΕΓ⁶. θέσει ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΖ. Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Α, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΖΕ, εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἢ ΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἢ ΑΔ.

gulus angulo ΑΔΓ. Datus autem ipse ΑΔΓ; datus igitur et ipse ΖΕΓ. Quoniam igitur ad datam positione rectam ΒΓ, et per punctum in eâ datum Ε recta linea ducta est ΕΖ, datum faciens angulum ΖΕΓ; positione igitur est ΕΖ. Quoniam igitur per datum punctum Α contra datam positione rectam ΖΕ, recta linea ducta est ΑΔ; positione igitur est ΑΔ.

A U T R E M E N T.

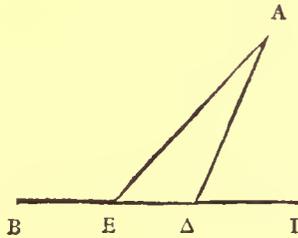
Prenons dans la droite ΒΓ le point Ε, et par le point Ε menons la droite ΕΖ parallèle à ΑΔ (31. 1). Puisque ΖΕ est parallèle à ΑΔ, et que ΒΕΔ tombe sur ces parallèles, l'angle ΖΕΔ sera égal à l'angle ΑΔΓ. Mais l'angle ΑΔΓ est donné; l'angle ΖΕΓ est donc donné. Et puisqu'à la droite ΒΓ, donnée de position, on a mené par le point donné Ε, la ligne droite ΕΖ faisant l'angle donné ΖΕΓ, la droite ΕΖ sera donnée de position (29). Mais par le point donné Α, l'on a mené la droite ΑΔ parallèlement à la ligne droite ΖΕ donnée de position; donc ΑΔ est donné de position (28).

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχρὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΕ. Καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Α, Ε σημεῖων¹· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ. Θέσει

Sumatur in ΒΓ quodlibet punctum Ε, et jungatur ΑΕ. Et quoniam datum est utrumque punctorum Α, Ε; positione igitur est ΑΕ. Posi-



δὲ καὶ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνία δοθεῖσα²· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΑΔ³ δοθεῖσα ἐστὶν· Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένη εὐθείᾳ τῇ ΕΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δεδομένῳ⁴ σημείῳ τῷ Α, εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΑΔ⁵· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

tionem autem et ΒΓ; datus igitur est ΑΕΔ angulus. Est autem et ΑΔΕ angulus datus; reliquus igitur ΕΑΔ datus est. Quoniam igitur ad datam positionem rectam ΕΑ, et per punctum in ipsâ datum Α, recta linea ΑΔ ducta est, datum faciens angulum ΕΑΔ; positione igitur est ΑΔ.

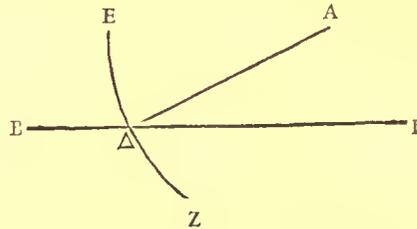
AUTREMENT.

Prenons dans ΒΓ un point quelconque Ε, et joignons ΑΕ. Puisque chacun des points Α, Ε est donné, la droite ΑΕ est donnée de position. Mais ΒΓ est donné de position; l'angle ΑΕΔ est donc donné. Mais l'angle ΑΔΕ est donné; l'angle restant ΕΑΔ est donc donné (32. 1) (4). Mais à la droite ΕΑ, donnée de position, et par un point Α donné dans cette droite, on a mené une ligne droite ΑΔ, faisant un angle donné ΕΑΔ; la droite ΑΔ est donc donnée de position (29).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Εάν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθείαν εὐθεῖα γραμμὴ προσβληθῆ̃ δεδομένην τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ τῆ̃ θέσει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α̃ ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ', δεδομένην τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ τῆ̃ θέσει δέδοται.



Κέντρον γὰρ τῷ Α̃, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΔΖ. Θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΕΔΖ κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ Α̃ κέντρον τῆ̃ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρον ἡ ΑΔ τῷ μεγέθει. Θέσει δὲ καὶ ἡ ΒΓ εὐθεῖα. Εάν δὲ δύο γραμμαὶ τῆ̃ θέσει δεδομέναι τέμνουσιν ἀλλήλας, δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνωσιν ἀλλήλας· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ Α̃ δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

Si a dato puncto ad datam positione rectam recta linea data magnitudine, producat, ea data est et positione.

Etenim a dato puncto A ad datam positione rectam ΒΓ recta linea ducatur ΑΔ data magnitudine; dico eam et positione datam esse.

Centro enim A, intervallo autem ΑΔ, circulus describatur ΕΔΖ. Positione igitur est ΕΔΖ circulus, datum enim est ejus centrum A positione, et ipsa ΑΔ ex centro magnitudine. Positione autem et ΒΓ recta. Si autem duæ lineæ positione datæ sese secant, datum est punctum in quo sese secant; datum igitur est ipsum Δ. Est autem et ipsum A datum; positione igitur est ipsa ΑΔ.

PROPOSITION XXXI.

Si d'un point donné, on mène une ligne droite donnée de grandeur à une droite donnée de position, cette droite sera donnée de position.

Du point donné A, menons la ligne droite ΑΔ donnée de grandeur à la droite ΒΓ donnée de position; je dis que cette droite est donnée de position.

Car du centre A, et de la distance ΑΔ, décrivons le cercle ΕΔΖ; le cercle ΕΔΖ sera donné de position (def. 6); car son centre A est donné de position, et son rayon ΑΔ est donné de grandeur. Et puisque la droite ΒΓ est donnée de position, et que, lorsque deux lignes données de position se coupent, le point où elles se coupent est donné (25), le point Δ sera donné; donc ΑΔ est donné de position (26).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

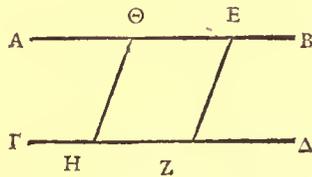
PROPOSITIO XXXII.

Εάν εἰς παραλλήλους τῆ θήσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ δεδομένας ποιούσα γωνίας, δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῶ μεγέθει.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῆ θήσει δεδομένας εὐθείας τὰς AB, ΓΔ, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ EZ, δεδομένας ποιούσα γωνίας τὰς ὑπὸ BEZ, EZΔ· λέγω ὅτι δέδοται ἡ EZ τῶ μεγέθει.

Si in parallelas positione datas rectas, recta linea ducatur, datos faciens angulos, data est ducta magnitudine.

Etenim in parallelas positione datas rectas AB, ΓΔ, recta linea ducatur EZ, datos faciens angulos BEZ, EZΔ; dico datam esse ipsam EZ magnitudine.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΓΔ δοθὲν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῆ EZ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ. Καὶ ἔπει παραλλήλος ἐστὶν ἡ ΗΘ τῆ EZ, καὶ εἰς αὐτάς εὐθεῖα ἐμπίπτωκεν ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ EZΔ τῆ ὑπὸ ΘΗΔ. Δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ EZΔ²· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΘΗΔ. Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένη εὐθεῖα τῆ ΓΔ, καὶ τῶ πρὸς

Sumatur enim in ΓΔ datum punctum H, et per punctum ipsi EZ² parallela ducatur ΗΘ. Et quoniam parallela est ΗΘ ipsi EZ, et in illas recta incidit ΓΔ; æqualis igitur est EZΔ ipsi ΘΗΔ. Datus autem ipse EZΔ; datus igitur et ipse ΘΗΔ. Quoniam igitur ad datam positione rectam ΓΔ, et per punctum in eâ datum H, recta

PROPOSITION XXXII.

Si, des droites parallèles données de position, on mène une ligne droite faisant des angles donnés, la droite menée est donnée de grandeur.

Entre les droites parallèles AB, ΓΔ, données de position, menons la ligne droite EZ, faisant les angles donnés BEZ, EZΔ; je dis que la droite EZ est donnée de grandeur.

Car dans la droite ΓΔ, prenons un point donné H, et par le point H menons la droite ΗΘ parallèle à EZ (31. 1). Puisque ΗΘ est parallèle à EZ, et que la droite ΓΔ tombe sur ces parallèles, l'angle EZΔ sera égal à l'angle ΘΗΔ (29. 1). Mais l'angle EZΔ est donné; l'angle ΘΗΔ est donc donné. Et puisque l'on a mené à la droite ΓΔ donnée de position, par le point H donné dans cette droite, la ligne

αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Η, εὐθείᾳ γραμμῇ ἤκται ἢ ΗΘ, δεδομένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΘΗΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἢ ΗΘ. Θέσει δὲ καὶ ἢ³ ΑΒ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. Ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθὲν· δοθειῖσα ἄρα ἐστὶν ἢ ΗΘ τῷ μεγέθει. Καὶ ἐστὶν ἴση τῇ ΕΖ· δοθειῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΕΖ τῷ μεγέθει.

linea ΗΘ ducta est, datum faciens angulum ΘΗΖ; positione igitur est ΗΘ. Positione autem et ΑΒ; datum igitur est Θ punctum. Est autem et ipsum Η datum; data igitur est ΗΘ magnitudine. Et est ipsa æqualis ipsi ΕΖ; data igitur est et ΕΖ magnitudine.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐάν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεία γραμμὴ ἀχθῆ, δεδομένη τῷ μεγέθει· δεδομένας ποιήσει γωνίας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ; ΓΔ εὐθεία γραμμὴ ἤχθῃ ἢ ΕΖ, δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι δεδομένας ποιήσει γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΒΕΖ, ΕΖΔ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθὲν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθῃ ἢ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ΖΕ τῇ ΗΘ. Δοθειῖσα δὲ ΕΖ τῷ μεγέθει.

PROPOSITIO XXXIII.

Si in parallelas positione datas rectas recta linea ducatur, data magnitudine, ea datos faciet angulos.

Etenim in parallelas positione datas rectas ΑΒ, ΓΔ recta linea ducatur ΕΖ, data magnitudine; dico datos ipsam facere angulos ΒΕΖ, ΕΖΔ.

Sumatur enim in ΑΒ datum punctum Η, et per punctum Η ipsi ΕΖ parallela ducatur ΗΘ; æqualis igitur est ΖΕ ipsi ΗΘ. Data autem ΕΖ

droite ΗΘ, faisant l'angle donné ΘΗΖ, la droite ΗΘ sera donnée de position (29). Mais ΑΒ est donné de position; le point Θ est donc donné (25). Mais le point Η est donné; la droite ΗΘ est donc donnée de grandeur (26). Mais cette droite est égale à ΕΖ (34. 1); la droite ΕΖ est donc donnée de grandeur (déf. 1).

PROPOSITION XXXIII.

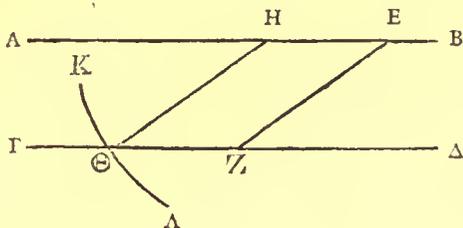
Si, entre deux droites parallèles, données de position, on mène une droite donnée de grandeur, cette droite fera les angles donnés.

Entre les droites parallèles ΑΒ, ΓΔ, données de position, menons la droite ΕΖ donnée de grandeur; je dis que cette droite fait des angles donnés ΒΕΖ, ΕΖΔ.

Car dans la droite donnée ΑΒ prenons un point donné Η, et par le point Η menons ΗΘ parallèle à ΕΖ (31. 1); la droite ΖΕ sera égale à ΗΘ (34. 1). Mais

γέθει· δοθείσα ἄρα καὶ ἡ $H\Theta$ τῷ μεγέθει². Καὶ ἔστι
τὸ H δόθεν· ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ H , διαστήματι
δὲ τῷ $H\Theta$, κύκλος γραφόμενος ἔσται τῇ θήσει.

magnitudine; data igitur et $H\Theta$ magnitudine.
Et est ipsum H datum; ergo centro quidem
 H , intervallo autem $H\Theta$, circulus descriptus



Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ $K\Theta\Lambda$. θήσει ἄρα ἔστιν ὁ
 $K\Theta\Lambda$. θήσει δὲ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ · δόθεν ἄρα ἔστι τὸ Θ
σημεῖον. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ H δόθεν· θήσει ἄρα ἔστιν
ἡ $H\Theta$. θήσει δὲ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ · δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ
ὑπὸ $H\Theta\Delta$ γωνία. Καὶ ἴσται τῇ ὑπὸ $EZ\Delta$ ἴση·
δοθείσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $EZ\Delta$ · καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ
ὑπὸ ZEB δοθείσα ἐστὶν.

erit positione. Describatur, et sit $K\Theta\Lambda$; posi-
tione igitur est circulus $K\Theta\Lambda$. positione autem
et ipsa $\Gamma\Delta$; datum igitur est Θ punctum. Est au-
tem et ipsum H datum; positione igitur est
ipsa $H\Theta$. Positione autem et ipsa $\Gamma\Delta$; datus igitur
est $H\Theta\Delta$ angulus. Et est ipsi $EZ\Delta$ æqualis;
datus igitur et ipse $EZ\Delta$; et reliquus igitur ipse
 ZEB datus est.

A Λ Λ Ω Σ.

ALITER.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$ δόθεν σημεῖον τὸ H , καὶ
κείσθω τῇ EZ ἴση ἡ $H\Delta$, καὶ κέντρον¹ μὲν τῷ H ,

Sumatur in ipsâ $\Gamma\Delta$ datum punctum H , et po-
natur ipsi EZ æqualis $H\Delta$, et centro quidem H ,

la droite EZ est donnée de grandeur; la droite $H\Theta$ est donc donnée de grandeur. Mais le point H est donné; le cercle décrit du point H , et de la distance $H\Theta$ est donc donné de position (déf. 6). Decrivons ce cercle, et que ce cercle soit $K\Theta\Lambda$; le cercle $K\Theta\Lambda$ sera donné de position. Mais $\Gamma\Delta$ est donné de position; le point Θ est donc donné (25). Mais le point H est donné; donc $H\Theta$ est donné de position (26). Mais $\Gamma\Delta$ est donné de position; l'angle $H\Theta\Delta$ est donc donné. Mais cet angle est égal à l'angle $EZ\Delta$ (29. 1); l'angle $EZ\Delta$ est donc donné (32. 1) (4); l'angle restant ZEB est donc donné.

AUTREMENT.

Dans $\Gamma\Delta$ prenons un point donné H ; faisons $H\Delta$ égal à EZ , et du centre H , et

ὕπὸς Θ HZ δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ HZ Θ ὥστε καὶ ἡ ἐφεξῆς ἢ ὑπὸ HZE δοθεῖσα ἐστὶ· καὶ λοιπὴ ἢ ὑπὸ ZEB δοθεῖσα ἐστὶ.

æqualis. Datus autem ipse Θ HZ; datus igitur et ipse HZ Θ ; quare et ipse deinceps HZE datus est; et reliquus ZEB datus est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

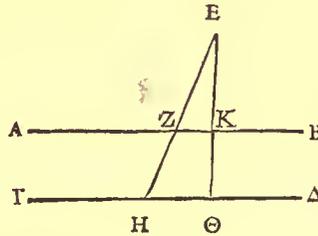
PROPOSITIO XXXIV.

Εάν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας ἀπὸ δεδομένου σημείου εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ, εἰς δεδομένον λόγον τμηθήσεται.

Si in parallelas positione datas rectas a dato puncto recta linea ducatur, illa in datam rationem secabitur.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς AB, ΓΔ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθῃ ἢ EZH· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς EZ πρὸς τὴν¹ ZH δοθείς.

Etenim in parallelas positione datas rectas AB, ΓΔ, a dato puncto E, recta linea ducatur EZH; dico rationem esse ipsius EZ ad ZH datam.



ἤχθῃ γὰρ ἀπὸ τοῦ E σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κἀπειτος ἢ EK Θ . Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου

Ducatur enim a puncto E ad ΓΔ perpendicularis EK Θ . Et quoniam a dato puncto E

Θ HZ est donné (15. 1); l'angle HZ Θ est donc donné; l'angle de suite HZE est donc donné (32. 1) (4); l'angle restant ZEB est donc donné.

PROPOSITION XXXIV.

Si d'un point donné, on mène une ligne droite à des droites parallèles données de position, cette droite sera coupée en raison donnée.

Par le point donné E, menons la ligne droite EZH aux droites AB, ΓΔ parallèles et données de position; je dis que la raison de EZ à ZH est donnée.

Car du point E, menons à ΓΔ la perpendiculaire EK Θ (12. 1). Puisque du

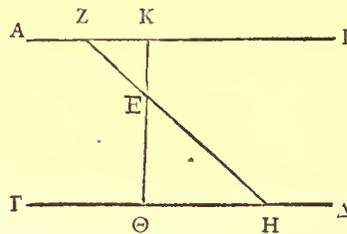
τοῦ Ε ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν ΓΔ εὐθεία γραμμὴ ἦκται ἢ ΕΘ, δεδομένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΘΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΘ. θέσει δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ· δοθέν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Κ, Θ σημείων. Ἔστι δὲ καὶ τὸ Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΕΚ, ΚΘ· λόγος ἄρα τῆς ΕΚ πρὸς τὴν ΚΘ δοθείς. Καὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΘ οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς.

ad datam positione rectam ΓΔ recta linea ducta est ΕΘ, datum faciens angulum ΕΘΗ; positione igitur est ΕΘ. Positione autem et utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ; datum igitur est utrumque punctorum Κ, Θ. Est autem et Ε datum; data igitur est utraque ipsarum ΕΚ, ΚΘ; ratio igitur ipsius ΕΚ ad ΚΘ data. Et est ut ΕΚ ad ΚΘ ita ΕΖ ad ΖΗ; ratio igitur et ipsius ΕΖ ad ΖΗ data.

ΑΛΛΩΣ.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας τὰς ΑΒ, ΓΔ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Ε, εὐθεία γραμμὴ ἦχθω ἢ ΖΕΗ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς.

Etenim in parallelas positione datas ΑΒ, ΓΔ, a dato puncto Ε, recta linea ducatur ΖΕΗ; dico rationem esse ipsius ΗΕ ad ΕΖ datam.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ καθέτως ἢ ΕΘ, καὶ ἐκτελέσθω ἐπὶ τὸ Κ. Καὶ

Ducatur enim a puncto Ε ad ipsam ΓΔ perpendicularis ΕΘ, et producatur ad Κ. Et quo-

point donné Ε, on a mené à la droite ΓΔ, donnée de position, la ligne droite ΕΘ faisant un angle donné ΕΘΗ, la droite ΕΘ sera donnée de position (30). Mais chacune des droites ΑΒ, ΓΔ est donnée de position; chacun des points Κ, Θ est donc donné (25). Mais le point Ε est donné; chacune des droites ΕΚ, ΚΘ est donc donnée (26); la raison de ΕΚ à ΚΘ est donc donnée. Mais ΕΚ est à ΚΘ comme ΕΖ est à ΖΗ (2. 6); la raison de ΕΖ à ΖΗ est donc donnée (déf. 2).

ΑΥΤΡΕΜΕΝΤ.

Par le point Ε, menons la ligne droite ΖΕΗ entre les parallèles ΑΒ, ΓΔ données de position; je dis que la raison de ΗΕ à ΕΖ est donnée..

Car du point Ε, menons la droite ΕΘ perpendiculaire à ΓΔ (12. 1), et prolon-

ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Ε ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν ΓΔ εὐθεία γραμμὴ³ ἦκται ἢ ΕΘ, δεδομένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΘΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἢ ΘΕΚ. θέσει δὲ καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΒ, ΓΔ· δεξιὴν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Κ, Θ σημείων. Ἔστι δὲ³ καὶ τὸ Ε δεξιὴν· δεξιέσσα ἄρα ἐστὶν⁴ ἑκάτερα τῶν ΘΕ, ΕΚ· λόγος ἄρα τῆς ΘΕ πρὸς τὴν⁵ ΕΚ δεθείς. Ὡς δὲ ἢ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἢ ΗΕ πρὸς τὴν⁶ ΕΖ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΗΕ πρὸς τὴν⁷ ΕΖ δεθείς.

niam a dato puncto E ad datam positione rectam ΓΔ recta linea ΕΘ ducta est, datum faciens angulum ΕΘΗ; positione igitur est ipsa ΘΕΚ. Positione autem et utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ; datum igitur est utrumque punctorum Κ, Θ. Est autem et punctum E datum; data igitur est utraque ipsarum ΘΕ, ΕΚ; ratio igitur ipsius ΘΕ ad ΕΚ data. Ut autem ΘΕ ad ΕΚ ita ΗΕ ad ΕΖ; ratio igitur et ipsius ΗΕ ad ΕΖ data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. λέ.

PROPOSITIO XXXV.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθείαν εὐθεία γραμμὴ ἀχθῆ, καὶ τμηθῆ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τῆς¹ τομῆς παρὰ τὴν θέσει δεδομένην εὐθείαν εὐθεία γραμμὴ ἀχθῆ· δέδεται ἢ ἀχθείσα τῇ θέσει.

Si a dato puncto ad datam positione rectam recta linea ducatur, et secetur in data ratione, per sectionem autem contra datam positione rectam recta linea ducatur; data est ducta positione.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν ΒΓ εὐθεία γραμμὴ ἤχθω ἢ

A dato enim puncto A ad datam positione rectam ΒΓ recta linea ducatur ΑΔ, et sec-

geons la vers κ. Puisque du point Ε, on a mené à la droite ΓΔ, donnée de position, la ligne droite ΕΘ, faisant un angle donné ΕΘΗ, la droite ΘΕΚ sera donnée de position (30). Mais chacune des droites ΑΒ, ΓΔ est donnée de position; chacun des points Κ, Θ est donc donné (25). Mais le point Ε est donné; chacune des droites ΘΕ, ΕΚ est donc donnée (26); la raison de ΘΕ à ΕΚ est donc donnée (1). Mais ΘΕ est à ΕΚ comme ΗΕ est à ΕΖ (4. 6); la raison de ΗΕ à ΕΖ est donc donnée (déf. 2).

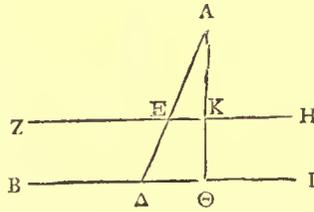
PROPOSITION XXXV.

Si d'un point donné, on mène une ligne droite à une droite donnée de position, si cette droite est coupée en raison donnée, et si, par la section, on mène une ligne droite parallèle à la droite donnée de position, la droite menée sera donnée de position.

Du point donné Α, menons une ligne droite ΑΔ à la droite ΒΓ donnée de

ΑΔ, καὶ τετμήσθω εἰς δεδομένον λόγον, τὸν τῆς ΔΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ε τῆ ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΕΗ· λέγω ὅτι θείσει ἐστὶν ἡ ΖΕΗ.

tur in datâ ratione ipsius ΔΕ ad ΕΑ, et ducatur per punctum Ε ipsi ΒΓ parallela ΖΕΗ; dico positione esse ipsam ΖΕΗ.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΘ. Καὶ² ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ τὴν³ θείσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεία γραμμὴ ἤκται ἡ ΑΘ, δεδομένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΘΔ· θείσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ. Θεσει δὲ καὶ ἡ ΒΓ· δεθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Α δεθὲν· δεθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῆ· θείσει καὶ τῶ μεγέθει· καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ εὐ- τως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ δεθείς· λόγος ἔρα τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ δεθείς⁵· συνθέντι ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δεθείς⁶. Δεθείσα δὲ ἡ ΑΘ τῶ μεγέθει· δεθείσα ἄρα καὶ ἡ ΑΚ τῶ μεγέθει⁷. Ἀλλὰ καὶ τῆ

Ducatur enim a puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΘ. Et quoniam a dato puncto Α ad datam positione rectam ΒΓ recta linea ducta est ΑΘ, datum faciens angulum ΑΘΔ; positione igitur est ipsa ΑΘ. Positione autem et ipsa ΒΓ; datum igitur est Θ punctum. Est autem et punctum Α datum; data igitur est ΑΘ positione et magnitudine. Et quoniam est ut ΑΕ ad ΕΔ ita ΑΚ ad ΚΘ, et est ratio ipsius ΑΕ ad ΕΔ data; ratio igitur ipsius ΑΚ ad ΚΘ data; componendo igitur ratio est ipsius ΑΘ ad ΑΚ data. Data autem ΑΘ magnitudine; data igitur et ΑΚ magnitudine. Sed et positione,

position; coupons cette droite dans la raison donnée de ΔΕ à ΕΑ, et par le point Ε, menons ΖΕΗ parallèle à ΒΓ; je dis que la droite ΖΕΗ est donnée de position.

Car du point Α, menons ΑΘ perpendiculaire à ΒΓ. Puisque du point Α, on a mené à la droite ΒΓ donnée de position, la ligne droite ΑΘ, faisant un angle donné ΑΘΔ; la droite ΑΘ sera donnée de position (30). Mais ΒΓ est donné de position; le point Θ est donc donné (25). Mais le point Α est donné; la droite ΑΘ est donc donnée de position et de grandeur (26). Mais ΑΕ est à ΕΔ comme ΑΚ est à ΚΘ, et la raison de ΑΕ à ΕΔ est donnée (2. 6); la raison de ΑΚ à ΚΘ est donc donnée (déf. 2); donc, par addition, la raison de ΑΘ à ΑΚ est donnée (6). Mais ΑΘ est donné de grandeur; la droite ΑΚ est donc donnée

Θέσει, καὶ ἐστὶν τὸ A δοθὲν²⁷; δοθὲν ἄρα καὶ τὸ K .
 Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ K , παρὰ
 θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν $BΓ$ εὐθεία γραμμὴ
 ἦκται ἡ ZH . θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ZH .

et est punctum A datum; datum igitur et K
 punctum. Quoniam igitur per datum punctum
 K , contra datam positione rectam $BΓ$ recta
 linea ducta est ZH ; positione igitur est ipsa ZH .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΣ΄.

PROPOSITIO XXXVI.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδο-
 μένῃν εὐθείαν εὐθεία γραμμὴ ἀχθῆ, καὶ προσ-
 τεθῆ τις αὐτῇ εὐθεία, λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν
 δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ πέρατος τῆς προστεθείσης
 παρὰ τῇ θέσει δεδομένην εὐθείαν¹ εὐθεία γραμμὴ
 ἀχθῆ· δέδοται ἡ ἀχθείσα τῇ θέσει.

Si a dato puncto ad datam positione rectam
 recta linea ducatur, et adjiciatur aliqua ipsi
 recta, rationem habens datam ad ipsam; per
 extremum autem adjunctæ contra datam posi-
 tionem rectam recta linea ducatur, data est ducta
 positione.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ A ἐπὶ θέσει
 δεδομένην εὐθείαν τὴν $BΓ$ εὐθεία γραμμὴ ἦχθω ἡ
 $ΑΔ$, καὶ προσκείσθω τῇ $ΑΔ$ ἡ $ΑΕ$ λόγον ἔχουσα
 πρὸς τὴν $ΑΔ$ δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ E τῇ $BΓ$ πα-
 ράλληλος ἦχθω ἡ ZK · λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ZK .

A dato enim puncto A ad datam positione
 rectam $BΓ$ recta linea ducatur $ΑΔ$, et adj-
 ciatur ipsi $ΑΔ$ ipsa $ΑΕ$ rationem habens ad
 $ΑΔ$ datam, per punctum autem E ipsi $BΓ$ paral-
 lela ducatur ZK ; dico positione esse ipsam ZK .

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ² τὴν $BΓ$ κάθετος

Ducatur enim a puncto A ad $BΓ$ perpendi-

de grandeur (2). Mais elle est donnée de position, et le point A est aussi donné; le point K est donc donné (27). Mais par le point donné K , on a mené la ligne droite ZH parallèle à la droite $BΓ$ donnée de position; ZH est donc donné de position (28).

PROPOSITION XXXVI.

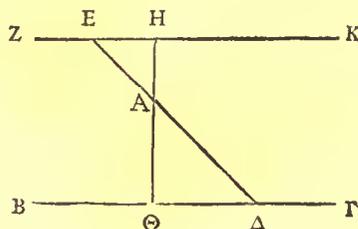
Si d'un point donné, on mène une ligne droite à une droite donnée de position, si on lui ajoute une droite qui ait une raison donnée avec elle, et si, par l'extrémité de la droite ajoutée, on mène une ligne droite parallèle à la droite donnée de position, la droite menée sera donnée de position.

Car du point donné A , menons la ligne droite $ΑΔ$ à la droite $BΓ$ donnée de position; ajoutons à $ΑΔ$ une droite $ΑΕ$, qui ait avec $ΑΔ$ une raison donnée, et, par le point E , menons la droite ZK parallèle à $BΓ$; je dis que ZK est donné de position.

Car du point A , menons la droite $ΑΘ$ perpendiculaire à $BΓ$, et prolongeons cette

ἡ $\text{A}\Theta$, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ H . Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ
 δεδομένου σημείου τοῦ A ἐπὶ Θ εἶσι δεδομένην εὐ-
 θεϊαν τὴν $\text{B}\Gamma$ εὐθεΐα γραμμὴ ἦκται ἡ $\text{A}\Theta$, δεδο-

cularis $\text{A}\Theta$, et producatum ad punctum H . Et
 quoniam a dato puncto A ad datam positione
 rectam $\text{B}\Gamma$ recta linea ducta est $\text{A}\Theta$, datum



μένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ $\text{A}\Theta\Gamma$. Θ εἶσι ἄρα
 ἐστὶν ἡ $\Theta\text{A}\text{H}$. Θ εἶσι δὲ καὶ ἡ $\text{B}\Gamma$ δοθὲν ἄρα ἐστὶ
 τὸ Θ σημεῖον. Ἔστι δὲ καὶ τὸ A δοθὲν· δοθεῖσα
 ἄρα ἐστὶν ἡ $\text{A}\Theta$. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΔA πρὸς
 τὴν AE δοθείς, ὡς δὲ ἡ ΔA πρὸς τὴν AE οὕτως
 ἡ ΘA πρὸς τὴν AH · λόγος ἄρα καὶ τῆς ΘA , πρὸς
 τὴν AH δοθείς⁴. Δοθεῖσαι δὲ ἡ ΘA · δοθεῖσα ἄρα καὶ
 ἡ AH . Ἀλλὰ καὶ τῆ Θ εἶσι, καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ A .
 δοθὲν ἄρα καὶ τὸ H . Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου ση-
 μεῖου τοῦ H παρὰ Θ εἶσι δεδομένην εὐθεΐαν τὴν
 $\text{B}\Gamma$ εὐθεΐα γραμμὴ ἦκται ἡ ZHK · Θ εἶσι ἄρα ἐστὶν
 ἡ ZHK .

faciens angulum $\text{A}\Theta\Gamma$; positione igitur est ipsa
 $\Theta\text{A}\text{H}$. Positione autem et ipsa $\text{B}\Gamma$; datum
 igitur est Θ punctum. Est autem et punctum
 A datum; data igitur est ipsa $\text{A}\Theta$. Et quo-
 niam ratio est ipsius ΔA ad AE data, ut au-
 tem ΔA ad AE ita ΘA ad AH ; ratio igitur et
 ipsius ΘA ad AH data. Data autem ΘA ; data
 igitur et ipsa AH . Sed et positione, et est da-
 tum punctum A ; datum igitur et punctum H .
 Quoniam igitur per datum punctum H contra
 datam positione rectam $\text{B}\Gamma$ recta linea ducta
 est ZHK ; positione igitur est ipsa ZHK .

droite vers le point H . Puisque du point donné A , on a mené à la droite $\text{B}\Gamma$ donnée de position, la ligne droite $\text{A}\Theta$, faisant l'angle donné $\text{A}\Theta\Gamma$; la droite $\Theta\text{A}\text{H}$ sera donnée de position (30). Mais $\text{B}\Gamma$ est donné de position; le point Θ est donc donné (25). Mais le point A est donné; la droite $\text{A}\Theta$ est donc donnée (26). Mais la raison de ΔA à AE est donnée, et ΔA est à AE comme ΘA est à AH (4. 6); la raison de ΘA à AH est donc donnée (déf. 2). Mais ΘA est donné; la droite AH est donc donnée (déf. 2). Mais elle est donnée de position, et le point A est aussi donné; le point H est donc donné (27). Mais par le point donné H , on a mené la ligne droite ZHK parallèle à la droite $\text{B}\Gamma$ donnée de position; la droite ZHK est donc donnée de position (28).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ΄.

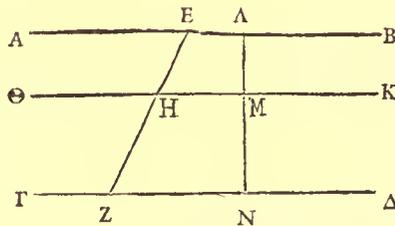
PROPOSITIO XXXVII.

Εάν εἰς παραλλήλους τῆς θέσεως δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ, καὶ τμηθῆ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τῆς τομῆς παρὰ τὰς τῆς θέσεως δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ· δίδεται ἡ ἀχθεῖσα τῆς θέσεως.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῆς θέσεως δεδομένας εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ EZ, καὶ τεμηθῆτω εἰς δεδομένον λόγον τὴν τῆς ZH πρὸς τὴν HE, καὶ διήχθω διὰ τοῦ H ὅποτέρᾳ τῶν AB, ΓΔ παράλληλος ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Si in parallelas positione datas rectas recta linea ducatur, et ipsa secetur in datâ ratione, per sectionem vero contra datas positione rectas recta linea ducatur; data est ducta positione.

In parallelas enim positione datas rectas AB, ΓΔ recta linea ducatur EZ, et ipsa secetur in datâ ratione ipsius ZH ad HE, et ducatur per punctum H utrilibet ipsarum AB, ΓΔ parallela ΘΚ; dico positione esse ipsam ΘΚ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς AB δοθὲν σημεῖον τὸ Λ, καὶ κατήχθω ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος η

Sumatur enim in AB datum punctum Λ, et ducatur a puncto Λ ad ΓΔ perpendicularis AN.

PROPOSITION XXXVII.

Si, entre des droites parallèles données de position, on mène une ligne droite; si l'on coupe cette droite en raison donnée, et si, par la section, on mène une ligne droite parallèle aux droites données de position, la droite menée est donnée de position.

Entre les parallèles AB, ΓΔ données de position, menons la ligne droite EZ, que cette droite soit coupée dans la raison donnée de ZH à HE, et par le point H menons ΘΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, ΓΔ; je dis que ΘΚ est donné de position.

Car dans la droite AB, prenons un point donné Λ, et du point Λ, menons AN

ΑΝ. Ἐπεὶ οὖν³ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ
 θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν ΓΔ, εὐθεία γραμμὴ
 ἤνται ἡ ΑΝ, δεδομένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ⁴
 ΑΝΔ. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ. θέσει δὲ καὶ
 ἡ ΓΔ. δοθὲν ἄρα τὸ Ν σημεῖον. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Α
 δοθὲν. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ. Καὶ ἐπεὶ λόγος
 ἐστὶ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ δοθείς, ὡς δὲ ἡ ΖΗ
 πρὸς τὴν ΗΕ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΜΑ. λόγος
 ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς τὴν⁵ ΜΑ δοθείς. Ὡστε καὶ
 τῆς ΝΑ πρὸς τὴν ΑΜ ἐστὶ δοθείς λόγος⁶. Δοθεῖσα δὲ
 ἡ ΝΑ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΜ. Ἀλλὰ καὶ τῆ⁷ θέσει,
 καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ Α. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ. Ἐπεὶ
 οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Μ παρά θέσει δε-
 δομένην εὐθείαν τὴν ΓΔ εὐθεία γραμμὴ ἤνται ἡ
 ΘΚ. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Quoniam igitur a dato puncto Α ad datam
 positione rectam ΓΔ recta linea ducta est
 ΑΝ, datum faciens angulum ΑΝΔ; positione
 igitur est ΑΝ. Positione autem et ΓΔ; datum
 igitur Ν punctum. Est autem et punctum Α
 datum; data igitur est ΑΝ. Et quoniam ratio
 est ipsius ΖΗ ad ΗΕ data, ut autem ΖΗ ad
 ΗΕ ita ΝΜ ad ΜΑ; ratio igitur et ipsius ΝΜ
 ad ΜΑ data. Quare et ipsius ΝΑ ad ΑΜ est data
 ratio. Data autem ipsa ΝΑ; data igitur et ΑΜ.
 Sed et positione, et est datum Α punctum;
 datum igitur et Μ punctum. Quoniam igitur
 per datum punctum Μ contra datam positione
 rectam ΓΔ recta linea ducta est ΘΚ; positione
 igitur est ipsa ΘΚ.

perpendiculaire à ΓΔ. Puisque du point donné Α, on a mené à la droite ΓΔ
 donnée de position, la droite ΑΝ faisant un angle donné ΑΝΔ, la droite ΑΝ sera
 donnée de position (30). Mais ΓΔ est donné de position, le point Ν est donc
 donné (25). Mais le point Α est donné; donc ΑΝ est donné (26). Mais la raison
 de ΖΗ à ΗΕ est donnée, et ΖΗ est à ΗΕ comme ΝΜ est à ΜΑ (2. 6); la raison de ΝΜ
 à ΜΑ est donc donnée (2); la raison de ΝΑ à ΑΜ est donc donnée (6). Mais
 ΝΑ est donné; la droite ΑΜ est donc donnée (2). Mais elle est donnée de po-
 sition, et le point Α est donné; le point Μ est donc donné (26). Mais, par le
 point donné Μ, on a mené la ligne droite ΘΚ parallèle à la droite ΓΔ donnée de
 position; ΘΚ est donc donné de position (28).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

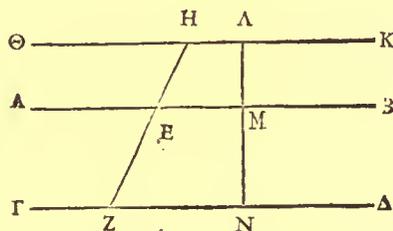
PROPOSITIO XXXVIII.

Εάν εἰς παραλλήλους τῆς δίσει δεδομένας εὐ-
θείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ, καὶ προστεθῆ τις αὐτῆ
εὐθεῖα λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένην, διὰ
δὲ τοῦ πέρατος τῆς προστεθείσης παρὰ τὰς τῆς
δίσει δεδομένας παραλλήλους¹ εὐθεῖα γραμμὴ
ἀχθῆ· δέδοται ἢ ἀχθεῖσα τῆς δίσει.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῆς δίσει δεδομένας εὐ-
θείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἢ EZ, καὶ
προσεκείσθω τις αὐτῆ εὐθεῖα ἢ EH λόγον ἔχουσα
πρὸς τὴν EZ δεδομένην, διὰ δὲ τοῦ H ὁποτέρω
τῶν AB, ΓΔ εὐθειῶν εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος²
ἤχθω ἢ ΘΚ· λέγω ὅτι δίσει ἐστὶν ἢ ΘΚ.

Si in parallelas positione datas rectas recta
linea ducatur, et adjiciatur aliqua ipsi recta ra-
tionem habens datam ad ipsam, per extremum
vero adjunctæ contra datas positione parallelas
recta linea ducatur, data est ducta positione.

In parallelas enim positione datas rectas AB,
ΓΔ recta linea ducatur EZ, et adjiciatur aliqua
ipsi recta EH rationem habens datam ad EZ
datam, per H autem punctum utrilibet reclarum
AB, ΓΔ recta linea parallela ducatur ΘΚ;
dico positione esse ipsam ΘΚ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς AB δοθέν σημείον τὸ M,
καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ M ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος εὐθεῖα

Sumatur enim in ipsâ AB datum punctum
M, et a puncto M ad ΓΔ perpendicularis recta

PROPOSITION XXXVIII.

Si, entre des droites parallèles et données de position, on mène une ligne droite, si l'on ajoute à cette droite une droite qui ait avec elle une raison donnée, et si, par l'extrémité de l'ajoutée, on mène une droite parallèle aux parallèles données de position, la droite menée sera donnée de position.

Entre les droites AB, ΓΔ, parallèles et donuées de position, menons la ligne droite EZ, ajoutons-lui une droite EH qui ait avec EZ une raison donnée, et par le point H, menons la ligne droite ΘΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, ΓΔ; je dis que la droite ΘΚ est donnée de position.

Car dans la droite AB, prenons un point donné M, et du point M, menons la ligne

γραμμὴ ἢ MN , καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Λ . Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου³ τοῦ M , ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν $\Gamma\Delta$, εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἢ MN , δεδομένην ποιῶσα γωνίαν τὴν ὑπὸ $MN\Delta$. θέσει ἄρα ἐστὶν ἢ MN . θέσει δὲ καὶ ἢ $\Gamma\Delta$. δεθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ N σημεῖον. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ M δεθὲν. δεθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἢ MN . Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ZE πρὸς τὴν EH δεθείς, ὡς δὲ ἢ ZE πρὸς τὴν EH οὕτως ἢ NM πρὸς τὴν MA . λόγος ἄρα καὶ τῆς NM πρὸς τὴν MA δεθείς. δεθεῖσα δὲ ἢ MN . δεθεῖσα ἄρα καὶ ἢ MA . Ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἐστὶ τὸ N δεθὲν. δεθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ . Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Λ παρὰ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν AB εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἢ ΘK . θέσει ἄρα ἐστὶν ἢ ΘK .

linea ducatur MN , et producatum ad Λ punctum. Quoniam igitur a dato puncto M ad datam positione rectam $\Gamma\Delta$, recta linea ducta est MN , datum faciens angulum $MN\Delta$; positione igitur est MN . Positione autem et $\Gamma\Delta$; datum igitur est N punctum. Est autem et punctum M datum; data igitur est MN . Et quoniam ratio est ipsius ZE ad EH data, ut autem ZE ad EH ita NM ad MA ; ratio igitur et ipsius NM ad MA data. Data autem MN ; data igitur et MA . Sed et positione, et est punctum N datum; datum igitur et Λ punctum. Quoniam igitur per datum punctum Λ contra datam positione rectam AB recta linea ducta est ΘK ; positione igitur est ΘK .

droite MN perpendiculaire à $\Gamma\Delta$ (12. 1), et prolongeons-la vers Λ . Puisque du point donné M on a mené la ligne droite MN perpendiculaire à la droite $\Gamma\Delta$ donnée de position, et faisant un angle donné $MN\Delta$, la droite MN sera donnée de position (28). Mais $\Gamma\Delta$ est donné de position; le point N est donc donné (25). Mais le point M est donné; donc MN est donné (26). Mais la raison de ZE à EH est donnée, et ZE est à EH comme NM est à MA (2. 6); donc la raison de NM à MA est donnée. Mais MN est donné; la droite MA est donc donnée (2). Mais cette droite est donnée de position, et le point N est donné; le point Λ est donc donné (26). Mais la ligne droite ΘK a été menée par le point donné Λ parallèlement à la droite AB donnée de position; ΘK est donc donné de position (28).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

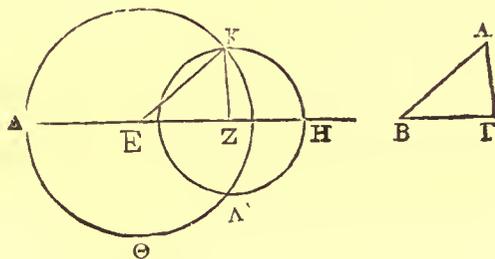
PROPOSITIO XXXIX.

Εάν τριγώνου ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ἢ τῶ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῶ εἶδει.

Τριγώνου γάρ τοῦ ΑΒΓ ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ἔστω τῶ μεγέθει· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῶ εἶδει.

Si trianguli unumquodque laterum datum sit magnitudine, datum est triangulum specie.

Trianguli enim ΑΒΓ unumquodque laterum datum sit magnitudine; dico ΑΒΓ triangulum datum esse specie.



Εκκείσθω γάρ ἡ εὐθεῖα τῆ ἴσει δεδομένη ἢ ΔΗ', πεπερατωμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ λοιπόν· καὶ κείσθω τῆ μὲν ΑΒ ἴση ἢ ΔΕ. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα καὶ² ἡ ΔΕ. Ἀλλὰ καὶ τῆ ἴσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. Τῆ δὲ ΒΓ κείσθω³ ἴση ἢ ΕΖ. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. Ἀλλὰ καὶ τῆ ἴσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. Πάλιν,

Exponatur enim recta ΔΗ positione data, finita quidem ad punctum Δ, infinita vero ad reliquum; et ponatur ipsi quidem ΑΒ æqualis ΔΕ. Data autem ΑΒ; data igitur et ΔΕ. Sed et positione, et est datum punctum Δ; datum igitur et punctum Ε. Ipsi autem ΒΓ ponatur æqualis ΕΖ. Data autem ΒΓ; data igitur et ΕΖ. Sed et positione, et est datum punctum Ε; datum

PROPOSITION XXXIX.

Si chacun des côtés d'un triangle est donné de grandeur, le triangle est donné d'espèce.

Que chacun des côtés du triangle ΑΒΓ soit donné de grandeur; je dis que le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce.

Car que la droite ΔΗ soit donnée de position; qu'elle soit finie en Δ, et infinie de l'autre côté; faisons ΔΕ égal à ΑΒ (3. 1). Puisque ΑΒ est donné, la droite ΔΕ est donnée. Mais cette droite est donnée de position, et le point Δ est donné; donc le point Ε est donné (27). Faisons ΕΖ égal à ΒΓ. Puisque ΒΓ est donné, ΕΖ est aussi donné. Mais cette droite est donnée de position, et le point Ε est

κείσθω τῆς $ΑΓ$ ἴση ἢ ZH . Δοθεῖσα δὲ ἡ $ΑΓ$ · δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ZH . Ἀλλὰ καὶ τῆς $Θέσει$, καὶ ἔστι δοθέν⁵ τὸ Z · δοθέν ἄρα καὶ τὸ H . Καὶ κέντρον μὲν τῶν E , διαστήματι δὲ τῶν $ΕΔ$, κύκλος γεγράφθω ὁ $ΔΚΘ$ · $Θέσει$ ἄρα ἔστιν ὁ $ΔΚΘ$. Πάλιν, κέντρον μὲν τῶν Z , διαστήματι δὲ τῶν ZH κύκλος γεγράφθω ὁ $ΗΚΛ$ · $Θέσει$ ἄρα ἔστιν ὁ $ΗΚΛ$. $Θέσει$ δὲ καὶ ὁ $ΔΚΘ$ κύκλος· δοθέν ἄρα ἔστι καὶ τὸ K σημείον. Ἔστι δὲ καὶ ἐκάτερον τῶν E, Z δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἐκάστη τῶν KE, EZ, ZK τῆς $Θέσει$ καὶ τῶν μεγέθει· δίδεται ἄρα τὸ KEZ τρίγωνον τῶν εἶδει. Καὶ ἔστιν ἴσον τε καὶ ὅμοιον τῶν $ΑΒΓ$ · δίδεται ἄρα τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῶν εἶδει.

igitur et Z punctum. Rursus, ponatur ipsi $ΑΓ$ æqualis ZH . Data autem $ΑΓ$; data igitur et ZH . Sed et positione, et est datum punctum Z ; datum igitur et punctum H . Et centro quidem E , intervallo autem $ΕΔ$, circulus describatur $ΔΚΘ$; positione igitur est $ΔΚΘ$ circulus. Rursus, centro quidem Z , intervallo autem ZH circulus describatur $ΗΚΛ$; positione igitur est $ΗΚΛ$ circulus. Positione autem et $ΔΚΘ$ circulus; datum igitur et K punctum. Est autem et utrumque punctorum E, Z datum; data igitur est unaquæque ipsarum KE, EZ, ZK positione et magnitudine; datum igitur KEZ triangulum speciei. Et est et æquale et simile ipsi $ΑΒΓ$; datum est igitur $ΑΒΓ$ triangulum speciei.

aussi donné; le point Z est donc donné. De plus faisons ZH égal à $ΑΓ$. Puisque $ΑΓ$ est donné, la droite ZH est donnée. Mais cette droite est donnée de position, et le point Z est donné; le point H est donc donné. Du centre E et de la distance $ΕΔ$, décrivons le cercle $ΔΚΘ$, le cercle $ΔΚΘ$ sera donné de position (déf. 6). De plus, du centre Z et de la distance ZH , décrivons le cercle $ΗΚΛ$; le cercle $ΗΚΛ$ sera donné de position. Mais le cercle $ΔΚΘ$ est donné de position; donc le point K est donné (25). Mais chacun des points E, Z est donné; donc chacune des droites KE, EZ, ZK est donnée de position et de grandeur (26); donc le triangle KEZ est donné d'espèce (déf. 5). Mais il est égal et semblable au triangle $ΑΒΓ$ (8. 1); le triangle $ΑΒΓ$ est donc donné d'espèce.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ΄.

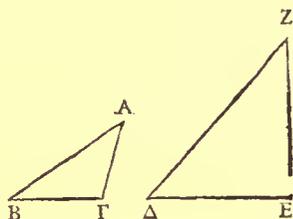
PROPOSITIO XL.

Εὰν τριγώνου ἐκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ᾖ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Τριγώνου γὰρ τοῦ $ABΓ$ ἐκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι δέδοται τὸ $ABΓ$ τρίγωνον² τῷ εἶδει.

Si trianguli unusquisque angulorum datus sit magnitudine, datum est triangulum specie.

Trianguli enim $ABΓ$ unusquisque angulorum datus sit magnitudine; dico datum esse $ABΓ$ triangulum specie.



Ἐκτίσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ $ΔΕ$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ $ΔΕ$, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς $Δ$, $Ε$, τῇ μὲν ὑπὸ $ABΓ$ ³ γωνία ἴση γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ $ΖΔΕ$, τῇ δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἴση ἡ ὑπὸ $ΖΕΔ$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$ ἴση ἐστὶ³. Δοθεῖσα δὲ ἐκάστη τῶν πρὸς τοῖς $Α$, $Β$, $Γ$ σημείοις γωνιῶν¹· δεθεῖσα ἄρα καὶ ἐκάστη τῶν πρὸς τοῖς $Ζ$, $Δ$, $Ε$. Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένη εὐθεῖα τῇ

Exponatur enim positione et magnitudine data recta $ΔΕ$, et constituatur ad $ΔΕ$, et ad puncta in ipsâ $Δ$, $Ε$, angulo quidem $ABΓ$ æqualis angulus rectilineus $ΖΔΕ$, ipsi vero $ΑΓΒ$ æqualis ipse $ΖΕΔ$; reliquus igitur $ΒΑΓ$ reliquo $ΔΖΕ$ æqualis est. Datus autem unusquisque angulorum ad puncta $Α$, $Β$, $Γ$; datus igitur et unusquisque angulorum ad $Ζ$, $Δ$, $Ε$ puncta. Quoniam igitur ad datam positione rectam $ΔΕ$, et

PROPOSITION XL.

Si chacun des angles d'un triangle est donné de grandeur, le triangle est donné d'espèce.

Que chacun des angles du triangle $ABΓ$ soit donné de grandeur; je dis que le triangle est donné d'espèce.

Car que $ΔΕ$ soit une droite donnée de position et de grandeur. Sur $ΔΕ$, et aux points $Δ$, $Ε$ de cette droite, faisons l'angle rectiligne $ΖΔΕ$ égal à l'angle $ABΓ$, et l'angle $ΖΕΔ$ égal à l'angle $ΑΓΒ$ (25. 1); l'angle restant $ΒΑΓ$ sera égal à l'angle restant $ΔΖΕ$ (32. 1). Mais chacun des angles aux points $Α$, $Β$, $Γ$ est donné; chacun des angles aux points $Ζ$, $Δ$, $Ε$ est donc donné. Mais on a mené à la droite

ΔE , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Δ , εὐθείᾳ γραμμῇ ἦκται ἡ ΔZ , δεδομένην ποιῶσα γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Δ · θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔZ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ EZ θέσει ἐστὶν· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Z σημεῖον. Ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ , E δοθὲν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔE , ΔZ , EZ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δίδεται ἄρα τὸ ΔZE τρίγωνον τῷ εἶδει, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ ABG τριγάνῳ· δίδεται ἄρα καὶ τὸ ABG τρίγωνον τῷ εἶδει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνιῶν δεδομένην, περὶ δὲ τὴν δεδομένην γωνίαν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσιν δεδομένον· δίδεται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἐχέτω γὰρ τρίγωνον τὸ ABG μίαν γωνίαν² δεδομένην τὴν ὑπὸ BAG , περὶ δὲ τὴν ὑπὸ BAG αἱ πλευραὶ αἱ BA , AG πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ³ ABG τρίγωνον δίδεται τῷ εἶδει.

ΔE donnée de position, et au point donné Δ une ligne droite ΔZ , faisant un angle donné au point Δ ; ΔZ est donc donné de position (29); mais EZ est donnée de position, par la même raison; donc le point Z est donné (25). Mais chacun des points Δ , E est donné; chacune des droites ΔE , ΔZ , EZ est donc donnée de position et de grandeur (26); le triangle ΔZE est donc donné d'espèce (39); mais il est semblable au triangle ABG (4.6); le triangle ABG est donc donné d'espèce.

PROPOSITION XLI.

Si un triangle a un angle donné, et si les côtés autour de l'angle donné ont entre eux une raison donnée, le triangle est donné d'espèce.

Que le triangle ABG ait un angle BAG donné, et que les côtés BA , AG autour de l'angle BAG ayent entre eux une raison donnée; je dis que le triangle ABG est donné d'espèce.

ad punctum in eâ datum Δ , recta linea ducta est ΔZ , datum faciens angulum ad Δ punctum; positione igitur est ΔZ . Propter eadem utique et ipsa EZ positione est; datum igitur est Z punctum. Est autem unumquodque punctorum Δ , E datum; data igitur est unaquæque ipsarum ΔE , ΔZ , EZ positione et magnitudine; datum est igitur ΔZE triangulum specie, et est simile triangulo ABG ; datum est igitur et ABG triangulum specie.

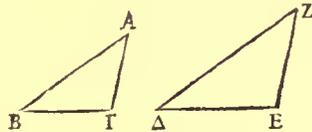
PROPOSITIO XLI.

Si triangulum unum habeat angulum datum, circa datum autem angulum latera inter se rationem habeant datam, datum est triangulum specie.

Habeat enim triangulum ABG unum angulum datum BAG , circa angulum autem BAG latera BA , AG inter se rationem habeant datam; dico ABG triangulum datum esse specie.

Εκκείσθω γάρ τῆς θ θέσει καὶ τῶν μεγέθει δεδομένην εὐθείαν ἢ ΔZ , καὶ συνεστάτω πρὸς τῆς ΔZ εὐθείας, καὶ τῶν πρὸς αὐτῆς σημείω τῶν Z , τῆς ὑπὸ BAG γωνία ἴση ἢ ὑπὸ $\Delta Z E$. Δοθεῖσα δὲ ἢ ὑπὸ BAG δοθεῖσα ἄρα καὶ ἢ ὑπὸ $\Delta Z E$. Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθείαν τῆς ΔZ , καὶ τῶν πρὸς αὐτῆς

Exponatur enim positione et magnitudine data reeta ΔZ , et constituatur ad ΔZ reectam, et ad punctum Z in eâ, angulo BAG æqualis angulus $\Delta Z E$. Datus autem BAG angulus; datus igitur et $\Delta Z E$ angulus. Quoniam igitur ad datam positione reectam ΔZ , et ad datum in eâ punctum



δεδομένω σημείω τῶν Z , εὐθεία γραμμὴ ἦται ἢ $Z E$, δεδομένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ $\Delta Z E$. θέσει ἄρα ἔστιν ἢ $Z E$. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἔστι τῆς BA πρὸς τὴν AG δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῶν γεγραμένω ὁ τῆς ΔZ πρὸς τὴν $Z E$ καὶ ἐπιζεύχθω ἢ ΔE . λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔZ πρὸς τὴν $Z E$ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἢ ΔZ δοθεῖσα ἄρα καὶ ἢ $Z E$. Ἀλλὰ καὶ τῆς θέσει, καὶ ἔστι τὸ Z δοθὲν. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ E . Ἐστι δὲ καὶ ἐκάτερον τῶν Δ, Z δοθὲν. δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἐκάστη τῶν $\Delta Z, Z E, \Delta E$ τῆς θέσει καὶ τῶν μεγέθει. δέδοται ἄρα τὸ $\Delta E Z$ τρίγωνον τῶν εἶδει.

Z , reeta linea dueta est $Z E$, datum faciens angulum $\Delta Z E$; positione igitur est $Z E$. Et quoniam ratio est ipsius BA ad AG data, eadem huius fiat ratio ipsius ΔZ ad $Z E$; et jungatur ΔE ; ratio igitur et ipsius ΔZ ad $Z E$ data. Data autem ΔZ ; data igitur et $Z E$. Sed et positione, et est punctum Z datum; datum igitur et punctum E . Est autem et utrumque punctorum Δ, Z datum; data igitur est unaquæque ipsarum $\Delta Z, Z E, \Delta E$ positione et magnitudine; datum est igitur $\Delta E Z$ triangulum specie. Et quoniam

Car soit ΔZ une droite donnée de position et de grandeur; sur la droite ΔZ et au point Z de ceste droite, construisons l'angle $\Delta Z E$ égal à l'angle BAG (25. 1). Puisque l'angle BAG est donné, l'angle $\Delta Z E$ est donné; et puisque sur la droite ΔZ , donnée de position, et au point Z de cette droite, on a mené la ligne droite $Z E$, faisant un angle donné $\Delta Z E$, la droite $Z E$ est donnée de position (29). Et puisque la raison de BA à AG est donnée, faisons en sorte que la raison de ΔZ à $Z E$ soit la même que celle-ci, et joignons ΔE , la raison de ΔZ à $Z E$ sera donnée (déf. 2). Mais ΔZ est donné; la droite $Z E$ est donc donnée. Mais cette droite est donnée de position, et le point Z est donné; le point E est donc donné (27). Mais chacun des points Δ, Z est donné; chacune des droites $\Delta Z, Z E, \Delta E$ est donc donnée de position et de grandeur (26); le triangle $\Delta E Z$ est donc donné

Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ μίαν γωνίαν
 μιᾷ γωνίᾳ ἴσιν ἔχει, τὴν ὑπὸ BAG τῇ ὑπὸ ΔZE ,
 περὶ δὲ τὰς ὑπὸ τῶν BAG , ΔZE γωνίας τὰς πλευ-
 ρὰς ἀνάλογον· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον
 τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Δέδοται δὲ τὸ ΔEZ τρίγωνον⁵
 τῷ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον
 τῷ εἶδει.

duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ unum angulum uni
 angulo æqualem habent, angulum BAG angulo
 ΔZE , circa angulos autem BAG , ΔZE angulos
 latera proportionalia; simile igitur est $AB\Gamma$
 triangulum triangulo ΔEZ . Datum est autem ΔEZ
 triangulum specie; datum est igitur et $AB\Gamma$
 triangulum specie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

PROPOSITIO XLII.

Ἐὰν τριγώνου αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον
 ἔχωσι¹ δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Τριγώνου γάρ τοῦ $AB\Gamma$ αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλή-
 λας λόγον ἔχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ $AB\Gamma$
 τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

Ἐκείσθω γὰρ δεδομένη τῷ μεγέθει εὐθεῖα ἡ
 Δ . Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς AB πρὸς τὴν² $B\Gamma$ δε-
 θεῖς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Δ πρὸς τὴν E .
 Δ θεῖται δὲ ἡ Δ · δεθεῖσα ἄρα καὶ ἡ E . Πάλιν ἐπεὶ
 λόγος ἐστὶ τῆς $B\Gamma$ πρὸς τὴν AG δεθεῖς, αὐτὸς
 αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς E πρὸς τὴν Z . Θεθεῖσα δὲ ἡ E ·

Si trianguli latera inter se rationem habeant
 datam; datum est triangulum specie.

Trianguli enim $AB\Gamma$ latera inter se rationem
 habeant datam; dico triangulum $AB\Gamma$ datum
 esse specie.

Exponatur enim data magnitudine recta Δ .
 Quoniam ratio est ipsius AB ad $B\Gamma$ data, eadem
 huic fiat ratio ipsius Δ ad E . Data autem Δ ;
 data igitur et E . Rursus quoniam ratio ipsius
 $B\Gamma$ ad AG est data, eadem huic fiat ratio ipsius
 E ad Z . Data autem E ; data igitur et Z . Et

d'espèce (39). Mais les deux triangles $AB\Gamma$, ΔEZ ont un angle donné à un angle, l'angle BAG égal à l'angle ΔZE , et les côtés autour des angles BAG , ΔZE sont proportionnels; le triangle $AB\Gamma$ est donc semblable au triangle ΔEZ (6. 6). Mais le triangle ΔZE est donné d'espèce; le triangle $AB\Gamma$ est donc aussi donné d'espèce.

PROPOSITION XLII.

Si les côtés d'un triangle ont entre eux une raison donnée, ce triangle sera donné d'espèce.

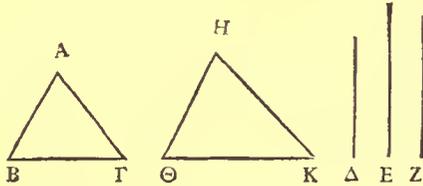
Que les côtés du triangle $AB\Gamma$ aient entre eux une raison donnée; je dis que le triangle $AB\Gamma$ est donné d'espèce.

Car soit Δ une droite donnée de grandeur. Puisque la raison de AB à $B\Gamma$ est donnée, faisons en sorte que la raison de Δ à E soit la même que celle-ci.

Puisque Δ est donné, la droite E est donnée (2). De plus, puisque la raison de $B\Gamma$ à AG est donnée, faisons en sorte que la raison de E à Z soit la même

δοθείσα ἄρα καὶ ἡ Ζ. Καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς Δ, Ε, Ζ, ἂν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβάνομαι, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΗΘΚ ὥστε

ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus datis Δ, Ε, Ζ, quarum duæ reliquæ majores sunt utcumque sumptæ, triangulum constituatur ΗΘΚ; ita ut æqualis sit Δ quidem ipsi ΗΘ,



ἴσων εἶναι τὴν μὲν Δ τῇ ΗΘ, τὴν δὲ Ε τῇ ΘΚ, τὴν δὲ Ζ τῇ ΗΚ. Δοθείσα δὲ ἐκάστη τῶν Δ, Ε, Ζ, δοθείσα ἄρα καὶ ἐκάστη τῶν ΗΘ, ΘΚ, ΚΗ τῶ μίγεθει· δέδεται ἄρα τὸ ΗΘΚ τρίγωνον τῶ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἴση δὲ ἡ μὲν Δ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ Ε τῇ ΘΚ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΘΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΘΚ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΗΚ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΗ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΘΚ· διῖσσυ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΗΚ⁶. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρί-

ipsa vero Ε ipsi ΘΚ, ipsa autem Ζ ipsi ΗΚ. Data autem unaquæque ipsarum Δ, Ε, Ζ; data igitur et unaquæque ipsarum ΗΘ, ΘΚ, ΚΗ magnitudine; datum est igitur ΗΘΚ triangulum specie. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita Δ ad Ε, æqualis autem ipsa Δ quidem ipsi ΗΘ, ipsa Ε vero ipsi ΘΚ; est igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΗΘ ad ΘΚ. Rursus quoniam est ut ΒΓ ad ΓΑ ita Ε ad Ζ; æqualis autem ipsa Ε quidem ipsi ΘΚ, ipsa vero Ζ ipsi ΗΚ; est igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΘΚ ad ΚΗ. Ostensum autem et ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΗΘ ad ΘΚ; ex æquo igitur est ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΗΘ ad ΗΚ, simile igitur est ΑΒΓ

que celle-ci. Puisque Ε est donné, la droite Ζ est donnée. Avec trois droites égales aux trois droites données Δ, Ε, Ζ, dont deux prises ensemble sont plus grandes que la droite restante, construisons le triangle ΗΘΚ, de manière que Δ soit égal à ΗΘ, la droite Ε égale à ΘΚ, et la droite Ζ égale à ΗΚ. Or, chacune des droites Δ, Ε, Ζ est donnée; chacune des droites ΗΘ, ΘΗ, ΚΗ est donc donnée de grandeur; le triangle ΗΘΚ est donc donné d'espèce (39). Et puisque ΑΒ est à ΒΓ comme Δ est à Ε, que Δ est égal à ΗΘ, et Ε égal à ΘΚ, la droite ΑΒ sera à la droite ΒΓ comme ΗΘ est à ΘΚ (11. 5). De plus, puisque ΒΓ est à ΓΑ comme Ε est à Ζ, que Ε est égal à ΘΚ, et Ζ égal à ΗΚ, la droite ΒΓ sera à la droite ΓΑ comme ΘΚ est à ΚΗ. Mais on a démontré que ΑΒ est à ΒΓ comme ΗΘ est à ΘΚ; donc, par égalité, ΑΒ est à ΑΓ comme ΗΘ est à ΗΚ (22. 5); le triangle ΑΒΓ est

γωνον τῷ ΗΘΚ τριγώνω. Δέδοται δὲ τὸ ΗΘΚ
 τρίγωνον τῷ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ
 τρίγωνον τῷ εἶδει.

triangulum triangulo ΗΘΚ. Datum est autem ΗΘΚ
 triangulum specie; datum est igitur et ΑΒΓ trian-
 gulum specie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

PROPOSITIO XLIII.

Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου περὶ μίαν τῶν ὀξειῶν
 γωνιῶν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι
 δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Si trianguli rectanguli circa unum acuto-
 rum angulorum latera inter se rationem ha-
 beant datam, datum est triangulum specie.

Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓ ἰρθὴν ἔχον-
 τος τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, περὶ μίαν τῶν ὀξειῶν
 αὐτοῦ γωνιῶν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, αἱ πλευραὶ αἱ ΓΒ,
 ΒΑ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχέτωσαν δεδομένον·
 λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Trianguli enim rectanguli ΑΒΓ rectum ha-
 bentis angulum ΒΑΓ, latera ΓΒ, ΒΑ circa unum
 angulorum ipsius acutorum ΑΒΓ inter se ra-
 tionem habcant datam; dico datum esse ΑΒΓ
 triangulum specie.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδο-
 μένη εὐθεῖα ἡ ΔΕ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΔΕ
 ἡμικύκλιον τὸ ΔΗΕ· θέσει ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΗΕ
 ἡμικύκλιον. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΓΒ πρὸς
 τὴν ΒΑ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς ΔΕ
 πρὸς τὴν Ζ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔΕ πρὸς τὴν Ζ
 δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Ζ.

Exponatur enim positione et magnitudine data
 recta ΔΕ, et describatur super ΔΕ semicir-
 culus ΔΗΕ; positione igitur est et ΔΗΕ semi-
 circulus. Et quoniam ratio est ipsius ΓΒ ad ΒΑ
 data; eadem huic fiat ratio ipsius ΔΕ ad Ζ;
 ratio igitur et ipsius ΔΕ ad Ζ data. Data autem

donc semblable au triangle ΗΘΚ. Mais le triangle ΗΘΚ est donné d'espèce (5.6);
 le triangle ΑΒΓ est donc aussi donné d'espèce.

PROPOSITION XLIII.

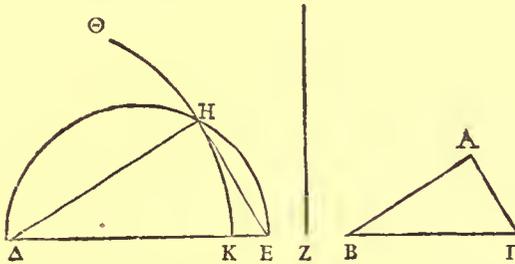
Si, dans un triangle rectangle, les côtés autour d'un des angles aigus ont entre
 eux une raison donnée, ce triangle est donné d'espèce.

Que dans le triangle rectangle ΑΒΓ dont l'angle droit est ΒΑΓ, les côtés ΓΒ, ΒΑ,
 autour d'un de ses angles aigus ΑΒΓ, ayent entre eux une raison donnée; je dis
 que le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce.

Car soit ΔΕ une droite donnée de position et de grandeur, et sur ΔΕ décri-
 vons le demi-cercle ΔΗΕ; le demi-cercle ΔΗΕ sera donné de position (déf. 6). Et
 puisque la raison de ΓΒ à ΒΑ est donnée, faisons en sorte que la raison de ΔΕ à
 Ζ soit la même que celle-ci; la raison de ΔΕ à Ζ sera donnée. Mais ΔΕ est donné;

Καὶ ἔστι μείζων ἢ ΓΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἢ ΔΕ τῆς Ζ. Ενημέρωσα τῆ² Ζ ἴση ἢ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΗΕ, καὶ κέντρον μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΘΗΚ· θέσει

et ΔΕ; data igitur et Ζ. Et est major ΓΒ ipsâ ΒΑ; major igitur et ΔΕ ipsâ Ζ. Accommodetur ipsi Ζ æqualis ΔΗ, et jungatur ΗΕ, et centro quidem Δ, intervallo autem ΔΗ, circulus descri-



ἄρα ἔστιν ὁ ΘΗΚ κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ τὸ ΔΗΕ ἡμικύκλιον· δεθέν ἄρα ἔστι τὸ Η σημεῖον. Ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ, Ε δεθέν· δεθεῖσα ἄρα ἔστιν ἑκάστη τῶν ΗΔ, ΔΕ, ΕΗ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΗΔΕ τρίγωνον τῷ εἶδει. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΗ μίαν γωνίαν μία γωνία ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΗΕ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΕΔΗ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΒΓΑ, ΔΕΗ

batur ΘΗΚ; positione igitur est ΘΗΚ circulus, datum est enim ipsius centrum positione, et ipsa ex centro magnitudine. Positione autem et ΔΗΕ semicirculus; datum igitur est Η punctum. Est autem et unumquodque ipsorum Δ, Ε datum; data igitur est unaquæque ipsarum ΗΔ, ΔΕ, ΕΗ positione et magnitudine; datum est igitur ΗΔΕ triangulum specic. Quoniam igitur duo triangula sunt ΑΒΓ, ΔΕΗ unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum ΒΑΓ ipsi ΔΗΕ, circa alios vero angulos ΓΒΑ, ΕΔΗ latera proportionalia, reliquorum autem ΒΓΑ, ΔΕΗ

la droite Z est donc donnée (2). Mais ΓΒ est plus grand que ΒΑ (19. 1); la droite ΔΕ est donc plus grande que Ζ. Adaptons, dans le cercle, une droite ΔΗ égale à Ζ (1. 4), joignons ΗΕ, et du centre Δ et de la distance ΔΗ, décrivons le cercle ΘΗΚ, le cercle ΘΗΚ sera donné de position, car son centre est donné de position, et son rayon de grandeur (déf. 6). Mais le demi-cercle ΔΗΕ est donné de position; le point Η est donc donné (25). Mais chacun des points Δ, Ε est donné; chacune des droites ΗΔ, ΔΕ, ΕΗ est donc donnée de position et de grandeur (26); le triangle ΗΔΕ est donc donné d'espèce (déf. 3). Puisque les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΗ ont un angle égal à un angle, savoir l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΔΗΕ, que les côtés autour des autres angles ΓΒΑ, ΕΔΗ sont proportionnels, et que les autres angles ΒΓΑ, ΔΕΗ sont chacun plus petits en même temps qu'un droit;

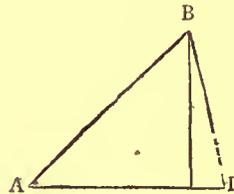
ἐκατέραν ἄμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $\Delta E\text{H}$ τριγώνῳ. Δέδοται δὲ τὸ $\Delta E\text{H}$ τρίγωνον³ τῷ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ εἶδει.

$\Delta E\text{H}$ utrumlibet simul minorem recto; simile igitur est $ABΓ$ triangulum triangulo $\Delta E\text{H}$. Datum est autem $\Delta E\text{H}$ triangulum specie; datum est igitur et $ABΓ$ triangulum specie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Εάν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνίαν δεδομένην, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $ABΓ$ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ $BAΓ$, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ $ABΓ$ αἱ πλευραὶ AB , $BΓ$ λόγον ἔχέτωσαν πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ $ABΓ$ τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.



Μὴ ἔστω δὲ ἡ ὑπὸ $BAΓ$ γωνία¹ ὀρθή, ἀλλὰ ἔστω πρότερον ὀξεία· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B ση-

Non sit autem angulus $BAΓ$ rectus, sed sit primum acutus; et ducatur a puncto B ad $AΓ$

les triangles $ABΓ$, $\Delta E\text{H}$ seront semblables (7. 6). Mais le triangle $\Delta E\text{H}$ est donné d'espèce; le triangle $ABΓ$ est donc donné d'espèce.

PROPOSITION XLIV.

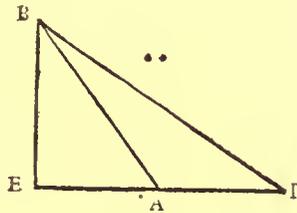
Si un triangle a un angle donné, et si les côtés autour d'un autre angle ont entre eux une raison donnée, le triangle est donné d'espèce.

Soit le triangle $ABΓ$ ayant un angle donné $BAΓ$; que les côtés AB , $BΓ$, autour d'un autre angle $ABΓ$, aient entre eux une raison donnée; je dis que le triangle $ABΓ$ est donné d'espèce.

Car que l'angle $BAΓ$ ne soit pas droit, et qu'il soit premièrement aigu; du

μείου ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΒΔ. Καὶ² ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ δοθεῖσα· καὶ³ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΔ τρίγωνον τῶ εἶδει· λόγος ἄρα καὶ⁴ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. Ἀλλὰ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία⁵· δέδοται ἄρα τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῶ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δοθεῖσα· καὶ⁶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῶ εἶδει.

perpendicularis ΒΔ. Et quoniam datus est ΕΔΑ angulus, est autem et ipse Β ΑΔ datus; et reliquus igitur ΑΒΔ datus est; datum est igitur ΒΑΔ triangulum specie; ratio igitur et ipsius ΒΑ ad ΒΔ data. Sed ipsius ΑΒ ad ΒΓ ratio est data; et ipsius ΒΔ igitur ad ΒΓ ratio est data. Et est rectus ΒΔΓ angulus. Datum est igitur ΒΔΓ triangulum specie; datus est igitur ΒΓΔ angulus. Est autem et angulus ΒΑΓ datus; et reliquus igitur ΑΒΓ est datus; datum est igitur ΑΒΓ triangulum specie.



Ἀλλὰ δὴ⁷ ὕψτω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἀμβλεία, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ⁸ ἤρθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΑΕ κάθετος ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ δοθεῖσά ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΑ δοθεῖσά

At vero sit ΒΑΓ angulus obtusus, et producatuur ΓΑ ad punctum Ε, et ducatur a puncto Β ad ΑΕ perpendicularis ΒΕ. Et quoniam datus est ΒΑΓ angulus; et ipse deinceps igitur ΒΑΕ datus est. Est autem et ΒΕΑ datus; et reliquus igitur ΕΒΑ datus est; datum est igitur ΕΒΑ

point Β, menons ΒΔ perpendiculaire à ΑΓ. Puisque l'angle ΒΔΑ est donné, et que l'angle ΒΑΔ est aussi donné, l'angle restant ΑΒΔ sera donné (32. 1) (4); le triangle ΒΑΔ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΒΑ à ΒΔ est donc donnée (déf. 5). Mais la raison de ΑΒ à ΒΓ est donnée; la raison de ΒΔ à ΒΓ est donc donnée (8). Mais l'angle ΒΔΓ est droit; le triangle ΒΔΓ est donc donné d'espèce (45); l'angle ΒΓΔ est donc donné (31. 1) (4). Mais l'angle ΒΑΓ est donné; l'angle restant ΑΒΓ est donc donné; le triangle ΑΒΓ est donc donné d'espèce (40).

Mais que l'angle ΒΑΓ soit obtus. Prolongeons ΓΑ vers Ε, et du point Β menons ΒΕ perpendiculaire à ΑΕ. Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, l'angle de suite ΒΑΕ est donné (13. 1) (4). Mais l'angle ΒΕΑ est donné; l'angle restant ΕΒΑ est

ἔστι· δέδοται ἄρα τὸ EBA τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς EB πρὸς τὴν BA δοθείς. Τῆς δὲ AB πρὸς τὴν BF λόγος ἔστι δοθείς· καὶ τῆς EB ἄρα πρὸς τὴν BF λόγος ἔστι δοθείς. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἢ ὑπὸ BEF γωνία· δέδοται ἄρα τὸ EBF τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἢ ὑπὸ BFE. Ἐστι δὲ καὶ ἢ ὑπὸ BAG γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ABF γωνία δοθεῖσα ἔστι· δέδοται ἄρα τὸ ABF τρίγωνον τῷ εἶδει.

triangulum specie; ratio igitur ipsius EB ad BA data. Ipsius autem AB ad BF ratio est data; et ipsius igitur EB ad BF ratio est data. Et est rectus BEF angulus; datum est igitur EBF triangulum specie; datus igitur est BFE angulus. Est autem et BAF angulus datus; et reliquus igitur ABF angulus datus est; datum est igitur ABF triangulum specie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνίαν δεδομένην, αἱ δὲ περὶ τὴν δεδομένην γωνίαν πλευραὶ συναμφοτέραι, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἐστὼ τρίγωνον τὸ ABF μίαν γωνίαν δεδομένην ἔχον τὴν ὑπὸ BAG, περὶ δὲ τὴν ὑπὸ BAG γωνίαν αἱ πλευραὶ, τουτίστι συναμφοτέρος ἢ BAG, ὡς μία, πρὸς τὴν FB λόγον ἔχεται¹ δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ABF τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

PROPOSITIO XLV.

Si triangulum unum habeat angulum datum, circa datum autem angulum latera simul utraque ut unum, ad reliquum rationem habeant datam, datum est triangulum specie.

Sit triangulum ABF unum angulum datum habens BAG, circa angulum autem BAG latera, hoc est utraque BAG, ut unum ad FB rationem habeant datam; dico ABF triangulum datum esse specie.

donc donné (32. 1) (4); le triangle EBA est donc donné d'espèce (40); la raison de EB à BA est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de AB à BF est donnée; la raison de EB à BF est donc donnée (8). Mais l'angle BEF est droit; le triangle EBF est donc donné d'espèce (43); l'angle BFE est donc donné (déf. 3). Mais l'angle BAG est donné; l'angle restant ABF est donc aussi donné; le triangle ABF est donc donné d'espèce (40).

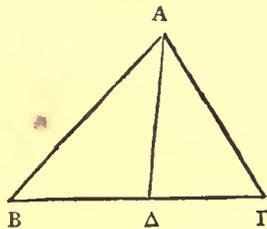
PROPOSITION XLV.

Si un triangle a un angle donné, et si la somme des côtés autour de l'angle donné a une raison donnée avec le côté restant; le triangle est donné d'espèce.

Soit le triangle ABF ayant un angle donné BAG, que la somme des côtés BA, AF autour de l'angle BAG, ait avec FB une raison donnée; je dis que le triangle ABF est donné d'espèce.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· δεθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς

Secetur enim ΒΑΓ angulus bifariam rectā ΑΔ; datus igitur est ΒΑΔ angulus. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΔ ad ΔΓ; permutando



τὴν ΔΓ· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὡς συναμφοτέρος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δεθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δεθείς. Καὶ ἐστὶ δεθείσα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῶ εἶδει· δεθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία. Ἐστὶ δὲ καὶ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δεθείσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δεθείσα ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῶ εἶδει.

igitur ut ΑΒ ad ΒΔ ita ΑΓ ad ΓΔ; et ut simul igitur utraque ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΔ; ratio autem utriusque simul ΒΑΓ ad ΒΓ data; ratio igitur et ipsius ΑΒ ad ΒΔ data. Et est datus ΒΑΔ angulus; datum igitur est ΑΒΔ triangulum specie; datus igitur est ΑΒΔ angulus. Est autem et ΒΑΓ angulus datus; et reliquus igitur ΑΓΒ datus est; datum est igitur ΑΒΓ triangulum specie.

