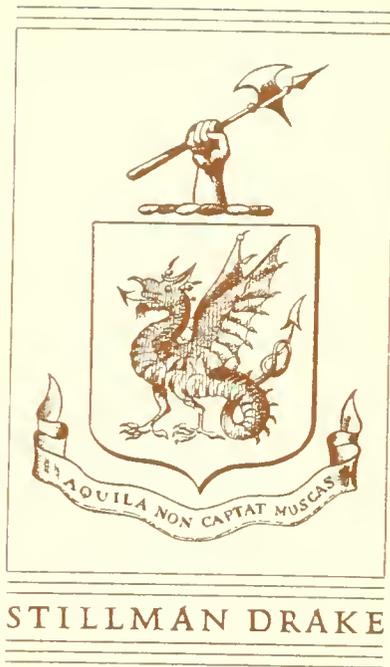




12.10.15

Library
of the
University of Toronto



STILLMAN DRAKE

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES OEUVRES D'EUCLIDE.

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris, aux indications suivantes :

CHEZ { L'AUTEUR, rue de Provence, n° 25 ;
TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17 ;
FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24 ;
Madame veuve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

1816
0009

LES OEUVRES D'EUCLIDE,

EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

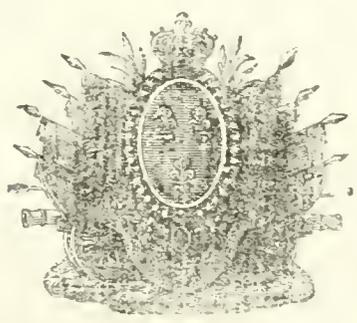
PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES OEUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DÉDIÉ AU ROI.

TOME SECOND.



BIBL. COLL.
COLOGENSIS S.I.

A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1816.

Ex munificentia
Rm̄i D. Emerici Radnich
E. C. Albaregalens.
Canonici.



Digitized by the Internet Archive
in 2009 with funding from
University of Ottawa

<http://www.archive.org/details/lesoeuvresdeucli02eucl>

P R É F A C E.

P R Æ F A T I O.

Hoc volumen, quo liber octavus, nonus et decimus continetur, jam pridem editum fuisset, nisi plura impedimenta, quæ sane non prævideram, moram aliquam attulissent opusque intermisissent. Tertium et ultimum volumen prelo subijcitur, et sub ortum proximæ æstatis prodibit in lucem.

Malignus quidam rumor pererebuerat me jam non habere in manibus vaticanæ bibliothecæ codicem 190, ac proinde ab incepto destitisse. Quo rumore nihil absurdius; rogante enim et impetrante regni interioris administro, codex ille fidei meæ creditus est, ac penes me erit, donec opus meum in lucem sit editum.

Interim, omissâ aliquandiu Euclidis mei curâ, ultimam Apollonio meo manum admovi, quod quidem opus absolutum ac sub judice est, nempe Scientiarum Academiâ. Typis mandabitur græcis, latinis et galliis: accedent variæ lectiones regię bibliothecæ codicum, necnon et Oxoniæ editionis, quæ, fatente ipso editore, confecta est juxta duos græcos codices, seatentes vitiis, ac prorsus iisdem, ntpote ex uno et eodem codice exaratos.

Hæc editio complectetur Conicorum Apollonii septem libros qui supersunt, Pappi lemmata, Eutocii commentarios, et Sereni duos libros de cylindro et cono.

Archimedis operibus necnon Eutocii commentariis edendis græcè, latine et gallice operam impendo. Quando nitidissima Oxoniæ editio prelo fuit subjecta, jam obierat Torelli, vir magnæ doctrinæ, antequam ultimam manum Archimedi suo admovisset, et ob id maculis seatet. Quod si

P R É F A C E.

CE volume , qui renferme le huitième , le neuvième et le dixième livre , aurait paru depuis long-temps , si plusieurs obstacles qu'il ne m'était pas donné de prévoir , n'eussent retardé et suspendu plusieurs fois l'impression de mon ouvrage. Le troisième et dernier volume est sous presse , et paraîtra au commencement de l'été prochain.

On avait répandu le bruit que n'ayant plus entre mes mains le manuscrit 190 de la bibliothèque du Vatican , j'avais abandonné mon entreprise : ce bruit était sans fondement , ce manuscrit n'est jamais sorti de mes mains ; à la sollicitation du Ministre de l'intérieur , ce volume sera laissé à ma disposition jusqu'à la publication entière de mon ouvrage.

Les interruptions de l'impression de mon Euclide m'ont laissé le temps nécessaire pour mettre la dernière main à mon Apollonius. Mon travail est terminé , et soumis à l'examen de l'Académie des Sciences. Les œuvres d'Apollonius seront imprimées en grec , en latin et en français , avec les variantes des manuscrits grecs de la bibliothèque du Roi et de l'édition d'Oxford , laquelle , de l'aven même de l'éditeur , ne fut faite que d'après deux manuscrits grecs qui avaient les mêmes défauts , parce qu'ils étaient tous les deux la copie d'un seul et même manuscrit.

Cette édition renfermera les sept livres des Coniques qui nous restent d'Apollonius , les lemmes de Pappus , les commentaires d'Eutocius , et les deux livres du cylindre et du cône de Sérénus.

Je prépare une édition grecque , latine et française des œuvres d'Archimède et des commentaires d'Eutocius. Lorsque la belle édition d'Oxford fut imprimée , le savant Torelli était mort avant d'avoir mis la dernière main à son Archimède , et c'est à cause de cela que cette édition fourmille de

hæc editio Torelli vivente facta fuisset, non equidem hoc ultimum opus aggressus fuisset. Si forte accidit ut mors immatura me quoque prius arripiat, quam Archimedis opera penitus absolverim, tum opus imperfectum ante novissimam diem exuri jubebo, ne quis, me mortuo, illud prelo subicere velit.

Liber decimus Euclidis Elementorum vix quibusdam geometris nostratibus notus est: quin et bene multi illum habent supervacaneum et intellectu perdifficilem.

Utrumque citra manifestam rerum fidem. Hic liber continet et plures propositiones geometris peritiles, et nonnullas illis semper admirandas.

Fateor equidem studentis animum, primo intuitu posse deterreri et avocari, conspectis septemdecim et centum propositionibus hoc in libro contentis; sed unaquæque, velut è fonte communi, derivatur è quibusdam definitionibus ac præcipuis, iisque paucissimis, propositionibus, quarum ope reliqua facillime demonstrantur. Ad hoc hujus libri partes ita inter se dispositæ sunt, ut earum non seriem et juncturam modo, sed concentum et harmoniam oculus, primo conjectu, percipiat. Illic vere notandus est mirabilis ille ordo quem in omnibus suis operibus Euclides constituit.

Hæc vero libri decimi sunt definitiones et propositiones. Hæc tabula synoptica mihi aptissima visa est ad illius comprehensionem acquirendam.

D E F I N I T I O N E S.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eadem mensurâ mesurantur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mesurantur.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

fautes. Si cette édition eût été faite de son vivant, je ne me serais certainement pas chargé de ce dernier travail. Il est très-possible qu'une mort prématurée vienne aussi me surprendre avant que j'aie mis la dernière main aux œuvres d'Archimède. Mais si cela arrive, j'ordonnerai, avant mon dernier jour, de livrer aux flammes un travail imparfait, qu'on serait peut-être tenté de publier après ma mort.

Le dixième livre des Éléments d'Euclide est aujourd'hui très-peu connu des géomètres français : ils regardent généralement ce livre comme superflu, et comme étant très-difficile à entendre.

Ces deux reproches me paraissent mal fondés. Ce livre renferme un grand nombre de propositions utiles aux géomètres, et une foule d'autres qui sont dignes de toute leur admiration.

Les cent dix-sept propositions que contient ce dixième livre seraient peut-être capables de décourager, au premier abord, celui qui veut l'étudier ; mais tout dépend dans ce livre de quelques définitions, et d'un très-petit nombre de propositions fondamentales, à l'aide desquelles tout le reste se démontre avec la plus grande facilité. Ajoutons à cela que les parties en sont tellement disposées, que l'œil en saisit l'ensemble sans le moindre effort. C'est là surtout qu'Euclide se fait remarquer par l'ordre admirable qu'il a su établir dans tous ses ouvrages.

Voici les définitions et les propositions du dixième livre. Ce tableau synoptique me paraît très-propre à en faciliter l'étude.

D É F I N I T I O N S.

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés sont mesurés par une même surface.

4. Et incommensurables, lorsque leurs carrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocetur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

PROP. I. Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

PROP. II. Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. III. Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

PROP. IV. Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

PROP. V. Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

PROP. VI. Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

PROP. VII. Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

5. Ces choses étant supposées, on démontre qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationnel le quarré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

PROP. I. Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

PROP. II. Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

PROP. III. Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

PROP. IV. Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

PROP. V. Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

PROP. VI. Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

PROP. VII. Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

PROP. VIII. Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. IX. A rectis longitudine commensurabilibus quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum et latera habebunt longitudine commensurabilia; sed a rectis longitudine incommensurabilibus quadrata inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

PROP. X. Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.

PROP. XI. Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

PROP. XII. Eidem magnitudini commensurabiles et inter se sunt commensurabiles.

PROP. XIII. Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. XIV. Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

PROP. XV. Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

PROP. XVI. Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et

PROP. VIII. Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

PROP. IX. Les carrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; les carrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les carrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; les carrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

PROP. X. Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

PROP. XI. Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

PROP. XII. Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles.

PROP. XIII. Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

PROP. XIV. Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

PROP. XV. Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième; et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

PROP. XVI. Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme

tota utriquē ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

PROP. XVII. Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utriquē ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

PROP. XVIII. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

PROP. XIX. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

PROP. XX. Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

sera commensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est commensurable avec une d'elles , les grandeurs proposées seront commensurables.

PROP. XVII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables, leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront incommensurables.

PROP. XVIII. Si l'on a deux droites inégales ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande, et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

PROP. XIX. Si l'on a deux droites inégales ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

PROP. XX. Le rectangle compris sous des droites rationelles commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est rationel.

PROP. XXI. Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

PROP. XXII. Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationale est, et recta quæ potest ipsum irrationale erit; ea autem vocetur media.

PROP. XXIII. Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

PROP. XXIV. Recta mediæ commensurabilis media est.

PROP. XXV. Sub mediis longitudine commensurabilibus secundùm aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, medium est.

PROP. XXVI. Sub mediis potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum, vel rationale vel medium est.

PROP. XXVII. Medium non medium superat rationali.

PROP. XXVIII. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

PROP. XXIX. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes.

PROP. XXX. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

PROP. XXXI. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine.

PROP. XXXII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

PROP. XXI. Si une surface rationnelle est appliquée à une droite rationnelle, elle fera une largeur rationnelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

PROP. XXII. Le rectangle compris sous des droites rationnelles, commensurables en puissance seulement, est irrationnel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationnelle; cette droite s'appèlera médiale.

PROP. XXIII. Le carré d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une longueur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

PROP. XXIV. Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

PROP. XXV. Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

PROP. XXVI. Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationnel ou médial.

PROP. XXVII. Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle.

PROP. XXVIII. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationnelle.

PROP. XXIX. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprennent une surface médiale.

PROP. XXX. Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXI. Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

PROP. XXXII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationnel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXIII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

PROP. XXXIV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

PROP. XXXV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale.

PROP. XXXVI. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

PROP. XXXVII. Si duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis nominibus.

PROP. XXXVIII. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

PROP. XXXIX. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, medium continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis secunda.

PROP. XL. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium; tota recta irrationalis est, vocetur autem major.

PROP. XLI. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est, vocetur autem rationale et medium potens.

PROP. XLII. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum

PROP. XXXIII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande.

PROP. XXXIV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit rationnelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

PROP. XXXV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprennent soit rationnel.

PROP. XXXVI. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des carrés de ces mêmes droites.

PROP. XXXVII. Si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée droite de deux noms.

PROP. XXXVIII. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme sera irrationnelle, et sera la première de deux médiales.

PROP. XXXIX. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

PROP. XL. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée majeure.

PROP. XLI. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationnel, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut une rationnelle et une médiale.

PROP. XLII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces

sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis; tota recta irrationalis est, vocetur autem bina media potens.

PROP. XLIII. Recta ex binis nominibus ad unum solùm punctum dividitur in nomina.

PROP. XLIV. Ex binis mediis prima ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLV. Ex binis mediis secunda ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLVI. Major ad idem solùm punctum dividitur.

PROP. XLVII. Recta rationale et medium potens ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLVIII. Bina media potens ad unum solùm punctum dividitur.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Expositâ rationali, et rectâ ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si vero neutrum, sexta.

droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs carrés, la droite entière sera irrationnelle et sera appelée celle qui peut deux médiales.

PROP. XLIII. La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

PROP. XLIV. La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLV. La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVI. La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVII. La droite qui peut une rationnelle et une médiale ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVIII. La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du carré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du carré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

PROP. XLIX. Invenire ex binis nominibus primam.

PROP. L. Invenire ex binis nominibus secundam.

PROP. LI. Invenire ex binis nominibus tertiam.

PROP. LII. Invenire ex binis nominibus quartam.

PROP. LIII. Invenire ex binis nominibus quintam.

PROP. LIV. Invenire ex binis nominibus sextam.

PROP. LV. Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

PROP. LVI. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

PROP. LVII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertîâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

PROP. LVIII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

PROP. LIX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

PROP. LX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

PROP. LXI. Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

PROP. LXII. Quadratum primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

PROP. LXIII. Quadratum secundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

PROP. LXIV. Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

PROP. XLIX. Trouver la première de deux noms.

PROP. L. Trouver la seconde de deux noms.

PROP. LI. Trouver la troisième de deux noms.

PROP. LII. Trouver la quatrième de deux noms.

PROP. LIII. Trouver la cinquième de deux noms.

PROP. LIV. Trouver la sixième de deux noms.

PROP. LV. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

PROP. LVI. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la première de deux médiales.

PROP. LVII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

PROP. LVIII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée majeure.

PROP. LIX. Si une surface est comprise sous une irrationnelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LX. Si une surface est comprise sous une rationnelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut deux médiales.

PROP. LXI. Le carré d'une droite de deux noms appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

PROP. LXII. Le carré de la première de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la seconde de deux noms.

PROP. LXIII. Le carré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la troisième de deux noms.

PROP. LXIV. Le carré d'une majeure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

PROP. LXV. Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

PROP. LXVI. Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

PROP. LXVII. Recta ei quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.

PROP. LXVIII. Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

PROP. LXIX. Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

PROP. LXX. Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

PROP. LXXI. Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

PROP. LXXII. Rationali et medio compositis, quatuor irrationales fiunt, vel ex binis nominibus recta, vel ex binis mediis prima, vel major, vel et rationale et medium potens.

PROP. LXXIII. Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

PROP. LXXIV. Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

PROP. LXXV. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

PROP. LXXVI. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commen-

PROP. LXV. Le carré d'une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

PROP. LXVI. Le carré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

PROP. LXVII. La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

PROP. LXVIII. La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

PROP. LXIX. Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

PROP. LXX. Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LXXI. Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

PROP. LXXII. Si l'on ajoute une surface rationnelle avec une surface médiale, on aura quatre droites irrationnelles ; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LXXIII. Deux surfaces médiales incommensurables entr'elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationnelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

PROP. LXXIV. Si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière ; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome.

PROP. LXXV. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationnelle, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le premier apotome de la médiale.

PROP. LXXVI. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensu-

surabilis existens toti, quæ cum totâ medium continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

PROP. LXXVII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum vero sub ipsis medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

PROP. LXXVIII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

PROP. LXXIX. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

PROP. LXXX. Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

PROP. LXXXI. Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

PROP. LXXXII. Mediæ apotomæ secundæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

PROP. LXXXIII. Minori una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex

nable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface médiale, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appèlera le second apotome de la médiale.

PROP. LXXVII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

PROP. LXXVIII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationnel, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. LXXIX. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des quarrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. LXXX. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

PROP. LXXXI. Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationnelle.

PROP. LXXXII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome médial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

PROP. LXXXIII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de

ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero bis sub ipsis medium.

PROP. LXXXIV. Ei quæ cum rationali medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti; et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale.

PROP. LXXXV. Ei quæ cum medio medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, si quidem tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome quarta.

ces droites rationelle , et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

PROP. LXXXIV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

PROP. LXXXV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés.

DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appèlera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière, le reste s'appèlera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera quatrième apotome.

5. Si vero sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

PROP. LXXXVI. Invenire primam apotomen.

PROP. LXXXVII. Invenire secundam apotomen.

PROP. LXXXVIII. Invenire tertiam apotomen.

PROP. LXXXIX. Invenire quartam apotomen.

PROP. XC. Invenire quintam apotomen.

PROP. XCI. Invenire sextam apotomen.

PROP. XCII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

PROP. XCIII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

PROP. XCIV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

PROP. XCV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

PROP. XCVI. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

PROP. XCVII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

PROP. XCVIII. Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

PROP. XCIX. Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

PROP. C. Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera sixième apotome.

PROP. LXXXVI. Trouver un premier apotome.

PROP. LXXXVII. Trouver un second apotome.

PROP. LXXXVIII. Trouver un troisième apotome.

PROP. LXXXIX. Trouver un quatrième apotome.

PROP. XC. Trouver un cinquième apotome.

PROP. XCI. Trouver un sixième apotome.

PROP. XCII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

PROP. XCIII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

PROP. XCIV. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

PROP. XCV. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

PROP. XCVI. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. XCVII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. XCVIII. Le carré d'un apotome appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un premier apotome.

PROP. XCIX. Le carré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un second apotome.

PROP. C. Le carré d'un second apotome médial appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

PROP. CI. Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

PROP. CII. Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

PROP. CIII. Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

PROP. CIV. Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est atque ordine eadem.

PROP. CV. Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

PROP. CVI. Recta minori commensurabilis minor est.

PROP. CVII. Recta ei quæ cum rationali medium totum facit oommen-
surabilis et ipsa cum rationali medium totum faciens est.

PROP. CVIII. Recta ei quæ cum medio medium totum facit commen-
surabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

PROP. CIX. Medio a rationali detracto, recta reliquum spatium potens
una duarum irrationalium fit, vel apotome, vel minor.

PROP. CX. Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt vel
mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

PROP. CXI. Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ
duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio me-
dium totum faciens.

PROP. CXII. Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.

PROP. CXIII. Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus

PROP. CI. Le carré d'une mineure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

PROP. CII. Le carré d'une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

PROP. CIII. Le carré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

PROP. CIV. Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

PROP. CV. Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

PROP. CVI. Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

PROP. CVII. La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. CVIII. Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

PROP. CIX. Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationnelle, la droite qui pent la surface restante est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

PROP. CX. Une surface rationnelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationnelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. CXI. Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationnelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. CXII. Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

PROP. CXIII. Le carré d'une rationnelle étant appliqué à une droite de

applicatum latitudinem facit apotomen, ejus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eâdem ratione; et adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

PROP. CXIV. Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, ejus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eundem ordinem habet quem apotome.

PROP. CXV. Si spatium contineatur sub apotome et rectâ ex binis nominibus, ejus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; recta spatium potens rationalis est.

PROP. CXVI. A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nulla nulli præcedentium eadem.

PROP. CXVII. Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

Hæ sunt definitiones et propositiones libri decimi, quæ omnes propositiones perspicue, simpliciterque demonstrantur.

Hoc volumen permultas lectiones varias continet. Ingens multitudo rerum supervacanearum in textum libri decimi introductæ fuerant; quæ omnes e textu ejectæ sunt.

Aliter demonstrata, corollaria, lemmata et scholia quibus librum decimum expurgavi reperiuntur cum versionibus latinis et gallicis in lectionibus variantibus.

Quæ e textu libri decimi ejecta sunt, illa Euclidi abjudicanda semper fuerunt visa; et quæ ejeci, ea et ex omnibus optimis codicibus fuerunt ejecta. Si quando erravi, hoc erit parvi momenti; adde quod quæ ejecta sunt e textu in lectionibus variantibus reperiuntur. Cæterum mihi erat norma semper fere certa discernendi quæ sunt Euclidis ex illis quæ al Euclide sunt aliena.

deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

PROP. CXIV. Le carré d'une rationnelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

PROP. CXV. Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationnelle.

PROP. CXVI. Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

PROP. CXVII. Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Telles sont les définitions et les propositions du dixième livre : toutes ces propositions sont démontrées d'une manière claire et simple.

Ce volume renferme un très-grand nombre de variantes. Une foule de superfluités avaient été introduites dans le texte du dixième livre; je les en ai fait disparaître.

Les *autrement*, les corollaires, les lemmes et les scholies dont j'ai purgé le dixième livre se trouvent dans les variantes avec leur traduction latine et française.

Ce que j'ai supprimé dans le dixième livre a toujours été regardé comme indigne d'Euclide; ajoutez à cela que les suppressions que j'ai faites sont autorisées presque toutes par les meilleurs manuscrits. Si j'ai erré en quelque chose, le mal n'est pas grand; puisque ce que l'on ne trouve pas dans le texte, on le trouve dans les variantes. Au reste, j'avais une règle presque toujours infallible de discerner ce qui appartient à Euclide de ce qui lui est étranger.

Antiqui geometræ, Euclides scilicet, Archimedes et Apollonius, solebant ad propositum directe tendere, nunquam de viâ declinantes demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam ipsis erant necessaria. Quæ cum ita sint, fere impossibile est illum in errorem labi qui argumentum callide animo complectitur. Accedit illud quod in omnibus ejectis nec Euclidis concinitatem agnoscere est, nec verba ipsi familiaria.

Inter ejecta ex decimo libro invenire est aliter demonstrata quæ nullius sunt momenti. Vide *aliter* propositionis 1, et scholium propositionis 22, quod merum est *aliter*.

Invenire est demonstrationes quæ in libris præcedentibus reperiuntur. Vide lemmata propositionum 31, 32, 33.

Invenire quoque est plura futilia et scioli alicujus glossemata. Vide corollarium propositionis 24, scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum.

In pluribus ejectis Euclides loquens introducit, *καλει, ἐκάλει*; *vocat, vocavit*, etc. Vide scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum, etc.

Hæc et plura alia e textu decimi libri sunt ejecta. In textu plura retinui quæ ex ipso fortasse ejicere potuissem; tale est scholium propositionis 19, et *aliter* propositionum 19, 106, 107, 116, et corollarium propositionis 112, necnon *aliter* propositionis 117, cujus haud dubie demonstratio est una ex elegantissimis totius geometriæ.

Retinui quoque in textu plura alia quæ ex illo ejicere fortasse debuissim, et quæ ex illo ejicerem, si quando alteram Euclidis editionem producerem; tale est lemma propositionis 9, talia sunt etiam lemmata propositionum 14, 17, 33, quæ in libris præcedentibus sunt demonstrata, necnon lemma propositionis 20, et corollarium propositionis 24, quæ nihil sunt nisi inutilia glossemata.

E textu ejicere debuissim propositionem 13, quæ eadem est ac propositio 14, et quæ sine dubio Euclidis non est. Retinui tamen, ut propositiones

Les anciens géomètres, je veux dire Euclide, Archimède et Apollonius, avaient pour usage de marcher constamment vers leur but sans s'écarter jamais de leur chemin, pour s'occuper de ce qui ne leur était pas nécessaire pour aller en avant. Cela étant ainsi, il n'est guère possible, pour une personne qui entend bien la matière, de tomber dans l'erreur. Ajoutez à cela que dans toutes les suppressions que j'ai faites, on ne reconnaît ni la manière, ni même les expressions accoutumées d'Euclide.

Parmi les suppressions que j'ai faites au dixième livre, on trouve des *Autrement* qui ne sont d'aucun prix. Voyez l'*Autrement* de la proposition 1, et la Scholie de la proposition 22, qui n'est qu'un pur *Autrement*.

On y rencontre des démonstrations qui se trouvent dans les livres précédents. Voyez les lemmes des propositions 31, 32, 33.

Ici ce sont des futilités, ce sont des gloses de quelque demi-savant en géométrie. Voyez le corollaire de la proposition 24, les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes.

Dans une grande partie des suppressions que j'ai faites, on fait parler Euclide *καλει, ἐκαλεισι; il appelle, il appela*. Voyez les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes, etc.

Telles sont les suppressions importantes que j'ai cru devoir faire au dixième livre; j'ai conservé dans le texte des choses que j'aurais pu supprimer; telle est la scholie de la proposition 19, les *aliter* des propositions 19, 106, 107 et 116; le corollaire de la proposition 112, ainsi que l'*autrement* de la proposition 117, dont la démonstration est certainement une des plus belles de toute la géométrie.

J'en ai conservé d'autres que j'aurais peut-être dû supprimer, et que je supprimerais certainement dans une nouvelle édition, si jamais elle avait lieu. Tel est le lemme de la proposition 9; tels sont aussi les lemmes des propositions 14, 17, 33, qui sont démontrés dans les livres précédents; ainsi que le lemme de la proposition 20, et le corollaire de la proposition 24, qui ne sont que des gloses inutiles.

J'aurais dû supprimer la proposition 13, qui est la même que la proposition 14, et qui n'est certainement pas d'Euclide. Si je ne l'ai

meæ editionis signarentur iisdem numeris quibus propositiones editionis Oxoniæ.

Retinui etiam scholium quod ultimam propositionem subsequitur, quamvis illud supponat plures propositiones quæ in libris tantum subsequentibus demonstrantur. Hoc scholium retinui, quia illud ostendit quomodo, rectis incommensurabilibus inventis, magnitudines duarum et trium dimensionum inveniri possint inter se incommensurabiles.

Corollarium propositionis 73, quod in lectionibus variis adest, in textu adesse deberet.

Nihil amplius dicam de lectionibus variis libri decimi; nunc de propositione 19 libri noni sum locuturus.

Dixi in notâ quæ reperitur in imâ paginâ hujus propositionis Hervagium volentem emendare duos codices græcos quibus usus fuit in Euclide edendo, pro propositione 19 substituisse græcam versionem versionis latinæ Zamberti, quæ concordat cum codicibus 190, 2466, 2342. Vide lectiones varias. Mea editio plane concordat cum omnibus aliis codicibus. Editio Oxoniæ consentanea est cum editione Basilicæ. In imâ paginâ editionis Oxoniæ legere est textum hujus propositionis esse corruptissimum. Textus est corruptus in solis codicibus de quibus mentionem feci; in omnibus vero aliis est maxime purus.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ, et in codicibus 190, 2466, 2362, hoc agitur ut ostendatur esse impossibile invenire quartum numerum integrum Δ tribus numeris integris A, B, Γ proportionalem, quando numeri A, B, Γ non sunt deinceps proportionales, et quando numeri A, Γ inter se sunt primi.

Hæc est ratiocinatio :

Hoc sit possibile, et ut A ad B ita sit Γ ad Δ ; fiat ut B ad Γ ita sit Δ ad E . Vide secundum *alinea* paginæ 439, et notam propositionis 19.

Atqui evidenter fieri potest ut E qui numerus integer esse debet vel sit vel non sit integer numerus; hæc ratiocinatio igitur est falsa. Et valde miror quod falsitatem hujus ratiocinationis non animadverterit Commandinus, qui erat unus ex primis ætatis suæ geometris.

pas fait, c'était afin que les propositions de mon édition eussent les mêmes numéros que celle d'Oxford.

J'ai conservé aussi la scholie de la fin du dixième livre, quoiqu'elle suppose plusieurs propositions qui ne sont démontrées que dans les livres suivants. J'ai conservé cette scholie, parce qu'elle fait voir comment des droites incommensurables étant trouvées, on peut trouver des grandeurs de deux et de trois dimensions incommensurables entr'elles.

C'est par erreur que le corollaire de la proposition 73 se trouve parmi les variantes, et non dans le texte.

Je ne parlerai pas davantage des variantes du dixième livre. Il ne me reste plus qu'à parler de la proposition 19 du neuvième livre.