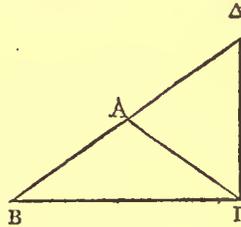
Car que l'angle ΒΑΓ soit coupé en deux parties égales par la droite ΑΔ (9. 1); l'angle ΒΑΔ sera donné (2). Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme ΒΔ est à ΔΓ (5. 6); par permutation, ΑΒ sera à ΒΔ comme ΑΓ est à ΓΔ; la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ est donc à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΔ (12. 5). Mais la raison de la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ à ΒΓ est donnée; la raison de ΑΒ à ΒΔ est donc donnée. Mais l'angle ΒΑΔ est donné; le triangle ΑΒΔ est donc donné d'espèce (44); l'angle ΑΒΔ est donc donné. Mais l'angle ΒΑΓ est donné; l'angle restant ΑΓΒ est donc donné (52. 1) (4); le triangle ΑΒΓ est donc donné d'espèce (40).

Α Δ Λ Ω Σ.

ALITER.

Εκτελλήσθω ἡ ΒΑ ἐπ' εὐθείας, καὶ τῇ ΑΓ κείσθω ἴση ἡ ΑΔ', καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΓ. Καὶ ἔπει λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθεὶς, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΔΑ· λόγος ἄρα τῆς ΒΔ' πρὸς τὴν ΒΓ δοθεὶς. Καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ

Producatur ΒΑ in directum, et ipsi ΑΓ ponatur æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ. Et quoniam ratio est utriusque simul ΒΑΓ ad ΒΓ data, æqualis autem ΓΑ ipsi ΔΑ; ratio igitur ipsius ΒΔ ad ΒΓ data. Et est datus ΑΔΓ angulus, dimi-



ΑΔΓ, ἡμίσεια γάρ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ· δέδοται ἄρα τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ² δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

dus enim est ipsius ΒΑΓ; datum est igitur ΒΔΓ triangulum specie; datus igitur est ΑΒΓ angulus. Est autem et ipse ΒΑΓ datus; et reliquus igitur ΑΓΒ datus est; datum est igitur ΑΒΓ triangulum specie.

A U T R E M E N T.

Prolongeons ΒΑ en ligne droite, faisons ΑΔ égal à ΑΓ (2. 1), et joignons ΔΓ. Puisque la raison de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ à ΒΓ est donnée, et que ΓΑ est égal à ΔΑ, la raison de ΒΔ à ΒΓ est donnée. Mais l'angle ΑΔΓ est donné, car il est la moitié de l'angle ΒΑΓ (5 et 32. 1); le triangle ΒΔΓ est donc donné d'espèce (44); l'angle ΑΒΓ est donc donné (déf. 3). Mais l'angle ΒΑΓ est donné; l'angle restant ΑΓΒ est donc donné (32. 1) (4); le triangle ΑΒΓ est donc donné d'espèce (40).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

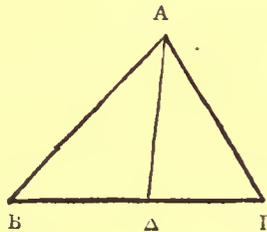
PROPOSITIO XLVI.

Εάν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνίαν δεδομένην, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ συναμφοτέρας, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ αἱ πλευραὶ συναμφοτέρας, ὡς μία, τουτέστιν ἡ ΒΑΓ, πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἔχέτωσαν· δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

Si triangulum unum habeat angulum datum, circa alium autem angulum latera simul utraque, ut unum, ad reliquum rationem habeant datam; datum est triangulum specie.

Sit triangulum ΑΒΓ unum habens angulum datum ΑΒΓ, circa alium autem angulum ΒΑΓ latera utraque simul, ut unum hoc est ipsa ΒΑΓ ad ΒΓ rationem habeant datam; dico ΑΒΓ triangulum datum esse specie.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφοτέρας ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. Καὶ

Secetur enim ΒΑΓ angulus bifariam rectâ ΑΔ; est igitur ut utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΔ. Ratio autem utriusque simul ΒΑΓ ad ΓΒ data; ratio igitur et ipsius ΑΒ ad ΒΔ data.

PROPOSITION XLVI.

Si un triangle a un angle donné, et si la somme des côtés autour d'un autre angle a une raison donnée avec le côté restant, le triangle est donné d'espèce.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant un angle donné ΑΒΓ; que la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ, autour d'un autre angle ΒΑΓ, ait une raison donnée avec ΒΓ; je dis que le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce.

Car partageons l'angle ΒΑΓ en deux parties égales par la droite ΑΔ (9. 1); la somme des droites ΒΑΓ sera à la droite ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΔ. Mais la raison de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ à la droite ΓΒ est donnée; la raison de ΑΒ à ΒΔ est

ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ γωνία. Καὶ ἔστιν αὐτῆς διπλασίον ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ · δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία². ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ εἶδει.

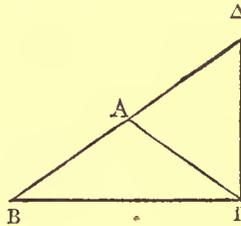
Et est datus $ΑΒΔ$ angulus ; datum est igitur $ΑΒΔ$ triangulum specie ; datus igitur est $ΒΑΔ$ angulus. Et est ipsius duplus $ΒΑΓ$ angulus ; datus igitur est et $ΒΑΓ$ angulus. Est autem et ipse $ΑΒΓ$ datus ; et reliquus igitur $ΑΓΒ$ datus est ; datum est igitur $ΑΒΓ$ triangulum specie.

Α Α Λ Ω Σ¹.

Εκτελέσθω ἡ $ΒΑ$, καὶ¹ κείσθω τῇ $ΓΑ$ ἴση ἡ $ΑΔ$, καὶ ἐπέξεύχθω ἡ $ΔΓ$. Καὶ² ἐπεὶ λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς $ΒΑΓ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ δοθεῖς· ἴση δὲ

Α Λ Ι Τ Ε Ρ.

Producatur $ΒΑ$, et ponatur ipsi $ΓΑ$ æqualis $ΑΔ$, et jungatur $ΔΓ$. Et quoniam ratio est utriusque simul $ΒΑΓ$ ad $ΒΓ$ data ; æqualis autem $ΓΑ$



ἡ $ΓΑ$ τῇ $ΑΔ$ · λόγος ἄρα καὶ³ τῆς $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ δοθεῖς. Καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ $ΔΒΓ$ τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΔΓ$ γωνία. Καὶ ἔστιν αὐτῆς

ipsi $ΑΔ$; ratio igitur et ipsius $ΔΒ$ ad $ΒΓ$ data. Et est datus $ΑΒΓ$ angulus ; datum igitur $ΔΒΓ$ triangulum specie. Datus igitur est $ΒΔΓ$ angulus. Et est ipsius duplus $ΒΑΓ$ angulus ; ergo

donc donnée. Mais l'angle $ΑΒΔ$ est donné ; le triangle $ΑΒΔ$ est donc donné d'espèce (41) ; l'angle $ΒΑΔ$ est donc donné (déf. 3). Mais l'angle $ΒΑΓ$ est son double ; l'angle $ΒΑΓ$ est donc donné (2). Mais l'angle $ΑΒΓ$ est donné ; l'angle restant $ΑΓΒ$ est donc donné (32, 1) (4) ; le triangle $ΑΒΓ$ est donc donné d'espèce (40).

Α Υ Τ Ρ Ε Μ Ε Ν Τ.

Prolongeons $ΒΑ$; faisons $ΑΔ$ égal à $ΓΑ$, et joignons $ΔΓ$. Puisque la raison de la somme des côtés $ΒΑ$, $ΑΓ$ à $ΒΓ$ est donnée, et que $ΓΑ$ est égal à $ΑΔ$, la raison de $ΔΒ$ à $ΒΓ$ est donnée. Mais l'angle $ΑΒΓ$ est donné ; le triangle $ΔΒΓ$ est donc donné d'espèce (41) ; l'angle $ΒΔΓ$ est donc donné (déf. 3). Mais l'angle $ΒΑΓ$ est son double

διπλή ἢ ὑπὸ ΒΑΓ· ἢ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδεται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

ΒΑΓ angulus datus est; et reliquus igitur ΑΓΒ datus est; datum est igitur ΑΒΓ triangulum specie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ.

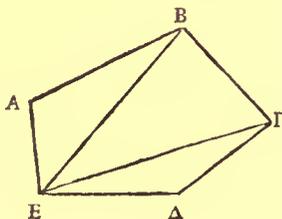
PROPOSITIO XLVII.

Τὰ δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἶδει εἰς δεδομένα τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται¹.

Data rectilinea specie in data specie triangula dividuntur.

Ἐστω δεδομένον εὐθύγραμμον τῷ εἶδει τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον εἰς δεδομένα τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται².

Sit datum rectilineum specie ΑΒΓΔΕ; dico ΑΒΓΔΕ rectilineum in data specie triangula dividi.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΕΓ. Καὶ³ ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία, καὶ ἐστὶ λόγος τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΕΑ δοθείς. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστὶν ἢ

Jungantur enim ipsæ ΒΕ, ΕΓ. Et quoniam datum est ΑΒΓΔΕ rectilineum specie; datus igitur est ΒΑΕ angulus, et est ratio ipsius ΒΑ ad ΕΑ data. Quoniam igitur datus est ΒΑΕ an-

(5, et 52. 1); l'angle ΒΑΓ est donc donné; l'angle restant ΑΓΒ est donc aussi donné; le triangle ΑΒΓ est donc donné d'espèce (40).

PROPOSITION XLVII.

Des figures rectilignes données d'espèce peuvent se diviser en triangles donnés d'espèce.

Soit donnée la figure rectiligne ΑΒΓΔΕ; je dis que la figure rectiligne ΑΒΓΔΕ peut se diviser en triangles donnés d'espèce.

Car joignons ΒΕ, ΕΓ. Puisque la figure rectiligne ΑΒΓΔΕ est donnée d'espèce, l'angle ΒΑΕ est donné, ainsi que la raison de ΒΑ à ΕΑ (déf. 3). Et puisque l'angle

ὑπὸ BAE γωνία, καὶ ἔστι λόγος τῆς BA πρὸς τὴν AE δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ BAE τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ ABE γωνία. Ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EBF δοθεῖσά ἐστιν. Καὶ ἔστι λόγος τῆς AB πρὸς τὴν BE δοθείς, τῆς δὲ AB πρὸς τὴν BF λόγος ἔστι δοθείς· καὶ τῆς EB ἄρα πρὸς τὴν BF⁵ λόγος ἔστι δοθείς· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΓBE γωνία· δέδοται ἄρα τὸ BIE τρίγωνον τῷ εἶδει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΓΔE τρίγωνον τῷ εἶδει δέδοται· τὰ ἄρα δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἶδει εἰς δεδομένα τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται.⁴

gulus, et est ratio ipsius BA ad AE data; datum est igitur BAE triangulum specie; datus igitur est ABE angulus. Est autem et totus ABΓ angulus datus; et reliquus igitur EBF datus est. Et est ratio ipsius AB ad BE data, et ipsius AB ad BF ratio est data; et ipsius igitur EB ad BF ratio est data. Et est datus ΓBE angulus; datum est igitur BIE triangulum specie. Propter eadem utique et ΓΔE triangulum specie datum est. Ergo data rectilinea specie in data specie triangula dividuntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μή'.

Εάν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀναγραφῆ τρίγωνα¹ δεδομένα τῷ εἶδει· λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

Ἀπὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἶδει ἀναγεγράφθω τὰ ABΓ, ABΔ· λέγω ὅτι λόγος ἔστι τοῦ ABΓ πρὸς τὸ ABΔ δοθείς.

PROPOSITIO XLVIII.

Si ab eadem recta describantur triangula data specie, rationem habebunt inter se datam.

Ab eadem enim recta AB duo triangula ABΓ, ABΔ data specie describantur; dico rationem esse ipsius ABΓ ad ABΔ datam.

BAE est donné, et que la raison de BA à AE est aussi donnée, le triangle BAE est donné d'espèce (41); l'angle ABE est donc donné (déf. 5). Mais l'angle entier ABΓ est donné (5); l'angle restant EBF est donc donné (4). Mais la raison de AB à BE est donnée, et la raison de AB à BF est aussi donnée; la raison de EB à BF est donc donnée (8). Mais l'angle ΓBE est donné; le triangle BIE est donc donné d'espèce (41). Par la même raison, le triangle ΓΔE est donné d'espèce; les figures rectilignes données d'espèce peuvent donc se diviser en triangles donnés d'espèce.

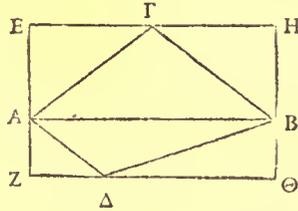
PROPOSITON XLVIII.

Si des triangles donnés d'espèce sont décrits sur une même droite, ils ont entre eux une raison donnée.

Sur une même droite AB, décrivons les deux triangles donnés d'espèce ABΓ, ABΔ; je dis que la raison du triangle ABΓ au triangle ABΔ est donnée.

ἤχθωσαν³ γὰρ ἀπὸ τῶν A, B σημείων τῆ AB
 εὐθεία πρὸς ἑρθὰς αἱ AE, BH, καὶ ἐκτελείσθωσαν
 ἐπὶ τὰ Z, Θ, καὶ διὰ τῶν Γ, Δ σημείων τῆ
 AB εὐθεία παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ EΓH, ZΔΘ.

Ducantur enim a punctis A, B rectæ AB per-
 pendiculares AE, BH, et producantur ad puncta
 Z, Θ, et per Γ, Δ puncta rectæ AB parallelæ
 ducantur EΓH, ZΔΘ. Et quoniam datum est



Καὶ³ ἐπεὶ δέδοται τὸ ABΓ τρίγωνον τῶ εἶδει, λόγος
 ἐστὶ τῆς ΓA πρὸς τὴν BA δοθείς. Ἐπεὶ οὖν δο-
 θεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓAB γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ
 ὑπὸ EAB δοθείσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EAG
 ἐστὶ δοθείσα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AEG γωνία⁵
 δοθείσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EGA δοθείσα ἐστὶ
 δέδοται ἄρα τὸ AEG τρίγωνον τῶ εἶδει, λόγος
 ἄρα τῆς EA πρὸς τὴν AG δοθείς. Τῆς δὲ ΓA πρὸς
 τὴν AB λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς EA ἄρα πρὸς
 τὴν AB λόγος ἐστὶ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ
 τῆς ZA πρὸς τὴν AB λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ
 τῆς EA πρὸς τὴν AZ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ
 ἔστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν AZ οὕτως τὸ AH πρὸς
 τὸ ΘA· ὥστε καὶ τοῦ AH πρὸς τὸ ΘA λόγος ἐστὶ

ABΓ triangulum specie, ratio est ipsius ΓA ad BA
 data. Quoniam igitur datus est ΓAB angulus,
 est autem et ipse EAB datus; et reliquus igitur
 EAG est datus. Est autem et AEG angulus datus;
 et reliquus igitur EGA datus est; datum igitur
 AEG triangulum specie; ratio igitur ipsius EA
 ad AG data. Ipsius autem ΓA ad AB ratio est
 data; et ipsius EA igitur ad AB ratio est data.
 Propter eadem utique et ipsius ZA ad AB ratio
 est data; quare et ipsius EA ad AZ ratio est
 data. Et est ut AE ad AZ ita AH ad ΘA. Quare
 et ipsius AH ad ΘA ratio est data. Et est ipsius

Car par les points A, B, menons à la droite AB les perpendiculaires AE, BH
 (11. 1), et prolongeons-les vers les points Z, Θ, et des points Γ, Δ, menons
 les droites EΓH, ZΔΘ parallèles à la droite AB (31. 1). Puisque le triangle ABΓ
 est donné d'espèce, la raison de ΓA à BA est donnée (déf. 3). Et puisque l'angle
 ΓAB est donné, et que l'angle EAB est aussi donné; l'angle restant EAG sera donné
 (4). Mais l'angle AEG est donné; l'angle restant EGA est donc donné; le triangle
 AEG est donc donné d'espèce (40); la raison de EA à AG est donc donnée (déf. 3).
 Mais la raison de ΓA à AB est donnée; la raison de EA à AB est donc donnée (8).
 Semblablement la raison de ZA à AB est donnée; la raison de EA à AZ est donc
 donnée (8). Mais AE est à AZ comme AH est à ΘA (1. 6); la raison de AH à ΘA

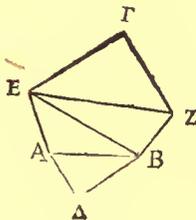
δοθείς. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν AH ἡμισυ τὸ $AB\Gamma$, τοῦ δὲ $A\Theta$ ἡμισυ τὸ $A\Delta B$. καὶ τοῦ $AB\Gamma$ ἄρα πρὸς τὸ $A\Delta B$ λόγος ἔστι δοθείς.

quidem AH dimidium $AB\Gamma$ triangulum, ipsius autem $A\Theta$ dimidium $A\Delta B$ triangulum; et igitur trianguli $AB\Gamma$ ad triangulum $A\Delta B$ ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Ἐάν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο εὐθύγραμμα ἄ ἔτυχεν ἀναγραφῆ δεδομένα τῶ εἶδει, λόγον ἔξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

Ἀπὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο εὐθύγραμμα ἄ ἔτυχε δεδομένα τῶ εἶδει ἀναγεγράφθω τὰ $A\epsilon\Gamma Z$, $A\Delta B$. λέγω ὅτι λόγος ἔστι τοῦ $A\epsilon\Gamma Z$ πρὸς $A\Delta B$ δοθείς.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ BE , ZE . δέδοται ἄρα ἕκαστον τῶν $E\Gamma$, EZ , EAB τριγώνων τῶ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς EZ δύο τρίγωνα δεδομένα τῶ εἶδει ἀναγράφονται τὰ

PROPOSITIO XLIX.

Si ab eadem rectâ duo rectilinea quælibet describantur data specie, rationem habebunt inter se datam.

Ab eadem enim rectâ AB duo rectilinea quælibet data specie describantur $A\epsilon\Gamma Z$, $A\Delta B$; dico rationem esse ipsius $A\epsilon\Gamma Z$ ad $A\Delta B$ datam.

Jungantur enim ipsæ BE , ZE ; datum est igitur unumquodque $E\Gamma$, EZ , EAB triangulorum specie. Et quoniam ab eadem rectâ EZ duo triângula $E\Gamma$, EZ data specie descripta

est donc donné. Mais le triangle $AB\Gamma$ est la moitié de AH , et $A\Delta B$ est la moitié de $A\Theta$ (41. 1); la raison du triangle $AB\Gamma$ au triangle $A\Delta B$ est donc donnée.

PROPOSITION XLIX.

Si sur une même droite on décrit deux figures rectilignes quelconques, données d'espèce, elles auront entre elles une raison donnée.

Sur la droite AB , décrivons deux figures rectilignes quelconques $A\epsilon\Gamma Z$, $A\Delta B$ données d'espèce; je dis que la raison de $A\epsilon\Gamma Z$ à $A\Delta B$ est donnée.

Car joignons BE , ZE ; chacun des triangles $E\Gamma$, EZ , EAB sera donné d'espèce (47). Et puisque les deux triangles donnés d'espèce $E\Gamma$, EZ sont décrits sur la

ΕΖΓ, ΕΖΒ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΕΖ πρὸς τὸ ΖΕΒ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΒΖ δοθείς. Τοῦ δὲ ΖΕΒ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπειδὴ περ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΕ ἀναγέγραπται δεδομένα τῶν εἶδει τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΕΒΑ· τοῦ ΓΕΒΖ ἄρα² πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι συναμφοτέρου³ τοῦ ΓΕΑΒΖ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ΕΑΒ πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΕΑΒΖ ἄρα πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Ἐάν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε¹ καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὁμοιά τε² καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι καὶ ὁ πρὸς ἀλλήλα αὐτῶν λόγος ἔσται³ δοθείς.

même droite EZ ; la raison de ΓΕΖ à ΖΕΒ sera donnée (48) ; donc par addition, la raison de ΓΕΒΖ à ΕΒΖ est donnée. Mais la raison de ΖΕΒ à ΕΑΒ est donnée (48), parce que les triangles ΖΕΒ, ΕΒΑ, donnés d'espèce, sont décrits sur une même droite ΒΕ (48) ; la raison de ΓΕΒΖ à ΕΑΒ est donc donnée (8) ; donc, par addition, la raison de ΓΕΑΒΖ à ΕΑΒ est donnée (6). Mais la raison de ΕΑΒ à ΑΔΒ est donnée (48) ; la raison de ΓΕΑΒΖ à ΑΔΒ est donc donnée (8).

PROPOSITION L.

Si deux droites ont entre elles une raison donnée, les figures rectilignes semblables, et semblablement construites sur ces droites, auront une raison donnée.

Car que les deux droites ΑΒ, ΓΔ ayent entre elles une raison donnée ; sur ΑΒ, ΓΔ décrivons les figures rectilignes Ε, Ζ, semblables et semblablement placées ; je dis que ces figures auront entr'elles une raison donnée.

sunt ; ratio igitur est ipsius ΓΕΖ ad ΖΕΒ data ; et componendo igitur ratio est ipsius ΓΕΒΖ ad ΕΒΖ data. Ipsius autem ΖΕΒ ad ΕΑΒ ratio est data, quandoquidem ab eadem rectâ ΒΕ descripta sunt data specie triangula ΖΕΒ, ΕΒΑ ; ipsius ΓΕΒΖ igitur ad ΕΑΒ ratio est data, et componendo ipsius ΓΕΑΒΖ ad ΕΑΒ ratio est data. Ipsius autem ΕΑΒ ad ΑΔΒ ratio est data ; et ipsius ΓΕΑΒΖ igitur ad ΑΔΒ ratio est data.

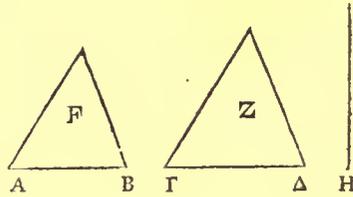
PROPOSITIO L.

Si duæ rectæ inter se rationem habeant datam, et ab illis reetilinea similia et similiter descripta inter se rationem habebunt datam.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ inter se rationem habeant datam, et describatur ab ipsis ΑΒ, ΓΔ similia et similiter posita rectilinea Ε, Ζ ; dieo et illorum rationem inter se datam fore.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν $AB, ΓΔ$ τρίτη ἀνάλογον ἢ H · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἢ $ΓΔ$ πρὸς τὴν H . Λόγος δὲ ὁ τῆς AB πρὸς $ΓΔ$ δο-

Sumatur enim ipsarum $AB, ΓΔ$ tertia proportionalis H ; est igitur ut AB ad $ΓΔ$ ita $ΓΔ$ ad H . Ratio autem ipsius AB ad $ΓΔ$ data. Ratio



θεῖς· λόγος ἄρα καὶ ὁ⁵ τῆς $ΓΔ$ πρὸς τὴν H δοθεῖς· ὥστε καὶ τῆς AB πρὸς τὴν H λόγος ἔστι δοθείς. Ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν H οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z · λόγος ἄρα τοῦ E πρὸς τὸ Z δοθείς.

igitur et ipsius $ΓΔ$ ad H data; quare et ipsius AB ad H ratio est data. Ut autem AB ad H ita E ad Z ; ratio igitur ipsius E ad Z data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νά.

PROPOSITIO LI.

Εὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα αἱ ἔτυχε ἀναγραφῆ δεδομένα τῶ εἶδει· λόγον ἔξει πρὸς ἀλλήλα δεδομένον.

Si duæ rectæ inter se rationem habeant datam, et ab illis rectilinea quælibet describantur data specie; rationem habebunt inter se datam.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ² $AB, ΓΔ$ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω

Duæ enim rectæ $AB, ΓΔ$ inter se rationem habeant datam, et describantur ab ipsis $AB, ΓΔ$

Car prenons une troisième proportionnelle H aux deux droites $AB, ΓΔ$ (11. 6); la droite AB sera à la droite $ΓΔ$ comme $ΓΔ$ est à H . Mais la raison de AB est à $ΓΔ$ est donnée; la raison de $ΓΔ$ à H est donc donnée (8); la raison de AB à H est donc donnée. Mais AB est à H comme E est à Z (19, ou 20. 6); la raison de E à Z est donc donnée.

PROPOSITION LI.

Si deux droites ont entre elles une raison donnée, et si sur ces droites on décrit des figures rectilignes quelconques, données d'espèce, ces figures auront entre elles une raison donnée.

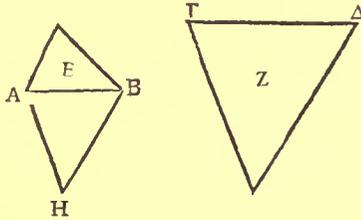
Que les deux droites $AB, ΓΔ$ aient entre elles une raison donnée; et sur $AB,$

ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν³ δεδο-
μένα τῶ εἶδει τὰ E, Z, λέγω ὅτι τοῦ E πρὸς τὸ
Z λόγος ἐστὶ δοθείς.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τῶ Z ὁμοιον
καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ AHB. Δέδοται δὲ τὸ

rectilinea quælibet data specie ipsa E, Z; dico
ipsius E ad Z rationem esse datam.

Describatur enim ex AB ipsi Z simile et
similiter positum ipsum AHB. Datum est au-



Z τῶ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ AHB τῶ εἶδει· ἀλλὰ
μὴν καὶ τὸ E δέδοται τῶ εἶδει, καὶ ἀναγεγραπ-
ται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB ἡ λόγος ἄρα
τοῦ E πρὸς τὸ AHB δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶ τῆς
AB πρὸς τὴν ΓΔ λόγος⁵ δοθείς, καὶ ἀναγεγραπται
ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ὁμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐ-
θύγραμμα τὰ AHB, Z, λόγος ἄρα τοῦ AH πρὸς
τὸ Z δοθείς. Τοῦ δὲ AHB πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ
δοθείς· καὶ τοῦ E ἄρα πρὸς τὸ Z λόγος ἐστὶ
δοθείς.

tem ipsum Z specie; datum est igitur et AHB
specie; sed quidem et ipsum E datum est specie,
et descriptum est ab ipsâ rectâ AB; ratio igitur
ipsius E ad AHB data. Et quoniam est ipsius
AB ad ΓΔ ratio data, et descripta sunt ab ipsis
AB, ΓΔ similia et similiter posita rectilinea
AHB, Z; ratio igitur ipsius AH ad Z data.
Ipsius autem AHB ad E ratio est data; et ipsius
E igitur ad Z ratio est data.

ΓΔ décrivons des figures rectilignes quelconques E, Z données d'espèce; je dis
que la raison de E à Z est donnée.

Car sur AB décrivons la figure rectiligne AHB semblable à la figure Z et sem-
blablement placée. Puisque la figure Z est donnée d'espèce, la figure AHB sera
donnée d'espèce; mais la figure E est donnée d'espèce, et elle est décrite sur
la même droite AB; la raison de E à AHB est donc donnée (49). Mais la raison
de AB à ΓΔ est donnée, et sur AB, ΓΔ on a décrit les figures rectilignes AHB, Z,
semblables et semblablement placées; la raison de AH à Z est donc donnée (50).
Mais la raison de AHB à E est donnée; la raison de E à Z est donc donnée (8).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

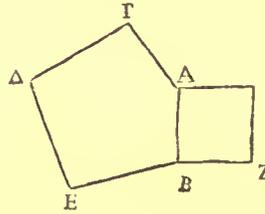
PROPOSITIO LII.

Εάν ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει, δεδομένου τῷ εἶδει εἶδος ἀναγραφῆ, δέδοται τὸ ἀναγραφὲν τῷ μεγέθει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει τῆς AB δεδομένου τὸ εἶδος εἶδος ἀναγράφω τὸ $ΑΓΔΕΒ$. λέγω ὅτι τὸ $ΑΓΔΕΒ$ δέδοται τῷ μεγέθει.

Si a datâ rectâ magnitudine, data specie figura describatur, data est descripta magnitudine.

A datâ enim rectâ magnitudine AB data specie figura describatur ipsa $ΑΓΔΕΒ$; dico ipsam $ΑΓΔΕΒ$ datam esse magnitudine.



Ἀναγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AZ . δέδοται ἄρα τὸ AZ τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο εὐθύγραμμα ἀναγράφονται δεδομένη τῷ εἶδει τὰ $ΑΓΔΕΒ$, AZ . λόγος ἄρα τοῦ $ΑΓΔΕΒ$ πρὸς τὸ AZ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ AZ τῷ μεγέθει, δέδοται ἄρα καὶ τὸ $ΑΓΔΕΒ$ τῷ μεγέθει.

Describatur enim ab ipsâ AB quadratum AZ ; data est igitur AZ specie et magnitudine. Et quoniam ab eâdem rectâ AB duo rectilinea $ΑΓΔΕΒ$, AZ descripta sunt, data specie; ratio igitur ipsius $ΑΓΔΕΒ$ ad AZ data. Datum autem AZ magnitudine; datum est igitur et $ΑΓΔΕΒ$ magnitudine.

PROPOSITION LII.

Si sur une droite donnée de grandeur, on décrit une figure donnée d'espèce, la figure décrite est donnée de grandeur.

Sur la droite AB , donnée de grandeur, décrivons une figure $ΑΓΔΕΒ$ donnée d'espèce; je dis que $ΑΓΔΕΒ$ est donné de grandeur.

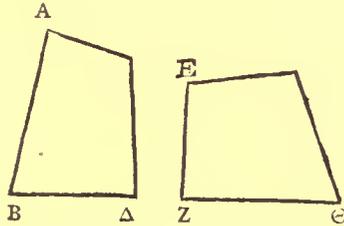
Car sur la droite AB décrivons le carré AZ (46. 1); le carré AZ sera donné d'espèce et de grandeur (déf. 3). Et puisque sur AB , on a décrit les deux figures rectilignes $ΑΓΔΕΒ$, AZ données d'espèce, la raison de $ΑΓΔΕΒ$ à AZ sera donnée (49). Mais AZ est donné de grandeur; la figure $ΑΓΔΕΒ$ est donc donnée de grandeur (2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

PROPOSITIO LIII.

Εάν δύο εἶδη τῶν εἶδει δεδομένα ἦ, καὶ μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου λόγον ἔχη δεδομένον· καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσιν δεδομένον.

Ἐστω δύο εἶδη τῶν εἶδει δεδομένα τὰ ΑΔ, ΕΘ, καὶ λόγος ἔστω τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἔστί δοθείς.



Si duæ figuræ speciei datæ sint, et unum latus unius ad unum latus alterius rationem habeat datam; et reliqua latera ad reliqua latera rationem habebunt datam.

Sint duæ figuræ speciei datæ ΑΔ, ΕΘ, et ratio sit ipsius ΒΔ ad ΖΘ data; dico et reliquorum laterum ad reliqua latera rationem esse datam.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἔστί τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς, τῆς δὲ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ λόγος ἔστί δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΖΘ λόγος ἔστί δοθείς. Τῆς δὲ ΖΘ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἔστί δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἔστί δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἔστί δοθείς.

Quoniam enim ratio est ipsius ΒΔ ad ΖΘ data, ipsius autem ΒΔ ad ΒΑ ratio est data; et ipsius ΑΒ igitur ad ΖΘ ratio est data. Ipsius autem ΖΘ ad ΕΖ ratio est data; et ipsius ΑΒ igitur ad ΕΖ ratio est data. Propter eadem utique et reliquorum laterum ad reliqua latera ratio est data.

PROPOSITION LIII.

Si deux figures sont données d'espèce, et si un des côtés de l'une a une raison donnée avec un côté de l'autre, les côtés restants auront une raison donnée avec les côtés restants.

Soient les deux figures ΑΔ, ΕΘ données d'espèce; que la raison de ΒΔ à ΖΘ soit donnée; je dis que la raison des côtés restants aux côtés restants est donnée.

Car puisque la raison de ΒΔ à ΖΘ est donnée, et que la raison de ΒΔ à ΒΑ est aussi donnée (déf. 3); la raison de ΑΒ à ΖΘ est donnée (8). Mais la raison de ΖΘ à ΕΖ est donnée (déf. 3); la raison de ΑΒ à ΕΖ est donc donnée (8). Semblablement la raison des côtés restants aux côtés restants sera donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν δ'.

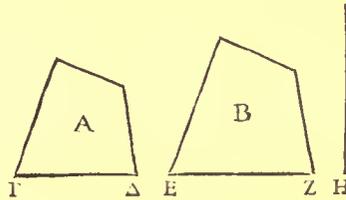
PROPOSITIO LIV.

Εάν δύο εἶδη δεδομένα τῶ εἶδει πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχη δεδομένον, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔξουσι δεδομένον.

Δύο γὰρ εἶδη δεδομένα τῶ εἶδει τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχεται δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔξουσι δεδομένον.

Si duæ figuræ datæ specie inter se rationem habeant datam, et latera ipsarum inter se rationem habebunt datam.

Duæ enim figuræ datæ specie ipsæ Α, Β inter se rationem habeant datam; dico et latera ipsarum inter se rationem habitura esse datam.



Τὸ γὰρ Α τῶ Β ἢτοι ὁμοίον ἐστὶν ἢ οὐ. Ἐστω πρότερον ὁμοίον, καὶ εἰλήφθω τῶν ΓΔ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἢ Η· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Η οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β. Λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν Η δοθείς. Καὶ εἰσὶν αἱ ΓΔ, ΕΖ, Η ἀνάλογον· καὶ τῆς ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ

Ipsa enim Α ipsi Β vel similis est vel non. Sit primum similis, et sumatur ipsarum ΓΔ, ΕΖ tertia proportionalis Η; est igitur ut ΓΔ ad Η ita Α ad Β. Ratio autem ipsius Α ad Β data; ratio igitur et ipsius ΓΔ ad Η data. Et sunt ipsæ ΓΔ, ΕΖ, Η proportionales; et ipsius ΓΔ igitur ad ΕΖ ratio est data. Et est

PROPOSITION LIV.

Si deux figures données d'espèce ont entre elles une raison donnée, leurs côtés auront aussi entre eux une raison donnée.

Que les deux figures Α, Β, données d'espèce, ayent entre elles une raison donnée; je dis que leurs côtés auront entre eux une raison donnée.

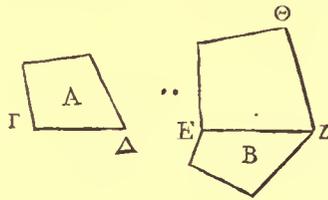
Car la figure Α est semblable à la figure Β, ou elle ne l'est pas. Premièrement, qu'elle lui soit semblable; prenons une troisième proportionnelle Η aux droites ΓΔ, ΕΖ (11. 6); la droite ΓΔ sera à Η comme Α est à Β (20. 6). Mais la raison de Α à Β est donnée; la raison de ΓΔ à Η est donc donnée. Mais les droites ΓΔ, ΕΖ, Η sont proportionnelles; la raison de ΓΔ à ΕΖ est donc donnée (24). Mais Α

ὅστιν ὅμοιον τὸ Α τῷ Β· καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσιν δεδομένον.

Μὴ ἔστω δὲ ὅμοιον τὸ Α τῷ Β, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ Α ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΘ· δίδεται ἄρα καὶ τὸ ΕΘ τῷ Εἶδει. Δίδεται δὲ καὶ τὸ Β. λόγος ἄρα τοῦ Β πρὸς τὸ ΕΘ δεθείς· τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Α λόγος ἐστὶ δο-

similis A ipsi B; et reliqua igitur latera ad reliqua latera rationem habebunt datam.

Non sit autem similis A ipsi B, et describatur ab EZ ipsi A similis et similiter posita EΘ; data igitur et EΘ specie. Data est autem et B; ratio igitur ipsius B ad EΘ data; ipsius autem B ad A ratio est data; et ipsius A igitur ad EΘ ratio est



θείς¹· καὶ τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δεθείς. Καὶ ὅμοιον ἐστὶ² τὸ Α τῷ ΕΘ· λόγος ἄρα τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ δεθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς³ λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δεθείς.

data. Et similis est A ipsi EΘ; ratio igitur ipsius ΓΔ ad ΕΖ data. Propter eadem utique et reliquorum laterum ad reliqua latera ratio est data.

A Λ Λ Ω Σ.

A L I T E R.

Ἐκείσθω δεθείσα εὐθεῖα ἡ ΗΘ. Τὸ δὲ¹ Α τῷ Β ἢ τοι ὅμοιον ἐστίν, ἢ οὐ. Ἐστω πρότερον ὅμοιον.

Exponatur data recta ΗΘ. Figura utique A ipsi B vel similis est, vel non. Sit primum

est semblable à B; les côtés restants auront donc une raison donnée avec les côtés restants (53).

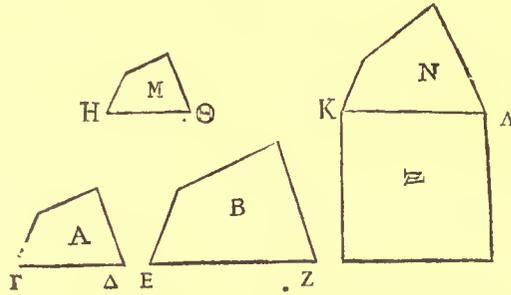
Mais que A ne soit pas semblable à B; sur EZ, décrivons la figure EΘ semblable à A, et semblablement placée (18. 6); la figure EΘ sera donnée d'es-pèce. Mais B est donné; la raison de B à EΘ est donc donnée (49). Mais la raison de B à A est donnée; la raison de A à EΘ est donc donnée (8). Mais A est semblable à EΘ; la raison de ΓΔ à ΕΖ est donc donnée (20. 6) (24). Semblablement la raison des côtés restants aux côtés restants est donnée.

A U T R E M E N T.

Soit ΗΘ une droite donnée; la figure A est semblable à B ou non. Qu'elle lui

Καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΚΛ, καὶ ἀναγεγράφω ἀπὸ τῶν ΗΘ, ΚΛ τοῖς Α, Β ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ Μ, Ν· δέδοται ἄρα τὸ ἑκότερον τῶν Μ, Ν τῶ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΚΛ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐ-

similis. Et fiat ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΗΘ ad ΚΛ, et describantur ab ΗΘ, ΚΛ ipsis Α, Β similes et similiter positæ Μ, Ν; data est igitur utraque ipsarum Μ, Ν specie. Et quoniam est ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΗΘ ad ΚΛ, et descripta sunt ab ipsis ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ similia et similiter



θύγραμμα τὰ Α, Β, Μ, Ν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Μ πρὸς τὸ Ν δοθείς. Δοθὲν δὲ τὸ Μ, ἀπὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῶ μεγέθει ἀναγέγραπται δεδομένης εἶδος· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ν. Αἰαγεγράφω δὲ ἀπὸ τῆς ΚΛ τετραγώνων τὸ Ξ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Ξ εἶδει· λόγος ἄρα τοῦ Ν πρὸς τὸ Ξ δοθείς. Δοθὲν δὲ τὸ Ν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ξ· δοθεῖσα ἄρα ἴστιν

posita rectilinea Α, Β, Μ, Ν; est igitur ut Α ad Β ita Μ ad Ν. Ratio autem ipsius Α ad Β data; ratio igitur et ipsius Μ ad Ν data. Data autem Μ, ipsa enim a datâ rectâ magnitudiue descripta est data specie; data igitur et Ν. Describatur autem ab ipsâ ΚΛ quadratum Ξ; data igitur et figura Ξ specie. Ratio igitur ipsius Ν ad Ξ data. Data autem Ν; data igitur et Ξ;

soit d'abord semblable; faisons en sorte que ΓΔ soit à ΕΖ comme ΗΘ est à ΚΛ (12.6); et sur ΗΘ, ΚΛ, décrivons les figures Μ, Ν, semblables aux figures Α, Β, et semblablement placées (18.6); les figures Μ, Ν, seront données d'espèce. Puisque ΓΔ est à ΕΖ comme ΗΘ est à ΚΛ, et que sur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ on a décrit des figures rectilignes Α, Β, Μ, Ν, semblables et semblablement placées; la figure Α est à la figure Β comme Μ est à Ν (22.6). Mais la raison de Α à Β est donnée; la raison de Μ à Ν est donc donnée. Mais la figure Μ est donnée (52), puisque cette figure donnée d'espèce a été décrite sur une droite donnée de grandeur; la figure Ν est donc donnée (2). Sur ΚΛ décrivons le carré Ξ (46.1); la figure Ξ sera donnée d'espèce; la raison de Ν à Ξ est donc donnée. Mais Ν

ἢ ΚΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΗΘ δευτέρα λόγος ἄρα ἐστὶν⁴ τῆ ΗΘ πρὸς τὴν ΚΛ δευτεῖς. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ. λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ δευτεῖς. Καὶ ἔστι ὅμοιον⁵ τὸ Α τῷ Β· καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ⁶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσιν δεδομένον. Μὴ ἔστω δὲ ὅμοιον ἀκολουθῶς δὴ τῆ προτέρα ἀπεδείξει τὸ λοιπὸν δεικνύσεται⁷.

data igitur est ΚΛ. Est autem et ΗΘ data; ratio igitur est ipsius ΗΘ ad ΚΛ data. Et est ut ΗΘ ad ΚΛ ita ΓΔ ad ΕΖ; ratio igitur et ipsius ΓΔ ad ΕΖ data. Et est similis Α ipsi Β, et reliqua igitur latera ad reliqua latera rationem habebunt datam. Non sit autem similis; congruenter utique præcedenti demonstrationi reliquum ostendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. γέ.

PROPOSITIO LV.

Ἐὰν χωρίον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἔσονται¹.

Si spatium specie et magnitudine datum sit, et latera ejus magnitudine data erunt.

Ἐστω χωρίον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον τὸ Α· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει².

Sit spatium Α specie et magnitudine datum; dico et latera ipsius data esse magnitudine.

Ἐκκείσθω γὰρ τῆ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΒΓ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ Α ὅμοιον τε³ καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ Δ· δέ-

Exponatur enim positione et magnitudine data recta ΒΓ, et describatur ab ipsâ ΒΓ ipsi Α et similis et similiter posita figura Δ; data utique

est donné; la figure Ξ est donc donnée; la droite ΚΛ est donc aussi donnée. Mais ΗΘ est donné; la raison de ΗΘ à ΚΛ est donc donnée (1). Mais ΗΘ est à ΚΛ comme ΓΔ est à ΕΖ; la raison de ΓΔ à ΕΖ est donc donnée. Mais Α est semblable à Β; les côtés restants auront donc une raison donnée avec les côtés restants (53). Mais que Α ne soit pas semblable à Β; le reste se démontrera comme dans la démonstration précédente.

PROPOSITION LV.

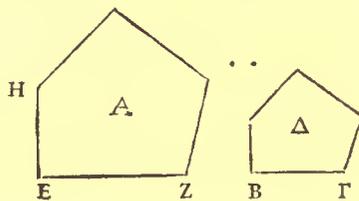
Si un espace est donné d'espèce et de grandeur, ses côtés seront donnés de grandeur.

Que l'espace Α soit donné d'espèce et de grandeur; je dis que ses côtés sont donnés de grandeur.

Car soit ΒΓ une droite donnée de position et de grandeur; sur ΒΓ décrivons la figure Δ semblable à Α et semblablement placée, la figure Δ sera donnée

δοται δὴ τὸ Δ τῶ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης
 τῶ μεγέθει εὐθείας τῆς ΒΓ δεδομένον τῶ εἶδει⁵
 εἶδος ἀναγέγραπται τὸ Δ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Δ

Δ specie. Et quoniam a datâ magnitudine rectâ
 ΒΓ data specie figura descripta est Δ; data
 igitur et Δ magnitudine. Data est autem et Α;



τῶ μεγέθει. Δίδεται δὲ καὶ τὸ Α· λόγος ἄρα τοῦ
 Α πρὸς τὸ Δ δοθείς. Καὶ ἔστι ὁμοιον⁶ τὸ Α τῶ Δ·
 λόγος ἄρα τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. Δοθεῖσα
 δὲ ἡ ΒΓ⁷· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ ἔστι λόγος
 τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ
 ΕΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν
 πλευρῶν⁸ δέδοται τῶ μεγέθει.

ratio igitur ipsius Α ad Δ data. Et est similis
 Α ipsi Δ; ratio igitur ipsius ΕΖ ad ΒΓ data.
 Data autem ΒΓ; data igitur et ΕΖ. Et est ratio
 ipsius ΕΖ ad ΕΗ data; data igitur et ΕΗ. Propter
 eadem utique et unumquoque reliquorum la-
 terum datum est magnitudine.

Α Λ Λ Ω Σ.

ALITER.

Ἐστω χαρίον τὸ ΚΑΜΝΞ δεδομένον τῶ εἶδει
 καὶ τῶ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ
 δεδομέναι εἰσὶ τῶ μεγέθει.

Sit spatium ΚΑΜΝΞ datum specie et magni-
 tudine; dico et latera ejus data esse magni-
 tudine.

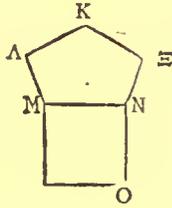
d'espèce. Puisque sur Β, Γ, donnée de grandeur, on a décrit la figure Δ donnée d'espèce, la figure Δ est donnée de grandeur (52). Mais Α est donné; la raison de Α à Δ est donc donnée (1). Mais la figure Α est semblable à la figure Δ; la raison de ΕΖ à ΒΓ est donc donnée (54); mais ΒΓ est donné; ΕΖ est donc aussi donné. Mais la raison de ΕΖ à ΕΗ est donnée (déf. 3); le côté ΕΗ est donc aussi donné. Par la même raison, chacun des autres côtés est donné de grandeur.

AUTREMENT.

Soit l'espace ΚΑΜΝΞ donné d'espèce et de grandeur; je dis que ses côtés sont donnés de grandeur.

Αναγεγράφω γάρ ἀπὸ τῆς MN τετράγωνον
τὸ MO· δέδοται ἄρα τῶ εἶδει. Ἀλλὰ καὶ τὸ AN·
λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AN πρὸς τὸ MO δοθείς. Δο-

Describatur enim ex MN quadratum MO ;
datum est igitur specie. Sed et ipsum AN ; ratio
igitur est ipsius AN ad MO data. Datum autem



θὲν δὲ τὸ AN τῶ μεγέθει· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ
MO τῶ μεγέθει. Καὶ ἔστι τετράγωνον τὸ MO
ἀπὸ τῆς MN· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς MN·
δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ MN τῶ μεγέθει. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν MA, AK, KΞ, ΞN δο-
θείσα ἐστὶ τῶ μεγέθει.

AN magnitudine. Datum igitur et MO magni-
tudine. Et est quadratum MO ex MN ; datum
igitur est ipsum ex MN ; data igitur et ipsa
MN magnitudine. Propter eadem utique et
unaquæque ipsarum MA, AK, KΞ, ΞN data
est magnitudine.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νς'.

PROPOSITIO LVI.

Ἐάν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς
ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον· ἔσται ὡς ἡ τοῦ
πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν
οὕτως ἡ λοιπὴ τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἢ ἡ

Si duo æquiangula parallelogramma inter se
rationem habeant datam ; erit ut primi latus
ad secundi latus ita reliquum secundi latus ad

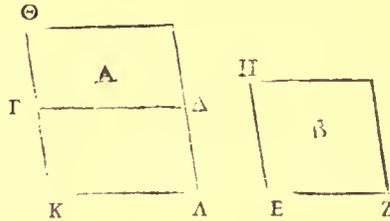
Sur MN décrivons le carré MO (46. 1) ; il sera donné d'espèce. Mais AN l'est
aussi ; la raison de AN à MO est donc donnée (49). Mais AN est donné de gran-
deur ; donc MO est aussi donné de grandeur (2). Mais MO est le carré de MN ;
le carré de MN est donc donné ; donc MN est donné de grandeur. Par la même
raison, chacun des côtés MA, AK, KΞ, ΞN est donné de grandeur.

PROPOSITION LVI.

Si deux parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison donnée, un
côté du premier est à un côté du second comme l'autre côté du second est à la
III.

ἑτέρα τοῦ πρώτου πλευρὰ² λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει πρὸς τὸ³ παραλληλόγραμμον.

Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ἢ ἡ ΓΘ λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ Α παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Β παραλληλόγραμμον.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΓΘ εὐθεΐα ἢ ΓΚ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΓΚ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΓΚ, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΚΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΓΚ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΓΚΑ, ΗΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπώνθασιν· ἴσων ἄρα ἐστὶ καὶ⁵ τὸ ΚΑ τῷ ΗΖ. Καὶ

quam alterum primi latus rationem habet datam, quam parallelogrammum habet ad parallelogrammum.

Duo enim æquiangula parallelogramma Α, Β, inter se rationem habeant datam; dico esse ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΕΗ ad quam ΓΘ rationem habet datam, quam Α parallelogrammum ad Β parallelogrammum.

Producatur enim in directum ipsi ΓΘ recta ΓΚ, et fiat ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΓΚ, et compleatur ΓΑ parallelogrammum. Quoniam igitur est ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΓΚ, æqualis autem est ΓΔ ipsi ΚΑ; est igitur ut ΚΑ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΓΚ. Et circa æquales angulos ΓΚΑ, ΗΕΖ latera reciproca sunt; æquale igitur ΚΔ ipsi ΗΖ. Et quoniam ratio est ipsius Α ad Β

droite avec laquelle l'autre côté du premier a la raison donnée, c'est-à-dire celle que l'un des parallélogrammes a avec l'autre parallélogramme.

Que les deux parallélogrammes équiangles Α, Β aient entre eux une raison donnée; je dis que ΓΔ est à ΕΖ comme ΕΗ est à la droite avec laquelle ΓΘ a la raison donnée, c'est-à-dire celle que le parallélogramme Α a avec le parallélogramme Β.

Car menons la droite ΓΚ dans la direction de ΓΘ; faisons ensorte que ΓΔ soit à ΕΖ comme ΕΗ est à ΓΚ (12. 6), et terminons le parallélogramme ΓΑ. Puisque ΓΔ est à ΕΖ comme ΕΗ est à ΓΚ, et que ΓΔ est égal à ΚΑ (34. 1); la droite ΚΑ est à ΕΖ comme ΕΗ est à ΓΚ. Mais les côtés autour des angles ΓΚΑ, ΗΕΖ sont réciproquement proportionnels; ΚΔ est donc égal à ΗΖ (14. 6). Mais la raison

ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ἴσον δὲ τὸ Β τῷ ΓΑ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΘΔ πρὸς τὸ ΓΑ δοθείς. Ὡς δὲ τὸ ΘΔ πρὸς τὸ ΓΑ οὕτως ἢ ΘΓ πρὸς τὴν ΓΚ· καὶ τῆς ΘΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἢ ΕΗ πρὸς τὴν ΓΚ, ἢ δὲ ΘΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγον ἔχει δοθέντα, ὃν τὸ Α χωρίον πρὸς τὸ Β· ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἢ ΕΗ πρὸς τὴν ἢ ΘΓ λόγον ἔχει, ὃν τὸ Α χωρίον πρὸς τὸ Β χωρίον⁶.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Εάν δοθῆν χωρίον παρὰ δοθείσαν εὐθείαν¹ παραβληθῆ ἔν δεδομένη γωνία, δίδεται τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς.

Δοθὲν γάρ τὸ ΑΗ παρὰ δοθείσαν τὴν ΑΒ παραβελήσθω ἔν δεδομένη γωνία τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· λέγω ὅτι δοθείσα ἐστὶν ἢ ΓΑ.

Αναγεγράφω γάρ² ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΕΒ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒ. Καὶ διήχθωσαν αἱ ΕΑ, ΖΒ, ΓΗ ἐπὶ τὰ Δ, Θ. Καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΕΒ, ΑΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΕΒ πρὸς

data, æquale autem B ipsi ΓΑ; ratio igitur est ipsius ΘΔ ad ΓΑ data. Ut autem ΘΔ ad ΓΑ ita ΘΓ ad ΓΚ; et ipsius ΘΓ igitur ad ΓΚ ratio est data. Et quoniam est ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΓΚ, ipsa autem ΘΓ ad ΓΚ rationem habet datam, quam Α spatium ad Β; est igitur ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΕΗ ad quam ΘΓ rationem habet, quam Α spatium ad Β spatium.

PROPOSITIO LVII.

Si datum spatium ad datam rectam applicatum fuerit in dato angulo, data est latitudo applicationis.

Datum enim spatium ΑΗ ad datam ΑΒ applicetur in dato angulo ΓΑΒ; dico datam esse ΓΑ.

Describatur enim ab ipsa ΑΒ quadratum ΕΒ; datum igitur est ΕΒ. Et productæ sint ipsæ ΕΑ, ΖΒ, ΓΗ ad puncta Δ, Θ. Et quoniam datum est utrumque ipsorum ΕΒ, ΑΗ; ratio

de A à B est donnée, et B est égal à ΓΑ; la raison de ΘΔ à ΓΑ est donc donnée. Mais ΘΔ est à ΓΑ comme ΘΓ est à ΓΚ (1. 6); la raison de ΘΓ à ΓΚ est donc donnée. Mais ΓΔ est à ΕΖ comme ΕΗ est à ΓΚ, et ΘΓ a avec ΓΚ la raison donnée, savoir celle de l'espace A à l'espace B; le côté ΓΑ est donc à ΕΖ comme ΕΗ est à la droite avec laquelle ΘΓ a la raison donnée, savoir celle que l'espace A a avec l'espace B.

PROSOSITION XVII.

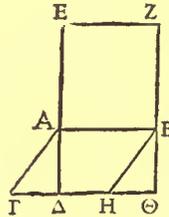
Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, dans un angle donné; la largeur de l'application est aussi donnée.

Qu'un espace donné ΑΗ soit appliqué à une droite donnée ΑΒ, dans un angle donné ΓΑΒ; je dis que ΓΑ est donné.

Sur ΑΒ décrivons le carré ΕΒ; la figure ΕΒ sera donnée. Prolongeons ΕΑ, ΖΒ, ΓΗ vers les points Δ, Θ. Puisque chacune des figures ΕΒ, ΑΗ est donnée, la

τὸ AH δοθείς. Ἴσον δὲ τὸ HA τῷ $A\Theta$. λόγος ἄρα
καὶ τοῦ EB πρὸς τὸ $A\Theta$ δοθείς³. Ὡστε καὶ τῆς
 EA πρὸς τὴν AD λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἴση δὲ ἡ EA

igitur ipsius EB ad AH data. \mathcal{A} equale autem
 HA ipsi $A\Theta$; ratio igitur et ipsius EB ad $A\Theta$ data;
quare et ipsius EA ad AD ratio est data. \mathcal{A} equalis



τῆς AB λόγος ἐστὶ ἄρα καὶ τῆς BA πρὸς τὴν⁴ AD
δοθείς. Καὶ ἐπεὶ δοθείσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ GAB
γωνία, ὧν⁵ ἡ ὑπὸ ΔAB δοθείσα ἐστὶ λοιπὴ
ἄρα ἡ ὑπὸ ΓAD ἐστὶ δοθείσα⁶. Ἐστὶ δὲ καὶ
ἡ ὑπὸ ΓDA δοθείσα, ἐρθὴ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ
ὑπὸ ΓAD δοθείσα ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ ΓAD
τρίγωνον τῷ εἶδει λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΓA πρὸς
τὴν AD δοθείς. Τῆς δὲ AD πρὸς τὴν AB λόγος
ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓA ἄρα πρὸς τὴν AB λόγος
ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθείσα ἡ BA · δοθείσα
ἄρα καὶ ἡ ΓA . Καὶ ἐστὶ τὸ πλάτος τοῦ παρα-
ελάματος⁷.

autem EA ipsi AB ; ratio est igitur et ipsius BA
ad AD data. Et quoniam datus est ΓAB angu-
lus, quorum et ipse ΔAB datus est; reliquus
igitur ΓAD est datus. Est autem ipse ΓDA datus,
rectus enim; reliquus igitur ΓAD datus est;
datum est igitur ΓAD triangulum specie; ratio
igitur est ipsius ΓA ad AD data. Ipsius autem
 AD ad AB ratio est data; et ipsius ΓA igitur
ad AB ratio est data. Et est data ipsa BA ;
data igitur et ipsa ΓA , et est latitudo applica-
tionis.

raison de EB à AH est donnée. Mais HA est égal à $A\Theta$ (55. 1); la raison de EB
à $A\Theta$ est donc donnée; la raison de EA à AD est donc donnée (1. 6). Mais EA
est égal à AB ; la raison de BA à AD est donc donnée. Mais l'angle GAB est donné,
et l'angle ΔAB est aussi donné; l'angle restant ΓAD est donc aussi donné (4).
Mais l'angle ΓDA est donné, car il est droit; l'angle restant ΓAD est donc donné
(52. 1) (4); le triangle ΓAD est donc donné d'espèce (40); la raison de ΓA à
 AD est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de AD à AB est donnée; la raison de
 ΓA à AB est donc donnée (8). Mais BA est donné; la droite ΓA est donc donnée
(2); la largeur de l'application est donc donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη'.

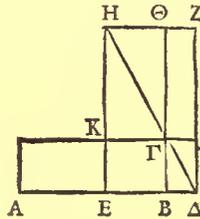
PROPOSITIO LVIII.

Εάν δοθῆν χωρίον παρὰ δοθείσαν εὐθείαν¹ παραβληθῆ, ἔλλειπον εἶδει δεδομένη τῷ εἶδει² δίδοται τὰ πλάτη τοῦ ἐλλείμματος.

Δοθῆν γάρ τὸ ΓΑ παρὰ δοθείσαν τὴν ΑΔ παραβελήσθω, ἔλλειπον εἶδει δεδομένη τῷ ΓΔ λέγω ὅτι δοθείσά ἐστίν ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΒΔ.

Si datum spatium ad datam rectam applicata fuerit deficiens datâ specie figurâ, datæ sunt latitudines defectûs.

Datum enim spatium ΓΑ ad datam ΑΔ applicetur, deficiens datâ specie figurâ ΓΔ; dico datam esse utramque ipsarum ΓΒ, ΒΔ.



Τετμήσθω γάρ ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Ε σημείον· δοθείσα ἄρα ἐστίν ἡ ΕΔ τῷ μεγέθει². Καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΔ τῷ ΓΔ ὁμοιον καὶ ἐμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΕΖ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα³ δίδοται ἄρα καὶ³ τὸ ΕΖ τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς ΕΔ δεδομένον τῷ εἶδει εἶδος ἀναγέγραπται τὸ ΕΖ·

Secetur enim ΑΔ bifariam in puncto Ε; data igitur est ipsa ΕΔ magnitudine. Et describatur ab ipsâ ΕΔ ipsi ΓΔ simile et similiter positum rectilineum ΕΖ, et construatur figura; datum est igitur et ΕΖ specie. Et quoniam a datâ rectâ ΕΔ data specie figura ΕΖ descripta est; data est

PROPOSITION LVIII.

Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, et si cet espace est défailant d'une figure donnée d'espèce, les largeurs du défaut sont données.

Qu'un espace donné ΓΑ soit appliqué à une droite donnée ΑΔ, et que cet espace soit défailant d'une figure ΓΔ donnée d'espèce; je dis que chacune des droites ΓΒ, ΒΔ est donnée.

Car partageons ΑΔ en deux parties égales au point Ε (10. 1); la droite ΕΔ sera donnée de grandeur (2). Sur ΕΔ, décrivons la figure rectiligne ΕΖ semblable à la figure ΓΔ et semblablement placée (18. 6), et construisons la figure; la figure ΕΖ sera donnée d'espèce. Puisque sur la droite donnée ΕΔ, on a décrit la figure ΕΖ donnée d'espèce; la figure ΕΖ sera donnée de grandeur (52). Mais

δέδοται ἄρα τὸ EZ τῷ μεγέθει. Καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ΑΓ, ΚΘ. δέδοται ἄρα καὶ τὰ ΑΓ, ΚΘ τῷ μεγέθει. Καὶ ἔστι τὸ ΑΓ δοθὲν τῷ μεγέθει, ὑπocκειται γάρ λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΘ δοθὲν ἔστι τῷ μεγέθει. Ἐστι δὲ καὶ τῷ εἶδει δοθὲν, ὅμοιον γάρ ἔστι τῷ ΓΔ. τοῦ ΘΚ ἄρα δεδομέναι εἰσὶν αἱ πλευραὶ. δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἢ ΚΓ. Καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΕΒ. δοθεῖσα ἄρα ἔστιν καὶ ἢ ΕΒ. Ἐστι δὲ καὶ ἢ ΕΔ δοθεῖσα. καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΔΒ δοθεῖσα ἔστι⁵. Καὶ λόγος τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. δοθεῖσα ἄρα ἔστι καὶ ἢ ΒΓ.

igituri psa EZ magnitudine. Et est æqualis ipsis ΑΓ, ΚΘ; datae sunt igitur et ipsæ ΑΓ, ΚΘ magnitudine. Et est ipsa ΑΓ data magnitudine, supponitur enim; reliqua igitur ΚΘ data est magnitudine. Est autem et specie data, similis enim ipsi ΓΔ; ipsius ΘΚ igitur data sunt latera; data igitur est ipsa ΚΓ. Et est æqualis ipsi ΕΒ; data igitur est et ipsa ΕΒ. Est autem et ΕΔ data; et reliqua igitur ΔΒ data est. Et ratio ipsius ΒΔ ad ΒΓ data; data igitur est et ipsa ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

PROPOSITIO LIX.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῆ, ὑπέρβαλλον τῷ εἶδει δεδομένου εἶδει¹. δέδοται τὰ πλάτη τῆς ὑπερβολῆς.

Δοθὲν γάρ τὸ ΑΒ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΓ παραβλήσθω, ὑπέρβαλλον εἶδει δεδομένου εἶδει² τῷ ΓΒ. λέγω ὅτι δοθεῖσά ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΘΓ, ΓΕ.

Si datum spatium ad datam rectam applicetur, excedens datâ specie figurâ, datae sunt latitudines excessûs.

Datum enim spatium ΑΒ ad datam ΑΓ applicetur, excedens datâ specie figurâ ΓΒ; dico datam esse utramque ipsarum ΘΓ, ΓΕ.

cette figure est égale à la somme des figures ΑΓ, ΚΘ (36, et 43. 1); la somme des figures ΑΓ, ΚΘ est donc donnée de grandeur. Mais ΑΓ est donné de grandeur, par supposition; la figure restante ΚΘ est donc donnée de grandeur (4). Mais elle est donnée d'espèce, car elle est semblable à la figure ΓΔ; les côtés de la figure ΘΚ sont donc donnés (55); la droite ΚΓ est donc donnée. Mais elle est égale à ΕΒ (54. 1); la droite ΕΒ est donc donné. Mais ΕΔ est donné; la droite restante ΔΒ est donc donnée (4). Mais la raison de ΒΔ à ΒΓ est donnée (déf. 3); donc ΒΓ est donné (2).

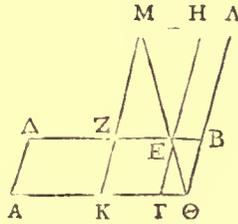
PROPOSITION LIX.

Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, et si cet espace est excédent d'une figure donnée d'espèce, les côtés de l'excès sont donnés.

Qu'un espace donné ΑΒ soit appliqué à une droite donnée ΑΓ, et que cet espace soit excédent d'une figure ΓΒ donnée d'espèce; je dis que chacun des côtés ΘΓ, ΓΕ est donné.

Τετμήσθω γὰρ δίχα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ΓΒ ὅμοιον καὶ ἰσώως κείμενον τὸ ΖΗ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι τὸ ΖΗ τῷ ΓΒ· ἤχθω αὐτῶν διά-

Secetur enim bifariam ΔΕ in Z puncto, et describatur ab ipsâ ΕΖ ipsi ΓΒ simile et similiter positum ΖΗ; circa eadem igitur diametrum est ipsum ΖΗ cum ipso ΓΒ; ducatur ipsorum dia-



μετρος ἡ ΘΕΜ³, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιον ἔστι τὸ ΓΒ τῷ ΖΗ⁴· δίδεται δὲ τὸ ΓΒ τῷ εἶδει· δίδεται ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τῷ εἶδει· καὶ ἀναγράφεται ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς ΖΕ· δοθέν ἄρα ἔστι τὸ ΖΗ τῷ μεγέθει. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· δοθέντα ἄρα ἔστι τὰ ΑΒ, ΖΗ τῷ μεγέθει. Καὶ ἔστιν ἴσα τῷ ΚΑ⁵· δοθέν ἄρα ἔστι τὸ ΚΑ τῷ μεγέθει⁵. Ἔστι δὲ καὶ τῷ εἶδει, ὅμοιον γάρ ἔστι τῷ ΓΒ· τοῦ ΚΑ ἄρα αἱ πλευραὶ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει⁶· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἡ ΚΘ. Καὶ ἡ ΚΓ δοθεῖσα ἔστιν, ἴση γὰρ ἔστι τῇ ΖΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΘ ἔστι δοθεῖσα⁸, καὶ

meter ΘΕΜ, et construaturs figura. Et quoniam simile est ΓΒ ipsi ΖΗ, datum est autem ΓΒ specie; datum igitur est et ΖΗ specie; et descriptum est a datâ rectâ ΖΕ; datum igitur est ΖΗ magnitudine. Est autem et ΑΒ datum; data igitur sunt ΑΒ, ΖΗ magnitudine. Et sunt æqualia ipsi ΚΑ; datum igitur est ΚΑ magnitudine. Est autem et specie, simile enim est ipsi ΓΒ; ipsius ΚΑ igitur latera data sunt magnitudine; data igitur est ΚΘ. Et ipsa ΚΓ data est, æqualis enim est ipsi ΖΕ; reliqua igitur ΓΘ est data, et ra-

Car partageons ΔΕ en deux parties égales au point Z; sur ΖΕ décrivons la figure ΖΗ semblable à ΓΒ et semblablement placée (18. 6); la figure ΖΗ sera autour de la même diagonale que la figure ΓΒ (26. 6); menons leur diagonale ΘΕΜ, et construisons la figure. Puisque ΓΒ est semblable à ΖΗ, et que ΓΒ est donné d'espèce, la figure ΖΗ sera donnée d'espèce. Mais cette figure est décrite sur la droite donnée ΖΕ; la droite ΖΗ est donc donnée de grandeur (52). Mais ΑΒ est donné; la somme des figures ΑΒ, ΖΗ est donc donnée de grandeur. Mais la somme de ces figures est égale à ΚΑ (36 et 43. 1); la figure ΚΑ est donc donnée de grandeur (5). Mais cette figure est donnée d'espèce, car elle est semblable à ΓΒ; les côtés de ΚΑ sont donc donnés de grandeur (55); la droite ΚΘ est donc donnée. Mais ΚΓ est donné, car il est égal à ΖΕ (54. 1); la droite restante ΓΘ est donc donnée. Mais

λόγον ἔχει πρὸς τὴν ΘB δοθέντα· δοθείσα ἄρα
ἐστὶν καὶ ἡ ΘB .

tionem habet ad ΘB datam ; data igitur est
et ΘB .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ'.

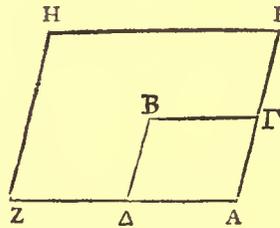
PROPOSITIO LX.

Εὰν παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἶδει
καὶ τῷ μεγέθει δεδομένα γνώμονι αὐξήσῃ ἢ
μειωσῇ, δέδοται τὰ πλάτη τοῦ γνώμονος.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ AB δεδομένον τῷ
εἶδει καὶ τῷ μεγέθει ὑψήσθω πρότερον δεδομένα
γνώμονι τῷ $\text{EFG}\Delta\text{ZH}$ · λέγω ὅτι δοθείσα ἐστὶν
ἐκατέρα τῶν GE , ΔZ .

Si parallelogrammum datum specie et magni-
tudine, dato gnomone augeatur vel minuatur,
datae sunt latitudines gnomonis.

Parallelogrammum enim AB datum specie et
magnitudine augeatur primum dato gnomone
 $\text{EFG}\Delta\text{ZH}$; dico datam esse utramque ipsarum
 GE , ΔZ .



Ἐπεὶ γὰρ δοθὲν ἐστὶ τὸ AB , ἐστὶ δὲ καὶ ὁ
 $\text{EFG}\Delta\text{ZH}$ γνώμων δοθείς· καὶ ὅλον ἄρα τὸ AH
δοθὲν ἐστὶ. Ἀλλὰ καὶ τῷ εἶδει, ὅμοιον γὰρ ἐστὶ
τῷ AB · τοῦ AH ἄρα δεδομένα ἐσὶν αἱ πλευραί.

Quoniam enim data est AB , est autem et
 $\text{EFG}\Delta\text{ZH}$ gnomon datus ; et totum igitur AH
datum est. Sed et specie, simile enim est ipsi
 AB ; ipsius AH igitur data sunt latera ; datum

cette droite a une raison donnée avec ΘB (déf. 3) ; la droite ΘB est donc
donnée (2).

PROPOSITION LX.

Si un parallélogramme donné d'espèce et de grandeur, est augmenté ou
diminué d'un gnomon donné, les largeurs du gnomon sont données.

Que le parallélogramme AB , donné d'espèce et de grandeur, soit augmenté
du gnomon $\text{EFG}\Delta\text{ZH}$; je dis que chacune des droites GE , ΔZ est donnée.

Car puisque AB est donné, et que le gnomon $\text{EFG}\Delta\text{ZH}$ est aussi donné, l'espace
entier AH sera donné. Mais cet espace est donné d'espèce, car il est semblable
à AB (26. 6), les côtés de AH sont donc donnés (55) ; chacune des droites AE ,

δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΑΖ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΓΑ, ΑΔ δοθείσα· λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΖΔ ἐστὶ δοθείσα².

Πάλιν δὴ παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ δεδομένον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει μειώσθω δεδομένῳ γνόμονι τῷ ΕΓΒΔΖΗ· λέγω ὅτι δοθείσα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθὲν ἐστὶ τὸ ΑΗ, οὗ ὁ ΕΓΒΔΖΗ γνώμων δοθεὶς ἐστὶ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ δοθὲν ἐστὶν. Ἀλλὰ καὶ τῷ εἶδει, ὁμοιον γάρ ἐστὶ τῷ ΗΑ³· τοῦ ΑΒ ἄρα αἱ πλευραὶ δεδομέναι εἰσὶν· δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΑ, ΑΔ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΑΖ δοθείσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΔΖ δοθείσα ἐστὶν.

igitur est utraque ipsarum ΑΕ, ΑΖ. Est autem et utraque ipsarum ΓΑ, ΑΔ data; reliqua igitur utraque ipsarum ΕΓ, ΖΔ est data.

Rursus autem parallelogrammum ΑΗ datum specie et magnitudine minuatur dato gnomone ΕΓΒΔΖΗ; dico datam esse utramque rectarum ΓΕ, ΔΖ.

Quoniam enim datum est ΑΗ, cujus ΕΓΒΔΖΗ gnomon datus est; reliquum igitur ΑΒ datum est. Sed et specie, simile enim est ipsi ΗΑ; ipsius ΑΒ igitur latera data sunt; datum igitur est utrumque laterum ΓΑ, ΑΔ. Est autem et utrumque laterum ΕΑ, ΑΖ datum; et reliqua igitur utraque ipsarum ΕΓ, ΔΖ data est.

AZ est donc donnée. Mais chacune des droites ΓΑ, ΑΔ est donnée; chacune des droites restantes ΕΓ, ΖΔ est donc donnée aussi (4).

Mais de plus, que le parallélogramme ΑΗ, donné d'espèce et de grandeur, soit diminué du gnomon donné ΕΓΒΔΖΗ; je dis que chacune des droites ΓΕ, ΔΖ est donnée.

Car puisque ΑΗ est donné, et que le gnomon ΕΓΒΔΖΗ est donné aussi, la surface restante ΑΒ est donnée (4). Mais cette surface est donnée d'espèce, car elle est semblable à ΗΑ (26. 6); les côtés de ΑΒ sont donc donnés (55); chacune des droites ΓΑ, ΑΔ est donc donnée. Mais chacune des droites ΕΑ, ΑΖ est donnée; chacune des droites restantes ΕΓ, ΔΖ est donc donnée (4).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΑ΄.

Εὰν δεδομένου τῷ εἶδει εἶδους παρά μίαν τῶν πλευρῶν παραλληλόγραμμον χωρίον παραβληθῆ ἔν δεδομένη γωνία, ἔχη δὲ τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δέδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει.

Δεδομένου γὰρ τῷ εἶδει εἶδους τοῦ ΑΖΓΒ παρά μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΒ παραλληλόγραμμον χωρίον παραβελήσθω τὸ ΓΔ ἐν δεδομένη γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ΑΓ εἶδους πρὸς τὸ ΓΔ παραλληλόγραμμον¹ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἶδει.

Ἡχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΖΓ παράλληλος ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΓΒ παράλληλος ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Κ, Θ σημεῖα. Ἐπεὶ οὖν² δοθείσα ἔστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία, καὶ λόγος ἔστι τῆς ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ δοθείς· διὸ ἐν ἄρα ἔστι τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει. Δέδοται δὲ τῷ εἶδει τὸ ΑΖΓΒ εἶδος, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΓΒ παραλληλόγραμμον

PROPOSITIO LXI.

Si ad datæ speciei figuræ unum laterum parallelogrammum spatium applicetur in dato angulo, habeat autem figura ad parallelogrammum rationem datam, datum est parallelogrammum speciei.

Etenim ad datæ speciei figuræ ΑΖΓΒ unum laterum ΓΒ parallelogrammum spatium ΓΔ applicetur in dato angulo ΑΓΒ, ratio autem sit figuræ ΑΓ ad ΓΔ parallelogrammum data; dico datum esse ipsum ΓΔ speciei.

Ducatur enim per punctum quidem Β ipsi ΖΓ parallela ΒΗ, per punctum Ζ vero ipsi ΓΒ parallela ΖΗ, et producantur ipsæ ΖΓ, ΗΒ ad Κ, Θ puncta. Quoniam igitur datus est angulus ΖΓΒ, et ratio est ipsius ΖΓ ad ΓΒ data; datum igitur est ΖΒ parallelogrammum speciei. Data est autem speciei figura ΑΖΓΒ, et descriptum est ab eâdem rectâ ΓΒ parallelo-

PROPOSITION LXI.

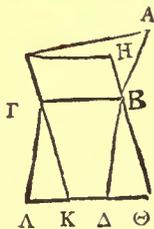
Si un parallélogramme est appliqué à un côté d'une figure donnée d'espèce dans un angle donné, et si cette figure a une raison donnée avec ce parallélogramme, ce parallélogramme est donné d'espèce.

Que le parallélogramme ΓΔ soit appliqué à un des côtés ΓΒ de la figure ΑΖΓΒ donnée d'espèce, dans l'angle donné ΑΓΒ, et que la raison de la figure ΑΓ au parallélogramme ΓΔ soit donnée; je dis que ΓΔ est donné d'espèce.

Car par le point Β menons la droite ΒΗ parallèle à ΖΓ, et par le point Ζ la droite ΖΗ parallèle à ΓΒ (31. 1). Prolongeons ΖΓ, ΗΒ vers les points Κ, Θ. Puisque l'angle ΖΓΒ est donné (déf. 3), et que la raison de ΖΓ à ΓΒ est aussi donnée, le parallélogramme ΖΒ sera donné d'espèce. Mais la figure ΑΖΓΒ est donnée d'espèce, et sur ΓΒ on a décrit le parallélogramme ΖΒ donné d'espèce;

δεδομένον τῶ εἶδει τὸ ΖΒΐ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΓ εἶδους πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον δοθείς. Τοῦ δὲ ΑΖΓΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἵπειδὴ ὑπόκειται⁵, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῶ ΚΒ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΚΒ πρὸς τὸ ΓΗ ἐστὶ⁶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΖΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τῆς δὲ ΖΓ πρὸς

grammum datum specie ipsum ΖΒ ; ratio igitur est figuræ ΑΓ ad parallelogrammum ΖΒ data. Ipsius autem ΑΖΓΒ ad ΓΔ ratio est data , quoniam supponitur , æquale autem ΓΔ ipsi ΚΒ ; ratio igitur et ipsius ΚΒ ad ΓΗ est data ; quare et ipsius ΖΓ ad ΓΚ ratio est data.



τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ δοθείσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ ἐστὶ⁷ δοθείσα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία⁷ δοθείσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΚ δοθείσά ἐστιν⁸. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΓ γωνία δοθείσα, ἴση γάρ ἐστὶ⁹ τῇ ὑπὸ ΚΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ¹⁰ ΓΑΚ ἐστὶ δοθείσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΚΓ τρίγωνον τῶ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. Τῆς δὲ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΓ ἄρα πρὸς

Ipsius autem ΖΓ ad ΓΒ ratio est data ; et ipsius ΒΓ igitur ad ΓΚ ratio est data. Et quoniam datus est ΖΓΒ angulus ; et ipse deinceps igitur ΒΓΚ est datus. Est autem et ΒΓΑ angulus datus ; reliquus igitur ΑΓΚ datus est. Est autem et ΑΚΓ angulus datus , æqualis enim est ipsi ΚΓΒ ; reliquus igitur ΓΑΚ est datus ; datum est igitur ΑΚΓ triangulum specie ; ratio igitur, est ipsius ΑΓ ad ΓΚ data. Ipsius autem ΚΓ ad ΓΒ ratio est data ; et ipsius ΑΓ

la raison de la figure ΑΓ au parallélogramme ΖΒ est donc donnée (49). Mais la raison de ΑΖΓΒ à ΓΔ est donnée, par supposition, et ΓΔ est égal à ΚΒ (35. 1) ; la raison de ΚΒ à ΓΗ est donc donnée (8) ; la raison de ΖΓ à ΓΚ est donc donnée aussi (1. 6). Mais la raison de ΖΓ à ΓΒ est donnée (déf. 3) ; la raison de ΒΓ à ΓΚ est donc donnée (8). Mais l'angle ΖΓΒ est donné ; l'angle de suite ΒΓΚ est donc donné aussi (13. 1) (4). Mais l'angle ΒΓΑ est donné ; l'angle restant ΑΓΚ est donc donné (4). Mais l'angle ΑΚΓ est donné, car il est égal à l'angle ΚΓΒ (29. 1) ; l'angle restant ΓΑΚ est donc donné (52. 1) (4) ; le triangle ΑΚΓ est donc donné d'espèce (40) ; la raison de ΑΓ à ΓΚ est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de

τὴν ΓΒ λόγος ἴστί δοθεῖς. Καὶ ἔστι δοθεῖσα ἢ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει.

igitur ad ΓΒ ratio est data. Et est datus ΑΓΒ angulus; datum est igitur ΓΔ parallelogrammum specie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΒ'.

PROPOSITIO LXII.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀναγραφῇ ἀπὸ μὲν τῆς μιᾶς δεδομένον τῷ εἶδει εἶδος, ἀπὸ δὲ τῆς ἑτέρας χωρίον παραλληλόγραμμον ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἔχη δὲ τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει.

Si due rectæ inter se rationem habeant datam, et descripta sit ab unâ quidem data specie figura, ab alterâ vero spatium parallelogrammum in dato angulo, habeat autem figura ad parallelogrammum rationem datam; datum est parallelogrammum specie.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχεταισαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ μὲν τῆς ΑΒ δεδομένον τῷ εἶδει εἶδος τὸ ΑΕΒ, ἀπὸ δὲ τῆς ΓΔ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΔ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ΑΕΒ εἶδους πρὸς τὸ ΖΔ παραλληλόγραμμον δοθεῖς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει.

Dux enim rectæ ΑΒ, ΓΔ inter se rationem habeant datam, et descripta sit ab ipsâ quidem ΑΒ data specie figura ΑΕΒ, ab ipsâ vero ΓΔ parallelogrammum ΔΖ in dato angulo ΖΓΔ, ratio autem sit figuræ ΑΕΒ ad ΖΔ parallelogrammum data; dico datum esse parallelogrammum ΔΖ specie.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ΖΔ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον² τὸ ΑΗ.

Describatur enim ab ipsâ ΑΒ ipsi ΖΔ simile et similiter positum parallelogrammum ΑΗ. Et

ΚΓ à ΒΓ est donnée; la raison de ΑΓ à ΓΒ est donc donnée (1) Mais l'angle ΑΓΒ est donné; le parallélogramme ΓΔ est donc donné d'espèce (déf. 5).

PROPOSITION LXII.

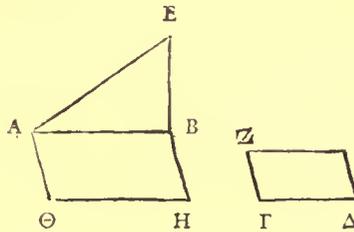
Si deux droites ont entre elles une raison donnée, si sur l'une d'elles on décrit une figure donnée d'espèce, si sur l'autre on décrit un parallélogramme dans un angle donné, et si cette figure a une raison donnée avec le parallélogramme; le parallélogramme est donné d'espèce.