J'ai dit dans la note qui est au bas de cette proposition, qu'Hervage, voulant rectifier les deux manuscrits grecs dont il se servit dans son édition d'Euclide, avait mis à la place de la proposition 19 la version grecque de la version latine de Zamberti, qui est entièrement conforme aux trois manuscrits 190, 2466, 2342. Voyez les variantes. Mon édition est entièrement conforme à tous les autres manuscrits. Celle d'Oxford est calquée sur celle de Basle. On lit, au bas de la page, dans l'édition d'Oxford, que cette proposition est tout-à-fait corrompue. Le texte n'est corrompu que dans les trois manuscrits dont je viens de parler; dans tous les autres, il est dans toute sa pureté.

Dans les éditions de Basle et d'Oxford, et dans les trois manuscrits 190, 2466, 2342, il s'agit de démontrer qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre entier Δ proportionnel aux trois nombres entiers A, B, Γ , lorsque les nombres A, B, Γ ne sont pas successivement proportionnels, et que les nombres A, Γ sont premiers entr'eux.

Voici comment on raisonne :

Que cela soit possible, et que A soit à B comme Γ est à Δ ; faisons en sorte que B soit à Γ comme Δ est à E . Voyez le second alinéa de la page 439, et la note de la proposition 19.

Or, il est évident que E , qui doit être un nombre entier, peut ou être ou n'être pas un nombre entier. Ce raisonnement est donc faux. Je suis très-surpris que Commandin, qui était un des premiers géomètres de son temps, n'ait pas aperçu la fausseté de ce raisonnement.

Hæc ratiocinatio non solum falsa est, sed etiam et enuntiatio propositionis demonstrandæ; possibile enim est invenire quartum numerum integrum proportionalem numeris 4, 8, 9, qui quidem non sunt deinceps proportionales, et quorum extremi 4 et 9 primi inter se sunt.

Quod attinet ad partem typographicam summâ diligentia usum sum ut textus hujus voluminis quam maxime emendatus esset. D. Jannet necnon D. Patris, mei operis editor, qui mea specimina accuratissime legerunt, non tenui mihi fuerunt auxilio.

Nota. Propositio 7 libri primi detruncata erat in omnibus græcis codicibus. Vide præfationem primi voluminis, pag. 19. Hanc propositionem integram reperi in versione latinâ quam ex arabicâ linguâ fecit Campanus, et quæ edita fuit Venetiis anno 1482. Hæc propositio ex toto Euclidis dignissima mihi videtur. En hîc illa est cum meâ versione græcâ gallicâque: Campani versionem in paucissimis immutavi.

BΙΒΛΙΟΝ Δ'. ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Εάν ἀπὸ δύο σημείων τῶν αὐτῶν εὐθείας περὶ τῶν δύο εὐθείαι κατὰ τι σημεῖον συμπίπτουσαι διάχθωσιν, ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη οὐ διαχθισονται δύο ἄλλαι εὐθείαι κατὰ ἄλλον σημεῖον συμπίπτουσαι· ὅστε ἴσας εἶναι ταῖς τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB, καὶ ἀπὸ τῶν A, B περὶ τῶν διήχθωσαν δύο εὐθείαι αἱ ΑΓ, ΒΓ κατὰ τι σημεῖον τὸ Γ συμπίπτουσαι· λέγω δὲ ὅτι ἀπὸ πέρατων τῆς AB, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, οὐ διαχθισονται ἄλλαι δύο εὐθείαι συμπίπτουσαι κατὰ

Si ex duobus punctis rectæ extremitatibus duæ rectæ in unum punctum concurrentes ducantur, ex iisdem punctis et in iisdem partibus non ducantur duæ aliæ rectæ in aliud punctum concurrentes, ita ut æquales sint rectis easdem extremitates habentibus.

Sit recta AB, et ex A, B extremitatibus ducantur duæ rectæ ΑΓ, ΒΓ in punctum Γ concurrentes; dico ex extremitatibus rectæ AB, et in iisdem partibus, non ducendas fore duas alias rectas in aliud punctum concurrentes, ita ut

LIVRE I. PROPOSITION VII.

Si des extrémités d'une droite on mène deux droites qui se rencontrent en un point, il est impossible de mener des mêmes points, et du même côté, deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de manière que les droites qui ont les mêmes extrémités soient égales entr'elles.

Soit la droite AB; des extrémités A, B de cette droite menons deux droites ΑΓ, ΒΓ qui se rencontrent en un point Γ; je dis qu'on ne peut pas du même côté mener des extrémités de AB deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de

Non seulement ce raisonnement est faux, mais encore l'énoncé de la proposition à démontrer. Car il est très-possible de trouver un quatrième nombre entier proportionnel aux nombres 4, 8, 9, qui ne sont pas successivement proportionnels, et dont les extrêmes 4 et 9 sont premiers entr'eux.

Quant à la partie typographique de ce volume, j'ai fait tous mes efforts pour donner au texte toute la pureté possible. J'ai été puissamment secondé par M. Jannet et M. Patris, éditeur de mon ouvrage, qui ont eu la complaisance de lire les épreuves avec le plus grand soin.

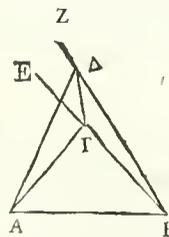
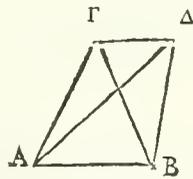
Nota. La proposition VII du premier livre était tronquée dans tous les manuscrits grecs. Voyez la Préface du premier volume, pag. 19. J'ai trouvé cette proposition toute entière dans la version latine faite d'après l'arabe par Campan, et publiée à Venise en 1482. Elle me paraît en tout digne d'Euclide. La voici avec ma version grecque et latine. Je n'ai fait que quelques légers changements à la version de Campan.

ἄλλον σημεῖον, ὥστε εὐθεῖαν μὲν ἀπὸ σημεῖου τοῦ Α ἤχθεισαν ἴσην εἶναι τῇ ΑΓ, ἤχθεισαν δὲ ἀπὸ σημεῖου τοῦ Β ἴσην τῷ ΒΓ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ σημεῖον τὸ Δ συμπίπτουσαι, καὶ ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, εὐθεῖα δὲ ΒΔ ἴση τῇ ΒΓ.

recta quidem ex puncto A ducta æqualis sit ipsi ΑΓ, ducta vero ex puncto B æqualis ipsi ΒΓ.

Si enim possibile, ducantur in eisdem partibus duæ aliæ rectæ in punctum Δ concurrentes; et sit recta quidem ΑΔ æqualis ipsi ΑΓ, recta vero ΒΔ æqualis ipsi ΒΓ.



Ἦτοι σημεῖον τὸ Δ ἐντὸς πεσεῖται τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἢ ἐκτός· μὴ γάρρεις μίαν τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ

Vel punctum Δ intra triangulum ΑΒΓ cadet vel extra; non enim in unum laterum ΑΓ, ΒΓ

manière que la droite menée du point A soit égale à ΑΓ, et que la droite menée du point B soit égale à ΒΓ.

Car si cela est possible, menons du même côté deux autres droites qui se rencontrent en un point Δ, de manière que ΑΔ soit égal à ΑΓ, et ΒΔ égal à ΒΓ.

Ou le point Δ tombera en dedans du triangle ΑΒΓ, ou en dehors; car il ne tombera

πισεῖται· εἰ γὰρ πεισείται, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ μείζον ἔσται, ὅπερ ἄτοπον.

Πιπτέτω πρότερον ἐκτός. Ἦτοι μία τῶν ΑΔ, ΒΔ μίαν τῶν ΑΓ, ΒΓ τεμεῖ, ἢ οὐδέτερα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδέτεραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τεμεῖ.

Τεμεῖτω δὴ ἡ ΑΔ τὴν ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΑΔ, ΑΓ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΒΔ, ΒΓ τοῦ ΒΓΔ τριγώνου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Ἀλλὰ δὴ μείζον ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ· ὥστε τὸ μέρος τοῦ ὅλου μείζον ἔστιν, ὅπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὴ δευχθήσεται, καὶ ἡ ΒΓ τὴν ΑΔ τέμει.

Ἀλλὰ δὴ οὐδέτερα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδέτεραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τεμεῖτω καὶ τὸ Δ σημείον ἐκτός πιπτέτω τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ, καὶ προσεπιβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΒΓ, ΒΔ εὐθείαι αἱ ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ

cadet; si enim caderet, pars toto major esset, quod absurdum.

Cadat primum extra. Vel una ex ΑΔ, ΒΔ rectis unam ex ΑΓ, ΒΓ rectis secabit, vel neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secabit.

Secet igitur ΑΔ ipsam ΒΓ, et jungatur ΓΔ. Quoniam igitur æqualia sunt duo latera ΑΔ, ΑΓ trianguli ΑΓΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ. Rursus, quoniam æqualia sunt duo latera ΒΔ, ΒΓ trianguli ΒΓΔ, æqualis est et angulus ΒΓΔ angulo ΒΔΓ. Sed et major est angulus ΒΔΓ angulo ΑΔΓ; angulus igitur ΒΓΔ major est angulo ΑΓΔ; quare pars quam totum major est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si ipsa ΒΓ ipsam ΑΔ secet.

Sed et neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secet, et punctum Δ cadat extra triangulum ΑΒΓ, et jungatur ΔΓ, et producantur in directum ipsarum ΒΓ, ΒΔ rectæ ΓΕ, ΔΖ.

Quoniam igitur æquales sunt rectæ ΑΓ, ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ. Rursus,

pas sur un des côtés ΑΓ, ΒΓ de ce triangle, parce que, si cela était, la partie serait plus grande que le tout; ce qui est absurde.

Que le point Δ tombe premièrement en dehors; ou l'une des droites ΑΔ, ΒΔ coupera l'une des droites ΑΓ, ΒΓ, ou aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupera aucune des droites ΑΓ, ΒΓ.

Que la droite ΑΔ coupe la droite ΒΓ; joignons ΓΔ. Puisque les deux côtés ΑΔ, ΑΓ du triangle ΑΓΔ sont égaux, l'angle ΑΓΔ sera égal à l'angle ΑΔΓ (5. 1). De plus, puisque les deux côtés ΒΔ, ΒΓ du triangle ΒΓΔ sont égaux, l'angle ΒΓΔ sera égal à l'angle ΒΔΓ (5. 1). Mais l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΑΔΓ; l'angle ΒΓΔ est donc plus grand que l'angle ΑΓΔ; la partie est donc plus grande que le tout, ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si la droite ΒΓ coupait la droite ΑΔ.

Mais qu'aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupe aucune des droites ΑΓ, ΒΓ, et que le point Δ tombe hors du triangle ΑΒΓ; joignons ΔΓ, et menons les droites ΓΕ, ΔΖ dans les directions des droites ΒΓ, ΒΔ.

Puisque les droites ΑΓ, ΑΔ sont égales, l'angle ΑΔΓ sera égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1).

ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΒΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ. Ἀλλὰ δὴ ἐλάσσων ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΖ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· ὥστε καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους ἐλάσσων ἐστίν, ἕπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὴ δειχθήσεται, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς πίπτει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Ἐάν ἀπὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

quoniam æquales sunt rectæ ΒΓ, ΒΔ, æqualis est et angulus ΓΔΖ angulo ΕΓΔ. Sed et minor est angulus ΕΓΔ quam angulus ΑΓΔ; angulus igitur ΓΔΖ minor est angulo ΑΔΓ; quare et totum quam pars minus est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si punctum Δ cadat intra triangulum ΑΒΓ. Si ex duobus, etc.

De plus, puisque les droites ΒΓ, ΒΔ sont égales, l'angle ΓΔΖ sera égal à l'angle ΕΓΔ (5. 1). Mais l'angle ΕΓΔ est plus petit que l'angle ΑΓΔ; l'angle ΓΔΖ est donc plus petit que l'angle ΑΔΓ; le tout est donc plus petit que la partie; ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si le point Δ tombait en dedans du triangle ΑΒΓ. Donc, etc.

M. Sédillot, membre adjoint du bureau des longitudes, et professeur à la Bibliothèque du Roi, a eu la complaisance de traduire littéralement pour moi cette proposition importante d'Euclide d'après la version arabe de Nassir-Eddin Thoussy, imprimée à Rome en 1594. La version latine de Campan est tout-à-fait conforme à la manière d'Euclide; il n'en est pas de même de la version de Nassir-Eddin Thoussy, quoiqu'elle soit la même pour le fond; il est donc présumable que la version arabe dont s'est servi Campan n'est pas la même que la version arabe imprimée à Rome. Voici la version de M. Sédillot, pour qui la langue arabe est aussi familière que les sciences mathématiques.

Soient menées des deux extrémités d'une ligne droite donnée, deux droites qui se rencontrent en un point quelconque, situé d'un côté déterminé de la ligne donnée, on ne pourra, des deux mêmes points et du même côté de la ligne, mener deux autres droites respectivement égales aux deux premières, chacune à sa corrélatrice, et se rencontrant en un autre point que les deux premières.

Des deux points Α et Β de la droite ΑΒ, je mène les deux droites ΑΓ, ΒΓ qui se rencontrent au point Γ. Des deux mêmes points et du même côté Γ, je mène les deux autres droites ΑΔ, ΒΔ; ΑΔ étant la corrélatrice de ΑΓ, et ΒΔ celle de ΒΓ; et je dis que les deux lignes ΑΔ et ΒΔ ne peuvent se rencontrer en un autre point que le point Γ.

Supposons qu'elles puissent se rencontrer au point Δ; je joins Δ et Γ par la droite ΔΓ; les deux

côtés AG , AD sont égaux ; l'angle ΔGA plus grand que ΔGB est égal à l'angle ΓDA par la cinquième proposition ; ainsi ΓDA est plus grand que ΔGB .

De même, les deux côtés BF , BD sont égaux ; l'angle ΔFB plus petit que ΓDA est égal à l'angle ΓDB par la cinquième proposition ; l'angle ΓDB serait donc plus petit que ΓDA , et celui-ci plus grand que celui-là ; ce qui est absurde. Ainsi la chose proposée est vraie ; ce que nous voulions démontrer.

À l'égard de cette proposition, on peut varier la construction. Ainsi lorsque le point Δ tombe au-dehors du triangle ABF , l'un des deux côtés ΔA ou ΔB peut être ou n'être pas coupé par l'un des deux autres côtés ΓA ou ΓB ; ou bien le point Δ peut tomber dans le triangle ABF , ou enfin sur l'un des deux côtés ΓA ou ΓB .

Nous venons de démontrer l'impossibilité du cas indiqué dans la figure première. Prolongeons dans la seconde les deux lignes AD , BF , selon leur direction respective dans la région du point Δ , vers les points E , Z^* ; puis joignons par une droite les deux points F et Δ .

Comme dans la figure 2, les angles ΔGA et ΔGF sont égaux par la cinquième proposition, les angles EFD et ZDF sont aussi égaux par la même proposition ; l'angle EFD égal à ZDF , qui est plus grand que ΔDF égal à ΔGA , serait plus grand que ΔGA , et celui-ci plus petit que celui-là, ce qui est absurde.

On montrerait de même l'absurdité pour le cas où le point Δ tomberait dans le triangle ABF^{**} .

Quant au cas^{***} où le point Δ tombe sur la ligne BF , prolongée ou non, il faudrait que de deux lignes égales l'une fût plus grande ou plus petite que l'autre, ce qui est également absurde.

* Après les points E , Z , la version arabe ajoute : *et vers les points K , E dans la figure 3.*

** Au lieu de où le point Δ tomberait dans le triangle ABF , la version arabe dit simplement : *indiqué dans la figure 3.*

*** Au lieu de au cas, la version arabe dit à la figure 4.

J'ai fait ces légers changements pour ne pas multiplier les figures sans nécessité.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εάν ὄσιν ὁμοειρητοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄσιν ἐλάχιστοὶ εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἐστῶσαν ἰσοσειοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ , οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ A, B, Γ, Δ ἐλάχιστοὶ εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ , extremi autem eorum A, Δ primi inter se sint; dico ipsos A, B, Γ, Δ minimos esse ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis.

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

Soient A, B, Γ, Δ tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que leurs extrêmes A, Δ soient premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

2 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ μὴ, ἕστωσαν ἐλάττωτες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσι τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλῆθει τῶν Ε, Ζ,

Si enim non, sint minores ipsis Α, Β, Γ, Δ ipsi Ε, Ζ, Η, Θ in eadem ratione existentes cum ipsis. Et quoniam ipsi Α, Β, Γ, Δ in eadem ratione sunt cum ipsis Ε, Ζ, Η, Θ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipso-

Α, 8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ε	Ζ	Η	Θ

Η, Θ¹. διίσει ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως² ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι³ ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάμεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, ταυτέστι⁴ ὅ, τε ἠρούμενος τοῖ ἠρούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

rum Ε, Ζ, Η, Θ; ex æquo igitur est ut Α ad Δ ita Ε ad Θ. Ipsi autem Α, Δ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri æqualiter metiuntur ipsos eandem rationem habentes, major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Α ipsum Ε, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsi Ε, Ζ, Η, Θ minores existentes ipsis Α, Β, Γ, Δ in eadem ratione sunt cum ipsis; ipsi Α, Β, Γ, Δ igitur minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Car si cela n'est point, que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, soient en même raison que ceux-ci. Puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont en même raison que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Ε, Ζ, Η, Θ, par égalité Α est à Δ comme Ε est à Θ (14. 7). Mais les nombres Α, Δ sont premiers entre eux, et les nombres premiers sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (25. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, ne sont pas en même raison que ceux-ci; donc les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἀριθμοὺς εἰρεῖν ἕξῃς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ¹, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἐστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἕξῃς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ, Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η, Θ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω.

Α, 2.	Β, 5.	
Γ, 4.	Δ, 6.	Ε, 9.
Ζ, 8.	Η, 12.	Θ, 18. Κ, 27.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν². ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως³ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ

PROPOSITIO II.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in datâ ratione.

Sit data ratio in minimis numeris, ratio ipsius A ad B; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in ipsius A ad B ratione.

Imperentur quidem quatuor; et A se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat; ipsum vero Β multiplicans ipsum Δ faciat, et adhuc Β se ipsum multiplicans ipsum Ε faciat, et adhuc ipse Α ipsos Γ, Δ, Ε multiplicans ipsos Ζ, Η, Θ faciat, ipse vero Β ipsum Ε multiplicans ipsum Κ faciat.

Et quoniam ipse Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Γ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Δ fecit, numerus igitur Α duos ipsos Α, Β multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam ipse Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero Β se ipsum

PROPOSITION II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans une raison donnée.

Que la raison donnée, dans les plus petits nombres, soit celle de Α à Β; il faut trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de Α à Β.

Qu'on en demande quatre. Que Α se multipliant lui-même fasse Γ, que Α multipliant Β fasse Δ, que Β se multipliant lui-même fasse Ε, que Α multipliant encore Γ, Δ, Ε fasse Ζ, Η, Θ, et que Β multipliant Ε fasse Κ.

Puisque Α se multipliant lui-même a fait Γ, et que Α multipliant Β a fait Δ, le nombre Α multipliant les deux nombres Α, Β a fait Γ, Δ; donc Α est à Β comme Γ est à Δ (17. 7). De plus, puisque Α multipliant Β a fait Δ, et que Β se multipliant

4 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πεποιήκεν, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκεν· ἐκάτερος ἄρα τῶν Α, Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Δ, Ε πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ

Α, 2.	Β, 5.	
Γ, 4.	Δ, 6.	Ε, 9.
Ζ, 8.	Η, 12.	Θ, 18. Κ, 27.

οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Θ πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, Κ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. Λέγω δὲ ὅτι

multiplicans ipsum E fecit; uterque igitur ipsorum A, B ipsum B multiplicans utrumque ipsorum Δ, E fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad E. Sed ut A ad B ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Δ ad E. Et quoniam ipse A ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos Z, H fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Z ad H. Ut autem Γ ad Δ ita A ad B; et

ut igitur A ad B ita Z ad H. Rursus, quoniam ipse A ipsos Δ, E multiplicans ipsos H, Θ fecit; est igitur ut Δ ad E ita H ad Θ. Ut autem Δ ad E ita A ad B; et ut A igitur ad B ita H ad Θ. Et quoniam ipsi A, B, ipsum E multiplicantes ipsos Θ, Κ fecerunt; est igitur ut A ad B ita Θ ad Κ. Sed ut A ad B ita et Z ad H et H ad Θ; et ut igitur Z ad H ita et H ad Θ et Θ ad Κ; ipsi Γ, Δ, E igitur et ipsi Z, H, Θ, Κ proportionales sunt, in ipsius A ad B ratione. Dico etiam et minimi. Quoniam enim

lui-même a fait E, les nombres A, B multipliant B ont fait Δ, Ε; donc A est à B comme Δ est à Ε (18. 7). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Δ est à Ε. Et puisque A multipliant Γ, Δ a fait Ζ, Η, le nombre Γ est à Δ comme Ζ est à Η. Mais Γ est à Δ comme A est à B; donc A est à B comme Ζ est à Η. De plus, puisque A multipliant Δ, Ε a fait Η, Θ, le nombre Δ est à Ε comme Η est à Θ. Mais Δ est à Ε comme A est à B; donc A est à B comme Η est à Θ. Et puisque A, B multipliant Ε ont fait Θ, Κ, le nombre A est à B comme Θ est à Κ. Mais A est à B comme Ζ est à Η, et comme Η est à Θ; donc Ζ est à Η comme Η est à Θ, et comme Θ est à Κ; donc Γ, Δ, Ε et Ζ, Η, Θ, Κ sont proportionnels, dans la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits. Car puisque A, B sont les plus petits

καὶ ἐλάχιστοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς⁹, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Καὶ ἐκάτερος μὲν τῶν A, B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Γ, E πεποίηκεν, ἐκάτερον δὲ τῶν Γ, E πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Z, K πεποίηκεν· οἱ Γ, E ἄρα καὶ οἱ Z, K πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἵσσοισιὺν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν¹⁰ τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσιν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν· ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, et que les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux sont premiers entr'eux (25. 7), les nombres A, B sont premiers entr'eux. Mais les nombres A, B , se multipliant eux-mêmes, ont fait Γ, E , et les nombres A, B multipliant Γ, E ont fait Z, K ; donc les nombres Γ, E et Z, K sont premiers entr'eux (29. 7). Mais si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (1. 8); donc les nombres Γ, Δ, E et les nombres Z, H, Θ, K sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, B . Ce qu'il fallait démontrer.

C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont des carrés; que si l'on a quatre nombres, les extrêmes sont des cubes.

A, B minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, ipsi autem minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis primi inter se sunt; ipsi A, B igitur primi inter se sunt. Et uterque quidem ipsorum A, B se ipsum multiplicans utrumque ipsorum Γ, E fecit; utrumque vero ipsorum Γ, E multiplicans, utrumque ipsorum Z, K fecit; ipsi Γ, E igitur et Z, K primi inter se sunt. Si autem sint quotcuque numeri deinceps proportionales, extremi vero eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis; ipsi Γ, Δ, E igitur et ipsi Z, H, Θ, K minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B . Quod oportebat ostendere.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc igitur evidens est, si tres numeri deinceps proportionales minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, extremos eorum quadratos esse; si autem quatuor, cubos.

6 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3'.

PROPOSITIO III.

Εάν ᾄσιν ὁμοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis; extremi eorum primi inter se sunt.

Ἐστωσαν ὁμοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ A, B, Γ, Δ . λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, ipsi A, B, Γ, Δ ; dico extremos eorum A, Δ primos inter se esse.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν A, B, Γ, Δ λόγῳ, οἱ E, Z , τρεῖς δὲ

Sumantur enim duo quidem numeri minimi in ipsorum A, B, Γ, Δ ratione, ipsi E, Z ,

$A, 8.$	$B, 12.$	$\Gamma, 18.$	$\Delta, 27.$
$E, 2.$	$Z, 5.$		
$H, 4.$	$\Theta, 6.$	$K, 9.$	
$\Lambda, 8.$	$M, 12.$	$N, 18.$	$\Xi, 27.$

οἱ H, Θ, K , καὶ αἰετῶς ἐξῆς ἐνὶ πλείους, ἕως οὗ τὸ λομβαζόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλῆθει τῶν A, B, Γ, Δ . Εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, M, N, Ξ .

tres autem H, Θ, K , et semper deinceps uno plures, quoad assumpta multitudo æqualis facta fuerit multitudini ipsorum A, B, Γ, Δ . Sumantur, et sint Λ, M, N, Ξ .

PROPOSITION III.

Si tant de nombres successivement proportionnels que l'on voudra, sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont premiers entr'eux.

Que tant de nombres A, B, Γ, Δ successivement proportionnels qu'on voudra, soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que leurs extrêmes A, Δ sont premiers entr'eux.

Car prenons les deux plus petits nombres qui ont la même raison que A, B, Γ, Δ ($2, 8$); que ces nombres soient E, Z ; prenons-en trois, et qu'ils soient H, Θ, K , et ainsi de suite, toujours un de plus jusqu'à ce qu'on en ait pris une quantité égale à celle des nombres A, B, Γ, Δ . Qu'ils soient pris, et qu'ils soient Λ, M, N, Ξ .

Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν ἄ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ ποιοῖκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν⁵ Λ, Ξ ποιοῖκεν καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ⁶. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλῆθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. Καὶ εἰσὶν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους⁷· καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Λόγων δοθέντων ὅποσωνοῦν ἐν ἐλάχιστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον¹ ἐλάχιστους ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις.

Puisque les nombres Ε, Ζ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ils sont premiers entr'eux (24. 7). Et puisque les nombres Ε, Ζ se multipliant eux-mêmes ont fait Η, Κ, et que ces mêmes nombres multipliant Η, Κ ont fait Λ, Ξ, les nombres Η, Κ, et les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux (29. 7). Et puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, que les nombres Λ, Μ, Ν, Ξ sont les plus petits qui ont la même raison que Α, Β, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Λ, Μ, Ν, Ξ; chacun des nombres Α, Β, Γ, Δ est égal à chacun des nombres Λ, Μ, Ν, Ξ; donc Α est égal à Λ, et Δ à Ξ. Mais les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux; donc les nombres Α, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION IV.

Tant de raisons qu'on voudra étant données, dans leurs plus petits nombres, trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons données.

Et quoniam Ε, Ζ minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Et quoniam uterque ipsorum Ε, Ζ se ipsum quidem multiplicans utrumque ipsorum Η, Κ fecit, utrumque vero ipsorum Η, Κ multiplicans utrumque ipsorum Λ, Ξ fecit; et ipsi Η, Κ igitur et ipsi Λ, Ξ primi inter se sunt. Et quoniam Α, Β, Γ, Δ minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis, sunt autem et Λ, Μ, Ν, Ξ minimi in eadem ratione existentes cum ipsis Α, Β, Γ, Δ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ; unusquisque igitur ipsorum Α, Β, Γ, Δ unicuique ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem Α ipsi Λ, ipse vero Δ ipsi Ξ. Et sunt Λ, Ξ primi inter se; et Α, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO IV.

Rationibus datis quocumque in minimis numeris, numeros invenire deinceps proportionales minimos in datis rationibus.

S LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ, τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον² ἐλαχίστους, ἐν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Α, 2.	Β, 5.	Γ, 3.	Δ, 4.	Ε, 5.	Ζ, 6.
	Θ, 6.	Η, 15.	Κ, 20.	Λ, 24.	
	Ν	Ξ	Μ	Ο	

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η. Καὶ ὅσάνκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ³ ὁ Α τὸν Θ μετρεῖτω, ὅσάνκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρεῖτω· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖτω πρότερον. Καὶ ὅσάνκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρεῖτω. Καὶ ἐπεὶ ἰσάνκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογον εἰσὶν ἐν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Sint datæ rationes in minimis numeris, et ratio ipsius Α ad Β et eæ ipsius Γ ad Δ, et adhuc eæ ipsius Ε ad Ζ; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos et in ipsius Α ad Β ratione, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ.