Que les deux droites ΑΒ, ΓΔ aient entre elles une raison donnée; sur ΑΒ décrivons une figure ΑΕΒ donnée d'espèce, et sur ΓΔ, dans l'angle donné ΖΓΔ, décrivons le parallélogramme ΔΖ; que la raison de la figure ΑΕΒ au parallélogramme ΖΔ soit donnée; je dis que le parallélogramme ΔΖ est donné d'espèce.

Car sur ΑΒ construisons le parallélogramme ΑΗ semblable à ΖΔ et semblable-

Καὶ ἐπεὶ λόγος τῆς AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ δοθείς ἐστι³, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ AH , $Z\Delta$.

quoniam ratio ipsius AB ad $\Gamma\Delta$ data est, et descripta sunt ab ipsis AB , $\Gamma\Delta$ similia et similiter posita, AH , $Z\Delta$; ratio igitur est ipsius



λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AH πρὸς τὸ $Z\Delta$ δοθείς. Τοῦ δὲ $Z\Delta$ πρὸς τὸ AEB λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ AEB ἄρα πρὸς τὸ AH λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθείσα ἡ ὑπὸ ABH γωνία, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ $Z\Gamma\Delta$. ἐπεὶ οὖν δεδομένου τῶν εἶδει εἶδους τοῦ AEB παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AB παραέθηκεται τὸ AH ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABH , καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ AEB εἶδους πρὸς τὸ AH παραλληλόγραμμον δοθείς· δίδεται ἄρα τὸ AH τῶν εἶδων. Καὶ ἐστὶν ὅμοιον τῶν $Z\Delta$ · δίδεται ἄρα καὶ τὸ $Z\Delta$ τῶν εἶδων.

AH ad $Z\Delta$ data. Ipsius autem $Z\Delta$ ad AEB ratio est data; et ipsius AEB igitur ad AH ratio est data. Et est datus ABH angulus, æqualis enim est ipsi $Z\Gamma\Delta$; quoniam igitur ad unum laterum AB datæ speciei figuræ AEB applicatum est ipsum AH in dato angulo ABH , et ratio est figuræ AEB ad AH parallelogrammum data, datum igitur est ipsum AH speciei. Et est simile ipsi $Z\Delta$; datum est igitur et $Z\Delta$ speciei.

ment placée (18. 6). Puisque la raison de AB à $\Gamma\Delta$ est donnée, et que sur AB , $\Gamma\Delta$ on a décrit les figures AH , $Z\Delta$ semblables et semblablement placées, la raison de AH à $Z\Delta$ sera donnée (50). Mais la raison de $Z\Delta$ à AEB est donnée; la raison de AEB à AH est donc donnée (8). Et puisque l'angle ABH est donné, car il est égal à l'angle $Z\Gamma\Delta$; qu'à un des côtés AB de la figure AEB donnée d'espèce, on a appliqué la figure AH dans l'angle donné ABH , et que la raison de la figure AEB au parallélogramme AH est donnée (49); la figure AH sera donnée d'espèce (61). Mais cette figure est semblable à $Z\Delta$; la figure $Z\Delta$ est donc donnée d'espèce (déf. 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΓ΄.

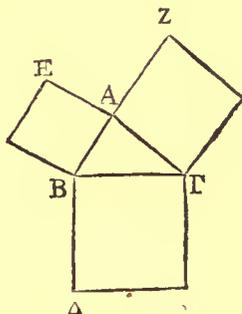
PROPOSITIO LXIII.

Εάν τρίγωνον τῷ εἶδει δεδομένον ᾗ, τὸ ἀπὸ
ἐκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνον¹ πρὸς τὸ
τρίγωνον λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἶδει τὸ $AB\Gamma$, καὶ
ἀναγεγράφω ἀπὸ ἐκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ
τετράγωνα τὰ EB , $\Gamma\Delta$, ΓZ λέγω ὅτι ἕκαστον
τῶν EB , $\Gamma\Delta$, ΓZ πρὸς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον λόγον
ἕξει δεδομένον.

Si triangulum specie datum sit, ab uno-
quoque laterum ejus quadratum ad triangulum
rationem habebit datam.

Sit triangulum $AB\Gamma$ datum specie, et des-
cribantur ab unoquoque laterum ipsius quadrata
 EB , $\Gamma\Delta$, ΓZ ; dico unumquodque quadratorum
 EB , $\Gamma\Delta$, ΓZ ad triangulum $AB\Gamma$ rationem ha-
biturum esse datam.



Ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς $B\Gamma$ εὐ-
θύγραμμα δεδομένα τῷ εἶδει ἀναγράφονται ἂ
ἔτυχεν, τὰ $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta$ λόγος ἄρα τοῦ $AB\Gamma$ πρὸς
τὸ $\Gamma\Delta$ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκατέρου
τῶν EB , ΓZ πρὸς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον λόγος ἴστί
δοθείς.

Quoniam enim ab eadem rectâ $B\Gamma$ rectili-
nea data specie descripta sunt quædam $AB\Gamma$,
 $\Gamma\Delta$; ratio igitur ipsius $AB\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ data. Propter
eadem utique et utriusque ipsorum EB , ΓZ ad
 $AB\Gamma$ triangulum ratio est data.

PROPOSITION LXIII.

Si un triangle est donné d'espèce, le carré de chacun de ses côtés aura une raison donnée avec ce triangle.

Soit $AB\Gamma$ un triangle donné d'espèce; sur ses côtés, décrivons les carrés EB , $\Gamma\Delta$, ΓZ ; je dis que chacun des carrés EB , $\Gamma\Delta$, ΓZ aura une raison donnée avec le triangle $AB\Gamma$.

Car puisque sur la même droite $B\Gamma$, on a décrit des figures rectilignes quelconques $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta$ données d'espèce, la raison de $AB\Gamma$ à $\Gamma\Delta$ sera donnée (49). La raison de chacun des carrés EB , ΓZ au triangle $AB\Gamma$ est donnée par la même raison.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΔ'.

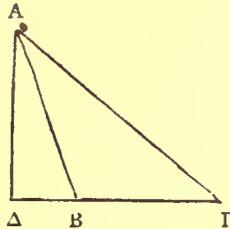
PROPOSITIO LXIV.

Εάν τρίγωνον ἀμβλεῖαν ἔχη γωνίαν δεδομένην ᾧ μείζον δύναται ἢ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἐστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον γωνίαν¹ τὴν ὑπὸ ΑΒΓ δεδομένην, καὶ διήχθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΒΓ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν² ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τευτέστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Si triangulum obtusum habeat angulum datum, quo magis potest latus obtusum angulum subtendens quam latera comprehendentia obtusum angulum, illud spatium ad triangulum rationem habebit datum.

Sit triangulum obtusangulum ΑΒΓ, obtusum habens angulum ΑΒΓ datum, et producatum in directum ipsi ΒΓ recta ΒΔ, et ducatur a puncto Α ad ΔΓ perpendicularis ΑΔ; dico quo majus est quadratum ex ΑΓ quam quadrata ex ipsis ΑΒ, ΒΓ, id est rectangulum bis sub ΔΒ, ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habere datum.



Ἐπεὶ γὰρ δευτεῖρά ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία³, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ δευτεῖρά ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ

Quoniam enim datus est ΑΒΓ angulus, et ΑΒΔ angulus datus est. Est autem et ΑΔΒ datus,

PROPOSITION LXIV.

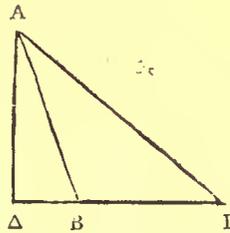
Si un triangle a un angle obtus donné, la surface dont le carré du côté qui soutend l'angle obtus surpasse la somme des carrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, aura une raison donnée avec ce triangle.

Soit le triangle obtus-angle ΑΒΓ ayant l'angle obtus ΑΒΓ donné, menons la droite ΒΔ dans la direction de ΒΓ, et du point Α menons ΑΔ perpendiculaire à ΔΓ; je dis que la surface dont le carré de ΑΓ surpasse la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ, c'est-à-dire que le double rectangle sous ΔΒ, ΒΓ a une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

Car puisque l'angle ΑΒΓ est donné, l'angle ΑΒΔ est donné aussi (13. 1) (4).

ΑΔΒ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΔΑΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δοθείς ἐστι⁵. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ,

et reliquus igitur $\triangle A B$ datus est; datum est igitur $\triangle A B \Delta$ triangulum specie; ratio igitur ipsius $A \Delta$ ad ΔB data est. Et est ut $A \Delta$ ad ΔB ita ipsum sub $A \Delta$, $B \Gamma$ ad ipsum sub $A \Delta$, $B \Gamma$; quare et ipsius sub $A \Delta$, $B \Gamma$ ad ipsum sub ΔB , $B \Gamma$ ratio est data; et ipsius bis igitur sub ΔB , $B \Gamma$ ad ip-



ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ λόγος ἐστὶ⁶ δοθείς. Ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ⁷ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἐκείνο ἄρα τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

sum sub $A \Delta$, $B \Gamma$ ratio est data. Sed ipsius sub $A \Delta$, $B \Gamma$ ad $\triangle A B \Gamma$ triangulum ratio est data; et ipsius bis igitur sub $A B$, $B \Gamma$ ad $\triangle A B \Gamma$ triangulum ratio est data. Et est ipsum bis sub ΔB , $B \Gamma$ quo majus est ipsum ex $A \Gamma$ quam ipsa ex ipsis $A B$, $B \Gamma$; illud igitur spatium ad $\triangle A B \Gamma$ triangulum rationem habet datam.

Mais l'angle $\angle A D B$ est donné; l'angle restant $\angle A B D$ est donc donné (32. 1) (4); le triangle $\triangle A B D$ est donc donné d'espèce (40); la raison de $A \Delta$ à ΔB est donc donnée (déf. 3). Mais $A \Delta$ est à ΔB comme le rectangle sous $A \Delta$, $B \Gamma$ est au rectangle sous $A B$, $B \Gamma$ (1. 6); la raison du rectangle sous $A \Delta$, $B \Gamma$ au rectangle sous ΔB , $B \Gamma$ est donc donnée; la raison de deux fois le rectangle sous ΔB , $B \Gamma$ au rectangle sous $A \Delta$, $B \Gamma$ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous $A \Delta$, $B \Gamma$ au triangle $\triangle A B \Gamma$ est donnée (41. 1); la raison de deux fois le rectangle sous $A B$, $B \Gamma$ au triangle $\triangle A B \Gamma$ est donc donnée (8). Mais deux fois le rectangle sous ΔB , $B \Gamma$ est la surface dont le carré de $A \Gamma$ surpasse la somme des carrés des droites $A B$, $B \Gamma$ (12. 2); cette surface a donc une raison donnée avec le triangle $\triangle A B \Gamma$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΕ΄.

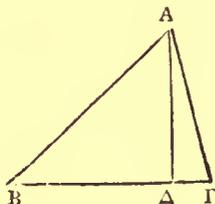
PROPOSITIO LXV.

Εάν τρίγωνον ὀξείαν ἔχη γωνίαν δεδομένην ᾧ ἔλασσον δύναται ἢ τὴν ὀξείαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῶν τὴν ὀξείαν γωνίαν περιχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἐστω τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀξείαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἢ ΔΔ. λέγω ὅτι ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ σπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Si triangulum acutum habeat angulum datum; quo minus potest latus acutum angulum subtendens quam latera acutum angulum comprehendentia, illud spatium ad triangulum rationem habebit datam.

Sit triangulum acutangulum ΑΒΓ, acutum habens angulum ΑΒΓ, et ducatur a puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ; dico quo minus est ipsum ex ΑΓ quam ipsa ex ipsis ΑΒ, ΒΓ, hoc est ipsum bis sub ΓΒ, ΒΔ, ad ΑΒΓ triangulum rationem habere datam.



Ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ³ ΒΑΔ ἐστὶ δοθεῖσα· δίδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ

Quoniam enim datus est ΑΒΔ angulus, est autem et ipse ΑΔΒ datus; et reliquis igitur ΒΑΔ est datus; datum igitur ΑΒΔ triangulum

PROPOSITION LXV.

Si un triangle a un angle aigu donné, la surface dont le carré du côté qui soutend l'angle aigu est surpassé par la somme des carrés des côtés qui comprennent l'angle aigu, aura une raison donnée avec le triangle.

Soit le triangle acutangle ΑΒΓ ayant l'angle aigu ΑΒΓ donné; du point Α menons ΑΔ perpendiculaire à ΒΓ; je dis que ce dont le carré de ΑΓ est surpassé par la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ, c'est-à-dire que deux fois le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ, a une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

Car puisque l'angle ΑΒΔ est donné, et que l'angle ΑΔΒ est aussi donné, l'angle restant ΒΑΔ sera donné (31. 1) (4); le triangle ΑΒΔ est donc donné d'espèce; la

τρίγωνον τῷ εἶδει λόγος ἄρα τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλά⁴ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον⁵ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τριγώνων λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ τὸ δις⁶ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ὃ ἕλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὃ ἄρα ἕλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει⁷ δεδομένον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΣ'.

Εὰν τρίγωνον δεδομένην ἔχη γωνίαν· τὸ ὑπὸ τῶν τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν ῥηθωγώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔχει¹ δεδομένον.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

raison de ΒΔ à ΔΑ est donc donnée (déf. 3); la raison du rectangle sous ΓΒ, ΒΔ au rectangle sous ΓΒ, ΑΔ est donc donnée (1. 6); la raison de deux fois le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ au rectangle sous ΓΒ, ΑΔ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΓ, ΑΔ au triangle ΑΒΓ est donnée (41. 1); la raison de deux fois le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ au triangle ΑΒΓ est donc donnée (8). Mais deux fois le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est ce dont le carré de ΑΓ est surpassé par la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ (13. 2); la surface dont le carré de ΑΓ est surpassé par la somme des carrés des droite ΑΒ, ΒΓ a donc une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

PROPOSITION LXVI.

Si un triangle a un angle donné, le rectangle sous les droites qui comprennent l'angle donné, aura une raison donnée avec le triangle.

Soit le triangle ΑΒΓ ayant un angle donné Α; je dis que le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ a une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

specie; ratio igitur ipsius ΒΔ ad ΔΑ data; quare et ipsius sub ΓΒ, ΒΔ ad ipsum sub ΓΒ, ΑΔ ratio est data; et ipsius bis sub ΓΒ, ΒΔ igitur ad ipsum sub ΓΒ, ΑΔ ratio est data. Sed ipsius sub ΒΓ, ΑΔ ad triangulum ΑΒΓ ratio est data; et ipsius bis sub ΓΒ, ΒΔ igitur ad ΑΒΓ triangulum ratio est data. Et est ipsum bis sub ΓΒ, ΒΔ, quo minus est quadratum ex ΑΓ quam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; quo igitur minus est quadratum ex ΑΓ quam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habet datam.

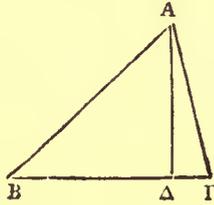
PROPOSITIO LXVI.

Si triangulum datum habeat angulum, rectangulum sub rectis datum angulum comprehendentibus ad triangulum rationem habet datam.

Sit triangulum ΑΒΓ datum habens angulum ad Α; dico ipsum sub ΒΑ, ΑΓ ad ΑΒΓ triangulum rationem habere datam.

Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν δεθείσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ δεθείσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ

Ducatur enim a puncto B ad ΑΓ perpendicularis ΒΔ. Quoniam igitur datus est ΒΑΓ angulus, est autem et ipse ΒΔΑ datus; et reli-



ὑπὸ ΑΒΔ γωνία δέδοται². δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῶν εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δεθείς. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν³ ΒΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΓ· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ⁴ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δεθείς· τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τριγώνου λόγος ἐστὶ δεθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δεθείς.

quus igitur sub ΑΒΔ angulus datus est; datum est igitur ΑΒΔ triangulum specie; ratio igitur est ipsius ΑΒ ad ΒΔ data. Ut autem ΑΒ ad ΒΔ ita ipsum sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΒΔ, ΑΓ; quare et ipsius sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΒΔ, ΑΓ ratio est data; ipsius autem sub ΒΔ, ΑΓ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data; et ipsius sub ΒΑ, ΑΓ igitur ad ΑΒΓ triangulum ratio est data.

Car du point B menons sur ΑΓ la perpendiculaire ΒΔ (12. 1). Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, et que l'angle ΒΔΑ est aussi donné; l'angle restant ΑΒΔ sera donné (32. 1) (4); le triangle ΑΒΔ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΒ à ΒΔ est donc donnée. Mais ΑΒ est à ΒΔ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est au rectangle sous ΒΔ, ΑΓ (1. 6); la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au rectangle sous ΒΔ, ΑΓ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΔ, ΑΓ au triangle ΑΒΓ est donnée; la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au triangle ΑΒΓ est donc donnée (8).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΖ΄.

Εάν τρίγωνον δεδομένην ἔχη γωνίαν ᾧ μείζον δύναται αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ, ὡς μία, τοῦ ἀπὸ τῆς λοιπῆς, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένου.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· λέγω ὅτι ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένου.

Διήχθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΒΑ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ ΔΓ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΒΕ². Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ. Καὶ διῆκται τίς³ ἡ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἰση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ

PROPOSITIO LXVII.

Si triangulum datum habeat angulum, quo majus possunt latera datum angulum comprehendentia, tanquam una recta, quam quadratum ex reliquo, illud spatium ad triangulum rationem habebit datam.

Sit triangulum ΑΒΓ datum habens angulum ΒΑΓ; dico quo majus est quadratum ex utraque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habere datam.

Producatur enim in directum ipsi ΒΑ recta ΑΔ, et ponatur ipsi ΑΓ æqualis ΑΔ; et juncta ΔΓ producat ad punctum Ε, et ducatur per punctum Β ipsi ΑΓ parallela ΒΕ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΑΓ; æqualis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΕ. Et ducta est quædam ΒΓ; ipsum igitur sub ΔΓ, ΓΕ cum ipso ex ΒΓ æquale est ipsi ex ΒΔ. Æqualis autem ΔΑ ipsi ΑΓ; ipsum igitur ex utraque simul ΒΑΓ æquale est ipsi sub

PROPOSITION LXVII.

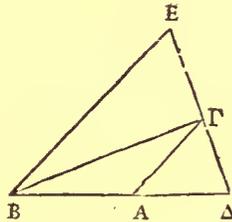
Si un triangle a un angle donné, la surface dont le carré de la somme des côtés qui comprennent l'angle donné surpasse le carré du côté restant, aura une raison donnée avec le triangle.

Soit le triangle ΑΒΓ ayant un angle donné ΒΑΓ; je dis que la surface dont le carré de la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ surpasse le carré de ΒΓ, a une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

Car menons la droite ΑΔ dans la direction de ΒΑ (3. 1); faisons ΑΔ égal à ΑΓ, joignons ΔΓ, prolongeons cette droite vers Ε, et par le point Β menons ΒΕ parallèle à ΑΓ (51. 1). Puisque ΑΔ est égal à ΑΓ; la droite ΔΒ sera égale à ΒΕ (4. 6 et 14. 5). Mais on a mené une droite ΒΓ; le rectangle sous ΔΓ, ΓΕ, avec le carré de ΒΓ, est donc égal au carré de ΒΔ. Mais ΔΑ est égal à ΑΓ; le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est donc égal au rectangle sous ΔΓ, ΓΕ avec le carré

τῶ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ⁵ τῆς ΒΓ ὥς·
 τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, τουτίστι τὸ
 ἀπὸ τῆς ΒΔ⁵, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ μείζον ἔστι⁶ τῶ
 ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ. Λέγω δὲ ὅτι τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΓ,
 ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐπεὶ
 γὰρ δευτεῖρά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ⁸ ἡ ἐφεξῆς
 ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ δευτεῖρα. Ἐστὶ δὲ καὶ
 ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΔΓΑ δευτεῖρα, ἑκατέρω
 γὰρ αὐτῶν ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ δεδομένης
 ὕψους⁹. δίδεται ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῶ εἶδει·

ΔΓ, ΓΕ cum ipso ex ΒΓ; quare ipsum ex utraque
 simul ΒΑΓ, hoc est ipsum ex ΒΔ quam ipsum ex
 ΒΓ majus est ipso sub ΔΓ, ΓΕ. Dico autem ipsum
 sub ΔΓ, ΓΕ ad ΑΒΓ triangulum rationem esse
 datam. Quoniam enim datus est ΒΑΓ angulus, et
 ipse deinceps igitur ΔΑΓ est datus. Est autem et
 uterque ipsorum ΑΔΓ, ΔΓΑ datus, uterque enim
 eorum dimidius est ipsius ΒΑΓ dati existentis;
 datum est igitur ΔΑΓ triangulum specie; ratio



λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ δευτεῖς· ὥς·
 καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ λόγος
 ἐστὶ δευτεῖς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν¹⁰ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν
 ΑΔ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς τὴν¹¹ ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ
 πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕ-
 τως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς¹² ΓΔ· καὶ
 ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς

igitur est ipsius ΑΔ ad ΔΓ data; quare et ipsius
 ex ΑΔ ad ipsum ex ΔΓ ratio est data. Et quo-
 niam est ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΕΓ ad ΓΔ, sed ut
 quidem ΒΑ ad ΑΔ ita ipsum sub ΒΑ, ΑΔ ad
 ipsum ex ΑΔ, ut autem ΕΓ ad ΓΔ ita ipsum sub
 ΕΓ, ΓΔ ad ipsum ex ΓΔ; et ut igitur ipsum
 sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum ex ΑΔ ita ipsum sub ΕΓ,

de ΒΓ; le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ, c'est-à-dire, le carré de ΒΔ
 surpasse donc le carré de ΒΓ du rectangle sous ΔΓ, ΓΕ. Je dis à présent que la
 raison du rectangle sous ΔΓ, ΓΕ au triangle ΑΒΓ est donnée; car puisque l'angle ΒΑΓ
 est donné, l'angle de suite ΔΑΓ est donné (13. 1) (4). Mais chacun des angles
 ΑΔΓ, ΔΓΑ est donné, car chacun de ces angles est la moitié de l'angle ΒΑΓ qui
 est donné (5) (52. 1); le triangle ΔΑΓ est donc donné d'espèce (40); la raison
 de ΑΔ à ΔΓ est donc donnée (déf. 3); la raison du carré de ΑΔ au carré de ΔΓ
 est donc donnée (50). Et puisque ΒΑ est à ΑΔ comme ΕΓ est à ΓΔ (2. 6), que ΒΑ est
 à ΑΔ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ est au carré de ΑΔ (1. 6), et que ΕΓ est à ΓΔ
 comme le rectangle sous ΕΓ, ΓΔ est au carré de ΓΔ, le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ sera

$\Lambda\Delta$ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$, καὶ ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $\Lambda\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$. Λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Lambda\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ δοθείς. Ἴση δὲ ἡ $\Delta\Lambda$ τῇ $\Lambda\Gamma$ · λόγος ἄρα¹³ τοῦ ὑπὸ τῶν $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ πρὸς τὸ $\text{B}\Lambda\Gamma$ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ $\text{B}\Lambda\Gamma$ γωνίαν¹⁴· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ἄρα πρὸς τὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$ τρίγωνον¹⁵ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma$, ΓE ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς $\text{B}\Lambda\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς¹⁶ $\text{B}\Gamma$ · ᾧ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς $\text{B}\Lambda\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\text{B}\Gamma$, ἐκείνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

$\Gamma\Delta$ ad ipsum ex $\Gamma\Delta$, et permutando igitur ut ipsum sub $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Delta$ ad ipsum sub $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ita ipsum ex $\Lambda\Delta$ ad ipsum ex $\Delta\Gamma$. Ratio autem ipsius ex $\Lambda\Delta$ ad ipsum ex $\Delta\Gamma$ data; ratio igitur et ipsius sub $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Delta$ ad ipsum sub $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ data. Æqualis autem $\Delta\Lambda$ ipsi $\Lambda\Gamma$; ratio igitur ipsius sub $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ ad ipsum sub $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ data. Ipsius autem sub $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ ad $\text{B}\Lambda\Gamma$ triangulum ratio est data, propterea quod datus est $\text{B}\Lambda\Gamma$ angulus; et ipsius sub $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ igitur ad $\text{A}\text{B}\Gamma$ triangulum ratio est data. Et est ipsum sub $\Delta\Gamma$, ΓE quo majus est ipsum ex utraque simul $\text{B}\Lambda\Gamma$ quam ipsum ex $\text{B}\Gamma$; quo igitur majus est ipsum ex utraque simul $\text{B}\Lambda\Gamma$ quam ipsum ex $\text{B}\Gamma$, illud spatium ad $\text{A}\text{B}\Gamma$ triangulum rationem habebit datam.

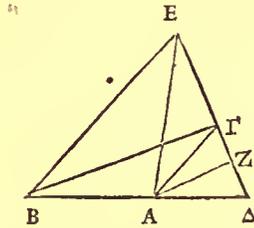
au carré de $\Lambda\Delta$ comme le rectangle sous $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ est au carré de $\Gamma\Delta$; donc, par permutation, le rectangle sous $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Delta$ est au rectangle sous $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ comme le carré de $\Lambda\Delta$ est au carré de $\Delta\Gamma$ (16. 5). Mais la raison du carré de $\Lambda\Delta$ au carré de $\Delta\Gamma$ est donnée; la raison du rectangle sous $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Delta$ au rectangle sous $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ est donc donnée. Mais $\Delta\Lambda$ est égal à $\Lambda\Gamma$; la raison du rectangle sous $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ au rectangle sous $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ au triangle $\text{B}\Lambda\Gamma$ est donnée (66), parce que l'angle $\text{B}\Lambda\Gamma$ est donné; la raison du rectangle sous $\text{E}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ au triangle $\text{A}\text{B}\Gamma$ est donc donnée (8). Mais le rectangle sous $\Delta\Gamma$, ΓE est ce dont le carré de la somme des droites $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ surpasse le carré de $\text{B}\Gamma$; la surface dont le carré de la somme des droites $\text{B}\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ surpasse le carré de $\text{B}\Gamma$ aura donc une raison donnée avec le triangle $\text{A}\text{B}\Gamma$.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Κατασκευάσθω γάρ τὰ ὑπὸ τοῖς πρότερον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἢ ΑΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἢ ΑΕ. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἐστὶν αὐτῆς ἡμίση ἢ ὑπὸ ΑΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΓ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ

Construantur enim eadem quæ prius, et ducatur a puncto A ad ΓΔ perpendicularis AZ et jungatur AE. Et quoniam datus est ΒΑΓ angulus, et est ipsius dimidius ipse ΑΓΖ, est autem et ipse ΑΖΓ datus; datum est igitur ΑΖΓ triangulum specie; ratio igitur est ipsius



τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΖΓ δοθείς. Τῆς δὲ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, διπλασίων γάρ ἐστὶν αὐτῆς· καὶ τῆς ΔΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΕ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διπλασίον γάρ ἐστὶν αὐτοῦ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΓΕ τρίγωνον λό-

AZ ad ΖΓ data. Ipsius autem ΖΓ ad ΓΔ ratio est data, dupla enim est illius; et ipsius ΔΓ igitur ad ΑΖ ratio est data; quare et ipsius sub ΕΓ, ΓΔ ad ipsum sub ΑΖ, ΓΕ ratio est data. Ipsius autem sub ΑΖ, ΓΕ ad ΑΓΕ triangulum ratio est data, dupla enim est illius; et ipsius sub ΕΓ, ΓΔ igitur ad ΑΓΕ triangu-

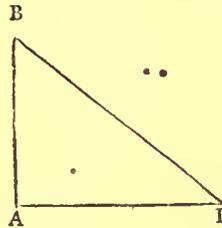
AUTREMENT.

Car faisons la même construction qu'auparavant; du point A, menons sur ΓΔ la perpendiculaire AZ (12. 1), et joignons AE. Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, que l'angle ΑΓΖ est sa moitié (5) (32. 1), et que l'angle ΑΖΓ est donné, le triangle ΑΖΓ sera donné d'espèce (40); la raison de ΑΖ à ΖΓ est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de ΖΓ à ΓΔ est donnée, à cause que la droite ΔΓ est double de ΓΖ; la raison de ΔΓ à ΑΖ est donc donnée (8); la raison du rectangle sous ΕΓ, ΓΔ au rectangle sous ΑΖ, ΓΕ est donc donnée (1. 6). Mais la raison du rectangle sous ΑΖ, ΓΕ au triangle ΑΓΕ est donnée, car ce rectangle est son double (41. 1); la raison du rectangle sous ΕΓ, ΓΔ au triangle ΑΓΕ est donc donnée (8).

ἴσος ἐστὶ δοθείς. Ἴσον δὲ τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ
 τριγώνῳ, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς
 ΑΓ² καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις τῶν ΑΓ, ΒΕ·
 καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρί-
 γωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν
 ΕΓ, ΓΔ, ᾧ³ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς
 ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ ᾧ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ
 συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΓ³ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ,
 ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον
 ἔχει δεδομένον.

ΑΛΛΩΣ.

Ἦτοι γὰρ ἢ πρὸς τῷ Α' γωνία ὀρθή ἐστίν, ἢ
 ὀξεία, ἢ ἀμβλεία.



Ἐστω πρότερον ὀρθή· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέ-
 ρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχει τῷ δὲς
 ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἐστὶ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ

lum ratio est data. Æquale autem ΑΓΕ trian-
 gulum triangulo ΑΒΓ, etenim in eâdem basi
 sunt ΑΓ et in iisdem parallelis ΑΓ, ΒΕ; et ipsius
 sub ΕΓ, ΓΔ igitur ad ΑΒΓ triangulum ratio
 est data. Et est ipsum sub ΕΓ, ΓΔ quo majus
 est ipsum ex utrâque simul ΒΑΓ quam ipsum
 ex ΓΒ; quo igitur majus est ipsum ex utrâque
 simul ΒΑ, ΑΓ, quam ipsum ex ΓΒ, illud spatium
 ad ΑΒΓ triangulum rationem habet datam.

ΑΛΙΤΕΡ.

Vel enim angulus ad Α rectus est, vel acutus,
 vel obtusus.

Sit primum rectus; ipsum igitur ex utrâque
 simul ΒΑΓ ipsum ex ΒΓ superat ipso bis sub
 ΒΑ, ΑΓ. Est autem ipsius sub ΒΑ, ΑΓ ad ΑΒΓ

Mais le triangle AGE est égal au triangle ABG, car il est sur la même base AG et entre les mêmes parallèles AG, BE (57. 1); la raison du rectangle sous EG, GD au triangle ABG est donc donnée (8). Mais le rectangle sous EG, GD est ce dont le carré de la somme des côtés BA, AG surpasse le carré de GB; la surface dont le carré de la somme des côtés BA, AG surpasse le carré de GB a donc une raison donnée avec le triangle ABG.

ΑΥΤΡΕΜΕΝΤ.

L'angle en A, est ou droit, ou aigu, ou obtus.

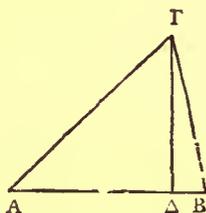
Premièrement, qu'il soit droit; le carré de la somme des côtés BA, AG surpassera le carré du côté GB de deux fois le rectangle sous BA, AG (47. 1).

πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ΒΑΓ γωνίαν· τοῦ δὲ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ABΓ τριγώνων λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐστω δὴ ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΓΔ. Καὶ³ ἐπεὶ ὀξυγώνιον ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΓΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ἴσα ἐστὶ τῶν τε ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῶν δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ. Κοινὸν προσ-

triangulum ratio data, quia datus est ΒΑΓ angulus; ipsius igitur bis sub ΒΑ, ΑΓ ad ABΓ triangulum ratio est data.

Sit autem acutus ipse ΒΑΓ, et ducatur a puncto Γ ad ΑΒ perpendicularis ΓΔ. Et quoniam acutangulum est ABΓ triangulum, et perpendicularis ducta est ΓΔ; ipsa igitur ex ΒΑ, ΑΓ æqualia sunt et ipsi ex ΒΓ et ipsi bis sub ΒΑ, ΑΔ. Commune addatur ipsum bis sub



κείσθω τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, ἴσα ἐστὶ τῶν τε ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῶν δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἔτι τῶν δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τουτέστι τῶν δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑΔ καὶ τῆς ΒΑ· ὅσπερ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ μείζον ἐστὶ⁵ τοῦ

ΒΑ, ΑΓ; ipsa igitur ex ΒΑ, ΑΓ cum ipso bis sub ΒΑ, ΑΓ, quod est ipsum ex utraq̄ue simul ΒΑΓ, æqualia sunt et ipsi ex ΒΓ et ipsi bis sub ΒΑ, ΑΔ, et insuper ipsi bis sub ΒΑ, ΑΓ, hoc est ipsi bis sub utraq̄ue simul ΓΑΔ et ipsâ ΒΑ; quare ipsum ex utraq̄ue simul ΒΑΓ

Mais la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au triangle ABΓ est donnée, à cause de l'angle donné ΒΑΓ (66); la raison de deux fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au triangle ABΓ est donc donnée.

Que l'angle ΒΑΓ soit aigu. Du point Γ menons à ΑΒ la perpendiculaire ΓΔ. Puisque le triangle ABΓ est acutangle, et qu'on a mené la perpendiculaire ΓΔ, la somme des carrés des droites ΒΑ, ΑΓ égale le carré de ΒΓ plus deux fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ (13. 2). Ajoutons de part et d'autre le double rectangle sous ΒΑ, ΑΓ; la somme des carrés des droites ΒΑ, ΑΓ, plus deux fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ, c'est-à-dire le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ égale le carré de ΒΓ, plus deux fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ, et encore deux fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ (4. 2), c'est-à-dire, plus deux fois le rectangle sous la somme des droites ΓΑ, ΑΔ et sous ΒΑ (2. 2); le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse donc

ἀπὸ τῆς ΒΓ, τῷ δις ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ, καὶ τῆς ΒΑ. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστίν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐστὶ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ ὁ λοιπὸν ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓΔ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ⁸ συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ἄρα⁹ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ τὸ¹⁰ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ¹¹ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἀμβλεία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἐκτε-
 Γληθείσης τῆς ΒΑ ἐπὶ τὸ Ε¹², ἢ χθω ἐπ' αὐτὴν
 ἀπὸ τοῦ Γ¹³ κάθετος ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΕ ἴση
 ἢ ΑΖ. Ἐπεὶ οὖν ἀμβλεία ἐστίν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία,
 καὶ κάθετος ἦκεται ἡ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ,
 ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, τουτέστι

majus est quam ipsum ex ΒΓ ipso bis sub
 utraq̄ue simul ΔΑΓ, et ipsâ ΒΑ. Et quoniam
 datus est ΒΑΓ angulus, est autem et ΑΔΓ angulus
 datus; et reliquus igitur ΑΓΔ est datus; datum
 est igitur ΑΔΓ triangulum specie; ratio igitur
 est ipsius ΑΔ ad ΑΓ data; quare et utrius-
 que simul ΔΑΓ ad ΑΓ ratio est data; et ipsius
 sub utraq̄ue simul ΔΑΓ et ipsâ ΑΒ ad ipsum
 sub ΒΑ, ΑΓ ratio est data; et ipsius bis sub
 utraq̄ue simul ΔΑΓ et ipsâ ΒΑ ad ipsum sub
 ΒΑ, ΑΓ ratio est data. Ipsius autem sub ΒΑ,
 ΑΓ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data; prop-
 terea quod datus est ΒΑΓ angulus; et ipsius
 bis igitur sub utraq̄ue simul ΔΑΓ et ipsâ ΑΒ
 ad ΑΒΓ triangulum ratio est data.

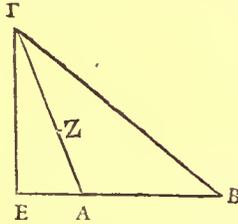
At vero sit obtusus angulus ΒΑΓ, et productâ
 ΒΑ ad Ε, ducatur a puncto Γ ad illam perpen-
 dicularis ΓΕ, et ponatur ipsi ΑΕ æqualis ΑΖ.
 Quoniam igitur obtusus est ΒΑΓ angulus, et per-
 pendicularis ducta est ipsa ΓΕ; ipsa igitur ex ipsis
 ΒΑ, ΑΓ cum ipso bis sub ΒΑ, ΑΕ, hoc est, ipso

le carré de ΒΓ de deux fois le rectangle sous la somme des droites ΔΑ, ΑΓ et sous ΒΑ. Mais l'angle ΒΑΓ est donné, et l'angle ΑΔΓ est aussi donné; l'angle restant ΑΓΔ est donc donné (32. 1) (4); le triangle ΑΔΓ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΔ à ΑΓ est donc donnée; la raison de la somme des droites ΔΑ, ΑΓ à ΑΓ est donc donnée (6); la raison du rectangle sous la somme des droites ΔΑ, ΑΓ et sous ΑΒ au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donc donnée (1. 6); la raison de deux fois le rectangle sous la somme des droites ΔΑ, ΑΓ et sous ΑΒ au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au triangle ΑΒΓ est donnée (66), à cause que l'angle ΒΑΓ est donné; la raison de deux fois le rectangle sous la somme des droites ΔΑ, ΑΓ et sous ΑΒ au triangle ΑΒΓ est donc donnée (8).

Enfin que l'angle ΒΑΓ soit obtus. Prolongeons la droite ΒΑ. Du point Γ, menons-
 lui la perpendiculaire ΓΕ, et faisons ΑΖ égal à ΑΕ. Puisque l'angle ΒΑΓ est obtus,
 et qu'on a mené la perpendiculaire ΓΕ, la somme des carrés des droites ΒΑ, ΑΓ
 avec deux fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ, c'est-à-dire deux fois le rectangle sous

τοῦ δις ὑπὸ τῶν BA, AZ, ἴσα ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς BG. Κοινὸν προκείσθω τὸ δις ὑπὸ τῶν BA, AG· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν BA, AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν BA, AG, τουτέστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν BA, AZ, ἴσα ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς BG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν BA, AG.

bis sub BA, AZ æqualia sunt ipsi ex BG. Commune addatur ipsum bis sub BA, AG; ipsa igitur ex BA, AG cum ipso bis sub BA, AG, hoc est ipsum ex utrâque simul BAG cum ipso bis sub BA, AZ, æqualia sunt ipsi ex BG cum ipso bis sub BA, AG. Commune auferatur ipsum bis



Κοινὸν ἀφαιρέσθω τὸ δις ὑπὸ τῶν BA, AZ· τὸ ἄρα ἀπὸ¹⁴ συναμφοτέρου τῆς BAG ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς BG καὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν BA, AZ· ὥστε τὸ¹⁵ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAG τοῦ ἀπὸ τῆς BG ὑπερίχειν τῶ δις ὑπὸ τῶν BA, AZ. Καὶ ἐπεὶ δευθεῖσά ἐστίν ἡ ὑπὸ BAG γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ EAG ἄρα δευθεῖσά ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ GEA δευθεῖσά ἐστίν· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AGE δευθεῖσά ἐστίν· δίδεται ἄρα τὸ AGE τρίγωνον τῶ εἶδει¹⁶ λόγος ἄρα τῆς GA πρὸς τὴν AE δευθεῖς, τουτέστι καὶ¹⁷ πρὸς τὴν AZ· ὥστε καὶ τῆς AG πρὸς τὴν GZ λόγος ἐστὶ δευθεῖς. Τῆς δὲ AG πρὸς τὴν GE λόγος

sub BA, AZ; ipsum igitur ex utrâque simul BAG æquale est ipsi ex BG et ipsi bis sub BA, AZ; quare ipsum ex utrâque simul BAG ipsum ex BG excedit ipso bis sub BA, AZ. Et quoniam datus est BAG angulus, et EAG igitur datus est. Sed et ipse GEA datus est; et reliquus igitur ipse AGE datus est; datum igitur est AGE triangulum specie; ratio igitur ipsius GA ad AE data, hoc est et ad AZ; quare et ipsius AG ad AZ ratio est data. Ipsius autem AG ad GE ratio est data; et ipsius EG igitur

BA, AZ est égal au carré de BG (15. 2). Ajoutons de part et d'autre deux fois le rectangle sous BA, AG; la somme des carrés des droites BA, AG avec deux fois le rectangle sous BA, AG, c'est-à-dire le carré de la somme des droites BA, AG avec deux fois le rectangle sous BA, AZ égale le carré de BG plus deux fois le rectangle sous BA, AG (4. 2). Retranchons de part et d'autre deux fois le rectangle sous BA, AZ; le carré de la somme des droites BA, AG égalera le carré de BG, plus deux fois le rectangle sous BA, AZ (3. 2); le carré de la somme des droites BA, AG surpasse donc le carré de BG de deux fois le rectangle sous BA, AZ. Mais l'angle BAG est donné; l'angle EAG est donc donné (13. 1) (4). Mais l'angle GEA est donné; l'angle restant AGE est donc donné (32. 1) (4); le triangle AGE est donc donné d'espèce (40); la raison de GA à AE, c'est-à-dire à AZ est donc donnée (déf. 3); la raison de AG à AZ est donc donnée (5). Mais la raison de AG à GE est donnée; la raison

ἔστι δοθείς· καὶ τῆς ΕΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἔστι δοθείς· ὥστε τοῦ ὑπὸ¹⁸ τῶν ΕΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ λόγος ἔστι δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΑΒ λόγος ἔστι δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ λόγος ἔστι δοθείς¹⁹. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἔστι δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἔστι δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ ᾧ μείζον ἔστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ᾧ ἄρα μείζον ἔστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

ΑΛΛΩΣ.

Διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ¹ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. Ἐπεὶ οὖν δοθείσα ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΑΓΔ· δοθείσα ἄρα ἔστιν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΑΓΔ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ² ΔΑΓ δοθείσα ἔστι· δέδεται ἄρα τὸ ΑΓΔ

ad ΓΖ ratio est data; quare ipsius sub ΕΓ, ΑΒ ad ipsum sub ΓΖ, ΑΒ ratio est data. Ipsius autem sub ΑΓ, ΑΒ ad ipsum sub ΕΓ, ΑΒ ratio est data; et ipsius igitur sub ΑΓ, ΑΒ ad ipsi sub ΓΖ, ΑΒ ratio est data. Ipsius autem sub ΑΓ, ΑΒ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data; quare et ipsius bis sub ΓΖ, ΑΒ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data. Et ipsum bis sub ΓΖ, ΑΒ est illud quo majus est ipsum ex utraque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ; quo igitur majus est ipsum ex utraque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habet datam.

ALITER.

Producatur ΒΑ ad Δ, et ponatur ipsi ΓΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ. Quoniam igitur datus est ΒΑΓ angulus, et est ejus dimidius uterque angulorum ΑΔΓ, ΑΓΔ; datus igitur est uterque angulorum ΑΔΓ, ΑΓΔ; et reliquus igitur ΔΑΓ angulus datus est; datum est igitur

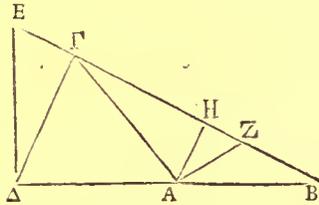
de ΕΓ à ΓΖ est donc donnée (8); la raison du rectangle sous ΕΓ, ΑΒ au rectangle sous ΓΖ, ΑΒ est donc donnée (16). Mais la raison du rectangle sous ΑΓ, ΑΒ au rectangle sous ΕΓ, ΑΒ est donnée (16); la raison du rectangle sous ΑΓ, ΑΒ, au rectangle sous ΓΖ, ΑΒ est donc donnée (8). Mais la raison du rectangle sous ΑΓ, ΑΒ au triangle ΑΒΓ est donnée (66); la raison de deux fois le rectangle sous ΓΖ, ΑΒ au triangle ΑΒΓ est donc donnée (8). Mais deux fois le rectangle sous ΓΖ, ΑΒ est ce dont le carré de la somme des droites ΒΑΓ surpasse le carré de ΒΓ; la raison de la surface dont le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse le carré de ΒΓ au triangle ΑΒΓ est donc donnée.

AUTREMENT.

Prolongeons ΒΑ vers Δ; faisons ΑΔ égal à ΓΑ, et joignons ΔΓ. Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, et que chacun des angles ΑΔΓ, ΑΓΔ est sa moitié (5) (52. 1), chacun des angles ΑΔΓ, ΑΓΔ sera donné; l'angle restant ΔΑΓ est donc donné

τρίγωνον τῷ εἶδει λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ δοθείσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, κατήχθω τῇ ΑΔΓ ἴση ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΔΕΓ, ΔΖΓ. Καὶ ἵπερ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, κοινὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τοῦ ΔΒΕ τριγώνου εὔσα καὶ τοῦ ΔΒΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογωνίον ἄρα ἐστὶ τὸ⁵ ΒΔΕ

ΑΓΔ triangulum specie; ratio igitur ipsius ΑΓ ad ΓΔ data. Et quoniam datus est angulus ΑΔΓ, construatur angulo ΑΔΓ æqualis uterque angulorum ΔΕΓ, ΔΖΓ. Et quoniam æqualis est angulus ΒΔΓ angulo ΔΕΓ, communis autem ipse ΔΒΕ triangulo ΔΒΕ existens et triangulo ΔΒΓ; reliquus igitur angulus ΒΔΕ reliquo angulo ΒΓΔ



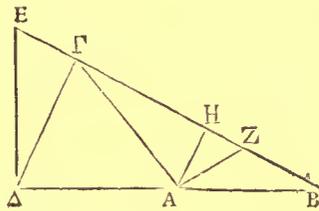
τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνω· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν⁶ ΒΔ εὔτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν⁷ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΒ, ΒΓ, τευτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς⁸ ΒΔ, τευτέστι τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, ἴση γάρ ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ⁹, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ. Λίγω οὖν ἔτι λόγος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δοθείς. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν

est æqualis; æquiangulum igitur ΒΔΕ est triangulum triangulo ΔΒΓ; est igitur ut ΕΒ, ad ΒΔ ita ΒΔ ad ΒΓ; ipsum igitur sub ΕΒ, ΒΓ, hoc est ipsum sub ΕΓ, ΓΒ cum ipso ex ΓΒ, æquale est ipsi ex ΒΔ, hoc est ipsi ex utraq̄ue simul ΒΑΓ, æqualis enim est ΔΑ ipsi ΑΓ; ipsum igitur sub ΕΓ, ΓΒ cum ipso ex ΒΓ, æquale est ipsi ex utraq̄ue simul ΒΑΓ; ipsum igitur ex utraq̄ue simul ΒΑΓ ipsum ex ΒΓ excedit ipso sub ΒΓ, ΓΕ. Dico igitur rationem ipsius sub ΒΓ, ΓΕ ad ΑΒΓ triangulum esse datam. Quoniam enim

(52. 1) (4); le triangle ΑΓΔ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΓ à ΓΔ est donc donnée (déf. 3). Et puisque l'angle ΑΔΓ est donné, faisons chacun des angles ΔΕΓ, ΔΖΓ égal à l'angle ΑΔΓ; et puisque l'angle ΒΔΓ est égal à l'angle ΔΕΓ, et que l'angle ΔΒΕ est commun aux triangles ΔΒΕ, ΔΒΓ, l'angle restant ΒΔΕ sera égal à l'angle restant ΒΓΔ (32. 1); le triangle ΒΔΕ est donc équiangle avec le triangle ΔΒΓ; la droite ΕΒ est donc à ΒΔ comme ΒΔ est à ΒΓ (4. 6); le rectangle sous ΕΒ, ΒΓ, c'est-à-dire, le rectangle sous ΕΓ, ΓΒ, avec le carré de ΓΒ, est donc égal au carré de ΒΔ (17. 6); c'est-à-dire, au carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ (5. 2); car ΔΑ est égal à ΑΓ; le rectangle sous ΕΓ, ΓΒ avec le carré de ΒΓ, est donc égal au carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ; le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse donc le carré de ΒΓ du rectangle sous ΒΓ, ΓΕ. Je dis aussi que la raison du rectangle sous ΒΓ, ΓΕ au triangle ΑΒΓ est donnée.

ἡ ὑπὸ ΒΔΕ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΓΔ, ὡν¹⁰ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν¹¹ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΕ λοιπῆ τῆ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΓ τῆ ὑπὸ ΑΖΓ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΖ λοιπῆ τῆ ὑπὸ ΔΓΕ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΓ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν¹² ΓΕ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ. Λόγος δὲ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ δο-

æqualis est ΒΔΕ angulus angulo ΒΓΔ, quorum ipse ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ est æqualis; reliquus igitur ΓΔΕ reliquo ΑΓΒ est æqualis. Est autem et ΔΕΓ ipsi ΑΖΓ æqualis; reliquus igitur ΓΑΖ reliquo ΔΓΕ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΖΓ triangulum triangulo ΔΕΓ; est igitur ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΔΓ ad ΓΕ; et permutando igitur ut ΓΑ ad ΓΔ ita ΑΖ ad ΓΕ. Ratio autem ipsius ΑΓ ad ΓΔ data; ratio igitur et ipsius ΑΖ ad



θείς· λόγος ἄρα καὶ¹³ τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ δο-
θείς. Ηχθῶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ
ΑΗ. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΓ, ἐστὶ δὲ
καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ
ΗΑΖ δοθεῖσά ἐστὶ· δίδεται ἄρα τὸ ΑΗΖ τρίγωνον
τῷ εἶδει· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΑ πρὸς τὴν
ΑΗ δοθείς. Τῆς δὲ ΖΑ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ
δοθείς· καὶ τῆς ΑΗ ἄρα πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ
δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ¹⁴ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ

ΓΕ data. Agatur a puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΗ. Et quoniam datus est angulus ΑΖΓ, est autem et angulus ΑΗΖ datus; et reliquus igitur ΗΑΖ datus est; datum est igitur ΑΗΖ triangulum specie; ratio igitur et ipsius ΖΑ ad ΑΗ data. Ipsius autem ΖΑ ad ΓΕ ratio est data; et ipsius ΑΗ igitur ad ΓΕ ratio est data; quare et ipsius sub ΑΗ, ΒΓ ad ipsum sub ΒΕ,

Car puisque l'angle ΒΔΕ est égal à l'angle ΒΓΔ, et que l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΑΓΔ, l'angle restant ΓΔΕ est égal à l'angle restant ΑΓΒ. Mais l'angle ΔΕΓ est égal à l'angle ΑΖΓ; l'angle restant ΓΑΖ est donc égal à l'angle restant ΔΓΕ (32. 1); le triangle ΑΖΓ est donc équiangle avec le triangle ΔΕΓ; ΓΑ est donc à ΑΖ comme ΔΓ est à ΓΕ (4. 6); donc, par permutation, ΓΑ est à ΓΔ comme ΑΖ est à ΓΕ. Mais la raison de ΑΓ à ΓΔ est donnée; la raison de ΑΖ à ΓΕ est donc donnée. Du point Α menons sur ΒΓ la perpendiculaire ΑΗ. Puisque l'angle ΑΖΓ est donné, et que l'angle ΑΗΖ est aussi donné, l'angle restant ΗΑΖ sera donné; le triangle ΑΗΖ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΖΑ à ΑΗ est donc donnée. Mais la raison de ΖΑ à ΓΕ est donnée; la raison de ΑΗ à ΓΕ est donc donnée (8); la raison du

ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα¹⁵ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ· ᾧ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκείνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ¹⁶ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

GE ratio est data. Ipsius autem sub AH, BG ad ABG triangulum ratio est data; et ipsius igitur sub BG, GE ad ABG triangulum ratio est data. Et est ipsum sub BG, GE illud quo majus est ipsum ex utraque simul BAG quam ipsum ex BA; quo igitur majus est ipsum ex utraque simul BAG quam ipsum ex BG, illud spatium ad ABG triangulum rationem habet datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΗ΄.

Ἐὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα¹ λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχέτω δεδομένον, ἔχέτω δὲ καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον δε-

PROPOSITIO LXVIII.

Si duo æquiangula parallelogramma inter se rationem habeant datam, et unum latus ad unum latus rationem habeat datam; et reliquum latus ad reliquum latus rationem habebit datam.

Duo enim æquiangula parallelogramma AB ΓΔ inter se rationem habeant datam, habeat autem et unum latus ad unum latus rationem

rectangle sous AH, BG au rectangle sous BG, GE est donc donnée (1. 6). Mais la raison du rectangle sous AH, BG au triangle ABG est donnée (41. 1); la raison du rectangle sous BG, GE au triangle ABG est donc donnée. Mais le rectangle sous BG, GE est ce dont le quarré de la somme des droites BA, AG surpasse le quarré de BA; la surface dont le quarré de la somme des droites BA, AG surpasse le quarré de BG, a donc une raison donnée avec le triangle ABG.

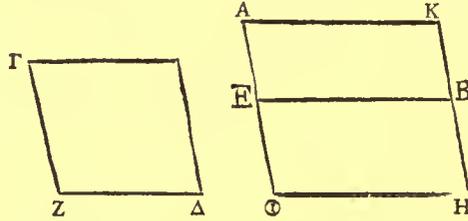
PROPOSITION LXVIII.

Si deux parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison donnée, et si un côté a une raison donnée avec un côté, le côté restant aura une raison donnée avec le côté restant.

Que les deux parallélogrammes équiangles AB, ΓΔ ayent entre eux une raison donnée, qu'un côté ait une raison donnée avec un côté, c'est-à-dire, que la

δομένον, καὶ ἔστω τῆς BE πρὸς τὴν ZΔ λόγος
δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς AE πρὸς τὴν ZΓ λόγος
ἔστί δοθείς.

datam, et sit ipsius BE ad ZΔ ratio data ;
dico et ipsius AE ad ZΓ rationem esse datam.



Παραβελήσθω γὰρ παρὰ τὴν EB τῷ ΓΔ ἴσον
τὸ EH παραλληλόγραμμον³, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ'
εὐθείας εἶναι τὴν AE τῇ EΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα
ἔστί καὶ ἡ KB τῇ BH. Ἐπεὶ οὖν λόγος ἔστί τοῦ
AB πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ EH·
λόγος ἄρα τοῦ AB πρὸς τὸ EH δοθείς· ὥστε καὶ
τῆς AE πρὸς τὴν EΘ λόγος ἔστί δοθείς. Καὶ ἐπεὶ
ἴσον ἔστί τὸ EH τῷ ΓΔ· ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον·
τῶν EH, ΓΔ ἄρα ἀντιπεπύθασιν αἱ πλευραὶ περὶ
τὰς ἴσας γωνίας⁵· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EB πρὸς τὴν
ZΔ οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν EΘ. Λόγος δὲ τῆς EB
πρὸς τὴν ZΔ δοθείς· καὶ τῆς ΓZ ἄρα πρὸς τὴν
EΘ λόγος ἔστί δοθείς. Τῆς δὲ EΘ πρὸς τὴν AE
λόγος ἔστί δοθείς· καὶ τῆς AE ἄρα πρὸς τὴν ΓZ
λόγος ἔστί δοθείς.

Applicetur enim ad EB ipsi ΓΔ æquale EH
parallogrammum, et ponatur ita ut in directum
sit ipsa AE ipsi EΘ ; in directum igitur est et
KB ipsi BH. Quoniam igitur ratio est ipsius
AB ad ΓΔ data; æquale autem ΓΔ ipsi EH ;
ratio igitur ipsius AB ad EH data ; quare
et ipsius AE ad EΘ ratio est data. Et quo-
niam æquale est EH ipsi ΓΔ, est autem et
æquiangulum ; ipsorum EH, ΓΔ igitur reci-
proea sunt latera circa æquales angulos ; est
igitur ut EB ad ZΔ ita ΓZ ad EΘ. Ratio autem
ipsius EB ad ZΔ data ; et ipsius ΓZ igitur ad
EΘ ratio est data. Ipsius autem EΘ ad AE
ratio est data ; et ipsius AE igitur ad ΓZ ratio
est data.

raison du côté BE au côté ZΔ soit donnée ; je dis que la raison de AE à ZΓ est donnée.

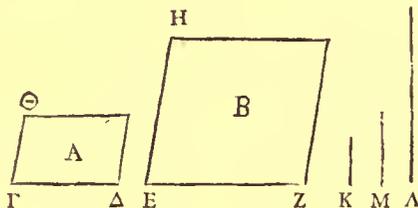
Car appliquons à la droite EB le parallélogramme EH égal au parallélogramme ΓΔ, et qu'il soit placé de manière que AE soit dans la direction de EΘ ; la droite KB sera dans la direction de BH. Mais la raison de AB à ΓΔ est donnée, et ΓΔ est égal à EH ; la raison de AB à EH est donc donnée (1. 6) ; la raison de AE à EΘ est donc donnée. Mais le parallélogramme EH est égal au parallélogramme ΓΔ et lui est équiangle ; les côtés des parallélogrammes EH, ΓΔ, autour des angles égaux, sont donc réciproquement proportionnels ; donc EB est à ZΔ comme ΓZ est à EΘ (14. 6). Mais la raison de EB à ZΔ est donnée ; la raison de ΓZ à EΘ est donc donnée. Mais la raison de EΘ à AE est donnée ; la raison de AE à ΓZ est donc donnée (8).

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Εκείσθω δεδομένη εὐθεία ἡ Κ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθεὶς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γηρονέτω ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ. Λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθεὶς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ δοθεὶς. Δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Λ.

Exponatur data recta Κ. Et quoniam ratio est ipsius Α ad Β data, eadem huic fiat ratio ipsius Κ ad Λ. Ratio autem ipsius Α ad Β data; ratio igitur et ipsius Κ ad Λ data. Data autem Κ; data igitur et Λ. Rursus, quoniam



Πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθεὶς τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γηρονέτω ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ· λόγος ἄρα καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ δοθεὶς. Δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Μ. Ἐστι δὲ καὶ ἡ Λ δοθεῖσα· λόγος ἄρα τῆς Λ πρὸς τὴν Μ δοθεὶς. Καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τουτέστιν ἐκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ⁵, καὶ ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ.

ratio est data ipsius ΓΔ ad ΕΖ, eadem huic fiat ratio ipsius Κ ad Μ; ratio igitur et ipsius Κ ad Μ data; Data autem Κ; data igitur et Μ. Est autem et Λ data; ratio igitur ipsius Α ad Μ data. Et quoniam æquiangulum est Α ipsi Β; ipsum Α igitur ad Β rationem habet compositam ex lateribus, hoc est et ex ratione quam habet ΓΔ ad ΕΖ et ΘΓ ad ΗΕ. At vero et

AUTREMENT.

Soit κ une droite donnée. Puisque la raison de Α à Β est donnée, faisons ensorte que la raison de κ à Λ soit la même que celle-ci. Mais la raison de Α à Β est donnée; la raison de κ à Λ est donc donnée. Mais κ est donné; donc Λ est donné (2). De plus, puisque la raison de ΓΔ à ΕΖ est donnée, faisons ensorte que la raison de κ à Μ soit la même que celle-ci; la raison de κ à Μ sera donnée. Mais κ est donné; la droite Μ est donc donnée aussi. Mais Λ est donné; la raison de Λ à Μ est donc donnée (1). Mais les parallélogrammes Α, Β sont équiangles; le parallélogramme Α a donc avec Β une raison composée des côtés, c'est-à-dire, de la raison que ΓΔ a avec ΕΖ, et de la raison que ΘΓ a avec ΗΕ (25. 6). Mais

Αλλά μὲν καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Λ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Μ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει⁶ ἡ Μ πρὸς τὴν Λ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τε τοῦ λόγου⁷ ὃν ἔχει ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Μ καὶ ἡ Μ πρὸς τὴν Λ. Ὡν ὁ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος ὃν αὐτός ἐστι τῷ τῆς Μ πρὸς τὴν Λ. Τῆς δὲ Μ πρὸς τὴν Λ λόγος ἐστὶ¹⁰ δοθεὶς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ δοθείς.

K ad Λ rationem habet compositam et ex ratione quam habet K ad M et ex ipsâ quam habet M ad Λ; ergo composita ratio et ex ratione quam habet ΓΔ ad ΕΖ, et ΘΓ ad ΗΕ, eadem est cum compositâ ex ipsâ quam habet Κ ad Μ, et Μ ad Λ. Quarum ratio ipsius ΓΔ ad ΕΖ eadem est cum ratione ipsius Κ ad Μ; reliqua igitur ipsius ΘΓ ad ΗΕ ratio eadem est cum ratione ipsius Μ ad Λ. Ipsius autem Μ ad Λ ratio est data; ratio igitur et ipsius ΘΓ ad ΗΕ data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΘ'.

Εάν δύο παραλληλόγραμμα δεδομένας ἔχη γωνίας, καὶ λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχη¹ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχη δεδομένον· καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΕΗ δεδομένας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Δ, Ζ, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃτω δεδομένον, λόγος δὲ

PROPOSITIO LXIX.

Si duo parallelogramma datos habeant angulos, et rationem inter se habeant datam, et unum latus ad unum latus rationem habeat datam; et reliquum latus ad reliquum latus rationem habebit datam.

Duo enim parallelogramma ΑΒ, ΕΗ datos habentia angulos ad puncta Δ, Ζ, inter se rationem habeant datam, ratio autem sit ipsius

K a avec Λ une raison composée de la raison que K a avec Μ, et de celle que Μ a avec Λ; la raison composée de la raison que ΓΔ a avec ΕΖ, et de celle que ΘΓ a avec ΗΕ est donc la même que la raison composée de celle que Κ a avec Μ, et de celle que Μ a avec Λ. Mais parmi ces raisons, celle de ΓΔ à ΕΖ est la même que celle de Κ à Μ; la raison restante de ΘΓ à ΗΕ est donc la même que celle de Μ à Λ. Mais la raison de Μ à Λ est donnée; la raison de ΘΓ à ΗΕ est donc donnée.

PROPOSITION LXIX.

Si deux parallélogrammes, ayant des angles donnés, ont entre eux une raison donnée, et si un côté a une raison donnée avec un côté, le côté restant aura une raison donnée avec le côté restant.

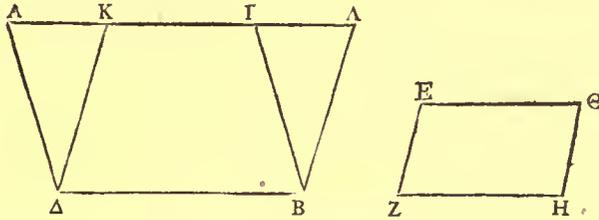
Que les deux parallélogrammes ΑΒ, ΕΗ, ayant les angles en Δ, Ζ donnés,

ἔστω τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΖΗ δοθεῖς· λέγω ὅτι καὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος δίδεται².

Εἰ μὲν οὖν ἰσογώνιον ἔστι τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλόγραμμῳ³, φανερόν.

ΔΒ ad ΖΗ data; dico et ipsius ΑΔ ad ΕΖ rationem datam esse.

Si quidem igitur æquiangulum est ΑΒ parallelogrammum parallelogrammo ΕΗ, hoc evidens



Εἰ δὲ οὐ· συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ ἴση ὑπὸ ΒΔΚ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΛ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΑΚ, ΑΚΔ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΚ ἐστὶ δοθεῖσα· δίδεται ἄρα τὸ ΑΔΚ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ δοθεῖς. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΘ δοθεῖς, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΓ τῷ ΔΛ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΔΛ πρὸς τὸ ΖΘ δοθεῖς. Καὶ ἔστιν ἰσογώνιον τὸ ΔΛ τῷ ΖΘ⁴, καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΛ πρὸς τὸ ΖΘ δοθεῖς, καὶ ἔστι τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος δοθεῖς⁵, ὑπόκειται γάρ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς ΔΚ πρὸς τὴν ΕΖ δοθεῖς. Τῆς δὲ

est. Si autem non; constituatur ad ΔΒ, et ad punctum in eâ Δ, angulo ΕΖΗ æqualis ΒΔΚ, et compleatur parallelogrammum ΔΛ. Et quoniam datus est uterque angulorum ΔΑΚ, ΑΚΔ; et reliquus igitur angulus ΑΔΚ est datus; datum est igitur ΑΔΚ triangulum specie; ratio igitur est ipsius ΑΔ ad ΔΚ data. Et quoniam ratio est ipsius ΔΓ ad ΖΘ data, supponitur enim, et est æquale ΔΓ ipsi ΔΛ; ratio igitur et ipsius ΔΛ ad ΖΘ data. Et est æquiangulum ΔΛ ipsi ΖΘ, et ratio est ipsius ΔΛ ad ΖΘ data, et est ipsius ΔΒ ad ΖΗ ratio data, supponitur enim; ratio igitur est et ipsius ΔΚ ad ΕΖ data. Ipsius

ayent entre eux une raison donnée, et que la raison de ΔΒ à ΖΗ soit donnée; je dis que la raison de ΑΔ à ΕΖ est donnée.

Si le parallélogramme ΑΒ est équiangle avec le parallélogramme ΕΗ, la chose est évidente (68). Sinon, faisons sur ΔΒ et au point Δ, l'angle ΒΔΚ égal à l'angle ΕΖΗ (25. 1), et achevons le parallélogramme ΔΛ (31. 1). Puisque chacun des angles ΔΑΚ, ΑΚΔ est donné, l'angle restant ΑΔΚ est donné (32. 1) (4); le triangle ΑΔΚ est donc donné d'espèce (35. 1); la raison de ΑΔ à ΔΚ est donc donnée. Mais la raison de ΔΓ à ΖΘ est donnée, par supposition, et ΔΓ est égal à ΔΛ; la raison de ΔΛ à ΖΘ est donc donnée. Mais ΔΛ est équiangle avec ΖΘ, et la raison de ΔΛ à ΖΗ est donnée, ainsi que la raison de ΔΒ à ΖΗ, par supposition; la raison de ΔΚ

ΔΚ πρὸς τὴν ΔΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΔ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.

autem ΔΚ ad ΔΑ ratio est data ; et ipsius ΑΔ igitur ad ΕΖ ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ο΄.

Ἐὰν δύοι παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο² γὰρ παραλληλογράμμων τῶν ΑΒ, ΕΗ, περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχέτωσαν δεδομένον, τουτέστι λόγος ἔστω τῆς μὲν ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς, τῆς δὲ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ³. λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐστω γὰρ ἰσογώνιον τὸ ΓΔ τῷ ΖΘ¹. Καὶ παραβλήσθω παρὰ τὴν ΓΒ εὐθεΐαν τῷ ΖΘ παραλληλογράμμου⁵ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ, καὶ κείσθω ὥστε ἰπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΝ·

PROPOSITIO LXX.

Si duorum parallelogrammorum circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, datos autem latera inter se rationem habcant datam : et illa parallelogramma inter se rationem habebunt datam.

Duorum enim parallelogrammorum ΑΒ, ΕΗ circa æquales angulos ad puncta Γ, Ζ, vel circa inæquales quidem, datos autem, latera inter se rationem habeant datam, hoc est ratio sit ipsius quidem ΑΓ ad ΕΖ data, ipsius autem ΓΒ ad ΖΗ ; dico et ipsius ΓΔ ad ΖΘ rationem esse datam.

Sit enim æquiangulum ΓΔ ipsi ΖΘ. Et applicetur ad ΓΒ rectam parallelogrammo ΖΘ æquale parallelogrammum ΓΜ, et ponatur ita ut in directum sit ΑΓ ipsi ΓΝ ; et ΔΒ igitur in directum

à ΕΖ est donc donnée (68). Mais la raison de ΔΚ à ΔΑ est donnée ; la raison de ΑΔ à ΕΖ est donc donnée (8).

PROPOSITION LXX.

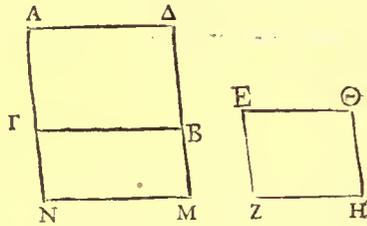
Si les côtés de deux parallélogrammes autour d'angles égaux, ou autour d'angles inégaux, mais donnés, ont entre eux une raison donnée ; ces parallélogrammes auront entre eux une raison donnée.

Que les côtés des deux parallélogrammes ΑΒ, ΕΗ, autour des angles égaux Γ, Ζ, ou autour d'angles inégaux, mais donnés, ayent entre eux une raison donnée, c'est-à-dire, que la raison de ΑΓ à ΕΖ soit donnée, ainsi que celle de ΓΒ à ΖΗ ; je dis que la raison de ΓΔ à ΖΘ est donnée.

Car que ΓΔ soit équiangle avec ΖΘ. Appliquons à la droite ΓΒ le parallélogramme ΓΜ égal au parallélogramme ΖΘ (45. 1), et qu'il soit placé de manière que ΑΓ

καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΒΜ. Ἐπεὶ οὖν ὄντισον ἐστὶ τὸ ΒΘ τῷ ΖΝ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον τῶν ΒΝ, ΘΖ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν

est ipsi ΒΜ. Quoniam igitur æquale est ΒΘ ipsi ΖΝ, est autem et ipsi æquiangulum; ipsorum ΒΝ, ΘΖ igitur reciproca sunt latera circa æquales angulos; est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita



ΖΗ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΓΝ. Λόγος δὲ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΓΝ δοθείς. Τῆς δὲ ΕΖ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΝ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἐστὶ δὲ τὸ ΓΜ τῷ ΖΘ ἴσον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς.

ZE ad ΓΝ. Ratio autem ipsius ΓΒ ad ΖΗ data; ratio igitur et ipsius ΕΖ ad ΓΝ data. Ipsius autem ΕΖ ad ΑΓ ratio est data; et ipsius ΑΓ igitur ad ΓΝ ratio est data; quare et ipsius ΓΔ ad ΓΜ ratio est data. Est autem ΓΜ ipsi ΖΘ æquale; ratio igitur et ipsius ΓΔ ad ΖΘ data.

Μὴ ἔστω δὲ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ. Καὶ συνειστάτω πρὸς τῇ ΒΓ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ ἴση γωνία ἢ ὑπὸ ΒΓΚ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπεὶ δοθείσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΒ δοθείσα¹⁰· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ἐστὶ δοθείσα. Ἐστὶ

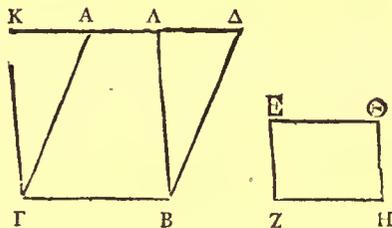
Non sit autem æquiangulum ΑΒ ipsi ΕΗ. Et constituatur ad ΒΓ rectam, et ad punctum in eâ Γ, angulo ΕΖΗ æqualis angulus ΒΓΚ, et compleatur ΓΑ parallelogrammum. Et quoniam datus est angulus ΑΓΒ, est autem et ipse ΚΓΒ datus; et reliquis igitur ΑΓΚ est datus. Est autem et

soit dans la direction de ΓΝ; la droite ΔΒ sera dans la direction de ΒΜ. Puisque ΒΘ est égal à ΖΝ, et qu'il lui est aussi équiangle, les côtés des parallélogrammes ΒΝ, ΘΖ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ΓΒ est à ΖΗ comme ΖΕ est à ΓΝ. Mais la raison de ΓΒ à ΖΗ est donnée; la raison de ΕΖ à ΓΝ est donc donnée. Mais la raison de ΕΖ à ΑΓ est donnée; la raison de ΑΓ à ΓΝ est donc donnée (8); la raison de ΓΔ à ΓΜ est donc donnée (1. 6). Mais ΓΜ est égal à ΖΘ; la raison de ΓΔ à ΖΘ est donc donnée.

Que ΑΒ ne soit pas équiangle avec ΕΗ. Sur la droite ΒΓ, et au point Γ de cette droite, faisons l'angle ΒΓΚ égal à l'angle ΕΖΗ (23. 1), et achevons le parallélogramme ΓΑ. Puisque l'angle ΑΓΒ est donné, et que l'angle ΚΓΒ est aussi donné, l'angle

δοθείς· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΚ δοθείσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΓ ἐστὶ δοθείσα¹· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΚ τρίγωνον τῶν εἰδῶν· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. Τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ

ΓΑΚ datus; et reliquus igitur ΑΚΓ est datus; datum est igitur ΑΓΚ triangulum specie; ratio igitur est ipsius ΑΓ ad ΓΚ data. Ipsius autem ΑΓ ad ΕΖ ratio est data; et ipsius ΓΚ igitur ad ΕΖ



δοθείς· καὶ τῆς ΓΚ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἐστὶ δὲ καὶ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος δοθείς, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΚΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΑ πρὸς τὸ¹ ΖΘ δοθείς. Ἴσον δὲ τὸ ΓΑ τῶν ΓΑ· λόγος ἄρα ἐστὶν τοῦ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς.

ratio est data. Est autem et ipsius ΓΒ ad ΖΗ ratio data, et est æqualis ΚΓΒ angulus angulo ΕΖΗ; ratio igitur est ipsius ΓΑ ad ΖΘ data. Æquale autem ΓΑ ipsi ΓΑ; ratio igitur est ipsius ΓΑ ad ΖΘ data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οά.

Ἐὰν δύο¹ τρίγωνων, περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει² δεδομένον.

PROPOSITIO LXXI.

Si duorum triangulorum circa æquales angulos, vel circa inæquales quidem, datos autem, latera inter se rationem habeant datam; et ipsa triangula inter se rationem habent datam.

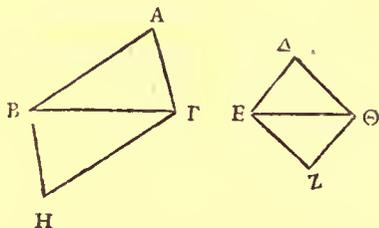
restant ΑΓΚ est donné (4). Mais l'angle ΓΑΚ est donné; l'angle restant ΑΚΓ est donc donné (32. 1) (4); le triangle ΑΓΚ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΓ à ΓΚ est donc donnée. Mais la raison de ΑΓ à ΕΖ est donnée (8); la raison de ΓΚ à ΕΖ est donc donnée. Mais la raison de ΓΒ à ΖΗ est donnée, et l'angle ΚΓΒ est égal à l'angle ΕΖΗ; la raison de ΓΑ à ΖΘ est donc donnée. Mais ΓΑ est égal à ΓΑ; la raison de ΓΑ à ΖΘ est donc donnée.

PROPOSITION LXXI.

Si les côtés de deux triangles autour d'angles égaux, ou autour d'angles inégaux, mais donnés, ont entre eux une raison donnée, ces triangles ont entre eux une raison donnée.

Δύο³ γὰρ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΔΕΘ, περί ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ, ἢ περί ἀίσιους μὲν, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τῆς μὲν ΒΑ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς, τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΘ· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου λόγος ἔστί δοθείς πρὸς τὸ ΕΔΘί.

Duorum enim triangulorum ΑΒΓ, ΔΕΘ, circa æquales angulos ad puncta Α, Δ, vel circa inæquales quidem, datos autem, latera inter se rationem habeant datam, et sit ratio ipsius ΒΑ ad ΕΔ data, ipsius vero ΑΓ ad ΔΘ; dico et ΑΒΓ trianguli rationem esse datam ad ΕΔΘ triangulum.



Συμπεπληρώσω γὰρ τὰ⁵ ΑΗ, ΔΖ παραλληλόγραμμα. Ἐπεὶ οὖν δύο παραλληλογράμμων τῶν ΑΗ, ΔΖ περί τὰς⁶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ σημείοις, ἢ περί αἰσίους μὲν, δεδομένας δὲ⁷, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον καὶ τὰ παραλληλογράμματα λόγον ἔξει δεδομένον πρὸς ἀλλήλας⁸. λόγος ἄρα τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΖ δοθείς. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΗ ἡμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ΔΖ τὸ ΔΕΘ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου⁹ πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον δοθείς.

Compleantur enim ΑΗ, ΔΖ parallelogramma. Quoniam igitur duorum parallelogrammorum ΑΗ, ΔΖ circa æquales angulos ad puncta Α, Δ, vel circa inæquales quidem, datos autem, latera inter se rationem habent datam et parallelogramma rationem habebunt datam inter se; ratio igitur ipsius ΑΗ ad ΔΖ data; Et est ipsius quidem ΑΗ dimidium triangulum ΑΒΓ, ipsius autem ΔΖ ipsum ΔΕΘ; ratio igitur trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΘ data.

Que les côtés des triangles ΑΒΓ, ΔΕΘ, autour des angles égaux Α, Δ, ou autour d'angles incégaux, mais donnés, ayent entre eux une raison donnée, c'est-à-dire que la raison de ΒΑ à ΕΔ soit donnée, ainsi que la raison de ΑΓ à ΔΘ; je dis que la raison du triangle ΑΒΓ au triangle ΕΔΘ est donnée.

Car achevons les parallélogrammes ΑΗ, ΔΖ. Puisque les côtés des deux parallélogrammes ΑΗ, ΔΖ, autour des angles égaux aux points Α, Δ, ou autour d'angles incégaux, mais donnés, ont entre eux une raison donnée, ces parallélogrammes auront entre eux une raison donnée; la raison de ΑΗ à ΔΖ est donc donnée (70). Mais le triangle ΑΒΓ est la moitié de ΑΗ, et le triangle ΔΕΘ la moitié de ΔΖ (34. 1); la raison du triangle ΑΒΓ au triangle ΔΕΘ est donc donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οβ'.

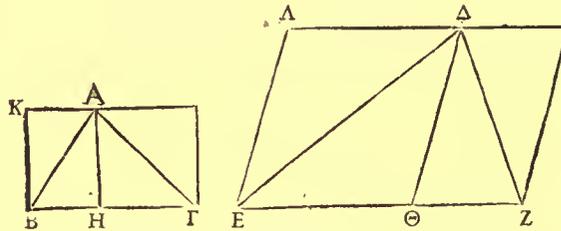
PROPOSITIO LXXII.

Ἐάν δύο¹ τριγώνων αἱ τε βάσεις ἐν δεδομένῳ λόγῳ ᾗσι, καὶ αἱ ἐπ' αὐτὰς ἠγμέναι ἀπὸ τῶν γωνιῶν, ἢ τοὶ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι, ἢ τοὶ² ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, τὰς πρὸς ταῖς βάσεσιν λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον³ καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἐστώ δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ , καὶ ἤχθωσαν αἱ AH , $\Delta\Theta$ ἢ τοὶ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι τὰς ὑπὸ τῶν $AH\Gamma$, $\Delta\Theta Z$, ἢ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, καὶ ἔστω λόγος τῆς μὲν $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ δοθείς, τῆς δὲ AH πρὸς τὴν $\Delta\Theta$ ⁵ δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Si duorum triangulorum et bases in datâ ratione sint, et rectæ ad bases ductæ ab angulis, vel æquales angulos faciant, vel inæquales quidem, datos autem, ad bases, rationem habeant inter se datam; et illa triangula inter se rationem habebunt datam.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ , et ducantur ipsæ AH , $\Delta\Theta$ vel æquales angulos facientes $AH\Gamma$, $\Delta\Theta Z$, vel inæquales quidem, datos vero; et sit ratio ipsius quidem $B\Gamma$ ad EZ data, ipsius autem AH ad $\Delta\Theta$ data. Dico et trianguli $AB\Gamma$ ad ΔEZ triangulum rationem esse datam.



Συμπεπληρώσω γὰρ τὰ $K\Gamma$, ΛZ παραλληλόγραμμα. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $AH\Gamma$, $\Delta\Theta Z$ γωνίας

Compleantur enim $K\Gamma$, ΛZ parallelogramma. Et quoniam $AH\Gamma$, $\Delta\Theta Z$ anguli vel æquales sunt,

PROPOSITION LXXII.

Si les bases de deux triangles sont en raison donnée, et si les droites menées des angles sur les bases font des angles égaux avec elles, ou des angles inégaux, mais donnés, et si ces droites ont entre elles une raison donnée, ces triangles auront entre eux une raison donnée.

Soient les deux triangles $AB\Gamma$, ΔEZ . Menons les droites AH , $\Delta\Theta$, faisant des angles égaux $AH\Gamma$, $\Delta\Theta Z$, ou des angles inégaux, mais donnés, que la raison de $B\Gamma$ à EZ soit donnée, ainsi que la raison de AH à $\Delta\Theta$; je dis que la raison du triangle $AB\Gamma$ au triangle ΔEZ est donnée.