Sumatur enim ab ipsis Β, Γ minimus mensuratus numerus, ipse Η. Et quoties quidem Β ipsum Η metitur toties et Α ipsum Θ metiatur, quoties vero Γ ipsum Η metitur, toties et Δ ipsum Κ metiatur; ipse autem Ε ipsum Κ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties Ε ipsum Κ metitur toties et Ζ ipsum Λ metiatur. Et quoniam æqualiter Α ipsum Θ metitur et Β ipsum Η; est igitur ut Α ad Β ita Θ ad Η. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita Η ad Κ, et adhuc ut Ε ad Ζ ita Κ ad Λ; ipsi Θ, Η, Κ, Λ igitur deinceps proportionales sunt in ratione et ipsius Α ad Β, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ. Dico etiam

Soient données dans leurs plus petits nombres la raison de Α à Β, celle de Γ à Δ, et celle de Ε à Ζ; il faut trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de Α à Β, dans celle de Γ à Δ, et enfin dans celle de Ε à Ζ.

Soit pris le plus petit nombre qui est mesuré par Β et Γ (56. 7); que ce soit Η. Que Α mesure Θ autant de fois que Β mesure Η, et que Δ mesure Κ autant de fois que Γ mesure Η; ou Ε mesurera Κ ou il ne le mesurera pas. Premièrement que Ε mesure Κ; et que Ζ mesure Λ autant de fois que Ε mesure Κ. Puisque Α mesure Θ autant de fois que Β mesure Η, Α est à Β comme Θ est à Η (15. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme Η est à Κ, et Ε est à Ζ comme Κ est à Λ; les nombres Θ, Η, Κ, Λ sont donc successivement dans la raison de Α à Β, dans celle de Γ à Δ, et encore dans celle de Γ à Ζ; et je dis aussi qu'ils sont les plus

πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἴσιν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἐξῆς ἀνάλογον^δ ἐλάχιστοι, ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονται τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις^ε. Ἐστωσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι^ζ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, ταυτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ^δ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Γ μετρούμενός ἐστιν^θ, ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς, ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν^ι τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν^{ιι} τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

et minimos. Si enim non sunt ipsi Θ, Η, Κ, Δ minimi deinceps proportionales, et in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ, erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Α minores numeri in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ. Sint ipsi Ν, Ξ, Μ, Ο. Et quoniam est ut Α ad Β ita Ν ad Ζ, ipsi autem Α, Β minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Β igitur ipsum Ξ metitur. Propter eadem utique Γ ipsum Ξ metitur; ipsi Β, Γ igitur ipsum Ξ metiuntur, et minimus igitur ab ipsis Β, Γ mensuratus ipsum Ξ metietur. Minimus autem ab ipsis Α, Γ mēsuratus, est ipse Η; ipse Η igitur ipsum Ξ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Α minores numeri deinceps, et in ratione ipsius Α ad Β, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ.

petits. Car si Θ, Η, Κ, Α ne sont pas les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ, il y aura certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Α dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ. Que ce soient Ν, Ξ, Μ, Ο. Puisque Α est à Β comme Ν est à Ξ, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ξ. Par la même raison Γ mesure Ξ; donc Β et Γ mesurent Ξ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesure Ξ (57. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ξ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Il n'y a donc pas certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Α, successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et enfin de Ε à Ζ.

Μὴ μετρεῖτω δὴ ὁ Ε τὸν Κ. Καὶ εἰλήφθω ὁ¹²
 ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς,
 ὁ Μ. Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ τοσαυ-
 τήκις καὶ ἐκάτερος τῶν Θ, Η ἐκάτερον τῶν Ν,
 Ξ μετρεῖτω, ὅσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ τοσαυ-
 τήκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρεῖτω. Καί¹³ ἐπεὶ ἰσάκις
 ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ ἔστιν ἄρα ὡς ὁ
 Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ὡς δὲ ὁ
 Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα
 ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ξ πρὸς

Non metiatur autem E ipsum K. Et sumatur
 ab ipsis E, K minimus mensuratus numerus,
 ipse M. Et quoties quidem K ipsum M metitur,
 toties et uterque ipsorum Θ, Η utrumque ipso-
 rum Ν, Ξ metiatur; quoties vero E ipsum M
 metitur, toties et Z ipsum O metiatur. Et
 quoniam æqualiter Θ ipsum Ν metitur ac Η
 ipsum Ξ; est igitur ut Θ ad Η ita Ν ad Ξ. Ut
 autem Θ ad Η ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β
 ita Ν ad Ξ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ

Α, 4.	Β, 5.	Γ, 2.	Δ, 5.	Ε, 4.	Ζ, 5.
Θ, 8.	Η, 10.	Κ, 15.			
Ν, 32.	Ξ, 40.	Μ, 60.	Ο, 45.		
Π	Ρ	Σ	Τ		

τὸν Μ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ
 καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ
 οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς
 ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε¹⁴ Α πρὸς τὸν Β,
 καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι¹⁵ τοῦ Ε πρὸς τὸν
 Ζ λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α,
 Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Εἰ γὰρ μὴ¹⁶, ἔσονταί τινες
 τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάττωτες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνά-
 λογον¹⁷ ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις.

ita Ξ ad M. Rursus, quoniam æqualiter E ipsum
 M metitur ac Z ipsum O; est igitur ut E ad Z ita
 M ad O; ipsi Ν, Ξ, Μ, Θ igitur deinceps pro-
 portionales sunt in rationibus et ipsius Α ad
 Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ.
 Dico etiam et minimos in ipsis Α, Β, Γ, Δ, Ε,
 Ζ rationibus. Si enim non, erunt aliqui ipsis
 Ν, Μ, Ξ, Ο minores numeri deinceps pro-
 portionales in rationibus Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.

Mais que E ne mesure pas k. Soit pris le plus petit nombre mesuré par E, k (36. 7), et que ce soit m. Que les nombres θ, η mesurent autant de fois n, ξ que k mesure m, et que z mesure o autant de fois que E mesure m. Puisque θ mesure n autant de fois que η mesure ξ, θ est à η comme n est à ξ (15. 7.) Mais θ est à η comme α est à β; donc α est à β comme n est à ξ. Par la même raison γ est à δ comme ξ est à m. De plus, puisque E mesure m autant de fois que z mesure o, E est à z comme m est à o; donc les nombres n, ξ, m, o sont successivement proportionnels dans les raisons de α à β, de γ à δ, et de E à z. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits dans les raisons de α, β, γ, δ, E, z. Car si cela n'est point, il y aura des nombres plus petits que n, ξ, m, o qui seront successivement proportionnels dans les raisons de α, β, γ, δ, E, z. Que ces nombres soient

Ἐστῶσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ τε¹⁸ ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός, ἔστιν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενός ἔστιν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττωνα, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον¹⁹ ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοὶ εἰσιν ἐν τοῖς²⁰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Sint H, P, Σ, Τ. Et quoniam est ut H ad P ita A ad B, ipsi autem A, B minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse igitur B ipsum P metitur. Propter eadem utique et Γ ipsum P metitur. Ipsi B, Γ igitur ipsum Γ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis B, Γ mensuratus ipsum Γ metietur. Minimus autem ab ipsis B, Γ mensuratus, est ipse H; ipse H igitur ipsum P metitur. Et est ut H ad P ita K ad Σ; et K igitur ipsum Σ metitur. Metitur autem et E ipsum Σ; ipsi E, K igitur ipsum Σ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis E, K mensuratus ipsum Σ metietur. Minimus autem ab ipsis E, K mensuratus, est ipse M; ipse M igitur ipsum Z metitur, major minorem, quod est impossibile. Non igitur erunt aliqui ipsis N, Ξ, Μ, Ο minores numeri deinceps proportionales et in rationibus ipsius A ad B, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius E ad Z; ipsi N, Ξ, Μ, Ο igitur deinceps proportionales minimi sunt in rationibus A, B, Γ, Δ, E, Z. Quod oportebat ostendere.

Π, Ρ, Σ, Τ. Puisque Π est à Ρ comme Α est Β, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ρ. Par la même raison Γ mesurera Ρ; donc Β, Γ mesurent Ρ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesurera Ρ (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ρ. Mais Η est à Ρ comme Κ est à Σ (15. 7); donc Κ mesure Σ (déf. 20. 7); mais Ε mesure Σ; donc Ε, Κ mesurent Σ; donc le plus petit nombre mesuré par Ε, Κ mesurera Σ. Mais le plus petit nombre mesuré par Ε, Κ est Μ; donc Μ mesure Σ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc il n'y aura pas certains nombres plus petits que Ν, Ξ, Μ, Ο successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ; donc Ν, Ξ, Μ, Ο sont les plus petits nombres qui soient successivement proportionnels dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐστῶσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δεθέντων, τοῦ τε ὄν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ, Ε, Δ, Ζ λόγοις, οἱ Η, Θ, Κ, ὅς τε εἴηαι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς

Plani numeri inter se rationem habent compositam ex lateribus.

Sint plani numeri Α, Β, et ipsius quidem Α latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero Β ipsi Ε, Ζ; dico Α ad Β rationem habere compositam ex lateribus.

Rationibus enim datis, et ipsâ quam habet Γ ad Ε, et Δ ad Ζ, sumantur numeri deinceps minimi in rationibus Γ, Ε, Δ, Ζ, ipsi Η, Θ, Κ, ita ut sit ut quidem Γ ad Ε ita Η ad Θ,

Α, 6.		Β, 20.	
	Α, 12.		
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 4.	Ζ, 5.
Η, 3.	Θ, 6.	Κ, 10.	

τὸν Ζ οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ. Καὶ ὁ Δ ἰ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Α.

ut vero Δ ad Ζ ita Θ ad Κ. Et ipse Δ ipsum Ε multiplicans ipsum Α faciat. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ multiplicans ipsum Α fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Α fecit; est igitur ut Γ ad Ε ita Α ad Α. Ut autem Γ ad Ε ita Η ad Θ;

PROPOSITION V.

Les nombres plans ont entr'eux une raison composée des côtés.

Soient les nombres plans Α, Β; que Γ, Δ soient les côtés de Α, et Ε, Ζ les côtés de Β; je dis que Α a avec Β une raison composée des côtés.

La raison de Γ à Ε, et celle de Δ à Ζ étant données, soient pris les nombres Η, Θ, Κ qui soient successivement les plus petits dans les raisons de Γ, Ε, Δ, Ζ (4. 3), de manière que Γ soit à Ε comme Η est à Θ, et que Δ soit à Ζ comme Θ est à Κ. Que Δ multipliant Ε fasse Α. Puisque Δ multipliant Γ fait Α, et que Δ multipliant Ε fait Α, Γ est à Ε comme Α est à Α (17. 7). Mais

Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκειν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκειν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· δείξου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ὁ δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Ἐὰν ὄσιν ἐποσειῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ· οὐδὲ ἄλλος οὐδέις οὐδένα μετρήσει.

Ἐστωσαν ὅποσειῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρεῖτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδέις οὐδένα μετρήσει.

Γ est à Ε comme Η et à Θ; donc Η est à Θ comme Α est à Λ. De plus, puisque Ε multipliant Δ fait Λ, et que Ε multipliant Ζ fait Β, Δ est à Ζ comme Α est à Β. Mais Δ est à Ζ comme Θ est à Κ; donc Θ est à Κ comme Α est à Β. Mais on a démontré que Η est à Θ comme Α est à Λ; donc, par égalité, Η est à Κ comme Α est à Β (14. 7); mais Η a avec Κ une raison composée des côtés; donc Α a avec Β une raison composée des côtés. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier ne mesure pas le second, aucun autre n'en mesure un autre.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que Α ne mesure pas Β; je dis qu'aucun autre n'en mesurera un autre.

et ut igitur Η ad Θ ita Α ad Λ. Rursus, quoniam Ε ipsum Δ multiplicans ipsum Λ fecit, sed autem et ipsum Ζ multiplicans ipsum Β fecit; est igitur ut Δ ad Ζ ita Α ad Β. Sed ut Δ ad Ζ ita Θ ad Κ; et ut igitur Θ ad Κ ita Α ad Β. Ostensum est autem ut Η ad Θ ita Α ad Λ; ex æquo igitur est ut Η ad Κ ita Α ad Β. Ipse autem Η ad Κ rationem habet compositam ex lateribus; et Α igitur ad Β rationem habet compositam ex lateribus. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO VI.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur, neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, ipse autem Α ipsum Β non metiatur; dico neque alium aliquem ullum mensurum esse.

14 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Οτι μὲν οὖν αἱ A, B, Γ, Δ, E ἐξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν. Οὐδὲ γὰρ ὁ A τὸν B μετρεῖ. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρεῖτω ὁ A τὸν Γ . Καὶ ὅσοι εἰσιν αἱ A, B, Γ τοσοῦτοι εἰληφθῶσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B, Γ , αἱ Z, H, Θ . Καὶ ἐπεὶ αἱ Z, H, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς A, B, Γ , καὶ ἔστιν ἴσον τὸ

$$\begin{array}{ccccc} A, & 16. & B, & 24. & \Gamma, & 56. & \Delta, & 54. & E, & 81. \\ Z, & 4. & H, & 6. & \Theta, & 9. & & & & \end{array}$$

πλῆθος τῶν A, B, Γ τῷ πλείθει τῶν Z, H, Θ δίττου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ . Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , οὐ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Z τὸν H · οὐκ ἄρα μονὰς ἔστιν ὁ Z , ἢ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ εἰσιν αἱ Z, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ³. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Z πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ · οὐδὲ ὁ A ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Et quidem ipsos A, B, Γ, Δ, E deinceps non se se metiri evidens est. Non enim A ipsum B metitur. Dico etiam neque alium aliquem ullum mensurum esse. Si enim possibile, metiatur A ipsum Γ . Et quot sunt A, B, Γ tot sumantur minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ , ipsi Z, H, Θ . Et quoniam Z, H, Θ in eadem ratione sunt cum

ipsis A, B, Γ , et est æqualis multitudo ipsorum A, B, Γ multitudini ipsorum Z, H, Θ ; ex æquo igitur est ut A ad Γ ita Z ad Θ . Et quoniam est ut A ad B ita Z ad H , non metitur autem A ipsum B ; non metitur igitur et Z ipsum H ; non igitur unitas est Z , unitas enim omnem numerum metitur, et sunt Z, Θ primi inter se; neque Z igitur ipsum Θ metitur. Et est ut Z ad Θ ita A ad Γ ; neque A igitur ipsum Γ metitur. Similiter utique ostendemus neque alium aliquem ullum metiri. Quod oportebat ostendere.

Il est certainement évident que les nombres A, B, Γ, Δ, E ne se mesurent point successivement les uns les autres, puisque A ne mesure pas B . Je dis de plus qu'aucun autre n'en mesure un autre; car que A mesure Γ , si cela est possible. Autant qu'il y a de nombres A, B, Γ , autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, B, Γ (55. 7), et que ces nombres soient Z, H, Θ . Puisque les nombres Z, H, Θ sont dans la même raison que A, B, Γ , et que la quantité des nombres A, B, Γ est la même que la quantité des nombres Z, H, Θ , par égalité A est à Γ comme Z est à Θ (14. 7). Et puisque A est à B comme Z est à H , et que A ne mesure pas B , Z ne mesure pas H (20. déf. 7); donc Z n'est pas l'unité, parce que l'unité mesure tous les nombres (déf. 1. 7); donc Z, Θ sont premiers entr'eux; donc Z ne mesure pas Θ (déf. 12. 7.). Mais Z est à Θ comme A est à Γ ; donc A ne mesure pas Γ . Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'en mesure un autre. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Εάν ὧσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρεῖ· καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρεῖτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει². Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Εάν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπέπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπέπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς¹ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπετοῦνται.

PROPOSITION VII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier mesure le dernier, il mesurera le second.

Soient A, B, Γ, Δ tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que A mesure Δ; je dis que A mesure B.

Car si A ne mesure pas B, aucun autre n'en mesurera un autre (6. 8); mais A mesure Δ; donc A mesure B. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si entre deux nombres tombent des nombres successivement proportionnels, il tombera autant de nombres moyens proportionnels entre deux autres nombres qui ont la même raison que les premiers, qu'il en tombe entre les deux premiers.

PROPOSITIO VII.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, et secundum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, ipse autem A ipsum Δ metiatur; dico et A ipsum B metiri.

Si enim non metitur A ipsum B, neque alius aliquis ullum metietur. Metitur autem A ipsum Δ; metitur igitur et A ipsum B. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO VIII.

Si duos inter numeros in continuum proportionales cadant numeri, quot inter eos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter illos eandem rationem habentes in continuum proportionales cadent.

16 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχῆς ἀνάλογον ἐμπεπτέωσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ , καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχῆς ἀνάλογον ἐμπεπτάκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς E, Z μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχῆς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

$A, 2.$	$\Gamma, 4.$	$\Delta, 8.$	$B, 16.$
$H, 1.$	$\Theta, 2.$	$K, 4.$	$\Lambda, 8.$
$E, 5.$	$M, 6.$	$N, 12.$	$Z, 24.$

Ὅσοι γὰρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ A, Γ, Δ, B , τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, Δ, B , οἱ H, Θ, K, Λ . οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ H, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ οἱ A, Γ, Δ, B τοῖς H, Θ, K, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν A, Γ, B, Δ τῷ πλήθει τῶν H, Θ, K, Λ . διίσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Λ . Ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . καὶ ὡς ἄρα ὁ H πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . Οἱ δὲ H, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ

Duos enim inter numeros A, B in continuum proportionales cadant numeri Γ, Δ , et fiat ut A ad B ita E ad Z ; dico quot inter A, B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter E, Z in continuum proportionales casuros esse numeros.

Quot enim sunt in multitudine ipsi A, Γ, Δ, B totidem sumantur minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, Γ, Δ, B , ipsi H, Θ, K, Λ ; ergo extremi eorum H, Λ primi inter se sunt. Et quoniam A, Γ, Δ, B cum ipsis H, Θ, K, Λ in eadem ratione sunt, atque est æqualis multitudo ipsorum A, Γ, B, Δ multitudini ipsorum H, Θ, K, Λ ; ex æquo igitur est ut A ad B ita H ad Λ . Ut autem A ad B ita E ad Z ; et ut igitur H ad Λ ita E ad Z . Ipsi autem H, Λ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri metiuntur æqua-

Qu'entre les deux nombres A, B tombent les nombres moyens proportionnels Γ, Δ , et soit fait en sorte que A soit à B comme E est à Z ; je dis qu'il tombera entre E, Z autant de nombres moyens proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers A, B .

Autant qu'il y a de nombres A, Γ, Δ, B , autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, Γ, Δ, B (35. 7); et que ces nombres soient H, Θ, K, Λ ; leurs extrêmes H, Λ seront premiers entr'eux (5. 8). Et puisque les nombres A, Γ, Δ, B sont en même raison que H, Θ, K, Λ , et que la quantité des nombres A, Γ, B, Δ est égale à la quantité des nombres H, Θ, K, Λ , par égalité A sera à B comme H est à Λ (14. 7). Mais A est à B comme E est à Z ; donc H est à Λ comme E est à Z . Mais les nombres H, Λ sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus

ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάνεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσοια· τούτεστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. Ἰσάνεις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, καὶ ὁ Λ τὸν Ζ· ἰσάνεις δὴ³ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ τοσαυτάνεις καὶ ἐκάτερος τῶν Θ, Κ ἐκάτερον τῶν Μ, Ν μετρεῖται· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάνεις μετροῦσιν· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι⁵. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτῶκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

liter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. Æqualiter igitur Η ipsum Ε metitur ac Λ ipsum Ζ. Quoties autem Η ipsum Ε metitur, toties et uterque ipsorum Θ, Κ utrumque ipsorum Μ, Ν metiatur; ipsi Η, Θ, Κ, Λ igitur ipsos Ε, Μ, Ν, Ζ æqualiter metiuntur; ergo Η, Θ, Κ, Λ cum ipsis Ε, Μ, Ν, Ζ in eadem ratione sunt. Sed Η, Θ, Κ, Λ cum ipsis Α, Γ, Δ, Β in eadem ratione sunt; ipsi Α, Γ, Δ, Β igitur cum ipsis Ε, Μ, Ν, Ζ in eadem ratione sunt. Ipsi autem Α, Γ, Δ, Β deinceps proportionales sunt; et Ε, Μ, Ν, Ζ igitur deinceps proportionales sunt; quot igitur inter Α, Β in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter et ipsos Ε, Ζ in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

petits (25. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit; c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Η mesure Ε autant de fois que Λ mesure Ζ. Que les nombres Θ, Κ mesurent les nombres Μ, Ν autant de fois que Η mesure Ε; les nombres Η, Θ, Κ, Λ mesureront également Ε, Μ, Ν, Ζ; donc les nombres Η, Θ, Κ, Λ sont en même raison que Ε, Μ, Ν, Ζ (déf. 20. 7). Mais les nombres Η, Θ, Κ, Λ sont en même raison que les nombres Α, Γ, Δ, Β; donc les nombres Α, Γ, Δ, Β sont en même raison que Ε, Μ, Ν, Ζ. Mais les nombres Α, Γ, Δ, Β sont successivement proportionnels; donc les nombres Ε, Μ, Ν, Ζ sont successivement proportionnels; donc il tombe entre Ε, Ζ autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre Α, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος¹ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπεσοῦνται.

Si duo numeri primi inter se sunt, et inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter utrumque ipsorum, et unitatem deinceps in continuum proportionales cadent.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ² κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπίπτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, et inter ipsos in continuum proportionales cadant Γ, Δ,

Α, 8.	Γ, 12.	Δ, 18.	Β, 27.
	Ε, 1.		
	Ζ, 2.	Η, 3.	
	Θ, 4.	Κ, 6.	Λ, 9.
Μ, 8.	Ν, 12.	Ξ, 18.	Ο, 27.

ἐκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπίπτωσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς³ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπεσοῦνται.

et exponatur E unitas; dico quot inter Α, Β in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque Α, Β et unitatem in continuum proportionales cadere.

PROPOSITION IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et s'il tombe entr'eux des nombres successivement proportionnels, il tombera entre chacun de ces nombres et l'unité autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers nombres.

Soient deux nombres Α, Β premiers entr'eux, et qu'entre ces deux nombres il tombe les deux nombres successivement proportionnels Γ, Δ; et soit Ε l'unité; je dis qu'entre chacun des nombres Α, Β il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre Α, Β et l'unité.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν A, Γ, Δ, B λόγῳ ὄντες, οἱ Z, H , τρεῖς δὲ οἱ Θ, K, Λ , καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους ἴσος ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλείθει τῶν A, Γ, Δ, B , εἰλήφθωσαν, καὶ ἕστωσαν οἱ M, N, Ξ, O φανερὸν δὲ ὅτι ὁ μὲν Z ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκει, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν M πεποιήκει, καὶ ὁ H ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποιήκει, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν O πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ οἱ M, N, Ξ, O ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Z, H , εἰσὶ δὲ καὶ οἱ A, Γ, Δ, B ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Z, H , καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν M, N, Ξ, O τῷ πλείθει τῶν A, Γ, Δ, B ἕκαστος ἄρα τῶν M, N, Ξ, O ἑκάστῳ τῶν A, Γ, Δ, B ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν M τῷ A , ὁ δὲ O τῷ B . Καὶ ἐπεὶ ὁ Z ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκεν· ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Z μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν Z κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάνεις ἄρα ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Z τὸν Θ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὴν Z

Sumantur enim duo quidem numeri minimi Z, H in ipsorum A, Γ, Δ, B ratione existentes, tres vero Θ, K, Λ , et semper deinceps uno plures quoad æqualis fiat multitudo eorum multitudini ipsorum A, Γ, Δ, B ; sumantur, et sint M, N, Ξ, O ; evidens est utique Z quidem se ipsum multiplicantem ipsum Θ fecisse, multiplicantem vero Θ fecisse M , et H se ipsum quidem multiplicantem fecisse Λ , multiplicantem vero Λ fecisse O . Et quoniam M, N, Ξ, O minimi sunt eandem rationem habentium cum ipsis Z, H , sunt autem et A, Γ, Δ, B minimi eandem rationem habentium cum ipsis Z, H , et est æqualis multitudo ipsorum M, N, Ξ, O multitudini ipsorum A, Γ, Δ, B ; unusquisque igitur ipsorum M, N, Ξ, O unicuique ipsorum A, Γ, Δ, B æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem M ipsi A , ipse vero O ipsi B . Et quoniam Z se ipsum multiplicans ipsum Θ fecit, ergo Z ipsum Θ metitur per unitates quæ in Z . Metitur autem et E unitas ipsum Z per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur E unitas ipsum Z numerum metitur ac Z ipsum Θ ; est igitur ut E

Soient pris les deux plus petits nombres Z, H dans la raison des nombres A, Γ, Δ, B (2. 8); ensuite trois Θ, K, Λ , et toujours successivement un de plus jusqu'à ce que leur quantité soit égale à celle des nombres A, Γ, Δ, B ; que ces nombres soient pris, et qu'ils soient M, N, Ξ, O ; il est évident que Z se multipliant lui-même a fait Θ , que Z multipliant Θ a fait M , que H se multipliant lui-même a fait Λ , et que H multipliant Λ a fait O (2. 8). Puisque les nombres M, N, Ξ, O sont les plus petits de ceux qui ont la même raison que Z, H , que les nombres A, Γ, Δ, B sont aussi les plus petits de ceux qui ont la même raison que Z, H , et que la quantité des nombres M, N, Ξ, O est égale à celle des nombres A, Γ, Δ, B , chacun des nombres M, N, Ξ, O est égal à chacun des nombres A, Γ, Δ, B ; donc M est égal à A et O à B . Et puisque Z se multipliant lui-même a fait Θ , Z mesure Θ par les unités qui sont en Z . Mais l'unité E mesure Z par les unités qui sont en Z ; donc l'unité E mesure Z autant de fois que Z mesure Θ ; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ (déf. 20. 7). De plus, puisque Z multi-

20 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀριθμὸν οὕτως ὅ Ζ πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ ὅ Ζ ἴ τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποιήκειν· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ⁵ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάνικis ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Θ⁶ τὸν Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Ἐδειχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως

unitas ad Z numerum ita Z ad Θ. Rursus, quoniam Z ipsum Θ multiplicans ipsum M fecit; ergo Θ ipsum M metitur per unitates quæ in Z. Metitur autem et E unitas ipsum Z numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur E unitas ipsum Z numerum metitur ac Θ ipsum M; est igitur ut E unitas ad Z numerum ita Θ ad M. Ostensum est autem et ut E unitas ad Z numerum ita Z ad Θ; et ut igitur E unitas

A, 8.	Γ, 12.	Δ, 18.	Β, 27.
	Ε, 1.		
	Z, 2.	Η, 5.	
Θ, 4.	Κ, 6.	Λ, 9.	
Μ, 8.	Ν, 12.	Ξ, 18.	Ο, 27.

ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Ἴσος δὲ ὁ Μ τῷ Α⁷· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Η ἀριθμὸν οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Α καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἴσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξύ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἐκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Ε μεταξύ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ad Z numerum ita Z ad Θ et Θ ad M. Æqualis autem M ipsi A; est igitur ut E unitas ad Z numerum ita Z ad Θ et Θ ad A. Propter eadem utique et ut E unitas ad H numerum ita H ad A et A ad B; quot igitur inter A, B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque ipsorum A, B et unitatem E in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

pliant Θ a fait M, le nombre Θ mesure M par les unités qui sont en Z. Mais l'unité E mesure le nombre Z par les unités qui sont en lui; donc l'unité E mesure Z autant de fois que Θ mesure M; donc l'unité E est au nombre Z comme Θ est à M. Mais on a démontré que l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ, et comme Θ est à M. Mais M égale A; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ, et comme Θ est à A. Par la même raison l'unité E est au nombre H comme H est à A, et comme A est à B; il tombe donc entre chacun des nombres A, B, et l'unité E, autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A, B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO X.

Εάν δύο ἀριθμῶν¹ καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος² μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσεῦνται.

Δύο γάρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσαν ἀριθμοί εἴ τε³ Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσαν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσεῦνται.

Si inter duos numeros et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter utrumque ipsorum et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter ipsos in continuum proportionales cadent.

Duos enim inter numeros Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadant numeri et Δ, Ε et Ζ, Η; dico quot inter utrumque ipsorum Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter Α, Β numeros in continuum proportionales cadere.

Α, 8.	Κ, 12.	Λ, 18.	Β, 27.
Ε, 4.	Θ, 6.	Η, 9.	
	Δ, 2.	Ζ, 3.	
	Γ, 1.		

Ο Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιῶ, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ ποιῶ.

Ipsę Δ enim ipsum Ζ multiplicans ipsum Θ faciat, uterque autem ipsorum Δ, Ζ ipsum Θ multiplicans utrumque ipsorum Κ, Λ faciat.

PROPOSITION X.

Si entre deux nombres et l'unité il tombe des nombres successivement proportionnels, il tombe entre les deux premiers nombres autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des premiers et l'unité.

Qu'entre les nombres Α, Β, et l'unité Γ, il tombe les nombres successivement proportionnels Δ, Ε et Ζ, Η; je dis qu'entre Α, Β il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des nombres Α, Β et l'unité Γ.

Car que Δ multipliant Ζ fasse Θ, et que chacun des nombres Δ, Ζ multipliant Θ fasse Κ, Λ.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. Ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει. Παλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α· ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ

Et quoniam est ut Γ unitas ad Δ numerum ita Δ ad Ε, æqualiter igitur Γ unitas ipsum Δ numerum metitur ac Γ ipsum Ε. Unitas autem Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ in Δ; et Δ igitur ipsum Ε metitur per unitates quæ in Δ; ergo Δ se ipsum multiplicans ipsum Ε fecit. Rursus, quoniam est ut Γ unitas ad Δ numerum ita Ε ad Α; æqualiter igitur Γ

Α, 8.	Κ, 12.	Λ, 18.	Β, 27.
Ε, 4.	Θ, 6.	Η, 9.	
	Δ, 2.	Ζ, 5.	
	Γ, 1.		

καὶ ὁ Ε τὸν Α. Ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποιήκει, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκει^β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ

unitas ipsum Δ numerum metitur ac Ε ipsum Α. Unitas autem Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ in Δ; et Ε igitur ipsum Α metitur per unitates quæ in Δ; ergo Δ ipsum Ε multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Ζ quidem se ipsum multiplicans ipsum Η fecit, ipsum vero Η multiplicans ipsum Β fecit, et quoniam Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum autem Ζ multiplicans ipsum Θ fecit; est igitur ut Δ ad Ζ ita Ε ad Θ. Propter eadem et ut Δ ad Ζ ita Θ ad Η. Et ut igitur Ε ad Θ ita Θ ad Η.

Puisque l'unité Γ est au nombre Δ comme Δ est à Ε, l'unité Γ mesure le nombre Δ autant de fois que Δ mesure Ε. Mais l'unité Γ mesure le nombre Δ par les unités qui sont en Δ; donc Δ mesure Ε par les unités qui sont en Δ; donc Δ se multipliant lui-même fait Ε. De plus, puisque l'unité Γ est au nombre Δ comme Ε est à Α, l'unité Γ mesure le nombre Δ autant de fois que Ε mesure Α. Mais l'unité Γ mesure le nombre Δ par les unités qui sont en Δ; donc Ε mesure Α par les unités qui sont en Δ; donc Δ multipliant Ε fait Α. Par la même raison Ζ se multipliant lui-même fait Η, et Ζ multipliant Η fait Β. Mais Δ se multipliant lui-même fait Ε, et Δ multipliant Ζ fait Θ; donc Δ est à Ζ comme Ε est à Θ (17. 7). Par la même raison Δ est à Ζ comme Θ est à Η; donc Ε est à Θ comme Θ est à Η,

οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἐκά-
 τερον τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν
 Α, Κ πεποιήκει· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ
 οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ
 οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν
 Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐκάτερος
 τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν
 Κ, Λ πεποιήκει· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ
 οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ
 οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν
 Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἐτι ἐπεὶ ὁ Ζ ἐκάτερον
 τῶν Η, Θ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Α, Β
 πεποιήκει· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως
 ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ
 Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως
 ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν
 Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ, καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν
 Λ, καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς
 τὸν Λ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα
 κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα
 ἐκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ
 κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ,
 τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ
 συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum Ε, Θ
 multiplicans utrumque ipsorum Α, Κ fecit; est
 igitur ut Ε ad Θ ita Α ad Κ. Sed ut Ε ad Θ
 ita Δ ad Ζ; et ut igitur Δ ad Ζ ita Α ad Κ.
 Rursus, quoniam uterque ipsorum Δ, Ζ ipsum
 Θ multiplicans utrumque ipsorum Κ, Λ fecit;
 est igitur ut Δ ad Ζ ita Κ ad Λ. Sed ut Δ
 ad Ζ ita Α ad Κ; et ut igitur Α ad Κ ita Κ ad Λ.
 Præterea, quoniam Ζ utrumque ipsorum Η, Θ mul-
 tiplicans utrumque ipsorum Α, Β fecit; est igitur
 ut Θ ad Η ita Α ad Β. Ut autem Θ ad Η ita Δ
 ad Ζ; et ut igitur Δ ad Ζ ita Α ad Β. Ostensum
 est autem et ut Δ ad Ζ ita Α ad Κ, et Κ ad Λ;
 et ut igitur Α ad Κ ita Κ ad Λ, et Λ ad Β;
 ipsi Α, Κ, Λ, Β igitur in continuum deinceps
 sunt proportionales; quot igitur inter utrumque
 ipsorum Α, Β et Γ unitatem in continuum pro-
 portionales cadunt numeri, totidem et inter
 Α, Β in continuum proportionales cadent. Quod
 oportebat ostendere.

De plus, puisque le nombre Δ multipliant les nombres Ε, Θ fait les nombres Α, Κ, le nombre Ε est à Θ comme Α est à Κ (17. 7). Mais Ε est à Θ comme Δ est à Ζ; donc Δ est à Ζ comme Α est à Κ. De plus, puisque les nombres Δ, Ζ multipliant Θ font les nombres Κ, Λ, le nombre Δ est à Ζ comme Κ est à Λ (18. 7). Mais Δ est à Ζ comme Α est à Κ; donc Α est à Κ comme Κ est à Λ. De plus, puisque le nombre Ζ multipliant les nombres Η, Θ fait les nombres Α, Β, le nombre Θ est à Η comme Α est à Β. Mais Θ est à Η comme Δ est à Ζ; donc Δ est à Ζ comme Α est à Β. Mais il a été démontré que Δ est à Ζ comme Α est à Κ, comme Κ est à Λ; donc Α est à Κ comme Κ est à Λ, et comme Α est à Β; donc les nombres Α, Κ, Λ, Β sont successivement proportionnels; donc entre Α, Β il tombe autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les nombres Α, Β et l'unité Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πλεονά πρὸς τὴν πλευράν.

Ἐστώσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ A, B , καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ , τοῦ δὲ B ὁ Δ . λέγω ὅτι τῶν A, B εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πλεονά ὁ Γ πρὸς τὸν Δ .

$$\begin{array}{ccc} A, 4. & E, 6. & B, 9. \\ \Gamma, 2. & & \Delta, 3. \end{array}$$

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖται. Καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ὁ A , πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ὁ Γ . ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν A πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποιήκει· ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἐκότερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἐκότερον τῶν A, E πεποιήκειν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν E . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς

Duorum quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum duplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

Sint quadrati numeri A, B , et ipsius quidem A latus sit Γ , ipsius vero B ipse Δ ; dico ipsorum A, B unum medium proportionalem esse numerum, et A ad B duplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ .

Ipse Γ enim Δ multiplicans ipsum E faciat. Et quoniam quadratus est A , latus autem ipsius est Γ ; ergo Γ se ipsum multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum multiplicans ipsum B fecit; quoniam igitur Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque ipsorum A, E fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita A ad E . Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita E ad

PROPOSITION XI.

Entre deux nombres quarrés, il y a un nombre moyen proportionnel, et le quarré est au quarré en raison double de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres quarrés A, B ; que le côté de A soit Γ , et que le côté de B soit Δ ; je dis qu'il y a un nombre moyen proportionnel entre A et B , et que A a avec B une raison double de celle que Γ a avec Δ .

Car que Γ multipliant Δ fasse E . Puisque A est un nombre quarré, et que son côté est Γ , le nombre Γ se multipliant lui-même fait A (déf. 18. 7). Par la même raison le nombre Δ se multipliant lui-même fait B ; donc puisque Γ multipliant l'un et l'autre nombre Γ, Δ fait l'un et l'autre nombre A, E , le nombre Γ est à Δ comme A est à E (17. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme E

τὸν Β²· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ Ε³.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Ε, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸν Ε. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ πλευράν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Α, 8. Θ, 12. Κ, 18. Β, 27.
 Ε, 4. Ζ, 6. Η, 9.
 Γ, 2. Δ, 5.

Ἐστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι

B; et ut igitur A ad E ita E ad B. Ipsorum A, B igitur unus medius proportionalis est numerus E.

Dico etiam et A ad B duplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A, E, B; ergo A ad B duplam rationem habet ejus quam A ad E. Ut autem A ad E ita Γ ad Δ; ergo A ad B duplam rationem habet ejus quam Γ latus ad Δ latus. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XII.

Duorum cuborum duo medii proportionales sunt numeri, et cubus ad cubum triplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

Sint cubi numeri A, B, et ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius vero B ipse Δ; dico ip-

est à B; donc A est à E comme E est à B; donc le nombre E est moyen proportionnel entre A, B.

Je dis aussi que A a avec B une raison double de celle que Γ a avec Δ. Car puisque les trois nombres A, E, B sont proportionnels, le nombre A a avec B une raison double de celle que A a avec E. Mais A est à E comme Γ est à Δ; donc A a avec B une raison double de celle que le côté Γ a avec le côté Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionnels, et le cube a avec le cube une raison triple de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres cubes A, B, et que Γ soit le côté de A, et Δ le côté de B; je

26 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ἔ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἐκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω.

Α, 8. Θ, 12. Κ, 18. Β, 27.
 Ε, 4. Ζ, 6. Η, 9.
 Γ, 2. Δ, 5.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ· καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποιήκει, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἐκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Ε, Ζ πεποιήκει· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἐκάτερον τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Α, Θ πε-

sorum Α, Β duos medios proportionales esse numeros, et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ.

Ipse enim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε faciat, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, uterque vero ipsorum Γ, Δ ipsum Ζ multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ faciat.

Et quoniam cubus est Α, latus autem ipsius ipse Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Ε fecit; ergo Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum Η fecit, ipsum vero Η multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque ipsorum Ε, Ζ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita Ζ ad Η. Rursus, quoniam Γ utrumque ipsorum Ε, Ζ multiplicans utrumque ipsorum Α, Θ fecit; est igitur ut Ε

dis qu'il y a deux nombres moyens proportionnels entre Α, Β, et que Α a avec Β une raison triple de celle que le côté Γ a avec le côté Δ.

Car que le côté Γ se multipliant lui-même fasse Ε, que Γ multipliant Δ fasse Ζ, que Δ se multipliant lui-même fasse Η, et que les nombres Γ, Δ multipliant Ζ fassent les nombres Θ, Κ.

Puisque Α est un cube, que son côté est Γ, et que Γ se multipliant lui-même a fait Ε, le nombre Γ se multipliant lui-même fera Ε, et Γ multipliant Ε fera Α (déf. 19. 7). Par la même raison, Δ se multipliant lui-même fait Η, et Δ multipliant Η fait Β. Et puisque Γ multipliant les nombres Γ, Δ a fait les nombres Ε, Ζ, le nombre Γ est à Δ comme Δ est à Ζ (17. 7). Par la même raison, Γ est à Δ comme Ζ est à Η. De plus, puisque Γ multipliant les nombres Ε, Ζ fait les

ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ³ ἐκάτερον τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Θ, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἐκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Κ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ⁴ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ, Κ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Θ, Κ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα⁵ πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ad Z ita A ad Θ. Ut autem E ad Z ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita A ad Θ. Rursus, quoniam uterque ipsorum Γ, Δ ipsum Z multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Θ ad Κ. Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum Ζ, Η multiplicans utrumque ipsorum Κ, Β fecit; est igitur ut Ζ ad Η ita Κ ad Β. Ut autem Ζ ad Η ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Κ ad Β. Ostensum autem est et ut Γ ad Δ ita et Α ad Θ, et Θ ad Κ, et Κ ad Β; ipsorum Α, Β igitur duo medii proportionales sunt numeri Θ, Κ.

Dico etiam et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ. Quoniam enim quatuor numeri Α, Θ, Κ, Β proportionales sunt; ergo Α ad Β triplam rationem habet ejus quam Α ad Θ. Ut autem Α ad Θ ita Γ ad Δ; et Α igitur ad Β triplam rationem habet ejus quam Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

nombres Α, Θ, le nombre Ε est à Ζ comme Α est à Θ. Mais Ε est à Ζ comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Α est à Θ. De plus, puisque les nombres Γ, Δ multipliant Ζ ont fait les nombres Θ, Κ; le nombre Γ est à Δ comme Θ est à Κ (18. 7). De plus, puisque Δ multipliant les nombres Ζ, Η fait les nombres Κ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Κ est à Β. Mais Ζ est à Η comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Κ est à Β. Mais il a été démontré que Γ est à Δ comme Α est à Θ, comme Θ est à Κ, et comme Κ est à Β; donc entre Α, Β il y a deux nombres moyens proportionnels Θ, Κ.

Je dis aussi que Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Car puisque les quatre nombres Α, Θ, Κ, Β sont proportionnels, Α aura avec Β une raison triple de celle que Α a avec Θ. Mais Α est à Θ comme Γ est à Δ; donc Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ΄.

PROPOSITIO XIII.

Εάν ὄσιν ὁσοῖδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕναστος ἑαυτὸν ποιῆ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινόμενους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ αἰεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἐστασαν ὅποιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς¹ ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτούς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἱ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἐξῆς ἀνάλογον εἰσιν.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et se ipsum multiplicans unusquisque faciat aliquos, facti ex ipsis proportionales erunt; et si ipsi a principio, factos multiplicantes faciant aliquos, et ipsi proportionales erunt, et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ, et ipsi Α, Β, Γ se ipsos quidem multiplicantes ipsos Δ, Ε, Ζ faciant, ipsos vero Δ, Ε, Ζ multiplicantes ipsos Η, Θ, Κ faciant; dico et ipsos Δ, Ε, Ζ et ipsos Η, Θ, Κ deinceps proportionales esse.

		Α, 2.	Β, 4.	Γ, 8.		
	Δ, 4.	Α, 8.	Ε, 16.	Ζ, 52.	Ζ, 64.	
Η, 8.	Μ, 16.	Ν, 52.	Θ, 64.	Ο, 128.	Π, 256.	Κ, 512.

Ο μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιείτω· ἐκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Α πολλαπλα-

Etenim Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Α faciat; uterque vero ipsorum Α, Β

PROPOSITION XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si chacun de ces nombres se multipliant lui-même fait certains nombres, les nombres produits seront proportionnels; et si les premiers nombres multipliant les nombres produits font certains nombres, ceux-ci seront encore proportionnels, et cela arrivera toujours aux derniers produits.

Soient Α, Β, Γ tant de nombres proportionnels qu'on voudra, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; que les nombres Α, Β, Γ se multipliant eux-mêmes fassent Δ, Ε, Ζ, et que ces mêmes nombres multipliant Δ, Ε, Ζ fassent Η, Θ, Κ; je dis que les nombres Δ, Ε, Ζ, ainsi que Η, Θ, Κ, sont successivement proportionnels.

Car que Α multipliant Β fasse Δ; que les nombres Α, Β multipliant Α fassent

σιάσας ἐκάτερον τῶν Μ, Ν ποιεῖτω. Καὶ πάλιν, ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιεῖτω, ἐκάτερος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Ο, Π ποιεῖτω.

Ομοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον² ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον³ ἐν τῷ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔτι οἱ Η, Μ, Ν, Θ τοῖς Θ, Ο, Π, Κ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ, Λ, Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλῆθει. Τὸ δὲ τῶν Η, Μ, Ν, Θ τῷ τῶν Θ, Ο, Π, Κ καὶ⁵ διῆσου ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum Λ multiplicans utrumque ipsorum M, N faciat. Et rursus B quidem ipsum Γ multiplicans ipsum Ξ faciat, uterque vero ipsorum B, Γ ipsum Ξ multiplicans utrumque ipsorum O, Π faciat.

Congruenter utique præcedentibus ostendimus ipsos Δ, Λ, E et ipsos H, M, N, Θ deinceps esse proportionales in ratione ipsius A ad B , et adhuc ipsos E, Ξ, Z et ipsos Θ, O, Π, K deinceps esse proportionales in ratione ipsius B ad Γ . Atque est ut A ad B ita B ad Γ ; et Δ, Λ, E igitur in eadem ratione sunt in quâ E, Ξ, Z et adhuc ipsi H, M, N, Θ in quâ ipsi Θ, O, Π, K . Et est æqualis quidem ipsorum Δ, Λ, E multitudo ipsorum E, Ξ, Z multitudini. Ipsorum vero H, M, N, Θ multitudo ipsorum Θ, O, Π, K multitudini; et ex æquo igitur est ut quidem Δ ad E ita E ad Z , ut vero H ad Θ ita Θ ad K . Quod oportebat ostendere.

M, N ; et de plus, que B multiplie Γ fasse Ξ , et que les nombres B, Γ multiplie Ξ fassent O, Π .

Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que les nombres Δ, Λ, E et H, M, N, Θ sont successivement proportionnels dans la raison de A à B , que les nombres E, Ξ, Z et Θ, O, Π, K sont aussi successivement proportionnels dans la raison de B à Γ . Mais A est à B comme B est à Γ ; donc les nombres Δ, Λ, E sont en même raison que les nombres E, Ξ, Z , et les nombres H, M, N, Θ en même raison que les nombres Θ, O, Π, K . Mais la quantité des nombres Δ, Λ, E est égale à la quantité des nombres E, Ξ, Z ; et la quantité des nombres H, M, N, Θ est égale à la quantité des nombres Θ, O, Π, K ; donc par égalité Δ est à E comme E est à Z , et H est à Θ comme Θ est à K (14. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14'.

PROPOSITIO XIV.

Εάν τετράγωνος τετράγωνον μετρήῃ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ A, B , πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἕστωσαν· οἱ Γ, Δ , ὁ δὲ A τὸν B μετρεῖτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Si quadratus quadratum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A, B , latera autem eorum sint ipsi Γ, Δ , ipse vero A ipsum B metiatur; dico et Γ ipsum Δ metiri.

$$\begin{array}{ccc} A, 4. & E, 8. & B, 16. \\ \Gamma, 2. & & \Delta, 4. \end{array}$$

Ὁ Γ γάρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω· οἱ A, E, B ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ οἱ A, E, B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ A τὸν B · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν E . Καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ^2 .

Ἀλλὰ δὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ^3 · λέγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ A, E, B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν

Ipsa Γ enim ipsum Δ multiplicans ipsum E faciat; ipsi A, E, B igitur deinceps proportionales sunt in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam A, E, B deinceps proportionales sunt, et metitur A ipsum B ; metitur igitur et A ipsum E . Atque est ut A ad E ita Γ ad Δ ; ergo metitur et Γ ipsum Δ .

Sed et metiatur Γ ipsum Δ ; dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, E, B deinceps proportionales esse in

PROPOSITION XIV.

Si un nombre carré mesure un nombre carré, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le carré mesurera le carré.

Soient les nombres carrés A, B ; que Γ, Δ soient leurs côtés; que A mesure B ; je dis que Γ mesure Δ .

Car que Γ multipliant Δ fasse E , les nombres A, E, B seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ ; et puisque A, E, B sont successivement proportionnels, et que A mesure B , A mesurera E (7. 8). Mais A est à E comme Γ est à Δ ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ ; je dis que A mesure B .

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que

ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. Καί εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἕξῃς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἐὰν ἄρα τετράγωνος, καὶ τὰ ἕξῃς.

ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Α ad Ε, metitur autem Γ ipsum Δ; ergo metitur Α ipsum Ε. Et sunt Α, Ε, Β deinceps proportionales; ergo metitur et Α ipsum Β. Si igitur quadratus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

PROPOSITIO XV.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρήῃ, καὶ ἢ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ ἔαν ἢ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσῃ.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, et cubus cubum metietur.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Cubus enim numerus Α cubum numerum Β metiatur, et ipsius quidem Α latus sit Γ, ipsius vero Β ipse Δ; dico Γ ipsum Δ metiri.

Α, 8.	Θ, 16.	Κ, 52.	Β, 64.
Ε, 4.	Ζ, 8.	Η, 16.	
	Γ, 2.	Δ, 4.	

Ο Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας

Eteum Γ se ipsum multiplicans ipsum Ε faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, et adhuc Γ ipsum Δ multiplicans

Α, Ε, Β sont successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ. Et puisque Γ est à Δ comme Α est à Ε, et que Γ mesure Δ, Α mesurera Ε. Mais Α, Ε, Β sont successivement proportionnels; donc Α mesure Β; donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le cube mesurera le cube.

Car que le nombre cube Α mesure le nombre cube Β; que Γ soit le côté de Α et Δ le côté de Β; je dis que Γ mesure Δ.

Que Γ se multipliant lui-même fasse Ε; que Δ se multipliant lui-même fasse Η;

32 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸν Z^3 , ἐκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Z πολλαπλασιασάσας ἐκάτερον τῶν $\Theta, \text{Κ}$ ποιίτω. Φανερόν δὲ ἔστι ὅτι οἱ E, Z, H καὶ οἱ $A, \Theta, \text{Κ}, B$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ· καὶ ἐπεὶ οἱ $A, \Theta, \text{Κ}, B$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ μετρεῖ ὁ A τὸν B · μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ . Καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ .

ipsum Z , uterque vero ipsorum Γ, Δ ipsum Z multiplicans utrumque ipsorum $\Theta, \text{Κ}$ faciat. Evidens utique est ipsos E, Z, H et $A, \Theta, \text{Κ}, B$ deinceps proportionales esse in ipsius Γ ad Δ ratione; et quoniam $A, \Theta, \text{Κ}, B$ deinceps proportionales sunt, et metitur A ipsum B ; ergo metitur et ipsum Θ . Atque est ut A ad Θ ita Γ ad Δ ; metitur igitur et Γ ipsum Δ .

$A, 8. \quad \Theta, 16. \quad \text{Κ}, 32. \quad B, 64.$
 $E, 4. \quad Z, 8. \quad H, 16.$
 $\Gamma, 2. \quad \Delta, 4.$

Ἀλλὰ δὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ · λέγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οἱ $A, \Theta, \text{Κ}, B$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τοῦ Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ · καὶ ὁ A ἄρα τὸν Θ μετρεῖ ὡς τε καὶ τὸν B μετρεῖ ὁ A . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Sed et metiatur Γ ipsum Δ ; dico et A ipsum B mensurum esse.

Iisdem enim constructis, similiter utique ostendemus $A, \Theta, \text{Κ}, B$ deinceps proportionales esse in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam Γ ipsum Δ metitur, estque ut Γ ad Δ ita A ad Θ ; et A igitur ipsum Θ metitur; quare et ipsum B metitur ipse A . Quod oportebat ostendere.

que Γ multiplie Δ fasse Z , et que les nombres Γ, Δ multiplie Z fassent $\Theta, \text{Κ}$. Il est évident que les nombres E, Z, H et $A, \Theta, \text{Κ}, B$ seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ ; et puisque $A, \Theta, \text{Κ}, B$ sont successivement proportionnels, et que A mesure B , A mesurera Θ (7. 8). Mais A est à Θ comme Γ est à Δ ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ , je dis que A mesurera B .

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que les nombres $A, \Theta, \text{Κ}, B$ sont successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ . Et puisque Γ mesure Δ , et que Γ est à Δ comme A est à Θ , A mesurera Θ ; donc A mesure B . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

PROPOSITIO XVI.

Εάν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ² οἱ Α, Β, ἡμετραὶ δὲ αὐτῶν ἕστωσαν³ οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Β· λέγω δὲ ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ⁵.

Α, 9.	Β, 16.
Γ, 5.	Δ, 4.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω⁶ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri Α, Β, latera autem ipsorum sint Γ, Δ, et non metiatur Α ipsum Β; dico neque Γ ipsum Δ metiri.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, metietur et Α ipsum Β. Non metitur autem Α ipsum Β; neque igitur Γ ipsum Δ metietur.

Non metiatur rursus Γ ipsum Δ; dico neque Α ipsum Β mensurum esse.

Si enim metitur Α ipsum Β, metietur et Γ ipsum Δ. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur Α ipsum Β metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si un nombre carré ne mesure pas un nombre carré, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le carré ne mesurera pas le carré.

Soient les nombres carrés Α, Β, que Γ, Δ en soient les côtés, et que Α ne mesure pas Β; je dis que Γ ne mesure pas Δ.

Car si Γ mesure Δ, Α mesurera Β (14. 8). Mais Α ne mesure pas Β; donc Γ ne mesurera pas Δ.

De plus, que Γ ne mesure pas Δ; je dis que Α ne mesurera pas Β.

Car si Α mesure Β, Γ mesurera Δ (14. 8). Mais Γ ne mesure pas Δ; donc Α ne mesurera pas Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

Εάν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Α, 8.

Γ, 2.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XVII.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus Α cubum numerum ipsum Β non metiatur, et ipsius quidem Α latus Γ, ipsius verò Β ipse Δ; dico Γ ipsum Δ mensurum esse.

Β, 27.

Δ, 3.

Si enim metitur Γ ipsum Α, et Α ipsum Β metietur. Non metitur autem Α ipsum Β; neque igitur Γ ipsum Δ metitur.

Sed et non metiatur ipsum Δ; dico neque Α ipsum Β mensurum esse.

Si enim Α ipsum Β metiatur, et Γ ipsum Δ metietur. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur Α ipsum Β metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVII.

Si un nombre cube ne mesure pas un nombre cube, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le cube ne mesurera pas le cube.

Que le nombre cube Α ne mesure pas le nombre cube Β, et que Γ soit le côté de Α, et Δ le côté de Β; je dis que Γ ne mesurera pas Δ.

Car si Γ mesure Δ, Α mesurera Β (15. 8.) Mais Α ne mesure pas Β; donc Γ ne mesure pas Δ.

Mais que Γ ne mesure pas Δ; je dis que Α ne mesurera pas Β.

Car si Α mesure Β, Γ mesurera Δ (15. 8). Mais Γ ne mesure pas Δ; donc Α ne mesurera pas Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

PROPOSITIO XVIII.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὁμολογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμολογον πλευράν.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἕστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω οὖν ὅτι τῶν Α, Β εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· τουτέστιν ἢ περ ἢ ὁμολογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμολογον².