Achevons les parallélogrammes $K\Gamma$, ΛZ . Puisque les angles $AH\Gamma$, $\Delta\Theta Z$ sont égaux

ἢ τοὶ ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἀνίστοι μὲν, δεδομένοι δὲ, ἴση δὲ ἢ μὲν ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΚΒΓ, ἢ δὲ ὑπὸ ΔΘΖ τῇ ὑπὸ ΛΕΖ· καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε ἄρα γωνίαι ἢ τοὶ ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἀνίστοι μὲν, δεδομένοι δέ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ δοθείς, ἴση δὲ ἢ μὲν ΑΗ τῇ ΚΒ, ἢ δὲ ΔΘ τῇ ΛΕ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΚΒ πρὸς τὴν ΛΕ δοθείς. Ἔστι δὲ καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος δοθείς· καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε σημείοις γωνίαι ἢ τοὶ ἴσαι εἰσὶν^β, ἢ ἀνίστοι μὲν, δεδομένοι δέ· καὶ τοῦ ΚΓ ἄρα παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

vel inæquales quidem, dati vero, æqualis autem ipse quidem ΑΗΓ ipsi ΚΒΓ, ipse vero ΔΘΖ ipsi ΛΕΖ; et anguli ad puncta Β, Ε igitur vel æquales sunt, vel inæquales quidem, dati vero. Et quoniam ratio est ipsius ΑΗ ad ΔΘ data, æqualis autem ipsa quidem ΑΗ ipsi ΚΒ, ipsa vero ΔΘ ipsi ΛΕ; ratio igitur et ipsius ΚΒ ad ΛΕ data. Est autem et ipsius ΒΓ ad ΕΖ ratio data; et anguli ad puncta Β, Ε vel æquales sunt, vel inæquales quidem, dati vero; et igitur parallelogrammi ΚΓ ad ΔΖ parallelogrammum ratio est data; quare et trianguli ΑΒΓ ad ΔΕΖ triangulum ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο γ'.

PROPOSITIO LXXIII.

Ἐὰν δύο¹ παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίστους μὲν, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ οὕτως ἔχωσιν, ὥστε εἶναι ὡς τὴν τοῦ πρώτου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως τὴν λοιπὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν πρὸς ἄλλην τινα, ἔχη δὲ ἢ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ

Si duorum parallelogrammorum circa æquales angulos, vel circa inæquales quidem, datos vero, latera ita se habeant ut sit sicut primi latus ad secundi latus ita reliquum secundi latus ad aliam quamdam rectam, habeat autem reliquum primi

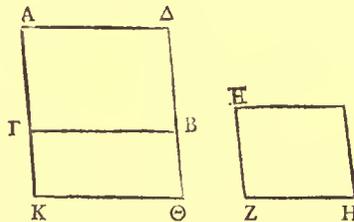
ou inégaux, mais cependant donnés, que l'angle ΑΗΓ est égal à l'angle ΚΒΓ, et l'angle ΔΘΖ égal à l'angle ΛΕΖ (29. 1), les angles en Β et Ε seront égaux, ou inégaux mais cependant donnés. Et puisque la raison de ΑΗ à ΔΘ est donnée, que ΑΗ est égal à ΚΒ, et ΔΘ égal à ΛΕ (34. 1), la raison de ΚΒ à ΛΕ sera donnée. Mais la raison de ΒΓ à ΕΖ est donnée, et les angles aux points Β, Ε sont égaux, ou inégaux mais cependant donnés; la raison du parallélogramme ΚΓ au parallélogramme ΔΖ est donc donnée (70); la raison du triangle ΑΒΓ au triangle ΔΕΖ est donc donnée (41. 1).

PROPOSITION LXXIII.

Si les côtés de deux parallélogrammes autour d'angles égaux, ou inégaux mais cependant donnés, sont tels que le côté du premier soit au côté du second comme le côté restant du second est à une certaine droite, et si le côté restant du premier

πρὸς αὐτὴν λόγον δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Δύο γὰρ παραλληλογράμμων τῶν AB , EH , περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, τὰς πρὸς τοῖς Γ , Z αἱ πλευραὶ εὐτὼς ἰχέτωσαν πρὸς ἀλλήλας, ὅστε εἶναι ὡς τὴν GB πρὸς τὴν ZH εὐτὼς τὴν EZ πρὸς τὴν HK , τῆς δὲ AG πρὸς τὴν HK λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ AB παραλληλογράφου πρὸς τὸ EH παραλληλόγραμμον λόγος ἔστι δοθείς.



Ἐστω γὰρ πρότερον τὸ AB τῷ EH ἰσογώνιον, καὶ παραβλήσθω παρὰ τὴν $B\Gamma$ εὐθείαν τῷ EH παραλληλόγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $\Gamma\Theta$ · καὶ κείσθω ὅστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν AG τῇ $K\Gamma$ · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΔB τῇ ΘB . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἔστι τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ EH · ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον· τῶν $\Gamma\Theta$, EH ἄρα ἀντιπεπόμενα αἱ

latus ad hanc rectam rationem datam; et ipsa parallelogramma inter se rationem habebunt datam.

Duorum enim parallelogrammorum AB , EH circa æquales angulos, vel circa inæquales quidem, datos vero, ad puncta Γ , Z , ita se habeant inter se, ut sit sicut GB ad ZH ita EZ ad HK , ipsius autem AG ad HK ratio sit data; dico et parallelogrammi AB ad EH parallelogrammum rationem esse datam.

Sit enim primum AB ipsi EH æquiangulum, et applicetur ad $B\Gamma$ rectam parallelogrammo EH æquale parallelogrammum $\Gamma\Theta$; et ponatur ita ut in directum sit AG ipsi $K\Gamma$; in directum igitur est et ΔB ipsi ΘB . Et quoniam æquale est $\Gamma\Theta$ ipsi EH ; est autem et ipsi æquiangulum; ipsorum $\Gamma\Theta$, EH igitur reciproca sunt

a une raison donnée avec cette droite, ces parallélogrammes auront entre eux une raison donnée.

Que les côtés des deux parallélogrammes AB , EH , autour d'angles égaux, ou autour d'angles inégaux en Γ , Z , mais cependant donnés, soient tels que GB soit à ZH comme EZ est à HK , et que la raison de AG à HK soit donnée; je dis que la raison du parallélogramme AB au parallélogramme EH est donnée.

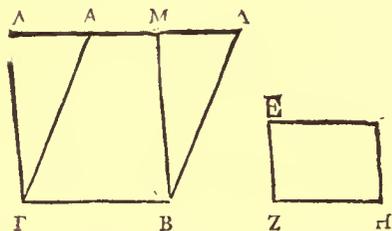
Car premièrement que AB soit équiangle avec EH . Appliquons à la droite $B\Gamma$ le parallélogramme $\Gamma\Theta$ égal au parallélogramme EH , et qu'il soit placé de manière que AG soit dans la direction de $K\Gamma$; la droite ΔB sera dans la direction de ΘB . Puisque $\Gamma\Theta$ est égal à EH , et qu'il lui est équiangle, les côtés des parallélogrammes $\Gamma\Theta$,

πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ. Ὡς δὲ ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἢ ΕΖ καὶ⁵ πρὸς ἢν ἢ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς· ὥστε τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΘ, τουτέστι πρὸς τὸ ΕΗ, λόγος ἔστι δοθείς.

Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ⁶· καὶ συνεισ-
τάτω πρὸς τῇ ΒΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ ση-
μείῳ τῷ Γτῷ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΒΓΛ, καὶ
συμπεπληρώσω τὸ ΓΜ παραλληλόγραμμον· Καὶ

latera circa æquales angulos; est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad ΓΚ. Ut autem ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ et ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam; ratio igitur ipsius ΑΓ ad ΓΚ data; quare ipsius ΑΒ ad ΓΘ, hoc est ad ΕΗ, ratio est data.

Non sit autem æquiangulum ΑΒ ipsi ΕΗ. Et constituatur ad ΒΓ rectam, et ad punctum in cā Γ angulo ΕΖΗ æqualis ΒΓΛ, et compleatur ΓΜ parallelogrammum. Et quoniam datus est



ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΓΒ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΓΛ ἐστὶ δοθεῖσα. Δέδοται δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΓΑΛ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΓΛΑ δέδοται· ὥστε δὲ δόται τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ εἶδει⁸ λό-
γος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΛ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς ἢν ἢ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον, τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΛ

uterque angulorum ΑΓΒ, ΑΓΒ; et reliquus igitur ΑΓΛ est datus. Datus est autem et ipse ΓΑΛ; et reliquus igitur ipse ΓΛΑ datus est; quare datum est ΑΓΔ triangulum specie; ratio igitur est ipsius ΑΓ ad ΓΛ data. Et quoniam ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam, ipsius vero ΑΓ ad ΓΛ ratio est

ΕΗ, autour des angles égaux, seront réciproquement proportionnels (14. 6); ΓΒ est donc à ΖΗ comme ΕΖ est à ΓΚ. Mais ΓΒ est à ΖΗ comme ΕΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a une raison donnée; la raison de ΑΓ à ΓΚ est donc donnée; la raison de ΑΒ à ΓΘ, c'est-à-dire à ΕΗ, est donc donnée.

Mais que ΑΒ ne soit pas équiangle avec ΕΗ. Sur la droite ΒΓ, et au point Γ de cette droite, faisons l'angle ΒΓΛ égal à l'angle ΕΖΗ, et achevons le parallélogramme ΓΜ. Puisque chacun des angles ΑΓΒ, ΑΓΒ est donné, l'angle restant ΑΓΛ est donné. Mais l'angle ΓΑΛ est donné; l'angle restant ΓΛΑ est donc donné; le triangle ΑΓΛ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΓ à ΓΛ est donc donnée. Mais ΓΒ est à ΖΗ comme ΕΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a une raison donnée, et la raison

λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἢ ΖΕ πρὸς ἢν ἢ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον¹⁰. Καὶ ἔστιν ἴση ἢ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΓΜ παραλληλογράμμου¹¹ πρὸς τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμον¹² δοθείς. Ἴσον δὲ ἔστι τὸ ΓΜ τῷ ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ εδ'.

Εάν δύο παραλληλόγραμμα λόγον ἔχη δεδομένον, ἢτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσαις μὲν, δεδομέναις δὲ· ἔσται ὡς ἢ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως ἢ ἑτέρα τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἢν ἢ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ¹ λόγον ἔχει δεδομένον.

Δύο γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΕΗ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχεται δεδομένον, ἢτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσαις μὲν, δεδομέναις δὲ, ταῖς πρὸς τοῖς Γ, Ζ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς ἢν ἢ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

data; est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΖΕ ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam. Et est æqualis ipse ΒΓΑ angulus ipsi ΕΖΗ; ratio igitur parallelogrammi ΓΜ ad ΕΗ parallelogrammum data; æquale autem ΓΜ ipsi ΓΔ; ratio igitur ipsius ΓΔ ad ΕΗ data.

PROPOSITIO LXXIV.

Si duo parallelogramma rationem habeant datam, vel in æqualibus angulis, vel in inæqualibus quidem, datis vero; erit ut primi latus ad secundi latus ita alterum secundi latus ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

Duo enim parallelogramma ΑΒ, ΕΗ inter se rationem habeant datam, vel in æqualibus angulis, vel in inæqualibus quidem, datis vero, ad puncta Γ, Ζ; dico esse ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad quam ΑΓ rationem habet datam.

de ΑΓ à ΓΑ est donnée; ΓΒ est donc à ΖΗ comme ΖΕ est à la droite avec laquelle ΑΓ a une raison donnée. Mais l'angle ΒΓΑ est égal à l'angle ΕΖΗ; la raison du parallélogramme ΓΜ au parallélogramme ΕΗ est donc donnée. Mais ΓΜ est égal à ΓΔ (35. 1); la raison de ΓΔ à ΕΗ est donc donnée.

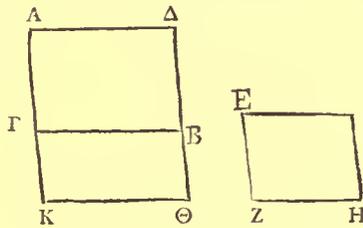
PROPOSITION LXXIV.

Si deux parallélogrammes, placés dans des angles égaux, ou inégaux mais cependant donnés, ont entre eux une raison donnée, un côté du premier sera à un côté du second comme le côté restant du second est à la droite avec laquelle l'autre côté du premier a la raison donnée.

Que les deux parallélogrammes ΑΒ, ΕΗ, placés dans des angles égaux, ou inégaux en Γ et Ζ, mais cependant donnés, ayent entre eux une raison donnée; je dis que ΓΒ est à ΖΗ comme ΕΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a la raison donnée.

Τὸ γὰρ AB τῶν ΕΗ ἢτοι ἰσογώνιον ἔστιν ἢ οὐ. Ἐστω πρῶτον ἰσογώνιον. Καὶ παραβελήσθω παρά τὴν ΓΒ εὐθείαν τῶν ΕΗ παραλληλογράμμω ἴσον παραλληλογράμμω τὸ ΓΘ, καὶ

Ipsum enim AB ipsi EH vel æquiangulum est vel non. Sit primum æquiangulum. Et applicetur ad ΓΒ rectam parallelogrammo EH æquale parallelogrammum ΓΘ, et ponatur ita ut in



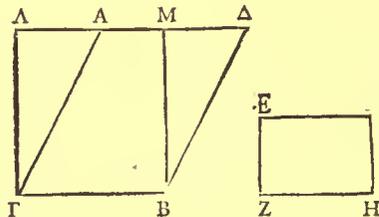
κείσθω ὥστε ἐπὶ εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῆ ΓΚ· ἐπὶ εὐθείας ἄρα ἔστί καὶ ἡ ΔΒ τῆ ΒΘ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἔστί τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΕΗ τῶν ΓΘ· λόγος ἄρα ἔστί τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΘ δοθείς². ὥστε καὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἔστί δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἔστί τὸ ΓΘ τῶν ΕΗ, ἔστί δὲ καὶ ἰσογώνιον τῶν ΓΘ, ΕΗ ἄρα ἀντιπεπίνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΙΚ. Τῆς δὲ ΙΚ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἔστί δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἢ³ ΕΖ πρὸς ἢν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

directum sit ΑΓ ipsi ΓΚ; in directum igitur est ΔΒ ipsi ΒΘ. Et quoniam ratio est ipsius ΑΒ ad ΕΗ data, æquale autem ΕΗ ipsi ΓΘ; ratio igitur est ipsius ΑΒ ad ΓΘ data; quare et ipsius ΑΓ ad ΓΚ ratio est data. Et quoniam æquale est ΓΘ ipsi ΕΗ; est autem et æquiangulum; ipsorum ΓΘ, ΕΗ igitur reciproca sunt latera circa æquales angulos; est igitur, ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad ΙΚ. Ipsius autem ΙΚ ad ΑΓ ratio est data; est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam.

Car le parallélogramme AB est équiangle avec le parallélogramme EH, ou non. Qu'il lui soit d'abord équiangle. Appliquons à la droite ΓΒ le parallélogramme ΓΘ égal au parallélogramme EH (15. 1), et qu'il soit placé de manière que ΑΓ soit dans la direction de ΓΚ; la droite ΔΒ sera dans la direction de ΒΘ. Et puisque la raison de ΑΒ à ΕΗ est donnée, et que ΕΗ est égal à ΓΘ, la raison de ΑΒ à ΓΘ sera donnée; la raison de ΑΓ à ΓΚ est donc donnée (1. 6). Et puisque le parallélogramme ΓΘ est égal à ΕΗ, et qu'il lui est équiangle, les côtés des parallélogrammes ΓΘ, ΕΗ, autour des angles égaux, seront réciproquement proportionnels (14. 6); ΓΒ est donc à ΖΗ comme ΕΖ est à ΙΚ. Mais la raison de ΙΚ à ΑΓ est donnée; ΓΒ est donc à ΖΗ comme ΕΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a la raison donnée.

Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ AB τῷ EH . Καὶ συν-
εστάτω πρὸς τῇ GB εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ ση-
μείῳ τῷ Γ , τῇ ὑπὸ EZH γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ AGB , καὶ
συμπεπληρώσω τὸ GM παραλληλόγραμμον⁵.

Non sit autem æquiangulum AB ipsi EH . Et
constituatur ad GB rectam, et ad punctum in
câ Γ , angulo EZH æqualis ipse AGB , et compleat-
ur parallelogrammum GM . Quoniam igitur



Ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΓA πρὸς τὸ EH δοθείς, ἴσον
δὲ τὸ ΓA τῷ GM · λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ GM πρὸς
τὸ EH δοθείς. Καὶ ἐστὶν ἴση ἢ ὑπὸ AGB γωνία⁶
τῇ ὑπὸ EZH · ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ GM τῷ EH ·
ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ GB πρὸς τὴν ZH οὕτως ἢ EZ
πρὸς ἢν ἢ⁸ AG λόγον ἔχει δεδομένον. Τῆς δὲ
 ΓA πρὸς τὴν ΓA λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐστὶν ἄρα ὡς
ἢ GB πρὸς τὴν ZH οὕτως ἢ EZ πρὸς ἢν ἢ AG λό-
γον ἔχει δεδομένον.

ratio est ipsius ΓA ad EH data, æquale autem
 ΓA ipsi GM ; ratio igitur et ipsius GM ad EH data.
Et est æqualis angulus AGB ipsi EZH ; æquian-
gulum igitur est GM ipsi EH ; est igitur ut GB
ad ZH ita EZ ad quam ipsa AG rationem ha-
bet datam. Ipsius autem ΓA ad ΓA ratio est
data; est igitur ut GB ad ZH ita EZ ad quam
ipsa AG rationem habet datam.

Mais que AB ne soit pas équiangle avec EH . Sur la droite GB et au point Γ
faisons l'angle AGB égal à l'angle EZH (23. 1), et achevons le parallélogramme GM .
Puisque la raison de ΓA à EH est donnée, et que ΓA est égal à GM (35. 1); la
raison de GM à EH sera donnée. Mais l'angle AGB est égal à l'angle EZH ; GM est
donc équiangle avec EH (29) (34. 1); GB est donc à ZH comme EZ est à la
droite avec laquelle AG a la raison donnée. Mais la raison de ΓA à ΓA est donnée;
 GB est donc à ZH comme EZ est à la droite avec laquelle AG a une raison donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. οε΄.

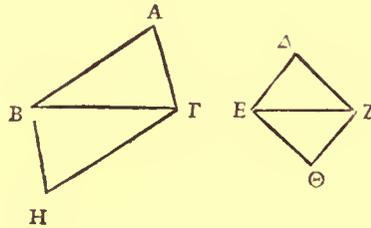
PROPOSITIO LXXV.

Εάν δύο τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχη δεδομένον, ἔτσι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν, δεδομέναις δέ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως ἡ ἑτέρα τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἢν ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ² λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ ἔστωσαν αἱ πρὸς τοῖς Α, Δ γωνίαι, ἢτοι ἴσαι, ἢ³ ἀνίσοι μὲν, δεδομέναι δέ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ἢν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

Si duo triangula inter se rationem habeant datam, vel in æqualibus angulis, vel in inæqualibus quidem, datis verò; erit ut primi latus ad se eundi latus ita alterum secundi latus ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ inter se rationem habentia datam, et sint anguli ad puncta Α, Δ, vel æquales, vel inæquales quidem, dati vero; dico esse ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΔΖ ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam.



Συμπεπιπλώσθω γάρ τὰ ΑΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τριγώνον ἰσοθεὶς· λόγος ἄρα καὶ

Compleantur enim ΑΗ, ΔΘ parallelogramma. Et quoniam ratio est trianguli ΑΒΓ ad ΔΕΖ triangulum data; ratio igitur et parallelogram-

PROPOSITION LXXV.

Si deux triangles placés dans des angles égaux, ou inégaux mais cependant donnés, ont entre eux une raison donnée, un côté du premier sera à un côté du second comme un autre côté du second est à la droite avec laquelle le côté restant du premier a la raison donnée.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant entre eux une raison donnée, que les angles en Α et Δ soient égaux ou inégaux, mais cependant donnés; je dis que ΑΒ est à ΔΕ comme ΔΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a la raison donnée.

Car achevons les parallélogrammes ΑΗ, ΔΘ. Puisque la raison du triangle ΑΒΓ au triangle ΔΕΖ est donnée, la raison du parallélogramme ΑΗ au parallélogramme ΔΘ

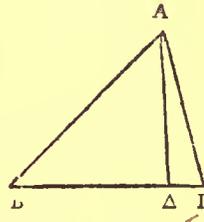
τοῦ ΑΗ παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΔΘ παραλληλόγραμμον δοθεῖς. Ἐπεὶ οὖν δύο παραλληλόγραμμα τὰ ΑΗ, ΔΘ πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει⁵ δεδομένον, ἥτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσαις μὲν, δεδομέναις δέ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἢ ΔΖ πρὸς ἢ ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δοθέντα⁶.

mi AH ad ΔΘ parallelogrammum data. Quoniam igitur duo parallelogramma AH, ΔΘ inter se rationem habent datam, vel in æqualibus angulis, vel in inæqualibus, datis autem; est igitur ut AB ad ΔΕ ita ΔΖ ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 05'.

Ἐὰν τριγώνου δεδομένου τῶ εἶδει ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ, ἢ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν βάσιν λόγον ἔχει¹ δεδομένον.

Ἐστω τρίγωνον δεδομένον τῶ εἶδει τὸ ΑΒΓ, καὶ



ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λόγος ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς.

Si a trianguli specie dati vertice ad basim perpendicularis ducatur, ducta ad basim rationem habet datam.

Sit triangulum datum specie ΑΒΓ, et ducatur

a puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ; dico rationem esse ipsius ΑΔ ad ΒΓ datam.

est donnée (41. 1). Et puisque les deux parallélogrammes AH, ΔΘ, placés dans des angles égaux, ou inégaux mais cependant donnés, ont entre eux une raison donnée, la droite AB sera à la droite ΔΕ comme ΔΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a la raison donnée (74).

PROPOSITION LXXVI.

Si du sommet d'un triangle donné d'espèce on mène une perpendiculaire à la base, la droite menée aura une raison donnée avec la base.

Soit ΑΒΓ un triangle donné d'espèce, et du point Α menons à ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que la raison de ΑΔ à ΒΓ est donnée.

Ἐπεὶ γὰρ δίδεται τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῶ εἶδει·
δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ² ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$ γωνία. Ἐστι
δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΔΑ$ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ
 $ΒΑΔ$ ἐστὶ δοθεῖσα³. δίδεται ἄρα τὸ $ΑΒΔ$ τρίγω-
νον τῶ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$
δοθείς· τῆς δὲ⁴ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ λόγος δοθείς·
καὶ τῆς $ΑΔ$ ἄρα πρὸς τὴν $ΒΓ$ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Quoniam enim datum est $ΑΒΓ$ triangulum
specie, datus igitur est et $ΑΒΔ$ angulus. Est
autem et ipse $ΒΔΑ$ datus, et reliquus igitur
ipse $ΒΑΔ$ est datus. Datum est igitur $ΑΒΔ$
triangulum specie; ratio igitur est ipsius $ΒΑ$
ad $ΑΔ$ data; ipsius autem $ΑΒ$ ad $ΒΓ$ ratio data;
et ipsius $ΑΔ$ igitur ad $ΒΓ$ ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ΄.

PROPOSITIO LXXVII.

Ἐὰν δύο εἶδη δεδομένα τῶ εἶδει¹ πρὸς ἄλληλα
λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ ὁποιαοῦν
ἐνὸς τῶν εἰδῶν πρὸς ὁποιαοῦν τοῦ ἑτέρου λόγον
ἔξῃ δεδομένον.

Si duæ figuræ datæ specie inter se rationem
habeant datam, et unum latus quodlibet unius
figurarum ad quodlibet alterius rationem ha-
bebit datam.

Δύο γὰρ εἶδη τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ δεδομένα τῶ εἶδει
πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχεται δεδομένον· λέγω ὅτι
καὶ μία πλευρὰ ὁποιαοῦν τοῦ $ΑΒΓ$ πρὸς μίαν
πλευρὰν ὁποιαοῦν τοῦ $ΔΕΖ$ λόγον ἔχει² δεδο-
μένον.

Duæ enim figuræ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ datæ specie
inter se rationem habeant datam; dico et unum
latus quodlibet ipsius $ΑΒΓ$ ad unum latus quod-
libet ipsius $ΔΕΖ$ rationem habere datam.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$ τετρά-
γωνα τὰ $ΒΗ$, $ΕΘ$. Καὶ³ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐ-

Describantur enim ab ipsis $ΒΓ$, $ΕΖ$ quadrata
 $ΒΗ$, $ΕΘ$. Et quoniam ab eadem rectâ $ΒΓ$ duæ

Puisque le triangle $ΑΒΓ$ est donné d'espèce, l'angle $ΑΒΔ$ est donné (déf. 3).
Mais l'angle $ΒΔΑ$ est donné; l'angle restant $ΒΑΔ$ est donc donné (52. 1) (4); le
triangle $ΑΒΔ$ est donc donné d'espèce (40); la raison de $ΒΑ$ à $ΑΔ$ est donc donnée
(déf. 3); mais la raison de $ΑΒ$ à $ΒΓ$ est donnée; la raison de $ΑΔ$ à $ΒΓ$ est donc
aussi donnée (8).

PROPOSITION LXXVII.

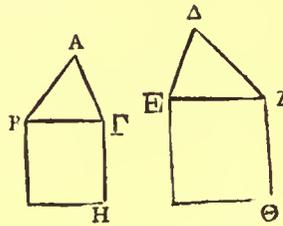
Si deux figures données d'espèce ont entre elles une raison donnée, un côté
quelconque de l'une de ces figures aura une raison donnée avec un côté quel-
conque de l'autre.

Que les deux figures $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, données d'espèce, aient entre elles une raison
donnée; je dis qu'un côté quelconque de $ΑΒΓ$ aura une raison donnée avec un
côté quelconque de $ΔΕΖ$.

Car sur les droites $ΒΓ$, $ΕΖ$, décrivons les quarrés $ΒΗ$, $ΕΘ$ (46. 1). Puisque sur la

Θείας τῆς ΒΓ δύο εἶδη ἀναγράφεται ἃ ἔτυχεν
 δεδομένα τῷ εἶδει τὰ ΑΒΓ, ΒΗ· λόγος ἄρα τοῦ
 ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ πάλιν⁴

figuræ descriptæ sunt quælibet datæ specie ΑΒΓ,
 ΒΗ; ratio igitur ipsius ΑΒΓ ad ΒΗ data. Prop-



καὶ τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἐπεὶ
 οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ⁵ δο-
 θείς, ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ λόγος
 ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ
 δοθείς· καὶ τοῦ ΒΗ ἄρα πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ
 δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος
 ἐστὶ δοθείς.

ter eadem utique rursus et ipsius ΔΕΖ ad ΕΘ
 ratio est data. Quoniam igitur ratio est ipsius
 ΑΒΓ ad ΔΕΖ data, sed ipsius quidem ΑΒΓ ad
 ΒΗ ratio est data, ipsius autem ΔΕΖ ad ΕΘ
 ratio est data; et ipsius ΒΗ igitur ad ΕΘ ratio
 est data; quare et ipsius ΒΓ ad ΕΖ ratio est
 data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ σή'.

Ἐὰν δοθὲν εἶδος πρὸς τι ὀρθογώνιον λόγον ἔχη
 δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν
 λόγον ἔχη δοθέντα· δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τῷ
 εἶδει.

PROPOSITIO LXXVIII.

Si data figura ad aliquod rectangulum rati-
 onem habeat datam, et unum latus ad unum
 latus rationem habeat datam, datum est rectan-
 gulum specie.

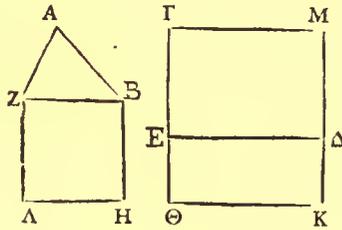
même droite ΒΓ on a décrit deux figures quelconques ΑΒΓ, ΒΗ données d'espèce, la raison de ΑΒΓ à ΒΗ est donnée (49). Semblablement, la raison de ΔΕΖ à ΕΘ est donnée. Et puisque la raison de ΑΒΓ à ΔΕΖ est donnée, que la raison de ΑΒΓ à ΒΗ est donnée, et que la raison de ΔΕΖ à ΕΘ est aussi donnée, la raison de ΒΗ à ΕΘ est donnée (8); la raison de ΒΓ à ΕΖ est donc donnée (54).

PROPOSITION LXXVIII.

Si une figure donnée a une raison donnée avec un rectangle, et si un côté a une raison donnée avec un côté, le rectangle est donné d'espèce.

Δοθέν γάρ εἶδος τὸ AZB πρὸς τι ὀρθογώνιον τὸ ΓΔ λόγον ἔχέτω δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τῆς ZB πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῶ εἶδει.

Data enim figura AZB ad aliquod rectangulum ΓΔ rationem habeat datam, et sit ratio ipsius ZB ad ΕΔ data; dico datum esse ΓΔ specie.



Αναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς ZB τετράγωνον τὸ ZH, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΔ τῶ ZH ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ EK, καὶ κείσθω ὥστε ἑπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΕ τῇ ΕΘ· ἑπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ τῇ ΔΚ. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ZB δύο εὐθύγραμμα ἄ ἔτυχεν δεδομένα τῶ εἶδει ἀναγράφονται τὰ AZB, ZH· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AZB πρὸς τὸ ZH δοθείς. Τοῦ δὲ AZB πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ZH ἄρα πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τὸ ZH τῶ EK ἐστὶν ἴσον· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ EK λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον τὸ ZH τῶ EK, ἐστὶ γάρ³ καὶ ὀρθογώνιον· ἀν-

Describatur enim ab ipsâ ZB quadratum ZH, et applicetur ad ΕΔ ipsi ZH æquale parallelogrammum EK, et ponatur ita ut in directum sit ΓΕ ipsi ΕΘ; in directum igitur est et ΜΔ ipsi ΔΚ. Et quoniam ab eâdem rectâ ZB duo rectilinea qualibet data specie descripta sunt AZB, ZH; ratio igitur est ipsius AZB ad ZH data. Ipsius autem AZB ad ΓΔ ratio est data; et ipsius ZH igitur ad ΓΔ ratio est data. Sed ZH ipsi EK est æquale; et ipsius ΓΔ igitur ad EK ratio est data. Quare et ipsius ΓΕ ad ΕΘ ratio est data. Et quoniam æquale est et æquiangulum ZH ipsi EK, est enim et rectangulum;

Que la figure donnée AZB ait une raison donnée avec un rectangle ΓΔ, et que la raison de ZB à ΕΔ soit donnée; je dis que ΓΔ est donné d'espèce.

Car sur ZB décrivons le carré ZH (46. 1); appliquons à ΕΔ le parallélogramme EK égal à ZH (45. 1), et plaçons-le de manière que ΓΕ soit dans la direction de ΕΘ; la droite ΜΔ sera dans la direction de ΔΚ. Puisque sur la même droite ZB on a décrit deux figures rectilignes quelconques AZB, ZH données d'espèce, la raison de AZB à ZH sera donnée (49). Mais la raison de AZB à ΓΔ est donnée; la raison de ZH à ΓΔ est donc donnée (8). Mais ZH est égal à EK; la raison de ΓΔ à EK est donc donnée; la raison de ΓΕ à ΕΘ est donc donnée. Mais la figure ZH est égale à EK et lui est équiangle, car c'est un rectangle; leurs côtés sont donc

τιπεπένθασιν ἄρα αὐτῶν αἱ πλευραὶ, καὶ ἔστιν ὡς ἢ ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΛ. Λόγος δὲ ὑπόκειται τῆς ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς. Λόγος ἄρα καὶ τῆς ΕΘ πρὸς τὴν ΖΛ δοθείς. Τῆς δὲ ΕΘ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἴση δὲ ἢ ΑΖ τῇ ΖΒ, τετράγωνον γὰρ ἐστὶ· τῆς ΑΖ ἄρα πρὸς τὴν⁵ ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς⁶. τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἢ πρὸς τῷ Ε γωνία· δίδεται ἄρα τὸ ΓΔ τῷ εἶδει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσων ἔχη, καὶ ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ἐπὶ τὰς βάσεις κάθετοι εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν, ἧ δὲ ὡς ἢ τοῦ πρώτου τριγώνου βάση πρὸς τὴν κάθετον οὕτως ἢ τοῦ ἑτέρου τριγώνου βάση πρὸς τὴν κάθετον ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΟΖΗ ἴσας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Β, Ζ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ

reciproca sunt igitur eorum latera, et est ut ΖΒ ad ΕΔ ita ΕΘ ad ΖΛ. Ratio autem supponitur ipsius ΖΒ ad ΕΔ data; ratio igitur et ipsius ΕΘ ad ΖΛ data. Ipsius autem ΕΘ ad ΓΕ ratio est data; et ipsius ΓΕ igitur ad ΖΛ ratio est data. Æqualis autem ΑΖ ipsi ΖΒ, quadratum enim est; ipsius ΑΖ igitur ad ΕΔ ratio est data; ipsius ΓΕ igitur ad ΕΔ ratio est data. Et est rectus ad Ε angulus; datum est igitur ΓΔ specie.

PROPOSITIO LXXIX.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, et ab æqualibus angulis ad bases perpendiculares rectæ lineæ ducantur, sit autem ut primi trianguli basis ad perpendicularem, ita alterius trianguli basis ad perpendicularem; æquiangula erunt triangula.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΟΖΗ æquales habentia angulos ad Β, Ζ, et ducantur a punctis

réciiproquement proportionnels (14. 6); ΖΒ est donc à ΕΔ comme ΕΘ est à ΖΛ. Mais la raison de ΖΒ à ΕΔ est supposée donnée; la raison de ΕΘ à ΖΛ est donc donnée. Mais la raison de ΕΘ à ΓΕ est donnée (1. 6); la raison de ΓΕ à ΖΛ est donc donnée (8). Mais ΑΖ est égal à ΖΒ, car ΖΒ est un carré; la raison de ΑΖ à ΕΔ est donc donnée (8); la raison de ΓΕ à ΕΔ est donc donnée. Mais l'angle en Ε est droit; ΓΔ est donc donné d'espèce (déf. 5).

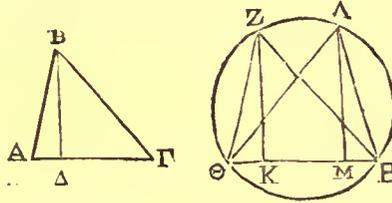
PROPOSITION LXXIX.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si de ces angles égaux on mène des lignes droites perpendiculaires aux bases, et si la base du premier triangle est à la perpendiculaire comme la base de l'autre est à la perpendiculaire, ces triangles seront équiangles.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΟΖΗ ayant des angles égaux en Β, Ζ; des points

τῶν Β, Ζ κάθετοι αἱ ΒΔ, ΖΚ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον¹ τῷ ΘΖΗ τριγώνῳ.

B, Z perpendiculares ΒΔ, ΖΚ, sit autem ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΖΚ; dico æquiangulum esse ΑΒΓ triangulum triangulo ΘΖΗ.



Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΘΖΗ τρίγωνον κύκλος οὗ τμήμα ἔστω τὸ ΘΖΗ², καὶ συνστάτω πρὸς τῆς ΘΗ εὐθείας, καὶ τῷ πρὸς αὐτῆς σημείῳ τῷ Θ, τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας ἴση ἢ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΛ, ΛΗ, καὶ ἦχθω κάθετος ἡ ΑΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΘ γωνία τῆς ὑπὸ ΘΛΗ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ εἰσι τμήματι τοῦ κύκλου, ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ τῆς ὑπὸ ΓΒΑ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΛΘ τῆς ὑπὸ ΓΒΑ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΘΗ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΗΘ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση³. Ἐμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΛΗ τριγώνῳ. Καὶ κάθετοι ἡγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΔ, ΑΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΑΜ. Ἦν δὲ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ, ὑποκείται

Describatur enim circa ΘΖΗ triangulum circulus cujus segmentum sit ΘΖΗ, et constituatur ad ΘΗ rectam, et ad punctum in eâ Θ, angulo ΓΑΒ æqualis angulus ΗΘΛ, et jungantur ipsæ ΖΛ, ΛΗ, et ducatur perpendicularis ΑΜ. Et quoniam æqualis est ΗΖΘ angulus ipsi ΘΛΗ, etenim in eodem sunt segmento circuli, est autem ipse ΗΖΘ ipsi ΓΒΑ æqualis; æqualis igitur est et ipse ΗΛΘ ipsi ΓΒΑ. Est autem et ipse ΛΘΗ ipsi ΒΑΓ æqualis; et reliquus igitur ΛΗΘ ipsi ΒΓΑ est æqualis. Simile igitur est ΑΒΓ triangulum triangulo ΘΛΗ. Et perpendiculares ductæ sunt ΒΔ, ΑΜ; est igitur ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΑΜ. Erat autem ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΖΚ, supponitur enim;

B, Z, menons les perpendiculaires ΒΔ, ΖΚ, et que ΑΓ soit à ΒΔ comme ΘΗ est à ΖΚ; je dis que le triangle ΑΒΓ est équiangle avec le triangle ΘΖΗ.

Car autour du triangle ΘΖΗ décrivons un cercle dont ΘΖΗ soit un segment (5.4); sur la droite ΘΗ, et au point Θ de cette droite, faisons l'angle ΗΘΛ égal à l'angle ΓΑΒ; joignons ΖΛ, ΛΗ, et menons la perpendiculaire ΑΜ. Puisque l'angle ΗΖΘ est égal à l'angle ΘΛΗ, car ces angles sont dans le même segment de cercle (21.3), que ΗΖΘ est égal à ΓΒΑ, l'angle ΗΛΘ est donc égal à ΓΒΑ. Mais l'angle ΛΘΗ est égal à l'angle ΒΑΓ; l'angle restant ΛΗΘ est égal à l'angle restant ΒΓΑ; le triangle ΑΒΓ est donc semblable au triangle ΘΛΗ (4.6). Mais on a mené les perpendiculaires ΒΔ, ΑΜ; ΑΓ est donc à ΒΔ comme ΘΗ est à ΑΜ (4 et 20. 6). Mais ΑΓ est à ΒΔ

γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘH πρὸς τὴν ΛM οὕτως ἡ ΘH πρὸς τὴν ZK ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZK τῇ ΛM . Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ZK τῇ ΛM παράλληλος· καὶ ἡ $\text{Z}\Lambda$ ἄρα τῇ ΘH παράλληλος ἐστίν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\text{Z}\Lambda\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Lambda\Theta\text{H}$. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ $\Lambda\Theta\text{H}$ τῇ ὑπὸ $\text{B}\Lambda\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $\text{Z}\Lambda\Theta$ τῇ ὑπὸ $\text{Z}\text{H}\Theta$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $\text{B}\Lambda\Gamma$ ἄρα τῇ ὑπὸ $\text{Z}\text{H}\Theta$ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ ἡ ὑπὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$ τῇ ὑπὸ $\Theta\text{Z}\text{H}$ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $\text{B}\Gamma\text{A}$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $\text{Z}\Theta\text{H}$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\text{Z}\Theta\text{H}$ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Ἐάν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνίαν δεδομένην, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τῶν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν ὀρθογώνιον² πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς τετράγωνον λόγον ἔχη δεδομένου· δίδεται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $\text{A}\text{B}\Gamma$ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τὸ A , καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA , $\text{A}\Gamma$ πρὸς τὸ

et ut igitur ΘH ad ΛM ita ΘH ad ZK ; æqualis igitur est ZK ipsi ΛM . Est autem et ZK ipsi ΛM parallela; et $\text{Z}\Lambda$ igitur ipsi ΘH parallela est; æqualis igitur est $\text{Z}\Lambda\Theta$ angulus angulo $\Lambda\Theta\text{H}$. Sed ipse quidem $\Lambda\Theta\text{H}$ ipsi $\text{B}\Lambda\Gamma$ est æqualis, ipse autem $\text{Z}\Lambda\Theta$ ipsi $\text{Z}\text{H}\Theta$ est æqualis; et ipse $\text{B}\Lambda\Gamma$ igitur ipsi $\text{Z}\text{H}\Theta$ est æqualis. Est autem ipse $\text{A}\text{B}\Gamma$ ipsi $\Theta\text{Z}\text{H}$ æqualis; reliquus igitur $\text{B}\Gamma\text{A}$ reliquo $\text{Z}\Theta\text{H}$ est æqualis; æquiangulum igitur est $\text{A}\text{B}\Gamma$ triangulum triangulo $\text{Z}\Theta\text{H}$.

PROPOSITIO LXXX.

Si triangulum unum habeat angulum datum, et rectangulum sub lateribus datum angulum comprehendentibus ad quadratum ex reliquo latere rationem habeat datam; datum est triangulum specie.

Sit triangulum $\text{A}\text{B}\Gamma$ datum habens angulum ad A , et ipsum sub BA , $\text{A}\Gamma$ ad ipsum ex $\text{B}\Gamma$

comme ΘH est à ZK , par supposition; ΘH est donc à ΛM comme ΘH est à ZK ; ZK est donc égal à ΛM (9. 5). Mais ZK est parallèle à ΛM (28. 1); $\text{Z}\Lambda$ est donc parallèle à ΘH (33. 1); l'angle $\text{Z}\Lambda\Theta$ est donc égal à l'angle $\Lambda\Theta\text{H}$ (29. 1). Mais l'angle $\Lambda\Theta\text{H}$ est égal à l'angle $\text{B}\Lambda\Gamma$, et l'angle $\text{Z}\Lambda\Theta$ est égal à l'angle $\text{Z}\text{H}\Theta$ (21. 5); l'angle $\text{B}\Lambda\Gamma$ est donc égal à l'angle $\text{Z}\text{H}\Theta$. Mais l'angle $\text{A}\text{B}\Gamma$ est égal à l'angle $\Theta\text{Z}\text{H}$; l'angle restant $\text{B}\Gamma\text{A}$ est donc égal à l'angle restant $\text{Z}\Theta\text{H}$ (32. 1); le triangle $\text{A}\text{B}\Gamma$ est donc équiangle avec le triangle $\text{Z}\Theta\text{H}$.

PROPOSITION LXXX.

Si un triangle a un angle donné, et si le rectangle sous les droites qui comprennent l'angle donné a une raison donnée avec le carré du côté restant, le triangle est donné d'espèce.

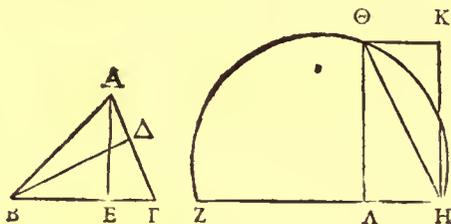
Soit le triangle $\text{A}\text{B}\Gamma$ ayant un angle donné en A ; que le rectangle sous BA , $\text{A}\Gamma$

ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγον ἔχεται δεδομένον· λέγω ὅτι δίδεται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἠχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ καθέτοι αἱ ΑΕ, ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ δοθεῖσα· δίδεται ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος

rationem habeat datam; dico datum esse ΑΒΓ triangulum specie.

Ducantur enim a punctis Α, Β ad ipsas ΒΓ, ΓΑ perpendiculares ΑΕ, ΒΔ. Quoniam igitur datus est ΒΑΔ angulus, est autem et ipse ΑΔΒ datus; datum est igitur ΑΔΒ trian-



ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθεῖς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ, ἐκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ δοθεῖς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· τῆς ἄρα ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. Ἐκείσθω δὴ τῇ ᾧ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΗ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τμήμα κύκλου τὸ

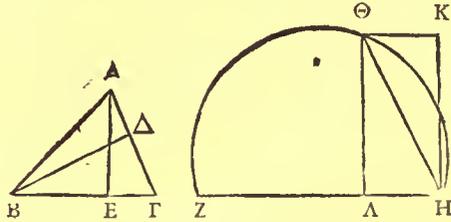
gulum specie; ratio igitur est ipsius ΑΒ ad ΒΔ data; quare et rectanguli sub ΒΑ, ΑΓ ad rectangulum sub ΑΓ, ΒΔ ratio est data. Ipsi autem sub ΑΓ, ΒΔ æquale est ipsum sub ΒΓ, ΑΕ, utrumque enim ipsorum duplum est trianguli ΑΒΓ; ratio igitur et ipsius sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΒΓ, ΑΕ data. Ipsi autem sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum ex ΒΓ ratio est data; et ipsius sub ΒΓ, ΑΕ igitur ad ipsum ex ΒΓ ratio est data; ipsius ΒΓ igitur ad ΑΕ ratio est data. Exponatur positione et magnitudine data recta ΖΗ, et describatur super ΖΗ seg-

ait une raison donnée avec le quarré de ΒΓ; je dis que le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce.

Car des points Α, Β menons à ΒΓ, ΓΑ les perpendiculaires ΑΕ, ΒΔ (12. 1). Puisque l'angle ΒΑΔ est donné, et que l'angle ΑΔΒ est aussi donné, le triangle ΑΔΒ sera donné d'espèce (40); la raison de ΑΒ à ΒΔ est donc donnée (déf. 3); la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au rectangle sous ΑΓ, ΒΔ est donc donnée (1. 6). Mais le rectangle sous ΒΓ, ΑΕ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΒΔ, car chacun de ces rectangles est double du triangle ΑΒΓ (41. 1); la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au rectangle sous ΒΓ, ΑΕ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au quarré de ΒΓ est donnée; la raison du rectangle sous ΒΓ, ΑΕ au quarré de ΒΓ est donc donnée (8); la raison de ΒΓ à ΑΕ est donc donnée (1. 6). Que la droite ΖΗ soit

$Z\Theta H$, δεχόμενον⁶ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ BAG · δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ BAG γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ἐν τῷ $Z\Theta H$ τμήματι γωνία· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ $Z\Theta H$ τμήμα. Ἡχθῶ ἀπὸ τοῦ H τῇ ZH πρὸς ὀρθὰς ἡ HK · θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ HK . Καὶ πεποιήσθω ὡς ἢ

mentum circuli $Z\Theta H$, capiens angulum æqualem ipsi BAG ; datus est autem BAG angulus; datus igitur et in segmento $Z\Theta H$ angulus; positione igitur est $Z\Theta H$ segmentum. Ducatur a puncto H ipsi ZH ad rectos ipsa HK ; positione igitur



$BΓ$ πρὸς τὴν AE οὕτως ἢ ZH πρὸς τὴν HK . Λόγος δὲ τῆς $BΓ$ πρὸς τὴν AE δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ZH πρὸς τὴν HK δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ ZH · δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ HK . Ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἐστὶ δοθέν⁷ τὸ H · δοθέν ἄρα καὶ τὸ K . Ἡχθῶ διὰ τοῦ K τῇ ZH παράλληλος ἡ $K\Theta$ · θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Theta$. Θέσει δὲ καὶ τὸ $Z\Theta H$ τμήμα· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. Ἐπιζεύχσασαν δὲ⁸ αἱ $Z\Theta$, ΘH , καὶ ἦχθῶ κάθετος ἡ $\Theta\Lambda$ · θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ $\Theta\Lambda$. Ἐστὶ δὲ καὶ⁹ τὸ Θ σημεῖον δοθέν, καὶ ἐκά-

est HK . Et fiat ut $BΓ$ ad AE ita ZH ad HK . Ratio autem ipsius $BΓ$ ad AE data; ratio igitur ipsius ZH ad HK data. Data autem ZH ; data igitur et HK . Sed et positione, et est datum punctum H ; datum igitur punctum K . Ducatur per punctum K ipsi ZH parallela $K\Theta$; positione igitur est $K\Theta$. Positione autem et $Z\Theta H$ segmentum; datum igitur Θ punctum. Jungantur autem ipsæ $Z\Theta$, ΘH , et ducatur perpendicularis $\Theta\Lambda$; positione igitur est $\Theta\Lambda$. Est autem et Θ punctum datum, et utrumque punctorum

donnée de position et de grandeur; sur ZH décrivons un segment de cercle $Z\Theta H$ qui reçoive un angle égal à l'angle BAG (53. 3). Mais l'angle BAG est donné; l'angle dans le segment $Z\Theta H$ est donc donné; le segment $Z\Theta H$ est donc donné de position (déf. 8). Du point H et sur ZH menons la perpendiculaire HK (11. 1); la droite HK sera donnée de position (29). Faisons en sorte que $BΓ$ soit à AE comme ZH est à HK (12. 6). Puisque la raison de $BΓ$ à AE est donnée, la raison de ZH à HK est donnée. Mais ZH est donné; la droite HK est donc donnée (2). Mais cette droite est donnée de position, et le point H est donné; le point K est donc donné (27). Par le point K menons $K\Theta$ parallèle à ZH (51. 1); la droite $K\Theta$ sera donnée de position. Mais le segment $Z\Theta H$ est donné de position (28); le point Θ est donc donné (25); Joignons $Z\Theta$, ΘH , et menons la perpendiculaire $\Theta\Lambda$; la droite $\Theta\Lambda$ sera donnée de position (50). Mais le point Θ est donné, ainsi que

τερον τῶν Z, H, δίδεται ἄρα ἐκάστη τῶν OZ, ZH, OH τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δίδεται ἄρα τὸ ZOH τρίγωνον τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ BG πρὸς τὴν AE οὕτως ἡ ZH πρὸς τὴν HK, ἴση δὲ ἡ HK τῇ ΛΘ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BG πρὸς τὴν AE οὕτως ἡ ZH πρὸς τὴν OΛ. Καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ ZOH· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ OZH τριγώνῳ. Δίδεται δὲ τὸ ZOH τρίγωνον τῷ εἶδει· δίδεται ἄρα καὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Z, H; data est igitur utraque ipsarum OZ, ZH, OH positione et magnitudine; datum est igitur ZOH triangulum specie. Et quoniam est ut BG ad AE ita ZH ad HK, æqualis autem HK ipsi ΛΘ; est igitur ut BG ad AE ita ZH ad OΛ. Et est æqualis BAG angulus ipsi ZOH; æquiangulum igitur est ABΓ triangulum triangulo OZH. Datum est autem ZOH triangulum specie; datum est igitur et ABΓ triangulum specie.

A Λ Λ Ω Σ.

ALITER.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ABΓ, δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ A¹, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓB² δεθείς· λόγῳ ὅτι δίδεται τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Sit triangulum ABΓ, datum habens angulum ad A, ratio autem sit ipsius sub BA, AΓ ad ipsum ex GB data; dico datum esse ABΓ triangulum specie.

Ἐπεὶ γὰρ δεθείσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAG γωνία· ὅ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAG τοῦ ἀπὸ τῆς ΓB, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον. Ω δὲ ἐστὶ μείζον τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAG τοῦ ἀπὸ τῆς BG,

Quoniam enim datus est BAG angulus; quo igitur majus est ipsum ex utrâque simul BAG quam ipsum ex BG, illud spatium ad ABΓ triangulum rationem habet datam. Quo autem est majus ipsum ex utrâque simul BAG quam ipsum

chacun des points Z, H; chacune des droites OZ, ZH, OH est donc donnée de position et de grandeur (26); le triangle ZOH est donc donné d'espèce. Et puisque BG est à AE comme ZH est à HK, et que HK est égal à ΛΘ (34. 1); la droite BG est à AE comme ZH est à OΛ. Mais l'angle BAG est égal à l'angle ZOH; le triangle ABΓ est donc équiangle avec le triangle OZH (79). Mais le triangle ZOH est donné d'espèce; le triangle ABΓ est donc donné d'espèce.

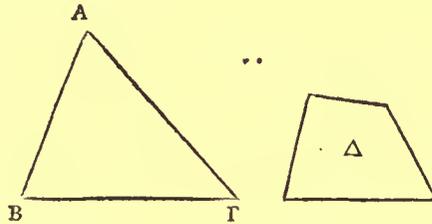
AUTREMENT.

Soit le triangle ABΓ ayant l'angle A donné, que la raison du rectangle sous BA au carré de GB soit donné; je dis que le triangle ABΓ est donné d'espèce.

Car puisque l'angle BAG est donné, l'espace dont le rectangle sous BA, AΓ surpasse le carré de BG a une raison donnée avec le triangle ABΓ (67). Soit Δ l'espace dont le rectangle sous BA, AΓ surpasse le carré de BG; la raison de l'espace

ἔστω τὸ Δ χωρίου λόγος ἄρα ἐστὶ⁶ τοῦ Δ χωρίου πρὸς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον δοθείς. Τοῦ δὲ $AB\Gamma$ τριγώνου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BA , AG λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ BAG γωνίαν· καὶ

ex $B\Gamma$, sit Δ spatium; ratio igitur est spatii Δ ad $AB\Gamma$ triangulum data. Trianguli autem $AB\Gamma$ ad ipsum sub BA , AG ratio est data, quia datus est BAG angulus; et igitur spatii Δ ad ipsum



τοῦ Δ ἄρα χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BA , AG λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν BA , AG πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι⁸ ἄρα τοῦ Δ χωρίου μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ λόγος⁹ ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τὸ Δ χωρίον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAG ἐστὶ λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAG πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς BAG πρὸς τὴν $B\Gamma$ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι δοθεῖσα ἢ ὑπὸ BAG γωνία· δίδεται ἄρα τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ εἶδει¹⁰.

sub EA , AG ratio est data. Ipsius autem sub BA , AG ad ipsum ex $B\Gamma$ ratio est data; et ipsius Δ igitur ad ipsum ex $B\Gamma$ ratio est data; et componendo igitur spatii Δ cum ipso ex $B\Gamma$ ad ipsum ex $B\Gamma$ ratio est data. Sed spatium Δ cum ipso ex $B\Gamma$ est ipsum ex utraque simul BAG ; ratio igitur ipsius ex utraque simul BAG ad ipsum ex $B\Gamma$ data; quare et utriusque simul BAG ad $B\Gamma$ ratio est data. Et est datus BAG angulus; datum est igitur $AB\Gamma$ triangulum specie.

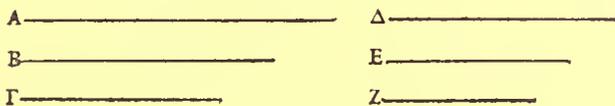
Δ au triangle $AB\Gamma$ sera donnée. Mais la raison du triangle $AB\Gamma$ au rectangle sous BA , AG est donnée, à cause que l'angle BAG est donné (66); la raison de l'espace Δ au rectangle sous BA , AG est donc donnée (8). Mais la raison du rectangle sous BA , AG au carré de $B\Gamma$ est donnée; la raison de l'espace Δ au carré de $B\Gamma$ est donc donnée (8); donc, par addition, la raison de l'espace Δ avec le carré de $B\Gamma$ au carré de $B\Gamma$ est donnée (6). Mais l'espace Δ , avec le carré de $B\Gamma$, est égal au carré de la somme des droites BA , AG ; la raison du carré de la somme des droites BAG au carré de $B\Gamma$ est donc donnée; la raison de la somme des droites BA , AG à $B\Gamma$ est donc donnée (54). Mais l'angle BAG est donné; le triangle $AB\Gamma$ est donc donné d'espèce (45).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

PROPOSITIO LXXXI.

Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι, ἀνάλογον εὔσαι τρισὶν εὐθεῖαις ἀνάλογον οὔσαις, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔχωσιν· καὶ τὰς μέσας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔξουσιν· καὶ ἐὰν ἡ ἄκρα πρὸς τὴν ἄκραν λόγον ἔχη δεδομένον, καὶ ἡ μέση πρὸς τὴν μέσην· καὶ ἡ λοιπὴ ἄκρα πρὸς τὴν λοιπὴν ἄκραν λόγον ἔξει δεδομένον.

Τρεῖς γὰρ εὐθεῖαι ἀνάλογον εὔσαι αἱ A, B, Γ τρισὶν εὐθεῖαις ἀνάλογον οὔσαις ταῖς Δ, Ε, Ζ, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔχέτωσαν, καὶ τῆς μὲν A πρὸς τὴν Δ λόγος ἔστω³ δευτεῖς, τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος δευτεῖς⁴. λέγω ὅτι καὶ τῆς Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δευτεῖς.



Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ⁵ τῆς μὲν A πρὸς τὴν Δ δευτεῖς⁵, τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ δευτεῖς⁶. λόγος ἄρα

Si tres rectæ proportionales existentes tribus rectis proportionalibus existentibus, extremas in datâ ratione habeant; et medias in datâ ratione habebunt; et si extrema ad extremam rationem habeat datam, et media ad mediam; et reliqua extrema ad reliquam extremam rationem habebit datam.

Tres enim rectæ proportionales A, B, Γ existentes tribus rectis proportionalibus existentibus Δ, Ε, Ζ, extremas in ratione datâ habeant, et ipsius quidem A ad Δ ratio sit data, ipsius autem Γ ad Ζ ratio data; dico et ipsius B ad Ε rationem esse datam.

Quoniam enim ratio est ipsius quidem A ad Δ data, ipsius autem Γ ad Ζ data; ratio

PROPOSITION LXXXI.

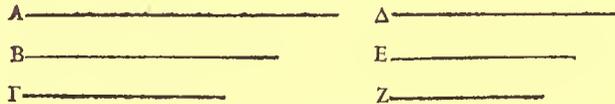
Si trois droites étant proportionnelles, et trois autres droites encore proportionnelles, les extrêmes ont entre eux une raison donnée, les moyens auront aussi entre eux une raison donnée; et si un extrême a une raison donnée avec un extrême, et si le moyen a une raison donnée avec le moyen, l'extrême restant aura une raison donnée avec l'extrême restant.

Les trois droites A, B, Γ étant proportionnelles; et les trois droites Δ, Ε, Ζ étant aussi proportionnelles, que les extrêmes ayent entre elles une raison donnée, c'est-à-dire que la raison de A à Δ soit donnée, ainsi que la raison de Γ à Ζ; je dis que la raison de B à Ε est aussi donnée.

Car puisque la raison de A à Δ est donnée, ainsi que la raison de Γ à Ζ, la raison

τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. Ἀλλὰ τῶ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Β, τῶ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε δοθείς· ὥστε καὶ τῆς Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς.

igitur ipsius sub Α, Γ ad ipsum sub Δ, Ζ data. Sed ipsi quidem sub Α, Γ æquale est ipsum ex Β, ipsi autem sub Δ, Ζ æquale est ipsum ex Ε; ratio igitur est ipsius ex Β ad ipsum ex Ε data; quare et ipsius Β ad ipsam Ε ratio est data.



Ἐστω δὲ πάλιν τῆς μὲν Α πρὸς τὴν Δ λόγος δοθείς, τῆς δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Sit autem rursus ipsius quidem Α ad Δ ratio data, ipsius autem Β ad Ε ratio data; dico et ipsius Γ ad Ζ rationem esse datam.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς μὲν Α πρὸς τὴν Δ, τῆς δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε δοθείς. Ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς Ε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. Καὶ μιᾶς πλευρᾶς τῆς Α πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς Γ πρὸς λοιπὴν τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Quoniam enim ipsius quidem Α ad Δ, ipsius autem Β ad Ε ratio est data; ratio igitur est et ipsius ex Β ad ipsum ex Ε data. Sed ipsi quidem ex Β æquale est ipsum sub Α, Γ, ipsi autem ex Ε æquale est ipsum sub Δ, Ζ; ratio igitur est ipsius sub Α, Γ ad ipsum sub Δ, Ζ data. Et unius lateris Α ad unum latus Δ ratio est data. Et reliqui igitur Γ ad reliquum Ζ ratio est data.

de l'espace sous Α, Γ, à l'espace sous Δ, Ζ est donnée (70). Mais le carré de Β est égal au rectangle sous Α, Γ, et le carré de Ε est égal au rectangle sous Δ, Ζ (17. 6); la raison du carré de Β au carré de Ε est donc donnée; la raison de Β à Ε est donc aussi donnée (54).

De plus, que la raison de Α à Δ soit donnée, ainsi que la raison de Β à Ε; je dis que la raison de Γ à Ζ est donnée.

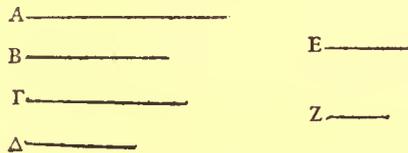
Car puisque la raison de Α à Δ est donnée, ainsi que la raison de Β à Ε, la raison du carré de Β au carré de Ε est donc aussi donnée (50). Mais le rectangle sous Α, Γ est égal au carré de Β (17. 6); et le rectangle sous Δ, Ζ est égal au carré de Ε; la raison du rectangle sous Α, Γ au rectangle sous Δ, Ζ est donc donnée. Mais la raison d'un côté Α à un côté Δ est donnée; la raison du côté restant Γ au côté restant Ζ est donc aussi donnée (68).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πβ'.

PROPOSITIO LXXXII.

Εάν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὡσιν ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς ἢν ἡ δευτέρα λόγον ἔχει δεδομένον, οὕτως ἡ τρίτη πρὸς ἢν ἡ τετάρτη λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς ἢν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον οὕτως ἡ Γ πρὸς ἢν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.



Ἐστω γὰρ πρὸς ἢν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον ἡ Ε, καὶ πεποιθήσω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. Λόγος δὲ τῆς Β πρὸς τὴν Ε δοθείς· καὶ λόγος ἄρα καὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν

Si quatuor rectæ proportionales sint; erit ut prima ad quam secunda rationem habet datam, ita tertia ad quam quarta rationem habet datam.

Sint quatuor rectæ proportionales Α, Β, Γ, Δ, et sit ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico esse ut Α ad quam Β rationem habet datam, ita ipsam Γ ad quam Δ rationem habet datam.

Sit enim ad quam ipsa Β rationem habet datam ipsa Ε, et fiat ut Β ad Ε ita Δ ad Ζ. Ratio autem ipsius Β ad Ε data; ratio igitur et ipsius Δ ad Ζ data. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, est autem et ut Β ad Ε ita Δ ad Ζ; ex æquo igitur est ut Α ad Ε

PROPOSITION LXXXII.

Si quatre droites sont proportionnelles, la première sera à celle avec laquelle la seconde a une raison donnée, comme la troisième est à celle avec laquelle la quatrième a la raison donnée.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre droites proportionnelles, c'est-à-dire, que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que Α est à celle avec laquelle Β a une raison donnée, comme Γ est à celle avec laquelle Δ a la raison donnée.

Car soit Ε la droite avec laquelle Β a une raison donnée, et faisons en sorte que Β soit à Ε comme Δ est à Ζ (16. 6). Mais la raison de Β à Ε est donnée; la raison de Δ à Ζ est donc donnée. Mais Α est à Β comme Γ est à Δ, et Β est à Ε comme Δ est à Ζ; donc, par égalité, la droite Α est à la droite Ε comme Γ

Ε οὕτως ἢ Γ πρὸς τὴν Ζ. Καὶ ἔστιν ἢ μὲν Ε πρὸς ἢν ἢ Β λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ δὲ Ζ πρὸς ἢν ἢ Δ ἔστιν ἄρα ὡς ἢ Α πρὸς ἢν ἢ Β λόγον ἔχει δεδομένον οὕτως ἢ Γ πρὸς ἢν ἢ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

ita Γ ad Z . Et est quidem ipsa E ad quam B rationem habet datam, ipsa autem Z ad quam ipsa Δ ; est igitur ut A ad quam ipsa B rationem habet datam ita ipsa Γ ad quam ipsa Δ rationem habet datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γγ'.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι οὕτως ἔχῃσι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τριῶν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιοῦν, καὶ τετάρτης αὐταῖς προσληφθείσης ἀνάλογον¹ πρὸς ἢν ἢ λοιπὴ τῶν² ἐξ ἀρχῆς τεσσάρων εὐθειῶν λόγον ἔχη δεδομένον, ἀνάλογον γίγνεσθαι τὰς τέσσαρας εὐθείας ἔσται ὡς ἢ τετάρτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως ἢ δευτέρα πρὸς ἢν ἢ πρώτην λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ A, B, Γ, Δ οὕτως ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ὥστε τριῶν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιοῦν τῶν³ A, B, Γ , καὶ τετάρτης αὐταῖς προσληφθείσης⁴ τῆς E , πρὸς ἢν ἢ Δ λόγον

PROPOSITIO LXXXIII.

Si quatuor rectæ ita se habcant inter se ut tribus sumptis ex iis quibuscumque, et quartâ ipsis sumptâ proportionali, ad quam reliqua ipsarum ex principio quatuor rectorum rationem habet datam, proportionales fiant quatuor rectæ; erit ut quarta ad tertiam ita secunda ad quam prima rationem habet datam.

Sint quatuor rectæ A, B, Γ, Δ ita se habentes inter se, ut tribus sumptis ex iis quibuscumque A, B, Γ , et quartâ ipsis acceptâ E , ad quam ipsa Δ rationem ha-

est à Z (22. 5). Mais E est la droite avec laquelle B a une raison donnée, et Z est la droite avec laquelle Δ a la raison donnée; la droite A est donc à la droite avec laquelle B a une raison donnée, comme Γ est à celle avec laquelle Δ a la raison donnée.

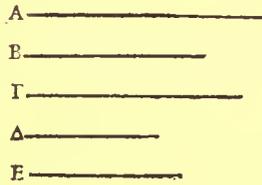
PROPOSITION LXXXIII.

Si quatre droites sont entre elles de manière qu'en ayant pris trois quelconques et une quatrième droite qui leur soit proportionnelle, et qui ait une raison donnée avec la droite restante des quatre premières, ces quatre dernières droites étant proportionnelles, la quatrième sera à la troisième comme la seconde est à celle avec laquelle la première a une raison donnée.

Soient quatre droites A, B, Γ, Δ qui soient entre elles de manière qu'en ayant pris trois quelconques A, B, Γ , et une quatrième E avec laquelle Δ ait une raison

ἔχει δεδομένον, ἀνάλογον εἶναι τὰς Α, Β, Γ, Ε εὐ-
θείας· λέγω ὅτι ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Β
πρὸς ἢν ἡ Α λόγον ἔχει δεδομένον.

bet datam; proportionales sint Α, Β, Γ, Ε
rectæ; dico ut Δ ad Γ ita Β ad quam Α rationem
habet datam.



Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ
πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ
ὑπὸ τῶν Β, Γ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Ε πρὸς
τὴν Δ δευτεῖς· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν Α,
Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Ε δευτεῖς. Τῷ δὲ ὑπὸ
τῶν Α, Ε ἐστὶν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ· λόγος
ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
Β, Γ ἐστὶ⁸ δευτεῖς· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν
Γ οὕτως ἡ Β πρὸς ἢν ἡ Α λόγον ἔχει δεδομένον.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Ε;
ipsum igitur sub Α, Ε æquale est ipsi sub
Β, Γ. Et quoniam ratio est ipsius Ε ad Δ data;
ratio est igitur et ipsius sub Α, Δ ad ipsum
sub Α, Ε data. Ipsi autem sub Α, Ε est æquale
ipsum sub Β, Γ; ratio igitur et ipsius sub Α, Δ
ad ipsum sub Β, Γ est data; est igitur ut Δ ad
Γ ita ipsa Β ad quam ipsa Α rationem habet
datam.

donnée, les droites Α, Β, Γ, Ε étant proportionnelles; je dis que Δ est à Γ
comme Β est à la droite avec laquelle Α a une raison donnée.

Car puisque Α est à Β comme Γ est à Ε, le rectangle sous Α, Ε est égal au
rectangle sous Β, Γ (16. 6). Mais la raison de Ε à Δ est donnée; la raison du
rectangle sous Α, Δ au rectangle sous Α, Ε est donc donnée. Mais le rectangle
sous Α, Ε est égal au rectangle sous Β, Γ; la raison du rectangle sous Α, Δ au
rectangle sous Β, Γ est donc donnée (1. 6); la droite Δ est donc à Γ comme Β
est à la droite avec laquelle Α a une raison donnée (56).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

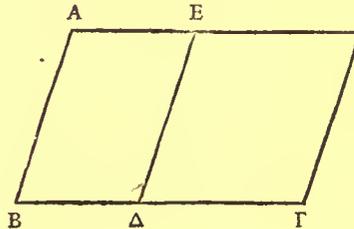
PROPOSITIO LXXXIV.

Εάν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένη γωνίᾳ, ἢ δὲ ἑτέρα τῆς ἑτέρας δοθείση μείζων ἢ καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἴσται δοθείσα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $BΓ$ δοθὲν χωρίον περιέχωσαν τὸ $ΑΓ$ ἐν δεδομένη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$, ἢ δὲ $ΓΒ$ τῆς $ΒΑ$ δοθείση μείζων ἴστω λέγω ὅτι δοθείσά ἐστίν ἑκατέρα τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in dato angulo, altera autem quam altera, datâ, major sit; et utraque ipsarum erit data.

Duæ enim rectæ AB , $BΓ$ datum spatium comprehendant $ΑΓ$ in dato angulo $ΑΒΓ$, ipsa autem $ΓΒ$ ipsâ $ΒΑ$ datâ major sit; dico datam esse utramque ipsarum $ΑΒ$, $ΒΓ$.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΓΒ$ τῆς $ΒΑ$ δοθείση μείζων ἐστὶ, δοθείσα ἴστω $ΔΓ$. λοιπὴ ἄρα ἡ $ΔΒ$ τῇ $ΒΑ$ ἴση ἐστὶ. Καὶ συμπληρώσω τὸ $ΑΔ$ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΒΔ$, λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$ δοθείς. Δο-

Quoniam enim $ΓΒ$ quam $ΒΑ$ datâ major est, data sit $ΔΓ$; reliqua igitur $ΔΒ$ ipsi $ΒΑ$ æqualis est. Et compleatur $ΑΔ$ parallelogrammum. Et quoniam æqualis est $ΑΒ$ ipsi $ΒΔ$; ratio igitur est ipsius $ΑΒ$ ad $ΒΔ$. Data autem et $ΑΒΔ$ au-

PROPOSITION LXXXIV.

Si deux droites comprennent un espace donné dans un angle donné, et si l'une d'elles est plus grande que l'autre d'une droite donnée, chacune d'elles sera donnée.

Que les deux droites AB , $BΓ$ comprennent un espace donné $ΑΓ$ dans un angle donné $ΑΒΓ$, et que $ΓΒ$ soit plus grand que $ΒΑ$ d'une droite donnée; je dis que chacune des droites $ΑΒ$, $ΒΓ$ est donnée.

Car puisque $ΓΒ$ est plus grand que $ΒΑ$ d'une droite donnée, que cette donnée soit $ΔΓ$, le reste $ΔΒ$ sera égal à $ΒΑ$ (déf. 2). Achéons le parallélogramme $ΑΔ$; puisque $ΑΒ$ est égal à $ΒΔ$; la raison de $ΑΒ$ à $ΒΔ$ est donnée. Mais l'angle $ΑΒΔ$ est

θεΐσα δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία· δίδεται ἄρα τὸ $A\Delta$ τῷ εἶδει. Ἐπεὶ οὖν τὸ $A\Gamma$ δοθὲν παρά δοθείσαν τὴν $\Delta\Gamma$ παραβάλλεται ὑπερβάλλον εἶδει δεδομένη τῷ εἶδει τῷ $A\Delta$ · δίδεται ἄρα τὸ πλάτος τῆς ὑπερβολῆς· δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Delta$. Ἀλλὰ καὶ ἡ $\Delta\Gamma$ · καὶ ὅλη ἄρα ἡ $B\Gamma$ δοθείσα ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ AB δοθείσα· ἑκατέρα ἄρα τῶν AB , $B\Gamma$ δοθείσα ἐστίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ π ε΄.

Ἐὰν δύο εὐθεΐαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἥ δὲ συναμφοτέρας δοθείσα· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθείσα.

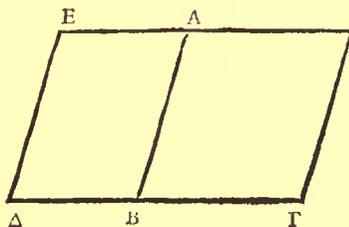
Δύο γὰρ εὐθεΐαι αἱ AB , $B\Gamma$ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ $A\Gamma$ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ἐπὶ

gulus; datum est igitur ipsum $A\Delta$ specie. Quoniam igitur ipsum $A\Gamma$ datum ad datam $\Delta\Gamma$ applicatum est excedens figurâ $A\Delta$ datâ specie; data est igitur latitudo excessus; data igitur est $B\Delta$. Sed et ipsa $\Delta\Gamma$; et tota igitur $B\Gamma$ data est. Est autem et AB data. Utraque igitur ipsarum AB , $B\Gamma$ data est,

PROPOSITIO LXXXV.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in dato angulo, sit autem simul utraque data; et utraque ipsarum erit data.

Duæ enim rectæ AB , $B\Gamma$ datum spatium comprehendant $A\Gamma$ in dato angulo $AB\Gamma$, et sit



$AB\Gamma$, καὶ ἔστω συναμφοτέρας ἡ $AB\Gamma$ δοθείσα· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν AB , $B\Gamma$ ἐστὶ δοθείσα².

utraque simul $AB\Gamma$ data; dico et utramque ipsarum AB , $B\Gamma$ esse datam.

donné; $A\Delta$ est donc donné d'espèce. Et puisqu'à la droite donnée $\Delta\Gamma$ on a appliqué l'espace donné $A\Gamma$, excédant d'une figure donnée d'espèce, la largeur de l'excès est donnée (59); $B\Delta$ est donc donné. Mais $\Delta\Gamma$ est donné aussi; la droite entière $B\Gamma$ est donc donnée. Mais AB est donné (3); chacune des droites AB , $B\Gamma$ est donc donnée.

PROPOSITION LXXXV.

Si deux droites comprennent un espace donné, dans un angle donné, et si leur somme est donnée, chacune d'elles sera donnée.

Que les deux droites AB , $B\Gamma$ comprennent un espace donné $A\Gamma$, dans un angle donné $AB\Gamma$, et que la somme des droites AB , $B\Gamma$ soit donnée; je dis que chacune des droites AB , $B\Gamma$ est donnée.

Διήχθω γάρ ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΑ παράλληλος ἡχθω ἡ ΔΕ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ, καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, ἐπεὶ καὶ ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ δοθεῖσα ἔστι· δίδεται ἄρα τὸ ΕΒ τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσα ἔστι συναμρότερος ἡ ΑΒΓ, ἴση δὲ³ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν⁴ ἡ ΔΓ. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖν τὸ ΑΓ παρά δοθεῖσαν τὴν ΔΓ παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει δεδομένῳ τῷ εἶδει⁵ ΕΒ· δίδεται τὰ πλάτη τοῦ ἐλλείμματος· δοθεῖσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ. Ἀλλὰ καὶ συναμρότερος ἡ ΑΒΓ δοθεῖσα ἔστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ δοθεῖσα ἔστι⁶. δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἡ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Produeatur enim ΓΒ ad punctum Δ, et ponatur ipsi ΑΒ æqualis ΒΔ, et per punctum Δ ipsi ΒΑ parallela dueatur ΔΕ, et compleatur ΑΔ. Et quoniam æqualis est ΔΒ ipsi ΒΑ, et est datus ΑΒΔ angulus, quia et qui est deinceps ipsi datus est; datum est igitur ipsum ΕΒ specie. Et quoniam data est simul utraque ΑΒΓ, æqualis autem ΑΒ ipsi ΒΔ; data igitur est ΔΓ. Quoniam igitur datum ΑΓ ad datum ΔΓ applicatum est, deficiens figurâ ΕΒ datâ specie; datæ sunt latitudines defectûs; datæ igitur sunt ΑΒ, ΒΔ. Sed et simul utraque ΑΒΓ data est; et reliqua igitur ipsa ΒΓ data est; data igitur est utraque ipsarum ΑΒ, ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΣ΄.

Ἐάν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, δοθέντι, μείζον ἢ καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα¹.

PROPOSITIO LXXXVI.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in dato angulo, ipsum autem ex majori quam ipsam ex minori, dato, majus sit; et utraque ipsarum erit data.

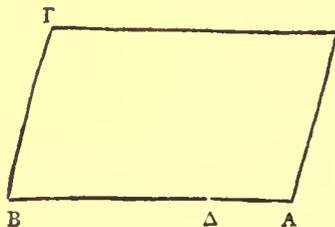
Car prolongeons ΓΒ vers Δ, faisons ΒΔ égal à ΑΒ, par le point Δ menons ΔΕ parallèle à ΒΑ, et achevons le parallélogramme ΑΔ. Puisque ΔΒ est égal à ΒΑ, et que l'angle ΑΒΔ est donné, car son angle de suite est donné, le parallélogramme ΕΒ sera donné d'espèce. Mais la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est donnée, et ΑΒ est égal à ΒΔ; la droite ΔΓ est donc donnée (3). Et puisque l'espace donné ΑΓ est appliqué à la droite donnée ΔΓ défailant d'une figure ΕΒ donnée d'espèce, les largeurs du défaut sont données (58); les droites ΑΒ, ΒΔ sont donc données. Mais la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est donnée; la droite ΒΓ est donc donnée; chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est donc donnée (4).

PROPOSITION LXXXVI.

Si deux droites comprennent un espace donné, dans un angle donné, et si le carré de la plus grande surpasse le carré de la plus petite, d'une donnée, chacune d'elles sera donnée.

Δύο γὰρ εὐθεΐαι αἱ AB , $BΓ$ δοθέν περιεχέτωσαν χωρίον² τὸ $ΑΓ$ ἐν δεδομένη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AB , δοθέντι, μείζον ἔστω τοῦ ἀπὸ τῆς $BΓ$ ³. λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν AB , $BΓ$.

Quæ enim rectæ AB , $BΓ$ datum comprehendunt spatium $ΑΓ$ in dato angulo $ΑΒΓ$, quadratum autem ex AB , dato, majus sit quam quadratum ex $BΓ$; dico datam esse utramque ipsarum AB , $BΓ$.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $BΓ$, δοθέντι, μείζον ἔστιν, ἀφηρήσθω τὸ δοθέν, καὶ ἔστω⁴ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΔ$. λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν BA , $ΑΔ$ ἴσον ἔστω τῷ⁵ ἀπὸ τῆς $BΓ$. Καὶ ἐπεὶ δοθέν ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, ἔστω δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΔ$ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $BΔ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ δοθείς. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΔ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ οὕτως ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν⁶ $BΓ$. λόγος ἄρα καὶ τῆς $ΔB$ πρὸς τὴν⁷ $BΓ$ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔB$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ δοθείς. Τῷ δὲ

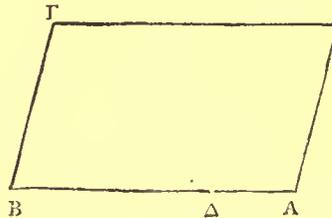
Quoniam enim ipsum ex AB quam ipsum ex $BΓ$, dato, majus est, auferatur datum, et sit ipsum sub AB , $BΔ$; reliquum igitur sub BA , $ΑΔ$ æquale est ipsi ex $BΓ$. Et quoniam datum est ipsum sub AB , $BΓ$ (*vide lemma*), est autem et ipsum sub AB , $BΔ$ datum; ratio igitur ipsius sub AB , $BΔ$ ad ipsum sub AB , $BΓ$ data. Et est ut ipsum sub AB , $BΔ$ ad ipsum sub AB , $BΓ$ ita $ΔB$ ad $BΓ$; ratio igitur et ipsius $ΔB$ ad $BΓ$ data; ratio igitur et ipsius ex $ΔB$ ad ipsum ex $BΓ$ data. Ipsi autem ex $ΓB$

Que deux droites AB , $BΓ$ comprennent un espace donné $ΑΓ$, dans un angle donné $ΑΒΓ$, et que le carré de AB soit plus grand que le carré de $BΓ$ d'un espace donné; je dis que chacune des droites AB , $BΓ$ est donnée.

Car puisque le carré de AB est plus grand que le carré de $BΓ$ d'un espace donné, retranchons l'espace donné, et que cet espace soit le rectangle sous AB , $BΔ$; le rectangle restant sous BA , $ΑΔ$ sera égal au carré de $BΓ$ (2. 2). Et puisque le rectangle sous AB , $BΓ$ est donné, et que le rectangle sous AB , $BΔ$ est aussi donné, la raison du rectangle sous AB , $BΔ$ au rectangle sous AB , $BΓ$ sera donnée (1). Mais le rectangle sous AB , $BΔ$ est au rectangle sous AB , $BΓ$ comme $ΔB$ est à $BΓ$; la raison de $ΔB$ à $BΓ$ est donc donnée; la raison du carré de $ΔB$ au carré de $BΓ$ est donc donnée (5o). Mais le rectangle sous BA , $ΑΔ$ est égal

ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τὸ¹⁰ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ. λόγος ἄρα ἐστὶ¹¹ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· καὶ τοῦ τετραγώνου ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ τετραγώνου ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ¹² μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ¹³ δοθείς. Ἀλλὰ τὸ

æquale est ipsum sub ΒΑ, ΑΔ; ratio igitur et ipsius sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum ex ΔΒ data; et ipsius quater igitur sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum ex ΔΒ data; ratio igitur ipsius quater sub ΒΑ, ΑΔ cum ipso ex ΔΒ ad ipsum ex ΒΔ data.