Duorum similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus; et planus ad planum duplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

Sint duo numeri similes plani Α, Β, et ipsius quidem Α latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero Β ipsi Ε, Ζ. Et quoniam similes plani sunt qui proportionalia habent latera, est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Dico igitur ipsorum Α, Β unum medium proportionalem esse numerum, et Α ad Β duplam rationem habere ejus quam Γ ad Ε, vel Δ ad Ζ, hoc est ejus quam latus homologum ad homologum.

$$\begin{array}{cccc} \text{Α, 6.} & \text{Η, 12.} & \text{Β, 24.} & \\ \text{Γ, 2.} & \text{Δ, 3.} & \text{Ε, 4.} & \text{Ζ, 6.} \end{array}$$

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλαξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ἐπεὶ ἐπί-

Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; alterne igitur est ut Γ ad Ε ita Δ ad Ζ. Et quo-

PROPOSITION XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un nombre moyen proportionnel, et le nombre plan a avec le nombre plan une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient les deux nombres plans semblables Α, Β, que les nombres Γ, Δ soient les côtés de Α, et Ε, Ζ les côtés de Β. Puisque les nombres plans semblables ont leurs côtés proportionnels, Γ est à Δ comme Ε est Ζ (déf. 21. 7); et je dis qu'entre Α, Β il y a un nombre moyen proportionnel, et que Α a avec Β une raison double de celle que Γ a avec Ε, ou de celle que Δ a avec Ζ, c'est-à-dire de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Puisque Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, par permutation Γ est à Ε comme Δ est

36 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πεδός ἐστιν ὁ A , πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ , Δ .
 ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποιήκει.
 Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E τὸν Z πολλαπλασιάσας
 τὸν B πεποιήκει. Ὁ Δ δὴ τὸν E πολλαπλασιάσας
 τὸν H ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλα-
 πλασιάσας τὸν A πεποιήκει, τὸν δὲ E πολλα-
 πλασιάσας τὸν H πεποιήκειν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ
 πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H . Ἀλλ' ὡς ὁ
 Γ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z · καὶ ὡς
 ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H .
 Πάλιν, ἐπεὶ ὁ E τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας
 τὸν H πεποιήκει, τὸν δὲ Z πολλαπλασιάσας τὸν
 B πεποιήκειν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως
 ὁ H πρὸς τὸν B . Εἰδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν
 Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H · καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς
 τὸν H οὕτως ὁ H πρὸς τὸν B · οἱ A, H, B ἄρα ἐξῆς
 ἀνάλογόν εἰσι· τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν
 ἐστὶν ἀριθμός.

niam planus est A , latera autem ipsius ipsi
 Γ, Δ ; ergo Δ ipsum Γ multiplicans ipsum A
 fecit. Propter eadem utique et E ipsum Z multi-
 plicans ipsum B fecit. Ipse Δ utique ipsum E
 multiplicans ipsum H faciat. Et quoniam Δ ipsum
 Γ quidem multiplicans ipsum A fecit, ipsum
 vero E multiplicans ipsum H fecit; est igitur
 ut Γ ad E ita A ad H . Sed ut Γ ad E ita Δ
 ad Z ; et ut igitur Δ ad Z ita A ad H . Rursus,
 quoniam E ipsum quidem Δ multiplicans ipsum
 H fecit; ipsum vero Z multiplicans ipsum B fecit;
 est igitur ut Δ ad Z ita H ad B . Ostensum
 est autem et ut Δ ad Z ita A ad H ; et ut
 igitur A ad H ita H ad B ; ergo A, H, B
 deinceps proportionales sunt; ipsorum A, B
 igitur unus medius proportionalis est numerus.

$A, 6. \quad H, 12. \quad B, 24.$
 $\Gamma, 2. \quad \Delta, 3. \quad E, 4. \quad Z, 6.$

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα
 λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν
 ὁμόλογον πλευρὰν, τευτέστιν ἢπερ ὁ Γ πρὸς τὸν
 E ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Z . Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, H, B ἐξῆς

Dico etiam et A ad B duplam rationem ha-
 bere ejus quam homologum latus ad homologum
 latus, hoc est quam Γ ad E vel Δ ad Z . Quo-
 niam enim A, H, B deinceps proportionales

à Z (13. 7). Et puisque A est un nombre plan, et que Γ, Δ en sont les côtés, Δ multipliant Γ fera A . Par la même raison E multipliant Z fera B . Que Δ multipliant E fasse H . Puisque Δ multipliant Γ fait A , et que Δ multipliant E fait H , Γ est à E comme A est à H (17. 7). Mais Γ est à E comme Δ est à Z ; donc Δ est à Z comme A est à H . De plus, puisque E multipliant Δ fait H , et que E multipliant Z fait B , Δ est à Z comme H est à B . Mais on a démontré que Δ est à Z comme A est à H ; donc A est à H comme H est à B ; donc A, H, B sont successivement proportionnels; donc il y a un nombre moyen proportionnel entre A et B .

Je dis que A a avec B une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que Γ a avec E ou de celle que Δ a avec Z . Car puisque les nombres A, H, B sont successivement proportionnels, A a avec B

ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ, τε Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸν Η, τε Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

sunt, A ad B duplam rationem habet ejus quam ad H. Atque est ut A ad H ita et Γ ad E et Δ ad Z; et A igitur ad B duplam rationem habet ejus quam et Γ ad E vel Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

PROPOSITIO XIX.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὁμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt numeri, et solidus ad similem solidum triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

A, 50.	N, 60.	Z, 120.	B, 240.		
	K, 6.	M, 12.	Λ, 24.		
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 5.	Ζ, 4.	Η, 6.	Θ, 10.

Ἐστώσαν δύο ὁμοιοὶ στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστώσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ ὁμοιοὶ στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς

Sint duo similes solidi A, B, et ipsius quidem A latera sint Γ, Δ, Ε, ipsius vero B ipsi Ζ, Η, Θ. Et quoniam similes solidi sunt qui proportionalia habent latera; est igitur ut Γ quidem ad

une raison double de celle que A a avec H. Mais A est à H comme Γ est à E, et comme Δ est à Z; donc A a avec B une raison double de celle que Γ a avec E, ou de celle que Δ a avec Z. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Entre deux nombres solides semblables il y a deux nombres moyens proportionnels; et un nombre solide a avec un nombre solide semblable une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient A, B deux nombres solides semblables; que Γ, Δ, Ε soient les côtés de A, et Ζ, Η, Θ les côtés de B. Puisque les nombres solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés homologues proportionnels (déf. 21. 7), Γ est à Δ comme Ζ à Η,

μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὅς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Λέγω ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσαι ἀνάλογον ἐπιπέπουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

Δ ita Z ad H , ut vero Δ ad E ita H ad Θ . Dico inter ipsos A , B duos medios proportionales cadere numeros, et A ad B triplam rationem habere ejus quam Γ ad Z et Δ ad H et ad luc E ad Θ .

	Α, 50.	Ν, 60.	Ξ, 120.	Β, 240.	
		Κ, 6.	Μ, 12.	Λ, 24.	
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 5.	Ζ, 4.	Η, 6.	Θ, 10.

Ο Γ γὰρ τὸ μὲν² Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιεῖτω· ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Α· οἱ Κ, Α ἄρα³ ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσὶν ἀριθμοί· τῶν Κ, Α ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐστὶν ἀριθμός. Ἐστω ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Κ πεποιέικε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποιέικει· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. Ἀλλ' ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Α· οἱ Κ, Μ, Α ἄρα ἐξῆς εἰσὶν⁶ ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ

Etenim Γ ipsum Δ multiplicans ipsum K faciat, ipse vero Z ipsum H multiplicans ipsum A faciat. Et quoniam Γ , Δ cum ipsis Z , H in eadem ratione sunt, et ex quidem ipsis Γ , Δ est K , ex ipsis vero Z , H ipse A ; ergo K , A similes pluri sunt numeri; ipsorum K , A igitur unus medius proportionalis est numerus. Sit M ; ergo M est ex ipsis Δ , Z ut in præcedenti theoremate ostensum est. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ multiplicans ipsum K fecit, ipsum vero Z multiplicans ipsum M fecit; est igitur ut Γ ad Z ita K ad M . Sed ut K ad M ita M ad A ; ipsi K , M , A igitur deinceps sunt proportionales in ipsius Γ ad Z ratione. Et quoniam est ut Γ

et Δ est à E comme H est à Θ ; je dis qu'entre les nombres A , B il y a deux moyens proportionnels, et que A a avec B une raison triple de celle que Γ a avec Z , de celle que Δ a avec H , et de celle que E a avec Θ .

Car que Γ multipliant Δ fasse K , et que Z multipliant H fasse A . Puisque Γ , Δ sont en même raison que Z , H ; que K est le produit de Γ par Δ , et A le produit de Z par H , les nombres K , A sont des nombres plans semblables; il y a donc entre K et A un nombre moyen proportionnel (18. 8). Qu'il soit M ; le nombre M sera le produit de Δ par Z , ainsi qu'on l'a démontré dans le théorème précédent. Puisque Δ multipliant Γ fait K , et que Z multipliant H fait M , le nombre Γ est à Z comme K est à M (17. 7). Mais K est à M comme M est à A ; les nombres K , M , A sont donc successivement proportionnels dans la raison de

λόγω. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ⁷. οἱ Κ, Μ, Α ἄρα ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον⁸ ἔν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ⁹ καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ¹⁰. Ἐκάτερος δὴ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιίειτω. Καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσὶν οἱ Γ, Δ, Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκειν· ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Α πολλαπλασιάσας¹¹ τὸν Β πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκειν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποιήκει· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ¹² ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Πάλιν, ἐπεὶ ἕκαστος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Ν,

ad Δ ita Z ad H; alterne igitur est ut Γ ad Z ita Δ ad H. Rursus, quoniam est ut Δ ad Ε ita Η ad Θ; alterne igitur est ut Δ ad Η ita Ε ad Θ; ipsi Κ, Μ, Α igitur deinceps sunt proportionales et in ipsius Γ ad Ζ ratione et in ipsius Δ ad Η et adhuc in ipsius Ε ad Θ. Uterque autem ipsorum Ε, Θ ipsum Μ multiplicans utrumque ipsorum Ν, Ξ faciat. Et quoniam solidus est Α, latera autem ipsius sunt Γ, Δ, Ε; ergo Ε ipsum ex Γ, Δ multiplicans ipsum Α fecit; ipse autem ex Γ, Δ est Κ; ergo Ε ipsum Κ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Θ ipsum Α multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Ε ipsum Κ multiplicans ipsum Α fecit; sed quidem et ipsum Μ multiplicans ipsum Ν fecit; est igitur ut Κ ad Μ ita Α ad Ν. Ut autem Κ ad Μ ita et Γ ad Ζ et Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ; et ut igitur Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ ita Α ad Ν. Rursus, quoniam uterque ipsorum Ε, Θ ipsum Μ multiplicans utrum-

g à z. Et puisque Γ est à Δ comme Ζ est à Η, par permutation Γ est à Ζ comme Δ est à Η (15. 7). De plus, puisque Δ est à Ε comme Η est à Θ, par permutation Δ est à Η comme Ε est à Θ (15. 7); les nombres Κ, Μ, Α sont donc successivement proportionnels dans la raison de Γ à Ζ, de Δ à Η, et de Ε à Θ. Que les nombres Ε, Θ multipliant Μ fassent Ν, Ξ. Puisque Α est un nombre solide, et que ses côtés sont Γ, Δ, Ε, le nombre Ε multipliant le produit de Γ par Δ fera Α; mais le produit de Γ par Δ est Κ; donc Ε multipliant Κ fait Α. Par la même raison, Θ multipliant Α fait Β. Et puisque Ε multipliant Κ fait Α, et que Ε multipliant Μ fait Ν, Κ est à Μ comme Α est à Ν (17. 7). Mais Κ est à Μ comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Γ est à Ζ, et Δ à Η, et Ε à Θ, comme Α est à Ν. De plus, puisque les nombres Ε, Θ multipliant Μ font Ν, Ξ, le nombre Ε est

40 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ξ πεποίηκε· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς³ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε ἰ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως οὐ μένου· ὁ Ξ πρὸς τὸν Β ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν ταῖς εἰρημέναις τῶν πλευρῶν λόγους.

que ipsorum N, Ξ fecit, est igitur ut E ad Θ ita N ad Ξ. Sed ut E ad Θ ita et Γ ad Z et Δ ad H; est igitur ut Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ ita et A ad N et N ad Ξ. Rursus, quoniam Θ ipsum M multiplicans ipsum Ξ fecit, sed etiam et ipsum A multiplicans ipsum B fecit; est igitur ut M ad A ita Ξ ad B. Sed ut M ad A ita et Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ; et igitur ut Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ ita non solum Ξ ad B sed et A ad N et N ad Ξ; ipsi A, N, Ξ, B igitur deinceps sunt proportionales in dictis laterum rationibus.

Α, 30.	Ν, 60.	Ξ, 120.	Β, 240.		
	Κ, 6.	Μ, 12.	Α, 24.		
Γ, 2.	Δ, 5.	Ε, 5.	Ζ, 4.	Η, 6.	Θ, 10.

Λέγω ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ἰσόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτέστιν ἢπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς

Dico et A ad B triplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam habet Γ numerus ad Ζ, vel Δ ad Η et adhuc E ad Θ. Quoniam enim quatuor numeri deinceps proportionales sunt A, N, Ξ,

à Θ comme N est à Ξ. Mais E est à Θ comme Γ est à Ζ, et comme Δ est à Η; donc Γ est à Ζ, Δ à Η, et E à Θ, comme A est à N, et comme N est à Ξ. De plus, puisque Θ multipliant M fait Ξ, et que Θ multipliant Α fait Β, M est à Α comme Ξ est à Β. Mais M est à Α comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme E est à Θ; donc Γ est à Ζ, Δ à Η, et E à Θ, non seulement comme Ξ est à Β, mais encore comme A est à N, et comme N est à Ξ; les nombres A, N, Ξ, Β sont donc successivement proportionnels dans lesdites raisons des côtés.

Je dis aussi que A a avec Β une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Ζ, ou de celle que Δ a avec Η, et encore de celle que E a avec Θ. Car puisque

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 41

ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν οὕτως ἐδείχθη ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἢπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

B; ergo A ad B triplam rationem habet ejus quam A ad N. Sed ut A ad N ita ostensum est et Γ ad Ζ et Δ ad Η et adhuc E ad Θ; et A igitur ad B triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam Γ numerus ad Ζ et Δ ad Η et adhuc E ad Θ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐπιπίπτῃ ἀριθμὸς, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐπιπίπτῃ ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus, similes plani erunt numeri.

Inter duos enim numeros Α, Β unus medius proportionalis cadat numerus Γ; dico ipsos Α, Β similes planos esse numeros.

Α, 8.	Γ, 12.	Β, 18.
Δ, 2.	Ε, 3.	Ζ, 4. Η, 6.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, οἱ Δ, Ε· ἔστιν

Sumantur enim Δ, Ε minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ;

les quatre nombres Α, Ν, Ξ, Β sont successivement proportionnels, le nombre Α a avec Β une raison triple de celle que Α a avec Ν. Mais on a démontré que Α est à Ν comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Α a avec Β une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Ζ, de celle que Δ a avec Η, et de celle que Ε a avec Θ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si entre deux nombres il tombe un nombre moyen proportionnel, ces nombres seront des plans semblables.

Car qu'entre les deux nombres Α, Β il tombe un moyen proportionnel Γ; je dis que les nombres Α, Β sont des plans semblables.

Car prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec

ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. Ὡς δὴ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β³. ἰσάνεις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ. Ὡσάνεις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν⁴. ὡς τε ὁ Α ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, Ε ἐλάττωστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Γ, Β· ἰσάνεις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Β. Ὡσάνεις δὲ⁵ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἢ τῷ Η· καὶ⁶ ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ

est igitur Δ ad Ε ita Α ad Γ. Ut autem Α ad Γ ita Γ ad Β; æqualiter igitur Δ ipsum Α metitur ac Ε ipsum Γ. Quoties autem Δ ipsum Α metitur, tot unitates sint in Ζ; ergo Ζ ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit, ipsum autem Ε multiplicans ipsum Γ fecit; quare Α planus est, latera vero ipsius Δ, Ζ. Rursus, quoniam Δ, Ε minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Γ, Β; æqualiter igitur Δ ipsum Γ metitur ac Ε ipsum Β. Quoties autem Ε ipsum Β metitur, tot unitates sint in Η; ergo Ε ipsum

Α, 8. Γ, 12. Β, 18.
 Δ, 2. Ε, 3. Ζ, 4. Η, 6.

κατὰ τὰς ἐν τῷ Η μονάδας· ὁ Η ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν· ὁ Β ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Ε, Η· οἱ Α, Β ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκε· τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ἰσάνεις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τοῦτέστιν ὁ Γ πρὸς

Β metitur per unitates quæ in Η; ergo Η ipsum Ε multiplicans ipsum Β fecit; ergo Β planus est, latera vero ipsius sunt ipsi Ε, Η; ergo Α, Β plani sunt numeri. Dico etiam et similes. Quoniam enim Ζ ipsum quidem Δ multiplicans ipsum Α fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Γ fecit; æqualiter igitur Δ ipsum Α metitur ac Ε ipsum Γ; est igitur ut Δ ad Ε ita Α ad Γ, hoc est

Α, Γ (55. 7), et qu'ils soient Δ, Ε. Le nombre Δ sera à Ε comme Α est à Γ. Mais Α est à Γ comme Γ est à Β; donc Δ mesure Α autant de fois que Ε mesure Γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Ζ que Δ mesure de fois Α. Le nombre Ζ multipliant Δ fera Α, et Ζ multipliant Ε fera Γ; donc Α est un nombre plan, dont les côtés sont Δ, Ζ. De plus, puisque les nombres Δ, Ε sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Γ, Β, le nombre Δ mesurera Γ autant de fois que Ε mesure Β. Qu'il y ait autant d'unités dans Η que Ε mesure de fois Β; le nombre Ε mesurera Β par les unités qui sont dans Η, et le nombre Η multipliant Ε fera Β; donc Β est un nombre plan, dont les côtés sont Ε, Η; donc Α, Β sont des nombres plans. Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car, puisque Ζ multipliant Δ fait Α, et que Ζ multipliant Ε fait Γ, Δ mesure Α autant de fois que Ε mesure Γ; donc Δ est à Ε comme Α est à Γ, c'est-à-dire comme Γ est à Β. De plus, puisque Ε multipliant

τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Εἰ ἐκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η⁸. οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἰσιν, αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν⁹ ἀνάλογόν εἰσιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Γ ad Β. Rursus, quoniam Ε utrumque ipsorum Ζ, Η multiplicans ipsos Γ, Β fecit, est igitur ut Ζ ad Η ita Γ ad Β. Ut autem Γ ad Β ita Δ ad Ε; et igitur ut Δ ad Ε ita Ζ ad Η. Et alterne ut Δ ad Ζ ita Ε ad Η; ergo Α, Β similes plani numeri sunt, etenim ipsorum latera sunt proportionalia. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

PROPOSITIO XXI.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐπιπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐπιπίπτέωσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν.

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri, similes solidi sunt numeri.

Inter duos enim numeros Α, Β duo medii proportionales cadant numeri Γ, Δ; dico ipsos Α, Β similes solidos esse.

Α, 24.	Γ, 72.	Δ, 216.	Β, 648.
Ε, 1.	Ζ, 3.	Η, 9.	
Θ, 1.	Κ, 1.	Ν, 24.	Λ, 3. Μ, 3. Ξ, 72.

Εἰλήφθωσαν γὰρ² ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, τρεῖς³ οἱ

Sumantur enim tres minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ,

Ζ, Η fait Γ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Γ est à Β (18. 7). Mais Γ est à Β comme Δ est à Ε; donc Δ est à Ε comme Ζ est à Η. Et par permutation Δ est à Ζ comme Ε est à Η (15. 7.) Donc Α, Β sont des nombres plans semblables (déf. 21. 7), puisque leurs côtés sont proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI.

Si entre deux nombres il tombe deux nombres moyens proportionnels, ces nombres seront des solides semblables.

Qu'entre les nombres Α, Β il tombe deux nombres moyens proportionnels Γ, Δ; je dis que les nombres Α, Β sont des solides semblables.

Prenons les trois plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec

44 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ε, Ζ, Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ· οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί. Ἐστῶσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευρὰὶ οἱ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ· φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐν τοῦ πρώτου⁵ τούτου ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον⁶ ἐν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ· καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ⁷. διῖσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς

Δ, scilicet ipsi Ε, Ζ, Η; ergo extremi eorum Ε, Η primi inter se sunt. Et quoniam inter Ε, Η unus medius proportionalis cecidit numerus Ζ; ergo Ε, Η numeri similes plani sunt numeri. Sint igitur ipsius quidem Ε latera ipsi Θ, Κ, ipsius vero Η ipsi Λ, Μ; evidens igitur est ex antecedente Ε, Ζ, Η deinceps esse proportionales in ipsius Θ ad Λ ratione et in ipsius Κ ad Μ. Et quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ; et est æqualis multitudo ipsorum Ε, Ζ, Η multitudini ipsorum Α, Γ, Δ; ex æquo igitur est

Α, 24.	Γ, 72.	Δ, 216.	Ε, 648.
Ε, 1.	Ζ, 5.	Η, 9.	
Θ, 1.	Κ, 1.	Ν, 24.	Ξ, 72.
		Α, 5.	Μ, 5.

τὸν Η οὔτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. Οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τούτεστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. Ὁσάκεις δὲ

ut Ε ad Η ita Α ad Δ. Ipsi autem Ε, Η primi, primi vero et minimi, minimi autem metiuntur ipsos æqualiter eandem rationem habentes cum ipsis, major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur Ε ipsum Α metitur ac Η ipsum Δ. Quoties

Α, Γ, Δ (55. 7); qu'ils soient Ε, Ζ, Η; leurs extrêmes Ε, Η seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque entre Ε, Η il tombe un moyen proportionnel Ζ, les nombres Ε, Η seront des nombres plans semblables (20. 8). Que Θ, Κ soient les côtés de Ε, et Λ, Μ les côtés de Η; il est évident, d'après ce qui précède, que les nombres Ε, Ζ, Η sont successivement proportionnels dans la raison de Θ à Λ et de Κ à Μ. Et puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Ε, Ζ, Η est égale à la quantité des nombres Α, Γ, Δ, par égalité Ε est à Η comme Α est à Δ (14. 7). Mais les nombres Ε, Η sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (25. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); le nombre Ε mesure donc le nombre Α autant de fois que Η mesure Δ.

ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Ν· ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκειν. Ὁ δὲ Ε ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Δ, Β· ἰσάνεις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Β. Ὁσάνεις δὴ ὁ Ε τὸν Γ^δ μετρεῖ, τσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Ξ. Καὶ ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκειν. Ὁ δὲ Η ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Λ, Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Λ, Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει¹⁰. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ¹¹ εἰσιν οἱ Λ, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοὶ εἰσι. Λέγω δὴ¹² ὅτι καὶ ὁμοιοί. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α, Γ πεποιήκασιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως¹³ ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Καὶ εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ,

autem E ipsum A metitur, tot unitates sint in N; ergo N ipsum E multiplicans ipsum A fecit. Est autem E ex ipsis Θ, Κ; ergo N ipsum ex Θ, Κ multiplicans ipsum A fecit; solidus igitur est A, latera autem ipsius sunt Θ, Κ, Ν. Rursus, quoniam E, Z, H minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Γ, Δ, Β; æqualiter igitur E ipsum Γ metitur ac H ipsum B. Quoties autem E ipsum Γ metitur, tot unitates sint in Ξ; ergo H ipsum B metitur per unitates quæ in Ξ; ergo Ξ ipsum H multiplicans ipsum B fecit. Est autem H ex Λ, Μ; ergo Ξ ipsum ex Λ, Μ multiplicans ipsum B fecit; solidus igitur est B; latera autem ipsius sunt Λ, Μ, Ξ; ergo A, B solidi sunt. Dico etiam et similes. Quoniam enim N, Ξ ipsum E multiplicantes ipsos A, Γ fecerunt; est igitur ut N ad Ξ ita A ad Γ, hoc est E ad Z. Sed ut E ad Z ita Θ ad Λ et Κ ad Μ; et ut igitur Θ ad Λ ita Κ ad Μ et N ad Ξ. Et sunt quidem Θ, Κ, Ν la-

Qu'il y ait autant d'unités dans N que E mesure de fois A; le nombre N multipliant E fera A. Mais E est le produit de Θ par Κ; donc le nombre N multipliant le produit de Θ par Κ fait A; donc A est un nombre solide, dont les côtés sont Θ, Κ, Ν. De plus, puisque les nombres E, Z, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Γ, Δ, Β, le nombre E mesure Γ autant de fois que H mesure B. Qu'il y ait autant d'unités dans Ξ que E mesure de fois Γ; le nombre H mesurera B par les unités qui sont dans Ξ; donc Ξ multipliant H fera B. Mais H est le produit de Λ par Μ; donc Ξ multipliant le produit de Λ par Μ fera B; donc B est un nombre solide, dont les côtés sont Λ, Μ, Ξ; donc A, B sont des nombres solides. Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car puisque les nombres N, Ξ multipliant E font A, Γ, le nombre N sera à Ξ comme A est à Γ, c'est-à-dire comme E est à Z (17. 7). Mais E est à Z comme Θ est à Λ, et comme Κ est à Μ; donc Θ est à Λ comme Κ est à Μ, et comme N est à Ξ. Mais Θ, Κ, Ν

46 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ν πλευρὰ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευρὰι τοῦ Β· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tera ipsius A, ipsi vero Ξ, Λ, Μ latera ipsius B; ergo A, B similes solidi sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾗ· καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.

Ἐστώσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β· οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσι. Τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, primus autem quadratus sit, et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, primus autem Α quadratus sit; dico et tertium Γ quadratum esse.

Quoniam enim ipsorum Α, Γ unus medius proportionalis est numerus Β; ergo Α, Γ similes solidi sunt. Quadratus autem Α; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

sont les côtés de A, et Ξ, Λ, Μ les côtés de B; donc les nombres A, B sont des solides semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si trois nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un carré, le troisième sera un carré.

Soient A, B, Γ trois nombres successivement proportionnels, et que le premier A soit un carré; je dis que le troisième Γ est un carré.

Puisque entre les nombres A, Γ il y a un moyen proportionnel B, les nombres A, Γ sont des plans semblables (20. 8). Mais A est un carré; donc Γ est un carré. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Εάν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

Si quatuor numeri deinceps proportionales sint, primus autem cubus sit, et quartus cubus erit.

Ἐστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ , ὁ δὲ A κύβος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἔστί.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ , ipse autem A cubus sit; dico et Δ cubum esse.

$A, 8.$ $B, 12.$ $\Gamma, 18.$ $\Delta, 27.$

Ἐπεὶ γὰρ τῶν A, Δ δύο μέσοι ἀνάλογον εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ B, Γ . οἱ A, Δ ἄρα ὁμοιοὶ εἰσι στεροὶ ἀριθμοί. Κύβος δὲ ὁ A · κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipsorum A, Δ duo medii proportionales sunt numeri B, Γ ; ergo A, Δ similes sunt solidi numeri. Cubus autem A ; cubus igitur et Δ . Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIII.

Si quatre nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un cube, le quatrième sera un cube.

Soient A, B, Γ, Δ quatre nombres successivement proportionnels, et que A soit un cube; je dis que Δ est un cube.

Car puisque entre A, Δ il y a deux nombres moyens proportionnels B, Γ , les nombres A, Δ sont des solides semblables (21. 8). Mais A est un nombre cube; donc Δ est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾗ· καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ εἰ A, B πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχέτωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ , ὁ δὲ A τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ B τετράγωνος ἔστιν.

A , 4.
 Γ , 16.

B , 9.
 Δ , 36.

Ἐπεὶ γὰρ εἰ Γ, Δ τετράγωνοί εἰσιν· οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · καὶ τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς. Καὶ ἔστιν ὁ A τετράγωνος· καὶ ὁ B ἄρα τετράγωνος ἔστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem quadratus sit, et secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A, B inter se rationem habeant quam quadratus numerus Γ ad quadratum numerum Δ , ipse autem A quadratus sit; dico et B quadratum esse.

Quoniam enim Γ, Δ quadrati sunt; ergo Γ, Δ similes plani sunt; inter Γ, Δ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Γ ad Δ ita A ad B ; et inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est A quadratus; et B igitur quadratus est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et si le premier est un carré, le second sera un carré.

Car que les deux nombres A, B aient entr'eux la même raison que le nombre carré Γ a avec le nombre carré Δ , et que A soit un carré; je dis que B est un carré.

Car puisque Γ, Δ sont des carrés, les nombres Γ, Δ sont des plans semblables; il tombe donc entre Γ, Δ un nombre moyen proportionnel (18. 8). Mais Γ est à Δ comme A est à B ; il tombe donc aussi un nombre moyen proportionnel entre A et B (8. 8). Mais A est un carré; donc B est un carré (22. 8.) Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

PROPOSITIO XXV.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ἦ· καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχέτωσαν ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ Α· λέγω¹ ὅτι καὶ ὁ Β κύβος ἐστίν.

Si duo numeri inter se rationem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit.

Duo enim numeri Α, Β inter se rationem habeant quam cubus numerus Γ ad cubum numerum Δ, cubus autem sit Α; dico et Β cubum esse.

Α, 8.	Ε, 12.	Ζ, 18.	Β, 27.
Γ, 64.			Δ, 216.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσὶν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσὶ τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί², τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ὡς τε καὶ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπίπτέτωσαν οἱ

Quoniam enim Γ, Δ cubi sunt, ipsi Γ, Δ similes solidi sunt; inter Γ, Δ igitur duo mediū proportionales cadunt numeri. Quot autem inter Γ, Δ in continuum proportionales cadunt numeri, tot et inter eos eandem rationem habentes cum ipsis; quare et inter Α, Β duo mediū proportionales cadunt numeri. Cadant Ε, Ζ. Quo-

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube, et si le premier est un cube, le second sera aussi un cube.

Car que les nombres Α, Β ayent entr'eux la même raison que le nombre cube Γ a avec le nombre cube Δ, et que Α soit un cube; je dis que Β est aussi un cube.

Car puisque Γ, Δ sont des cubes, les nombres Γ, Δ sont des solides semblables; il tombe donc entre Γ et Δ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais autant il tombe entre Γ et Δ de nombres successivement proportionnels, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison avec eux (8. 8); il tombera donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels. Que ces nombres soient Ε, Ζ.

50 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

E, Z. Ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἰ A, E, Z, B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι κύβος ὁ A· κύβος ἄρα καὶ ὁ B. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

niam igitur quatuor numeri A, E, Z, B deinceps proportionales sunt, atque est cubus A; cubus igitur et B. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Ἐστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἰ A, B· λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A, B; dico A ad B rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

$$\begin{array}{ccc} A, 6. & \Gamma, 12. & B, 24. \\ \Delta, 1. & E, 2. & Z, 4. \end{array}$$

Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐπίπεδοί εἰσι τῶν A, B ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς. Ἐμπιπτέτω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰληφθῶσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, Γ, B, οἱ Δ, E, Z· οἱ ἄρα ἄρει αὐτῶν οἱ Δ, Z τετράγωνοί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν

Quoniam enim A, B plani sunt; inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Cadat, et sit Γ, et sumantur minimi numeri Δ, E, Z ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis A, Γ, B; extremi igitur eorum Δ, Z quadrati sunt. Et quoniam est ut Δ ad Z ita A ad B,

Puisque les quatre nombres A, E, Z, B sont successivement proportionnels, et que A est un cube, le nombre B sera aussi un cube (25. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Les nombres qui sont des plans semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Soient A, B des nombres plans semblables; je dis que A a avec B la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Car puisque les nombres A, B sont des plans, il tombe un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Qu'il en tombe un, et qu'il soit Γ. Prenons les plus petits nombres qui ont la même raison avec A, Γ, B (55. 7), et qu'ils soient Δ, E, Z; leurs extrêmes Δ, Z seront des quarrés (cor. 2. 8). Et puisque Δ est à Z

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 51

Z οὕτως ὁ *A* πρὸς τὸν *B*, καὶ εἰσιν οἱ *Δ*, *Z* τετράγωνοι· ὁ *A* ἄρα πρὸς τὸν *B* λόγον ἔχει ὡς τετραγῶνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et sunt *Δ*, *Z* quadrati; ergo *A* ad *B* rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν.

Ἐστώσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ *A*, *B* λέγω ὅτι ὁ *A* πρὸς τὸν *B* λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν.

PROPOSITIO XXVII.

Similes solidi numeri inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri *A*, *B*; dico *A* ad *B* rationem habere quam cubus numerus ad cubum numerum.

<i>A</i> , 16.	<i>Γ</i> , 24.	<i>Δ</i> , 36.	<i>B</i> , 54.
<i>E</i> , 8.	<i>Z</i> , 12.	<i>H</i> , 18.	<i>Θ</i> , 27.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ *A*, *B* ὅμοιοι στερεοὶ εἰσι τῶν *A*, *B* ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐπιπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐπιπίπτέτωσαν οἱ *Γ*, *Δ*, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς *A*, *Γ*, *Δ*, *B* ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ *E*,

Quoniam enim *A*, *B* similes solidi sunt; ergo inter *A*, *B* duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant *Γ*, *Δ*, et sumantur minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis *A*, *Γ*, *Δ*, *B*, æquales ipsis multitudine, *E*, *Z*,

comme *A* est à *B*, et que *Δ*, *Z* sont des quarrés, le nombre *A* aura avec le nombre *B* la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Les nombres solides semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Soient *A*, *B* des nombres solides semblables; je dis que *A* a avec *B* la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Car puisque les nombres *A*, *B* sont des solides semblables, il tombe deux moyens proportionnels entre *A*, *B* (19. 8). Qu'ils soient *Γ*, *Δ*. Prenons en même quantité les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec *A*, *Γ*, *Δ*, *B* (2. 8); qu'ils soient *E*, *Z*, *H*, *Θ*; leurs extrêmes *E*, *Θ* seront des cubes

52 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Z, H, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ E, Θ κύβοι εἰσὶ.
 Καὶ ἔστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν
 B· καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ὃν κύβος
 ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

H, Θ; ergo extremi eorum E, Θ cubi sunt.
 Atque est ut E ad Θ ita A ad B; ergo A ad B
 rationem habet quam cubus numerus ad cubum
 numerum. Quod oportebat ostendere.

(cor. 2. 8). Mais E est à Θ comme A est à B; donc A a avec B la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU HUITIÈME LIVRE.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εάν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζονται ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ἐστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Α, 6. Β, 54.
Δ, 56. Γ, 324.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν

PROPOSITIO I.

Si duo similes plani numeri se se multiplicantes faciunt aliquem, factus quadratus erit.

Sint duo similes plani numeri Α, Β, et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ quadratum esse.

Ipse enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Quoniam igitur

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Si deux nombres plans semblables se multipliant l'un l'autre produisent un nombre, le produit sera un carré.

Soient Α, Β deux nombres plans semblables, et que Α multipliant Β fasse Γ; je dis que Γ est un carré.

Car que Α se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un carré.

54 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ Α ἑαυτὸν μὲν² πολλαπλασιάζας τὸν Δ ποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ³

A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam Α, Β similes plani sunt numeri; inter Α, Β igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Si autem inter duos numeros in continuaum pro-

A, 6. Β, 54.
Δ, 56. Γ, 524.

κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὡς τε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

portionales cadunt numeri, quot inter ipsos cadunt totidem et inter eos eandem rationem habentes; quare et inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est quadratus Δ; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί'.

Si duo numeri se se multiplicantes faciunt quadratum, similes plani sunt numeri.

Puisque A se multipliant lui-même fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres Α, Β sont des plans semblables, il tombe un nombre moyen proportionnel entre Α et Β (18. 8). Mais si entre deux nombres il tombe des nombres successivement proportionnels, autant il en tombe entre ces deux nombres, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison (8. 8); il tombe donc entre Δ et Γ un nombre moyen proportionnel. Mais Δ est un carré; donc Γ est un carré. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un carré, ces nombres seront des plans semblables.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B , καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ A, B ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Sint duo numeri A, B , et A ipsum B multiplicans quadratum ipsum Γ faciat; dico A, B similes planos esse numeros.

$A, 3. \quad B, 12.$
 $\Delta, 9. \quad \Gamma, 36.$

Ὁ γὰρ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Καὶ ἔπειδ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ . Καὶ ἔπειδ ὁ Δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ · οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι τῶν Δ, Γ ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · καὶ τῶν A, B ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· οἱ ἄρα A, B ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ipse enim A se se multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Et quoniam A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit; ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ . Et quoniam Δ quadratus est, sed et Γ ; ergo Δ, Γ similes plani sunt; inter Δ, Γ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Δ ad Γ ita A ad B ; et inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit. Si autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadit, similes plani sunt numeri; ergo A, B similes sunt plani. Quod oportebat ostendere.

Soient les deux nombres A, B , et que A multipliant B fasse le carré Γ ; je dis que les nombres A, B sont des plans semblables.

Car que A se multipliant lui-même fasse Δ ; le nombre Δ sera un carré. Et puisque A se multipliant lui-même fait Δ , et que A multipliant B fait Γ , le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque Δ est un carré ainsi que Γ , les nombres Δ, Γ sont des plans semblables; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre Δ et Γ (8. 8). Mais Δ est à Γ comme A est à B ; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Mais si un nombre moyen proportionnel tombe entre deux nombres, ces nombres sont des plans semblables (20. 8); donc les nombres A, B sont plans et semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γεόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἔστίς.

Α, 8.

Δ, 4.

Γ, 2.

Β, 64.

PROPOSITIO III.

Si cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A se ipsum multiplicans ipsum B faciat; dico B cubum esse.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρά, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· φανερόν δὲ ἔστιν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκει· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας·

Sumatur enim ipsius A latus Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; manifestum igitur est Γ ipsum Δ multiplicans ipsum A facere. Et quoniam Γ se ipsum multiplicans ipsum Δ fecit; ergo Γ ipsum Δ metitur per unitates quæ in ipso. Sed etiam et unitas ipsum Γ metitur per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam Γ ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit; ergo Δ ipsum A metitur per unitates quæ in Γ. Metitur autem et unitas ipsi Γ per unitates quæ in ipso; est

PROPOSITION III.

Si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube A se multipliant lui-même fasse B; je dis que B est un cube.

Car prenons le côté Γ de A, et que Γ se multipliant lui-même fasse Δ; il est évident que Γ multipliant Δ fera A (déf. 19. 7). Et puisque Γ se multipliant lui-même a fait Δ, le nombre Γ mesurera Δ par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure Γ par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à Γ comme Γ est à Δ (déf. 20. 7.) De plus, puisque Γ multipliant Δ a fait A, le nombre Δ mesure A par les unités qui sont en Γ. Mais l'unité mesure Γ par les unités qui sont

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Αλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἐμπεπτώκασιν⁵· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται⁶ ἀριθμοί. Ἐάν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ, καὶ ὁ δεύτερος⁷ κύβος ἔσται. Καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἔστί. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur ut unitas ad Γ ita Δ ad Α. Sed ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ; et ut igitur unitas ad Γ ita Γ ad Δ, et Δ ad Α; ergo inter unitatem et numerum Α duo medii proportionales in continuum cadunt numeri Γ, Δ. Rursus, quoniam Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo Α ipsum Β metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum Α per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Α ita Α ad Β. Sed inter unitatem et Α duo medii proportionales numeri cadunt; et inter Α, Β igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Si autem inter duos numeros duo medii proportionales cadunt, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit. Atque est Α cubus; et Β igitur cubus est. Quod oportebat ostendere.

en lui; l'unité est donc à Γ comme Δ est à Α. Mais l'unité est à Γ comme Γ est à Δ; donc l'unité est à Γ comme Γ est à Δ, et comme Δ est à Α; il tombe donc entre l'unité et le nombre Α deux nombres moyens Γ, Δ successivement proportionnels. De plus, puisque Α se multipliant lui-même fait Β, le nombre Α mesure Β par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure Α par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à Α comme Α est à Β (déf. 20. 7). Mais entre l'unité et le nombre Α il tombe deux nombres moyens proportionnels; il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais si entre deux nombres il tombe deux moyens proportionnels, et si le premier est un cube, le second sera un cube (23. 8). Mais Α est un cube; donc Β est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

PROPOSITIO IV.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάζας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἔστί.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ cubum esse.

Α, 8. Β, 27.
Δ, 64. Γ, 216.

Ὁ γὰρ Α' ἑαυτὸν πολλαπλασιάζας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἔστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάζας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσὶν οἱ Α, Β²· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὡς τε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ipse enim A se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ cubus est. Et quoniam A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam A, B cubi sunt, similes solidi sunt A, B; ergo inter A, B duo medii proportionales cadunt numeri; quare et inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus Δ; cubus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION IV.

Si un nombre cube multipliant un nombre cube fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube A multipliant le nombre cube B fasse Γ; je dis que Γ est un cube.

Car que A se multipliant lui-même fasse Δ, le nombre Δ sera un cube (3. 9). Et puisque A se multipliant lui-même a fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres A, B sont des cubes, les nombres A, B sont des solides semblables. Il tombe donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (19. 8); il tombera donc aussi entre Δ et Γ deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais Δ est un cube; donc Γ est un cube (25. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμὸν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἔστί.

A, 8. B, 27.
Δ, 64. Γ, 216.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω κύβος ἄρα ἔστιν ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως² ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Δ, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν³ Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα ἔστί καὶ ὁ Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans cubum facit, et multiplicatus cubus erit.

Cubus enim numerus A numerum aliquem ipsum B multiplicans cubum ipsum Γ faciat; dico B cubum esse.

Ipse enim A se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; cubus igitur est Δ. Et quoniam A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam Δ, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est ut Δ ad Γ ita A ad B; et inter A, B igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus A; cubus igitur est et B. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION V.

Si un nombre cube multipliant un nombre fait un cube, le nombre multiplié sera un cube.

Car que le nombre cube A multipliant un nombre B fasse le cube Γ; je dis que B est un cube.

Que A se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un cube (5.9). Et puisque A se multipliant lui-même fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17.7). Et puisque Δ et Γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il tombe donc entre Δ et Γ deux nombres moyens proportionnels (19.8). Mais Δ est à Γ comme A est à B; il tombe donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (8.8). Mais A est un cube; donc B est un cube (25.8). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εάν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῆ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς γάρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἔστί.

Α, 8. Β, 64. Γ, 512.

Ὁ γάρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· ὁ Γ ἄρα κύβος ἔστί. Καὶ ἔπειδ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἔπειδ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς

PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicans cubum ipsum B faciat; dico et A cubum esse.

Ipse enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat. Quoniam igitur A se ipsum quidem multiplicans ipsum B fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ cubus est. Et quoniam A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; ergo A ipsum B metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita A ad B. Et quoniam A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo B ipsum Γ metitur per unitates quæ in A. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita B ad Γ. Sed ut unitas ad A

PROPOSITION VI.

Si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre sera un cube.

Que le nombre A se multipliant lui-même fasse le cube B; je dis que A est un cube.

Car que A multipliant B fasse Γ. Puisque A se multipliant lui-même fait B, et que A multipliant B a fait Γ, le nombre Γ est un cube (def. 9. 7). Et puisque A se multipliant lui-même fait B, le nombre A mesure B par les unités qui sont en lui; mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme A est à B (def. 20. 7). Et puisque A multipliant B fait Γ, le nombre B mesure Γ par les unités qui sont en A. Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme B est à Γ. Mais l'unité est à A comme

τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ κύβοι εἰσὶν, ἕμιοι στερεοὶ εἰσι· τῶν Β, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν· εἰσὶν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν· εἰσὶν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ita A ad B; et ut igitur A ad B ita B ad Γ. Et quoniam B, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter B, Γ duo medii proportionales sunt numeri. Atque est ut B ad Γ ita A ad B; et inter A, B igitur duo medii proportionales sunt numeri. Atque est cubus B; cubus igitur est et A. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans facit aliquem, factus solidus erit.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμὸν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεὸς ἔστιν.

Compositus enim numerus A numerum aliquem ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ solidum esse.

A, 6. B, 7. Γ, 42.
Δ, 5. E, 2.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρήσεται. Μετρήσθω ὑπὸ τοῦ Δ. Καὶ

Quoniam enim A compositus est, a numero aliquo mensurabitur. Mensuretur ab ipso Δ. Et

A est à B; donc A est à B comme B est à Γ. Et puisque B et Γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il y a donc entre B et Γ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais B est à Γ comme A à B; il y a donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais B est un cube; donc A est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VII.

Si un nombre composé multipliant un nombre en fait un autre, le produit sera un solide.

Car que le nombre composé A multipliant le nombre B fasse Γ; je dis que Γ est un solide.

Car puisque A est un nombre composé, il sera mesuré par quelque nombre

ὅσακις ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ τσαυταὶ μονάδες ἔστρωσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ αὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας¹· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ ἔπει ὁ Α τὸν

quoties Δ ipsum Α metitur tot unitates sint in Ε. Quoniam igitur Δ ipsum Α metitur per unitates quæ in Ε; ergo Ε ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit. Et quoniam Α ipsum Β multiplicans

Α, 6. Β, 7. Γ, 42.
Δ, 3. Ε, 2.

Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Ε τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν². ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum Γ fecit, est autem Α ex ipsis Δ, Ε; ergo ipse ex Δ, Ε ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ solidus est, latera autem ipsius sunt Δ, Ε, Β. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

PROPOSITIO VIII.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἔσται¹ καὶ οἷ᾽ ἓνα διαλείποντες παιτες², ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες³, ὁ δὲ ἑβδομος κύβος ἄρα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες⁴.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt, tertius quidem ab unitate quadratus erit, et unum intermittentes omnes; sed quartus cubus, et duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul et quadratus, et quinque intermittentes omnes.

(déf. 15. 7). Qu'il soit mesuré par Δ; et qu'il y ait en Ε autant d'unités que Δ mesure de fois Α. Puisque Δ mesure Α par les unités qui sont en Ε, le nombre Ε multipliant Δ fera Α. Et puisque Α multipliant Β fait Γ, et que Α est le produit de Δ par Ε, le produit de Δ par Ε multipliant Β fait Γ (16. 7); le nombre Γ est donc un nombre solide (déf. 17. 7), dont les côtés sont Δ, Ε, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le troisième, à partir de l'unité, sera un carré, et tous ceux qui en laissent un; le quatrième un cube, et tous ceux qui en laissent deux; le septième un cube et un carré tout à la fois, et tous ceux qui en laissent cinq.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες⁵.

Sint ab unitate quotecunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ; dico quidem tertium ab unitate, ipsum Β, quadratum esse, et unum intermittentes omnes; quartum vero Γ cubum, et duos intermittentes omnes; septimum autem Ζ eubum simul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

1. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε, 243. Ζ, 729.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν⁶ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάζας τὸν Β πεποιήκε· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. Καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες⁷ τετράγωνοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ, καὶ

Quoniam enim est ut unitas ad Α ita Α ad Β; æqualiter igitur unitas ipsum Α numerum metitur et Α ipsum Β. Sed unitas ipsum Α numerum metitur per unitates quæ in ipso; atque Α igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in Α; ergo Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; quadratus igitur est Β. Et quoniam Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, sed Β quadratus est; et Δ igitur quadratus est. Propter eadem utique et Ζ quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et unum omnes intermittentes quadratos esse. Dico etiam et quartum ab unitate, ipsum Γ, cubum esse, et duos intermit-

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels; je dis que le troisième nombre Β, à partir de l'unité, est un carré, ainsi que tous ceux qui en laissent un; que le quatrième Γ est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux; que le septième Ζ est un cube et un carré tout à la fois, ainsi que tous ceux qui en laissent cinq.

Car puisque l'unité est à Α comme Α est à Β, l'unité mesure Α autant de fois que Α mesure Β (déf. 20. 7). Mais l'unité mesure le nombre Α par les unités qui sont en lui; donc Α mesure Β par les unités qui sont en Α; le nombre Α se multipliant lui-même fera donc le nombre Β; le nombre Β est donc un carré. Et puisque Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un carré, Δ sera aussi un carré (22. 8). Par la même raison Ζ est un carré. Nous démontrerons de la même manière que tous ceux qui en laissent un sont des carrés. Je dis aussi que le quatrième, Γ, à partir de l'unité, est un cube, et

64 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οἱ δύο διαλείποντες πάντες. Ἐπει γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει. Ἐπεὶ

tentes omnes. Quoniam enim est ut unitas ad Α ita Β ad Γ; æqualiter igitur unitas ipsum Α numerum metitur ac Β ipsum Γ. Sed unitas ipsum Α numerum metitur per unitates quæ in Α; et Β igitur ipsum Γ metitur per unitates quæ in Α; ergo Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit. Quoniam igitur Α se ipsum

Κ. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε, 243. Ζ, 729.

οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν⁸ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστὶ⁹. καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. Ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ἔτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι εἰσὶ¹⁰ καὶ τετράγωνοι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quidem multiplicans ipsum Β fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; cubus igitur est Γ. Et quoniam Γ, Δ, Ε, Ζ deinceps proportionales sunt, sed Γ cubus est; et Ζ igitur cubus est. Ostensum est autem et quadratum; ergo septimus ab unitate ipse Ζ et cubus est et quadratus. Similiter etiam demonstrabimus et quinque intermittentes omnes cubos esse et quadratos. Quod oportebat ostendere.

tous ceux qui en laissent deux. Car puisque l'unité est à Α comme Β est à Γ, l'unité mesure Α autant de fois que Β mesure Γ. Mais l'unité mesure le nombre Α par les unités qui sont en Α; donc Β mesure Γ par les unités qui sont en Α; donc Α multipliant Β fera Γ. Et puisque Α se multipliant lui-même fait Β, et que Α multipliant Β fait Γ, Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque Γ, Δ, Ε, Ζ sont successivement proportionnels, et que Γ est un cube, Ζ est aussi un cube (23. 8). Mais on a démontré qu'il est un carré; donc le septième Ζ, à partir de l'unité, est un cube et un carré tout à la fois. Nous démontrerons semblablement que tous ceux qui en laissent cinq sont des cubes et des carrés tout à la fois. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾗ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾗ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἐστῶσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ἰσοειδηποτοῦν² ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

1. Α, 4. Β, 16. Γ, 64. Δ, 256. Ε, 1024. Ζ, 4096.

Οτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς ἀνάλογον εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Γ ἄρα³ τετράγωνός ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογον εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Β τετράγωνος· καὶ ὁ Δ ἄρα⁴ τετράγωνός ἐστιν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem quadratus est; et reliqui omnes quadrati erunt. Et si ipse post unitatem cubus est; et reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab unitate deinceps proportionales quocunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ipse autem Α post unitatem sit quadratus; dico et reliquos omnes quadratos fore.

Tertium quidem ab unitate Β quadratum esse, et unum intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes quadratos esse. Quoniam enim Α, Β, Γ deinceps proportionales sunt, et est Α quadratus; et Γ igitur quadratus est. Rursus, quoniam Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, et est Β quadratus; et ipse Δ igitur quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et reliquos omnes quadratos esse.

PROPOSITION IX.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un carré, tous les autres seront des carrés; si celui qui est après l'unité est un cube, tous les autres seront des cubes.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité soit un carré; je dis que tous les autres seront des carrés.

On a déjà démontré que le troisième Β, à partir de l'unité, est un carré, ainsi que tous ceux qui en laissent un (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont des carrés. Car puisque Α, Β, Γ sont successivement proportionnels, et que Α est un carré, Γ est un carré (22. 8). De plus, puisque les nombres Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un carré, Δ est aussi un carré. Nous démontrerons semblablement que tous les autres sont des carrés.

66 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αλλά δὴ⁵ ἔστω ὁ A κύβος· λέγω ὅτι καὶ⁶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δεικνύται· λέγω γὰρ ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν B . Ἡ δὲ μονὰς τὸν A μετρεῖ

Sed et sit A cubus; dico et reliquos omnes cubos esse.

Quantum quidem ab unitate ipsum Γ cubum esse, et duos intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A ita A ad B ; æqualiter igitur unitas ipsum A metitur ac A ipsum B . Sed unitas ipsum A metitur per uni-

1. A , 8. B , 64. Γ , 512. Δ , 4096. E , 52768. Z , 262144.

κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ A ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ A ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποιήκει, καὶ ἐστὶν ὁ A κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστὶ· καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἐστὶ⁸. Καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ A , B , Γ , Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἐστὶν ὁ A κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E κύβος ἐστὶ, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tates quæ in ipso; et A igitur ipsum B metitur per unitates quæ in ipso; ergo A se ipsum multiplicans ipsum B fecit, atque est A cubus. Si autem cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus est; et B igitur cubus est. Et quoniam quatuor numeri A , B , Γ , Δ deinceps proportionales sunt, et est A cubus; et Δ igitur cubus est. Propter eadem utique et E cubus est, et similiter reliqui omnes cubi sunt. Quod oportebat ostendere.

Mais que A soit un cube; je dis que tous les autres sont des cubes.

On a déjà démontré que le quatrième, à partir de l'unité, est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont aussi des cubes. Car puisque l'unité est à A comme A est à B , l'unité mesure A autant de fois que A mesure B (déf. 20. 7). Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; donc A mesure B par les unités qui sont en lui; donc A se multipliant lui-même fait B ; mais A est un cube; et si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit est un cube (3. 9); donc B est un cube. Et puisque les quatre nombres A , B , Γ , Δ sont successivement proportionnels, et que A est un cube, Δ est un cube (25. 8). Par la même raison E est aussi un cube, ainsi que tous les autres. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ἦ τετράγωνος· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ἦ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἐστωσαν γάρ¹ ἀπὸ μονάδος ἕξις ἀνάλογον ὁσοιδηποῦν² ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ἔτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς³ τοῦ τρίτου τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων⁴.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

Si ab unitate quotecunque numeri proportionales sunt, ipse autem post unitatem non est quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Et si ipse post unitatem cubus non est, neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.

Sicut enim ab unitate deinceps proportionales quotecunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, sed post unitatem ipse Α non sit quadratus; dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

Si enim possibile, sit Γ quadratus. Est autem et Β quadratus; ergo Β, Γ inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum

PROPOSITION X.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité n'est point un carré, aucun autre ne sera un carré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent un. Et si celui qui est après l'unité n'est pas un cube, aucun autre ne sera un cube, excepté le quatrième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent deux.

Car soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité ne soit pas un carré, savoir Α; je dis qu'aucun autre ne sera un carré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Car si cela est possible, que Γ soit un carré. Mais Β est aussi un carré (8. 9); donc Β et Γ ont entr'eux la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre

68 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον ἀριθμὸν. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως⁵ ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ὥς τε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἴσι. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Β· τετράγωνος ἄρα ἔστι καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. Λέγω δὴδ ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. Ἐστι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος, τέταρτος γὰρ ἐστὶν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁹ ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει ὃν κύβος πρὸς κύβον¹⁰. Καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ μονὰς

numerum. Et est ut B ad Γ ita A ad B; ergo A, B inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare A, B similes plani sunt. Et est quadratus B; quadratus igitur est et A, quod non supponebatur; non igitur Γ quadratus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

Sed et non sit A cubus. Dico etiam neque alium ullum eubum fore, præter quartum ab unitate et duos intermittentes.