τετραγώνου ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἴστί τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ¹³· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὴν¹⁴ ΔΒ δοθείς. Καὶ συνθέντι συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ μετὰ τῆς ΔΒ, τουτίστί δύο τῶν ΑΒ πρὸς τὴν¹⁵ ΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ μιᾶς ἄρα τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ¹⁶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν¹⁷ ΒΔ δοθείς,

Sed ipsum quater sub ΒΑ, ΑΔ cum ipso ex ΒΔ est ipsum ex utraq̄ue simul ΒΑ, ΑΔ; ratio igitur et ipsius ex utraq̄ue simul ΒΑ, ΑΔ ad ipsum ex ΔΒ data; ratio igitur et utriusque simul ΒΑ, ΑΔ ad ΔΒ data. Et componendo simul utriusque ΒΑ, ΑΔ eum ΔΒ, hoc est duarum ΑΒ ad ΔΒ ratio est data; et unius igitur ipsius ΑΒ ad ΒΔ ratio est data. Ipsius autem ΔΒ ad ΒΓ ratio est data; ipsius autem ΔΒ ad ΒΓ ratio est data; et ipsius ΑΒ igitur ad ΒΓ ratio est data. Et quoniam ratio est ipsius

au carré de ΓΒ (2. 2); la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΔ au carré de ΔΒ est donc donnée; la raison de quatre fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ au carré de ΔΒ est donc donnée; la raison de quatre fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ avec le carré de ΔΒ au carré de ΒΔ est donc donnée. Mais quatre fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ avec le carré de ΒΔ est égal au carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΔ (8. 2); la raison du carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΔ au carré de ΔΒ est donc donnée; la raison de la somme des droites ΒΑ, ΑΔ à ΔΒ est donc donnée; donc, par addition, la raison de la somme des droites ΒΑ, ΑΔ avec ΔΒ, c'est-à-dire, de deux fois ΑΒ à ΒΔ est donnée (6); la raison d'une seule fois ΑΒ à ΒΔ est donc donnée. Mais la raison de ΔΒ à ΒΓ est donnée; la raison de ΑΒ à ΒΓ est donc donnée (8). Mais la raison de

καὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν¹⁸ BA οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BA λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BA δοθεῖς. Δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BA , οὕτως γὰρ δοθέν ἀφήρηται· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB · δοθεῖσα ἄρα ἡ AB . Καὶ ἔστι λόγος τῆς AB πρὸς τὴν¹⁹ BF δοθεῖς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ BF .

AB ad BA data, et est ut AB ad BA ita ipsum ex AB ad ipsum sub AB, BA ; ratio igitur et ipsius ex AB ad ipsum sub AB, BA data. Datum autem ipsum sub AB, BA , sic enim datum ablatum fuit; datum igitur et ipsum ex AB ; data igitur AB . Et est ratio ipsius AB ad BF data; data igitur et BF .

Λ Η Μ Μ Α.

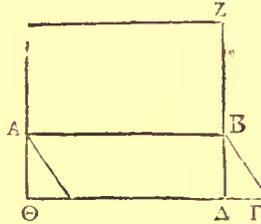
LEMMA.

Πῶς δοθέν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ABF ἑρθογώνιον, ἀμβλείας ὑποκειμένης τῆς ὑπὸ ABF γωνίας;

Quomodo datum est rectangulum sub ABF , obtuso supposito ABF angulo?

Ἦχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου κάθετος ἡ BD · καὶ ἐκτελέσθω ἡ GD ἐπὶ τὸ Θ , καὶ συμπληρώσθω τὸ $BD\Theta A$ ἑρθογώνιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AD τῷ AG . Καὶ ἐκτελέσθω ἡ DB ἐπὶ τὸ Z , καὶ κείσθω τῇ BF

Agatur a puncto B perpendicularis BD ; et producatur GD ad punctum Θ ; et compleatur $BD\Theta A$ rectangulum; æquale igitur est ipsum AD ipsi AG . Et producatur DB ad punctum Z , et



ἴση ἡ BZ , καὶ συμπληρώσθω τὸ AZ ἑρθογώνιον. Ἐπιτὸ οὖν δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ABF γωνία, ὑπόκειται

ponatur ipsi BF æqualis BZ , et compleatur AZ rectangulum. Quoniam igitur datus est ABF an-

AB à BA est donnée, et AB est à BA comme le carré de AB est au rectangle sous AB, BA (1. 6); la raison du carré de AB au rectangle sous AB, BA est donc donnée. Mais le rectangle sous AB, BA est donné, car c'est ainsi qu'on a retranché l'espace donné (2); le carré de AB est donc donné; la droite AB est donc donnée. Mais la raison de AB à BF est donnée; la droite BF est donc donnée.

L E M M E.

L'angle ABF étant supposé obtus, comment le rectangle sous AB, BF est-il donné?

Du point B menons la perpendiculaire BD , et prolongeons GD vers Θ ; achevons le rectangle $BD\Theta A$; le rectangle AD sera égal à AG . Prolongeons DB vers Z ; faisons BZ égal à BF , et achevons le rectangle AZ . Puisque l'angle ABF est donné, par supposi-

γάρ, δοθείσα δὲ καὶ ἡ ὑπο $AB\Delta$, ὀρθὴ γὰρ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπο ΔBF δοθείσα ἐστὶ. Καὶ ὀρθὴ ἡ Δ λοιπὴ ἄρα ἡ Γ δοθείσα ἐστὶ. Δοθέν ἄρα τὸ $B\Gamma\Delta$ τρίγωνον τῶν εἶδει· λόγος ἄρα τῆς ΔB πρὸς $B\Gamma$ δοθείς. Ἴση δὲ ἡ $B\Gamma$ τῇ BZ · λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔB πρὸς τὴν BZ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ $B\Theta$ πρὸς τῆν ZA λόγος δοθείς. Ἴσον δὲ τὸ $B\Theta$ τῶν AG · λόγος ἄρα τοῦ AG πρὸς τὸ AZ δοθείς. Καὶ δοθέν τὸ AG · δοθέν ἄρα καὶ τὸ AZ , τουτέστι τὸ ὑπο AB , BZ , τουτέστι τὸ ὑπο AB , $B\Gamma$.

gulus, supponitur enim, datus autem et angulus $AB\Delta$, rectus enim; reliquus igitur ΔBF datus est. Et rectus ipse Δ ; reliquus igitur Γ datus est. Datum igitur $B\Gamma\Delta$ triangulum specie; ratio igitur ipsius ΔB ad $B\Gamma$ data. Æqualis autem $B\Gamma$ ipsi BZ ; ratio igitur et ipsius ΔB ad BZ data; quare et ipsius $B\Theta$ ad ZA ratio data. Æquale autem $B\Theta$ ipsi AG ; ratio igitur ipsius AG ad AZ data. Et datum AG ; datum igitur AZ , hoc est ipsum sub AB , BZ , hoc est ipsum sub AB , $B\Gamma$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΖ'Ι,

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθέν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, δύνηται δὲ ἢ ἑτέρα τῆς ἑτέρας, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκάτερα αὐτῶν ἔσται δοθείσα³.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι³ AB , $B\Gamma$ δοθέν χωρίον περιέχωσαν τὸ AG ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς GB τοῦ ἀπὸ τῆς BA δοθέντι, μεί-

PROPOSITIO LXXXVII.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in dato angulo, possit autem altera alterâ, dato, majus est quam in ratione; et utraque isparum crit data.

Duæ enim rectæ AB , $B\Gamma$ datum spatium comprehendant AG in dato angulo $AB\Gamma$, ipsum autem ex $B\Gamma$ ipso ex BA , dato, majus sit quam

tion, que l'angle $AB\Delta$ est aussi donné, car il est droit, l'angle restant ΔBF sera donné. Mais l'angle Δ est droit; l'angle restant Γ est donc donné; le triangle $B\Gamma\Delta$ est donc donné d'espèce; la raison de ΔB à $B\Gamma$ est donc donnée (40). Mais $B\Gamma$ est égal à BZ ; la raison de ΔB à BZ est donc donnée, et par conséquent la raison de $B\Theta$ à ZA . Mais $B\Theta$ est égal à AG ; la raison de AG à AZ est donc donnée. Mais AG est donné; AZ est donc donné, c'est - à - dire, le rectangle sous AB , BZ , c'est - à - dire, le rectangle sous AB , $B\Gamma$.

PROPOSITION LXXXVII.

Si deux droites comprennent un espace donné, dans un angle donné, et si le carré de l'une est plus grand à l'égard du carré de l'autre, d'une donnée, qu'en raison, chacune d'elles sera donnée.

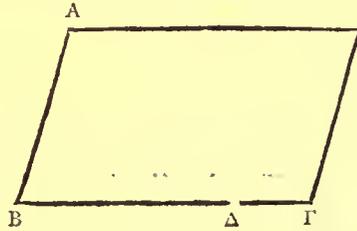
Que les deux droites AB , $B\Gamma$ comprennent un espace donné AG , dans un angle donné $AB\Gamma$, et que le carré de GB soit plus grand à l'égard du carré de BA ,

ζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν AB, BG ἐστὶ δοθεῖσαί.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφαιρήσθω τὸ δοθέν, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ λόγος ἐστὶ

in ratione; dico et utramque ipsarum AB, BG esse datam.

Quoniam enim ipsum ex GB ipso ex BA, dato, majus est quam in ratione, auferatur datum, et sit ipsum sub GB, ΒΔ; reliqui igitur sub ΒΓ, ΓΔ ad ipsum ex AB ratio est data.



δοθείς. Καὶ ἔπειδ' ἄρα δοθέν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ δοθέν· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ⁷ δοθείς. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ οὕτως ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ ὥστε καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς⁸· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ τετραγίου ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ

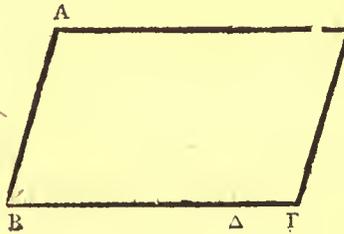
Et quoniam datum est ipsum sub AB, ΒΓ, est autem et ipsum sub ΓΒ, ΒΔ datum; ratio igitur est ipsius sub AB, ΒΓ ad ipsum sub ΓΒ, ΒΔ data. Ut autem ipsum sub AB, ΒΓ ad ipsum sub ΓΒ, ΒΔ ita AB ad ΒΔ; quare et ipsius AB ad ΒΔ ratio est data; quare et ipsius ex AB ad ipsum ex ΒΔ ratio est data. Ipsius autem ex AB ad ipsum sub ΒΓ, ΓΔ ratio est data; et ipsius sub ΒΓ, ΓΔ igitur ad ipsum ex ΔB ratio est data; quare et ipsius quater sub ΒΓ, ΓΔ ad ipsum

d'une donnée, qu'en raison; je dis que chacune des droites AB, BG est donnée.

Car puisque le carré de GB est plus grand à l'égard du carré de BA, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la donnée, que cette donnée soit égale au rectangle sous GB, ΒΔ; la raison du rectangle restant sous ΒΓ, ΓΔ au carré de AB sera donnée (déf. 11). Et puisque le rectangle sous AB, ΒΓ est donné, et que le rectangle sous IB, ΒΔ est aussi donné, la raison du rectangle sous AB, ΒΓ au rectangle sous ΓΒ, ΒΔ sera donnée (1). Mais le rectangle sous AB, ΒΓ est au rectangle sous ΓΒ, ΒΔ comme AB est à ΒΔ (1. 6); la raison de AB à ΒΔ est donc donnée; la raison du carré de AB au carré de ΒΔ est donc donnée (50). Mais la raison du carré de AB au rectangle sous ΒΓ, ΓΔ est donnée; la raison du rectangle sous ΒΓ, ΓΔ au carré de ΔB est donc donnée; la raison de quatre fois le rec-

ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ τετραγώνου ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἐστὶ τῆς ΒΓ, ΓΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα τῶν ΒΓ, ΓΔ καὶ τῆς ΒΔ,

ex ΒΔ ratio est data; ipsius quater sub ΒΓ, ΓΔ igitur cum ipso ex ΒΔ ad ipsum ex ΒΔ ratio est data. Sed ipsum quater sub ΒΓ, ΓΔ cum ipso ex ΒΔ est ipsum ex utraque simul ΒΓ, ΓΔ; ratio igitur est et ipsius ex utraque simul ΒΓ, ΓΔ, ad ipsum ex ΒΔ data; quare et utriusque simul ΒΓ, ΓΔ ad ΒΔ ratio est data; et componendo igitur ipsarum ΒΓ, ΓΔ et ipsius ΒΔ,



τευτέστι¹⁰ δύο τῶν ΓΒ, πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ μιᾶς τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ὡς δὲ ἢ ΓΒ πρὸς τὴν¹¹ ΒΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Διὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα

hoc est duarum ΓΒ ad ΒΔ ratio est data; quare et unius ΓΒ ad ΒΔ ratio est data. Ut autem ΓΒ ad ΒΔ ita ipsum sub ΓΒ, ΒΔ ad ipsum ex ΒΔ; et ipsius sub ΓΒ, ΒΔ igitur ad ipsum ex ΒΔ ratio est data. Datum autem sub ΓΒ, ΒΔ; datum igitur et ipsum ex ΒΔ; data igitur

tangle sous ΒΓ, ΓΔ au carré de ΒΔ est donnée (8); la raison de quatre fois le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ avec le carré de ΒΔ au carré de ΒΔ est donc donnée (6). Mais quatre fois le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ avec le carré de ΒΔ est égal au carré de la somme des droites ΒΓ, ΓΔ (8. 2); la raison du carré de la somme des droites ΒΓ, ΓΔ au carré de ΒΔ est donc donnée; la raison de la somme des droites ΒΓ, ΓΔ à ΒΔ est donc donnée (54); donc, par addition, la raison de la somme des droites ΒΓ, ΓΔ, ΒΔ, c'est-à-dire de deux fois ΒΓ à ΒΔ est donnée (6); la raison d'une fois ΒΓ à ΒΔ est donc donnée. Mais ΒΓ est à ΒΔ comme le rectangle sous ΒΓ, ΒΔ est au carré de ΒΔ (1. 6); la raison du rectangle sous ΒΓ, ΒΔ au carré de ΒΔ est donc donnée. Mais le rectangle sous ΒΓ, ΒΔ est donné;

ἔστιν ἡ ΒΔ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστι, τῆς γὰρ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθεὶς, καὶ δέδοται ἡ ΒΔ¹². Καὶ ἐστὶ δοθέν τὸ ΑΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ¹³ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

est ΒΔ ; quare et ΒΓ data est, ipsius enim ΒΓ ad ΒΔ ratio est data, et data est ΒΔ. Et est datum ΑΓ, et datus ΑΒΓ angulus ; data igitur est et ΑΒ ; utraque igitur ipsarum ΑΒ, ΒΓ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πη΄.

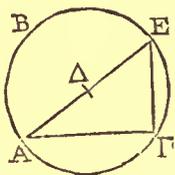
PROPOSITIO LXXXVIII.

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῆ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

Si in circulum datum magnitudine recta linea ducta fuerit, auferens segmentum quod capiat angulum datum, data est ducta magnitudine.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ ἤχθω¹ ἡ ΑΓ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα τὸ

In circulum enim datum magnitudine ΑΒΓ ducta fuerit ipsa ΑΓ auferens segmentum ΑΕΓ



ΑΕΓ δεχόμενον γωνίαν ΑΕΓ² δοθεῖσαν· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ δέδοται τῷ μεγέθει.

quod capiat angulum ΑΕΓ datum ; dico ΑΓ datam esse magnitudine.

le carré de ΒΔ est donc donné (2) ; la droite ΒΔ est donc donnée, et par conséquent la droite ΒΓ est donnée (2), car la raison de ΒΓ à ΒΔ est donnée ; mais ΒΔ est donné ; la droite ΑΓ est donc donnée, et l'angle ΑΒΓ est aussi donné ; la droite ΑΒ est donc donnée ; chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est donc donnée (57).

ΠΡΟΠΟΙΤΟΝ LXXXVIII.

Si dans un cercle donné de grandeur, on mène une ligne droite qui retranche un segment comprenant un angle donné, la droite menée sera donnée de grandeur.

Dans le cercle ΑΒΓ donné de grandeur, menons la droite ΑΓ qui retranche un segment ΑΕΓ comprenant un angle donné ΑΕΓ ; je dis que la droite ΑΓ est donnée de grandeur.

Εἰλήφθω γάρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΕ. Δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΕ, ἔρθῃ γάρ ἐστιν³. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ δοθεῖσα ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῶν εἶδει. λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΕΑ τῶν μεγέθει, ἐπεὶ καὶ ὁ κύκλος δέδοται τῶν μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῶν μεγέθει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῶν μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ δεδομένῃ τῶν μεγέθει· ἀπολήφεται τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῶν μεγέθει τὸν ΑΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΓ δεδομένη τῶν μεγέθει· λέγω ὅτι ἀπολήφεται τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

Εἰλήφθω γάρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ,

Sumatur enim centrum Δ circuli, et juncta ΑΔ producatur ad Ε, et jungatur ΓΕ. Datus igitur est ΑΓΕ angulus, rectus enim. Est autem et ΑΕΓ angulus datus; reliquus igitur ipse ΓΑΕ datus est. Datum est igitur ΑΓΕ triangulum specie; ratio igitur est ipsius ΕΑ ad ΑΓ data. Data igitur ΕΑ magnitudine, quia circulus datus est magnitudine; data igitur est ipsa ΑΓ magnitudine.

PROPOSITIO LXXXIX.

Si in circulum datum magnitudine recta linea ducta fuerit data magnitudine; auferet segmentum quod capiet angulum datum.

In circulum enim datum magnitudine ΑΒΓ recta linea ducatur ΑΓ data magnitudine; dico illam auferre segmentum capiens angulum datum.

Sumatur enim centrum Δ circuli, et juncta

Car prenons le centre du cercle (1. 3), qu'il soit Δ; joignons la droite ΑΔ, et prolongeons-la vers Ε, et joignons ΓΕ. L'angle ΑΓΕ sera donné, car il est droit (31. 3). Mais l'angle ΑΕΓ est donné (1); l'angle restant ΓΑΕ est donc donné (32. 1) (4); le triangle ΑΓΕ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΕΑ à ΑΓ est donc donnée (déf. 3). Mais ΕΑ est donné de grandeur, parce que le cercle est donné de grandeur (déf. 5); la droite ΑΓ est donc donnée de grandeur (2).

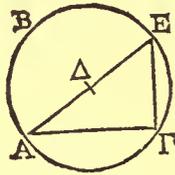
PROPOSITION LXXXIX.

Si dans un cercle donné de grandeur, l'on mène une ligne droite donnée de grandeur, cette droite retranchera un segment qui comprendra un angle donné.

Dans le cercle ΑΒΓ donné de grandeur, menons une ligne droite ΑΓ donnée de grandeur; je dis qu'elle retranchera un segment qui comprendra un angle donné.

Car prenons le centre du cercle, qu'il soit Δ (1. 3); joignons la droite ΑΔ,

καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἢ $\Delta\Delta$ διήχθω ἐπὶ τὸ Δ , καὶ $\Delta\Delta$ producatur ad Δ , et jungatur ΓE . Et quoniam data est utraque ipsarum EA , $\Delta\Gamma$, ratio



τέρα τῶν EA , $\Delta\Gamma$ λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς EA πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$ δεθείς. Καὶ ἔστιν ἰρθὴ ἡ ὑπὸ $\Delta\Gamma E$ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ $\Delta\Gamma E$ τρίγωνον τῶν εἰδῶν δεθείσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $\Delta E\Gamma$ γωνία.

igitur est ipsius EA ad $\Delta\Gamma$ data. Et est rectus $\Delta\Gamma E$ angulus; datum est igitur $\Delta\Gamma E$ triangulum specie; datus igitur est et $\Delta E\Gamma$ angulus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO XC.

Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ἐπὶ τῆς περιφέρειας δεθὲν σημεῖον ληφθῆ, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν κλασθῆ τις εὐθεῖα δεδομένην γωνίαν ποιούσα¹· δέδοται τὸ ἕτερον πέρασ τῆς κλασθείσης.

Κύκλου γὰρ τῇ θέσει δεδομένου τοῦ $AB\Gamma$ εὐλήθω ἐπὶ τῆς περιφέρειας δεθὲν σημεῖον τὸ B ,

Si in circuli dati positione circumferentiâ datum punctum sumptum fuerit, ab ipso autem ad circuli circumferentiam inflexa fuerit aliqua recta datum angulum faciens; data est altera extremitas inflexæ.

In circuli enim positione dati $AB\Gamma$ circumferentiâ sumatur datum punctum B , a puncto

prolongeons-la vers Δ , et joignons ΓE . Puisque chacune des droites EA , $\Delta\Gamma$ est donnée, la raison de EA à $\Delta\Gamma$ est donnée (1). Mais l'angle $\Delta\Gamma E$ est droit (3r. 3); le triangle $\Delta\Gamma E$ est donc donné d'espèce (44); l'angle $\Delta E\Gamma$ est donc donné (déf. 3).

PROPOSITION XC.

Si dans la circonférence d'un cercle donné de position l'on prend un point donné, et si de ce point on mène une droite qui, étant brisée à la circonférence, fasse un angle donné, l'autre extrémité de la ligne brisée sera donnée.

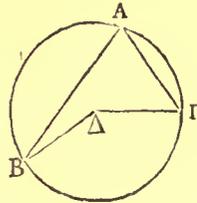
Dans la circonférence du cercle $AB\Gamma$ donné de position, prenons un point

ἀπὸ δὲ τοῦ Β σημείου² κεκλάσθω εὐθεῖα ἡ ΒΑΓ
 δεδομένην ποιῶσα γωνίαν τὴν ὑπὸ³ ΒΑΓ. λέγω
 ὅτι δέδοται τὸ Γ σημεῖον.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ κύκλου τὸ κέντρον τὸ Δ,
 καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. Καὶ⁵ ἐπεὶ δοθέν

autem B inflectatur recta ΒΑΓ datum faciens
 angulum ΒΑΓ; dico datum esse punctum Γ.

Sumatur enim circuli centrum Δ, et jun-
 gantur ΒΔ, ΔΓ. Et quoniam datum est utrum-



ἔστιν ἐκάτερον τῶν Β, Δ, θέσει ἄρα⁶ ἔστιν ἡ ΒΔ.
 Καὶ ἐπεὶ δεθείσα ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δο-
 θεῖσα ἄρα ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ. Ἐπεὶ οὖν πρὸς
 θέσει δεδομένη εὐθεία τῇ ΒΔ⁸, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ
 σημείῳ τῷ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ⁹ ἤκται ἡ ΔΓ δεδο-
 μένην ποιῶσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΔΓ· δεθείσα ἄρα
 ἔστιν ἡ ΔΓ τῇ θέσει. Θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει δοθείς
 καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος· θέσει ἄρα καὶ τῷ μεγέθει δο-
 θεῖσα ἔστιν ἡ ΔΓ. Καὶ δοθέν τὸ Δ¹⁰. δοθέν ἄρα
 ἔστι τὸ Γ σημεῖον.

que punctorum Β, Δ, positione igitur est ipsa ΒΔ.
 Et quoniam datus est ΒΑΓ angulus; datus igitur
 est et ipse ΒΔΓ. Quoniam igitur ad datam posi-
 tionem rectam ΒΔ, et ad punctum in eā Δ, recta
 ducta est ΔΓ datum faciens angulum ΒΔΓ; data
 igitur est ΔΓ positione. Positione autem et
 magnitudine datus et ΑΒΓ circulus; positione
 igitur et magnitudine data est ΔΓ. Et datum
 Δ punctum; datum igitur est punctum Γ.

donné B, et du point B menons une droite ΒΑΓ qui, étant brisée à la circon-
 férence, fasse un angle donné ΒΑΓ; je dis que le point Γ est donné.

Car prenons le centre du cercle (1. 3), qu'il soit Δ, et joignons ΒΔ, ΔΓ.
 Et puisque chacun des points Β, Δ est donné, la droite ΒΔ est donnée de posi-
 tion (26). Et puisque l'angle ΒΑΓ est donné, l'angle ΒΔΓ sera donné (20. 3)
 (2). Mais à la droite ΒΔ donnée de position, et au point Δ de cette droite, on a
 mené la droite ΔΓ faisant un angle donné ΒΑΓ; la droite ΔΓ est donc donnée de
 position (29). Mais le cercle ΑΒΓ est donné de position et de grandeur; la
 droite ΔΓ est donc donnée de position et de grandeur (25 et 26). Mais le
 point Δ est donné; le point Γ est donc donné (27).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 44.

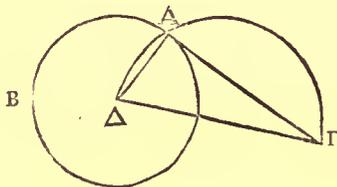
PROPOSITIO XCI.

Εάν ὑπὸ δεδομένου σημείου, τοῦ¹ θέσει δεδομένου κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἀχθῆ² δέδοται ἢ ἀχθεῖσα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Γ, θέσει δεδομένου κύκλου τοῦ ΑΒ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἡ ΓΑ εὐθεῖα δέδοται τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Si a dato puncto, positione datum circumulum contingens recta ducatur; data est ducta positione et magnitudine.

A dato enim puncto Γ, positione datum circumulum ΑΒ contingens recta ΓΑ ducatur; dico ΓΑ rectam datam esse positione et magnitudine.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ² κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπέξέχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ. Καὶ³ ἐπεὶ δοθὲν ἐστὶν ἐκάτερον τῶν Δ, Γ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΔΓ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει διὰ τοῦ Α. ἤχθω, καὶ ἔστω τὸ⁵ ΔΑΓ· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑΓ.

Sumatur enim centrum Δ circuli, et jungantur ipsæ ΔΑ, ΔΓ. Et quoniam datum est utrumque punctorum Δ, Γ; data igitur est ΔΓ. Et est rectus ΔΑΓ angulus; ergo super ΔΓ descriptus semicirculus transibit per punctum Α. Transeat et sit ipse ΔΑΓ; positione igitur est ipse ΔΑΓ. Positione autem et ΑΒ

PROPOSITION XCI.

Si, d'un point donné, on mène une droite qui touche un cercle donné de position, la droite menée est donnée de position et de grandeur.

Du point donné Γ, menons une droite ΓΑ qui touche le cercle ΑΒ donné de position; je dis que la droite ΓΑ est donnée de position et de grandeur.

Car prenons le centre Δ du cercle (1. 3), et joignons ΔΑ, ΔΓ. Puisque chacun des points Δ, Γ est donné, la droite ΔΓ est donnée (26). Mais l'angle ΔΑΓ est droit (18. 3); le demi-cercle décrit sur ΔΓ passera donc par le point Α (31. 3); qu'il y passe, et que ΔΑΓ soit ce demi-cercle. Le demi-cercle ΔΑΓ sera donné

Θέσει δὲ καὶ ὁ AB κύκλος δοθείς· δοθέν ἔστιν ἄρα τὸ A . Ἐὰν καὶ τὸ Γ δοθέν ἔστι· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἡ AG τῆς θέσεως καὶ τῆς μεγέθους.

circulus datus; datum est igitur punctum A . Sed et punctum Γ datum est; data igitur est ipsa AG positione et magnitudine.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ $\zeta\beta'$.

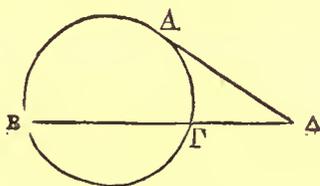
Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῆς θέσεως ληθῆ τι σημεῖον ἐκτὸς δοθέν, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου εἰς τὸν κύκλον διαχθῆ τις εὐθεῖα· τὸ ὑπὸ τῆς ἀχθείσεως καὶ τῆς μεταξύ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφέρειας περιεχόμενον ἴσσογώνιον δοθέν ἔστι.

Κύκλου γὰρ δεδομένου τῆς θέσεως τοῦ $AB\Gamma$, εἰ-

PROPOSITIO XCII.

Si, circulo dato positione, sumatur aliquod punctum extrinsecus datum, a puncto autem in circulum ducatur aliqua recta; sub ductâ et rectâ inter punctum et convexam circumferentiam comprehensum rectangulum datum est.

Circulo enim dato positione $AB\Gamma$, sumatur



λήθῃ τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ , ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σημείου διήχθῃ τις εὐθεῖα ἡ ΔB τέμνουσα τὸν κύκλον· λέγω ὅτι δοθέν ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$.

Ἦχθῃ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου ἰφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΔA · δοθεῖσα ἄρα ΔA^2 ἔστιν ἡ

aliquod punctum extrinsecus Δ , a puncto autem Δ ducatur aliqua recta ΔB secans circulum; dico datum esse ipsum sub $B\Delta$, $\Delta\Gamma$.

Ducatur a puncto Δ circulum $AB\Gamma$ tangens recta ΔA ; data igitur est ΔA positione et mag-

de position (déf. 6); Mais le cercle AB est donné de position; donc le point A est donné (25). Mais le point Γ est donné; la droite AG est donc donnée de position et de grandeur (26).

PROPOSITION XCII.

Si hors d'un cercle donné de position, on prend un point donné, et si de ce point on mène à ce cercle une droite, le rectangle sous la droite menée, et la droite placée entre ce point et la circonférence convexe est donné.

Hors du cercle $AB\Gamma$ donné de position, prenons un point Δ , et du point Δ menons une droite ΔB qui coupe le cercle; je dis que le rectangle sous $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ est donné.

Car du point Δ menons une droite ΔA qui touche le cercle $AB\Gamma$ (17. 3); la droite ΔA sera donnée de position et de grandeur (91). Et puisque ΔA est donné,

ΔΑ τῆς θέσεως καὶ τῶν μεγέθει. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά
 ἴσθιν ἡ ΑΔ· δοθέν ἄρα ἔστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ.
 Καὶ ἴσθιν ἴσον τῶν ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ· δοθέν ἄρα
 ἴσθιν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

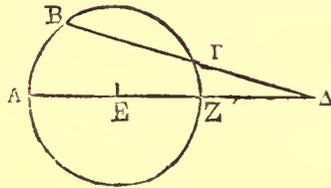
itudine. Quoniam igitur data est ΑΔ; datum
 igitur et ipsum ex ΑΔ. Et est æquale ipsi sub
 ΒΔ, ΔΓ; datum igitur est et ipsum sub ΒΔ, ΔΓ.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ
 ἐπέξωχθω ἡ ΔΕ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Α· καὶ
 ἐπεὶ δοθέν ἴσθιν ἑκάτερον τῶν Ε, Δ· δοθεῖσα
 ἄρα ἴσθιν ἡ ΕΔ τῆς θέσεως καὶ τῶν μεγέθει. Δέδο-
 ται δὲ καὶ ὁ ΑΒΖ κύκλος· δοθέν ἄρα ἴσθιν ἑκά-
 τερον τῶν Α, Ζ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· δοθεῖσα

Sumatur centrum E circuli, et jungatur ΔΕ,
 et producat ad punctum Α; et quoniam
 datum est utrumque punctorum Ε, Δ; data
 igitur est ΕΔ positione et magnitudine. Datus
 est autem et ΑΒΖ circulus; datum igitur utrum-
 que punctorum Α, Ζ. Est autem et punctum Δ



ἄρα ἴσθιν ἑκατέρω τῶν ΑΔ, ΔΖ· δοθέν ἄρα ἴσθιν
 τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ. Καὶ ἴσθιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν
 ΑΔ, ΔΖ τῶν ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ². Δοθέν ἄρα ἴσθιν
 καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

datum; data igitur est utraque ipsarum ΑΔ,
 ΔΖ; datum igitur est ipsum sub ΑΔ, ΔΖ. Et
 est æquale ipsum sub ΑΔ, ΔΖ ipsi sub ΒΔ,
 ΔΓ; datum igitur est et ipsum sub ΒΔ, ΔΓ.

le carré de ΑΔ est donné (52). Mais le carré de ΑΔ est égal au rectangle
 sous ΒΔ, ΔΓ (36. 3); le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est donc donné.

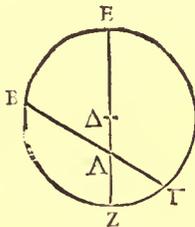
AUTREMENT.

Prenons le centre Ε de ce cercle (1. 3), joignons la droite ΔΕ, et prolon-
 geons cette droite vers Α. Puisque chacun des points Ε, Δ est donné, la
 droite ΕΔ est donnée de position et de grandeur (26). Mais le cercle ΑΒΖ est
 donné; chacun des points Α, Ζ est donc donné (2. 5). Mais le point Δ est donné;
 chacune des droites ΑΔ, ΔΖ est donc donnée (26); le rectangle sous ΑΔ, ΔΖ est
 donc donné. Mais le rectangle sous ΑΔ, ΔΖ est égal au rectangle sous ΒΔ, ΔΓ
 (36. 3); le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est donc donné.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζγ'.

Εάν κύκλου δεδομένου τῆ θέσει ληφθῆ τι σημείον ἐντός δοθέν, διὰ δὲ τοῦ σημείου διαχθῆ τις εὐθεΐα εἰς τὸν κύκλον, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέν ἐστίν.

Κύκλου γὰρ δεδομένου τῆ θέσει τοῦ ΒΓ, εἰλήφθω τι σημείον ἐντός τὸ Α δοθέν, διὰ δὲ τοῦ Α διήχθω τις εὐθεΐα ἢ ΓΒ· λέγω ὅτι δεδομένον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ¹ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεΐσα ἢ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Ε. Ἐπεὶ οὖν δοθέν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Δ, Α· θέσει ἄρα ἐστὶν² ἢ ΔΑ. Θεσει δὲ καὶ ὁ ΓΒΖ κύκλος· δοθέν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Ζ, Ε. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δευθεΐσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΖΑ,

Si, circulo dato positione, sumatur aliquod punctum intus datum, per punctum autem ducatur aliqua recta in circulum; ipsum sub ductæ segmentis comprehensum rectangulum datum est.

Circulo enim ΒΓ dato positione, sumatur aliquod punctum intus ipsum Α datum, per punctum autem Α ducatur aliqua recta ΓΒ; dico datum esse ipsum sub ΒΑ, ΑΓ.

Sumatur enim centrum Δ circuli, et juncta ΑΔ producat ad puncta Ζ, Ε. Quoniam igitur datum est utrumque ipsorum Δ, Α; positione igitur est ipsa ΔΑ. Positione autem et ΓΒΖ circulus; datum igitur est utrumque punctorum Ζ, Ε. Est autem et punctum Α datum; data igitur

PROPOSITION XCIII.

Si dans un cercle donné de position, on prend un point donné, et si, par ce point, on mène une droite dans le cercle, le rectangle sous les segments de la droite menée est donné.

Dans le cercle ΒΓ donné de position, prenons un point donné Α, et par le point Α menons une droite ΓΒ; je dis que le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donné.

Car prenons le centre Δ de ce cercle (1. 5), joignons ΔΑ, et prolongeons cette droite vers les points Ζ, Ε. Puisque chacun des points Δ, Α est donné, la droite ΔΑ est donné de position (26). Mais le cercle ΓΒΖ est donné; chacun des points Ζ, Ε est donc donné (25). Mais le point Α est donné; chacune des

ΑΕ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΑ, ΑΕ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν³ ΒΑ, ΑΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

est utraque ipsarum ΖΑ, ΑΕ; datum igitur est ipsum sub ΖΑ, ΑΕ. Et est æquale ipsi sub ΒΑ, ΑΓ; datum igitur est et ipsum sub ΒΑ, ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 48.

PROPOSITIO XCIV.

Εὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθείᾳ γραμμῇ ἀχθῆ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα διχομένον γωνίαν δοθεῖσαν, καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία δίχα τμηθῆ· συναμφοτέροι αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ πρὸς τὴν δίχα τέμνουσαν τὴν γωνίαν λόγον ἴξουσιν δεδομένον, καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς κάτω ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῆς δίχα τεμνούσης τὴν γωνίαν πρὸς τῇ περιφερείᾳ² δοθὲν ἴσται.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ εὐθείᾳ ἤχθω ἡ ΒΓ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ·

Si in circulum datum magnitudine recta linea ducatur, auferens segmentum quod capiat angulum datum, et in segmento angulus bifariam secetur; simul utraque latera datum angulum comprehendentia ad ipsam quæ bifariam secat angulum rationem habebunt datam, et ipsum sub utrâque simul rectorum datum angulum comprehendentium, et sub abscissâ inferne ab ipsâ quæ bifariam secant angulum in circumferentiâ, datum erit.

In circulum enim datum magnitudine ΑΒΓ recta ducatur ΒΓ, auferens segmentum quod comprehendat angulum datum ΒΑΓ, et secetur ΒΑΓ angulus bifariam rectâ ΑΔ; dico rationem esse

droites ΖΑ, ΑΕ est donc donnée (26); le rectangle sous ΖΑ, ΑΕ est donc donné. Mais ce rectangle est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ (35. 3); le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donc donné.

PROPOSITION XCIV.

Si, dans un cercle donné de grandeur, on mène une ligne droite qui retranche un segment comprenant un angle donné, et si l'angle dans le segment est partagé en deux parties égales, la somme des côtés qui comprennent l'angle donné, aura une raison donnée avec la droite qui partage l'angle en deux parties égales; et le rectangle sous la somme des droites qui comprennent l'angle donné, et sous le segment inférieur de la droite qui partage l'angle à la circonférence en deux parties égales, sera donné.

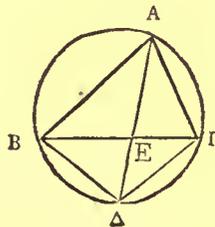
Car dans le cercle ΑΒΓ donné de grandeur, menons la droite ΒΓ qui retranche un segment comprenant un angle donné ΒΑΓ, et partageons l'angle ΒΑΓ en deux parties égales par la droite ΑΔ; je dis que la raison de la somme des droites

λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς, καὶ ὅτι δοθὲν ἐστὶ τὸ ὑπο συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ διῆκεται εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν δοθείσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῷ μεγέθει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΔ δοθείσα ἐστὶ τῷ μεγέθει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα

utriusque simul ΒΑΓ ad ΑΔ datam, et datum esse ipsum sub utraq̄ue simul ΒΑΓ et sub ipsâ ΕΔ.

Jungatur ΒΔ. Et quoniam in circulum datum magnitudine ΑΒΓ ducta est recta ΒΓ, auferens segmentum ΒΑΓ quod capit angulum datum ΒΑΓ; data igitur est ΒΓ magnitudine. Propter eadem utique et ΒΔ data est magnitudine; ratio igitur est ipsius ΒΓ ad ΒΔ data. Et quo-



τέτμηται τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ὡς ἄρα συναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση·

niam ΒΑΓ angulus bifariam sectus est rectâ ΑΔ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΕ ad ΕΓ; permutando igitur ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΑΓ ad ΓΕ; et ut igitur utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΓ ad ΓΕ. Et quoniam est æqualis ΒΑΕ angulus ipsi ΕΑΓ, est autem et ipse ΑΓΕ ipsi ΒΔΕ

BA, ΑΓ à la droite ΑΔ est donnée, et que le rectangle sous la somme des droites BA, ΑΓ et sous ΕΔ, est aussi donné.

Joignons ΒΔ. Puisque dans le cercle ΑΒΓ donné de grandeur, on a mené la droite ΒΓ, retranchant le segment ΒΑΓ qui comprend un angle donné ΒΑΓ, la droite ΒΓ sera donnée de grandeur (88). Par la même raison ΒΔ est donné de grandeur; la raison de ΒΓ à ΒΔ est donc donnée (1). Et puisque l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ, la droite ΒΑ sera à ΑΓ comme ΒΕ est à ΕΓ (3. 6); donc, par permutation, ΑΒ est à ΒΕ comme ΑΓ est à ΓΕ (16. 5); la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est donc à ΒΓ comme ΑΓ est à ΓΕ (12. 5). Et puisque l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΕΑΓ, et que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle

λοιπή ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΕΓ λοιπή τῆ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση⁴. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῶ ΑΒΔ τριγώνω· ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἢ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Αλλ' ὡς ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως συναμφοτέρος ἢ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ἐστὶν ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἢ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἢ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ· ἐναλλάξ ἄρα⁵ ὡς συναμφοτέρος ἢ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ. Λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δεθείς· λόγος ἄρα καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δεθείς.

Λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ δεθὲν ἐστὶ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῶ ΔΕΒ τριγώνω· ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· ὡς δὲ ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἐστὶ συναμφοτέρος ἢ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς συναμφοτέρος ἄρα⁶ ἢ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἐστὶν⁷ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ ἐστὶν ἴσον⁸ τῶ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ. δεθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· δεθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

æqualis; reliquus igitur ΑΕΓ reliquo ΑΒΔ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΕΓ triangulum triangulo ΑΒΔ; est igitur ut ΑΓ ad ΓΕ ita ΑΔ ad ΔΒ. Sed ut ΑΓ ad ΓΕ ita utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ; est igitur ut utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΒ; permutando igitur ut utraque simul ΒΑΓ ad ΑΔ ita ΒΓ ad ΒΔ. Ratio autem ipsius ΒΓ ad ΒΔ data; ratio igitur et utriusque simul ΒΑΓ ad ΑΔ data.

Dico et ipsum sub utrâque simul ΒΑΓ et sub ipsâ ΕΔ datum esse.

Quoniam enim æquiangulum est ΑΕΓ triangulum triangulo ΔΕΒ; est igitur ut ΒΔ ad ΔΕ ita ΑΓ ad ΓΕ; ut autem ΑΓ ad ΓΕ ita est utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ. Et ut utraque simul igitur ΒΑΓ ad ΓΒ ita est ΒΔ ad ΔΕ; ipsum igitur sub utrâque simul ΒΑΓ et sub ipsâ ΕΔ est æquale ipsi sub ΓΒ, ΒΔ. Datum autem ipsum sub ΓΒ, ΒΔ; datum igitur et ipsum sub utrâque simul ΒΑΓ et sub ipsâ ΕΔ.

ΒΔΕ (21. 5), l'angle restant ΑΕΓ sera égal à l'angle restant ΑΒΔ (32. 1); le triangle ΑΕΓ est donc équiangle avec le triangle ΑΒΔ; donc ΑΓ est à ΓΕ comme ΑΔ est à ΔΒ (4. 6). Mais ΑΓ est à ΓΕ comme la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est à ΒΓ; la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est donc à ΒΓ comme ΑΔ est à ΔΒ; donc, par permutation, la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est à ΑΔ comme ΒΓ est à ΒΔ. Mais la raison de ΒΓ à ΒΔ est donnée; la raison de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ à ΑΔ est donc donnée.

Je dis aussi que le rectangle sous la somme des droites ΒΑ, ΑΓ et sous ΕΔ est donné.

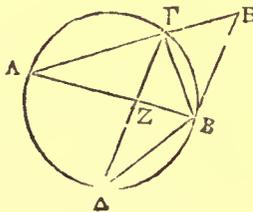
Car puisque le triangle ΑΕΓ est équiangle avec le triangle ΔΕΒ (15. 1) (21. 5), la droite ΒΔ sera à ΔΕ comme ΑΓ est à ΓΕ (4. 6); mais ΑΓ est à ΓΕ comme la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est à ΒΓ; la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est donc à ΓΒ comme ΒΔ est à ΔΕ (11. 5); le rectangle sous la somme des droites ΒΑ, ΑΓ et sous ΕΔ est donc égal au rectangle sous ΓΒ, ΒΔ (16. 6). Mais le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est donné; le rectangle sous la somme des droites ΒΑ, ΑΓ et sous ΕΔ est donc donné.

ΑΛΛΩΣ.

Διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ε, κείσθω τῆ ΒΓ ἴση ἢ ΓΕ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΒΔ. Καὶ ἐπιπλήϊ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἑκατέρας τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΕ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΕ γωνία τῆ ὑπὸ ΑΓΔ, τουτέστι τῆ ὑπὸ ΑΒΔ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΓ ὅλη τῆ ὑπὸ ΖΒΕ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΒ τῆ ὑπὸ

ALITER.

Producatur ΑΓ ad punctum Ε, et ponatur ipsi ΒΓ æqualis ΓΕ, et jungantur ipsæ ΕΒ, ΒΔ. Et quoniam duplus est ΑΓΒ angulus utriusque ipsorum ΑΓΔ, ΓΒΕ; æqualis igitur est ΓΒΕ angulus ipsi ΑΓΔ, hoc est ipsi ΑΒΔ. Communis adjiciatur ipse ΑΒΓ; totus igitur ΔΒΓ toti ΖΒΕ est æqualis. Est autem et ipse ΓΑΒ ipsi



ΓΔΒ ἴση ὡς λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΒ λοιπὴ τῆ ὑπὸ ΔΓΒ ἐστὶν ἴση ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΓΔΒ τριγώνῳ ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Ἡ δὲ ΕΑ συναμφοτέρος ἐστὶν ἢ ΑΓΒ ὡς ἄρα² συναμφοτέρος ἢ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἐναλλάξ ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἢ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως³ ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Λόγος δὲ ἐστὶ

ΓΔΒ æqualis; reliquus igitur ΓΕΒ reliquo ΔΓΒ est æqualis; æquiangulum igitur est ΕΑΒ triangulum triangulo ΓΔΒ; est igitur ut ΕΑ ad ΑΒ ita ΓΔ ad ΔΒ. Ipsa autem ΕΑ utraque simul est ipsa ΑΓΒ; ut igitur utraque simul ΑΓΒ ad ΑΒ ita ΓΔ ad ΒΔ; et permutando igitur ut utraque simul ΑΓΒ ad ΓΔ ita ΑΒ ad ΒΔ. Ratio

AUTREMENT.

Prolongeons ΑΓ vers Ε, faisons ΓΕ égal à ΒΓ, et joignons ΕΒ, ΒΔ. Puisque l'angle ΑΓΒ est double de chacun des angles ΑΓΔ, ΓΒΕ (5) (3. 1), l'angle ΓΒΕ sera égal à l'angle ΑΓΔ, c'est-à-dire à l'angle ΑΒΔ (21. 3). Ajoutons l'angle commun ΑΒΓ; l'angle entier ΔΒΓ sera égal à l'angle entier ΖΒΕ. Mais l'angle ΓΑΒ est égal à l'angle ΓΔΒ (21. 3); l'angle restant ΓΕΒ est donc égal à l'angle restant ΔΓΒ (32. 1); le triangle ΕΑΒ est donc équiangle avec le triangle ΓΔΒ; donc ΕΑ est à ΑΒ comme ΓΔ est à ΔΒ (4. 6). Mais la droite ΕΑ est égale à la somme des droites ΑΓ, ΓΒ; la somme des droites ΑΓ, ΓΒ est donc à ΑΒ comme ΓΔ est à ΒΔ; donc, par permutation, la somme des droites ΑΓ, ΓΒ est à ΓΔ comme ΑΒ est

τῆς AB πρὸς τὴν BA δεθείς, ἑκάτερα γὰρ αὐτῶν δεθείσα ἐστὶν ἄ λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ συναμφοτέρου τῆς AGB πρὸς τὴν GA δεθείς.

Καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ EAB τρίγωνον τῷ ZBA τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ EA πρὸς τὴν AB οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AZ . Ἡ δὲ EA συναμφοτέρος ἐστὶν ἡ AGB ὡς ἄρα συναμφοτέρος ἡ AGB πρὸς τὴν AB οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AZ . τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς AGB καὶ τῆς ZB ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AB, BA . Δεθὲν δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BA δεθείσα γὰρ ἑκάτερα αὐτῶν δεθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς AGB καὶ τῆς ZB .

Α Λ Λ Ω Σ.

Διήχθω ἡ AG ἐπὶ τὸ Z , καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ GZ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $BA, \Delta\Gamma, \Delta Z$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BA τῇ GZ , ἡ δὲ ΔB τῇ $\Delta\Gamma$ δύο δὲ αἱ AB, BA δυοὶ ταῖς $Z\Gamma, \Gamma\Delta$ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία² τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma Z$ ἐστὶν ἴση, ἐπειδὴ περ ἐν κύ-

autem est ipsius AB ad BA data; utraque enim ipsarum data est; ratio igitur est utriusque simul AGB ad GA data.

Et quoniam æquiangulum est EAB triangulum triangulo ZBA ; est igitur ut EA ad AB ita BA ad AZ . Ipsa autem EA utraque simul est AGB ; ut igitur utraque simul AGB ad AB ita BA ad AZ ; ipsum igitur sub utraq̄ue simul AGB et sub ipsâ ZB æquale est ipsi sub AB, BA . Datum autem est ipsum sub AB, BA ; data igitur utraque ipsarum; datum igitur est et ipsum sub utraq̄ue simul AGB et sub ipsâ ZB .

A L I T E R.

Producatur AG ad punctum Z , et ponatur ipsi BA æqualis GZ , et jungantur ipsæ $BA, \Delta\Gamma, \Delta Z$. Et quoniam æqualis est ipsa quidem BA ipsi GZ , ipsa autem ΔB ipsi $\Delta\Gamma$; duæ utique AB, BA duabus $Z\Gamma, \Gamma\Delta$ æquales sunt utraque utriusque. Et angulus $AB\Delta$ angulo $\Delta\Gamma Z$ est æqua-

à BA . Mais la raison de AB à BA est donnée (1), car chacune d'elles est donnée (88); la raison de la somme des droites AG, GB à GA est donc donnée.

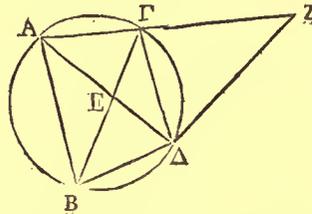
Puisque le triangle EAB est équiangle avec le triangle ZBA , la droite EA sera à AB comme BA est à AZ (4. 6). Mais EA est égal à la somme des droites AG, GB ; la somme des droites AG, GB est donc à AB comme BA est à AZ ; le rectangle sous la somme des droites AG, GB et sous ZB est donc égal au rectangle sous AB, BA (16. 6). Mais le rectangle sous AB, BA est donné; chacune de ces droites est donc donnée (88); le rectangle sous la somme des droites AG, GB et sous ZB est donc donné.

A U T R E M E N T.

Prolongeons AG vers Z , faisons GZ égal à BA , et joignons $BA, \Delta\Gamma, \Delta Z$. Puisque BA est égal à GZ , et ΔB égal à $\Delta\Gamma$ (26 et 29. 3), les deux droites AB, BA seront égales aux deux droites $Z\Gamma, \Gamma\Delta$, chacune à chacune. Mais l'angle $AB\Delta$ est égal à l'angle

κλω ἐστὶ τὸ $ΑΒΔΓ$ τετράπλευρον· βάσις ἄρα ἡ $ΑΔ$ βάσει τῆ $ΔΖ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον τῷ $ΓΔΖ$ τριγῶνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις³ ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευρὰὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ γωνία τῆ $ὑπὸ$ $ΔΖΓ$. Δοθεῖσα δὲ ἐστὶν

lis, quia in circulo est $ΑΒΔΓ$ quadrilaterum; basis igitur $ΑΔ$ basi $ΔΖ$ est æqualis, et $ΑΒΔ$ triangulum triangulo $ΓΔΖ$ est æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est $ΒΑΔ$ angulus ipsi $ΔΖΓ$. Datus autem est $ΒΑΔ$ angu-



ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΖΓ$ γωνία. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΑΖ$ γωνία δοθεῖσα· δοθέν ἄρα τὸ $ΑΔΖ$ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς $ΖΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ δοθείς. Ἡ δὲ $ΑΖ$ συναμφοτέρως ἐστὶν ἡ $ΒΑΓ$, διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν $ΓΖ$ τῆ $ΒΑ$ · λόγος ἄρα ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς $ΒΑΓ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ δοθείς.

Καὶ ὁμοίως τῷ πρότερον δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς $ΒΑΓ$ καὶ τῆς $ΕΔ$ δοθέν ἐστὶ.

lus; datus igitur est et angulus $ΔΖΓ$. Est autem et $ΔΑΖ$ angulus datus; datum est igitur $ΑΔΖ$ triangulum specie; ratio igitur est ipsius $ΖΑ$ ad $ΑΔ$ data. Ipsa autem $ΑΖ$ utraque simul est $ΒΑΓ$, quia æqualis est $ΓΖ$ ipsi $ΒΑ$; ratio igitur est utriusque simul $ΒΑΓ$ ad $ΑΔ$ data.

Et congruenter antecedenti ostendemus ipsum sub utraq̄ue simul $ΒΑΓ$ et sub ipsâ $ΕΔ$ datum esse:

$ΔΓΖ$ (13. 1), parce que le quadrilatère $ΑΒΔΓ$ est dans un cercle (22. 3); la base $ΑΔ$ est donc égale à la base $ΔΖ$ (4. 1), le triangle $ΑΒΔ$ égal au triangle $ΓΔΖ$ et les autres angles égaux aux autres angles, c'est-à-dire les angles sous les côtés égaux; l'angle $ΒΑΔ$ est donc égal à l'angle $ΔΖΓ$. Mais l'angle $ΒΑΔ$ est donné; l'angle $ΔΖΓ$ est donc donné. Mais l'angle $ΔΑΖ$ est donné; le triangle $ΑΔΖ$ est donc donné d'espèce (40); la raison de $ΖΑ$ à $ΑΔ$ est donc donnée (déf. 3). Mais $ΑΖ$ est égal à la somme des droites $ΒΑ$, $ΑΓ$, parce que $ΓΖ$ est égal à $ΒΑ$; la raison de la somme des droites $ΒΑ$, $ΑΓ$ à $ΑΔ$ est donc donnée.

Nous démontrerons de la même manière que le rectangle sous la somme des droites $ΒΑ$, $ΑΓ$ et sous $ΕΔ$ est donné.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. 7 ε΄.

PROPOSITIO XCV.

Εάν κύκλου δεδομένου τῆ θέσει ἐπὶ τῆς διαμέτρου δοθὲν σημεῖον ληφθῆ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσελθῆ τις εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τῆς τομῆς τις¹ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῆ τῆ διαχθείση, διὰ δὲ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλει ἢ πρὸς ὀρθὰς τῆ περιφερεία τοῦ κύκλου², παράλληλος ἀχθῆ τῆ διαχθείση· δοθὲν ἔστι τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἢ παράλληλος τῆ διαμέτρω, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθὲν ἔσται.

Κύκλου γάρ τῆ θέσει δεδομένου τοῦ ΑΒΓ, ἐπὶ τῆς³ διαμέτρου τῆς ΒΓ εὐθείᾳ δοθὲν σημεῖον τὸ Δ, διὰ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον προσεβλήσθω τις τυχοῦσα ἢ ΔΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α τῆ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα ἢ χθω ἢ ΑΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῆ ΑΔ παράλληλος ἢ χθω ἢ ΕΖ· λέγω ὅτι δοθὲν ἔστι τὸ Ζ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΕΖ χωρίον δοθὲν ἔστι.

Διήχθω ἢ ΕΖ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἢ ΑΘ. Ἐπεὶ ὀρθὴ ἔστιν ἢ ὑπὸ ΘΕΑ γωνία, ἢ ΘΑ διά-

Si in circuli dati positione diametro datum punctum sumatur, a puncto autem ad circumulum producatuŕ quædam recta, et a sectione quædam ad rectos ducatur in productam, per punctum autem, in quo occurrit ipsa ad rectos circumferentiæ circuli, parallela ducatur productæ; datum est punctum in quo occurrit parallela diametro, et ipsum sub parallelis comprehensum rectangulum datum erit.

Circulo enim positione dato ΑΒΓ, in diametro ΒΓ sumatur datum punctum Δ, per punctum autem Δ ad circumulum producatuŕ recta quædam ΔΑ, et a puncto Α ipsi ΔΑ ad rectos angulos recta ducatur ΑΕ; per punctum autem Ε ipsi ΑΔ parallela ducatur ΕΖ; dico datum esse punctum Ζ, et sub ΑΔ, ΕΖ spatium datum esse.

Producatur ΕΖ ad punctum Θ, et jungatur ΑΘ. Quoniam rectus est ΘΕΑ angulus, ipsa

PROPOSITION XCV.

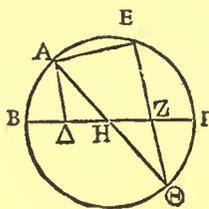
Si, dans le diamètre d'un cercle donné de position, on prend un point donné, si de ce point on mène une droite dans le cercle, si du point de section on mène une droite à angles droits sur la droite qui a été menée, si par le point où la droite à angles droits rencontre la circonférence du cercle, on mène une parallèle à la droite qui a été menée, le point où cette parallèle rencontrera le diamètre sera donné, et le rectangle sous les parallèles sera aussi donné.

Car dans le diamètre ΒΓ du cercle ΑΒΓ donné de position, prenons un point donné Δ, du point Δ, menons dans le cercle la droite ΔΑ, du point Α menons la droite ΑΕ à angles droits sur la droite ΔΑ, et par le point Ε menons la droite ΕΖ parallèle à ΑΔ; je dis que le point Ζ est donné, et que l'espace sous ΑΔ, ΕΖ est aussi donné.

Prolongeons ΕΖ vers Θ, et joignons ΑΘ. Puisque l'angle ΘΕΑ est droit, la

μετρός ἐστὶ τοῦ $ΑΒΔ$ κύκλου. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $ΒΓ$ τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου διάμετρος⁵. τὸ $Η$ ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου. δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ $Η$. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ⁶ $Δ$ δοθέν. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΗ$ πῶς μεγέθει. Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν

$ΘΑ$ diameter est circuli $ΑΒΔ$. Est autem et ipsa $ΒΓ$ circuli $ΑΒΓ$ diameter; punctum $Η$ igitur est centrum circuli $ΑΒΓ$; datum igitur est punctum $Η$. Est autem et punctum $Δ$ datum; data igitur est $ΔΗ$ magnitudine. Et quoniam paral-



ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΕΘ$, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ $ΘΗ$ τῇ $ΗΑ$. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν $ΔΗ$ τῇ $ΗΖ$, ἡ δὲ $ΑΔ$ τῇ $ΖΘ$. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ $ΗΖ$. Ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· ἐκατέρα ἄρα⁷ τῶν $ΗΖ$, $ΗΔ$ δοθεῖσά ἐστι. Καὶ ἐστὶ δοθέν τὸ $Η$. δοθέν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $Ζ$ ⁸.

lela est $ΑΔ$ ipsi $ΕΘ$, et æqualis est $ΘΗ$ ipsi $ΗΑ$; æqualis igitur est et ipsa $ΔΗ$ quidem $ΔΗ$ ipsi $ΗΖ$, ipsa vero $ΑΔ$ ipsi $ΖΘ$; data igitur et ipsa $ΗΖ$; Sed et positione; utraque igitur ipsarum $ΗΖ$, $ΗΔ$ data est. Et est datum punctum $Η$, datum igitur est et punctum $Ζ$.

Καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ⁹ κύκλῳ δεδομένου τῇ θέσει τοῦ $ΑΒΓ$ εἴληπται σημεῖον τὸ $Ζ$ δοθέν, καὶ διῆκται ἡ $ΕΖΘ$. δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΕΖ$, $ΖΘ$. ἴση δὲ ἡ $ΘΖ$ τῇ $ΔΑ$. δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΕΖ$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι¹⁰.

Et quoniam intra circulum datum positione $ΑΒΓ$ sumptum est punctum $Ζ$ datum, et ducta est ipsa $ΕΖΘ$; datum igitur est ipsum sub $ΕΖ$, $ΖΘ$. Æqualis autem ipsa $ΘΖ$ ipsi $ΔΑ$; datum igitur est ipsum sub $ΑΔ$, $ΕΖ$. Quod oportebat ostendere.

droite $ΘΑ$ sera un diamètre du cercle $ΑΒΔ$ (31. 3). Mais $ΒΓ$ est aussi un diamètre du cercle $ΑΒΓ$; le point $Η$ est donc le centre du cercle $ΑΒΓ$; le point $Η$ est donc donné. Mais le point $Δ$ est aussi donné; la droite $ΔΗ$ est donc donnée de grandeur (26). Mais $ΑΔ$ est parallèle à $ΕΘ$, et $ΘΗ$ est égal à $ΗΑ$; donc $ΔΗ$ est égal à $ΗΖ$, et $ΑΔ$ égal à $ΖΘ$ (29. 1) (4. 6); donc $ΗΖ$ est donné. Mais ces droites sont données de position; chacune des droites $ΗΖ$, $ΗΔ$ est donc donnée. Mais le point $Η$ est donné; le point $Ζ$ est donc aussi donné (27).

Puisque dans un cercle $ΑΒΓ$ donné de position, on a pris un point donné $Ζ$, et qu'on a mené une droite $ΕΖΘ$, le rectangle sous $ΕΖ$, $ΖΘ$ sera donné (93). Mais $ΘΖ$ est égal à $ΔΑ$; le rectangle sous $ΑΔ$, $ΕΖ$ est donc donné: ce qu'il fallait démontrer.

HYPsicLIS

DE QUINQUE CORPORIBUS

LIBER PRIMUS.

ΒΑΣΙΛΙΔΗΣ ὁ Τύριος, ὦ Πρώταρχε, παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ συσταθεὶς τῷ πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μαθήματος συγγένειαν, συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. Καί ποτε διελκυντες τὸ ὑπὸ Ἀπολλωνίου γραφὴν περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα λόγον ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα· ἔδοξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγραφέναι τὸν Ἀπολλώνιον. Αὐτοὶ δὲ ταῦτα διακαθάραντες ἔγραψαν ὡς ἦν ἀκούειν

Basilides Tyrius, Protarche, cum venisset Alexandriam, et commendatus fuisset patri nostro ob mathematicæ familiaritatem, versatus est cum eo multum peregrinationis tempore. Et aliquando expendentes id quod ab Apollonio scriptum est de comparatione dodecaedri et icosaedri in eadem sphaerâ descriptorum, scilicet quam rationem habeant illa inter se, existimaverunt ea non recte descripta fuisse ab Apollonio. Illi autem hæc purgantes scripserunt, ut audiveram

LE PREMIER LIVRE

DES CINQ CORPS D'HYPsicLE.

Lorsque Basilide de Tyr, cher Protarque, vint à Alexandrie, il fut recommandé à mon père, à cause qu'ils étaient l'un et l'autre très-versés dans les sciences mathématiques ; il eut beaucoup de conversations avec lui pendant tout le temps de son voyage. Ayant disserté plusieurs fois ensemble sur ce qu'Apollonius avait écrit sur la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre, décrits dans une même sphère, c'est-à-dire sur la raison que ces solides ont entre eux, ils furent d'avis qu'Apollonius était en cela tombé dans l'erreur ; ils rectifièrent, ainsi que je l'ai appris de mon père, ce que Apollonius avait écrit sur ce sujet. Mais dans

τοῦ πατρός. Εγὼ δὲ ὕστερον περιέπεσον ἐτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδομένῳ, καὶ περιέχοντι ἀπόδειξιν ὑγιᾶς περὶ τοῦ ὑποκειμένου· καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην ἐπὶ τῇ προβλήματι ζητήσαι. Τὸ μὲν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν, καὶ γὰρ περιφέρεται· τὸ δ' ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γεγραφέναι φιλοπόνως ὅσα δοκεῖν ὑπομνηματισάμενος, ἔκρινα προσφωνῆσαι σοι, διὰ τὴν ἐν ἅπασιν μαθήμασι, μάλιστα δ' ἐν γεωμετρίας προκοπὴν, ἐμπείρως κρίνοντι τὰ ῥηθησόμενα· διὰ δὲ τὴν πρὸς τὸν Πατέρα συνήθειαν, καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὐνοίαν, εὐμειῶς ἀκουσμένῳ τῆς πραγματείας. Καιρὸς δ' ἂν εἴη προσιμίου μὲν πεπαῦσθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρχεσθαι.

ex Patre. Ego autem postea incidi in alium librum ab Apollonio editum, et continentem demonstrationem accuratam rei propositæ; et valde oblectatus sum ob problematis indagacionem. Quod quidem ab Apollonio editum est, licet omnibus illud considerare, etenim circumfertur. Quod autem a nobis visum est postea scribere studiose, quantum videri licet, id dedicabo tibi, propter tuos in omnibus mathematicis, maxime autem in geometriâ progressus, perite iudicaturæ quæ dixero; propter quoque tuam cum Patre consuetudinem, et tuam erga nos benevolentiam, benigne audituro hanc tractationem. Sed jam tempus est præmium finiendi, opus vero aggrediendi.

la suite, je tombai sur un autre livre qu'Apollonius a mis au jour, et qui renferme une démonstration exacte de ce qui était proposé; ce qui me fit beaucoup de plaisir. Chacun peut examiner le livre publié par Apollonius, puisqu'il est entre les mains de tout le monde. Je te dédie ce que j'ai jugé à propos d'écrire dans la suite sur ce sujet; ce que j'ai fait avec soin, comme on peut le voir. Je te fais cette dédicace, parce qu'à cause des progrès que tu as faits dans les sciences mathématiques, et principalement dans la géométrie, tu jugeras sainement mon écrit; et encore parce que l'amitié qui te liait avec mon père, et ta bienveillance pour moi, feront que tu me liras avec bonté. Mais il est temps de finir, et de commencer mon ouvrage.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου τινὸς ἐπὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν, τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, κάθετος ἀγαμένη, ἡμίσειά ἐστι συναμφοτέρου τῆς τε ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου ἰσοπλευροῦ πλευρὰ ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΒΕ' κάθετος ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐκτελέσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΔΕ εὐθεῖα ἡ ΑΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου πλευρὰς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΓ, ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζεύχθω ἡ ΗΓ. Ἐπεὶ πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς ΒΖΓ περιφέρειας, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφέρειας

PROPOSITIO I.

Quæ a centro circuli alicujus ad latus pentagoni in eodem circulo descripti, perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque simul et ipsius ex centro circuli et lateris decagoni in eodem circulo descriptorum.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ΑΒΓ circulo pentagoni æquilateri latus ΒΓ, et sumatur centrum Δ circuli, et ad ΒΕ perpendicularis ducatur ΔΕ, et producatur in directum ipsi ΔΕ recta ΑΕΖ; dico ΔΕ dimidiam esse lateris hexagoni et lateris decagoni, in eodem circulo descriptorum.

Jungantur enim ipsæ ΔΓ, ΓΖ, et ponatur ipsi ΕΖ æqualis ipsa ΗΕ, et a puncto Η ad Γ ducatur ΗΓ. Quoniam quintupla est totius circuli circumferentia circumferentiæ ΒΖΓ, et est quidem totius circuli circumferentiæ dimidia ipsa ΑΓΖ, ipsius

PROPOSITION I.

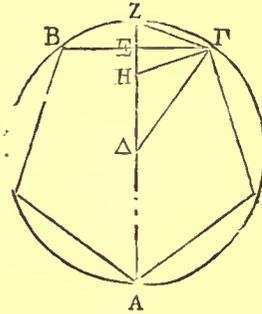
La perpendiculaire menée du centre d'un cercle au côté du pentagone décrit dans ce même cercle, est égale à la moitié de la somme du rayon et du côté du décagone, ce rayon et ce côté étant décrits dans la circonférence du même cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ; dans le cercle ΑΒΓ décrivons le côté ΒΓ du pentagone équilatéral; prenons le centre Δ du cercle; menons ΔΕ perpendiculaire à ΒΕ, et menons la droite ΑΕΖ dans la direction de ΔΕ; je dis que ΔΕ est la moitié de la somme du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces deux polygones étant décrits dans le même cercle.

Car joignons ΔΓ, ΓΖ, faisons ΗΕ égal à ΕΖ, et du point Η menons au point Γ la droite ΗΓ. Puisque la circonférence du cercle entier est quintuple de l'arc ΒΖΓ, que l'arc ΑΓΖ est la moitié de la circonférence du cercle entier, et que

ἡμίσεια ἢ $ΑΓΖ$, τῆς δὲ $ΒΖΓ$ ἡμίσεια ἢ $ΖΓ$ · καὶ $ΑΓΖ$ ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς $ΖΓ$ περιφέρειάς· τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἢ $ΑΓ$ τῆς $ΖΓ$. Ὡς δὲ ἢ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$ οὕτως ἢ ὑπὸ $ΑΔΓ$ πρὸς τὴν ὑπὸ $ΓΔΖ$ γωνίαν· τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ $ΑΔΓ$ τῆς ὑπὸ $ΓΔΖ$. Διπλῆ δὲ ἢ ὑπὸ $ΑΔΓ$ τῆς ὑπὸ $ΓΖΕ$ · διπλῆ ἄρα καὶ ἢ ὑπὸ $ΕΖΓ$ τῆς $ΓΔΗ$.

autem $ΑΖΓ$ dimidia ipsa $ΖΓ$; et $ΑΓΖ$ igitur circumferentia quintupla est circumferentiæ $ΖΓ$; quadrupla igitur est $ΑΓ$ ipsius $ΖΓ$. Ut autem circumferentia $ΑΓ$ ad circumferentiam $ΓΖ$ ita angulus $ΑΔΓ$ ad angulum $ΓΔΖ$; quadruplus igitur est angulus $ΑΔΓ$ anguli $ΓΔΖ$. Duplus autem angulus $ΑΔΓ$ anguli $ΓΖΕ$; duplus igitur et $ΕΖΓ$ ipsius $ΓΔΗ$.



Ἐστι δὲ ἢ ὑπὸ $ΕΖΓ$ ἴση τῇ ὑπὸ $ΓΗΕ$ · διπλῆ ἄρα ἢ ὑπὸ $ΕΗΓ$ τῆς ὑπὸ $ΓΔΗ$ · ἴση ἄρα ἢ $ΔΗ$ τῇ $ΗΓ$. Ἀλλὰ ἢ $ΗΓ$ τῇ $ΓΖ$ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἢ $ΔΗ$ τῇ $ΖΓ$. Ἐστι δὲ καὶ $ΗΕ$ τῇ $ΕΖ$ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἢ $ΔΕ$ συναμφοτέρω τῇ $ΕΖ$, $ΖΓ$. Κοινὴ προσκείσθω ἢ $ΔΕ$ · συναμφοτέρος ἄρα ἐστὶν ἢ $ΔΖ$, $ΖΓ$ διπλῆ τῆς $ΔΕ$. Καὶ ἐστὶν ἢ μὲν $ΔΖ$ ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου, ἢ δὲ $ΖΓ$ ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου·

Est autem $ΕΖΓ$ angulus æqualis angulo $ΓΗΕ$; duplus igitur $ΕΗΓ$ ipsius $ΓΔΗ$; æqualis igitur $ΔΗ$ ipsi $ΗΓ$. Sed $ΗΓ$ ipsi $ΓΖ$ est æqualis; æqualis igitur et $ΔΗ$ ipsi $ΖΓ$. Est autem et $ΗΕ$ ipsi $ΕΖ$ æqualis; æqualis igitur et $ΔΕ$ utrique simul $ΕΖ$, $ΖΓ$. Communis addatur $ΔΕ$; utraque simul igitur est $ΔΖ$, $ΖΓ$ dupla ipsius $ΔΕ$. Et est quidem $ΔΖ$ æqualis lateri hexagoni, et $ΖΓ$ æqualis la-

l'arc $ΖΓ$ est la moitié de l'arc $ΑΖΓ$, l'arc $ΑΓΖ$ sera quintuple de l'arc $ΖΓ$; l'arc $ΑΓ$ est donc quadruple de l'arc $ΖΓ$. Mais l'arc $ΑΓ$ est à l'arc $ΓΖ$ comme l'angle $ΑΔΓ$ est à l'angle $ΓΔΖ$ (33. 6); l'angle $ΑΔΓ$ est donc quadruple de l'arc $ΓΔΖ$. Mais l'angle $ΑΔΓ$ est double de l'angle $ΓΖΕ$ (23. 3); l'angle $ΕΖΓ$ est donc double de l'angle $ΓΔΗ$. Mais l'angle $ΕΖΓ$ est égal à l'angle $ΓΗΕ$; l'angle $ΕΗΓ$ est donc double de l'angle $ΓΔΗ$; la droite $ΔΗ$ est donc égale à $ΗΓ$. Mais $ΗΓ$ est égal à $ΓΖ$; la droite $ΔΗ$ est donc égale à $ΖΓ$. Mais $ΗΕ$ est égal à $ΕΖ$; la droite $ΔΕ$ est donc égale à la somme des droites $ΕΖ$, $ΖΓ$. Ajoutons la droite commune $ΔΕ$; la somme des droites $ΔΖ$, $ΖΓ$ sera double de la droite $ΔΕ$. Mais $ΔΖ$ est égal au côté de l'hexagone, et $ΖΓ$ au côté du décagone;

ἡ ΔΕ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τε του ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

teri decagoni; ipsa ΔΕ igitur dimidia est et lateris hexagoni et lateris decagoni, in eodem circulo descriptorum. Quod oportebat ostendere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Φανερόν δὴ ἐκ τῶν ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλευροῦ κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

COROLLARIUM.

Evidens utique ex decimi tertii libri theorematibus rectam quæ ex centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse ipsius ex centro circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ πέντε σχημάτων σύγκρισις· ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγ-

Idem circulus comprehendit et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum in eadem sphaerâ descriptorum.

Hoc autem conscribitur quidem ab Aristæo in inscripto de quinque figurarum comparatione; ab Apollonio autem in secundâ editione com-

la droite ΔΕ est donc égale à la moitié de la somme du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans un même cercle, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

Il est évident, d'après les théorèmes du livre XIII (12. 13) que la perpendiculaire menée du centre du cercle au côté du triangle équilatéral, est la moitié du rayon du cercle.

PROPOSITION II.

Le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosædre, ces solides étant décrits dans la même sphère.

Cela est écrit par Aristée, dans le livre de la comparaison des cinq corps, et par Apollonius, dans la seconde édition de la comparaison du dodécaèdre

κρίσιως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον· ἔτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκαέδρον πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον· διὰ δὲ τὴν αὐτὴν εἶναι κάθετον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον. Γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, προγραφεύτος τοῦδε.

Εὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἀπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου ὑποτείνουσας εὐθείας, πενταπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, καὶ ἐν τῷ $AB\Gamma$ κύκλῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ $ΑΓ$, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ , καὶ ἐπὶ τὴν $ΑΓ$ κάθετος ἡ ΔZ , καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ B, E , καὶ ἐπιεξέχθω ἡ AB . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $BA, ΑΓ$ τετράγωνα πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE τετραγώνου.

avec l'icosaèdre, où il fait voir que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le dodécaèdre est à l'icosaèdre, parce que la perpendiculaire menée du centre de la sphère au pentagone du dodécaèdre, est la même que la perpendiculaire menée au triangle de l'icosaèdre. Nous démontrerons que le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre, et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère, après avoir exposé ce qui suit :

Si dans un cercle on décrit un pentagone équilatéral, la somme des carrés du côté du pentagone, et de la droite qui soutend deux côtés du pentagone, est quintuple du carré du rayon de ce cercle.

Soit le cercle $AB\Gamma$, que $ΑΓ$ soit le côté du pentagone décrit dans le cercle $AB\Gamma$, prenons le centre Δ de ce cercle, menons ΔZ perpendiculaire à $ΑΓ$, prolongeons ΔZ vers les points B, E , et joignons AB ; je dis que la somme des carrés des droites $BA, ΑΓ$ est quintuple du carré de ΔE .

parationis dodecaedri cum icosaedro; quod est ut dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita et ipsum dodecaedrum ad icosaedrum; quia eadem est perpendicularis a centro sphaeræ ad dodecaedri pentagonum et ad icosaedri triangulum. Ostendendum est autem et a nobis metipsis eundem circulum comprehendere et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum, in eadem sphaerâ descriptorum, hoc præmisso.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quadratum ex latere pentagoni, et quadratum ex rectâ duo latera pentagoni subtendente quintupla erunt quadrati ex ipsâ quæ est ex circuli centro.

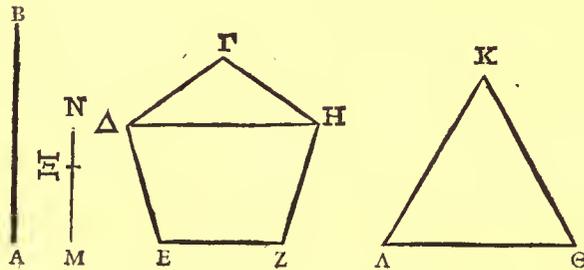
Sit circulus $AB\Gamma$, et in $AB\Gamma$ circulo pentagoni latus sit $ΑΓ$, et sumatur centrum Δ circuli, et ad $ΑΓ$ perpendicularis ΔZ , et producatur ad puncta B, E , et jungatur AB ; dico quadrata ex $BA, ΑΓ$ quintupla esse quadrati ex ΔE .

τοῦ δωδεκαέδρου ποντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ, εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΚΛΘ· λέγω ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν περὶ αὐτὰ κύκλων ἴσαι εἰσὶν, τουτέστιν ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ, τε ΓΔΕΖΗ πενταγώνον καὶ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· κύβου ἄρα πλευρὰ ἡ ΔΗ. Ἐκκείσθω δὲ τις εὐθεῖα ἡ ΜΝ, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαί-

pentagonum ΓΔΕΖΗ, icosaedri vero triangulum ΚΛΘ; dico rectas ex centrīs circulorum circa ipsa esse aequales, hoc est eundem circulum comprehendere et ΓΔΕΖΗ pentagonum et ΚΛΘ triangulum.

Jungatur ΔΗ; eubi igitur latus ipsa ΔΗ. Exponatur autem aliqua recta ΜΝ, ita ut quintuplum sit ipsum ΑΒ ipsius ex ΜΝ. Est au-



ρας διάμετρος δυνάμει πενταπλάσια τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται· ἡ ΜΝ ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κύκλου τοῦ ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται². Τετμήσθω τοῦ ἡ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἔστω τὸ μείζον τμημα ἡ ΜΞ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ,

tem et sphaerae diameter potentia quintupla ipsius ex centro circuli a quo icosaedrum describitur; ergo ΜΝ est ipsa ex centro circuli a quo icosaedrum describitur. Secetur ΜΝ extremâ et mediâ ratione in Ξ, et sit major portio ipsa ΜΞ; decagoni igitur latus ipsa ΜΞ. Et quoniam quintuplum est ipsum ex ΑΒ ipsius

caèdre et un icosàèdre, que ΓΔΕΖΗ soit un pentagone du dodécaèdre, et ΚΛΘ un triangle de l'icosàèdre; je dis que les rayons des cercles décrits autour de ces polygones sont égaux, c'est-à-dire que le même cercle comprend le pentagone ΓΔΕΖΗ et le triangle ΚΛΘ.