Si enim possibile, sit Δ cubus. Est autem et Γ cubus, quartus enim est ab unitate, et est ut Γ ad Δ ita Β ad Γ; et Β igitur ad Γ rationem habet quam cubus ad cubum. Et est Γ cubus; et Β igitur cubus est. Et quoniam

quarré; et Β est à Γ comme Α est à Β; donc Α, Β ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc Α, Β sont des plans semblables (déf. 22. 7). Mais Β est un quarré; donc Α est un quarré, ce qui n'est point supposé; donc Γ n'est point un quarré. Nous démontrons semblablement qu'aucun autre n'est un quarré, si ce n'est le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Mais que Α ne soit pas un cube; je dis qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux.

Car si cela est possible, que Δ soit un cube. Mais Γ est un cube; car c'est le quatrième nombre, à partir de l'unité (8. 9), et Γ est à Δ comme Β est à Γ; donc Β a avec Γ la même raison qu'un cube a avec un cube. Mais Γ est un cube; donc Β est un cube. Et puisque l'unité est à Α comme Α est à Β, et que l'unité mesure

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 69

πρὸς τὸν Α οὕτως¹¹ ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἢ δὲ μονάς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ¹²ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποιήκειν. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῆ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων¹³. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσσιούν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἔσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατὰ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀίολοι ἀριθμοῖς.

Ἐστῶσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὅποσσιούν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀίολοι, οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος ὁ Β τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τῶν Γ, Δ.

A par les unités qui sont en lui ; donc A mesure B par les unités qui sont en lui (déf. 21. 7) ; donc A se multipliant lui-même fera le cube B. Mais si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre est un cube (6. 9) ; A est donc un cube, ce qui n'est point supposé ; donc Δ n'est pas un cube. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le plus petit mesure le plus grand par quelqu'un de ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité A, tant de nombres qu'on voudra B, Γ, Δ, Ε successivement proportionnels ; je dis que B, le plus petit des nombres B, Γ, Δ, Ε, mesure Ε par un des nombres Γ, Δ.

est ut unitas ad A ita A ad B, sed unitas ipsum A metitur per unitates quæ in ipso ; et A igitur ipsum B metitur per unitates quæ in ipso ; ergo A se ipsum multiplicans cubum B fecit. Si autem numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit ; cubus igitur et A, quod non supponitur ; non igitur Δ cubus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XI.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, minor majorem metitur per aliquem eorum qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate A quotcunque numeri deinceps proportionales B, Γ, Δ, Ε ; dico eorum B, Γ, Δ, Ε minimum B ipsum Ε metiri per aliquem ipsorum Γ, Δ.

70 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκεις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐαλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. Ἡ δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ² μονάδας·

A, 1. B, 5. Γ, 9. Δ, 27. Ε, 81.

καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ³ μονάδας· ὡς τε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τινὰ ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι¹.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς¹ ἀνάλογον ᾧσιν· ὑφ' ὧσιν ἂν ὁ ἔσχατος πρῶτων ἀριθμῶν μετρηῖται², ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρά τὴν μονάδα μετρηθῆσεται.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποσιοιδηποῦν³ ἀριθμοὶ ἐξῆς⁴ ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι ὑφ' ὧσιν ἂν ὁ Δ πρῶτων ἀριθμῶν μετρηῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθῆσεται.

Car puisque l'unité A est à B comme Δ est à Ε, l'unité A mesure B autant de fois que Δ mesure Ε (déf. 20. 7); donc par permutation l'unité A mesure Δ autant de fois que B mesure Ε (15. 7.) Mais l'unité A mesure Δ par les unités qui sont en lui; donc B mesure Ε par les unités qui sont en Δ; le plus petit B mesure donc Ε, qui est le plus grand, par un des nombres qui sont dans les nombres proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, tous les nombres premiers qui mesurent le dernier mesurent aussi celui qui est le plus près de l'unité.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra A, B, Γ, Δ successivement proportionnels; je dis que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi A.

Quoniam enim est ut A unitas ad B ita Δ ad Ε; æqualiter igitur A unitas ipsum B numerum metitur ac Δ ipsum Ε; alterne igitur æqualiter A unitas ipsum Δ metitur ac B ipsum Ε. Sed A unitas ipsum Δ metitur per uni-

tates quæ in ipso; et B igitur ipsum Ε metitur per unitates quæ in Δ; quare minor B majorem ipsum Ε metitur per aliquem numerum eorum qui sunt in proportionalibus numeris. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XII.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt; a quibuscunque ultimus primorum numerorum mensuratur, ab ipsis et proximus unitati mensurabitur.

Sint ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ; dico a quibuscunque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab ipsis et A mensuratum iri.

Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε καὶ⁵ τὸν Α μετρεῖ. Μὴ γὰρ μετρείτω ὁ Ε τὸν Α⁶. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν⁷ ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτος ἐστίν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α

Mensuretur enim Δ ab aliquo primo numero Ε; dico Ε et ipsum Α metiri. Non enim metiatur Ε ipsum Α. Atque est Ε primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo Ε, Α primi inter se sunt. Et quoniam Ε ipsum Δ metitur, metiatur eum per Ζ; ergo Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Rursus, quoniam Α ipsum

1. Α, 4. Β, 16. Γ, 64. Δ, 256.
Ε, 2. Θ, 8. Η, 32. Ζ, 128.

τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως⁸ ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν

Δ metitur per unitates quæ in Γ; ergo Α ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed utique et Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; est igitur ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α, Ε primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Ε ipsum Γ. Metiatur eum per Η; ergo Ε ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit. Sed et ex antecedente et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α,

Que Δ soit mesuré par un nombre premier Ε; je dis que Α est aussi mesuré par Ε. Que Α ne soit pas mesuré par Ε. Puisque Ε est un nombre premier, et que tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); les nombres Ε, Α sont premiers entr'eux. Et puisque Ε mesure Δ, qu'il le mesure par Ζ; le nombre Ε multipliant Ζ fera Δ. De plus, puisque Α mesure Δ par les unités qui sont en Γ, le nombre Α multipliant Γ fera Δ (11. 9). Mais Ε multipliant Ζ fait Δ; donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (27. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Ε mesure Γ. Qu'il le mesure par Η; le nombre Ε multipliant Η fera Γ. Mais par ce qui précède Α multipliant Β fait Γ; donc le produit

72 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

A, B ἴσος ἐστὶ τῶν ἐκ τῶν E, H· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως⁹ ὁ H πρὸς τὸν B. Οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ, τε ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ E τὸν B. Μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ E ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν B πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποιήκειν·

B æqualis est ipsi ex E, H; est igitur ut A ad E ita H ad B. Sed et A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur E ipsum B. Metiatur ipsum per Θ; ergo E ipsum Θ multiplicans ipsum B fecit. Sed et A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; est igitur ipse ex Θ, E æqualis ipsi

1. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256.
E, 2. Θ, 8. H, 32. Z, 128.

ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, E ἴσος¹⁰ τῶν ἀπὸ τοῦ A· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν A οὕτως¹¹ ὁ A πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε¹² ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ E τὸν A¹³. Ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ, ὅτι ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, E πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ σύνθετοι ἄρα. Οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ πρώτου¹⁴ ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται· οἱ A, E ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται¹⁵.

ab A; est igitur ut E ad A ita A ad Θ. Sed A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ergo metitur et E ipsum A. Sed et non metitur, quod impossibile; non igitur A, E primi inter se sunt; ergo compositi. Sed compositi a primo numero aliquo mesurantur; ergo A, E a primo aliquo numero mesurantur. Et quoniam E primus

de A par B égale le produit de E par H; donc A est à E comme H est à B. Mais les nombres A, E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure B. Qu'il le mesure par Θ; le nombre E multipliant Θ fera B. Mais A se multipliant lui-même fait B; donc le produit de Θ par E égale le carré de A; donc E est à A comme A est à Θ. Mais A et E sont premiers entr'enx, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure A. Mais il ne le mesure pas, ce qui est impossible; donc les nombres A, E ne sont pas premiers entr'eux; donc ils sont composés. Mais les nombres composés sont mesurés par quelque nombre premier (déf. 15. 7); donc les nombres A, E sont mesurés par quelque nombre premier.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὡς τε καὶ¹⁶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὑφ' ὧν ἂν ὁ Δ πρῶτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθῆσεται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ἰσοσμοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ἢ ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου¹ μετρηθῆσεται, πάρεξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ἰσοσμοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς² ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθῆσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ.

Et puisque E est supposé être un nombre premier, et qu'un nombre premier n'est mesuré par aucun autre nombre que par lui-même (déf. 12. 7), le nombre E mesurera les nombres A, E ; donc E mesure A. Mais il mesure Δ ; donc E mesure les nombres A, Δ. Nous démontrerons semblablement que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi le nombre A. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un nombre premier, aucun autre nombre ne mesurera le plus grand, excepté ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels, et que le nombre Α, qui est après l'unité, soit un nombre premier ; je dis que le plus grand Δ ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par les nombres Α, Β, Γ.

supponitur, primus autem ab alio numero non mensuratur nisi a se ipso ; ergo E ipsos A, E metitur ; quare et E ipsum A metitur. Metitur autem et ipsum Δ ; ergo E ipsos A, Δ metitur. Similiter utique demonstrabimus a quibuscumque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab iisdem et ipsum A mensuratum iri. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XIII.

Si ab unitate quotcumque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem primus est, maximus a nullo alio mensurabitur, nisi ab eis qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate quotcumque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, ipse Α autem post unitatem primus sit ; dico maximum eorum ipsum Δ a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis Α, Β, Γ.

74 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρήσθω ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἕστω ὁ αὐτός· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. Εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτος ἔστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὅτινα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ἔπιρ ἔστιν ἄδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτος ἔστι· σύνθετος ἄρα· πάς³ δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· Αὐτὸν δὲ ὅτι ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται⁵, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ·

Si enim possibile, mensuretur ab ipso E, et ipse E cum nullo ipsorum A, B, Γ sit idem; evidens est autem E primum non esse. Si enim E primus est, et metitur ipsum Δ, et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur E primus est; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo E a primo aliquo numero mensuratur. Dico etiam ipsum a nullo alio numero mensuratum iri, nisi ab ipso A. Si enim ab alio mensu-

1.	Α, 5.	Β, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	Ε-----	Θ-----	Η-----	Ζ-----

κακεῖνες ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὡς τε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ἔντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ἔπιρ ἔστιν ἄδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ. Αὐτὸν δὲ ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστιν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ Ζ ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστιν ὁ αὐτός, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἰς ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε.

ratur ipse E, sed E ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo A ipsum E metitur. Et quoniam E ipsum Δ metitur, metiatur ipsum per Z. Dico Z cum nullo ipsorum A, B, Γ esse eundem. Si enim Z cum uno ipsorum A, B, Γ est idem, et metitur ipsum Δ per E; et unus igitur ipsorum A, B, Γ ipsum Δ metitur

Car si cela est possible, que E mesure Δ, et que E ne soit aucun des nombres A, B, Γ; il est évident que E n'est pas un nombre premier. Car si E est un nombre premier, et s'il mesure Δ, il mesurera A, qui est un nombre premier, E n'étant pas le même que A (12. 9), ce qui est impossible; donc E n'est pas un nombre premier; il est donc composé. Mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier (55. 7); donc E est mesuré par quelque nombre premier. Je dis qu'aucun autre nombre premier ne le mesurera, si ce n'est A. Car si E, qui mesure Δ, est mesuré par un autre nombre, cet autre nombre mesurera Δ; il mesurera donc A, qui est un nombre premier, cet autre n'étant pas le même que A (12. 9); ce qui est impossible. Donc A mesure E. Et puisque E mesure Δ, qu'il le mesure par Z; je dis que Z n'est aucun des nombres A, B, Γ. Car si Z est le même qu'un des nombres A, B, Γ, et s'il mesure Δ par E, un des nombres A, B, Γ

Αλλά εἷς τῶν A, B, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατά τινα τῶν A, B, Γ · καὶ ὁ E ἄρα ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, ὅπερ οὐχ ὑπέκειται· οὐκ ἄρα ὁ Z ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ Z ὑπὸ τοῦ A , δεικνύντες πάλιν ὅτι ὁ Z οὐκ ἐστὶ πρῶτος. Εἰ γὰρ πρῶτος^δ, καὶ μετρεῖ τὸν Δ , καὶ τὸν A μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ἂν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτος ἐστὶν ὁ Z · σύνθετος ἄρα· ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Z ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται^θ. Λέγω δὴ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται, πλὴν τοῦ A . Εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Z μετρεῖ, ὁ δὲ Z τὸν Δ μετρεῖ· καὶ κείνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὡς τε καὶ τὸν A μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ἂν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ A ἄρα τὸν Z μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ E τὸν Δ μετρεῖ κατά τὸν Z · ὁ E ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιή-

per E . Sed unus ipsorum A, B, Γ ipsum Δ metitur per aliquem ipsorum A, B, Γ ; et E igitur cum uno ipsorum A, B, Γ est idem, quod non supponitur; non igitur Z cum uno ipsorum A, B, Γ est idem. Similiter utique ostendemus ipsum Z mensuratum iri ab ipso A , ostendentes rursum Z non esse primum. Si enim primum, et metitur ipsum Δ , et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur primus est Z ; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo Z a primo aliquo numero mensuratur. Dico et ipsum ab alio primo numero non mensuratum iri, nisi ab ipso A . Si enim alius aliquis primus ipsum Z metitur, sed Z ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo A ipsum Z metitur. Et quoniam E ipsum Δ metitur per Z ; ergo E ipsum Z multiplicans ipsum Δ fecit. Sed quidem et A ipsum Γ multiplicans ipsum

mesurera Δ par E . Mais un des nombres A, B, Γ mesure Δ par quelqu'un des nombres A, B, Γ (11. 9); donc E sera le même que quelqu'un des nombres A, B, Γ , ce qui n'est point supposé; donc Z n'est aucun des nombres A, B, Γ . Nous démontrerons semblablement que Z est mesuré par A , en faisant voir encore que Z n'est pas un nombre premier. Car s'il l'est, et s'il mesure Δ , il mesurera A , qui est un nombre premier, Z n'étant pas le même que A (12. 9); ce qui est impossible; Z n'est donc pas un nombre premier; il est donc composé; mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier; donc Z est mesuré par quelque nombre premier (35. 7). Je dis qu'il ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par A . Car si Z , qui mesure Δ , est mesuré par tout autre nombre premier, cet autre nombre mesurera Δ , et par conséquent A , qui est un nombre premier, Z n'étant pas le même que A (12. 9); ce qui est impossible; donc A mesure Z . Et puisque E mesure Δ par Z , le nombre E multipliant Z fera Δ . Mais A multipliant Γ fait Δ ;

76 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

κει· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Ο δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Η. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν.

Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; proportionaliter igitur est ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α ipsum Ε metitur; et Ζ igitur ipsum Γ metitur. Metiatur ipsum per Η. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Η cum nullo ipsorum Α, Β esse eundem, et ipsi mensuratum iri ab ipso Α. Et quoniam Ζ ipsum Γ metitur per Η; ergo Ζ ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit.

1.	Α, 5.	Β, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	Ε-----	Θ-----	Η-----	Ζ-----

Αλλά μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Ζ, Η· ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ οὕτως¹⁰ ὁ Η πρὸς τὸν Β. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. Μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὁ Θ τῶ Α οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ· ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν. Αλλά μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν¹¹ Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῶ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α οὕτως¹² ὁ Α πρὸς τὸν Η.

Sed quidem et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α, Β æqualis est ipsi ex Ζ, Η; proportionaliter igitur ut Α ad Ζ ita Η ad Β. Metitur autem Α ipsum Ζ; metitur igitur et Η ipsum Β. Metiatur eum per Θ. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Θ cum ipso Α non esse eundem. Et quoniam Η ipsum Β metitur per Θ; ergo Η ipsum Θ multiplicans ipsum Β fecit. Sed et Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo ipse ex Θ, Η æqualis est ipsi ex Α quadrato; est igitur ut Θ ad Α ita Α

donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais Α mesure Ε; donc Ζ mesure Γ (déf. 21. 7); qu'il le mesure par Η. Nous démontrerons semblablement que Η n'est aucun des nombres Α, Β, et que Α mesure Η. Et puisque Ζ mesure Γ par Η, le nombre Ζ multipliant Η fera Γ. Mais Α multipliant Β fait Γ; donc le produit de Α par Β égale le produit de Ζ par Η; donc Α est à Ζ comme Η est à Β. Mais Α mesure Ζ; donc Η mesure Β. Qu'il le mesure par Θ. Nous démontrerons semblablement que Θ n'est pas le même que Α. Et puisque Η mesure Β par Θ, le nombre Η multipliant Θ fait Β. Mais Α se multipliant lui-même fait Β; donc le produit de Θ par Η égale le carré de Α; donc Θ est à Α comme Α est à Η (20. 7). Mais Α mesure Η;

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 77

Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ἔϊτα, μὴ ἂν αὐτῶ ὁ αὐτός, ὅπερ ἄτρεπον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad H. Metitur autem A ipsum H; metitur igitur et Θ ipsum A primum existentem, non existens cum ipso idem, quod absurdum; non igitur maximus Δ ab alio numero mensurabitur, nisi ab ipsis A, B, Γ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρῶτων ἀριθμῶν μετρηῖται ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρῶτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρῶτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρῶτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ.

Si minimus numerus a primis numeris mensuratur; a nullo alio primo numero mensurabitur, nisi ab ipsis a principio metientibus.

Minimus enim numerus A a primis numeris B, Γ, Δ mensuretur; dico ipsum A a nullo alio primo numero mensuratum iri, nisi ab ipsis B, Γ, Δ.

	Α, 50.	
Β, 2.	Γ, 5.	Δ, 5.
E-----		Z-----

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρεῖσθω ὑπὸ πρῶτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδεὶ τῶν Β, Γ, Δ ἕστω ὁ αὐτός.

Si enim possibile, mensuretur a primo E, et E cum nullo ipsorum B, Γ, Δ sit idem. Et quoniam

donec Θ mesure A, qui est un nombre premier, Θ n'étant pas le même que A, ce qui est absurde; donc le plus grand nombre Δ n'est mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIV.

Si le plus petit nombre est mesuré par des nombres premiers, il ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, si ce n'est par ceux qui le mesureraient d'abord.

Car soit A le plus petit nombre mesuré par les nombres premiers B, Γ, Δ; je dis que A ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, si ce n'est par B, Γ, Δ.

Car si cela est possible, qu'il soit mesuré par le nombre premier E, et que E ne soit

78 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῶν² πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρεῖ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἓνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ

E ipsum A metitur, metiatur eum per Z; ergo E ipsum Z multiplicans ipsum A fecit. Et mensuratur A a primis numeris B, Γ, Δ. Si autem duo numeri sese multiplicantes faciunt aliquem, factum vero ex ipsis metitur aliquis primus numerus, et unum eorum a principio metietur; ergo B, Γ, Δ unum ipsorum E, Z

A, 30.
 E, 2. Γ, 3. Δ, 5.
 E----- Z-----

ἄρα ἓνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσι. Τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γάρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδεὶς τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἐστὶν³ ἀδύνατον, ὁ γάρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος⁴. οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, πᾶριξ τῶν Β, Γ, Δ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

metiuntur. Ipsum quidem E non metientur, ipse E enim primus est, et cum nullo ipsorum B, Γ, Δ idem; ipsum Z igitur metientur minorem existentem ipso A, quod est impossibile, ipse enim A ponitur minimus ab ipsis B, Γ, Δ mensuratus; non igitur ipsum A metietur primus numerus, præter ipsos B, Γ, Δ. Quod oportebat ostendere.

aucun des nombres B, Γ, Δ. Puisque E mesure A, qu'il le mesure par Z; le nombre E multipliant Z fera A. Mais A est mesuré par les nombres premiers B, Γ, Δ, et lorsque deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et qu'un nombre premier mesure le produit, ce nombre mesurera un des nombres qu'on avait d'abord supposés (52. 7); les nombres B, Γ, Δ mesurent donc un des nombres E, Z. Mais ils ne mesureront pas E, car E est un nombre premier, et il n'est aucun des nombres B, Γ, Δ; ils mesurent donc Z, qui est plus petit que A; ce qui est impossible, car A est supposé le plus petit nombre mesuré par B, Γ, Δ; donc aucun nombre premier, si ce n'est B, Γ, Δ, ne mesurera A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

PROPOSITIO XV.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾦσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός εἶσιν.

Ἐστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ A, B, Γ · λέγω ὅτι τῶν A, B, Γ · δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός εἶσιν, οἱ μὲν A, B πρὸς τὸν Γ , οἱ δὲ B, Γ πρὸς τὸν A , καὶ ἔτι οἱ Γ, A πρὸς τὸν B .

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis; duo quicumque compositi ad reliquum primi sunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales, A, B, Γ , minimi eorum eandem rationem habentium cum ipsis; dico ipsorum A, B, Γ duos quoscunque compositos ad reliquum primos esse, ipsos quidem A, B ad Γ , ipsos autem B, Γ ad A , et adhuc ipsos Γ, A ad B .

$A, 9. \quad B, 12. \quad \Gamma, 16.$
 $\Delta. . . E. . . Z.$

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B, Γ δύο οἱ $\Delta E, EZ$. Φανερὸν δὴ ἔστι ὁ μὲν ΔE αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν A πεποιήκει, τὸν δὲ EZ πολλαπλασιάσας τὸν B πεποιήκει, καὶ ἔτι ὁ EZ αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει. Καὶ ἔπει οἱ

Sumantur enim duo $\Delta E, EZ$ minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ . Evidens est et quidem ΔE se ipsum multiplicantem ipsum A facere; ipsum vero EZ multiplicantem ipsum B facere, et adhuc EZ se ipsum multiplicantem ipsum Γ facere. Et

PROPOSITION XV.

Si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux, la somme de deux quelconques de ces nombres sera un nombre premier avec le nombre restant.

Que les trois nombres A, B, Γ successivement proportionnels soient les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que la somme de deux des trois nombres A, B, Γ est un nombre premier avec le nombre restant, savoir la somme de A et de B avec Γ , la somme de B et de Γ avec A , et la somme de Γ et de A avec B .

Car prenons les deux plus petits nombres $\Delta E, EZ$ qui ont la même raison avec A, B, Γ . Il est évident que ΔE se multipliant lui-même fera A , que ΔE multipliant EZ fera B , et que EZ se multipliant lui-même fera Γ (2. 8). Et puisque

80 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔE , EZ ἐλάχιστοι εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσι, καὶ συναμφοτέρος πρὸς ἐκάτερον πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ΔZ ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔE , EZ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ μὲν καὶ ὁ ΔE πρὸς τὸν EZ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔZ , ΔE ἄρα πρὸς τὸν EZ πρῶτοι

quoniam ΔE , EZ minimi sunt, primi inter se sunt. Si autem duo numeri primi inter se sunt, et uterque ad utrumque primus est; et ΔZ igitur ad utrumque ipsorum ΔE , EZ primus est. Sed quidem et ΔE ad EZ primus est; ergo ΔZ , ΔE ad EZ primi sunt. Si autem duo numeri ad

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.
Δ. . . Ε. . . Ζ.

εἰσιν³. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτοι ᾦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὡς τε ὁ ἐκ τῶν $Z\Delta$, ΔE πρὸς τὸν EZ πρῶτός ἐστιν. Ὡς τε καὶ ὁ ἐκ τῶν $Z\Delta$, ΔE πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ πρῶτός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν, ἑκ τοῦ εἰς αὐτῶν γενόμενος³ πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν⁴. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν $Z\Delta$, ΔE ὁ ἀπὸ τοῦ ΔE ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔE , EZ · ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔE μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔE , EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἐστὶν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔE ὁ A , ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔE , EZ ὁ B , ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ EZ ὁ Γ · οἱ A , B ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοι εἰσιν. Ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ

aliquem numerum primi sunt, et ex ipsis factus ad reliquum primus est; quare ipse ex $Z\Delta$, ΔZ ad EZ primus est. Quare et ipse ex $Z\Delta$, ΔE ad ipsum ex EZ primus est. Si enim duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus est. Sed ipse ex $Z\Delta$, ΔE est ipse ex ΔE cum ipso ex ΔE , EZ ; ipse igitur ex ΔE cum ipso ex ΔE , EZ ad ipsum ex EZ primus est. Et ipse quidem ex ΔE est A , ipse vero ex ΔE , EZ est B , ipse autem ex EZ est Γ ; ergo A , B compositi ad ipsum Γ primi sunt. Similiter utique demonstrabimus et

les nombres ΔE , EZ sont les plus petits, ces nombres sont premiers entr'eux (24. 7). Mais si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux (30. 7); donc ΔZ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔE , EZ . Mais ΔE est premier avec EZ ; donc ΔZ et ΔE sont premiers avec EZ . Mais si deux nombres sont premiers avec un autre, le produit de ces deux nombres est premier avec cet autre (26. 7); donc le produit de $Z\Delta$ par ΔE est premier avec EZ ; donc le produit de $Z\Delta$ par ΔE est premier avec le carré de EZ . Car si deux nombres sont premiers entr'eux, le carré de l'un d'eux est premier avec l'autre (27. 7). Mais le produit de $Z\Delta$ par ΔE égale le carré de ΔE avec le produit de ΔE par EZ (5. 2); donc le carré de ΔE avec le produit de ΔE par EZ est un nombre premier avec le carré de EZ . Mais le carré de ΔE est A , le produit de ΔE par EZ est B , et le carré de EZ est Γ ; donc la somme de A et de B est un nombre premier avec Γ . Nous démontrerons de la même manière que la somme des

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 81

οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν ἄς τε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ τῶ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσιν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἄπαξ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsos Β, Γ ad Α primos esse. Dico et ipsos Α, Γ ad Β primos esse. Quoniam enim ΔΖ ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est; quare et ipse ex ΔΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed ipsi ex ΔΖ æquales sunt ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ; et ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso semel ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt; et rursus dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Atque est quidem ipse ex ΔΕ ipse Α, ipse autem ex ΔΕ, ΕΖ ipse Β, ipse vero ex ΕΖ ipse Γ; ergo Α, Γ compositi ad ipsum Β primi sunt. Quod oportebat ostendere.

nombres Β, Γ est un nombre premier avec Α. Je dis aussi que la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Car puisque ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ (30. 7), le carré de ΔΖ sera un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (26 et 27. 7). Mais la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est égale au carré de ΔΖ (4. 2); donc la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec une fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ. Mais le carré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le carré de ΕΖ est Γ; donc la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Ce qu'il fallait démontrer.

82 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ΄.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς ἄλλον τινά.

$A, 5. \quad B, 8. \quad \Gamma-----$

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως¹ ὁ B πρὸς τὸν Γ . Οἱ δὲ A, B πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ² μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας³ ἰσάνεις, ὅ, τε ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν B , ὡς ἠγούμενος ἠγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ A ἄρα τοὺς A, B μετρεῖ, πρῶτους ἄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἀποποιή· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri primi inter se sunt, non erit ut primus ad secundum ita secundus ad alium aliquem.

Duo enim numeri A, B primi inter se sint; dico non esse ut A ad B ita B ad alium aliquem.

Si enim possibile, sit ut A ad B ita B ad Γ . Sed A, B primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri aequaliter metiuntur ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur A ipsum B , ut antecedens autecedentem. Metitur autem et se ipsum; ergo A ipsos A, B metitur, primos existentes inter se, quod absurdum; non igitur erit ut A ad B ita B ad Γ . Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le second est à un autre nombre.