Joignons ΔΗ; la droite ΔΗ sera le côté du cube (8 et 17. 15). Soit une droite ΜΝ, de manière que le carré de ΑΒ soit quintuple du carré de ΜΝ. Mais le diamètre de la sphère est quintuple en puissance du rayon du cercle d'après lequel l'icosàèdre est décrit (16. 15); la droite ΜΝ est donc le rayon du cercle d'après lequel l'icosàèdre est décrit. Coupons ΜΝ en extrême et moyenne raison au point Ξ (50. 6), et que ΜΞ soit le plus grand segment; la droite ΜΞ est donc le côté du décagone. Et puisque le carré de ΑΒ est quintuple du carré de ΜΝ, et

τριπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ AB τοῦ ἀπὸ ΔΗ· τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΔΗ ἴσα πέντε τοῖς ἀπὸ MN. Ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ ΔΗ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ MN οὕτως ἐστὶ τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ³. τρία οὖν τὰ ἀπὸ ΓΗ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ ἐστὶν ἴσα. Πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΚΑ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ MN καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ ἐστὶν ἴσα· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΚΑ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΓΗ⁴. Τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΔΗ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ, προεδείχθη γὰρ τὰ ἀπὸ ΔΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ πεντεπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ κύκλου. Ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ ΚΑ, ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΚΑΘ τρίγωνον κύκλου, ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ ΚΑ τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΚΑΘ τριγώνου κύκλου⁵. δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα ἐστὶ τοῖς

ex MN, triplum autem ipsum ex AB ipsius ex ΔΗ; tria igitur ipsa ex ΔΗ æqualia quinque ipsis ex MN. Ut autem tria ipsa ex ΔΗ ad quinque ipsa ex MN ita tria ipsa ex ΓΗ ad quinque ipsa ex ΜΞ; tria igitur ipsa ex ΓΗ quinque ipsis ex ΜΞ sunt æqualia. Quinque autem ipsa ex ΚΑ quinque ipsis ex MN et quinque ipsis ex ΜΞ sunt æqualia; quinque igitur ipsa ex ΚΑ æqualia sunt tribus ipsis ex ΔΗ et tribus ipsis ex ΓΗ. Tria autem ipsa ex ΔΗ et tria ipsa ex ΓΗ æqualia sunt quindecim ipsis ex rectâ ex centro circuli descripti circa ΓΔΕΖΗ, ostensum est enim ipsum ex ΔΗ eum ipso ex ΓΗ quintuplum esse ipsius ex rectâ ex centro circuli descripti circa pentagonum ΓΔΕΖΗ. Sed quinque quidem ipsa ex ΚΑ æqualia sunt quindecim ipsis ex rectâ ex centro circuli descripti circa ΚΑΘ triangulum, ostensum est autem ipsum ex ΚΑ triplum esse ipsius ex rectâ ex centro circuli descripti circa ΚΑΘ triangulum; quindecim igitur ipsa ex rectâ ex centro circuli

que le carré de AB est triple du carré de ΔΗ, le triple du carré de ΔΗ sera quintuple du carré de MN. Mais le triple du carré de ΔΗ est au quintuple du carré de MN comme le triple du carré de ΓΗ est au quintuple du carré de ΜΞ (0. 15 et 7 14); le triple du carré de ΓΗ est donc égal au quintuple du carré de ΜΞ. Mais le quintuple du carré de ΚΑ est égal à la somme du quintuple du carré de MN et du quintuple carré de ΜΞ (8. 9 et 10. 15); le quintuple du carré de ΚΑ est donc égal à la somme du triple carré de ΔΗ et du triple carré de ΓΗ. Mais la somme du triple carré de ΔΗ et du triple carré de ΓΗ est égale à quinze fois le carré du rayon du cercle décrit autour du pentagone ΓΔΕΖΗ, car on a démontré que la somme des carrés des droites ΔΗ, ΓΗ est quintuple du carré du rayon du cercle décrit autour du pentagone ΓΔΕΖΗ. Mais le quintuple du carré de ΚΑ est égal à quinze fois le carré du rayon du cercle décrit autour du triangle ΚΑΘ, et l'on a démontré que le carré de ΚΑ est triple du carré du rayon du cercle décrit autour du triangle ΚΑΘ (12. 15); quinze fois le carré du rayon du premier cercle est donc égal à

δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου⁶· ἢ ἄρα
διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ.

Ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τό τε
τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκο-
σαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν
ἐγγραφομένων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ᾖ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώ-
νιον, καὶ περὶ τοῦτο κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ
κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῆ· τὸ
τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς
καθίτου ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἐστω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον
τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος,
καὶ εἰλήθω τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ
ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἢ ΖΗ· λέγω ὅτι
τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον δώδεκα πεντα-
γώνοις τοῖς ΑΒΓΔΕ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ

æqualia sunt quindecim ipsis ex rectâ ex centro
circuli; ergo diameter æqualis est diametro.

Idem igitur circulus comprehendit et dode-
caedri pentagonum et icosaedri triangulum in
eâdem spherâ descriptorum.

PROPOSITIO III.

Si sit pentagonum et æquilaterum et æquian-
gulum, et circa ipsum circulus, et a centro per-
pendicularis ad unum latus ducatur; ipsum
tricies sub uno laterum et perpendiculari æquale
est dodecaedri superfici.

Sit pentagonum æquilaterum et æquiangulum
ΑΒΓΔΕ, et circa pentagonum circulus, et su-
matur centrum Ζ, et a puncto Ζ ad ΓΔ per-
pendicularis ducatur ΖΗ; dico ipsum tricies
sub ΓΔ, ΖΗ æquale esse duodecim pentagonis
ΑΒΓΔΕ.

Jungantur ipsæ ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam ipsum

quinze fois le quarré du rayon du second cercle ; les diamètres sont donc
égaux.

Le même cercle comprend donc le pentagone du dodécaèdre, et le triangle
de l'icosàèdre, ces polygones étant décrits dans un même cercle.

PROPOSITION III.

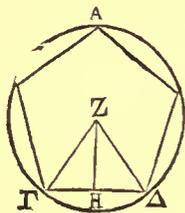
Si l'on a un pentagone équilatéral et équiangle, si on lui circonscrit un cercle,
et si du centre du cercle on mène une perpendiculaire à un des côtés, trente fois
le rectangle sous un des côtés et la perpendiculaire sera égal à la surface du
dodécaèdre.

Soit ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle, circonscrivons lui un cercle,
prenons le centre Ζ, et du point Ζ menons la perpendiculaire ΖΗ; je dis que trente
fois la rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est égal à douze fois le pentagone ΑΒΓΔΕ.

Joignons ΓΖ, ΖΔ. Puisque le rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est double du triangle ΓΔΖ

ΓΔ, ΖΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΓΔΖ τριγώνου, τῶ ἄρα πεντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ δέκα τρίγωνα ἐστὶν ἴσα¹. Τὰ δὲ δέκα τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα,

sub ΓΔ, ΖΗ duplum est trianguli ΓΔΖ, ipsi igitur quinquies sub ΓΔ, ΖΗ decem triangula æqualia sunt. Sed decem triangula duo sunt pen-

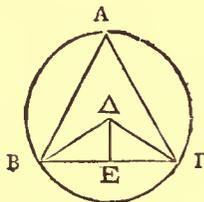


καὶ πάντα ἑξάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ δώδεκα πενταγώνοις. Δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστὶν ἐπιφανεία· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

tagona, et tota sexties; ipsum igitur tricies sub ΓΔ, ΖΗ æquale est duodecim pentagonis. Duodecim autem pentagona dodecaedri est superficies; ipsum igitur tricies sub ΓΔ, ΖΗ æquale est dodecaedri superficiæ.

Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ τρίγωνον ἰσόπλευρον ὡς τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος,

Similiter utique ostendemus et si sit triangulum æquilaterum ut ΑΒΓ, et circa ipsum circulus,



καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ.

et centrum circuli Δ, et perpendicularis ΔΕ, ipsum tricies sub ΒΓ, ΔΕ æquale esse icosaedri superficiæ.

(40. 1), dix angles seront égaux au quintuple du rectangle sous ΓΔ, ΖΗ. Mais dix triangles sont égaux à deux pentagones, ainsi que six fois les tous; trente fois le rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est donc égal à douze pentagones. Mais douze pentagones forment la surface du dodécaèdre; trente fois le rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est donc égal à la surface du dodécaèdre.

Nous démontrerons semblablement que si l'on a un triangle équilatéral comme ΑΒΓ, que si on lui circonscrit un cercle dont le centre soit Δ, et que si l'on mène une perpendiculaire ΔΕ, trente fois le rectangle sous ΒΓ, ΔΕ sera égal à la surface de l'icosàèdre.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ διπλασίον ἔστι τοῦ ΑΒΓ, δύο ἄρα τρίγωνα ἴσα ἔστι τῶ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ, καὶ πάντα τρίς· ἕξ ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ἴσα ἔστι πρὸς τοῖς ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ. Ἐξ δὲ τρίγωνα ὡς τὰ ΑΒΓ, ἴσα ἔστι δύο τοῖς ΑΒΓ, καὶ πάντα δεκάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἔστιν εἴκοσι τοῖς ΑΒΓ τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ· ὥστε ἔσται ὡς ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὡς ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ

Quoniam enim rursus ipsum sub ΒΓ, ΔΕ duplum est ipsius ΑΒΓ; duo igitur triangula æqualia sunt ipsi sub ΒΓ, ΔΕ, et omnia ter; sex igitur triangula ΑΒΓ æqualia sunt tribus sub ΒΓ, ΔΕ; sex autem triangula ut ΑΒΓ æqualia sunt duobus ΑΒΓ, et omnia decies; ipsum igitur tricics sub ΒΓ, ΔΕ æquale est viginti ΑΒΓ triangulis, hoc est icosædri superficiæ; quare erit ut dodecaedri superficiæ ad icosædri superficiem ita ipsum sub ΓΔ, ΖΗ ad ipsum sub ΒΓ, ΔΕ.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est ut dodecaedri superficies ad icosædri superficiem ita ipsum sub latere pentagoni et perpendiculari ex centro circuli circa pentagonum ad latus ductâ ad ipsum sub latere icosædri et perpendiculari a centro circuli circa triangulum ad latus ductâ,

Car puisque le rectangle sous ΒΓ, ΔΕ est double du triangle ΑΒΓ (41. 1), deux triangles seront égaux au rectangle sous ΒΓ, ΔΕ, ainsi que trois fois les tous; les six triangles ΑΒΓ sont donc égaux aux trois rectangles sous ΒΓ, ΔΕ. Mais six triangles comme ΑΒΓ sont égaux a deux triangles ΑΒΓ, ainsi que dix fois les tous; trente fois le rectangle sous ΒΓ, ΔΕ est donc égal à vingt fois le triangle ΑΒΓ, c'est-à-dire à la surface de l'icosædre; la surface du dodécaèdre est donc à la surface de l'icosædre comme le rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est au rectangle sous ΒΓ, ΔΕ.

COROLLAIRE.

D'après cela il est évident que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosædre comme le rectangle sous le côté du pentagone et la perpendiculaire menée à ce côté du centre du cercle circonscrit au pentagone, est au rectangle sous le côté de l'icosædre et la perpendiculaire menée à ce côté du centre du

τρίγωνον κύκλου ἐπὶ αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου.

in eâdem sphærà descriptis icosaedro et dodæcaedro.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τούτου δήλου ἔντος, δεικτέον, ὅτι ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν.

Ἐκκείσθω κύκλος περιλαμβάνων τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὃ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγράφω εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλευροῦ πλευρὰ ἢ ΓΔ, πενταγώνου δὲ ἢ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΔΓ, ΓΑ κάθειται ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐκβλήσθω ἐπὶ εὐθείας τῆς ΕΗ εὐθεῖα ἢ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΒΓ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἢ Θ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως ἢ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

PROPOSITIO IV.

Hoc manifesto existente, ostendendum est fore ut dodæcaedri superficies ad superficiem icosaedri ita cubi latus ad icosaedri latus.

Exponatur circulus ΑΒΓ comprehendens et dodæcaedri pentagonum et icosaedri triangulum in eâdem sphærà descriptorum, et describatur in ΑΒΓ circulo trianguli quidam æquilateri latus ΓΔ, pentagoni autem latus ΑΓ, et sumatur centrum Ε circuli, et a puncto Ε ad ΔΓ, ΓΑ ducantur perpendicularæ ΕΖ, ΕΗ, et producat in directum ipsi ΕΗ recta ΗΒ, et jungatur ΒΓ, et exponatur cubi latus Θ; dico esse ut dodæcaedri superficies ad icosaedri superficiem ita Θ ad ΓΔ.

cercle circonscrit au triangle, le dodécaèdre et l'icosaèdre étant décrits dans la même sphère.

PROPOSITION IV.

Cela étant évident, il faut démontrer que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre.

Soit exposé un cercle ΑΒΓ qui comprène le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère (2. 14), décrivons dans le cercle ΑΒΓ le côté ΓΔ d'un triangle équilatéral, et le côté ΑΓ du pentagone, prenons le centre Ε du cercle; du point Ε menons aux droites ΔΓ, ΓΑ les perpendiculaires ΕΖ, ΕΗ, prolongeons ΗΒ dans la direction de ΕΗ, joignons ΒΓ, et soit exposé le côté Θ du cube; je dis que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre, comme Θ est à ΓΔ.

εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἢ Θ πρὸς τὴν
ΓΔ. Οἱπερ εἶδει δείξαι.

superficies ad icosaedri superficiem ita Θ
ad ΓΔ. Quod oportebat ostendcre.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Δείξαι ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπι-
φάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν,
οὕτως ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκο-
σαέδρου πλευρὰ· προγραφεῖτες τοῦδε.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγραφῶμεν εἰς τὸν
ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλευροῦ πλευρὰι αἱ
ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήθω τὸ
κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ
ἐπιζεύχθω εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐ-
θείας τῆς ΑΔ εὐθεῖα ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῆς μὲν ΑΔ
εὐθείας ἡμίσεια ἡ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τῆς ΓΘ τριπλῆ
ἔστω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ ἴσον ἐστὶ τῷ
πενταγώνῳ.

Ἀπὸ γὰρ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΔ.
Καὶ ἐπὶ διπλῆ ἔστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, ἡμισυία
ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ ἡ ΑΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τριπλῆ

Ostendere ut dodecadri superficies ad ico-
saedri superficiem ita cubi latus ad icosaedri
latus; hoc autem præmisso.

Sit circulus ΑΒΓ, et describantur in ΑΒΓ cir-
culo pentagoni æquilateri latera ΑΒ, ΑΓ, et
jungatur ΒΓ, et sumatur centrum Δ circuli, et
a puncto Α ad Δ ducatur recta ΑΔ, et pro-
ducatur in directum ipsi ΑΔ recta ΔΕ, et po-
natur rectæ ΑΔ dimidia ΔΖ, ipsa autem ΗΓ ipsius
ΓΘ tripla sit; dico ipsum sub ΑΖ, ΒΘ æquale
esse pentagono.

Etenim a puncto Β ad Δ ducatur ΒΔ. Et
quoniam dupla est ΑΔ ipsius ΔΖ, sesquialtera
igitur est ipsius ΑΔ ipsa ΑΖ. Rursus, quoniam

est au rectangle sous ΓΔ, ΕΖ (16. 6), c'est-à-dire que la surface du dodécaèdre est
à la surface de l'icosaèdre comme Θ est a ΓΔ (3. 14): ce qu'il fallait démontrer.

AUTREMENT.

Démontrer que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme
le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, après avoir exposé ce qui suit :

Soit le cercle ΑΒΓ, dans le cercle ΑΒΓ, décrivons les côtés ΑΒ, ΑΓ d'un penta-
gone équilatéral, joignons ΒΓ, prenons le centre Δ du cercle, du point Α au
point Δ menons la droite ΑΔ, prolongeons la droite ΔΕ dans la direction de ΑΔ,
faisons ΔΖ égal à la moitié de ΑΔ, et que ΗΓ soit triple de ΓΘ, je dis que le
rectangle sous ΑΖ, ΒΘ est égal au pentagone.

Car du point Β, menons au point Δ la droite ΒΔ. Puisque ΑΔ est double de ΔΖ,
la droite ΑΖ sera égale aux trois moitiés de ΑΔ. De plus, puisque ΗΓ est triple de

ἴσι τῷ ὑπὸ AZ, ΗΘ, καὶ δέκα τὰ ὑπὸ AZ, ΘΓ ἴσα ὅτι πέντε τοῖς ὑπὸ AZ, ΗΘ, τουτέστι δύο πεντάγωνοι ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ AZ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἐνὶ πενταγώνῳ. Πεντάκις δὲ τὸ ὑπὸ AZ, ΘΓ ἴσα ἰσὶ τῷ ὑπὸ AZ, ΘΒ, ἐπεὶ δὴ πενταπλῆ ἐστὶν ἡ ΘΒ τῆς ΘΓ, καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ AZ. Τὸ ἄρα ὑπὸ AZ, ΘΒ ἴσον ἐστὶν ἐνὶ πενταγώνῳ.

Τούτου δὴλου ὄντος, νῦν ἐκκείσθω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐγγεγράφωσιν εἰς τὸν ABΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλευροῦ πλευραὶ αἱ BA, ΑΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ E, καὶ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ E ἐπιζεύχθω ἡ AE, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ AE ἐπὶ τὸ Z, καὶ ἔστω ἡ AE τῆς EΘ διπλῆ, τριπλῆ δὲ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ H τῆς AZ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΜ* τρίγωνος ἄρα ἐστὶν ἰσοπλευροῦ ἡ ΔΜ*. ἰσοπλευρὴν ἄρα ἰσὶ τὸ ΑΔΜ τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ AH, ΘΒ ἴσον ἰσὶ τῷ πενταγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ AH, ΗΔ τῷ ΑΔΜ τρίγωνῳ* ἔστιν ἄρα ὡς

ΗΘ; et decem ipsa sub AZ, ΘΓ æqualia sunt quinque ipsis sub AZ, ΗΘ, hoc est duo pentagona; quare quinque ipsa sub AZ, ΘΓ æqualia sunt uni pentagono. Quinque autem ipsa sub AZ, ΘΓ æqualia sunt ipsi sub AZ, ΘΒ, quia quintupla quidem est ΘΒ ipsius ΘΓ, et communis altitudo est ipsa AZ. Ipsum igitur sub AZ, ΘΒ æquale est uni pentagono.

Hoc manifesto existente, nunc exponatur circulus comprehendens et dodecaedri pentagonum, et icosaedri triangulum, in eadem sphaerâ descriptorum, et describantur in ABΓ circulo pentagoni æquilateri latera BA, ΑΓ, et jungatur ΒΓ, et sumatur centrum E circuli, et a puncto A ad E ducatur AE, et producatür AE ad Z, et sit AE ipsius EΘ dupla, tripla autem ΚΓ ipsius ΓΘ, et a puncto H ipsi AZ ad rectos ipsa ΔΜ; trianguli igitur est æquilateri latus ipsa ΔΜ; æquilaterum igitur est ΑΔΜ triangulum. Et quoniam ipsum quidem sub AH, ΘΒ æquale est pentagono, ipsum autem sub AH, ΗΔ triangulo ΑΔΜ; est igi-

et dix fois le rectangle sous AZ, ΘΓ égal à cinq fois le rectangle sous AZ ΗΘ, c'est-à-dire, à deux pentagones; cinq fois le rectangle sous AZ, ΘΓ est donc égal à un pentagone. Mais cinq fois le rectangle sous AZ, ΘΓ est égal au rectangle sous AZ, ΘΒ, parce que ΘΒ est quintuple de ΘΓ, et que AZ est la hauteur commune. Le rectangle sous AZ, ΘΒ est donc égal à un pentagone.

Cela étant démontré, soit exposé un cercle qui comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosàèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère; décrivons dans le cercle ABΓ les côtés, BA, ΑΓ d'un pentagone équilatéral, joignons ΒΓ, prenons le centre E du cercle, du point A menons au point E la droite AE, prolongeons AE vers le point Z, que AE soit double de EΘ, et ΚΓ triple de ΓΘ, et du point H menons ΔΜ perpendiculaire à AZ; la droite ΔΜ sera le côté d'un triangle équilatéral (cor. 1. 14). Le triangle ΑΔΜ est donc équilatéral. Et puisque le rectangle sous AH, ΘΒ est égal au pentagone, et que le rectangle sous AH, ΗΔ est égal au triangle ΑΔΜ, le rectangle sous AH, ΘΒ

τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΜ, τουτέστιν ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

BΓ ad ΔΜ, hoc est cubi latus ad icosaedri latus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ εὐθείας ἡσθηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἢ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒ περιλαμβάνων τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαιρὰν ἐγγραφομένων, καὶ εἰλήθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Γ, καὶ προσκεβλήσθω τις ἀπὸ τοῦ Γ ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἢ ΓΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Δ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἔστω ἢ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἢ ΓΔ

PROPOSITIO V.

Ostendum est igitur et rectâ quâlibet sectâ extremâ et mediâ ratione, quam rationem habet potens quadratum ex totâ et quadratum ex majori portione ad potentem quadratum ex totâ et quadratum ex minore portione eadem habere rationem cubi latus ad icosaedri latus.

Sit circulus ΑΒ comprehensens et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum, in eadem sphaerâ descriptorum, et sumatur centrum Γ circuli, et producatür aliqua a puncto Γ ut libet recta ΓΒ, et secetur extremâ et mediâ ratione in Δ, et major portio sit ΓΔ; decagoni igitur latus est ipsa ΓΔ in eodem circulo descripti.

caèdre est donc à la surface de l'icosaèdre comme ΒΓ est à ΔΜ; c'est-à-dire comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre.

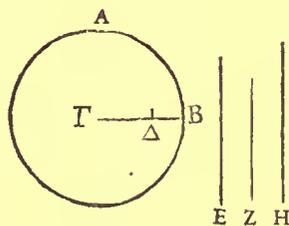
PROPOSITION V.

Une droite étant coupée en extrême et moyenne raison, il faut démontrer aussi que le côté du cube est au côté de l'icosaèdre comme le carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment est au carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus petit segment.

Soit un cercle ΑΒ qui comprend et le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère; prenons le centre Γ du cercle; du point Γ menons une droite quelconque ΓΒ; coupons cette droite en extrême et moyenne raison au point Δ, et que ΓΔ soit le plus grand segment; la droite ΓΔ sera le côté du dodécaèdre décrit dans le même cercle (5 et 9, 13).

εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. Εκκείσθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἢ Ε, δωδεκαέδρου δὲ ἢ Ζ, κύβου δὲ ἢ Η· ἢ μὲν ἄρα Ε τριγώνου ἰσοπλευροῦ ἐστὶ πλευρὰ, ἢ δὲ Ζ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, ἢ δὲ Ζ τῆς Η μείζον ἐστὶ τμήμα. Καὶ ἐπεὶ ἢ Ε ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου πλευρᾷ, ἢ δὲ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλευροῦ πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ΒΓ· τριπλασίον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ΓΒ,

Exponatur itaque icosaedri latus **E**, dodecaedri autem **Z**, cubi vero **H**; ergo **E** quidem trianguli æquilateri est latus, **Z** vero pentagoni in eodem circulo descripti, **Z** autem ipsius **H** major est portio. Et quoniam **E** æqualis est lateri trianguli æquilateri, latus autem trianguli æquilateri potentiâ triplum est ipsius **BΓ**, triplum igitur est ipsum ex **E** ipsius ex **BΓ**. Sunt autem et ipsa ex



ΒΔ τριπλασία τοῦ ἀπὸ ΓΔ· καὶ ἐναλλάξ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ· μείζον γάρ ἐστὶ τμήμα ἢ Ζ τῆς Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ

ΓΒ, ΒΔ tripla ipsius ex ΓΔ; et permutando, ut igitur ipsum ex **E** ad ipsa ex ΓΒ, ΒΔ ita ipsum ex ΓΒ ad ipsum ex ΓΔ. Ut autem ipsum ex ΒΓ ad ipsum ex ΓΔ ita est ipsum ex Η ad ipsum ex Ζ; major enim est portio **Z** quam **H**; et ut igitur ipsum ex **E** ad ipsa ex ΓΒ, ΒΔ ita ipsum

Que la droite **E** soit le côté de l'icosaèdre (18. 13), la droite **Z** le côté du dodécaèdre, et la droite **H** le côté du cube; la droite **E** sera le côté d'un triangle équilatéral, et la droite **Z** le côté du pentagone décrit dans le même cercle, cette droite étant le plus grand segment de **H** (17. 13). Puisque **E** est égal au côté du triangle équilatéral, et que le côté du triangle équilatéral est triple de **BΓ** en puissance (12. 13), le carré de **E** sera triple du carré de **BΓ**. Mais la somme des carrés des droites **ΓΒ**, ΒΔ est triple du carré de **ΓΔ** (4. 13); donc, par permutation, le carré de **E** est à la somme des carrés des droites **ΓΒ**, ΒΔ comme le carré de **ΓΒ** est au carré de **ΓΔ**. Mais le carré de **BΓ** est au carré de **ΓΔ** comme le carré de **H** est au carré de **Z** (7. 14), car le segment de **Z** est plus grand que **H** (17. 13); le carré de **E** est donc à la somme des carrés des droites **ΓΒ**,

Z , καὶ ἐναλλάξ καὶ ἀνάπαλιν* ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ
 H πρὸς τὸ ἀπὸ E οὕτως τὸ ἀπὸ Z πρὸς τὰ
ἀπὸ ΓB , $B\Delta$. Τῶ δὲ ἀπὸ Z ἴσα εἰσὶ τὰ ἀπὸ
 $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$, ἢ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύνα-
ται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν, καὶ τὴν
τοῦ δέκαγώνου* ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ H πρὸς τὸ
ἀπὸ E οὕτως τὰ ἀπὸ ἀπὸ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ πρὸς τὰ
ἀπὸ ΓB , $B\Delta$. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ πρὸς
τὰ ἀπὸ ΓB , $B\Delta$ οὕτως, εὐθείας ἡσθηποτοῦν
ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ ἀπὸ
τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος
τμήματος* καὶ ὡς ἄρα τῆς ἀπὸ τῆς H πρὸς
τὸ ἀπὸ τῆς E , οὕτως, εὐθείας ἡσθηποτοῦν
ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἢ δυναμένη
τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος
τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς
ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. Καὶ
ἔστιν ἢ μὲν H κύβου πλευρὰ, ἢ δὲ E εἰκοσαίδρου*
ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ,

H ad ipsum ex Z , et permutando et inver-
tendo; ut igitur ipsum ex H ad ipsum ex E ita
ipsum ex Z ad ipsa ex ΓB , $B\Delta$. Ipsi autem ex
 Z æqualia sunt ipsa ex $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$, etenim penta-
goni latus potest et latus hexagoni, et latus de-
cagoni; ut igitur ipsum ex H ad ipsum ex E ita
ipsa ex $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ad ipsa ex ΓB , $B\Delta$. Ut au-
tem ipsa ex $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ad ipsa ex ΓB , $B\Delta$ ita,
rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione sectâ,
ipsum ex totâ et ipsum ex majore portione
ad ipsum ex totâ et ipsum ex minore por-
tione; et ut igitur ipsum ex H ad ipsum ex E
ita, rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione
sectâ, potens ipsum ex totâ et ipsum ex majore
portione ad potentem ipsum ex totâ et ipsum
ex minore portione. Et est H quidem cubi la-
tus, E vero icosaedri; si igitur recta extremâ
et mediâ ratione seectur, erit ut potens totam

$B\Delta$ comme le quarré de H est au quarré de Z , et par permutation et par inversion; le quarré de H est donc au quarré de E comme le quarré de Z est à la somme des quarrés des droites ΓB , $B\Delta$. Mais la somme des quarrés des droites $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$ est égale au quarré de Z , car le quarré du côté du pentagone est égal à la somme des quarrés du côté de l'exagone et du côté du décagone (10. 15); le carré de H est donc au quarré de E comme la somme des quarrés des droites $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ est à la somme des quarrés des droites ΓB , $B\Delta$ (7. 14). Mais si une droite est coupée en extrême et moyenne raison, la somme des quarrés des droites $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ est à la somme des quarrés des droites ΓB , $B\Delta$ comme la somme des quarrés d'une droite entière et du plus grand segment est à la somme des quarrés de la droite entière et du plus petit segment; si donc une droite est coupée en extrême et moyenne raison, le quarré de H est au quarré de E comme le quarré d'une droite égale à la somme des quarrés de la droite entière et du plus grand segment est au quarré d'une droite égal à la somme des quarrés de la droite entière et du plus petit segment. Mais H est le côté du cube, et E le côté de l'icosèdre; si donc une droite est coupée en extrême

ἔσται ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὀλην καὶ τὸ μείζον
 τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὀλην καὶ τὸ
 ἔλλασσον τμήμα, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ
 πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν
 σφαῖραν ἐγγραφομένων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et majorem sectionem ad potentem totam et
 minorem portionem, ita eubi latus ad latus ico-
 saedri in eadem sphaerâ descriptorum; quod
 oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Δεικτέον δὲ γυν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου
 πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως τὸ
 στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ
 εἰκοσαέδρου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τὸ τε
 τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέ-
 δρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγ-
 γραφομένων· ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οἱ ἴσοι κύκλοι
 ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ γὰρ ἀπὸ
 τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων
 ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τε εἰσὶ καὶ ἐπὶ
 τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν· ὥστε αἱ ἀπὸ
 τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύ-

PROPOSITIO VI.

Ostendum autem nunc est ut cubi latus ad
 latus icosaedri ita solidum dodecaedri ad so-
 lidum icosaedri.

Quoniam enim æquales circuli comprehen-
 dunt et dodecaedri pentagonum et icosaedri
 triangulum, in eadem sphaerâ descriptorum;
 in sphaeris autem æquales circuli æqualiter
 distant a centro, rectæ enim a centro sphaeræ
 ad circulorum plana perpendicularares ductæ et
 æquales, sunt et in centra circulorum cadunt;
 quare rectæ a centro sphaeræ ad centrum

et moyenne raison, le quarré d'une droite égal à la somme des quarrés de
 la droite entière, et du plus grand segment est au quarré d'une droite égal
 à la somme des quarrés de la droite entière et du plus petit segment, comme
 le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la
 même sphère. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI.

Il faut démontrer maintenant que le côté du cube est au côté de l'icosaèdre
 comme le solide du dodécaèdre est au solide de l'icosaèdre.

Car puisque des cercles égaux comprennent et le pentagone du dodécaèdre,
 et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans une même sphère
 (2. 14), et que dans les sphères les cercles égaux sont également éloignés du
 centre, car les perpendiculaires menées du centre de la sphère aux plans de ces
 cercles sont égales et tombent aux centres des cercles, les droites menées du centre

κλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καί τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον ἴσαι εἰσὶ, τουτέστιν αἱ κάθετοι ἰσοῦψεῖς ἄρα εἰσιν αἱ πυραμίδες, αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. Αἱ δὲ ἰσοῦψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις ὡς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον οὕτως ἢ πυραμῖς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, κορυφή δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ὡς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα οὕτως δώδεκα πυραμίδες πενταγώνου βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνου βάσεις ἔχούσας. Καὶ δώδεκα πεντάγωνα ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστίν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειά ἐστίν· ἐστίν ἄρα ὡς ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως δώδεκα πυραμίδες πενταγώνου βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώ-

circuli comprehendentis et icosaedri triangulum et dodecaedri pentagonum æquales sunt, hoc est, perpendiculares; æquealtæ igitur sunt pyramides bases habentes dodecaedri pentagona et bases habentes icosaedri triangula; æquealtæ autem pyramides inter se sunt ut bases; ut igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis cujus basis quidem est dodecaedri pentagonum, vertex autem centrum sphaeræ, ad pyramidem cujus basis quidem est icosaedri triangulum, vertex autem centrum sphaeræ; et ut igitur duodecim pentagona ad viginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides triangulares bases habentes. Et duodecim pentagona dodecaedri superficies sunt, viginti autem triangula icosaedri superficies sunt; est igitur ut dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides triangulares bases ha-

de la sphère au centre du cercle décrit autour du pentagone du dodécaèdre et du triangle de l'icosaèdre, seront égales, c'est-à-dire perpendiculaires; les pyramides qui ont pour bases les pentagones de l'icosaèdre et les triangles de l'icosaèdre, sont donc de même hauteur. Mais les pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases (5 et 6, 12); le pentagone est donc au triangle comme la pyramide qui a pour base le pentagone du dodécaèdre et pour sommet le centre de la sphère, est à la pyramide qui a pour base le triangle de l'icosaèdre et pour sommet le centre de la sphère; les douze pentagones du dodécaèdre sont donc aux vingt triangles de l'icosaèdre comme les douze pyramides qui ont des bases pentagonales sont aux vingt pyramides qui ont des bases triangulaires. Mais les douze pentagones sont la surface du dodécaèdre, et les vingt triangles sont la surface de l'icosaèdre; la surface du dodécaèdre est donc à la surface de l'icosaèdre comme les douze pyramides qui ont des bases pantagonales sont aux vingt pyramides

νοὺς βάσεις ἔχουσας. Καὶ εἰσὶ δώδεκα μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. Ὡς δὲ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως ἐδείχθη ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἦ.

Ὅτι δὲ εἰάν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τιμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείζομεν οὕτως.

Τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν AB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ τὸ δὲ μείζον τμήμα

bentes. Et sunt duodecim quidem pyramides pentagonales bases habentes solidum dodecaedri, viginti autem pyramides triangulares bases habentes solidum icosaedri, et ut igitur dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita solidum dodecaedri ad solidum icosaedri. Ut autem superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri ita ostensum est esse cubi latus ad icosaedri latus; et ut igitur cubi latus ad icosaedri latus ita solidum dodecaedri ad solidum icosaedri.

PROPOSITIO VII.

Si autem duæ rectæ extremâ et mediâ ratione secantur, eas in proportionem esse subjectâ, sic ostendemus.

Secetur enim recta quidem AB extremâ et mediâ ratione in Γ , major autem portio ipsius

qui ont des bases triangulaires. Mais les douze pyramides qui ont des bases pentagonales sont la solidité du dodécaèdre, et les vingt pyramides qui ont des bases triangulaires sont la solidité de l'icosaèdre; la surface du dodécaèdre est donc à la surface de l'icosaèdre, comme la solidité du dodécaèdre est à la solidité de l'icosaèdre. Mais on a démontré que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre (4. 14); le côté du cube est donc au côté de l'icosaèdre comme la solidité du dodécaèdre est à la solidité de l'icosaèdre.

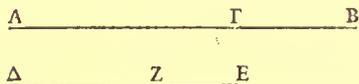
PROPOSITION VII.

Ensuite, si deux droites sont coupées en extrême et moyenne raison, nous démontrerons ainsi qu'elles sont dans la proportion suivante :

Car que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ ,

αὐτῆς ἔστω ἡ ΑΓ· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μείζον τμήμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΔΖ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ὅλη ἡ ΑΒ πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν ΔΖ.

sit ΑΓ; similiter autem et ΔΕ extremâ et mediâ ratione secetur in Ζ, et major portio ipsius sit ΔΖ; dico esse ut tota ΑΒ ad majorem portionem ΑΓ, ita totam ΔΕ ad majorem portionem ΔΖ.



Επεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔστιν οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ συνθέντι ἔστιν ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ

Quoniam enim ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ, ipsum autem sub ΔΕ, ΕΖ æquale est ipsi ex ΔΖ; est igitur ut ipsum sub ΑΒ, ΒΓ ad ipsum ex ΑΓ, ita ipsum sub ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΖ; et ut ipsum quater igitur sub ΑΒ, ΒΓ ad ipsum ex ΑΓ est ita ipsum quater sub ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΖ; et componendo est ut ipsum quater sub ΑΒ, ΒΓ cum ipso ex ΑΓ ad ipsum ex ΑΓ ita ipsum quater sub ΔΕ, ΕΖ cum ipso ex ΔΖ ad ipsum ex ΔΖ; quare et ipsum ex utraq̄ue simul ΑΒ, ΒΓ ad ipsum, ex ΑΓ ita ipsum ex

et que ΑΓ soit son plus grand segment; que la droite ΔΕ soit aussi semblablement coupée en extrême et moyenne raison au point Ζ, et que son plus grand segment soit ΔΖ; je dis que la droite entière ΑΒ est à son plus grand segment ΑΓ comme la droite entière ΔΕ est à son plus grand segment ΔΖ.

Car puisque le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré de ΑΓ, et que le rectangle sous ΔΕ, ΕΖ est égal au carré de ΔΖ (17. 6); le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ sera au carré de ΑΓ comme le rectangle sous ΔΕ, ΕΖ est au carré de ΔΖ; quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est donc au carré de ΑΓ comme quatre fois le rectangle sous ΔΕ, ΕΖ est au carré de ΔΖ (15. 5); donc, par addition, quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ conjointement avec le carré de ΑΓ est au carré de ΑΓ, comme quatre fois le rectangle sous ΔΕ, ΕΖ conjointement avec le carré de ΔΖ est au carré de ΔΖ; le carré de la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est donc au carré de ΑΓ comme le carré de la somme des droites ΔΕ, ΕΖ est au carré de ΔΖ;

ἀπὸ ΔΖ· καὶ μήκει, ὡς συναμφοτέρος ἢ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως συναμφοτέρος ἢ ΔΕ, ΕΖ πρὸς ΔΕ· συνθέντι ἄρα ὡς συναμφοτέρος αἱ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ, τουτέστι δύο αἱ ΑΒ πρὸ ΑΓ, οὕτως συναμφοτέρος ἢ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΔΖ, τουτέστι δύο αἱ ΔΕ πρὸς ΔΖ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, τουτέστι ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἢ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

utraq̄ue simul ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΖ; et longitudine, ut utraq̄ue simul ΑΒ, ΒΓ ad ΑΓ ita utraq̄ue simul ΔΕ, ΕΖ; ad ΔΕ componendo igitur, ut utraq̄ue simul ΑΒ, ΒΓ eum ΑΓ ad ΑΓ, hoc est duæ ΑΒ ad ΑΓ ita utraq̄ue simul ΔΕ, ΕΖ eum ΔΖ ad ΔΖ, hoc est duæ ΔΕ ad ΔΖ; et antecedentium dimidia, hoc est ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΔΕ ad ΔΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δεδειγμένου δὴ τοῦδε, ὅτι, εὐθείας ἡσθηπο-
τοῦν ἄρρον καὶ μέτρον λόγον τμηθείσης, ἢ
λόγον ἔχει ἢ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ
τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυνα-
μένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος
τμήματος, τοῦτον ἔχει ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ
πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν. Δεδειγμένου
δὴ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν
τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν οὕτως ἢ τοῦ δωδεκαί-
δρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπι-
φάνειαν τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαιραν ἐγγραφο-

COROLLARIUM.

Hoc utiq̄ue ostenso, rectâ quâlibet extremâ
et mediâ ratione sectâ, quam rationem habet
potens ipsum ex totâ et ipsum ex majore por-
tione ad potentem ipsum ex totâ et ipsum
ex minore portione, illam habere cubi latus ad
icosædri latus. Hoc et utiq̄ue ostenso, ut eubi
latus ad icosædri latus ita esse dodecaedri su-
perficiem ad icosædri superficiem, in eadem

(8. 2); la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est donc à ΑΓ comme la somme des droites ΔΕ, ΕΖ, est à ΔΕ; donc par addition, la somme des droites ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ est à ΑΓ, c'est-à-dire deux fois ΑΒ, est à ΑΓ comme la somme des droites ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ est à ΔΖ (22. 6), c'est-à-dire comme deux fois ΔΕ est à ΔΖ; et prenant les moitiés des antécédents, ΑΒ sera à ΑΓ comme ΔΕ est à ΔΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

Ayant donc démontré que si une droite est coupée en extrême et moyenne raison, le carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment, est au carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus petit segment comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre (5. 14). Ayant démontré aussi que le côté du cube est au côté de l'icosaèdre comme la surface du dodécaèdre est à la surface de

μένων· προσενηνεγμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκαέδρον πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον, διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τότε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον· δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῆ δωδεκαέδρον τε καὶ εἰκοσαέδρον, λόγον ἔξουσιν εὐθείας οἷα σθηποῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ἢ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.

sphærâ descriptorum; hoc autem et cognito, ut dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita et ipsum dodecaedrum ad icosaedrum, propterea quod ab eodem circulo comprehenduntur et dodccaedri pentagonum et isocaedri triangulum; evidens est si in eâdem sphærâ describantur et dodccaedrum et icosaedrum, rationem illa habitura esse quam, rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione sectâ, potens ipsum ex totâ et ipsum ex majore portione ad potentem ipsum ex totâ et ipsum ex minore portione.

L'icosaèdre, ces solides étant décrits dans une même sphère; et sachant outre cela que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le dodécaèdre est à l'icosaèdre (6. 14), parceque le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, il est évident que si dans la même sphère l'on décrit un dodécaèdre et un icosaèdre, et que si l'on coupe une droite en extrême et moyenne raison, le dodécaèdre aura avec l'icosaèdre la même raison que le carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment a avec le carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus petit segment.

HYPsicLIS

DE QUINQUE CORPORIBUS

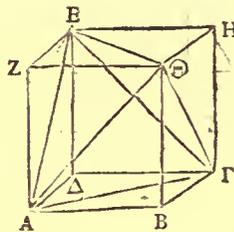
LIBER SECUNDUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

PROPOSITIO I.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι.
 Ἐστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, εἰς ὃν
 δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἐπιζεύχθωσαν αἱ
 ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. Φανερὸν δὴ ὅτι τὰ

In dato cubo pyramidem describere.
 Sit datus cubus ΑΒΓΔΕΖΗΘ, in quo oportet
 pyramidem describere. Jungantur ipsæ ΑΓ, ΑΕ,
 ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. Evidens est utique triangula



ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ τρίγωνα ἰσοπλευρά ἐστι,
 τετραγώνων γάρ εἰσι διαμέτροι αἱ πλευραὶ πυ-
 ραμῖς ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕΓΘ, καὶ ἐγγέγραπται
 εἰς τὸν δοθέντα κύβον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ æquilatera esse, quadra-
 torum enim sunt diametri eorum latera; pyra-
 mis igitur est ΑΕΓΘ, et descripta est in dato
 cubo. Quòd oportebat facere.

LE SECOND LIVRE

DES CINQ CORPS D'HYPsicLE.

PROPOSITION I.

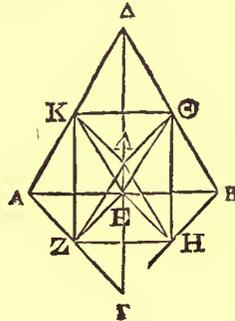
Inscrire une pyramide dans un cube donné.

Soit ΑΒΓΔΕΖΗΘ un cube donné, dans lequel il faut décrire une pyramide. Joignons ΑΓ, ΓΕ, ΕΘ, ΘΓ. Il est évident que les triangles ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ sont équilatéraux, car leurs côtés sont les diagonales des carrés; le solide ΑΕΓΘ est donc une pyramide, et elle est décrite dans le cube (déf. 26. 11). Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Εἰς τὴν πυραμίδα ἰσόπλευραν ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἐστω ἡ πυραμὶς ἰσόπλευρα ἡ $ΑΒΓΔ$, ἧς κορυφὴ τὸ $Δ$ σημεῖον, εἰς ἣν δεῖ ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. Τεμήσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΒΓ$, $ΒΔ$, $ΓΔ$ δίχα κατὰ τοῖς $Ε$, $Ζ$, $Κ$, $Η$, $Θ$, $Λ$ σημείοις, καὶ πεζεύθωσαν αἱ $ΘΚ$, $ΘΛ$, $ΖΗ$, $ΖΕ$, καὶ αἱ λοιπαί.



[Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΑΒ$ διπλῆ ἔστιν ἑκατέρας τῶν $ΘΚ$, $ΗΖ$, καὶ αὐταῖς παράλληλος, ἴση ἄρα ἔστιν ἡ $ΘΚ$ τῇ $ΗΖ$ καὶ παράλληλος. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ $ΔΓ$ διπλῆ ἔστιν ἑκατέρας τῶν $ΘΗ$, $ΚΖ$, καὶ αὐταῖς παράλληλος, ἴση ἄρα ἔστιν ἡ $ΘΗ$ τῇ $ΚΖ$, καὶ παράλληλος. Ἰση δὲ ἔστιν ἡ $ΔΓ$ τῇ

In pyramide æquilaterâ octaedrum describere.

Sit pyramis æquilatera $ΑΒΓΔ$, cujus vertex punctum $Δ$, in quâ oportet octaedrum describere. Secentur ipsæ $ΑΒ$, $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΒΓ$, $ΒΔ$, $ΓΔ$ bifariam in punctis $Ε$, $Ζ$, $Κ$, $Η$, $Θ$, $Λ$, et jungantur ipsæ $ΘΚ$, $ΘΛ$, $ΖΗ$, $ΖΕ$, et reliquæ.

[Quoniam enim ipsa $ΑΒ$ dupla est utriusque ipsarum $ΘΚ$, $ΗΖ$, et ipsis parallela, æqualis igitur est $ΘΚ$ ipsi $ΗΖ$, et parallela. Rursus, quoniam $ΔΓ$ dupla est utriusque ipsarum $ΘΗ$, $ΚΖ$, et ipsis parallela, æqualis igitur est $ΘΗ$ ipsi $ΚΖ$, et parallela; æqualis autem est $ΔΓ$ ipsi $ΑΒ$; æquales

PROPOSITION II.

Décrire un octaèdre dans une pyramide équilatérale.

Soit $ΑΒΓΔ$ une pyramide équilatérale, ayant pour le sommet le point $Δ$; il faut décrire un octaèdre dans cette pyramide. Coupons en deux parties les droites $ΑΒ$, $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΒΓ$, $ΒΔ$, $ΓΔ$ aux points $Ε$, $Ζ$, $Κ$, $Η$, $Θ$, $Λ$, et joignons $ΘΚ$, $ΘΛ$, $ΖΗ$, $ΖΕ$, etc.

[Puisque la droite $ΑΒ$ est double de chacune des droites $ΘΚ$, $ΗΖ$, et qu'elle leur est parallèle, la droite $ΘΚ$ sera égale et parallèle à $ΗΖ$. De plus, puisque $ΔΓ$ est double de chacune des droites $ΘΗ$, $ΚΖ$, et qu'elle leur est parallèle, la droite $ΘΗ$

ΑΒ ἴσαι ἄρα εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ ΚΑ, ΕΗ, ΛΘ, ΖΕ, ΚΕ, ΛΗ, ΑΖ, ΘΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἡ δὲ ΚΘ τῇ ΚΑ ἐστὶν ἴση* ὥστε καὶ αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΚΑ, ΕΗ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΘΚ, ΔΚΖ, ΑΖΗ, ΛΗΘ, ΕΘΚ, ΕΚΖ, ΕΖΗ, ΕΗΘ τρίγωνα. Οκταέδρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΘΚΖΗΕ, καὶ ἐγγράφεται εἰς τὴν δοθεῖσαν ἰσόπλευραν. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι*.]

igitur sunt inter se ipsæ ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ. Propter eadem utique et ipsæ ΚΑ, ΕΗ, ΛΘ, ΖΕ, ΚΕ, ΛΗ, ΑΖ, ΘΕ æquales inter se sunt. Ipsa autem ΚΘ ipsi ΚΑ est æqualis; quare et ipsæ ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΚΑ, ΕΗ, et reliquæ æquales inter se sunt; æquilatera igitur sunt ipsa ΛΘΚ, ΔΚΖ, ΑΖΗ, ΛΗΘ, ΕΘΚ, ΕΚΖ, ΕΖΗ, ΕΗΘ triangula. Octaedrum igitur est ΛΘΚΖΗΕ, et descriptum est in pyramide æquilaterâ. Quod oportebat facere*.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ΄.

PROPOSITIO III.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον οκταέδρον ἐγγράψαι.

In dato cubo octaedrum describere.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα ἐφιστάτων τετραγώνων τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΑΜ, ΜΝ, ΝΚ· λέγω ὅτι τὸ ΚΑΜΝ τετραγώνον ἐστίν· ἠχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ταῖς ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ παράλληλαι αἱ ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. Ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστὶν ἡ ΠΟ τῆς

Sit datus cubus ΑΒΓΔΕΖΗΘ, et sumantur centra insistentium quadratorum Κ, Λ, Μ, Ν, et jungantur ΚΑ, ΑΜ, ΜΝ, ΝΚ; dico ipsum ΚΑΜΝ quadratum esse. Ducantur enim per puncta Κ, Λ, Μ, Ν ipsis ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ parallelæ ΗΘ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. Quoniam igitur

sera égal et parallèle à ΚΖ. Mais ΔΓ est égal à ΑΒ; les droites ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ sont donc égales entre elles. Par la même raison, les droites ΚΑ, ΕΗ, ΛΘ, ΖΕ, ΚΕ, ΛΗ, ΑΖ, ΘΕ sont égales entre elles. Mais ΚΘ est égal à ΚΑ; les droites ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΚΑ, ΕΗ, etc. sont donc égales entre elles; les triangles ΛΘΚ, ΔΚΖ, ΑΖΗ, ΛΗΘ, ΕΘΚ, ΕΚΖ, ΕΖΗ, ΕΗΘ sont donc équilatéraux; le solide ΛΘΚΖΗΕ est donc un octaèdre, et il est décrit dans une pyramide équilatérale. Ce qu'il fallait faire*.]

PROPOSITION III.

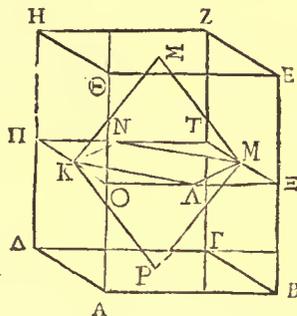
Dans un cube donné décrire un octaèdre.

Soit ΑΒΓΔΕΖΗΘ le cube donné, prenons les centres Κ, Λ, Μ, Ν des carrés latéraux, et joignons ΚΑ, ΑΜ, ΜΝ, ΝΚ; je dis que ΚΑΜΝ est un carré. Car par les points Κ, Λ, Μ, Ν, menons les droites ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ parallèles aux droites ΔΑ,

* Demonstratio hujus propositionis quæ eadem est in omnibus manuscriptis et in editionibus Basilicæ et Oxoniæ, ex toto est corruptissima, et propositum nullo modo attingit. Hanc demonstrationem ex integro restitui.

OK, ἢ δὲ ΞO τῆς $\text{O}\Lambda$, ἴση ἢ ΠO τῆ ΞO . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ OK τῆ $\text{O}\Lambda$. τὸ ἄρα ἀπὸ $\text{K}\Lambda$ διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $\text{O}\Lambda$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ

dupla est ΠO ipsius OK, ipsa autem ΞO ipsius $\text{O}\Lambda$, æqualis vero ΠO ipsi ΞO ; propter hæc utique OK ipsi $\text{O}\Lambda$; ipsum igitur ex $\text{K}\Lambda$ duplum est ipsius ex $\text{O}\Lambda$. Propter eadem utique et ipsum ex $\text{M}\Lambda$



καὶ τὸ ἀπὸ $\text{M}\Lambda$ διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $\Lambda\Xi$. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ $\text{K}\Lambda$ τῷ ἀπὸ ΛM , καὶ ἢ $\text{K}\Lambda$ τῆ $\text{M}\Lambda$. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ KAMN . καὶ φανερόν ἐστι καὶ ὀρθογώνιον. Εἰλήφθω τῶν $\text{B}\Delta$, EH δύο τετράγωνων τὰ κέντρα τὰ P , Σ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ PK , PA , PM , PN , ΣK , $\Sigma\Lambda$, ΣM , ΣN . Καὶ φανερόν ἐστι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ποιούντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα. τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ ἀποδείξομεν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

duplum est ipsius ex $\Lambda\Xi$; æquale igitur ipsum ex $\text{K}\Lambda$ ipsi ex ΛM , et $\text{K}\Lambda$ ipsi $\text{M}\Lambda$; æquilaterum igitur est KAMN ; et evidens est et esse rectangulum. Sumantur duorum quadratorum $\text{B}\Delta$, EH centra P , Σ , et jungantur ipsæ PK , PA , PM , PN , ΣK , $\Sigma\Lambda$, ΣM , ΣN . Et evidens est æquilatera esse efficiencia octaedrum triangula; eadem enim ratione hæc demonstrabimus. Quod oportebat facere.

AB , BG , GD . Puisque ΠO est double de OK , que ΞO est double de $\text{O}\Lambda$, et que ΠO est égal à ΞO , la droite OK sera égale à $\text{O}\Lambda$; le carré de $\text{K}\Lambda$ est donc double du carré de $\text{O}\Lambda$ (47. 1). Le carré de $\text{M}\Lambda$ sera double du carré de $\Lambda\Xi$, par la même raison; le carré de $\text{K}\Lambda$ est donc égal au carré de ΛM , et $\text{K}\Lambda$ égal à $\text{M}\Lambda$; le quadrilatère KAMN est donc équilatéral; et il est évident qu'il est rectangulaire. Prenons les centres P , Σ des deux carrés $\text{B}\Delta$, EH , et joignons PK , PA , PM , PN , ΣK , $\Sigma\Lambda$, ΣM , ΣN . Il est évident que les triangles qui forment l'octaèdre sont équilatéraux, car nous démontrerions cela par la même raison. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ $ABΓ$, $ΑΓΔ$, $ΑΔΕ$ $ΑΕΒ$, τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ $Θ$, $Λ$, $Κ$, $Η$, καὶ ἐπέξυχθωσαν αἱ $ΛΘ$, $ΑΚ$, $ΚΗ$, $ΗΘ$ · λέγω ὅτι τὸ $ΘΑΚΗ$ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν διὰ τῶν $Θ$, $Λ$, $Κ$, $Η$, ταῖς $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΒ$ παράλληλοι αἱ $ΜΝ$, $ΝΞ$, $ΞΟ$, $ΟΜ$. Ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον, ἢ ἀπὸ τοῦ $Α$ ἐπὶ τὸ $Θ$ κέντρον τοῦ περὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον κύκλου δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῷ $Α$ τῷ τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου· ἴση ἄρα ἢ $ΝΘ$ τῇ $ΟΜ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἴση ἐστὶ καὶ ἢ $ΜΗ$ τῇ $ΗΟ$. Ἐπειδὴ δὲ ἢ $ΜΝ$ τῇ $ΜΟ$, καὶ ἢ $ΜΟ$ τῇ $ΟΞ$ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἢ $ΝΘ$ τῇ $ΜΗ$, καὶ ἢ $ΟΜ$ τῇ $ΗΟ$ καὶ ἢ $ΜΗ$ τῇ $ΟΚ$. Αἱ δὲ ὑπὸ $ΟΜΗ$, καὶ $ΗΟΚ$ ὀρθαί· ἐξ οὗ φανερόν ὅτι ἢ $ΟΗ$ ἴση ἐστὶ τῇ $ΗΚ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ αἱ λοιπαί. Ἐπεὶ οὖν παράλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ΘΑΚΗ$, ἐν ἐνὶ ἴσῳ

In dato octaedro cubum describere.

Sumantur circularum circa $ΑΒΓ$, $ΑΓΔ$, $ΑΔΕ$, $ΑΕΒ$ triangula centra $Θ$, $Λ$, $Κ$, $Η$, et jungantur ipsæ $ΛΘ$, $ΑΚ$, $ΚΗ$, $ΗΘ$; dico $ΘΑΚΗ$ quadratum esse. Ducantur per puncta $Θ$, $Λ$, $Κ$, $Η$ ipsis $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΒ$ parallelæ $ΜΝ$, $ΝΞ$, $ΞΟ$, $ΟΜ$. Quoniam igitur æquilaterum est $ΑΒΓ$ triangulum, recta a puncto $Α$ ad centrum $Θ$ circuli circa $ΑΒΓ$ triangulum bifariam secant angulum ad $Α$ trianguli $ΑΒΓ$; æqualis igitur $ΝΘ$ ipsi $ΟΜ$. Propter eadem utique æqualis est et $ΜΗ$ ipsi $ΗΟ$. Quoniam autem $ΜΝ$ ipsi $ΜΟ$, et $ΜΟ$ ipsi $ΟΞ$ est æqualis; æqualis igitur et $ΝΘ$ ipsi $ΜΗ$, et $ΟΜ$ ipsi $ΗΟ$, et $ΜΗ$ ipsi $ΟΚ$. Anguli autem $ΟΜΗ$ et $ΗΟΚ$ recti; ex quo evidens est $ΟΗ$ æqualem esse ipsi $ΗΚ$. Propter eadem utique et reliquæ. Quoniam igitur parallelogramum est $ΘΑΚΗ$, in uno est plano. Et quoniam dimi-

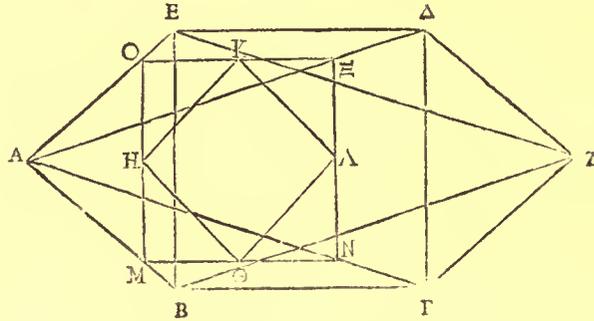
PROPOSITION IV.

Décrire un cube dans un octaèdre donné.

Prenons les centres $Θ$, $Λ$, $Κ$, $Η$, des cercles décrits autour des triangles $ΑΒΓ$, $ΑΓΔ$, $ΑΔΕ$, $ΑΕΒ$, et joignons $ΛΘ$, $ΑΚ$, $ΚΗ$, $ΗΘ$; je dis que le quadrilatère $ΘΑΚΗ$ est un carré. Par les points $Θ$, $Λ$, $Κ$, $Η$, menons les droites $ΜΝ$, $ΝΞ$, $ΞΟ$, $ΟΜ$ parallèles aux droites $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΒ$. Puisque le triangle $ΑΒΓ$ est équilatéral, la droite menée du point $Α$ au centre $Θ$ du cercle décrit autour du triangle $ΑΒΓ$ coupera en deux parties égales l'angle en $Α$ du triangle $ΑΒΓ$; la droite $ΝΘ$ est donc égale à $ΟΜ$ (4. 1). La droite $ΜΗ$ sera égale à $ΗΟ$, par la même raison. Et puisque $ΜΝ$ est égal à $ΜΟ$, et que $ΜΟ$ est égal à $ΟΞ$, la droite $ΝΘ$ sera égale à $ΜΗ$, la droite $ΟΜ$ égale à $ΗΟ$, et la droite $ΜΗ$ égale à $ΟΚ$. Mais les angles $ΟΜΗ$, $ΗΟΚ$ sont droits; il est donc évident que la droite $ΟΗ$ est égale à $ΗΚ$. Les droites restantes seront égales par la même raison. Mais le quadrilatère $ΘΑΚΗ$ est un parallélogramme; ce qua-

ἐπιπέδῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡμισὺ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΜΗΘ, ΟΗΚ ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΘΗΚ ὀρθὴ ἐστίν. Ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαὶ τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΗ. Δυνατὸν δὲ τὰ ἐξ ἀρχῆς

dium recti est uterque ipsorum ΜΗΘ, ΟΗΚ, reliquus igitur ΘΗΚ rectus est. Similiter et reliqui; quadratum igitur est ΘΛΚΗ. Possibile



λαμβάνοντα τὰ Θ, Λ, Κ, Η κέντρα, καὶ παραλλήλους ἀγαγόντα τὰς ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΜ ἐπιζεύξαι τὰς ΘΛ, ΛΚ, ΚΗ, ΗΘ, καὶ εἶπεῖν τὸ ΘΛΚΗ τετράγωνον. Ἐὰν δὲ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα καὶ ἐπιζεύξωμεν καὶ τὰ αὐτὰ, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα, καὶ ἔξομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγραμμένον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

autem est a principio, si sumantur centra Θ, Λ, Κ, Η, et parallelæ ducantur ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΜ, jungere ΘΛ, ΛΚ, ΚΗ, ΗΘ, et dicere ΘΛΚΗ quadratum esse. Si igitur sumamus et reliquorum triangulorum centra, et jungamus et ipsa, ostendemus reliqua quadrata esse, et habebimus in dato octaedro cubum descriptum. Quod oportebat facere.

drilatère est donc dans un seul plan (7. 11). Mais chacun des triangles ΜΗΘ, ΟΗΚ est la moitié d'un droit; l'angle restant ΘΗΚ est donc droit; il en sera de même des angles restants; le quadrilatère ΘΛΚΗ est donc un carré. Mais si l'on prend d'abord les centres Θ, Λ, Κ, Η, si l'on mène les parallèles ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΜ, si l'on joint ΘΛ, ΛΚ, ΚΗ, ΗΘ, il est possible de dire que le quadrilatère ΘΛΚΗ est un carré. Si nous prenons aussi les centres des triangles restants, et si nous les joignons par des droites, nous démontrerons que les quadrilatères restants sont aussi des carrés, et nous aurons décrit un cube dans l'octaèdre donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ε΄.

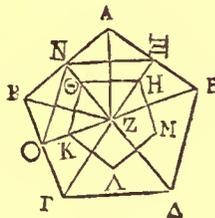
PROPOSITIO V.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσαέδρον δωδεκάεδρον ἰγγραψαι.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

Ἐκείσθω πεντάγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ ΑΖΕ, ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΓΖΔ, ΔΖΕ τρίγωνα, τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ πάλιν ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ξ, Ν, Ο· δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ ΕΑ, ΑΒ, ΒΓ, τοῖς Ξ, Ν, Ο σημείοις, καὶ ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΟ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΘΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΚ.

Exponatur pentagonum icosacдри ΑΒΓΔΕ, et Η, Θ, Κ, Λ, Μ centra circulorum circa ΑΖΕ, ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΓΖΔ, ΔΖΕ triangula, et jungantur ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ; et rursus junctæ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ producantur ad Ξ, Ν, Ο puncta; bifariam utique sceabuntur ipsæ ΕΑ, ΑΒ, ΒΓ in punctis Ξ, Ν, Ο, et ut ΝΞ ad ΝΟ ita ΗΘ ad ΘΚ; æqualis igitur et ΗΘ ipsi ΘΚ. Similiter autem et reliqua



Ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ΗΘΚΑΜ πενταγώνου πλευραὶ ἴσαι διχθήσονται. Λέγω ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ ΝΞ, ΝΟ παρά

pentagoni ΗΘΚΑΜ latera æqualia ostendentur. Dico et æquiangulum. Quoniam enim duæ ΝΞ, ΝΟ parallelæ duabus ΗΘ, ΘΚ æqua-

PROPOSITION V.

Décrire un dodécaèdre dans un icosàèdre donné.

Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone de l'icosàèdre, que les points Η, Θ, Κ, Λ, Μ soient les centres des cercles autour des triangles ΑΖΕ, ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΓΖΔ, ΔΖΕ, et joignons ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ; et de plus ayant joint ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, prolongeons ces droites vers les points Ξ, Ν, Ο; les droites ΕΑ, ΑΒ, ΒΓ seront coupées en deux parties égales aux points Ξ, Ν, Ο, et ΝΞ sera à ΝΟ comme ΗΘ est à ΘΚ (4, 7); la droite ΗΘ est donc égale à ΘΚ. Nous démontrerons semblablement que les côtés restants du pentagone ΗΘΚΑΜ sont égaux entre eux; je dis aussi que ce pentagone est équiangle. Car puisque les deux droites ΝΞ, ΝΟ parallèles aux deux droites ΗΘ, ΘΚ com-

δύο τὰς ΗΘ, ΘΚ ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερά. Νενοήσθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ πεντάγωνου ἐπίπεδον κάθετος ἡγμένη, ἣτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. Εἰάν δὴ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἢ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος, ἐπιζεύξωμεν, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερόν ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ καθετῶ, καὶ ἢ ἀπὸ τοῦ Θ παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ Ζ καθετῶ. Πάλιν, εἰάν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τῶν Ξ, Ο ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλει ἢ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὰ Η, Κ, φανερόν ὅτι αἱ ἐπιζευγυμέναι ὀρθὰς περιέξουσιν μετὰ τῆς αὐτῆς. Εἰς οὗ φανερόν ὅτι ἐν εἰς ἐπίπεδον ἐστὶ τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον.

les angles comprennent, et reliqua manifesta. Intelligatur a puncto Z ad ΑΒΓΔΕΖ pentagoni planum perpendicularis ducta, quæ cadet in centrum circuli circa pentagonum. Si igitur rectam a puncto N ad punctum in quod cadit perpendicularis a puncto Z, jungamus, et per punctum Θ parallelam ipsi ducamus, evidens est illam occurrere perpendiculari a puncto Z, et parallelam a puncto Θ rectum angulum comprehensuram esse cum perpendiculari a puncto Z. Rursus, si rectas ducamus a punctis Ξ, Ο ad centrum circuli circa ΑΒΓΔΕ pentagonum, et a puncto, in quo occurrit recta a puncto Θ ipsi a puncto Z ad Η, Κ, manifestum est junctas rectos comprehensuras esse cum ipsâ. Ex hoc manifestum est in uno plano esse ΗΘΚΑΜ pentagonum.

prènent des angles égaux, le reste sera évident. Concevons une perpendiculaire menée du point Z au plan du pentagone ΑΒΓΔΕΖ; cette perpendiculaire tombera au centre du cercle décrit autour du pentagone. Si du point N nous menons une droite au point où tombe la perpendiculaire menée du point Z, et si par le point Θ nous lui menons une parallèle, il est évident que cette parallèle rencontrera la perpendiculaire menée par le point Z, et que la perpendiculaire menée par le point Θ comprendra un angle droit avec la perpendiculaire menée par le point Z. De plus, si des points Ξ, Ο, nous menons des droites au centre du cercle décrit autour du pentagone ΑΒΓΔΕ, et si du point où la droite menée par le point Θ, rencontre la droite menée par le point Z, nous menons des droites aux points Η, Κ, il est évident, que ces droites comprendront des angles droits avec la perpendiculaire menée par le point Z. D'après cela il est évident que le pentagone ΗΘΚΑΜ est dans un seul plan.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

PROPOSITIO VI.

Τῶν πέντε σωμαίων τὰς πλευρὰς καὶ γωνίας ἐξευρίην.

Δει εἶδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἐάν τις ἐρεῖ ἡμῖν πόσας πλευρὰς ἔχη τὸ εἰκοσαέδρον, φήσομεν οὕτως. Φανερὸν ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται τὸ εἰκοσαέδρον, καὶ ὅτι ἕκαστον τρίγωνον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται· δεῖ οὖν ἡμᾶς πολλαπλασιάσας τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, γίνονται δὲ ἐξήκοντα, ὧν ἡμισυ γίνονται τριάκοντα. Ομοίως δὲ καὶ ἐπὶ δωδεκάεδρου. Ἐπεὶ δὲ δώδεκα πεντάγωνα περιέχουσι τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πεντάγωνον ἔχει πέντε εὐθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, καὶ γίνονται ἐξήκοντα· πάλιν τὸ ἡμισυ γίνονται τριάκοντα. Διὰ τὸδε ἡμισυ ποιοῦμεν, ἐπειδὴ ἐκάστη πλευρὰ, καὶ ἢ τε τῆ τρίγωνον ἢ πεντάγωνον ἢ τετράγωνον, ὡς ἐπὶ κύβου, ἐκ δευτέρου λαμβάνεται. Ομοίως δὲ τῆ αὐτῆ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου καὶ ἐπὶ τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ ἑκταίδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας εὐρήσεις τὰς πλευρὰς.

Quinque corporum latera et angulos invenire.

Oportet nos scire si quis interroget nos, quot latera habeat icosaedrum, nos sic responduros. Evidens est sub viginti triangulis contineri icosaedrum, et utrumque triangulorum sub tribus rectis contineri. Oportet igitur nos multiplicare viginti triangula per latera trianguli, fiunt autem sexaginta, quorum dimidium fit triginta. Similiter autem et in dodecaedro. Quoniam igitur duodecim pentagona comprehendunt dodecaedrum, rursus autem utrumque pentagonum habet quinque rectas, conficiemus duodecies quinque, et fiunt sexaginta; rursus dimidium fit triginta. Propter hoc dimidium facimus, quia utrumque latus, sive sit triangulum, vel pentagonum, vel quadratum, ut in cubo bis sumitur. Similiter autem eadem methodo et in cubo, et in pyramide, et in octaedro faciens invenies latera.

PROPOSITION VI.

Trouver les côtés et les angles des cinq corps.

Si quelqu'un nous demande quel est le nombre des côtés de l'icosaèdre? nous répondrons ainsi. Puisque l'icosaèdre est compris par vingt triangles, et que chaque triangle est compris par trois droites, il est évident qu'il faut multiplier vingt triangles par les côtés d'un triangle; le produit sera soixante, et la moitié trente. Nous ferons la même chose pour le dodécaèdre. Car puisque douze pentagones comprennent le dodécaèdre, et que chaque pentagone a cinq droites, nous multiplierons douze par cinq, le produit sera soixante, et la moitié trente. Nous prenons la moitié, parce que chaque côté est pris deux fois, soit pour le triangle, ou pour le pentagone, ou pour le carré, comme dans le cube. Par la même méthode, on trouvera semblablement les côtés de l'octaèdre, de la pyramide, et du cube.

Εἰ δὲ βουλευθῆις πάλιν ἐκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὐρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μέριξε παρά τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ· εἶεν, ἐπειδὴ τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι ἑτρίγωνα, μέριξε παρά τὰς ἑ καὶ γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἐπεὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τρία πεντάγωνα περιέχουσι τὴν γωνίαν, μέριξε παρά τὰ τρία, καὶ ἕξεις κ' γωνίας οὐσάς τοῦ δωδεκαέδρου. Ομοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὐρήσεις τὰς γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Τῶν ἐπιπέδων τῶν πέντε στερεῶν ἕκαστον περιεχόντων κλίσιν ἔξευρεῖν.

Ἐζητήθη πῶς ἐφ' ἐκάστου τῶν πέντε στερεῶν σχημάτων, ἐνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιοῦν δεθέντος, εὐρίσκεται καὶ ἡ κλίσις, ἐν ἣ κέλνεται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἑπίπεδα ἕκαστον τῶν σχημάτων. Ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας δι-

Si autem velis rursus singularum quinque figurarum invenire angulos, rursus eadem faciens, divide per plana comprehendentia unum angulum solidi; ut, quoniam icosaedri angulum comprehendunt quinque triangula, divide per quinque, fient duodecim anguli icosaedri. Quoniam autem dodecaedri tria pentagona comprehendunt angulum, divide per tria, et habebis viginti angulos existentes dodecaedri. Similiter autem et in reliquis invenies angulos.

PROPOSITIO VII.

Planorum quæ quinque solidorum unumquodque continent inclinationem invenire.

Quæsitum est quomodo in unâquâque quinque solidarum figurarum, uno plano comprehendentium dato, inveniatur et inclinatio, in quam inclinantur inter se comprehendentia plana unamquamque figurarum. Inventio autem, ut Isidorus

Si l'on veut trouver les angles de chacune des cinq figures, on fera la même chose; on divisera par le nombre des plans qui comprènent un angle du solide; ainsi l'angle de l'icosaèdre étant compris par cinq triangles, on divisera par cinq, et l'on aura douze angles pour l'icosaèdre. Et puisque trois pentagones comprènent l'angle du dodécaèdre, on divisera par trois, et l'on aura vingt angles pour le dodécaèdre. On trouvera semblablement les angles des autres figures.

PROPOSITION VII.

Trouver les inclinaisons des plans qui comprènent les cinq solides.

On demande comment dans chacune des cinq figures solides, un des plans qui la comprènent étant donné, on peut trouver l'inclinaison qu'ont entre eux les plans qui comprènent chacune de ces cinq figures. Notre célèbre maître Isidore m'avait enseigné que cette inclinaison se trouvait ainsi. Pour le cube, il est

δάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. Ὅτι μὲν ἐπὶ τοῦ κύβου κατ' ἑρῆν γωνίαν τέμνουσι τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἄλληλα, φαειρόν. Ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος, ἐκτεθέντος ἐνὸς τριγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κερυφῆς ἐπὶ τὴν βᾶσιν ἀρομένη καθέτω, περιφέρειαι γραφεῖσαι τεμνέτωσαν ἄλληλας· καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζυγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων. Ἐπὶ δὲ τοῦ ἑκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δὲ ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτω, γεγραφθῶσαν περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζυγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. Ἐπὶ δὲ τοῦ ἱκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπεζεύχῃ ἢ ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτω γραφειῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς

noster docuit magnus magister, habet hunc modum. In cubo quidem ad rectum angulum sese secare comprehendentia ipsum plana manifestum est. In pyramide vero, exposito uno triangulo, centris terminis unius lateris, intervallo autem rectâ a vertice ad basim ductâ perpendiculari, circumferentiâ descriptâ sese mutuo secant; et a sectione ad centra junctæ rectæ comprehendunt inclinationem comprehendentium pyramidem planorum. In octaedro autem ex latere trianguli descripto quadrato, centris terminis diametri, intervallo autem similiter trianguli perpendiculari describantur circumferentiæ, et rursus rectæ a sectione communi ad centra junctæ comprehendunt reliquum ex duobus rectis inquisitæ inclinationis. In icosaedro autem a latere trianguli descripto pentagono, jungatur recta duobus lateribus subtensa, et centris terminis ipsius, intervallo autem trianguli perpendiculari descriptis cir-

évident que les plans qui le comprennent se coupent à angles droits. Pour la pyramide, un triangle étant exposé, des extrémités d'un côté comme centres, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire menée du sommet à la base, décrivez des arcs de cercle; ces arcs se couperont; et les droites menées du point de section aux centres, comprendront l'inclinaison des plans qui contiennent la pyramide. Dans l'octaèdre, ayant décrit un quarré avec le côté du triangle, des extrémités de la diagonale comme centres, et d'un intervalle semblablement égal à la perpendiculaire du triangle, décrivez des arcs de cercle; les droites menées du point de la commune section aux centres comprendront un angle dont le supplément à deux droits sera l'inclinaison cherchée. Dans l'icosaedre, décrivez un pentagone avec un des côtés du triangle, et menez une diagonale, de deux des extrémités de cette diagonale comme centres, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire du triangle, décrivez des arcs de cercles; les droites menées du

ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ἑρθὰς τῆς κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκτεθέντος ἐνὸς πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένη καθέτω ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφωσαν περιφέρειαι, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ἑρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου.

Οὕτως μὲν οὖν ὁ εἰρημένος εὐκλείεστατος ἀνήρ τὸν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδείδωκε λόγον, σαφῶς ἐφ' ἑκάστου φαινομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως· ἐπὶ δὲ τὸ πρόδηλον γενέσθαι τὴν ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικὴν θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνίσω· καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος.

Νενόσθω πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλευρῶν

circumferentiis, rectæ a communi sectione ad centra junctæ comprehendent reliquum, similiter ex duobus rectis inclinationis icosaedri planorum. In dodecaedro vero, exposito uno pentagono, junctâ similiter rectâ duo latera subtendente, centris terminis ejus, intervallo autem ductâ perpendiculari a bipartitâ sectione ipsius ad parallelum ipsi latus pentagoni describantur circumferentiæ, et rectæ a puncto in quo conveniunt inter se ad centra junctæ similiter comprehendent reliquum ex duobus rectis inclinationis planorum dodecaedri.

Ita quidem dictus clarissimus vir de dictis habuit sermonem, manifestâ uniuscujusque visâ sibi demonstratione; ut autem perspicue fiat in eis demonstrativa theoria sermonem in unoquoque explicabo; et primum in pyramide.

Intelligatur pyramis $AB\Gamma\Delta$ quatuor æquila-

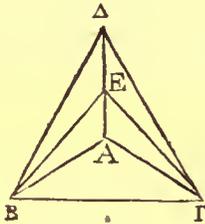
point de la commune section aux centres, comprendront un angle dont le supplément à deux droits sera l'inclinaison des plans de l'icosaedre. Dans le dodécaèdre, un pentagone étant exposé, menez semblablement une droite qui soit soutendante de deux côtés, des extrémités de cette droite comme centres et d'un intervalle égal à la perpendiculaire menée du milieu de la soutendante au côté parallèle, décrivez deux arcs de cercle, les droites menées du point où les arcs se coupent aux centres, comprendront semblablement un angle dont le supplément à deux droits, sera l'inclinaison des plans du dodécaèdre.

Tel est le discours que cet homme illustre tenait sur cet objet, car la démonstration de tout cela lui paraissait évidente. Mais comme la chose deviendra plus claire à l'aide de démonstrations, je vais expliquer le discours d'Isidore dans toutes ses parties; et je commence par la pyramide.

Concevons une pyramide $AB\Gamma\Delta$ comprise par quatre triangles équilatéraux;

τριγώνων περιεχομένη ἢ $AB\Gamma\Delta$, τοῦ $AB\Gamma$ βάσειως νοουμένου, κορυφῆς δὲ τοῦ Δ καὶ τμηθείσης τῆς $A\Delta$ πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ E , ἐπεζεύχθωσαν αἱ BE , EG . Καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ $A\Delta B$, $A\Delta\Gamma$ τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἢ $A\Delta$ αἱ BE , EG ἄρα κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὴν $A\Delta$. Δείξω ὅτι ἢ ὑπὸ BEG γωνία ὀξεῖά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἢ AG τῆς AE , τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AG τοῦ ἀπὸ τῆς AE . Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς AG ἴσον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EG , ὧν τὸ ἀπὸ AG πρὸς τὸ ἀπὸ GE λόγον ἔχει ἐν δ' πρὸς γ' , καὶ ἐστὶν ἴση ἢ GE τῇ EB ; τὸ ἄρα ἀπὸ $B\Gamma$ ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ

teris triangulis contenta, basi $AB\Gamma$ intellectâ, vertice vero Δ ; et secto $A\Delta$ latere bifariam in E , jungantur ipsæ BE , EG . Et quoniam æquilatera sunt $A\Delta B$, $A\Delta\Gamma$ triangula, et bifariam secatur $A\Delta$; ipsæ BE , EG igitur perpendiculares sunt ad $A\Delta$. Dico BEG angulum acutum esse. Quoniam enim dupla est AG ipsius AE , quadruplum est ipsum ex AG ipsius ex AE . Sed ipsum ex AG æquale est ipsis AE , EG , quorum ipsum ex AG ad ipsum ex GE rationem habet quam 4 ad 3, et est æqualis GE ipsi EB ; ipsum igitur ex $B\Gamma$ minus est



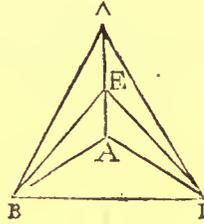
BE , EG ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ BEG . Ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων τῶν $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ κοινὴ τομὴ ἐστὶν ἢ $A\Delta$, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ πρὸς ὀρθὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμένας εἰσὶν αἱ BE , EG , καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν· ἢ ὑπὸ BEG ἄρα γων-

ipsis ex BE , EG ; acutus igitur est angulus BEG . Quoniam igitur duorum planorum $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ communis sectio est $A\Delta$, et communi sectioni ad rectos in utroque planorum ductæ sunt rectæ BE , EG , et acutum angulum comprehen-

que cette pyramide ait pour base $AB\Gamma$, et pour sommet le point Δ ; coupons le côté $A\Delta$ en deux parties égales au point E , et joignons BE , EG . Puisque les triangles $A\Delta B$, $A\Delta\Gamma$ sont équilatéraux, et que $A\Delta$ est coupé en deux parties égales, les droites BE , EG seront perpendiculaires à $A\Delta$ (8. 1). Je dis que l'angle BEG est aigu. Car puisque AG est double de AE , le quarré de AG sera quadruple du quarré de AE . Mais le quarré de AG est égal à la somme des quarrés des droites AE , EG , et le quarré de AG à avec le quarré de GE , la raison de quatre à trois, et GE est égal à EB ; le quarré de $B\Gamma$ est donc plus petit que la somme des quarrés des droites BE , EG ; l'angle BEG est donc aigu (13. 2). Et puisque la droite $A\Delta$ est la commune section des plans $AB\Delta$ $A\Delta\Gamma$, que les droites BE , EG sont menées perpendiculairement à la commune section dans l'un et l'autre plan, et qu'elles

ία ἡ κλίσις ἔσται τῶν ἐπιπέδων· καὶ ἔστι δεδο-
μένη, δίδεται γὰρ ἡ ΒΓ πλευρὰ οὔσα τοῦ τριγώ-
νου, καὶ ἑκάτερα τῶν ΗΒ, ΕΓ κάθετος οὔσα
τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· κέντροις τεῖναι τοῖς
Β, Γ, τουτέστι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς,
διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γρα-
φόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας ὡς κατὰ

dunt; ipse BEΓ igitur angulus inclinatio erit pla-
norum; et est ipsa data, data est enim ipsa ΒΓ
latus existens trianguli, et utraque ipsarum ΗΒ,
ΕΓ, perpendicularis existens æquilateri trianguli;
centris igitur Β, Γ, hoc est terminis unius lateris,
intervallo autem trianguli perpendiculari, cir-
cumferentiæ descriptæ se secant ut in punc-



τὸ Ε σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ Β, Γ
ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν κλίσιν
τῶν ἐπιπέδων. Τοῦτο δὲ ἦν τὸ εἰρημένον. Καὶ
ἔτι μὲν κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ
τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμενοι κύκλοι τέμ-
νουσιν ἀλλήλους, φανερόν· ἑκάτερα γὰρ τῶν ΒΕ,
ΕΓ μείζων ἔστί τῆς ἡμισείας τῆς ΒΓ· οἱ δὲ κέν-
τροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς
ΒΓ, γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων·

to Ε), et ab eo ad puncta Β, Γ junctæ rectæ
comprehendent inclinationem planorum. Hoc
autem erat dictum. Et centris quidem Β, Γ, inter-
vallo autem trianguli perpendiculari, descriptos
circulos sese secare, manifestum est; utraque
enim ΒΕ, ΕΓ major est quam dimidia ipsius ΒΓ;
et centris Β, Γ, intervallo autem dimidiâ ipsius
ΒΓ, descripti circuli sese tangunt; si autem minor

comprènent un angle aigu, l'angle BEΓ sera l'inclinaison des plans (déf. 6. 11). Mais cette inclinaison est donnée, car la droite ΒΓ, côté du triangle, est donnée, ainsi que chacune des droites ΗΒ, ΕΓ, qui sont les perpendiculaires d'un triangle équilatéral; les arcs décrits des centres Β, Γ, c'est-à-dire des extrémités d'un côté, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire du triangle, se couperont donc en un point Ε, et les droites menées du point Ε aux points Β, Γ, comprendront par conséquent l'inclinaison des plans; et c'est là ce qu'on disait. Or il est évident que les arcs décrits des points Β, Γ, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire du triangle se couperont, car chacune des droites ΒΕ, ΕΓ est plus grande que la moitié de ΒΓ; et en effet, si les arcs de cercle étaient décrits des points Β, Γ, d'un intervalle

εἰ δὲ ἐλάττων ἢ, οὐδὲ ἐφάτονται, αὐδὲ τέμνουσιν·
εἰ δὲ μείζων, πάντως τέμνουσι· καὶ οὕτως ὁ περὶ
τῆς πυραμίδος σαφὴς τε καὶ ἀκόλουθος ταῖς
ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.

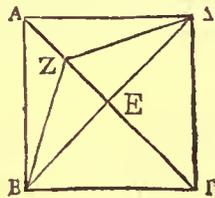
sit, neque sese tangunt, nec secant; si vero major
omnino secant; et ita de pyramide et manifestus
et congruens demonstrationibus apparet sermo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

PROPOSITIO VIII.

Νενόησθω πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ ΑΒΓΔ
πυραμὶς κερυφὴν ἔχουσα τὸ Ε, καὶ τὰ περιέ-
χοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσό-
πλευρα· ἔσται δὴ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς ἡμισυ ὀκ-
ταέδρου. Τετμήσθω μία πλευρὰ ἐνὸς τριγώνου
ἡ ΑΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ
ΒΖ, ΔΖ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΔΖ καὶ κάθετοι

Intelligatur rursus super quadratum ΑΒΓΔ
pyramis verticem habens Ε, et comprehendentia
ipsam præter basim triangula æquilatetra; erit
igitur ΑΒΓΔΕ pyramis dimidium octaedri. Secetur
unum latus ΑΕ unius trianguli bifariam in Ζ, et
jungantur ΒΖ, ΔΖ; æquales igitur sunt ipsæ ΒΖ,



ἐπὶ τὴν ΑΕ. Λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία ἀμβλεία
ἐστίν. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τετρά-
γωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, διαμέτρος δὲ ἡ ΒΔ, τὸ ἀπὸ

ΔΖ et perpendiculares ad ΑΕ. Dico ΒΖΔ angulum
obtusum esse. Jungatur enim ΒΔ. Et quoniam
quadratum est ΑΓ, diameter autem ΒΔ, ipsum ex

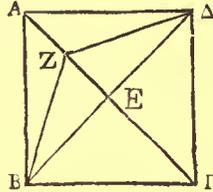
égal à la moitié de ΒΓ, ces arcs se toucheraient l'un l'autre; ils ne se toucheraient, ni ne se couperaient, si l'intervalle était plus petit, et ils se couperaient, s'il était plus grand. Ainsi ce que l'on disait touchant la pyramide, est évident, et conforme à la démonstration.

PROPOSITION VIII.

Concevons sur le quarré ΑΒΓΔ une pyramide ayant pour sommet le point Ε, cette pyramide, la base exceptée, étant comprise par des triangles équilatéraux; la pyramide ΑΒΓΔΕ sera la moitié d'un octaèdre. Coupons un côté ΑΕ d'un triangle en deux parties égales au point Ζ, et joignons ΒΖ, ΔΖ; les droites ΒΖ, ΔΖ seront égales et perpendiculaires à ΑΕ. Je dis que l'angle ΒΖΔ est obtus. Joignons ΒΔ. Puisque ΑΓ est un quarré, et que ΒΔ est sa diagonale,

$B\Delta$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔZ λόγον ἔχει, ὡς ἐν τῇ πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν δ' πρὸς γ'· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔZ λόγον ἔχει ὃν ὀκτὰ πρὸς τρία. Ἴση δὲ ἡ ΔZ τῇ ZB · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τῶν ἀπὸ τῶν BZ , $Z\Delta$ μείζον' ἐστίν· καὶ ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BZ\Delta$ γωνία.

$B\Delta$ duplum est ipsius ex ΔA , ipsum autem ex ΔA ad ipsum ex ΔZ rationem habet, ut antea dictum est, quam 4 ad 3; et ipsum ex $B\Delta$ igitur ad ipsum ex ΔZ rationem habet quam 8 ad 3. Æqualis autem ΔZ ipsi ZB ; ipsum igitur ex $B\Delta$ ipsi ex BZ , $Z\Delta$ majus est; et obtusus igitur est $BZ\Delta$ angulus.



Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν ABE , ADE τεμνόντων ἄλληλα κοινὴ τομὴ ἐστὶν ἡ AE , αἱ δὲ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι εἰσὶν αἱ BZ , $Z\Delta$ περιέχουσαι ἀμβλείαν· ἡ ὑπὸ $BZ\Delta$ ἄρα γωνία λείπουσά ἐστὶν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ABE , ADE ἐπιπέδων· εἰ ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ $BZ\Delta$, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. Ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου, καὶ μία πλευρὰ ἐστὶ τοῦ ὀκταέδρου ἡ $A\Delta$, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀνα-

Et quoniam duorum planorum ABE , ADE sese secantium communis sectio est AE , ad rectos autem ipsi in utroque planorum ductæ sunt BZ , $Z\Delta$ comprehendentes angulum obtusum; angulus igitur $BZ\Delta$ reliquus est ex duobus rectis inclinationis planorum ABE , ADE ; si igitur datus sit angulus $BZ\Delta$, data est et dicta inclinatio. Quoniam igitur datum est triangulum octaedri, et unum latus octaedri est $A\Delta$, et ex ipso quadratum $A\Gamma$ descriptum est; data est et

le carré de $B\Delta$ sera double du carré de ΔA , et le carré de ΔA aura avec le carré de ΔZ , la raison que quatre a avec trois, comme on l'a démontré plus haut; le carré de $B\Delta$ aura donc avec le carré de ΔZ , la raison que huit à avec trois. Mais ΔZ est égal à ZB ; le carré de $B\Delta$ est donc plus grand que la somme des carrés des droites BZ , $Z\Delta$; l'angle $BZ\Delta$ est donc obtus (12. 2). Et puisque les plans ABE , ADE se coupent, que AE est leur section commune, et que les droites BZ , $Z\Delta$, menées perpendiculairement à AE , dans l'un et l'autre plan, comprennent un angle obtus, le supplément de l'angle $BZ\Delta$ a deux droits, sera l'inclinaison des plans ABE , ADE (déf. 6. 11). Si donc l'angle $BZ\Delta$ est donné, l'inclinaison sera donnée. Et puisque le triangle de l'octaèdre est donné, que $A\Delta$ est un côté de l'octaèdre, que sur ce côté on a construit le carré $A\Gamma$, que

γέγραπται τὸ ΑΓ, δέδοται καὶ ἡ ΒΔ διάμετρος
 εὔσα τοῦ τετραγώνου. Ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ ΒΖ, ΖΔ
 κάθετοι τοῦ τριγώνου ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γω-
 νία δέδοται ἀναγραφέντος ἄρα τοῦ τετραγώνου
 ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ὡς τοῦ ΑΓ,
 καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου ὡς τῆς ΒΔ,
 ἐὰν κέντροις τοῖς Β, Δ, διαστήματι δὲ τῆ τοῦ
 τριγώνου καθέτω κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνου-
 σιν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ
 τὰ κέντρα ἐπιζευγόμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι
 τὴν ὑπὸ ΒΖΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς
 εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων
 κλίσεως. Καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφὲς μὲν ὡς ἑκατέρα
 τῶν ΒΖ, ΖΔ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΔ·
 καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς
 ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. Καὶ
 ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν ὡς ἡ ΒΔ
 πρὸς μὲν τὴν ΔΖ δυνάμει λόγον ἔχει ὃν ἐκτὼ
 πρὸς τρία, τῆς δὲ ἡμισείας τῆς ΒΔ δυνάμει
 ἐστὶ τετραπλασία· ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γί-
 νεσθαι ἑκατέραν τῶν ΒΖ, ΖΔ τῆς ἡμισείας τῆς
 ΒΔ. Καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

ΒΔ diameter existens quadrati. At vero et ΒΖ, ΖΔ
 perpendiculares trianguli; quare et ΒΖΔ angulus
 datus est; descripto igitur quadrato a latere trian-
 guli ut ΑΓ, et junctâ diametro ut ΒΔ, si centris Β,
 Δ, intervallo autem trianguli perpendiculari
 circulos describamus, sese secant in Ζ, et a
 puncto Ζ ad centra junctæ rectæ comprehen-
 dent angulum ΒΖΔ, qui est reliquus, ut dictum
 est, ex duobus rectis planorum inclinationis.
 At vero hoc loco patet utramque ipsarum ΒΖ,
 ΖΔ majorem esse quam dimidiam ipsius ΒΔ;
 et ideo in organica constructione necesse est
 sese secare circulos. Sed et ex demonstratione
 evidens fit ipsam ΒΔ ad ΔΖ quidem potentiâ
 rationem habere quam 8 ad 3, dimidiæ autem
 ipsius ΒΔ potentiâ est quadrupla; quare ob id
 major fit utraque ipsarum ΒΖ, ΖΔ quam dimidia
 ipsius ΒΔ. Et hæc quidem de octaedro.

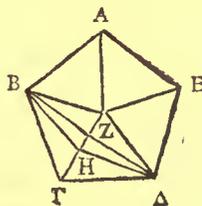
la diagonale ΒΔ du quarré est donné, et que les droites ΒΖ ΖΔ sont les perpendi-
 culaires du triangle, l'angle ΒΖΔ sera donné; ayant donc décrit sur un côté du
 triangle le quarré ΑΓ, et ayant mené la diagonale ΒΔ, si des centres Β, Δ, et
 d'un intervalle égal à la perpendiculaire du triangle, nous décrivons des arcs
 de cercles, ces arcs se couperont en un point Ζ, et les droites menées du
 point Ζ aux centres comprendront un angle ΒΖΔ, dont le supplément à deux
 droits sera l'inclinaison des plans. Or il est évident que chacune des droites
 ΒΖ, ΖΔ est plus grande que la moitié de ΒΔ; c'est pourquoi, dans la construction
 organique, les cercles doivent se couper mutuellement. Car, d'après la dé-
 monstration, il est évident que le quarré de ΒΔ a avec le quarré de ΔΖ, la raison
 que huit a avec trois, et que le quarré de la droite ΒΔ est quadruple du quarré
 de sa moitié (20. 6); chacune des droites ΒΖ, ΖΔ est donc plus grande que la
 moitié de ΒΔ; et voilà ce qui regarde l'octaèdre.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πεντάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ζ, ὥστε περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι· ἔσται δὴ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς μέρος εἰκοσαέδρου σχήματος. Τετμήσθω μία πλευρὰ ἐνὸς τριγώνου ἡ ΖΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΗ, ΗΔ ἴσαι τε οὔσαι, καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ΖΓ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία ἀμβλεία ἐστίν· καὶ

In icosaedro autem intelligatur pentagonum et æquilaterum et æquiangulum ΑΒΓΔΕ, super hoc autem pyramis verticem habens punctum Ζ, ita ut comprehendant ipsam triangula æquilatera sint; erit igitur ΑΒΓΔΕ pyramis pars icosaedri figuræ. Secetur unum latus ΖΓ unius trianguli bifariam in Η, et jungantur ductæ ΒΗ, ΗΔ et æquales existentes et perpendiculares factæ ad ΖΓ; dico ΒΗΔ angulum obtusum esse;



ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπιζευχθεῖσα γάρ ἡ ΒΔ ἀμβλείαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ ΒΓΔ τοῦ πεντάγωνου γωνίαν. Ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΔ· ἐλάττωτες γάρ αἱ ΒΗ, ΗΔ τῶν ΒΓ, ΓΔ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία ἡ λείπουσα ἐστὶν εἰς τὰς δύο ἰσθμῶν τῆς κλίσεως τῶν

et est hic evidens. Juncta enim ΒΔ obtusum quidem subtendit ΒΓΔ angulum pentagoni. Hoc autem major est angulus ΒΗΔ; minores enim ipsæ ΒΗ, ΗΔ ipsis ΒΓ, ΓΔ. Congruenter utique præcedentibus angulus ΒΗΔ reliquus est ex

PROPOSITION IX.

Concevons dans l'isocaèdre le pentagone équilatéral et équiangle ΑΒΓΔΕ, et sur ce pentagone concevons une pyramide ayant son sommet en Ζ, de manière que les triangles qui la comprennent soient équilatéraux; la pyramide ΑΒΓΔΕ sera une partie de l'icosàdre. Coupons un côté ΖΓ d'un triangle en deux parties égales au point Η, et joignons ΒΗ, ΗΔ; ces droites seront égales et perpendiculaires à ΖΓ; je dis que l'angle ΒΗΔ est obtus; ce qui est ici évident. En effet, joignons ΒΔ, cette droite soutendra l'angle obtus ΒΓΔ du pentagone; et l'angle ΒΗΔ est plus grand que celui-ci (21. 1), car les droites ΒΗ, ΗΔ sont plus petites que les droites ΒΓ, ΓΔ. Conformément à ce qui précède, le supplément

ΒΖΓ, ΓΖΔ τριγώνων. Ταύτης δοθείσης, δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων· ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τῆς ΒΔ δεδομένης, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ΒΗ, ΗΔ καθέτων τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΔ. Εἰ γὰρ κέντρεις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου ὡς τῆς ΒΔ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλους ὡς κατὰ τὸ Η, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὰ Β, Δ ἐπιζευγύμνεται εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ἰσότητας τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. Καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν ἔτι ἑκάτερα τῶν ΒΗ, ΗΔ μείζον ἴσθι τῆς ἡμισείας τῆς ΒΔ· εἶναι δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ἰσχυρῆς κατασκευῆς ἀποδειχθῆναι.

Νενόηθω χωρὶς ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον τὸ ΘΚΛ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΛ πενταγώνου ἀναγεγράφθω τὸ ΚΜΝΞΛ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΜΛ, καὶ ἤχθω

duobus rectis inclinationis triangulorum ΒΖΓ, ΓΖΔ. Hoc dato, data erit et inclinatio icosaedri planorum; a latere enim trianguli icosaedri descripto pentagono, junctâ duo latera pentagoni subtendente, ut in figurâ, ipsâ ΒΔ datâ, similiter autem et perpendicularibus ΒΗ, ΗΔ triangulorum, datus est et angulus ΒΗΔ. Si enim centris terminis ipsius duo latera pentagoni subtendentis, ut ΒΔ, intervallo autem trianguli perpendiculari circuli describantur, sese secant, ut in puncto Η, et a puncto Η ad puncta Β, Δ junctæ rectæ comprehendent reliquum ex duobus rectis planorum inclinationis. Et hoc loco ex figurâ quidem manifestum est utramque ipsarum ΒΗ, ΗΔ majorem esse dimidiâ ipsius ΒΔ; hoc autem potest ex organica constructione demonstrari.

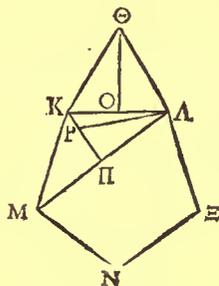
Intelligatur seorsim æquilaterum quidem triangulum ΘΚΛ, et ab ipsâ ΚΛ pentagonum describatur ΚΜΝΞΛ, et jungatur ΜΛ, et ducatur

de l'angle ΒΗΔ à deux droits, sera l'inclinaison des triangles ΒΖΓ, ΓΖΔ. Cet angle étant donné, l'inclinaison des plans de l'icosàèdre sera donnée; car ayant décrit un pentagone sur un côté d'un triangle de l'icosàèdre, et étant donnée la droite ΒΔ, qui soutend deux côtés du pentagone, comme dans la figure, ainsi que les perpendiculaires ΒΗ, ΗΔ des triangles, l'angle ΒΗΔ sera donné. Car si des extrémités de la droite ΒΔ qui soutend deux côtés du pentagone, comme centres, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire d'un triangle, on décrit des arcs de cercle qui se coupent en un point Η, les droites menées du point Η aux points Β, Δ, comprendront un angle dont le supplément à deux droits sera l'inclinaison des plans. Il est évident ici, d'après la figure, que chacune des droites ΒΗ, ΗΔ, est plus grande que la moitié de ΒΔ; ce qui peut aussi se démontrer par la construction organique.

Car concevons séparément le triangle équilatéral ΘΚΛ; sur ΚΛ décrivons le pentagone ΚΜΝΞΛ; joignons ΜΛ, et menons la perpendiculaire ΘΟ du triangle

κάθετος τοῦ $\Theta\text{ΚΛ}$ τριγώνου ἢ $\Theta\text{Ο}$ λέγω ὅτι ἢ $\Theta\text{Ο}$ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ τῆς ὑποτείνουσας τὴν κλίσην τῶν ἐπιπέδων. Ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΜΛ καθέτου τῆς ΚΠ , ἐπεὶ ἢ ὑπὸ ΚΑΠ μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τούτεστι τῆς

perpendicularis $\Theta\text{Ο}$ trianguli $\Theta\text{ΚΛ}$; dico $\Theta\text{Ο}$ majorem esse dimidiâ ipsius ΜΛ subtendentis inclinationem planorum. Ductâ a puncto Κ ad ΜΛ perpendiculari ΚΠ , quoniam angulus ΚΑΠ major est tertiâ parte recti, hoc est angulo



ὑπὸ ΚΘΟ , συνστάτω τῇ ὑπὸ ΚΘΟ ἴση ἢ ὑπὸ ΠΑΡ ἢ ἄρα ΠΛ κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἢ ΡΛ ὥστε τὸ ἀπὸ ΡΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ λόγον ἔχει ὅν ὁ δ' πρὸς τὸν γ'. Μείζων δὲ ἢ ΚΛ τῆς ΑΡ τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὁ δ' πρὸς τὸν γ'. Ἐχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΟ ὅν ὁ δ' πρὸς τὸν γ' ἢ ἄρα ΚΛ πρὸς τὴν ΑΠ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τῶν ΘΟ μείζων ἄρα ἢ ΘΟ τῆς ΑΠ .

ΚΘΟ , constituatur angulo ΚΘΟ æqualis angulus ΠΑΡ ; ipsa igitur ΠΛ perpendicularis est æquilateri trianguli, cujus latus ΡΛ . Quare ipsum ex ΡΛ ad ipsum ΑΠ rationem habet quam 4 ad 5. Major autem ΚΛ ipsâ ΑΡ ; ipsum igitur ex ΚΛ ad ipsum ex ΑΠ majorem rationem habet quam 4 ad 5. Habet autem et ad ipsum ex ΘΟ quam 4 ad 5; ipsa igitur ΚΛ ad ΑΠ majorem rationem habet quam ad ΘΟ ; major igitur ΘΟ quam ΑΠ .

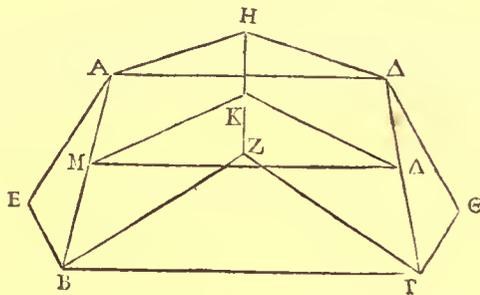
$\Theta\text{ΚΛ}$; je dis que $\Theta\text{Ο}$ est plus grand que la moitié de ΜΛ qui soutend l'inclinaison des plans. Du point κ menons κΠ perpendiculaire à ΜΛ . Puisque l'angle ΚΑΠ est plus grand que la troisième partie du droit, c'est-à-dire que l'angle ΚΘΟ , faisons l'angle ΠΑΡ égal à l'angle ΚΘΟ ; la droite ΠΛ sera la perpendiculaire du triangle équilatéral, dont ΡΛ est le côté; le carré de ΡΛ a donc avec le carré de ΑΠ , la raison que quatre a avec trois. Mais ΚΛ est plus grand que ΑΡ (21. 1); le carré de ΚΛ a donc avec ΑΠ une raison plus grande que celle de quatre à trois. Mais le carré de ΚΛ a avec le carré de ΘΟ , la raison que quatre a avec trois, la droite ΚΛ a donc avec ΑΠ une raison plus grande qu'avec ΘΟ ; la droite ΘΟ est donc plus grande que ΑΠ (10. 5).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Επί δὲ τοῦ δωδεκαέδρου οὕτως. Νενοήσθω ἐν τετράγωνον τοῦ κύβου, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκαέδρον ἀναγράφεται τὸ ΑΒΓΔ, καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου τὰ ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ· λέγω δὴ καὶ ἐνταῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. Τετμήσθω ἡ ΖΗ δίχως κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπε-

In dodecaedro autem hoc modo. Intelligatur unum quadratum ΑΒΓΔ cubi, a quo dodecaedrum describitur, et duo plana dodecaedri ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ; dico igitur et sic datam esse inclinationem duorum pentagonorum. Secetur ΖΗ bifariam in Κ, et a puncto Κ ipsi ΖΗ ad rectos ducantur in utroque planorum ipsæ ΚΛ, ΚΜ, et jungatur ΜΛ. Dico igitur primum ΜΚΑ



ζιύχθω ἡ ΜΛ. λέγω δὴ πρῶτον ὅτι ἡ ὑπὸ ΜΚΑ γωνία ἀμβλεία ἐστὶ. Δέδεικται γάρ ἐν τῷ ιγ'. Εἰβλίω τῶν στοιχείων ἦτοι τῆς στάσεως τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἀγχομένη πρὸς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευ-

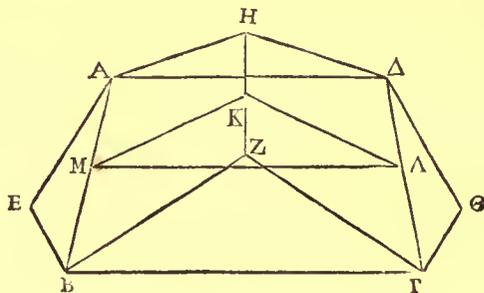
angulum obtusum esse. Ostensum est enim in decimo tertio libro elementorum, scilicet in constructione dodecaedri, ipsam a puncto Κ perpendiculararem ductam ad ΑΒΓΔ quadratum di-

PROPOSITION X.

Quant au dodécaèdre, nous procéderons ainsi. Concevons que ΑΒΓΔ soit un des quarrés du cube d'après lequel on a construit le dodécaèdre (17. 13); que ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ soient deux plans du dodécaèdre; je dis que l'inclinaison de deux pentagones est donnée ainsi. Conpons ΖΗ en deux parties égales au point Κ; du point Κ menons dans l'un et l'autre plan les droites ΚΛ, ΚΜ perpendiculaires à ΖΗ, et joignons ΜΛ. Je dis premièrement que l'angle ΜΚΑ est obtus. Car dans le treizième livre des Éléments, dans la construction du dodécaèdre, on a démontré

ρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς $ΜΛ$ · καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ $ΜΚΛ$ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. συναποδείκνυται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ $ΚΛ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, ὥστε τὴν αὐτὴν τὴν $ΚΛ$ καὶ τὴν $ΚΜ$, ἴσας εὔσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς $ΜΛ$ · τῆς ἄρα ὑπὸ $ΜΚΛ$ γωνίας δοθείσης, ἡ λείπουσα εἰς τὰς δύο ἑρθᾶς ἢ κλίσεις ἔσται τῶν ἐπιπέδων

midiam esse lateris pentagoni; quare minor est dimidiâ ipsius $ΜΛ$; et ob id angulus $ΜΚΛ$ obtusus est. Demonstratum est autem in eodem theoremate, et ipsum quidem ex $ΚΛ$ æquale esse ipsi ex dimidio lateris cubi, et ipsi ex dimidio lateris pentagoni, ita ut eadem $ΚΛ$ et ipsa $ΚΜ$ æquales existentes, majores sint dimidiâ ipsius $ΜΛ$; ergo $ΜΚΛ$ angulo dato, reliquus ex duobus rectis inclinatio erit planorum data. Quoniam igitur



δηλονότι δεδομένη. Ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετραγώνου ἢ ὑποτείνουσα ἐστὶ τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου, δέδεται δὲ τὸ πεντάγωνον· δέδεται ἄρα ἡ $ΜΛ$. Δοδέται δὲ καὶ ἑκατέρω τῶν $ΜΚ$, $ΚΛ$, κάθετοι γάρ εἰσιν ἀπὸ

latus quadrati $ΑΒΓΔ$ subtendit duo latera pentagoni, datum est autem pentagonum; data igitur est $ΜΛ$. Data est autem et utraque ipsarum $ΜΚ$, $ΚΔ$, perpendiculares enim sunt a bipar-

que la perpendiculaire menée du point $Κ$ au carré $ΑΒΓΔ$ est la moitié du côté du pentagone; cette perpendiculaire est donc plus petite que la moitié de $ΜΛ$; l'angle $ΜΚΛ$ est donc obtus. Mais on a démontré aussi dans ce même théorème que le carré de $ΚΛ$ est égal au carré de la moitié du côté du cube, et au carré de la moitié du côté du pentagone; les droites $ΚΛ$, $ΚΜ$ égales entre elles, sont donc plus grandes que la moitié de $ΜΛ$; l'angle $ΜΚΛ$ étant donné, le supplément de cet angle a deux droits, qui est l'inclinaison des plans, est donc donné. Et puisque le côté du carré $ΑΒΓΔ$ soutend deux côtés du pentagone, et que le pentagone est donné, la droite $ΜΛ$ sera donnée. Mais chacune des droites

τῆς διχοτομίας τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑπο-
 τεινύσης ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆ πλευρὰν τοῦ
 πενταγώνου, ὡς τὴν ΖΗ· δίδεται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ
 ΛΚΜ ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς
 τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. Καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς
 ὀργανικῆς κατασκευῆς εἶπεν, ὡς χρὴ δοθέντος
 τοῦ πενταγώνου ἐπιζεύξαι τὴν ὑποτείνουσαν
 ὑπὸ δύο πλευρὰς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ
 τοῦ κύβου· καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς,
 διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένη
 καθέτω ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆ τοῦ πεντα-
 γώνου πλευρὰν ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς ἡ ΚΛ
 τῇ ΚΜ γραφεῖσθαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς
 συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου ἐπὶ τὰ κέν-
 τρα ἐπιζεύξαι εὐθείας περιεχούσας τὴν λείπου-
 σαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων.
 Οτι γὰρ ἡ ΚΛ καθέτος μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας
 τῆς ΜΛ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συνα-
 ποδέδεικται τοῦτο.

tità duo latera subtendente ad parallelum ipsi
 latus pentagoni, ut ZH; datus est igitur et
 ΛΚΜ angulus reliquus, ut dictum est, ex duo-
 bus rectis inquisitæ inclinationis. Pulchre igitur
 in organicâ constructione dixit oportere in
 dato pentagono jugere subtendentem duo latera,
 quæ æqualis fit lateri cubi; et centris terminis
 ipsius, intervallo autem perpendiculari a bi-
 parità ductâ ad parallelum ipsi pentagoni latus,
 ut in figurâ sunt ΚΛ, ΚΜ, describere cir-
 cumferentias, et a puncto eoncursum circumfe-
 rentiarum ad centra jungere rectas comprehen-
 dentes reliquum ex duobus rectis inclinationis
 planorum. Ipsam autem ΚΛ perpendicularem
 majorem esse dimidiâ ipsius ΜΛ dictum est, ut
 in elementis hoc demonstratum est.

МК, КΛ est donnée, car ces droites sont menées des milieux des droites АВ, ΔΓ, qui soutendent deux côtés du pentagone, perpendiculairement au côté ΖΗ qui est parallèle aux droites АВ, ΔΓ; l'angle ΛΚΜ dont le supplément a deux droits est, ainsi qu'on l'a dit, l'inclinaison cherchée, est donc donné. C'est donc avec raison qu'Isidore dit que, dans la construction organique, il faut, dans le pentagone donné, mener une droite qui soutende deux côtés, laquelle est égale au côté du cube; décrire des arcs de cercle des extrémités de cette droite, comme centres, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire menée du milieu de cette droite au côté du pentagone qui lui est parallèle (telles sont, dans la figure, les droites ΚΛ, ΚΜ), et du point de rencontre des deux arcs mener à leurs centres des droites qui comprendront un angle dont le supplément a deux droits, sera l'inclinaison des plans. Car on a déjà dit que la perpendiculaire ΚΛ est plus grande que la moitié de ΜΛ, et cela est démontré dans les Éléments.

COLLATIO

CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ

REGIÆ,

CUM EDITIONE OXONIÆ,

CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI
SUNT MOMENTI.

Litterâ *a* antecedente designatur codex 190; litterâ *b*, editio Oxoniæ; litterâ *c*, codex 1038; litterâ *d*, codex 2466; litterâ *e*, codex 2344; litterâ *f*, codex 2345; litterâ *g*, codex 2342; litterâ *h*, codex 2346; litterâ *k*, codex 2481; litterâ *l*, codex 2531; litterâ *m*, codex 2347; litterâ *n*, codex 2343; litterâ *o*, codex 2448; litterâ *p*, codex 2352; litterâ *q*, codex 2363; litterâ *r*, codex 2349; litterâ *s*, codex 2350; litterâ *t*, codex 1981; litterâ *v*, codex 2467; litterâ *x*, codex 2472; litterâ *y*, codex 2366; litterâ *z*, codex 2348.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ὑποκειμένῳ,	<i>Id.</i>	αὐτῷ ὑποκειμένῳ
2. ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρασ .	<i>Id.</i>	καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος
3. ἐπιζευχθῆ,	<i>Id.</i>	ἀποζευχθῆ
4. ὁμοίᾳ	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὑπὸ	<i>Id.</i>	περὶ
6. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
7. γωνιῶν ἐπιπέδων	<i>Id.</i>	ἐπιπέδων γωνιῶν
8. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ὁ	<i>Id.</i>	deest.
10. ὁμοίᾳ	<i>Id.</i>	deest.

- | | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|
| 11. ἔστιν, | <i>Id.</i> | δὲ |
| 12. γωνίαν, | <i>Id.</i> | deest. |
| 13. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν τεττάρων τριγῶνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον. | Hæc definitio deest in omnibus manuscriptis. | concordat cum edit. Paris. |

Definitio 28 subsequitur definitionem 29 in *a, h.*

PROPOSITIO I.

- | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1. μετεωροτέρῳ. | <i>Id.</i> | τῷ μετεώρῳ |
| 2. μετεωροτέρῳ. | <i>Id.</i> | μετεώρῳ |
| 3. δὴ δοθεῖσων | ἄρα. | concordat cum edit. Paris. |
| 4. εὐθεῖα γὰρ εὐθεῖα οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἓν· εἰ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαισιν εὐθεῖαι. . . . | ἐπειδὴ περὶ ἂν κέντρῳ τῷ B, καὶ διαστήματι τῷ AB κύκλον γράψωμεν, αἱ δίαμετροι ἀνίσους ἀποληφόνται τοῦ κύκλου περιφερείας. | concordat cum edit. Paris.
MM. <i>d, c, f, l, m, n.</i> |

etenim si centro B, et intervallo AB circumferentiam describamus, diametri inæquales assument circuli circumferentias.

car si du centre B et de l'intervalle AB, nous décrivions un cercle, les diamètres soutiendraient des arcs inégaux.
MM. *a, g, h.* . . .

PROPOSITIO II.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
1. ἐπιπέδω,	deest	concordat cum edit. Paris.
2. ἦ	Id.	εἶη

PROPOSITIO III.

1. τεμνέτω	Id.	τεμνέτωσαν
2. δὴ	δὲ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO IV.

1. τριγώνῳ	Id.	deest.
2. ἐστίν.	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ταῖς	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν ἴση	Id.	ἴση ἐστί.
5. ἐπεὶ	Id.	deest.
6. ἴση ἐδείχθη	Id.	ἐδείχθη ἴση
7. διὰ	Id.	ὑπὸ

PROPOSITIO V.

1. μεταωρότερον,	Id.	μετέωρον,
2. δὴ τμήν	Id.	τομήν δὴ
3. ἐκείτην	Id.	ἐκείτην
4. αὐτῆς ἢ BZ	Id.	ἢ BZ αὐτῆς
5. ἐστίν	Id.	deest.
6. μεταωρότερον	Id.	μετέωρον

PROPOSITIO VI.

1. αὐτῶ	Id.	deest.
2. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστίν	Id.	deest.
4. ἐστὶν ἴση	Id.	ἴση ἐστίν.
5. ὑπὸ	ὑπὸ τῶν	concordat cum edit. Paris.
6. εὐθείαι	Id.	deest.

PROPOSITIO VII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODĒX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μετεωροτέρω	<i>Id.</i>	μετέωρω
2- μετεωροτέρω	<i>Id.</i>	μετείρω
3. ἐπὶ τὸ Z	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO VIII.

1. AB, ΓΔ, ΒΔ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα AB, ΓΔ, ΒΔ
2. πρὸς ὀρθάς	<i>Id.</i>	ὀρθή
3. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.
4. εὐθεία	<i>Id.</i>	εὐθείας
5. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO IX.

1. τῇ EZ παράλληλος,	<i>Id.</i>	παράλληλος τῇ EZ,
2. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO X.

1. αἱ AB, ΒΓ ἀπτόμεναι ἀλλήλων	<i>Id.</i>	ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB, ΒΓ
3. καὶ μὴ εὔσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ,	<i>Id.</i>	deest.
4. ABΓ	<i>Id.</i>	ABΓ τῇ

PROPOSITIO XI.

1. δοθὲν	<i>Id.</i>	deest.
2. κάθετον	<i>Id.</i>	κάθητον
3. ὑποκείμενον	<i>Id.</i>	συνκείμενον
4. ὑποκείμενον	<i>Id.</i>	συνκείμενον
5. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
6. τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς	<i>Id.</i>	ἀπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ
7. ἄρα δοθέντος	<i>Id.</i>	δοθέντος ἄρα

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|---------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------|
| 2. μετέωρόν τι σημεῖον τὸ Β, | <i>Id.</i> | τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ Β, |
| 5. σημεῖου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἀνίσταται ἢ ΑΔ. | <i>Id.</i> | δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνίσταται. |

PROPOSITIO XIII.

- | | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, | <i>Id.</i> | τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, |
| 3. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν | <i>Id.</i> | τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν |
| 4. τῷ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ | deest | τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου. |

PROPOSITIO XIV.

- | | | |
|----------------|----------------------|-------------|
| 6. ἴσαι | <i>Id.</i> | ἴστι |
| 2. ἐκβληθέντι | <i>Id.</i> | ἐκβεβλήθεντ |
| 3. δὴ | <i>Id.</i> | δὲ |
| 4. εἰσὶν ἴσαι, | <i>Id.</i> | ἴσαι εἰσὶν |

PROPOSITIO XV.

- | | | |
|------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἀλλήλων | <i>Id.</i> | ἀλλήλων παράλληλοι |
| 2. τῷ διὰ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴστι | deest | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVI.

- | | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 et 2. ἐκαλλόμεναι αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἥτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η συμπεσοῦνται. Εκβε- | <i>Id.</i> | ἐκαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἥτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὸ ΕΗ. Εκβεβλήσθω πρὸ- |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

ελήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ
μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν πρό-
τερον

τερον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη,
καὶ συμπιπτέτωσαν

- | | | |
|------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| 3. ἐστὶν ἐπιπέδω. | <i>Id.</i> | ἐπιπέδω ἐστίν. |
| 4. ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη συμπεσοῦν-
ται. | <i>Id.</i> | συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη. |
| 5. τὰ | <i>Id.</i> | deest. |

PROPOSITIO XVII.

- | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τοῦ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐστὶν | <i>Id.</i> | deest. |
| 3. τὴν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τὴν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐστὶν | <i>Id.</i> | ἔρα |
| 6. τὴν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 7. τὴν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 8. τὴν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 9. τὴν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 10. τὴν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 11. τὴν | deest | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVIII.

- | | | |
|-----------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἐστὶν | <i>Id.</i> | ἔσται. |
| 2. ἐστὶν | <i>Id.</i> | deest. |
| 3. ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν ΔΕ | <i>Id.</i> | deest. |
| 4. ἐπίπεδον. | deest | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XIX.

- | | | |
|-----------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. δὲ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἀνασταθίσειται πρὸς ἑρθάς, | <i>Id.</i> | πρὸς ἑρθάς ἀνασταθίσειται, |

PROPOSITIO XX.

- | | | |
|--------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 1. εἰσιν. | <i>Id.</i> | εἰσιν πάντα μεταλαμβανόμεναι. |
| 3. δύο δὴ ΔΑ, ΑΒ δυσὶν ΑΕ, ΑΒ
ἴσαι, | δύο δυσὶν ἴσαι, | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXI.

EDITIO PARIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἡ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. Αἱ δὲ	Id.	Καὶ ἔτι αἱ
3. ἄρα εἰς	Id.	εἰς ἄρα
4. εἰσὶ μείζονες	Id.	μείζονές εἰσι
5. γωνίας	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXII.

1. αὐταῖς	Id.	αὐτὰ
2. εἰσιν	Id.	ἕστωσαν.
3. εἰσιν	Id.	εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.
4. ταῖς	Id.	deest.
5. ἔστιν	deest	concordat cum edit. Paris.
6. δυοῖν	δύο	concordat cum edit. Paris.
7. ὑπὸ ΔΕΖ	Id.	πρὸς τῷ Ε
8. δὴ	Id.	δὲ
9. καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι	Id.	αἱ δὲ ΗΚ, ΔΖ τῆς ΑΓ
10. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι	Id.	deest.

ALITER.

1. ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ,	Id.	ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσαι,
Lin. 13. Εἰ δὲ οὐ,	Id.	οὐ δὲ οὐ
2. ἴσαι	Id.	ἔστι
3. μείζων ἔστι.	μείζονές εἰσι	concordat cum edit. Paris.
5. ἴση ἔστι	Id.	ἔστιν ἴση.
6. ἔστι.	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἔστιν.	deest	concordat cum edit. Paris.
7. τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι	Id.	μείζονές εἰσι τῆς ΑΓ
8. ἔστιν	Id.	deest.

PROPOSITIO XXIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
1. ἔσται δὴ ἥτοι ἐντός τοῦ AMN τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευ- ρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.	deest	concordat cum edit. Paris.
Ἐστω πρότερον ἐντός, . . .		
2. ἢ ΑΞ ἄρα τῆ ΒΓ ἐστὶν ἴση. . .	deest	concordat cum edit. Paris.
Ultima lin. δυσὶ	δύο	concordat cum edit. Paris.
4. ABΓ	ABΓ γωνία	concordat cum edit. Paris.
5. εἰσὶν ἴσαι.	Id.	ἴσαι εἰσὶν.
6. εἰσὶν ἴσαι*	Id.	ἴσαι εἰσὶ*
7. ἄρα αἰ	αἰ ἄρα	concordat cum edit. Paris.
9. ἴση ἐστί. Λέγω δὴ	Id.	ἐστὶν ἴση λέγω
10. λοιπῆ	deest	concordat cum edit. Paris.
11. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
12. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
14. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
15. εὐθεῖαι	deest	concordat cum edit. Paris.
16. εἰσὶν ἐλάσσονες.	Id.	ἐλάσσονές εἰσιν.
17. ἐστὶν	Id.	deest.
18. ἴσον ἔστω	Id.	ἔστω ἴσον
19. ἐστὶν ἴση*	Id.	ἴση ἐστί*
20. γωνία	deest	concordat cum edit. Paris.
21. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	Id.	deest.
22. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
23. ἐστὶν	Id.	κεῖται
24. ἐστὶν	Id.	deest.
25. ἐστὶ	Id.	deest.
26. δὴ	Id.	δὲ
27. ΝΞ*	deest	concordat cum edit. Paris.
28. δυσὶ	δύο	concordat cum edit. Paris.
29. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.
30. δυσὶ ταῖς ὑπὸ	δύο ταῖς	concordat cum edit. Paris.
31. ἀλλ' αἰ	Id.	ἀλλὰ καὶ αἰ
32. δύο`	δύο	δύο

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

33. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
34. τὴν	<i>Id.</i>	τὸ
35. πρόβλημα	πρόβλημα. ὁπερ εἶδει δείξαι.	concordat cum edit. Paris.
36. οὕτως	deest	concordat cum edit. Paris.
37. δυσὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
38. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
39. τὴν ΛΞ εὐθείαν	<i>Id.</i>	τῇ ΛΞ εὐθείᾳ
40. δυσὶ	δύο	concordat cum edit. Paris.
41. ἴση ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἐστίν ἴση.
42. δυσὶ	δύο	concordat cum edit. Paris.
43. δυσὶ	δύο	concordat cum edit. Paris.

LEMMA.

1. μὴ μείζονι οὕση τῆς AB διαμέτρου ἴση εὐθεία ἢ ΑΓ, . . .	<i>Id.</i>	εὐθεῖα ἴση ἢ ΑΓ,
2. τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ . . .	<i>Id.</i>	τῶ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΓΒ
3. μείζον ἐστι	ὑπέκει	concordat cum edit. Paris.
4. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μείζον ἐστι	ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς AB μείζον ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ	τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μείζον ἐστι
5. τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΑ μείζον . . .	μείζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΑ	concordat cum edit. Paris.
6. προέκειτο	<i>Id.</i>	προέκειται

PROPOSITIO XXIV.

1. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
2. παρὰ	<i>Id.</i>	πρὸς
3. εἶσιν,	<i>Id.</i>	παράλληλοί εἶσιν,
4. περιέξουσιν	<i>Id.</i>	μεριέχουσιν
5. ἐστίν ἴση	<i>Id.</i>	ἴση
6. ἐστίν ἴση,	<i>Id.</i>	ἴση ἐστίν,

PROPOSITIO XXV.

1. ὁσαιδηποτεῦν	<i>Id.</i>	deest.
2. συμπεπληρώσθω	<i>Id.</i>	σύμπεπληρώσθωσαν

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

Lin. 9. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶν	εἶσιν	concordat cum edit. Paris.
4. ἐπτιν	εἰσὶν	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστὶν	εἰσὶν	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
7. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. στερεῶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἴση,	ἴσον	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVI.

1. δοθεῖσα	δοθεῖσα εὐθεία	concordat cum edit. Paris.
2. αὐτῇ δοθὲν	<i>Id.</i>	αὐτῇ
3. τῶν	deest	concordat cum edit. Paris.
4. τῷ	τῇ	concordat cum edit. Paris.
5. τῷ	deest	concordat cum edit. Paris.
6. περιεχομένη	<i>Id.</i>	deest.
7. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
9. δυσὶ	δύο	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶν ἴση	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν
11. δυσὶ	δύο	concordat cum edit. Paris.
12. εἰσὶ ἴσαι,	<i>Id.</i>	ἴσαι εἰσὶ,
13. τῇ AB	<i>Id.</i>	deest.
14. τῷ A	<i>Id.</i>	deest.
15. δοθείση στερεῶ γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση	<i>Id.</i>	τῇ δοθείση στερεῶ γωνία ἴσην στερᾶν γωνίαν

PROPOSITIO XXVII.

1. τὴν δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ἔτι τὴν
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα	<i>Id.</i>	deest.
5. δοθείσης ἀρὰ	<i>Id.</i>	ἀρὰ δοθείσης
Lin. 12. ἀναγέγραπται τὸ ΑΔ.	<i>Id.</i>	στερεὸν παραλληλέπιπτον ἀνα- γέγραπται.

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. διαγωνίους	<i>Id.</i>	διαγωνίας
2. καὶ τὸ	καὶ αὐτὸ	concordat cum edit. Paris.
3. τε	<i>Id.</i> ,	deest.

PROPOSITIO XXIX.

1. ἔντα,	deest	concordat cum edit. Paris.
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXX.

1. γὰρ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἐφιστῶσαι	<i>Id.</i>	αἱ ὑφιστῶσαι
4. ΔΘ,	<i>Id.</i>	ΘΔ, καὶ ἔτι αἱ ΗΕ, ΖΜ,
5 et 6. τὸ Ρ, καὶ ἔτι ἐκβεβλήθησαν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π, καὶ	<i>Id.</i>	τὰ Ο, Ρ, Π, Ξ, σημεῖα, καὶ
7. αἱ	<i>Id.</i>	deest.
8. ὧν αἱ ἐφιστῶσαι	<i>Id.</i>	καὶ αὐτῶν αἱ ὑφιστῶσαι
9. ἔστι	<i>Id.</i>	deest.
10. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
11. πάλιν	<i>Id.</i>	deest.
12. ὧν αἱ ἐφιστῶσαι αἱ	<i>Id.</i>	καὶ αὐτῶν αἱ ὑφιστῶσαι
13. τῶν	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXI.

1. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. βάσεων,	<i>Id.</i>	βάσεων, ἢ δὲ ὑπὸ ΑΑΒ τῆ ὑπὸ ΓΡΔ ἄνισος,
3. ΡΥ,	<i>Id.</i>	ΡΥ, καὶ πρὸς τῷ Υ σημείῳ τῆ ΡΤ παράλληλος ἀνιστάτω ἢ ΥΧ
4. ἔστι ἢ μὲν	μὲν ἢ	concordat cum edit. Paris.
5. τέ	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

6. τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖν ἀπεναν- τίον·	<i>Id.</i>	deest.
7. ἢ ΓΤ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἢ ΓΤ καὶ ἢ ΟΔ καὶ συνεζεύχθωσαν .	ἢ αΤτ καὶ ἐκβεβλήσθω . .	concordat cum edit. Paris.
8. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
9. ὧν αἱ ἐφιστῶσαι,	<i>Id.</i>	καὶ αὐτῶν αἱ ἐφιστῶσαι
10. ἐστὶν ἴσον·	<i>Id.</i>	ἴσον ἐστίν·
11. ἐστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	ἴσον ἐστίν.
12. στερεόν.	deest	concordat cum edit. Paris.
13. βάσις	<i>Id.</i>	deest.
14. στερεόν·	deest	concordat cum edit. Paris.
15. ἐστι	<i>Id.</i>	deest.
16. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	<i>Id.</i>	deest.
17. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
18. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
19. ἐπιπέδον	<i>Id.</i>	deest.
20. ἐστὶν ἴσον,	<i>Id.</i>	ἴσον ἐστίν,

PROPOSITIO XXXII.

1. Ἐστω	<i>Id.</i>	ἔστωσαν
2. ὅτι ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
3. δὲ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXXIII.

1. εὐθείας	<i>Id.</i>	εὐθείαις
2. παραλληλογράμμω,	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν	εἰσὶν	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ καὶ ὅμοια·	εἰσὶν καὶ ὅμοια·	concordat cum edit. Paris.
5. τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναν- τίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια·	<i>Id.</i>	deest.
6. ἢ περ	<i>Id.</i>	ἢ
7. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
8. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
9. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
10. Ἐὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἐπειδήπερ ἐπίπερ concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXIV.

1. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἴσται	ἴσονται	concordat cum edit. Paris.
5. ἄλλο δέ τι τὸ ΓΦ,	ἕξουθεν δὲ τὸ ΓΦ,	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶν ἄρα ὡς	<i>Id.</i>	ὡς ἄρα
7. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἴσων	<i>Id.</i>	ἴσων
9. ἐστὶ	<i>Id.</i>	καὶ
10. ἀλλ'	<i>Id.</i>	καὶ
11. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
12. τοῦ	τούτου	concordat cum edit. Paris.
13. οὖν	deest	concordat cum edit. Paris.
14. βάσεις	deest	concordat cum edit. Paris.
15. ΓΦ	ΓΦ ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
16. στερεῶν	<i>Id.</i>	deest.
17. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
18. βάσεων ἐπίπεδα	ἐπίπεδα	βάσεων ἐπίπεδοι
19. σημεῖα,	deest	concordat cum edit. Paris.
20. γὰρ	deest	concordat cum edit. Paris.
21. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
22. στερεοῦ	<i>Id.</i>	deest.
23. ἄρα στερεῶν	<i>Id.</i>	στερεῶν ἄρα
23. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
24. τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΑΒ	<i>Id.</i>	τῷ μὲν ΒΓ τὸ ΑΒ

PROPOSITIO XXXV.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ὑπὸ τῶν καθέτων,	deest	concordat cum edit. Paris.
2. γωνίας περιέχουσαι	<i>Id.</i>	περιέχουσαι γωνίας
3. εἰλήφθω	<i>Id.</i>	εἰλήφθωσαν
4. τὰ	<i>Id.</i>	deest.
5. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
8. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
9. τὰς	deest	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
11. ἴση ἐστὶν.	ἐστὶν ἴση οὕτως.	concordat cum edit. Paris.
12. τοῖς ἀπὸ τῶν	τὸ ἀπὸ τῶν	τοῖς ἀπὸ τῆς.
13. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
14. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
15. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
16. τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση*	<i>Id.</i>	ἴση τῇ ὑπὸ ΕΔΜ*
17. ὑπόκεινται	<i>Id.</i>	ὑπόκειται
18. δυοὶ	δύο	concordat cum edit. Paris.
19. ἴση ἐστί.	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση.
20. τῇ ὑπὸ ZEN ἐστὶν ἴση. . .	<i>Id.</i>	γωνία τῇ ὑπὸ ZEN ἴση ἐστὶν.
21. ταῖς	deest	concordat cum edit. Paris.
22. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
23. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
24.	deest conclusio.

COROLLARIUM.

1. πῖπεδοι	<i>Id.</i>	εὐθύγραμμοι
2. αὐτῶν	αὐτὰς	concordat cum edit. Paris.
3. εἰσίν.	εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ	τῶν	concordat cum edit. Paris.
2. κείσθω	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἢ	Id.	deest.
4. ἐκατέρω τῶν ΛΞ, ΕΔ, . . .	Id.	ἐκάστη τῶν ΛΞ, ΕΖ, ΕΗ, ΕΔ,
5. ἐστὶ	Id.	deest.
6. ἐφειστήκασιν	ἐφίστασιν	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶ	Id.	deest.
8. στερεὸν	στερεὸν παραλληλεπίπεδον	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVII.

1. στερεὰ	Id.	deest.
2. στερεὰ	Id.	deest.
3. ἑμοίων	Id.	deest.
4. ΛΓ,	Id.	ΛΓ ἑμοίων,
5. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἦχθω	ἔστω	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶν	Id.	deest.
3. δὴ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. δυσὶν	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἀδύνατον	Id.	ἄτοπον

PROPOSITIO XXXIX.

In codicibus *a*, *h* hīc agitur de cubo, in cœteris autem de parallelepipedo.

1. στερεοῦ παραλληλεπιπέδου .	κύβου	concordat cum edit. Paris.
2. στερεοῦ παραλληλεπιπέδου .	κύβου	concordat cum edit. Paris.
3. Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέ- δου	κύβου γὰρ	concordat cum edit. Paris.
4. ἐκβεβλήσθω	Id.	ἐκβεβλήσθωσαν

548 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
5. τομή τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου	τομή τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ κύβου .	τῶν ἐπιπέδων τομή ἔστω ἡ ΥΣ, τῶν δὲ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου
6. ἴση ἔστιν ἢ μὲν ΥΤ τῆ ΤΣ, .	<i>Id.</i>	αἱ ΥΣ, ΔΗ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ὅτι ἢ μὲν ΥΤ τῆ ΤΣ ἴση ἔστιν,
7. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
8. τῆ ΥΕ ἔστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἴσον,	<i>Id.</i>	βάσει τῆ ΥΕ ἴση ἔστι, τὸ δὲ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἴσον ἔστι,
9. γωνίαις ἴσαι	<i>Id.</i>	γωνίας.
10. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
11. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
12. Καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Υ, Η, Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΗ, ΥΣ. ἐν ἐνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ, ΥΣ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῆ ΒΗ, ἴση ἄρα ἢ μὲν	ἴση ἄρα ἢ μὲν	concordat cum edit. Paris, solo deficiente vocabulo μὲν.
13. Η δὲ	<i>Id.</i>	ἔστι δὲ καὶ ἡ
14. ἴση	deest	concordat cum edit. Paris.
15. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
16. πλευραῖς	<i>Id.</i>	deest.
17. στερεοῦ, καὶ τὰ ἐξῆς.	κύβου, καὶ τὰ ἐξῆς.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XL.

1. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
------------------	-----------------	----------------------------

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γωνία	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἴστιν ἴση,	<i>Id.</i>	ἴση ἴστιν,
4. ἴστιν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἴστιν.
5. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
6. τῆς	<i>Id.</i>	deest.
7. τετράγωνον	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO II.

1. τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.	ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ .	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον,	ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ	concordat cum edit. Paris.
3. τετράγωνον	deest	concordat cum edit. Paris.
4. εὐθείας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περι . . .	<i>Id.</i>	τοῦ κύκλου διαγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου ὑπὸ
5. ἀπὸ	ἐπὶ	concordat cum edit. Paris.
6. παραλληλόγραμμα,	<i>Id.</i>	παραλλήλων,
7. τμήματα	ἀπομήματα	concordat cum edit. Paris.
8. βίβλιου,	<i>Id.</i>	deest.
9. καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ,	deest	concordat cum edit. Paris.
10. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
11. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
12. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
13. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
14. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.
15. κύκλος	<i>Id.</i>	deest.
16. ΖΘ	<i>Id.</i>	ΖΘ τετράγωνον
17. ἀδύνατον εἰδείχθαι	<i>Id.</i>	εἰδείχθαι ἀδύνατον*
18. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
19. τετράγωνον	deest	concordat cum edit. Paris.

L E M M A.

1. ὁ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
3. χωρίον	<i>Id.</i>	deest.
4. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
5. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO III.

1. ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἔχούσας καὶ ὁμοίας τῆ ὅλη	ἀλλήλας καὶ τῆ ὅλη τρι- γώνους ἐξούσας βάσεις	concordat cum edit. Paris.
2. τε καὶ ὁμοίας	deest	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. δὲ	<i>Id.</i>	δὴ
6. τέ	deest	concordat cum edit. Paris.
7. περιέξουσιν*	<i>Id.</i>	περιέχουσιν*
8. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
9. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.
10. τέ ἐστὶ καὶ ὁμοιον*	<i>Id.</i>	καὶ ὁμοιόν ἐστίν*
11. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
12. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
13. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
14. ΔΛΘ	<i>Id.</i>	ΔΘΛ τριγώνω.
15. οὔσαι	deest	concordat cum edit. Paris.
16. περιέξουσιν*	<i>Id.</i>	περιέχουσιν
17. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 18. ἐστὶ | <i>Id.</i> | deest. |
| 19. ὁμοία εἰδείχθη | <i>Id.</i> | εἰδείχθη ὁμοία |
| 20. ὥστε καὶ πυραμῖς, ἥς βάσις
μὲν ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον, κο-
ρυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία
ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν
ἐστὶ τὸ AΕΗ τρίγωνον, κορυφή
δὲ τὸ Θ σημεῖον | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 21. ἢ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, . | <i>Id.</i> | δύο, πρίσματα ἰσοῦψῆ ὄσι, |
| 22. ἐστὶ | <i>Id.</i> | εἰσὶν |
| 23. ἐστὶ | <i>Id.</i> | deest. |
| 24. βάσις, | <i>Id.</i> | βάσις, |
| 24. βάσεις | <i>Id.</i> | βάσις |
| 25. καὶ | <i>Id.</i> | deest. |
| 26. μὲν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 27. μὲν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 28. μὲν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 29. μὲν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 30. μὲν | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 31. τε δύο πυραμίδας, ἴσας τε
καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας
τῇ ἔλῃ, | τε δύο πυραμίδας, ἴσας
ἀλλήλαις | δύο πυραμίδας, reliqua con-
cordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO IV.

- | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων
ἐκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ
τοῦτο αἰεὶ γίνονται | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ | <i>Id.</i> | deest. |
| 3. καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων
ἐκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον γε-
νοήσθω διηρημένη, καὶ τοῦτο
αἰεὶ γιγνέσθω | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 4. πάντα | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶ. | <i>Id.</i> | ὁμοίον ἐστὶ τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

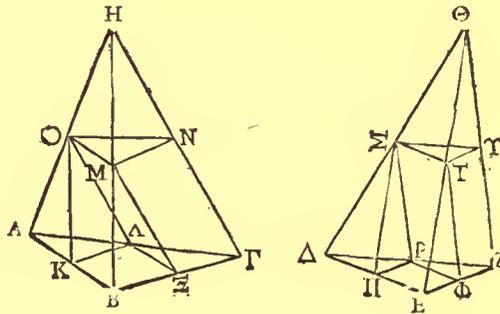
EDITIO OXONIÆ.

6. τῆς ΓΞ, ἢ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ . . . *Id.* τῆ ΓΞ, ἢ δὲ ΕΖ τῆ ΖΦ.
 7. εὐθύγραμμο deest concordat cum edit. Paris.
 8. τρίγωνον οὕτως τὸ ΛΞΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΛΞΓ concordat cum edit. Paris.
 9. ἐστι deest. concordat cum edit. Paris.

10. A vocabulo καὶ duodecimæ lineæ paginæ 134 ad calcem propositionis, hæc legere sunt in codicibus *a*, *h*; alii vero codices concordant cum editione Oxoniæ. Sed in codice *g*, glossema marginale concordat cum editione Oxoniæ.

Ὡς δὲ τὰ εἰρήμιστα πρίσματα πρὸς ἀλλήλα οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμο, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμο, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα,

Ut autem dicta prismata inter se sunt ita prismata cujus basis quidem ΚΒΞΛ parallelogrammum, opposita autem ΟΜ recta, ad prisma cujus basis quidem ΠΕΦΡ parallelogrammum, opposita autem recta ΣΤ, et duo igitur prismata



καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμο, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὰ πρίσματα οὗτε βάσις μὲν τὸ

et cujus basis quidem ΚΒΞΛ parallelogrammum, opposita autem ipsa ΟΜ, et cujus basis quidem ΛΞΓ triangulum, oppositum autem ipsum ΟΜΝ, ad prismata et cujus basis quidem ipsum ΠΕΦΡ,

Mais les prismes dont nous venons de parler sont entre eux comme le prisme dont la base est le parallélogramme ΚΒΞΛ opposé à la droite ΟΜ est au prisme dont la base est le parallélogramme ΠΕΦΡ opposé à la droite ΣΤ, et comme les deux prismes qui ont pour bases le parallélogramme ΚΒΞΛ opposé à la droite ΟΜ, et le triangle ΛΞΓ opposé à ΟΜΝ, sont aux prismes qui ont pour bases

ΠΕΦΡ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεΐα, καὶ οὗ βά-
 σις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ·
 καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν
 οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρη-
 μένα δύο πρίσματα. Καὶ ὁμοίως ἐὰν διαιρεθῶσιν
 αἱ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ πυραμίδες εἰς τε δύο πρίσματα
 καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις
 πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ
 πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ
 πυραμίδι δύο πρίσματα. Ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις
 πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς
 τὴν ΔΕΖ βάσιν, ἴσον γὰρ ἐκάτερον τῶν ΟΜΝ,
 ΣΤΥ τριγώνων ἐκατέρω τῶν ΔΞΓ, ΡΦΖ· καὶ
 ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν
 οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα
 πρίσματα. Ὁμοίως δὲ καὶ τὰς ὑπολειπομένας
 πυραμίδας διέλωμεν εἰς τε δύο πυραμίδας καὶ
 εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς
 τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι
 πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι
 πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Ὅπερ εἶδει δείξαι.

opposita autem ΣΤ recta, et cujus basis qui-
 dem ΡΦΖ triangulum, oppositum vero ipsum
 ΣΤΥ; et ut igitur ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basim
 ita dicta duo prismata ad dicta duo prismata.
 Et similiter, si dividantur ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ py-
 ramides et in duo prismata et in duas pyra-
 mides, erit ut ΟΜΝ basis ad ΣΤΥ basim ita
 ipsa in ΟΜΝΗ pyramide duo prismata ad ipsa
 in ΣΤΥΘ pyramide duo prismata. Sed ut ΟΜΝ
 basis ad ΣΤΥ basim ita ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ ba-
 sim, æquale enim utrumque ipsorum ΟΜΝ,
 ΣΤΥ triangulorum utrique ipsorum ΔΞΓ, ΡΦΖ;
 et ut igitur ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basim ita qua-
 tuor prismata ad quatuor prismata. Similiter
 autem et si reliquas pyramides dividamus et in
 duas pyramides et in duo prismata, erit ut ΑΒΓ
 basis ad ΔΕΖ basim ita ipsa in ΑΒΓΗ pyramide
 prismata omnia ad ipsa in ΔΕΖΘ pyramide
 prismata omnia multitudine æqualia. Quod
 oportebat ostendere.

le parallélogramme ΠΕΦΡ opposé à la droite ΣΤ, et le triangle ΡΦΖ opposé à ΣΤΥ; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme les deux prismes dont nous avons parlé sont aux deux prismes dont nous avons parlé. Semblablement, si nous partageons les pyramides ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ en deux prismes et en deux pyramides, la base ΟΜΝ sera à la base ΣΤΥ comme les deux prismes contenus dans la pyramide ΟΜΝΗ sont aux deux prismes contenus dans la pyramide ΣΤΥΘ. Mais la base ΟΜΝ est à la base ΣΤΥ comme la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ, car chacun des triangles ΟΜΝ, ΣΤΥ est égal à chacun des triangles ΔΞΓ, ΡΦΖ; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme quatre prismes sont à quatre prismes. Semblablement, si nous partageons les pyramides restantes en deux pyramides et en deux prismes, la base ΑΒΓ sera à la base ΔΕΖ comme la somme des prismes contenus dans la pyramide ΑΒΓΗ est à la somme des prismes contenus, en même nombre, dans la pyramide ΔΕΖΘ. Ce qu'il fallait démontrer,

554 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX IGO.

EDITIO OXONIE.

11. ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν OMN, *Id.* deest.
 ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν
 ΛΞΓ, ΡΦΖ

LEMMA.

- | | | |
|-------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ ΡΦΖ | ΖΡΦ | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τρίγωνον, | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τρίγωνα | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 4. αἰ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐστὶ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τυγχάνον τα πρὸς | καὶ πρὸς | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἔστιν, | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐστὶν | <i>Id.</i> | ἔσται, |

PROPOSITIO V.

- | | | |
|-------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 1. βάσιν | <i>Id.</i> | deest. |
| 2. πυραμίδες ὁμοίως διηρήσθω-
σαν, | <i>Id.</i> | διηρήσθωσαν πυραμίδες ὁμοίως, |
| 3. ἐλάττωτες | <i>Id.</i> | ἐλάττωτες |
| 4. ἕνεκα | ἕνεκεν | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἀλλὰ καὶ | <i>Id.</i> | ἀλλ' |
| 6. ἐστὶν | <i>Id.</i> | deest. |
| 7. ἐστὶν | <i>Id.</i> | deest. |
| 7. ἐστὶν | <i>Id.</i> | deest. |

PROPOSITIO VI.

- | | |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ὧν αἰ βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ, <i>Id.</i> | πολυγώνους ἔχουσιν βάσεις τὰς
ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, κορυφὰς δὲ
τὰ Μ, Ν σημεῖα |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|

5. Sic se habent omnes codices et editiones Basilie Oxoniæque, codicibus *a*, *h* tantum exceptis, qui concordant cum editione Parisiensi.

Διηρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βᾶσις εἰς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ τρίγωνα· ἡ δὲ ΖΗΘΚΑ εἰς τὰ ΖΗΘ, ΖΟΚ, ΖΚΑ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἐκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοῦψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως ἢ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπεζίον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως ἢ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως ἢ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα.

Dividatur enim basis quidem ΑΒΓΔΕ in ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ triangula; basis autem ΖΗΘΚΑ in ΖΗΘ, ΖΟΚ, ΖΚΑ triangula, et intelligantur super unoquoque triangulo pyramides æquealtæ cum sex ex principio pyramidibus. Et quoniam est ut ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum ita ΑΒΓΜ pyramis ad ΑΓΔΜ pyramidem, et componendo ut ΑΒΓΔ trapezium ad ΑΓΔ triangulum ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad ΑΓΔΜ pyramidem. Sed et ut ΑΓΔ triangulum ad ΑΔΕ triangulum ita ΑΓΔΜ pyramis ad ΑΔΕΜ pyramidem;

Car partageons la base ΑΒΓΔΕ en triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, et la base ΖΗΘΚΑ en triangles ΖΗΘ, ΖΟΚ, ΖΚΑ, et imaginons sur chaque triangle des pyramides de même hauteur que les six premières pyramides. Puisque le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme la pyramide ΑΒΓΜ est à la pyramide ΑΓΔΜ (5. 12), par addition, le trapèze ΑΒΓΔ sera au triangle ΑΓΔ comme la pyramide ΑΒΓΔΜ est à la pyramide ΑΓΔΜ. Mais le triangle ΑΓΔ est au triangle ΑΔΕ comme la pyramide ΑΓΔΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ;

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OKONIE.
4. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι .	<i>Id.</i>	διὰ τὰ αὐτὰ δὴ
5. τρίγωνα	τριγώνους	concordat cum edit. Paris.
6. ὕψος ἴσον	<i>Id.</i>	ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος
Lin. 11, pag. 145. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἢ ΑΒΓΔΕ βᾶσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βᾶσιν οὕτως ἢ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα, ὡς δὲ ἢ ΑΔΕ βᾶσις πρὸς τὴν ΖΚΑ βᾶσιν οὕτως ἢ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΑΝ πυραμίδα	Ἀλλ' ὡς ἢ ΑΔΕ βᾶσις πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕ βᾶσιν οὕτως ἢ ἢ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΜ πυραμίδα· καὶ	concordat cum edit. Paris.
8. πάλιν	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. ἐχούσας βᾶσις	<i>Id.</i>	βάσεις ἐχούσας.
2. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.

3. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστι	<i>Id.</i>	deest.
6. ἐστι	<i>Id.</i>	deest.
7. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
8. ἐστι	deest	concordat cum edit. Paris.
9. ἐχούσας βάσεις	<i>Id.</i>	βάσεις ἐχούσας.
10. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
11. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
12. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι	deest	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

1. τὴν αὐτὴν βάσιν	<i>Id.</i>	τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν
2. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ τὸ αὐτὸ	τὸ αὐτὸ καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον	καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον καὶ ὡς ἡ ὅλη βάση πρὸς ἕναστον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VIII.

1. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
2. γωνία, ἢ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία	γωνία, ἢ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ	ἢ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία
3. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. παραλληλόγραμμα	deest	concordat cum edit. Paris.
4. τε καὶ ὅμοιά ἐστι,	deest	τέ ἐστι καὶ ὅμοια,
5. τε καὶ ὅμοιά ἐστι.	<i>Id.</i>	τέ ἐστι καὶ ὅμοια.
6. περιέχεται.	<i>Id.</i>	περιέχονται.
7. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἀρα	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM.

1. Hoc corollarium in codice 190 exaratum est in infimâ paginâ.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. καὶ	<i>Id.</i>	καὶ εἰς
3. ἔχουσιν βάσιν	<i>Id.</i>	βάσιν ἔχουσιν
4. πυραμίδα,	<i>Id.</i>	deest.
5. ἰσόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.	πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO IX.

1. ἴσαι πυραμίδες, τριγώνους βάσεις ἔχουσαι	<i>Id.</i>	πυραμίδες ἴσαι, τριγώνους ἔχου- σαι βάσεις
2. βάσιν	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ	ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἄρα	concordat cum edit. Paris.
4. παραλληλόγραμμον	<i>Id.</i>	deest.
5. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
6. βάσεις	<i>Id.</i>	deest.
7. παραλληλεπίπεδου ὕψος.	<i>Id.</i>	deest.
8. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. στερεοῦ	deest	concordat cum edit. Paris.
10. ἴση ἄρα ἢ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.	<i>Id.</i>	ἢ ἄρα ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι ἴση ἐστὶ.

PROPOSITIO X.

1. ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἔσται.
2. μὴ γάρ.	<i>Id.</i>	γὰρ μὴ
3. στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσ- ματα ἰσοῦψῆ· τὰ δὲ ὑπὲρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παρα- λληλεπίπεδα πρὸς ἀλλήλα	<i>Id.</i>	ἰσοῦψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα· τὰ ἄρα πρίσματα
4. τετραγώνου	<i>Id.</i>	κύκλου
5. ἡμίση ἐστὶ	ἡμίσοι ἐστὶ	ἡμίσειά ἐστι
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
Lin. 20. μὲν	<i>Id.</i>	μὲν ἐστι

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

7. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἐστὶν	<i>Id.</i>	ἔσται
9. τριπλάσιος	<i>Id.</i>	τριπλασίων
10. ἐστὶν ἢ τριπλάσιος . . .	<i>Id.</i>	ἢ τριπλάσιός ἐστιν
11. κύκλον τετράγωνον περιγρά- ψωμεν,	<i>Id.</i>	κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγω- νον,
12. τετραγώνου	<i>Id.</i>	deest.
13. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
Lin. 3, pag. 163, ἑαυτὸ . . .	<i>Id.</i>	ἑαυτὴν
15. τμήματα	ὑπομήματα	concordat cum edit. Paris.
16. ἐστὶ μέρος	<i>Id.</i>	μέρος
17. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XI.

1. εἰσιν	deest	concordat cum edit. Paris.
2. κῶνον	<i>Id.</i>	deest.
3. ἔσται	<i>Id.</i>	ἔστω
4. ἦτοι	<i>Id.</i>	ἢ
5. ἡ ἀρα πυραμὶς, ἥς βᾶσις τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, κερυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κῶνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κῶνου	deest	concordat cum edit. Paris.
6. μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ	μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ	μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν
7. τέμνοντες	<i>Id.</i>	τέμνοντας
8. ἀεὶ τοῦτο	<i>Id.</i>	τοῦτο ἀεὶ
9. ἔσται	ἐστὶν	concordat cum edit. Paris.
10. οὐδέ ἐστὶν	<i>Id.</i>	οὐδ'
11. ἀδύνατον εἰδείχθη	<i>Id.</i>	εἰδείχθη ἀδύνατον.
12. κύκλον	<i>Id.</i>	deest.
13. οὕτως	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ	<i>Id.</i>	ἢ
2. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἔστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ	<i>Id.</i>	ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ
4. ἔχει	ἔχει	concordat cum edit. Paris.
5. πρότερον πρὸς ἕλαττον	<i>Id.</i>	πρὸς ἕλαττον πρότερον
6. τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα	<i>Id.</i>	ἰσοϋψῆς
7. μέρες	<i>Id.</i>	deest.
8. ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου	<i>Id.</i>	ἀπ' αὐτοῦ
9. καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα,	deest	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
12. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
13. ἐπεὶ	<i>Id.</i>	ἐπειδὴ
Lin. 12. ἐπεὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
15. ἐπὶ τὸ Κ εὐθείας,	<i>Id.</i>	εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ,
16. ἐφ' ἑκάστου	<i>Id.</i>	ἐπὶ
17. τὰς αἰτὰς κορυφᾶς	τὴν αὐτὴν κορυφὴν	concordat cum edit. Paris.
18. ἀλλ'	καὶ	concordat cum edit. Paris.
19. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
20. πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημείον	κορυφὴ δὲ τὸ Α	concordat cum edit. Paris.
21. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
22. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
23. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
24. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
25. σημείον,	deest	concordat cum edit. Paris.
26. πολύγωνον,	deest	concordat cum edit. Paris.
27. ἔστιν	deest	concordat cum edit. Paris.
28. σημείον,	deest	concordat cum edit. Paris.
29. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

30. μὲν ἔστιν	deest	concordat cum edit. Paris.
31. σημείον,	deest	concordat cum edit. Paris.
32. ἴστιν	deest	concordat cum edit. Paris.
33. ἄρα κῶνος	<i>Id.</i>	κῶνος ἄρα
34. οὕτως	deest	concordat cum edit. Paris.
35. ἐδείχθη γὰρ πᾶς κῶνος κυ- λίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὑψος ἴσον	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOΣITIO XIII.

1. ἄξιοι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον . . .	<i>Id.</i>	ΕΖ ἄξιοι
2. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
3. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
Lin. 4. καὶ νοεῖσθω ὁ πρὸς τοῦ ΑΜ ἄξιος κύλινδρος ὁ ΟΧ οὗ βάσις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι. καὶ ἐκε- λευσθήτω διὰ τῶν Ν, Ζ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κύλινδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ, ΤΘ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ κέντρα.	<i>Id.</i>	καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν Α, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Α, Ν, Ξ, Μ ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Α, Ν, Ξ, Μ κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ ἴσοι τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νε- νοήθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ.
4. οἱ ἄρα	καὶ οἱ	concordat cum edit. Paris.
5. ἀλλήλοις.	<i>Id.</i>	deest.
6. καὶ οἱ	<i>Id.</i>	οἱ
7. εἰσὶν	<i>Id.</i>	καὶ
8. τῶν ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ τῷ πλήθει τῶν ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ	τῷ πλήθει	concordat cum edit. Paris.
9. ἔσται	<i>Id.</i>	ἔστι
10. ὁ ἄξων τοῦ ἄξιος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κύλινδρου,	<i>Id.</i>	ΚΑ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξιος, μείζων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυ- λίνδρου,
11. μεγεθῶν ὄντων,	<i>Id.</i>	ὄντων μεγεθῶν
12. κύλινδρος.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. κύκλων εἰ EB, ZΔ· λέγω ἔτι ἔστιν	<i>Id.</i>	κύλινδροι οἱ EB, ZΔ· λέγω ὅτι
2. νενοήσθω	ἐννοήσθω	concordat cum edit. Paris.
3. ἀλλήλοις·	deest	concordat cum edit. Paris.
4. κῶνον·	<i>Id.</i>	κῶνοι· τριπλάσιον γὰρ οἱ κύλινδροι τῶν κῶνων·

PROPOSITIO XV.

1. τῶν	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ ἔστιν	<i>Id.</i>	τουτέστιν
3. ἀντιπεποιηθέν,	<i>Id.</i>	ἀντιπεπύονθασιν,
4. μείζον τὸ MN,	<i>Id.</i>	τὸ MN μείζον,
5. τοῖς τῶν EZHΘ, PO κύκλων ἐπιπέδους,	<i>Id.</i>	ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδους τῶν EZHΘ, PO κύκλων,
6. ἄλλος δὲ τις ὁ EΣ κύλινδρος·	deest	concordat cum edit. Paris.
7. κύλινδρον	<i>Id.</i>	deest.
8. βάσιν,	deest	concordat cum edit. Paris.
Lin. 2, pag. 186. τῷ ΤΥΣ .	deest	concordat cum edit. Paris.
9. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. ὕψος.	<i>Id.</i>	deest.
11. ὕψος	deest	concordat cum edit. Paris.
12. κύλινδρον·	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. τε καὶ ἀρτιόπλευρον	<i>Id.</i>	deest.
2. εὐθεία	<i>Id.</i>	deest.
3. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
4. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
5. ἐγγραφῆσεται	ἐγγραφῆσεται	concordat cum edit. Paris.
6. τε	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVII.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐπιφέρειαν	περιφέρειαν	concordat cum edit. Paris.
2. ἐρίγητο	<i>Id.</i>	ἐρίγητο
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. εὐθειῶν	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τε	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἐπιζευχθεῖσα,	ἐπιζευχθεῖσα	concordat cum edit. Paris.
7. ἔστω	<i>Id.</i>	ἔστωσαν
8. ἐστὶν ἑρθὰ	<i>Id.</i>	ἑρθὰ ἐστὶν
9. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. ἐκάτερον	<i>Id.</i>	ἐκάτερα
11. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
12. καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισ- φαιρίου	deest	concordat cum edit. Paris.
13. ἐγγεγραμμένον	συγγεγραμμένον	concordat cum edit. Paris.
14. ἐκ πυραμίδων συζυγόμενον ὧν βάσεις μὲν	πυραμίσι περιεχόμενον, ὧν βάσεις μὲν	ἢ πυραμίδων συζυγόμενον ὧν βά- σεις
15. ἰφάψεται	<i>Id.</i>	ἰφάπτεται
16. ἢ ΛΨ,	deest	concordat cum edit. Paris.
17. ἐκατέραν	<i>Id.</i>	ἐκατέρας
18. ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἄρα
19. ἀπὸ τῆς	<i>Id.</i>	deest.
20. Καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ο σημεῖου	ἤχθω ἀπὸ τοῦ ΚΟ	concordat cum edit. Paris.
21. δὴ	deest	concordat cum edit. Paris.
22. τῶν	deest	concordat cum edit. Paris.
23. ἔτι	ἔστι	concordat cum edit. Paris.
24. ψαύσει	ψαύει	concordat cum edit. Paris.

ALITER.

1. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

5. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
6. τῆς ΗΩ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ·	ΗΩ λοιπὸν· ἄρα τὸ ἀπὸ ΨΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΗ·	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

1. σφαῖρας	<i>Id.</i>	deest.
2. πυραμῖς ἄρα,	<i>Id.</i>	ἄρα πυραμῖς,
3. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. δὲ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἑτέρας	deest	concordat cum edit. Paris.
Lin. 6. καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαῖρα . . .	καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαῖρα . . .	ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α
Lin. 8. σφαῖρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἔξει	<i>Id.</i>	ἔχει

PROPOSITIO XVIII.

1. Νενοήσθωσαν	Ἐννοήσθωσαν	concordat cum edit. Paris.
2. Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ,	<i>Id.</i>	Εἰ γὰρ μὴ,
3. ἡ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον	τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα	concordat cum edit. Paris.
4. νενοήσθω ἡ ΔΕΖ σφαῖρα . . .	ἐννοήσθω ἡ ΔΕΖ	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. λόγον	λόγον ἔχει,	concordat cum edit. Paris.
7. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
8. ὅπερ ἀδύνατον·	deest	concordat cum edit. Paris.
9. ἐπειδὴ περ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΜΝ τῆς ΔΕΖ, ὡς ἔμπροσθεν εἰδείχθη θῆ·	<i>Id.</i>	ὡς ἔμπροσθεν εἰδείχθη, ἐπειδὴ περ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΜΝ τῆς ΔΕΖ·
10. τινα	<i>Id.</i>	deest.

LIBER DECIMUS-TERTIUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. τῆς ἑλκς.	τετραγώνου.	concordat cum edit. Paris.
2. τῆ ΑΓ	τῆς ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
3. τῆς	<i>Id.</i>	τῆ
4. Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετράγωνα	<i>Id.</i>	Αναγράφθασαν γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετράγωνων
5. τῆς ΑΘ.	<i>Id.</i>	τῆ ΑΘ.
6. τοῦ ΓΘ	<i>Id.</i>	deest.
7. τοῦ ΓΘ διπλάσια	<i>Id.</i>	διπλάσια τοῦ ΓΘ.
8. ἴσον ἕλον ἄρα	ἴσον ἄρα	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO II.

Lin. 11. ἀφ'	<i>Id.</i>	ἀπὸ
2. ἐν τῷ ΑΖ τὸ σχῆμα,	τὸ ἐν τῷ ΑΖ σχῆμα,	concordat cum edit. Paris.
3. ΖΒ ἐπὶ τὸ Ε.	ΒΕ.	concordat cum edit. Paris.
5. πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ, τετραπλάσιος	<i>Id.</i>	τούτῃστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ, τετρα- πλάσιος
6. τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ,	ἐστι τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΑ,	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ ΘΒ διπλάσια	<i>Id.</i>	διπλάσια τοῦ ΘΒ.

LEMMA.

1. διπλῆ τῆς ΓΑ	<i>Id.</i>	τῆς ΓΑ διπλῆ.
2. πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ.	<i>Id.</i>	πεντάπλασιον ἄρα ἐκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ.
3. διπλασίον ἐστὶ	<i>Id.</i>	διπλασία
4. διπλασίον	<i>Id.</i>	διπλασίον
5. μίζον	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO III.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἡ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
2. διπλαῦν	<i>Id.</i>	deest.
3. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	<i>Id.</i>	ἔστι
5. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΡΣ	deest	concordat cum edit. Paris.
7. Ἀλλὰ τὸ ΜΖ, ΓΗ ἔστιν ἴσον	deest	concordat cum edit. Paris.
8. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
9. τετραγώνου ὁ ΕΟΠ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΗ. Ἀλλ' ὁ ΕΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ	<i>Id.</i>	τὸ ἄρα ΔΝ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΗΖ τετραγώνου.

PROPOSITIO IV.

1. τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΘΗ ὥστε καὶ	τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ΘΚ τετραγώνου καὶ ἔστιν	concordat cum edit. Paris.
--------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------	----------------------------

PROPOSITIO V.

1. αὐτῇ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἡ ὅλη	<i>Id.</i>	ἕλη ἢ
3. σημείον,	<i>Id.</i>	deest.
4. κείσθω	deest	concordat cum edit. Paris.
5. οὔν	deest	concordat cum edit. Paris.
6. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
7. τῶν	deest	concordat cum edit. Paris.
8. τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ	<i>Id.</i>	τὸ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ, τὸ δὲ ΓΘ ἴσον τῷ ΔΘ.
9. ὅλω τῷ ΑΕ ἐστὶν ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον ἐστὶν ὅλω τῷ ΑΕ.

ALITER.

Hoc *aliter* adest in *a, c, e, g, h, m*; deest autem in *b, d, f, l, n*; in *c, e* vero deest quintum theorema, cujus *aliter* locum tenet.

ANALYSIS ET SYNTHESIS.

In codicibus *h, m, n*, analyses et syntheses quinque priorum theorematum conjunctim subsequuntur quintum theorema, et in codicibus *a, e* (per errorem) sextum theorema; in codicibus vero *d, f, g, l*, et in editionibus Basilieæ Oxoniæque analyses et syntheses separatim subsequuntur theoremata ad quæ spectant.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. τί ἐστὶν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστὶ σύνθεσις;	<i>Id.</i>	deest.
3. μὲν οὖν	<i>Id.</i>	deest.
4. δὲ	<i>Id.</i>	ἐστὶ
5. τὴν τοῦ ζητουμένου κατάλη- ξιν ἢ κατάληψιν.	τι ἀληθῆς ὁμολογούμενον,	concordat cum edit. Paris.

PRIMI THEOREMATIS ANALYSIS SINE FIGURA.

1. ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑ- ΤΟΣ Ἡ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΝΕΥ ΚΑ- ΤΑΓΡΑΦΗΣ.	<i>Id.</i>	ΤΟΥ ΕΙΡΗΜΕΝΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑ- ΤΟΣ Ἡ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΝΕΥ ΑΝΑΓΡΑΦΗΣ.
2. τῆς ΑΔ	ΑΔ.	concordat cum edit. Paris.
3. τῆς	<i>Id.</i>	τοῦ
4. τῆς ΑΔ.	ΑΔ.	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ.	ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ.	τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ.

SYNTHESIS.

1. ΣΥΝΘΕΣΙΣ.	<i>Id.</i>	ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ.
2. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
Lin. 13. τῶν	deest	concordat cum edit. Paris.
4. τῆς ΑΔ	ΑΔ	concordat cum edit. Paris.

SECUNDI THEOREMATIS ANALYSIS SINE FIGURA.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΥ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΝΕΥ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ.	<i>Id.</i>	ΤΟΥ ΕΙΡΗΜΕΝΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ.
2. γάρ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. δις	<i>Id.</i>	deest.
4. τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ ὥστε καὶ	ΑΓ τοῦ ἀπο ΑΔ ὥστε καὶ	τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ ὥστε
5. πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ἐστι δὲ.	πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. Ἐστι δὲ.	πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ἐστι δὲ διὰ τῶν ὑπέθεσιν.

SYNTHESIS.

1. τετραπλάσιόν	<i>Id.</i>	τετραπλάσιά
2. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ

TERTII THEOREMATIS ANALYSIS.

1. ἡ	<i>Id.</i>	τὸ
2. τὸ	<i>Id.</i>	τοῦ
3. ἄρα τὸ	τὸ ἄρα	concordat cum edit. Paris.

SYNTHESIS.

1. ἄρα τὸ	τὸ ἄρα	concordat cum edit. Paris.
2. ἀπὸ τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.

QUARTI THEOREMATIS ANALYSIS.

1. ἄρα τὸ	τὸ ἄρα	concordat cum edit. Paris.
2. ἀπαξ	deest	concordat cum edit. Paris.

SYNTHESIS.

1. ἄρα τὸ	τὸ ἄρα	concordat cum edit. Paris.
2. τριπλάσιόν	<i>Id.</i>	τριπλάσιόν
3. τετράγωνον	deest	concordat cum edit. Paris.

QUINTI THEOREMATIS SYNTHESIS.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. οὖν	deest	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
3. τε	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

Hoc theorema deest in codice e.

1. ἐπὶ τὸ Δ,	deest	concordat cum edit. Paris.
2. ῥητὴ γάρ ἐστιν	ῥητὴ γάρ	ῥητὴν γάρ ἐστιν
4. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ	τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. δύο	αἱ δύο	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία	καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ	ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.
5. γωνίαις	<i>Id.</i>	deest.
Lin. 12. ἴση	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ
Lin. 14. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ	ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ	concordat cum edit. Paris.
9. πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ	καὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO VIII.

1. σημείον,	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
3. γωνίας ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἐπειδήπερ	<i>Id.</i>	ἐπειδὴ
5. ἄρα γωνία	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὸν αὐτὸν κύκλον	<i>Id.</i>	αὐτὸν
2. κατὰ τὸ Γ,	deest	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ ἴστω	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἐγγραφομένου,	deest	concordat cum edit. Paris.
5. ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία°	<i>Id.</i>	γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ°
6. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
7. λοιπῇ	deest	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
10. εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λό- γον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά	εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λό- γον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά	ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμη- μα αὐτῆς

PROPOSITIO X.

1. ΑΒΓΔΕ κύκλον	<i>Id.</i>	αὐτὸν
2. ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθα	<i>Id.</i>	ἐγγεγράφθα ἰσόπλευρον
2. σημείον,	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. δὲ	<i>Id.</i>	γάρ
6. τῆς	<i>Id.</i>	τῇ
7. τῇ ΒΚ περιφερείᾳ.	<i>Id.</i>	τῆς ΒΚ περιφερείας.
8. μὲν καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. περιφερείᾳ°	deest	concordat cum edit. Pa ris.
10. τῆς	<i>Id.</i>	τῇ
11. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
13. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
14. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
15. τοῦ τε ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ, ἢ ὕπὸ ΝΑΚ°	τοῦ ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ ἢ πρὸς τῷ Α°	concordat cum edit. Paris.
16. ΚΑ	<i>Id.</i>	ΚΑ εὐθεῖα

PROPOSITIO XI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. πλευρά	<i>Id.</i>	πλευρά ἢ ΑΒΓΔΕ.
2. τῆς	<i>Id.</i>	τῆ
3. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἐπιζεύζωμεν	<i>Id.</i>	ἐπιζεύζομεν
5. τῆς	<i>Id.</i>	τῆ
6. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
8. ἰστὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
10. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
11. Ὡς δὲ	<i>Id.</i>	Ἄλλ' ὡς
Lin. 13. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
12. τῆς ΓΜ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς MK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ	ΓΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ.	concordat cum edit. Paris.
13. τετμημένης,	τεμνομένης,	concordat cum edit. Paris.
14. τῆ	<i>Id.</i>	τῶ
16. ἰστὶ	<i>Id.</i>	deest.
17. λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΣ.	δυνάμει μόνον	concordat cum edit. Paris.
19. τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ.	ἢ ΚΒ τῆς ΚΖ	concordat cum edit. Paris.
20. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
21. ἢ ΒΚ	ἐστὶν ἢ ΚΒ	concordat cum edit. Paris.
23. δὴ	<i>Id.</i>	γὰρ
24. μήκει	deest	concordat cum edit. Paris.
26. μήκει	deest	concordat cum edit. Paris.
27. μήκει	deest	concordat cum edit. Paris.
28. γίνεσθαι	γίνεσθαι	concordat cum edit. Paris.
29. τριγώνω	<i>Id.</i>	deest.
30. ἐστίν	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐστὶ μέρος	<i>Id.</i>	μέρος ἐστὶ
3. πλευρά	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
Lin. 9. τῆς BE	BE	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

1. ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσο- πλευρών,	<i>Id.</i>	deest.
2. καταγεγράφθω	<i>Id.</i>	γεγράφθω
3. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἀφηρήσθω	ἀφαίρεσθω	concordat cum edit. Paris.
5. τῆς ΔΓ,	τῆς ΑΔ, ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ ἀναστρέψαντι ὡς ἢ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ,	concordat cum edit. Paris.
6. τριγώνων	<i>Id.</i>	τριγώνων ἴσων καὶ
7. δυνάμει	deest	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶ	ἐστὶ δυνάμει	concordat cum edit. Paris.
11. γίνεσθαι	γίνεσθαι	concordat cum edit. Paris.
12. ἔσται	ἐστὶν	concordat cum edit. Paris.
13. ἄρα ἡμιολία	ἡμιολία ἄρα	concordat cum edit. Paris.
14. δυνάμει	deest	concordat cum edit. Paris.
16. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

1. τὴν πυραμίδα	τὰ πρότερα	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἰστὶν	<i>Id.</i>	deest.
4. κορυφαὶ	κορυφή	concordat cum edit. Paris.
5. συνίσταται	συνέσταται	concordat cum edit. Paris.

6. ὀρθὰς	<i>Id.</i>	ἴσας
7. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XV.

1. συστήσασθαι,	συνεστήσασθαι,	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ πρότερα	τὴν πυραμίδα	concordat cum edit. Paris.
3. τριπλασίον	<i>Id.</i>	τριπλῆ
4. τὴν	<i>Id.</i>	ἐκάστην
5. περιεχόμενος.	<i>Id.</i>	περιεχόμενον
6. τριπλασίον	<i>Id.</i>	τριπλασία
7. καὶ ἂν	<i>Id.</i>	καὶ
8. ἥξει	<i>Id.</i>	ἥξαι
9. ὁμοίως	<i>Id.</i>	ὁμοίως δὲ
10. πάλιν	deest	concordat cum edit. Paris.
11. ἢ KE τῆ EA	<i>Id.</i>	τῆ EA ἢ KE
12. δεθείση	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

Lin. 17. pag. 270. EA, AZ, ZM, MH, HN, NΘ, ΘΞ, ΞK, KO, OE, καὶ ὁμοίως	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἐπιζευγύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη	<i>Id.</i>	ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγύουσαι
4. καὶ παράλληλός ἐστιν.	<i>Id.</i>	ἐστιν καὶ παράλληλός.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	καὶ
7. πενταγώνου	<i>Id.</i>	πεντάγωνος
8. τριγώνων	deest	concordat cum edit. Paris.
9. EZHΘK κύκλου	<i>Id.</i>	κύκλου τοῦ EZHΘK
10. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
12. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
13. αὐτὸ	<i>Id.</i>	αὐτὸν
14. Ἐπεὶ	<i>Id.</i>	Ἐπειδὴ
15. μὲν	ἔστιν	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

16. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γρα- φόμενον ἡμικύκλιον ἦξει καὶ διὰ τοῦ Λ.	deest	concordat cum edit. Paris.
17. τετραπλασίων	τετραπλῆ	concordat cum edit. Paris.
18. πενταπλασίων ἄρα ἐστὶν ἢ AB τῆς ΒΓ.	πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἢ AB τῆς ΒΓ.	πενταπλασίων ἄρα ἢ AB τῆς ΒΓ ἐστίν.
19. ἴση ἢ ΔΒ	Id.	ἢ ΔΒ ἴση
20. τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου	Id.	τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ
21. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	deest	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

1. τῆς τοῦ	Id.	τῆς
2. δύο τῶν	Id.	τῶν δύο
3. ἐγγραφομένων.	ἐγγραφομένων. Ὅπερ εἶδει δειξαι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVII.

1. σημεία	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τετμήσθω ἐκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ	Id.	τετμήσθωσαν αἱ ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ εὐθείαι
3. ἐκκείσθωσαν	Id.	κείσθωσαν
4. αὐτῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστίν	Id.	deest.
6. ἴση ἐστίν	Id.	ἐστίν ἴση
7. τοῦ κύβου μέρη	Id.	μέρη τοῦ κύβου
7. πλευραῖς	deest	concordat cum edit. Paris.
9. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
10. τῶν	Id.	τῆς
11. ἐστίν	Id.	deest.
12. ἐστίν	Id.	deest.
13. ἔσται	Id.	ἐστι
14. τέ	Id.	deest.
15. τε	deest	concordat cum edit. Paris.
16. ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.	Id.	deest.
18. τῆς πλευρᾶς	Id.	πλευρᾶ

19. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
20. δυνάμει	deest	concordat cum edit. Paris.
21. πλευρᾶς τοῦ κύβου.	<i>Id.</i>	τοῦ κύβου πλευρᾶς.
22. τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετραμενόμενης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ ΟΣ,	<i>Id.</i>	deest.
23. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
24. οὕτως	deest	concordat cum edit. Paris.
25. ἰσάμει	<i>Id.</i>	ἴσάμει
26. τὴν	<i>Id.</i>	τῶν
27. τῆς	<i>Id.</i>	τῶν

27. In infimâ paginâ codicis 190, et in textu codicum *g*, *m*, hæc legere sunt :

ρητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετραμέσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τὸ ΑΓ· προσκείσθω δὲ ἡ ΑΔ ἡμίσεια τῆς ΑΒ. Ρητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶν δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἡ ΑΓ. Ρητὴ δὲ ἡ ΑΒ, τὸ

rationalis enim AB extremâ et mediâ ratione sectetur in Γ, et sit ΑΓ major portio ; ponatur autem ΑΔ dimidia ipsius ΑΒ ; rationalis igitur et ΑΔ. Et quoniam quintuplum ipsum ex ΓΔ ipsius ex ΔΑ ; ipsæ ΓΔ, ΔΑ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles ; apotome igitur ipsa ΑΓ. Rationalis autem ipsa ΑΒ,



δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῶ ἀποτομὴν· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ· ἑκατέρως ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομὴ ἐστὶ προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν ΑΓ ἢ ΑΔ, τῆς δὲ ΓΒ ἢ ΓΔ·

ipsum vero ex apotomè ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ; apotome igitur est ΒΓ ; utraque igitur ΑΓ, ΓΒ apotome est ; at vero congruens ipsi ΑΓ ipsa ΑΔ, ipsi autem ΓΒ ipsa ΓΔ ;

car que AB soit coupé en extrême et moyenne raison au point Γ ; que ΑΓ soit le plus grand segment, et que ΑΔ soit la moitié de AB ; la droite ΑΔ sera rationnelle. Et puisque le carré de ΓΔ est quintuple du carré de ΔΑ, les droites ΓΔ, ΔΑ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement ; la droite ΑΓ est donc un apotome. Mais AB est une rationnelle, et le carré d'un apotome appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un apotome ; la droite ΒΓ est donc un apotome ; chacune des droites ΑΓ, ΓΒ est donc un apotome ; or la droite ΑΔ est la congruente de ΑΓ, et la droite ΓΔ la congruente de ΓΒ :

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

28. ἡ καλουμένη	deest,	concordat cum edit. Paris.
29. ἡ καλουμένη	deest	concordat cum edit. Paris.
30. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	dcest	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

1. πλευρά.	πλευρά. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.
--------------------	---------------------------	----------------------------

PROPOSITIO XVIII.

1. μὲν	deest	concordat cum edit. Paris.
2. αἱ	<i>Id.</i>	αἱ
3. τῆς	<i>Id.</i>	deest.
4. τριπλασίον.	<i>Id.</i>	τριπλῆ
5. κύβου	κύκλου	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἴση τῇ AB,	<i>Id.</i>	τῇ AB ἴση,
8. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
10. ἡ ΚΑ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰ- κοσάεδρον ἀναγέγραπται.	<i>Id.</i>	deest.
11. ἡ τῆς σφαίρας	<i>Id.</i>	τῆς σφαίρας ἡ
12. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
13. τῆς	<i>Id.</i>	deest.
14. διπλασίον,	<i>Id.</i>	τριπλασίον
15. ἡ	deest	concordat cum edit. Paris.
16. ἡ	ἡ μὲν	concordat cum edit. Paris.
17. ἢτε	ἡ	concordat cum edit. Paris.
18. δὲ	deest	concordat cum edit. Paris.
19. τῆς ZB.	deest	concordat cum edit. Paris.
20. τῇ	<i>Id.</i>	τῆς
21. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.

ALITER.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIENSIS.
1. Ἐπεὶ	Ὅτι μείζων ἐστὶ ἢ MB τῆς NB. Ἐπεὶ	Ἄλλως ὅτι μείζων ἢ MB τῆς NB. Ἐπεὶ
2. καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς NB μείζον ἴσ- τιν*	<i>Id.</i>	deest.

LEMMA.

1. ὑπὸ	<i>Id.</i>	ἀπὸ
2. ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἢ ΒΖ κατὰ τὸ Ν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης*	deest	concordat cum edit. Paris.
3. τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζων ἐστὶν ἢ διπλάσιον*	<i>Id.</i>	μείζων ἐστὶ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΝ*
4. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.

SCHOLIUM.

1. οὐ συσταθήσεται.	συνίσταται	concordat cum edit. Paris.
2. τέσσαρσιν	τέτρασιν	concordat cum edit. Paris.
3. ἢ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. πενταγώνου ἰσοπλεύρου	<i>Id.</i>	ἰσοπλεύρου πενταγώνου
5. αὐτὸ	<i>Id.</i>	deest.
6. σχῆμα	<i>Id.</i>	deest.

LEMMA.

1. τε	deest	concordat cum edit. Paris.
2. τε	deest	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ Ζ,	<i>Id.</i>	καὶ ἔστω τὸ Ζ
4. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
5. τέσσαρσιν	<i>Id.</i>	τέτρασιν
6. πέμπτου.	<i>Id.</i>	πέμπτης
7. ἴστι ἰρθῆς καὶ πέμπτου.	<i>Id.</i>	ἰρθῆς ἐστὶ καὶ πέμπτης

EUCLIDIS DATA.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἀλλήλας	ἀλλήλους	deest.
2. λέγονται,	<i>Id.</i>	λέγεται
3. καὶ γωνίαι, ἃ τὸν αὐτὸν αἰὲ τόπον ἱπέχει.	<i>Id.</i>	καὶ χωρία, καὶ γωνίαι ἃ τὸν αἰὲ τόπον ἔχει.
4. ἢ δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ἢ
5. κύκλων	<i>Id.</i>	κύκλυ
6. τε	deest	concordat cum edit. Paris.
7. τῷ	deest	concordat cum edit. Paris.
8. εὐθεία	<i>Id.</i>	εὐθεῖαν
9. δεδομένη	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO I.

2. ἀρα	deest	concordat cum edit. Paris.
3. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO II.

1. δίδεται	<i>Id.</i>	δίδεται καὶ
2. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴσον	αὐτὸν	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IV.

1. ὅτι	<i>Id.</i>	ἔτι καὶ
2. ἐστὶν ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον ἐστὶν.

PROPOSITIO V.

1. λόγον	<i>Id.</i>	deest.
2. πεπορίσθω	πεπορίσθω	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ἴστί.	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστιν,	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ ΒΓ δοθείς ἴστιν.	τὸ ΒΓ δοθείς	ΒΓ δοθείς ἴστιν.

PROPOSITIO VI.

1. ἐκότερον αὐτῶν	<i>Id.</i>	αὐτῶν ἐκότερον
2. τὰ	<i>Id.</i>	deest.
3. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. δοθέν δὲ τὸ ΔΕ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΕΖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ δοθέν ἴστί· ἴστιν δὲ ἐκατέρων τῶν ΔΕ, ΕΖ δοθέν·	<i>Id.</i>	ἴστιν εὖν ἐκατέρω τῶν ΔΕ, ΕΖ δοθέν·
5. τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ·	ΔΕ πρὸς ΕΖ·	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ ΖΕ·	ΖΕ·	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ ΔΕ.	ΔΕ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

Lin. 12. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
------------------------	----------------------	--------

PROPOSITIO VIII.

1. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
2. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
3. δοθείς.	<i>Id.</i>	deest.
4. ὁ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IX.

1. Δ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα Δ.
--------------------	----------------------	--------

PROPOSITIO X.

1. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
2. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
3. τεῦ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. γὰρ	ἄρα	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὸ ΑΔ'	<i>Id.</i>	καὶ ἔστο τὸ ΑΔ.
2. Ανάπαλιν	<i>Id.</i>	Ανάπαλιν δὴ
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
6. ἔσται	<i>Id.</i>	ἔστιν
7. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ ΑΓ, δο- θέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ,	<i>Id.</i>	deest.
8. τὸ ΔΕ'	ΔΕ.	concordat cum edit. Paris.
9. τὸ ΔΕ	ΔΕ.	concordat cum edit. Paris.
10. τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ	ΑΕ λόγος	τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ
11. ὧν τοῦ ΒΔ πρὸς τὸ ΔΕ	<i>Id.</i>	ὡς καὶ τοῦ ΑΔ πρὸς ΕΔ
12. δὴ	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XII.

1. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

1. δεθείς τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ,	<i>Id.</i>	τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δεθείς,
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

1. ἔσται	ἔστιν	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ	<i>Id.</i>	deest.
3. τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ'	ΓΔ οὕτως τὸ ΗΑ πρὸς ΓΖ.	deest.
4. τὸ ΖΔ δεθείς. Καὶ ἔστι τὸ	ΖΔ δεθείς. Καὶ ἔστι τὸ	τὸ ΖΔ δεθείς. Καὶ ἔστι

PROPOSITIO XV.

1. ἔσται	<i>Id.</i>	ἔστιν
2. ἀφ'	<i>Id.</i>	ἀπὸ;

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ἔσται	ἔστιν	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ ΓΖ	ΓΖ	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστι.	Id.	deest.

PROPOSITIO XVI.

1. μὲν τοῦ	Id.	τοῦ μὲν
2. τὸ ΖΑ· λέγω ὅτι ἕλον τὸ ΖΒ τοῦ	ΖΑ· λέγω ὅτι ἕλον τὸ ΖΒ τοῦ	τὸ ΖΑ· λέγω ὅτι ἕλον τὸ ΖΒ
3. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστὶ	καὶ	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ ΓΕ· καὶ λοιποῦ ἄρα . . .	ΓΕ· καὶ λοιποῦ	τὸ ΓΕ· λοιποῦ ἄρα

PROPOSITIO XVII.

1. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθεὶς· καὶ τοῦ ΖΒ ἄρα πρὸς τὸ ΗΕ λόγος ἐστὶ δοθεὶς.	Id.	Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΕ τοῦ Γ, δο- θέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΔΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΕ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθεὶς. Τοῦ δὲ ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δο- θεὶς· καὶ λόγος ἄρα τοῦ ΖΒ πρὸς τὸ ΗΕ ἐστὶ δοθεὶς.
2. ἦτοι πρὸς ἄλληλα	πρὸς ἄλληλα ἦτοι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVIII.

1. ἔσται	ἔστιν	concordat cum edit. Paris.
2. τοῦ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
Lin. 18. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIX.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

- | | | |
|------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. ἔστιν ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ | ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως | concordat cum edit. Paris. |
| οὕτως καὶ | | |

ALITER.

- | | | |
|-------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. Ἐστω | Δυνατὸν δὲ ἔστιν καὶ οὕτως. | concordat cum edit. Paris. |
| | Ἐστω | |
| 2. ἔστω | ἔστιν | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ | <i>Id.</i> | deest. |
| 4. τὸ | <i>Id.</i> | deest. |

PROPOSITIO XX.

- | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἔσται | ἔστιν | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὸ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τῷ ΑΕ πρὸς τὸ | τῷ ΑΕ πρὸς | τοῦ ΑΕ πρὸς |

PROPOSITIO XXI.

- | | | |
|--------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. ἔσται | ἔστιν | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὸ | deest | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXII.

- | | | |
|---------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ | <i>Id.</i> | deest. |
| 2. συναμφοτέρων | συμφοτέρων | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ | deest | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXIII.

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. τὸ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| Lin. 15. τὸ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὸ ΓΗ ἔστι | ΓΗ | concordat cum edit. Paris. |
| 3. δὲ καὶ τοῦ λοιποῦ τοῦ | καὶ λοιποῦ τοῦ | δὲ καὶ τοῦ λοιποῦ |
| 4. καὶ ἀναστρέφαντι | <i>Id.</i> | ἀναστρέφαντι ἄρα καὶ |

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

5. δοθείς	deest	concordat cum edit. Paris.
6. καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ	καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς	ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ
Lin. 7, 8 et 9. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIV.

1. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ ἔστω	deest	concordat cum edit. Paris.
3. τὴν	τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶν
6. τῆς Ε	Ε	concordat cum edit. Paris.
7. τῶ μὲν ὑπὸ τῶν, Α, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ	deest	τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῶ

ALITER.

1. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
Lin. 12. ἴσας	<i>Id.</i>	ἴσων

PROPOSITIO XXV.

1. τῇ θέσει	<i>Id.</i>	deest.
2. ὅ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXVI.

1. τῆς ΑΒ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. σημείου,	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVII.

1. τὸ Α δοθὲν ἔστω.	<i>Id.</i>	δοθὲν ἔστω τὸ Α.
-----------------------------	----------------------	------------------

ALITER.

1. περιφέρεια	deest	concordat cum edit. Paris.
-------------------------	-----------------	----------------------------

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ὅ *Id.* deest.

PROPOSITIO XXIX.

1. ΑΓΔ γωνίας τὸ τῶν ΑΓΔ γωνίας τὸ . . . ΑΓΔ γωνίας
 2. ἡ *Id.* deest.
 3. ΔΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΑ, . . . τῶν ΔΓΑ γωνία τῇ ὑπο τῶν concordat cum edit. Paris.
 ΕΓΑ,

PROPOSITIO XXX.

2. γωνία, deest concordat cum edit. Paris.
 3. ἐστὶν ἀδύνατον *Id.* ἀδύνατόν ἐστιν.

ALITER.

1. εὐθεία παράλληλος *Id.* παράλληλος εὐθεία
 2. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ *Id.* Καὶ ἐπεὶ εἰσι παράλληλοι αἱ ΒΓΔ,
 ΕΑΖ τῇ ΒΑΓ ΕΔΖ,
 3. γωνία *Id.* deest.

ALITER.

1. Καὶ deest concordat cum edit. Paris.
 2. αὐτὰς *Id.* αὐτοὺς
 4. ὑπὸ ΑΔΓ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ΑΔΓ γωνία
 5. ὑπὸ ΖΕΓ ὑπὸ τῶν ΖΕΓ ΖΕΓ

ALITER.

1. καὶ ἐπεὶ δευτέρου ἐστὶν ἰσάτερον ἐπεὶ δευτέρου ἐστὶν τὸ Α ση- concordat cum edit. Paris.
 τῶν Α, Ε σημείων μείων
 2. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνία *Id.* δευτέρου δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ
 δευτέρου
 4. δεδομένω *Id.* deest.

PROPOSITIO XXXI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἢ ΑΔ, deest concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXII.

1. Καὶ deest concordat cum edit. Paris.

3. ἢ Id. deest.

4. ἔστιν. Id. deest.

PROPOSITIO XXXIII.

1. τῶ deest concordat cum edit. Paris.

2. τῷ μεγέθει. deest concordat cum edit. Paris.

3. καὶ ἢ Id. deest.

Lin. 9. καὶ ἢ ὑπὸ ΕΖΔ καὶ Id. ἔστιν ἢ ὑπὸ ΕΖΔ ἢ

ALITER.

1. καὶ deest concordat cum edit. Paris.

2. ἔστιν Id. deest.

3. τοῦ Id. deest.

5. οὔν deest concordat cum edit. Paris.

7. λοιπὴ ἢ ὑπὸ ΖΕΒ Id. ἢ ὑπὸ ΖΕΒ ἄρα

PROPOSITIO XXXIV.

1. τὴν τὸ concordat cum edit. Paris.

2. Καὶ deest concordat cum edit. Paris.

3. τὴν τὸ concordat cum edit. Paris.

ALITER.

1. Καὶ deest concordat cum edit. Paris.

2. εὐθεία γραμμὴ Id. deest.

3. δοθέν ἄρα ἔστιν ἑκάτερον τῶν
Κ, Θ σημείων. Ἐστι δὲ Id. ἑκάτερον ἄρα τῶν Κ, Θ σημείων
δοθέν ἔστιν. Ἐστι δὲ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIENSIS.

4. ἴσθιν	<i>Id.</i>	deest.
5. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXV.

1. τῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἴσθι	<i>Id.</i>	deest.
5. καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὡς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἢ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ δοθεὶς· λόγος ἄρα τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ δοθεὶς·	καὶ ἐπεὶ ἴσθι λόγος τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΑ δοθεὶς, ὡς δὲ ἢ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἢ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΑ, δοθεὶς δὲ ὁ τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΑ λόγος· λόγος ἄρα καὶ ὁ τῆς ΘΚ πρὸς τὴν ΚΑ δοθεὶς·	concordat cum edit. Paris.
6. ἴσθι τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δοθεὶς·	ἴσθι τῆς ΑΘ πρὸς ΑΚ δοθεὶς·	τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δοθεὶς·
7. τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἢ ΑΚ τῷ μεγέθει·	δοθεῖσα ἄρα καὶ ΑΚ·	concordat cum edit. Paris.
8. τὸ Α δοθέν	<i>Id.</i>	δοθέν τὸ Α

PROPOSITIO XXXVI.

1. τὴν θέσει δεδομένην εὐθείαν·	τῇ θέσει δεδομένην	concordat cum edit. Paris.
2. ἐπὶ	<i>Id.</i>	ἀπὸ
3. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ ἐπεὶ λόγος ἴσθι τῆς ΔΑ πρὸς τὴν ΑΕ δοθεὶς, ὡς δὲ ἢ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἢ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΗ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΘΑ πρὸς τὴν ΑΗ δοθεὶς·	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ λόγος ἴσθι τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΑΔ δοθεὶς, ὡς δὲ ἢ ΑΗ πρὸς τὴν ΑΘ οὕτως ἢ ΕΑ πρὸς τὴν ΔΑ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΑΘ δοθεὶς.

PROPOSITIO XXXVII.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὰς	<i>Id.</i>	τὰς ἐν
2. γραμμῆ	<i>Id.</i>	deest.
3. οὖν	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ὑπὸ	ὑπὸ τῶν	ὑπὸ τοῦ
5. τὴν	<i>Id.</i>	τὸ
6. τὴν ΔΜ ἔστι δοθεὶς λόγος . .	<i>Id.</i>	τὸ ΔΜ λόγος ἔστι δοθεὶς.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. τῆς προστεθείσης παρὰ τὰς τῆ θέσει δεδομένης παραλλήλους	παρὰ τὰς τῆ θέσει δεδομένης παραλλήλους	τῆς προστεθείσης παρὰ τὰς θέσει δεδομένης παραλλήλους
2. παράλληλος	deest	concordat cum edit. Paris.
3. οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου . .	ἀπὸ δεδομένου σημείου . .	οὖν ἀπὸ δεδομένου

PROPOSITIO XXXIX.

1. ἢ εὐθεῖα τῆ θέσει δεδομένη ἢ ΔΗ,	εὐθεῖα τῆ θέσει ἢ ΔΗ,	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. κείσθω	deest	concordat cum edit. Paris.
4. Πάλιν, κείσθω τῆ	τῆ δὲ	concordat cum edit. Paris.
5. ἔστι δοθέν	<i>Id.</i>	δοθέν ἔστι
6. κύκλος γεγράφθω	<i>Id.</i>	γεγράφθω κύκλος
7. Πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ· θέσει ἄρα ἔστιν ὁ ΗΚΛ. Θέσει δὲ καὶ ὁ ΔΚΘ κύκλος· δοθέν ἄρα ἔστι καὶ	<i>Id.</i>	κύκλος. Πάλιν, τῷ μὲν κέντρῳ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΗ, γεγράφθω ΗΚΛ κύκλος· θέσει ἄρα ἔστιν ὁ ΗΚΛ κύκλος· δοθέν ἄρα ἔστι

PROPOSITIO XL.

1. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
2. δίδεται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον	<i>Id.</i>	τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δίδεται

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. τῆ ὑπὸ ΔΖΕ ἴση ἐστίν.	ἴστι ἴση τῆ ὑπὸ ΔΖΕ	concordat cum edit. Paris.
4. σημείοις γωνιῶν	deest	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO XLII.

1. αὶ	Id.	δύο
2. γωνίας	Id.	γωνιῶν
3. τὸ	Id.	deest.
4. καὶ	Id.	deest.
5. τρίγωνον	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLIII.

1. ἔχωσι	Id.	ἔχουσαν
2. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
3. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	Id.	deest.
5. ἐστίν	Id.	deest.
6. πρὸς τὴν ΗΚ	Id.	πρὸς τὴν ΗΚ ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἢ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΘ.

PROPOSITIO XLIII.

1. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. τῆ	Id.	τῆ
3. τρίγωνον τῶ ΔΕΗ τρίγωνον. Δίδεται δὲ τὸ ΔΕΗ τρίγωνον	Id.	τῶ ΔΕΗ. Δίδεται δὲ τὸ ΔΕΗ

PROPOSITIO XLIV.

1. γωνία	Id.	deest.
2. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	Id.	deest.
4. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. γωνία	deest	concordat cum edit. Paris.
6. καὶ	Id.	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
7. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
8. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα καὶ

PROPOSITIO XLV.

1. ἐχέτω	<i>Id.</i>	ἐχέτωσαν
2. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.

ALITER.

Lin. 2. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. ΒΑΓ	<i>Id.</i>	ΒΑΓ γωνία

PROPOSITIO XLVI.

1. αἱ πλευραὶ συναμφοτέραι, ὡς μία, τουτέστιν ἡ ΒΑΓ, πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν	αἱ πλευραὶ τουτέστιν συ- ναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτω	concordat cum edit. Paris. vocabulo <i>αι</i> tantum defi- ciente.
Lin. 14. οὕτως	deest	concordat cum edit. Paris.
2. γωνία	deest	concordat cum edit. Paris.

ALITER.

1. Εκτελέσθω ἡ ΒΑ, καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δε- θεῖσά ἐστι	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLVII.

1. τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται.	τρίγωνα διαιρεῖται τῷ εἶ- δει	τρίγωνα τῷ εἶδει δίαιρεῖται.
2. τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται.	τρίγωνα διαιρεῖται τῷ εἶ- δει	concordat cum edit. Paris.
3. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 5. EB ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ . . . | <i>Id.</i> | ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΕ |
| 4. τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται. | τρίγωνα διαιρεῖται τῷ εἶ- | concordat cum edit. Paris. |
| | δει. | |

PROPOSITIO XLVIII.

- | | | |
|-----------------------------------------------------------|------------------------|------------------------------------------|
| 1. ἀναγραφῇ τρίγωνα . . . | τρίγωνα ἀναγραφῇ . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. Ηχθωσαν | <i>Id.</i> | Ηχθω |
| 3. Καὶ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 4. καὶ | <i>Id.</i> | deest. |
| 5. ἐστὶ δοθεῖσα. Ἐστί δὲ καὶ ἡ
ὑπὸ ΑΕΓ γωνία | <i>Id.</i> | δοθεῖσά ἐστίν. Ἐστί δὲ καὶ ἡ ὑπὸ
ΑΕΓ. |
| 6. τὸ | <i>Id.</i> | deest. |

PROPOSITIO XLIX.

- | | | |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. τοῦ | <i>Id.</i> | τῆς |
| 1. τὸ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 2. δεδομένα τῷ εἶδει τρίγωνα τὰ
ΖΕΒ, ΕΒΑ· τοῦ ΓΕΒΖ ἄρα . . . | καὶ τοῦ ΓΕΒΖ ἄρα . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. συναμφιπέρου | deest | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO L.

- | | | |
|-------------------------------------------------|----------------------|------------------------------|
| 1. τε | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τε | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 3. πρὸς ἀλλήλα αὐτῶν λόγος ἐσ-
ται | <i>Id.</i> | αὐτῶν πρὸς ἀλλήλα λόγος ἐστὶ |
| 4. οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν . . . | ἡ ΓΔ πρὸς | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ΓΔ δοθεῖς· λόγος ἄρα καὶ ὁ . . . | <i>Id.</i> | τὴν ΓΔ δοθεῖς· λόγος ἄρα καὶ |

PROPOSITIO LI.

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------|
| 1. ᾧ | <i>Id.</i> | ὧς |
| 2. αἱ | <i>Id.</i> | deest. |
| 3. ᾧ ἔτυχε | ᾧ ἔτυχε | ὧς ἔτυχε |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>4. τὸ ΑΗΒ. Δέδοται δὲ τὸ Ζ τῷ εἶδει δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΗΒ τῷ εἶδει· ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Ε δέδοται τῷ εἶδει, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ·</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>εὐθύγραμμον τὸ ΑΗ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε δέδοται τῷ εἶδει, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τὸ εὐθύγραμμον ΑΗ δεικνόμενον τῷ εἶδει·</p> |
| <p>5. λόγος</p> | <p>deest</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |

PROPOSITIO LII.

- | | | |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| <p>1. τὰ</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>deest.</p> |
| <p>Lin. 13. Δοθὲν δὲ τὸ ΑΖ τῷ μέγεθει</p> | <p>deest.</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |

PROPOSITIO LIII.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| <p>1. εἶδη τῷ</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>deest.</p> |
| <p>2. καὶ</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>deest.</p> |
| <p>3. τὴν :</p> | <p>deest</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |

PROPOSITIO LIV.

- | | | |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------|---------------|
| <p>1. τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Α λόγος ἔστι δοθεῖς·</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>deest.</p> |
| <p>2. ἔστι</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>deest.</p> |
| <p>3. τὰς</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>τὰ</p> |

ALITER,

- | | | |
|-------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------|
| <p>1. δὴ</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>δὴ</p> |
| <p>2. τὸ</p> | <p>deest</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |
| <p>3. καὶ</p> | <p>deest</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |
| <p>4. ἔστιν</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>καὶ</p> |
| <p>5. ἔστιν ἕμοιον</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>ἕμοιον ἔστι</p> |
| <p>6. ἄρα πλευραὶ</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>πλευραὶ ἄρα</p> |
| <p>7. τὸ λοιπὸν δεικνύσεται</p> | <p>τοῦ πρώτου δεικνύεται</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |

PROPOSITIO LV.

1. ἔσονται	ἔσονται τῷ εἶδει	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέ- ναι εἰς τῷ μεγέθει.	<i>Id.</i>	αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσίν.
3. τε	<i>Id.</i>	deest.
4. δὴ	<i>Id.</i>	ἄρα
4. τῷ μεγέθει εὐθείας τῆς ΒΓ δε- δομένον τῷ εἶδει	εὐθείας τῆς ΒΓ τῷ μεγέθει δεδομένον	concordat cum edit. Paris.
6. ἔστιν ὅμοιον	<i>Id.</i>	ὅμοιόν ἐστι
7. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ	deest	concordat cum edit. Paris.
8. πλευρῶν	deest	concordat cum edit. Paris.

ALITER.

1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
------------------	----------------------	--------

PROPOSITIO LVI.

1. ἔσται	<i>Id.</i>	ἔστιν
2. πλευρὰ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἔχει πρὸς τὸ	πρὸς τὸ	ἔχει πρὸς
4. εὐθεῖα	<i>Id.</i>	deest.
5. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
6. χωρίον	<i>Id.</i>	τουτέστι τῆς-ΘΓ πρὸς ΓΚ.

PROPOSITIO LVII.

1. χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν	παρὰ δοθεῖσαν	concordat cum edit. Paris.
2. γὰρ	<i>Id.</i>	deest:
3. ἴσον δὲ τὸ ΗΑ τῷ ΑΘ λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ ΑΘ δοθείς.	<i>Id.</i>	τῷ δὲ ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΘ καὶ τοῦ ΕΒ ἄρα πρὸς τὸ ΑΘ λόγος ἐστὶ δοθείς.
4. ἐστὶ ἄρα καὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν	ἄρα καὶ τῆς ΒΑ πρὸς	concordat cum edit. Paris.
5. γωνία, ὧν	ῶν	γωνία, ὡς καὶ
6. ἐστὶ δοθεῖσα.	<i>Id.</i>	δοθεῖσά ἐστι.
7. καὶ ἐστὶ τὸ πλάτος τοῦ πα- ραβλήματος.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. χωρίον παρά δοθείσαν εὐθείαν	Παρά δοθείσαν	concordat cum edit. Paris.
2. τῷ μεγέθει.	deest	concordat cum edit. Paris.
3. σχῆμα· δέδοται ἄρα καὶ . .	ΕΖ· δέδοται ἄρα καὶ . . .	σχῆμα· δέδοται ἄρα
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἐστὶ·	Id.	deest.
6. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO LIX.

1. χωρίον παρά δοθείσαν εὐθείαν παραβληθῆ, ὑπερβάλλον τῷ εἶδει δεδομένῳ εἶδει· . . .	παρά δοθείσαν παραβληθῆ, ὑπερβάλλον εἶδει δεδο- μένῳ·	concordat cum edit. Paris.
2. εἶδει	deest	concordat cum edit. Paris.
3. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ ΖΗ τῷ ΓΒ· ἢ χθω αὐτῶν διάμετρος ἢ ΘΕΜ,	Id.	deest.
4. τῷ ΖΗ·	τῷ ΖΗ·	τῷ ΖΗ· περὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗ τῷ ΓΒ·
5. Καὶ ἐστὶν ἴσα τῷ ΚΛ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛ τῷ μεγέθει.	Id.	Τοῖς δὲ ΑΒ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· δέδοται ἄρα τὸ ΚΛ τῷ μεγέθει.
6. τῷ μεγέθει·	deest	concordat cum edit. Paris.
7. Καὶ	Ὅν	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶ δοθείσα,	Id.	δοθείσά ἐστι,
Lin. 1. τὴν	Id.	τὸ
9. ἄρα	Id.	ἄρα ἐστὶ

PROPOSITIO LX.

1. τὸ	Id.	deest.
2. ἐστὶ δοθείσα.	Id.	δοθείσά ἐστι·
3. ὅμοιοι γάρ ἐστι τῷ ΗΑ· . .	deest	concordat cum edit. Paris.
4. αἰ	Id.	deest.

PROPOSITIO LXI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. παραλληλόγραμμον	<i>Id.</i>	deest.
2. εἶν	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἶδει τὸ ΖΒ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. ἐπειδὴ ὑπέκειται,	ἐπειδὴ καὶ τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ ὑπέκειται,	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἐστὶ δεθείσα.	<i>Id.</i>	δεθείσα ἐστίν.
7. γωνία	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. δεθείσα ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἐστὶ δεθείσα.
9. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
10. ἢ ὑπὸ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXII.

1. τῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. παραλληλόγραμμον	<i>Id.</i>	εὐθύγραμμον
3. τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ δεθείς ἐστὶ,	ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ δεθείς,	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXIII.

1. τετράγωνον	deest	concordat cum edit. Paris.
-------------------------	-----------------	----------------------------

PROPOSITIO LXIV.

1. ἔχον γωνίαν	γωνίαν ἔχον	concordat cum edit. Paris.
2. τῶν	<i>Id.</i>	τοῦ
3. γωνία,	deest	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστὶ.	<i>Id.</i>	deest.
6. ἄστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ λόγος ἐστὶ δεθείς καὶ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ λόγος ἐστὶ	<i>Id.</i>	λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ δεθείς καὶ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ
7. ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ	ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ ἄρα	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ . . .	<i>Id.</i>	λοιπὴ ἄρα παρὰ
Lin. 4. p. 410. πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΑΔ λόγος ἐστὶ δεθείς..	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἀλλὰ	<i>Id.</i>	ἀλλὰ καὶ
5. τρίγωνον	deest	concordat cum edit. Paris.
6. δις	δις ὀ	concordat cum edit. Paris.
7. ἔχει	<i>Id.</i>	ἔξει

PROPOSITIO LXVI.

1. ἔχει	<i>Id.</i>	ἔξει
2. δεδοται	<i>Id.</i>	δοθεισά ἐστι
3. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ	<i>Id.</i>	καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἄρα

PROPOSITIO LXVII.

1. ἔχει	<i>Id.</i>	ἔξει
2. ἡ ΒΕ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τις	<i>Id.</i>	deest.
5. ἀπὸ	<i>Id.</i>	ὑπὸ
5. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ . .	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστι	<i>Id.</i>	εἶναι
7. τῶν	<i>Id.</i>	τῆς
8. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἡμίσειά ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ δεδομένης οὔσης	ἡμίσεια γὰρ ἐστὶ τῆς ὑπὸ τῶν ΒΑΓ· δεδοται γὰρ ἢ ὑπὸ ΒΑΓ·	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.
Lin. 4. b. τῶν	deest	concordat cum edit. Paris.
12. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
13. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα καὶ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

14. γωνίαν	deest	concordat cum edit. Paris.
15. τριγώνον	deest	concordat cum edit. Paris.
16. τῆς	Id.	deest.

ALITER.

1. γάρ	Id.	deest.
2. ἐστὶ τῆς ΑΓ	Id.	τῆς ΑΓ εἰσὶ
3. φ̄	καὶ	concordat cum edit. Paris.
3. ΒΑ, ΑΓ	ΒΑΓ	concordat cum edit. Paris.

ALITER.

1. πρὸς τῷ Α	Α	concordat cum edit. Paris.
Lin. 16. Ἐστὶ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος δοθείς, δια τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ΒΑΓ γωνίαν τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δο- θείς.	Καὶ ἔστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΒΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρί- γωνον λόγος δοθείς, . .	concordat cum edit. Paris.
3. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. συναμφοτέρου	Id.	deest.
5. ἐστὶ	Id.	εἶναι
6. γωνία δοθεῖσα καὶ	Id.	δοθεῖσα
7. ὑπὸ τῶν ΑΓΔ ἐστὶ δοθεῖσα	Id.	πρὸς ΑΓΔ δοθεῖσά ἐστίν
8. ὑπὸ	Id.	ἀπὸ
9. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
10. τὸ	Id.	deest.
11. ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ	ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ ἄρα	concordat cum edit. Paris.
12. ἐκβληθείσης τῆς ΒΑ ἐπὶ τὸ Ε,	ἐκβληθείσης τῆς ΒΑ, . . .	concordat cum edit. Paris.
13. ἀπὸ τοῦ Γ	deest	concordat cum edit. Paris.
14. ἀπὸ	Id.	deest.
15. τὰ	τὰ	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
Lin. 14. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
16. τῷ εἶδει	<i>Id.</i>	τὸ εἶδει
17. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
18. τοῦ ὑπὸ	καὶ τοῦ ὑπὸ	τοῦ ἀπὸ
19. Τοῦ δεῦ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς	deest	concordat cum edit. Paris.

ALITER.

1. ἐπὶ	<i>Id.</i>	πρὸς
2. ὑπὸ	<i>Id.</i>	ὑπὸ τοῦ
3. τῇ ΑΔΓ	αὐτῇ	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν ἴση	<i>Id.</i>	ἴση ἐστίν·
3. ἐστὶ τὸ	τὸ	ἐστὶ
6. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
8. τῆς	deest	concordat cum edit. Paris.
9. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέ- ρου τῆς ΒΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συν- αμφοτέρου τῆς ΒΑΓ,	<i>Id.</i>	τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς συναμφοτέ- ρου τῆς ΒΑΓ.
10. ὧν	<i>Id.</i>	ὧς
11. ἐστὶν	deest	concordat cum edit. Paris.
12. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
13. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
14. τοῦ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
15. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
16. ΑΒΓ	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXVIII.

1. πρὸς ἀλλήλα	<i>Id.</i>	deest.
2. ἢ	<i>Id.</i>	deest.
3. παραλληλόγραμμον,	<i>Id.</i>	deest.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

5. ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον τῶν *Id.* deest.
 ΕΗ, ΓΔ ἄρα ἀντιπεπίθασιν
 αἱ πλευραὶ περὶ τὰς ἴσας γω-
 νίας.

ALITER.

1. ὁ deest concordat cum edit. Paris.
 2. ὁ deest concordat cum edit. Paris.
 3. καὶ *Id.* deest.
 4. Α ἄρα *Id.* ἄρα Α
 5. ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΓΔ ἐξ οὗ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ concordat cum edit. Paris.
 πρὸς τὴν ΕΖ, πρὸς τὴν ΕΖ,
 6. τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν concordat cum edit. Paris.
 τὴν Μ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει Μ, καὶ
 7. τε τοῦ λόγου τοῦ concordat cum edit. Paris.
 8. ἐκ τοῦ ἐξ οὗ concordat cum edit. Paris.
 9. ὁ ὡς ὁ concordat cum edit. Paris.
 10. ἔστι deest concordat cum edit. Paris.
 Lin. 12. καὶ καὶ ὁ concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLIX.

1. ἔχη *Id.* deest.
 2. δέδοται. *Id.* ἔστι δεθείς.
 3. παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ *Id.* τῷ ΕΗ,
 παραλληλογράμμω
 4. Καὶ ἔστιν ἰσογώνιον τὸ ΔΑ τῷ *Id.* Ἐπειδὴ περ ἰσογωνιόν ἔστι τὸ ΔΑ
 ΖΘ, τῷ ΖΘ
 5. λόγος δεθείς, deest concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXX.

1. δύο *Id.* δυοῖν
 2. δύο *Id.* δυοῖν
 3. τὴν ΖΗ *Id.* τὴν ΖΗ λόγος ἔστω δεθείς
 4. τὸ ΓΔ τῷ ΖΘ. *Id.* τῷ ΖΘ τὸ ΓΔ.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OKONIE.
5. τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ . . .	<i>Id.</i>	παραλληλόγραμμῳ ΖΘ
6. καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΒΜ. Ἐπεὶ οὖν	καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΒΜ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
9. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
10. γωνία ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΒ δοθεῖσα	deest	concordat cum edit. Paris.
Lin. 18. ἐστὶ δοθεῖσα.	<i>Id.</i>	δοθεῖσά ἐστι.
11. ἐστὶ δοθεῖσα	<i>Id.</i>	δοθεῖσά ἐστι.
11. τὸ	<i>Id.</i>	τὴν
Lin. 9. Ἴσον δὲ τὸ ΓΑ τῷ ΓΔ. λόγος ἄρα ἐστὶν τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXXI.

1. δύο	<i>Id.</i>	δυοῖν
2. ἔχει	<i>Id.</i>	ἔξει
3. δύο	<i>Id.</i>	δυοῖν
4. λόγος ἐστὶ δοθείς πρὸς τὸ ΕΔΘ.	<i>Id.</i>	πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.
5. τὰ	<i>Id.</i>	deest.
6. τὰς ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ σημείοις,	τὰς ἴσας γωνίας,	ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ σημείοις,
7. δὲ	δὲ τοῖς Α, Δ	concordat cum edit. Paris.
8. καὶ τὰ παραλληλόγραμμα λόγον ἔξει δεδομένον πρὸς ἀλ- λήλα.	<i>Id.</i>	deest.
9. τριγώνου	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXII.

1. δύο	<i>Id.</i>	δυοῖν
2. ἦται	<i>Id.</i>	ἦ

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον	deest	concordat cum edit. Paris.
4. Εστω	Id.	Εστωσαν
5. τὴν ΔΘ	Id.	τὴν ΔΘ λόγος ἔστω
4. καὶ	Id.	ἔστι
5. καὶ	Id.	καὶ ἐπεὶ
6. ἴσαι εἰσὶν,	Id.	εἰσὶν ἴσαι,

PROPOSITIO LXXIII.

1. δύο	Id.	δυσὶν
2. Δύο	Id.	δυσὶν
3. τοῖς Γ, Ζ	Id.	τοῖς Γ, Ζ σημείοις
4. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΒΓ εὐθείαν τῷ ΕΗ παραλληλο- γρᾶμμου ἴσον παραλληλόγραμ- μον τὸ ΓΘ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΚΓ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἔστι τὸ ΓΘ τῷ ΕΗ.	Id.	καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΚΓ, καὶ συμπληρω- σάσθω τὸ ΑΘ παραλληλόγραμ- μον. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἢ ΖΗ πρὸς τὴν ΓΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΚ ἴσον ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ· τὸ ΓΘ ἄρα ἴσον ἔστι τῷ ΕΗ.
5. καὶ	Id.	deest.
6. τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ·	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. παραλληλόγραμμον· Καὶ	παραλληλόγραμμον·	Καὶ
8. καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΓΑΔ δέδοται· ὥστε δέδοται τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ εἶδει,	Id.	δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ εἶδει·
9. ἔστι	Id.	deest.
10. ἢν ἢ ΑΓ λόγον ἔχει δεδο- μένον.	τὴν ΓΑ.	concordat cum edit. Paris.
11. παραλληλογράμμου	Id.	deest.
12. παραλληλόγραμμον	Id.	deest.

PROPOSITIO LXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. πλευρά	deest	concordat cum edit. Paris.
2. λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΘ δεθείς	Id.	τοῦ AB ἄρα πρὸς τὸ ΓΘ λόγος ἐστὶ δεθείς.
3. ἡ	Id.	ὁ
4. τὸ AB τῷ EH.	deest	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ ΓM παραλληλόγραμμον	Id.	παραλληλόγραμμον ΓM.
6. γωνία	Id.	deest.
7. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓM τῷ EH.	deest	concordat cum edit. Paris.
8. ἡ	Id.	ὁ

PROPOSITIO LXXV.

2. πλευρά	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἡ	Id.	ἦτοι
4. τριγώνον	Id.	deest.
5. πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει	Id.	εἰς πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα
6. δεθέντα	Id.	δεδομένον

PROPOSITIO LXXVI.

1. ἔχει	Id.	ἔξει
2. καὶ	Id.	deest.
3. ἐστὶ δεθείσα	Id.	δεθείσα ἐστὶ.
4. τῆς δὲ	Id.	ἐστὶ δὲ καὶ τῆς

PROPOSITIO LXXVII.

1. τῷ εἶδει	deest	concordat cum edit. Paris.
2. ἔχει	Id.	ἔξει
3. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. πάλιν	Id.	deest.
5. λόγος ἐστὶ τοῦ ABΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ	Id.	τοῦ ABΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ λόγος ἐστὶ

PROPOSITIO LXXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ὅστε	<i>Id.</i>	ὅστ'
2. ὅστε καὶ τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς.	<i>Id.</i>	deest.
3. γὰρ	δὲ	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
6. δοθείς	δοθείς· σύγκριται γὰρ καὶ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXIX.

1. τὸ ΑΒΓ τρίγωνον	<i>Id.</i>	τρίγωνον ΑΒΓ
2. τὸ ΖΘΗ,	<i>Id.</i>	ΘΖΗ
3. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΑΗ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ εἰσι τμήματι τοῦ κύκλου, ἐστὶ δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΑΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΘΗ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΗΘ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση·	Ἐπιὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΔ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΛΘΗ· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΘΑΗ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΒΓΑ λοιπὴ τῇ ὑπὸ τῶν ΘΗΑ ἐστὶν ἴση·	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ ΖΚ τῇ ΑΜ παράλληλος· καὶ	παράλληλος· καὶ	ἡ ΖΚ τῇ ΑΜ παράλληλος·
5. ὑπὸ	ὑπὸ τῶν	deest.
6. ΖΛΘ	<i>Id.</i>	ΖΛΘ γωνία
7. δὲ	δὲ καὶ	concordat cum edit. Paris.
8. ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση· καὶ

PROPOSITIO LXXX.

1. τῶν	<i>Id.</i>	deest
2. πλευρῶν ἰσογώνιον	ἰσογώνων	concordat cum edit. Paris.
3. ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ
LIII. 15. τῆς ἄρα ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ	καὶ τῆς ΒΓ πρὸς ΑΕ	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. δὴ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. κύλιου	deest	concordat cum edit. Paris.
6. δεχόμενον	δεδομένην ἔχον	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶ δεθέν	<i>Id.</i>	δεθέν ἐστι
8. δὲ	deest	concordat cum edit. Paris.
9. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

ALITER.

1. τῷ A,	<i>Id.</i>	τὸ A,
2. τῆς GB.	<i>Id.</i>	τοῦ BF
3. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
4. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστι	ἔστιν ἄρα	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
7. τριγώνου	deest	concordat cum edit. Paris.
8. συνθέντι	<i>Id.</i>	συνθέντι λόγος
9. λόγος	<i>Id.</i>	deest.
10. τῷ εἴδει.	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXI.

1. τὴν	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ	καὶ ἔστω λόγος	concordat cum edit. Paris.
3. λόγος ἔστω	deest	concordat cum edit. Paris.
4. λόγος δεθείς	<i>Id.</i>	deest.
5. λόγος ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. δεθείς,	<i>Id.</i>	deest.
6. δεθείς	<i>Id.</i>	λόγος ἐστὶ δεθείς
7. λόγος	<i>Id.</i>	λόγος ἔστω
8. γὰρ	λόγος ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
9. λόγος ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXXXII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. καὶ ἔστω	deest	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶν	Id.	deest.
3. ἐστὶν	Id.	ἔσται
4. ἢ Δ	Id.	ἢ Δ λόγον ἔχει δεδομένοι*

PROPOSITIO LXXXIII.

1. προσληφθείσης ἀνάλογον . .	Id.	ληφθείσης ὡς ἔτυχεν
2. τῶν ,	Id.	deest.
3. ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιουοῦν τῶν	Id.	ὁποιουοῦν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν
4. προσληφθείσης	Id.	προσληφθείσης ὡς ἔτυχε
5. τῷ	Id.	τὸ
6. ἐστὶν ἴσον τὸ	Id.	ἴσον ἐστὶ τῷ
7. ἄρα	Id.	ἄρα ἐστὶ
8. ἐστὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO LXXXIV.

1. δεθείσα ἔστω ἢ ΔΓ	ἔστω ἢ δεθείσα ἢ ΔΓ	concordat cum edit. Paris.
2. Καὶ	Id.	deest.
3. παραλληλόγραμμον	deest	concordat cum edit. Paris.
4. τῷ εἶδει	deest	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	Id.	deest.

PROPOSITIO LXXXV.

1. περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ	Id.	ΑΓ περιεχέτωσαν
2. ἐστὶ δεθείσα	Id.	δεθείσά ἐστι.
3. δὲ	Id.	δὲ καὶ
4. ἐστὶν	Id.	deest.
5. εἶδει	deest	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΒΓ δεθείσά ἐστι	Id.	deest.

PROPOSITIO LXXXVI.

Hoc theorema adest ad calcem Datorum in codice *a*; in margine codicis *g*; in textu codicum *s*, *v*, *z*, et deest in omnibus aliis codicibus.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἔσται δοθείσα.	<i>Id.</i>	δοθείσα ἔσται.
2. δὲν περιεχέτωσαν χωρίον .	<i>Id.</i>	δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν
3. τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ ἔστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
6. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
9. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ . . .	<i>Id.</i>	τοῦ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ
10. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τὸ .	τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ .	concordat cum edit. Paris.
11. ἐστὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
12. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ τετρακίς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ΒΔ	ΒΔ λόγος	concordat cum edit. Paris.
13. ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ	τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
14. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
15. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
16. μιᾶς ἄρα τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ	τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος δοθείς· καὶ	concordat cum edit. Paris.
17. ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν . . .	τῆς ΑΒ πρὸς	concordat cum edit. Paris.
18. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
19. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.

LEMMA.

Hoc lemma deest in editionibus Oxoniæ et Claudii Hardy, nec non in versione Zamberti; adest ad calcem Datorum in codicibus α , ε ; adest in margine codicis g , et deest in omnibus aliis codicibus.

PROPOSITIO LXXXVII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

Hæc desunt in omnibus codicibus.

Εάν δύο εὐθείαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένη γωνία, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἴσται δοθείσα.

2. ἴσται δοθείσα.	<i>Id.</i>	δοθείσα ἴσται.
3. εὐθείαι	<i>Id.</i>	εὐθείαι αἱ
4. ἴστί δοθείσα.	<i>Id.</i>	δοθείσα ἴστί.
5. τοῦ	<i>Id.</i>	τῷ
6. καὶ ἔστω	deest	concordat cum edit. Paris.
7. λόγος ἄρα ἴστί τοῦ ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν GB, ΒΔ	<i>Id.</i>	τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν GB, ΒΔ λόγος ἴστί,
8. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BG, ΓΔ λόγος ἴστί δοθείς.	<i>Id.</i>	τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν BG, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AB λόγος ἴστί δοθείς.
9. τοῦ τετράκις ὑπὸ τῶν BG, ΓΔ ἄρα	<i>Id.</i>	καὶ τοῦ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν BG, ΓΔ
10. τῶν BG, ΓΔ καὶ τῆς ΒΔ, τευτίσται	deest	concordat cum edit. Paris.
11. τὴν	deest	concordat cum edit. Paris.
12. ἢ ΒΔ.	ἢ ΒΔ. Δέδοται ἄρα καὶ BG.	concordat cum edit. Paris.
13. ἢ ὑπὸ ABΓ	ἢ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVIII.

1. ἡχθω	διήχθω	concordat cum edit. Paris.
2. ABΓ	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ἴστιν.	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXIX.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

Lin. 16. p. 466. ἀπολήφεται	λήφεται	concordat cum edit. Paris.
2. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XC.

1. γωνίαν ποιῶσα	Id.	ποιῶσα γωνίαν
2. σημείου	deest	concordat cum edit. Paris.
3. ὑπὸ	ἐπὶ τῶν	περὶ
4. τοῦ κύκλου τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
5. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα	Id.	deest.
7. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
8. δεδομένη εὐθείᾳ τῇ ΒΔ, . . .	εὐθείᾳ,	concordat cum edit. Paris.
9. γραμμῇ	deest	concordat cum edit. Paris.
10. Θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει δο- θείς καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος· θέσει ἄρα καὶ τῷ μεγέθει δοθείσά ἐσ- τιν ἡ ΔΓ. Καὶ δοθὲν τὸ Δ . . .	Θέσει δὲ δοθείς καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCI.

1. τοῦ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	Id.	deest.
3. Καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
4. ἐπὶ	Id.	ἀπὸ
5. τὸ	Id.	ὁ
6. δοθείς· δοθὲν ἔστιν ἄρα τὸ Α . . .	δοθὲν ἔστιν ἄρα τὸ Α . . .	δοθείς· ἔστιν ἄρα τὸ Α δοθὲν.
7. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|----------------------------|----------------------|--------|
| 1. τις | <i>Id.</i> | deest. |
| Lin. 4. p. 471. ἐστὶ . . . | <i>Id.</i> | deest. |

ALITER.

- | | | |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. τῆ θέσει καὶ τῷ μεγέθει . . . | θέσει | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ τῷ ὑπὸ
τῶν ΒΔ, ΔΓ | τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XCIII.

- | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ | <i>Id.</i> | deest. |
| 2. ἐστὶν | <i>Id.</i> | καὶ |
| 3. τῶν | deest | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XCIV.

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|
| 1. πλευραὶ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 2. περιφέρεια | περιφέρεια ὑπὸ τῆς διαχ-
θείσης | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἡ ΒΕ πρὸς τὴν | ΒΕ πρὸς | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶν ἴση | <i>Id.</i> | ἴση ἐστίν. |
| 5. ἄρα | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 6. καὶ ὡς συναμφοτέρος ἄρα . . . | <i>Id.</i> | ὡς ἄρα συναμφοτέρος |
| 7. ἐστὶν | <i>Id.</i> | deest. |
| 8. ἐστὶν ἴσον | <i>Id.</i> | ἴσον ἐστὶν |

ALITER.

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. Καὶ | deest | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ὡς ἄρα | <i>Id.</i> | καὶ ὡς ἄρα |
| 5. ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως . . . | ἐστὶν ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΔ
οὕτως ἐστὶν | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστι | deest | concordat cum edit. Paris. |

ALITER.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ	deest	concordat cum edit. Paris.
2. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
3. γωνίας	<i>Id.</i>	deest.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XC V.

1. τις	deest	concordat cum edit. Paris.
2. τοῦ κύκλου,	deest	concordat cum edit. Paris.
3. τη	deest	concordat cum edit. Paris.
4. γωνίας εἰθεῖα	<i>Id.</i>	deest.
5. τοῦ ABΓ κύκλου διάμετρος	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ	deest	concordat cum edit. Paris.
7. ἄρα	deest	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶ καὶ τὸ Z.	καὶ τὸ Z ἐστίν:	concordat cum edit. Paris.
10. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	<i>Id.</i>	deest.

Nota. In Datis codicis 190 semper legere est γωνία ὑπὸ τῶν ABΓ pro γωνία ὑπὸ ABΓ.

HYP SICLIS

LIBER PRIMUS.

EDITIO PARIISIENSIS.

EDITIO OXONIE.

Lin. 9. p. 481. ὑπὸ παρά

PROPOSITIO II.

Lin. 2. p. 488. λέγω ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων λέγω
τῶν περὶ αὐτὰ κύκλων ἴσαι εἰσὶν, τουτέστιν.

Lin. 12. ἡ MN ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κύκλου τοῦ deest.
ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. . . .

Lin. 4. pag. 489. ἐστὶ deest.

Lin. 14. κέντρου deest.

PROPOSITIO III.

Lin. 1. pag. 491. τῶν τὸ

Lin. 3. pag. 492. ὑπὸ ἀπὸ

PROPOSITIO IV.

Lin. 1. pag. 494. τῆς τῶν

Lin. 3. τῆς τῶν

Lin. 2. pag. 495. ὅπερ ἴδει δεῖξαι deest.

ALITER.

Lin. 4. p. 497. τὸ τα

Lin. 17. ἔστω ἔσται

PROPOSITIO V.

EDITIO PARISIENSIS.

EDITIO OXONIÆ.

Lin. 7. pag. 499. τοῦ	τῆς
Lin. 7. pag. 500. τριγώνου	deest.
Lin. 10. τῶν	τῆς
Lin. 11. ὡς ἄρα	ἄρα ὡς
Lin. 16. τὰ	τὸ

PROPOSITIO VI.

Lin. 2. pag. 503. τὸ	deest.
Lin. 15. πενταγώνους	πενταγώνων

PROPOSITIO VII.

Lin. 16. pag. 504. ὅτι	καὶ ἐξῆς ὅτι
Lin. 1. β. τὸ δὲ μείζον	μείζον δὲ
Lin. 4. pag. 505. ἢ ὅλη ἢ AB πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν AG οὕτως ἢ ὅλη ἢ DE πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν AZ	ὅλη ἢ AB πρὸς τὸ μείζον τμήμα τῆς AG οὕτως ὅλη ἢ DE πρὸς τὸ μείζον τμήμα τῆς ΔZ.
Lin. 9. ἔστιν	ἔστι δὲ
Lin. 11. ὑπὸ	deest.
Lin. 16. ἀπὸ	deest.
Lin. 3. pag. 506. συναμφοτέρας ἢ . . .	συναμφοτέρας αἰ
Lin. 4. τουτίστι δύο αἰ AB πρὸς AG . . .	deest.
Hæc lectio mea est.	
Lin. 5. συναμφοτέρας ἢ	συναμφοτέρας αἰ

COROLLARIUM.

Lin. 10. δὴ	deest.
Lin. 12. ἔχει	deest.
Lin. 14. τὸ ἀπὸ	τοῦ
Lin. 4 β. καὶ	deest.

Ad calcem primi libri subsequētia adjecta sunt in omnibus codicibus, et in editionibus Basilie Oxonię que, nec non in Zamberti et Commandini versionibus; illa tanquam redundantem ac verbosam præcedentium repetitionem ex textu meo rejeci.

Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῆ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἕξει ὅν εὐθείας εἰας διπλοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετραμήνης, ἢ δυναμένη τὴν ἔλλην, καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην ἔλλην καὶ ἔλαττον τμήμα. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον οὕτως ἢ τοῦ δωδεκάεδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσάεδρου, τουτέστιν ὡς ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσάεδρου πλευρὰν ὡς δὲ ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσάεδρου οὕτως ἐστὶν, εὐθείας ἢς διπλοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετραμήνης, ἢ δυναμένη τὴν ἔλλην, καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ἔλλην καὶ τὸ ἔλαττον τμήμα ὡς ἄρα τὸ δωδε-

His utique omnibus notis nobis factis, manifestum est, si in eadem sphaera describantur dodecaedrum et icosaedrum, dodecaedrum ad icosaedrum rationem habiturum esse quam, recta quolibet extrema et media ratione secta, potens totam et majorem portionem ad potentem totam et minorem portionem. Quoniam enim est ut dodecaedrum ad icosaedrum ita dodecaedri superficies ad ipsam icosaedri, hoc est cubi latus ad icosaedri latus; ut autem cubi latus ad ipsum icosaedri ita est, recta quolibet extrema et media ratione secta, potens totam et majorem portionem ad potentem totam et minorem portionem; ut igitur dodecaedrum ad

Toutes ces choses nous étant connues, si l'on décrit dans la même sphère un dodécaèdre et un icosaèdre, et si l'on coupe une droite quelconque en extrême et moyenne raison, il est évident que le dodécaèdre aura avec l'icosaèdre, la même raison que le carré d'une droite, égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment, a avec le carré d'une droite, égal aux carrés de la droite entière et du plus grand segment. Car, puisque le dodécaèdre est à l'icosaèdre comme la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre, c'est-à-dire comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, et que si une droite quelconque est coupée en extrême et moyenne raison, le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, comme le carré d'une droite, égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment, est au carré d'une droite, égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus petit segment; si donc un dodécaèdre et un icosaèdre sont décrits dans une même sphère, et si une droite quelconque est coupée en extrême et moyenne raison, le dodécaèdre

κάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν
σφαῖραν ἐγγραφομένων, οὕτως εὐθείας ἢς διπλο-
τυῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἢ δυνα-
μείνῃ τὴν ὅλην καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν
δυναμείνῃ τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμήμα.

icosaedrum; illis in eadem sphaera descriptis,
ita, recta quolibet extrema et media ratione
secta, potens totam et majorem portionem ad
potentem totam et minorem portionem.

sera à l'icosaèdre comme le carré d'une droite, égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment, est au carré d'une droite, égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment.

LIBER SECUNDUS.

PROPOSITIO II.

Hæc erat secundi libri demonstratio quam in textu ex integro restitui.

EDITIO PARIISIENSIS.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα οκτάεδρον ἐγγρά-
ψαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τετ-
μήσθω δίχα τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημείοις, καὶ
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ, καὶ αἱ
λοιπαί.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ διπλῆ ἐστὶν ἑκατέρας τῶν
ΘΚ, ΗΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΗΖ, καὶ
παράλληλος. Ὀμοίως καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΖΚ ἴση τέ ἐστι
καὶ παράλληλος· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΚΖΗ·

EDITIO OXONIE.

In data pyramide octaedrum describere.

Sit data pyramis ΑΒΓΔ, et secentur in Ε, Ζ,
Η, Θ, Κ, Λ punctis, et jungantur ipsæ ΘΚ, ΘΛ,
ΕΖ, ΖΗ, et reliquæ.

Et quoniam ΑΒ dupla est utriusque ipsarum
ΘΚ, ΗΖ, æqualis igitur est ipsa ΘΚ ipsi ΗΖ,
et parallela. Similiter et ipsa ΘΗ ipsi ΖΚ et
æqualis est et parallela; æquilaterum igitur est

Décrire un octaèdre dans une pyramide donnée.

Soit donnée la pyramide ΑΒΓΔ; coupons les côtés ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΓ, aux points Ε, Ζ, Θ, Κ, Λ, et joignons ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ, etc.

Puisque la droite ΑΒ est double de chacune des droites ΘΚ, ΗΖ, et qu'elle leur est parallèle, la droite ΘΚ sera égale et parallèle à ΗΖ. La droite ΘΗ est semblablement égale et parallèle à ΖΚ; le quadrilatère ΘΚΖΗ est donc équilatéral; je dis

λέγω ὅτι καὶ ῥηθωγώνιον. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς ΚΛ
κάθειται ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ΕΖΒΗ,
ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΓΖΗ, ἰσμίως δείξομεν τὰ
ἐπὶ τοῦ ΘΚΖΗ τετραγώνου ἰσόπλευρα. Ὅπερ ἔδει
ποιῆσαι.

ipsum ΘΚΖΗ; dico et rectangulum. Si enim
ab ipsâ ΚΛ perpendiculares ducantur ad plana
ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, similiter ostende-
mus ipsa in ΘΚΖΗ quadrato æquilatera esse.
Quod oportebat facere.

aussi qu'il est rectangle. Car si de la droite ΚΛ, nous menons des perpendi-
culaires aux plans ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, nous démontrerons semblablement
que les quadrilatères compris dans le carré ΘΚΖΗ, sont équilatéraux. Ce qu'il
fallait faire.

PROPOSITIO III.

EDITIO PARIENSIS.

EDITIO OXONIE.

Lin. 14. p. 511. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, δεest.
AM, MN, NK.
Lin. 16. τῶν τῆς

PROPOSITIO IV.

Lin. 5. p. 615. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΛΘ, δεest.
AK, KH, ΗΘ,

PROPOSITIO V.

Lin. 13. p. 516. καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ'
ὃ συμβάλλει ἢ ὑπὸ τοῦ Θ τῆ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς
τὰ Η, Κ, φανερόν ὅτι αἱ ἐπιζευγυμέναι ῥθῶς
περιέξουσιν μετὰ τῆς αὐτῆς

Sic se habet Oxoniæ editio.
Καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλει ἢ ἀπὸ τοῦ
Θ τῆ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὰ Η, Κ, φανερόν ὅτι
ἡ ἐπιζευγυμένη ῥθῶς περιέξει μετὰ τῆς
αὐτῆς.

In omnibus autem manuscriptis, et in
editionibus Basilicæ Oxoniceque hæc
legere sunt.

Καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλει ἢ ἀπὸ τοῦ
Θ τῆ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπιζευγυμένη ῥθῶς ᾧ
περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς.

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.

EDITIO OXONIA.

Lin. 5. p. 517.	ἔχη	ἔχει.
Lin. 11.	δὴ	δὲ
Lin. 6. p. 518.	καὶ	deest.

PROPOSITIO VII.

Lin. 2. p. 519.	γωνίαν τέμνουσι	τέμνουσι γωνίαν
Lin. 7.	ἀγομένη καθέτω,	καθέτω ἀγομένη
Lin. 15. p. 521.	ὀρθὰς	ὀρθὰς εἰσὶν εὐθείαι
Lin. 16.	εἰσὶν	deest.
Lin. 1. p. 522.	ἔσται	ἔστι
Lin. 7.	ὡς	deest.

PROPOSITIO VIII.

Lin. 6. p. 523.	γενήσθω	Συννοείσθω
Lin. 9.	δὴ	δὲ
Lin. 7. p. 524.	καὶ ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ BZΔ γωνία.	ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ BZΔ.
Lin. 10. p. 525.	περιέξουσι	περιέχουσι
Lin. 14.	μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς BΔ	ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς BΔ μείζων*

PROPOSITIO IX.

Lin. 3. p. 526.	τε καὶ ἰσογώνιον	deest.
Lin. 16.	ὀρθὰς	deest.

PROPOSITIO X.

Lin. 5. p. 529.	καὶ	deest.
Lin. 1. p. 531.	τῆς	τῆς AB
Lin. 3.	καὶ	deest.
Lin. 12.	ἢ KA τῆ KM	αὶ KA, KM

FIN.

ERRATA TOMI SECUNDI.

Pagina	linea		Pagina	linea	
58,	7,	<i>b.</i> multiplant, <i>lege</i> multipliant.			sitionis et in aliis figuris similibus quæ subsequuntur, jungatur recta ΘΚ.
60,	6,	<i>b.</i> <i>Idem.</i>			
74,	10,	ἄλλου, <i>lege</i> ἄλλου πρώτου.	264,	1,	<i>b.</i> ΗΞ, <i>lege</i> ΗΖ in tribus linguis.
—	—	numero, <i>lege</i> numero primo.	270,	4,	<i>b.</i> τὴν ῥητὴν ΔΕ, <i>lege</i> τὴν ΔΕ ῥητὴν.
75,	6,	γάρ, <i>lege</i> γάρ ἐστι.	322,	2,	<i>b.</i> un premier apotome, <i>lege</i> le premier apotome; <i>on lira de même</i> , le second, le troisième etc. apotome.
171 et 172.		deleatur in figurâ littera Δ, quæ non est in lineâ ΖΕ.	365,	5,	ἀσύμμετρος, <i>lege</i> σύμμετρος.
181,	10,	Ὅτι ἴδι διῆξαι, <i>lege</i> ῥητὸν περιέχουσαι. Ὅτι ἴδι ποιῆσαι.	—	6,	incommensurabilis, <i>lege</i> commensurabilis.
—	—	commensurabiles, <i>lege</i> commensurabiles, rationale continentes.	—	4,	incommensurable, <i>lege</i> commensurable.
—	6,	commensurable en puissance seulement, <i>lege</i> commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationelle.	414,	8,	commensurable, <i>lege</i> la même.
223,	9,	μόνον διαιρεῖται, <i>lege</i> ἄρα διαρεῖται μόνον.	459,	2,	<i>b.</i> ἔστω, <i>lege</i> ἐστί.
247,		In figurâ hujus propo-	479,	1,	<i>b.</i> rationelle, <i>lege</i> médi-ale.

TOMI TERTII.

Pagina	linea		Pagina	linea	
66,	9,	τὰ, <i>lege</i> τὰ μὲν.	100,	13,	ἀπὸ τῆς, <i>lege</i> ἀπὸ τῶν.
—	10,	εἶσιν, <i>lege</i> ἐστίν.	129,	13,	ᾧσι, deleatur.
68,	6,	αὐτῇ, <i>lege</i> αὐτῇ δοθῆν.	157,	1,	corollarium, <i>leg.</i> lemma.
71,	5,	δοθείση, <i>lege</i> τῇ δοθείση.	158,	9,	τυγχάνον, <i>lege</i> τυγχάνοντα.
84,	7,	ἐστίν ἔτι, <i>lege</i> ἔτι ἐστίν.			

Pagina	linea		Pagina	linea	
144,	6,	πυραμίδα, lege πυραμίδα ³ .	488,	4, b.	τοῦ, deleatur.
161,	4,	ἢ ἐστὶν ἡ, lege ἐστὶν ἡ.	499,	1, b.	dodecagone, lege dodecagone.
180,	4,	νοῖσθω, lege νοῖσθω.	500,	10,	τῆς, lege τῶν.
188,	12,	εὐθεία, lege εὐθεία.	506,	3,	αι, lege ἡ.
189,	7,	ἐγγράφονται, lege ἐγγράφονται.	537,	6, b.	deest, lege τῶν.
254,	9,	γίνεσθαι, lege γίνεσθαι.	540,	1, b.	δύο, lege δυοί.
260,	6,	γίνεσθαι, lege γίνεσθαι.	544,	5,	ἐκβέβλησθω, lege ἐκβέβλησθω ἢ ΟΔ.
271,	9,	ἐπιζευχύνουσαι, lege ἐπιζευγύνουσαι.	545,	2, b.	23, lege lin. 5.
279,	2, b.	τοῦ, lege τῆς.	548,	11,	10, lege lin. 11.
309,	14,	οὖν, lege δὲ.	552,	2,	6, lege pag. 133, lin. 9.
343,	5, b.	ΔΓΑ, lege ΕΓΑ in tribus linguis.	555,	11,	lin. 11 b, lege lin. 1.
357,	10,	τῆ, lege τῶν.	570,	5, b.	γίνεσθαι, lege γίνεσθαι.
372,	2,	τριγωνῶ, lege τριγώνων.	579,	2,	ἔστο, lege ἔστω.
435,	4, b.	δὲ, deleatur.	—	5, b.	deest, lege concordat.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
516.2EU2P CD01 V003
LES OEUVRES D'EUCLIDE PARIS



3 0112 017246973