Que les deux nombres A, B soient premiers entr'eux; je dis que A n'est point à B comme B est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que A soit à B comme B est à Γ . Mais A et B sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (25. 7); et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc A mesure B , comme un antécédent mesure un antécédent. Mais A se mesure lui-même; donc A mesure A et B , qui sont premiers entr'eux; ce qui est absurde; donc A ne sera pas à B comme B est à Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

PROPOSITIO XVII.

Εάν ὧσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὧσι· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ ἕσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἐστώσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sunt; non erit ut primus ad secundum ita ultimus ad alium aliquem.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ; extremi autem eorum ipsi Α, Δ primi inter se sint; dico non esse ut Α ad Β ita Δ ad alium aliquem.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27. Ε-----

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ² μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας³ ἰσάνεις, ὅ, τε ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ

Si enim possibile, sit ut Α ad Β ita Δ ad Ε; alterne igitur ut Α ad Δ ita Β ad Ε. Sed Α, Δ primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur

PROPOSITION XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le dernier est à un autre nombre.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, et que leurs extrêmes Α, Δ soient premiers entr'eux; je dis que Α n'est pas à Β comme Δ est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que Α soit à Β comme Δ est à Ε; par permutation Α sera à Δ comme Β est à Ε (13. 7). Mais les nombres Α, Δ sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (25. 7), et les nombres qui sont les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Β.

84 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ὁ Α τὸν Β. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β
οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ με-
τρεῖ, ὡς τε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν
ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ
δὲ ὁ Β τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Ἀλλ' ὁ

A ipsum B. Atque est ut A ad B ita B ad Γ;
et B igitur ipsum Γ metitur, quare et A ipsum
Γ metitur. Et quoniam est ut B ad Γ ita Γ
ad Δ, metitur autem B ipsum Γ; metitur igitur
et Γ ipsum Δ. Sed A ipsum Γ metitur; quare

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E-----

Α τὸν Γ μετρεῖ· ὡς τε ὁ Α καὶ⁶ τὸν Δ μετρεῖ.
Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ με-
τρεῖ, πρώτους ἄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν
Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλοι τινα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

A et ipsum Δ metitur. Metitur autem et se
ipsum; ergo A ipsos Α, Δ metitur, primos
existentes inter se, quod est impossibile; non
igitur erit ut A ad B ita Δ ad alium aliquem.
Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυ-
νατὸν ἔστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· καὶ
δέον ἔσται ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατὸν ἔστιν αὐ-
τοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XVIII.

Duobus numeris datis considerare, an possi-
bile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

Sint dati duo numeri A, B; et oportebit con-
siderare, an possibile sit ipsis tertium propor-
tionalem invenire.

Mais A est à B comme B est à Γ; donc B mesure Γ; donc A mesure aussi Γ. Mais B est à Γ comme Γ est à Δ; donc le nombre B mesure Γ, et Γ mesure Δ. Mais A mesure Γ; donc A mesure Δ. Mais il se mesure lui-même; donc A mesure les nombres A, Δ, qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc A n'est pas à B comme Δ est à un autre nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVIII.

Deux nombres étant donnés, chercher s'il est possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel.

Soient donnés les deux nombres A, B; il faut chercher s'il est possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel.

Οἱ δὴ A, B ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Καὶ εἰ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέ-
δεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνά-
λογον προσευρεῖν.

Itaque A, B vel primi inter se sunt, vel non. Et si primi inter se sunt, demonstratum est impossibile esse ipsis tertium proportionalem invenire.

$A, 4.$ $B, 7.$

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω. Ὁ A δὴ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον κατὰ τὸν Δ . ὁ A ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν.

Sed et non sint A, B primi inter se, et B se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat. Ipse A igitur ipsum Γ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum per Δ ; ergo A ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit. Sed quidem et B se ip-

$A, 4.$ $B, 6.$ $\Delta, 9.$ $\Gamma, 56.$

Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ B . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ . τοῖς A, B ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον³ προσεύρεται, ὁ Δ .

sum multiplicans ipsum Γ fecit; ipse igitur ex A, B æqualis est ipsi ex B ; est igitur ut A ad B ita B ad Δ ; ergo ipsis A, B tertius numerus proportionalis Δ inventus est.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖται ὁ A τὸν Γ . λέγω ὅτι τοῖς A, B ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ .

Sed et non metiatur A ipsum Γ ; dico ipsis A, B impossibile esse tertium proportionalem invenire numerum. Si enim possibile,

Les nombres A, B sont premiers entr'eux, ou ils ne le sont pas. S'ils sont premiers entr'eux, il est démontré qu'il n'est pas possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel (16. 9).

Que les nombres A, B ne soient pas premiers entr'eux, et que B se multipliant lui-même fasse Γ . Le nombre A mesurera Γ ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure par Δ ; le nombre A multipliant Δ fera Γ . Mais B se multipliant lui-même fait Γ ; donc le produit de A par Δ est égal au carré de B ; donc A est à B comme B est à Δ (20. 7). On a donc trouvé un troisième nombre Δ proportionnel aux nombres A, B .

Mais que A ne mesure pas Γ ; je dis qu'il est impossible de trouver un troisième nombre proportionnel aux nombres A, B . Car si cela est possible, que Δ soit le

ὁ ἄρα ἐκ τῶν A , Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B , ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ B ἐστὶν ὁ Γ . ὁ ἄρα ἐκ τῶν A , Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ . ὡς τε ὁ A τὸν Δ πολλαπλασιάζουσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ A ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ

inveniatur ipse Δ ; ipse igitur ex A , Δ æqualis est ipsi ex B , ipse autem ex B est ipse Γ ; ipse igitur ex A , Δ æqualis est ipsi Γ ; quare A ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit; ergo A

A , 6. B , 4. Δ ----- Γ , 16.

τὸν Δ . Ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυατὸν ἐστὶ τοῖς A , B τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ A τὸν Γ μὴ μετρῇ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum Γ metitur per Δ . At vero supponitur et non metiri, quod absurdum; non igitur possibile est ipsis A , B tertium proportionalem invenire numerum, quando A ipsum Γ non metitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

PROPOSITIO XIX.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε¹ δυνατὸν ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Tribus numeris datis considerare, quando possibile sit ipsis quartum proportionalem invenire.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ A , B , Γ , καὶ δεῖον ἔστω ἐπισκέψασθαι, πότε² δυνατὸν ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Sint dati tres numeri A , B , Γ , et oporteat considerare, quando possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

nombre trouvé; le produit de A par Δ sera égal au carré de B (20. 7); mais le carré de B est Γ ; donc le produit de A par Δ est égal à Γ ; donc A multipliant Δ fait Γ ; donc A mesure Γ par Δ . Mais on a supposé qu'il ne le mesure pas, ce qui est absurde; il est donc impossible de trouver un nombre troisième proportionnel aux nombres A , B , lorsque A ne mesure pas Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Trois nombres étant donnés, chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

Soient donnés les trois nombres A , B , Γ ; il faut chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 87

Ἡ οὐκ εἰσὶν ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἢ οὐ τε ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, οὐ τε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ καὶ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν³.

Vel non sunt deinceps proportionales, et extremi eorum primi inter se sunt; vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum primi non sunt primi inter se; vel non deinceps sunt proportionales, neque extremi eorum primi inter se sunt; vel et deinceps sunt proportionales, et extremi eorum primi inter se sunt.

A, 4. B, 6. Γ, 9.

Εἰ μὲν οὖν οἱ A, B, Γ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν.

Si quidem igitur A, B, Γ deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi A, Γ primi inter se sunt, demonstratum est impossibile ipsis quartum proportionalem invenire numerum.

A, 4. B, 6. Γ, 5. Δ----- E-----

Μὴ ἔστωσαν δὲ οἱ A, B, Γ ἐξῆς ἀνάλογον, τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρῶτων πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Non sint et A, B, Γ deinceps proportionales, extremis rursus existentibus primis inter se; dico et ita impossibile esse ipsis quartum proportionalem invenire.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ἡ Δ, ὥς τε εἶναι ὡς τὸν A πρὸς τὸν B οὕτως τὸν Γ πρὸς τὸν Δ,

Si enim possibile, inveniatur ipse Δ, et sit ut A ad B ita Γ ad Δ, et fiat ut

On les nombres A, B, Γ ne sont pas successivement proportionnels, et leurs extrêmes sont premiers entr'eux; ou ils sont successivement proportionnels, et leurs extrêmes ne sont pas premiers entr'eux; ou ils ne sont pas successivement proportionnels, et leurs extrêmes ne sont pas premiers entr'eux; ou ils sont successivement proportionnels, et leurs extrêmes sont premiers entr'eux.

Si les nombres A, B, Γ sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes A, Γ sont premiers entr'eux, on a démontré qu'il est impossible de leur trouver un quatrième nombre proportionnel (17. 9).

Que les nombres A, B, Γ ne soient pas successivement proportionnels, leurs extrêmes étant premiers entr'eux; je dis qu'alors il est impossible de leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

Car si cela est possible, que ce soit Δ; le nombre A sera à B comme Γ est

88 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ γεγονέντω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως⁵ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως⁶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως⁷ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· διίσου ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως⁸ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Γ πρῶτοι, οἱ

B ad Γ ita Δ ad Ε. Et quoniam est ut quidem A ad B ita Γ ad Δ, ut autem B ad Γ ita Δ ad Ε; ex æquo igitur ut A ad Γ ita Γ ad Ε. Sed Α, Γ primi, primi autem et minimi,

Α, 4. Β, 6. Γ, 5. Δ----- Ε-----

δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ὅ, τε ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ, ὡς ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ ἄρα τοὺς Α, Γ μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὑπερέστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοῖς Α, Β, Γ δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν⁹.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ Α, Γ μὴ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρ-

mini vero metiuntur ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Α ipsum Γ, ut consequens consequentem; metitur autem et se ipsum; ipse igitur ipsos Α, Γ metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile. Non igitur ipsis Α, Β, Γ possibile est quartum proportionalem invenire.

At vero rursus sint Α, Β, Γ deinceps proportionales, ipsi autem Α, Γ non sint primi inter se; dico possibile esse ipsis quartum proportio-

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Ε, 27. Δ, 216.

τον ἀνάλογον προσευρεῖν¹⁰. ὁ γὰρ Β¹¹ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω· ὁ Α ἄρα¹² τὸν Δ ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖτω αὐτὸν¹³ πρότερον

lem invenire. Ipse enim Β ipsum Γ multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Α ipsum Δ vel metitur, vel non metitur. Metiatur eum primum per Ε.

à Δ, et faisons en sorte que Β soit à Γ comme Δ est à Ε. Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et que Β est à Γ comme Δ est à Ε; par égalité Α sera à Γ comme Γ est à Ε (14. 7). Mais les nombres Α, Γ sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (25. 7), et les plus petits mesurent ceux qui ont la même raison, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc Α mesure Γ, comme un antécédent mesure un antécédent; mais Α se mesure lui-même; donc Α mesure les nombres Α, Γ, qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible. Il n'est donc pas possible de trouver un quatrième nombre proportionnel aux nombres Α, Β, Γ.

Que les nombres Α, Β, Γ soient successivement proportionnels, et que les nombres Α, Γ ne soient pas premiers entr'eux; je dis qu'il est possible de leur trouver un quatrième nombre proportionnel. Car que Β multipliant Γ fasse Δ; le nombre Α mesurera Δ, ou ne le mesurera pas. Qu'il le mesure par Ε; le nombre Α

κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Β, Γ· ἀνάλογον ἄρα¹⁴ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως¹⁵ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς¹⁶ Α, Β, Γ ἄρα τέταρτος ἀναλόγον εἶς προσεύρηται ὁ Ε¹⁷.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖται ὁ Α τὸν Δ· λέγω ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Β, Γ. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Β, Γ ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ε ἄρα ἴσος ἐστὶ τῶ Δ· ὁ Α ἄρα

$$A, 20. \quad B, 50. \quad \Gamma, 45. \quad E----- \quad \Delta, 1550.$$

τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. Ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν¹⁸, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρῇ.

Ἀλλὰ δὴ οἱ Α, Β, Γ μίτε ἐξῆς ἕστωσαν ἀνάλογον, μίτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ergo A ipsum E multiplicans ipsum Δ fecit. At vero et B ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex A, E æqualis est ipsi ex B, Γ; proportionaliter igitur est ut A ad B ita Γ ad E; ergo ipsis A, B, Γ quartus proportionalis unus E inventus est.

At vero non metiatur A ipsum Δ; dico impossibile esse ipsis A, B, Γ quantum proportionalem invenire numerum. Si enim possibile, inveniatur ipse E; ipse igitur ex A, E æqualis est ipsi ex B, Γ. Sed ipse ex B, Γ est ipse Δ; ergo et ipse ex A, E æqualis est ipsi Δ; ergo A ipsum

E multiplicans ipsum Δ fecit; ergo A ipsum Δ metitur per unitates quæ in E; quare metitur A ipsum Δ. Sed et non metitur, quod absurdum; non igitur possibile est ipsis A, B, Γ quantum proportionalem invenire numerum, quando A ipsum Δ non metitur.

Sed et A, B, Γ non deinceps sicut proportionales, neque extremi primi inter se.

multipliant E fera Δ. Mais B multipliant Γ fait Δ; donc le produit de A par E sera égal au produit de B par Γ; donc A est à B comme Γ est à E (19. 7); on a donc trouvé un quatrième nombre E proportionnel aux nombres A, B, Γ.

Que A ne mesure pas Δ; je dis qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre proportionnel aux nombres A, B, Γ. Car si cela est possible, soit trouvé E; le produit de A par E sera égal au produit de B par Γ (19. 7). Mais le produit de B par Γ est Δ; donc le produit de A par E est égal à Δ; donc A multipliant E fera Δ; donc A mesure Δ par E; donc A mesure Δ. Mais il ne le mesure pas, ce qui est absurde; il n'est donc pas possible de trouver un quatrième nombre proportionnel aux nombres A, B, Γ, lorsque A ne mesure pas Δ.

Mais que les nombres A, B, Γ ne soient pas successivement proportionnels, et que les extrêmes ne soient pas premiers entr'eux.

Καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. Et B ipsum Γ multiplicans ipsum Δ faciat.
 Ομοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ Α Similiter etiam demonstrabitur, si A quidem

A, 5.	B, 4.	Γ, 9.	E, 12.	Δ, 56.
A, 4.	B, 5.	Γ, 14.	E-----	Δ, 70.

τὸν Δ, δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς ἀνάλογον προσεμετῆται ipsum Δ, possibile esse ipsis
 ρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον¹⁹. Ὅπερ εἶδει proportionalem invenire; si autem non metitur,
 δεῖξαι. impossibile. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ πάντες τοῦ Primi numeri plures sunt omni propositā
 προτεθέντος πλήθους πρῶτων ἀριθμῶν. multitudine primorum numerorum.
 Ἐστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοί, εἰ Sint propositi primi numeri A, B, Γ; dico
 Α, Β, Γ λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ quam ipsi A, B, Γ plures esse primos numeros.
 πρῶτοι ἀριθμοί.

A, 2.	B, 5.	Γ, 5.
E	30.	Δ Z

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος Sumatur enim ipse ab ipsis A, B, Γ minimus
 μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκεισθῶ τῷ mensuratus, et sit ΔΕ, et apponatur ipsi ΔΕ uni-
 ΔΕ μονὰς ἢ ΔΖ· ὁ δὲ ΕΖ ἥτοι πρῶτός ἐστιν, tas ΔΖ; ipse igitur ΕΖ vel primus est, vel non.

Que B multiplient Γ fasse Δ. On démontrera de la même manière que si A mesure Δ, il est possible de leur trouver un quatrième nombre proportionnel; et que si A ne mesure pas Δ, cela est impossible. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute la quantité proposée des nombres premiers.

Soient A, B, Γ les nombres premiers que l'on aura proposés; je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ.

Soit pris le plus petit nombre qui est mesuré par les nombres A, B, Γ (58. 7); et que ce nombre soit ΔΕ; ajoutons l'unité ΔΖ à ΔΕ; le nombre ΕΖ sera un nombre

ἢ οὐ. Ἐστω πρότερον πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, EZ πλείους τῶν A, B, Γ .

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ EZ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ H · λέγω ὅτι ὁ H οὐδεὶς τῶν A, B, Γ ἴστί· ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ δυατὸν, ἔστω¹. Οἱ δὲ A, B, Γ τὸν ΔE μετροῦσι· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔE

Sit primum primus; inventi igitur sunt primi numeri A, B, Γ, EZ plures quam ipsi A, B, Γ .

At vero non sit EZ primus; a primo igitur aliquo numero mensuratur. Mensuretur a primo H ; dico H cum nullo ipsorum A, B, Γ esse eundem. Si enim possibile, sit. Sed A, B, Γ ipsum ΔE metiuntur; et H igitur ipsum ΔE

$$\begin{array}{r} A, 5. \qquad B, 5. \qquad \Gamma, 7. \\ B \qquad \qquad 105. \qquad \Delta Z \\ \hline H, 55. \end{array}$$

μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EZ · καὶ λοιπὴν ἄρα² τὴν ΔZ μονάδα μετρήσει ὁ H ἀριθμὸς ὧν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ H ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἔστιν ὁ αὐτός. Ὁ αὐτὸς δὲ καὶ³ ὑπόκειται πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν A, B, Γ , οἱ A, B, Γ, H . Ὅπερ ἔδει δείξαι.

metietur. Metitur autem et ipsum EZ ; et reliquam igitur ipsam ΔZ unitatem metietur ipse H numerus existens, quod absurdum; non igitur H cum uno ipsorum A, B, Γ est idem. Sed ipse et supponitur primus; inventi igitur sunt primi numeri plures A, B, Γ, H propositâ multitudine ipsorum A, B, Γ . Quod oportebat ostendere.

premier, ou il ne le sera pas. Qu'il soit d'abord un nombre premier; on aura trouvé les nombres premiers A, B, Γ, EZ qui sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ .

Mais que EZ ne soit pas un nombre premier; ce nombre sera mesuré par quelque nombre premier (55. 7). Qu'il soit mesuré par le nombre premier H ; je dis que H n'est aucun des nombres A, B, Γ . Qu'il soit un de ces nombres, si cela est possible. Puisque les nombres A, B, Γ mesurent ΔE , le nombre H mesurera ΔE . Mais H mesure EZ ; donc H , qui est un nombre, mesurera l'unité restante ΔZ , ce qui est absurde; donc H n'est aucun des nombres A, B, Γ . Mais on a supposé qu'il est un nombre premier; les nombres premiers A, B, Γ, H , que l'on a trouvés, sont donc en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'α.

Εὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοῦν συντεθῶσιν, ὁ ἕλος ἄρτιός ἐστι.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοῦν, αἱ AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω ὅτι ἕλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

A B Γ . . Δ Ε

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἡμισυ· ὥστε καὶ ἕλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἡμισυ. Ἀρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ. Ὅτι δὲ δεῖ δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Εὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ἢ, ἕλος ἄρτιος ἐσται.

PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcunque componuntur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunque AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ par est, habet partem dimidiam; quare et totus ΑΕ habet partem dimidiam. Par autem numerus est qui bifariam dividitur; par igitur est ΑΕ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcunque componuntur, multitudo autem ipsorum par est, totus par erit.

PROPOSITION XXI.

Si l'on ajoute tant de nombres pairs que l'on voudra, leur somme sera un nombre pair.

Ajoutons tant de nombres pairs AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ qu'on voudra; je dis que leur somme ΑΕ est un nombre pair.

Puisque chacun des nombres AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ est un nombre pair, chacun de ces nombres peut être partagé en deux parties égales (déf. 6. 7); donc leur somme ΑΕ peut être partagée en deux parties égales. Mais un nombre pair est celui qui peut être partagé en deux parties égales; le nombre ΑΕ est donc un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est paire, leur somme sera paire.

Συγκείμεσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅσοιδη-
ποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.
λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Componantur enim impares numeri quot-
cunque pares multitudine ipsi AB, ΒΓ, ΓΔ,
ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

A . . . B Γ Δ E

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ
περιττός ἐστιν, ἀφαιρέσεισθε μονάδας ἀφ' ἐκάσ-
του, ἕκαστος ἄρα τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται.
ὅστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται.
Ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ
ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. Ὁπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB,
ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ impar est, detractâ unitate ab uno-
quoque, unusquisque igitur reliquorum par erit;
quare et compositus ex ipsis par erit. Est autem
et multitudo unitatum par; et totus igitur ΑΕ
par est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιῶν συντεθῶσι, τὸ
δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἦ· καὶ ὅλος περισσὸς
ἔσται.

Si impares numeri quotcunque componuntur,
multitudo autem ipsorum impar est; et totus im-
par erit.

Συγκείμεσαν γὰρ ὅποσοιῶν περισσοὶ ἀριθ-
μοὶ, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ AB, ΒΓ,
ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

Componantur enim quotcunque impares nu-
meri, quorum multitudo impar sit, ipsi AB, ΒΓ,
ΓΔ; dico et totum ΑΔ imparem esse.

Ajoutons tant de nombres impairs AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ que l'on voudra, leur quantité étant paire; je dis que leur somme ΑΕ est paire.

Car puisque chacun des nombres AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ est impair, si l'on retranche une unité de chacun d'eux, chacun des nombres restants sera pair; leur somme sera donc un nombre pair (21. 9). Mais la quantité des unités est paire; donc la somme ΑΕ est paire. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est impaire, leur somme sera impaire.

Ajoutons tant de nombres impairs AB, ΒΓ, ΓΔ que l'on voudra, leur quantité étant impaire; je dis que leur somme sera impaire.

94 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἢ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος·

Auferatur ab ipso ΓΔ unitas ΔΕ; reliquus igitur ΓΕ par est. Est autem et ΓΑ par; et totus

A B Γ Ε Δ

καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἐστὶν ἢ μονὰς ἢ ΔΕ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

igitur ΑΕ par est. Atque est unitas ΔΕ; impar igitur est ΑΔ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Εάν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ¹ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Si a pari numero par auferatur, reliquus par erit.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἀφηρήσθω ἄρτιος² ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Α pari enim ipso ΑΒ auferatur par ΒΓ; dico reliquum ΓΑ parum esse.

A Γ B

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἡμισυ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἡμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἡμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ³. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim ΑΒ par est, habet partem dimidiam. Propter eadem utique et ΒΓ habet partem dimidiam; quare et reliquus ΓΑ habet partem dimidiam; par igitur est ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

Retranchons de ΓΔ l'unité ΔΕ; le reste ΓΕ sera un nombre pair (déf. 7. 7). Mais ΓΑ est un nombre pair (22. 9); donc la somme ΑΕ est un nombre pair (21. 9). Mais ΔΕ est une unité; donc ΑΔ est un nombre impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre pair, le reste sera pair.

Que du nombre pair ΑΒ soit retranché le nombre pair ΒΓ; je dis que le reste ΓΑ est pair.

Car puisque ΑΒ est un nombre pair, ce nombre a une moitié. Par la même raison, ΒΓ a aussi une moitié; donc le reste ΓΑ a aussi une moitié; donc ΑΓ est un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

PROPOSITIO XXV.

Εάν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῆ, ὁ¹ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ² λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσὸς ἔσται.

Si a pari numero impar aufertur, reliquus impar erit.

A pari enim ipso AB impar auferatur BG; dico reliquum GA imparem esse.

Α Γ. Δ. . . . Β

Αφηρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστι μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσὸς ἔσται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Auferatur ab ipso BG unitas GD; ergo DB par est. Est autem et AB par; et reliquus igitur AD par est. Atque est unitas GD; ergo GA impar est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

PROPOSITIO XXVI.

Εάν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῆ, ὁ¹ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Si ab impari numero impar aufertur, reliquus par erit.

Ab impari enim ipso AB impar auferatur BG; dico reliquum GA parem esse.

PROPOSITION XXV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre impair, le reste sera impair.

Que du nombre pair AB soit retranché le nombre impair BG; je dis que le reste GA est impair.

Car que l'unité GD soit retranchée de BG, le reste DB sera pair (déf. 7. 7). Mais AB est pair; donc le reste AD est pair (24. 9). Mais GD est l'unité; donc GA est impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre impair, le reste sera pair.

Que de AB impair soit retranché BG impair; je dis que le reste GA est pair.

96 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ AB περισσοῦς ἐστίν, ἀφηρήσθω μονὰς ἢ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Διὰ Quoniam enim AB impar est, auferatur unitas ΒΔ; reliquus igitur ΑΔ par est. Per eadem

A Γ Δ. Β

τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. ὥστε καὶ utique et ΓΔ par est; quare et reliquus ΓΑ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. par est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

PROPOSITIO XXVI.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρῆθῇ, ὁ λοιπὸς περισσοῦς ἐστίν.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ AB ἄρτιος ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσοῦς ἐστίν.

Ab impari enim ipso AB par auferatur ΒΓ; dico reliquum ΓΑ imparem esse.

A. Δ. . . . Γ. . . . Β

Ἀφηρήσθω γάρ² μονὰς ἢ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ μονὰς ἢ ΔΑ³· περισσοῦς ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Auferatur enim unitas ΑΔ; ergo ΔΒ par est. Est autem et ΒΓ par; et reliquus igitur ΓΔ par est. Est autem et unitas ΔΑ; impar igitur est ΓΑ. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est impair, retranchons-en l'unité ΒΔ, le reste ΑΔ sera pair. Par la même raison ΓΔ sera pair; donc le reste ΓΑ sera pair (24. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre pair, le reste sera impair.
 Que de AB impair soit retranché ΒΓ pair; je dis que le reste ΓΑ est impair.
 Car soit retranchée l'unité ΑΔ; le nombre ΔΒ sera pair. Mais ΒΓ est pair; donc le reste ΓΔ est pair (24. 9). Mais ΔΑ est une unité; donc ΓΑ est impair (déf. 7. 7).
 Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

PROPOSITIO XXVIII.

Εάν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιά-
σας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

Περὶσσοὺς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πο-
πλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ
ἄρτιός ἐστιν.

Si impar numerus parem multiplicans facit
aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem B multiplicans
ipsum Γ faciat; dico Γ parem esse.

A B
Γ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ
πεποιήκει· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων
τῶ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῶ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ὁ Β
ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἄρτίων. Ἐάν δὲ
ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοῦν' συνιτεθῶσιν, ὁ ἕλε-
ς ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Ὅπερ εἶδει
δείξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum
Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqua-
libus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est B
par; ergo Γ componitur ex paribus. Si autem
pares numeri quotcunque componuntur, totus
par est; par igitur est Γ. Quod oportebat os-
tendere.

PROPOSITION XXVIII.

Si un nombre impair multipliant un nombre pair fait un nombre, le produit sera pair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre pair B fasse Γ; je dis que Γ est pair.

Car puisque A multipliant B a fait Γ, le nombre Γ est composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités dans A. Mais B est pair; donc Γ est composé de nombres pairs. Mais la somme de tant nombres pairs que l'on voudra est un nombre pair (2. 9); donc Γ est un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

PROPOSITIO XXIX.

Εάν περισσός ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῆ τρια, ὁ γινόμενος περισσός ἴσται.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans facit aliquem, factus impar erit.

Περисσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν.

Impar enim numerus A imparem B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ imparem esse.

A B
Γ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ἴσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ἐκότερος τῶν Α, Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqualibus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est uterque ipsorum A, B impar; ergo Γ componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar est; quare Γ impar est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIX.

Si un nombre impair multipliant un nombre impair fait un nombre, le produit sera impair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre impair B fasse Γ; je dis que Γ est impair.

Car puisque A multipliant B fait Γ, le nombre Γ est composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités en A. Mais les nombres A, B sont impairs; donc Γ est composé de nombres impairs, dont la quantité est un nombre impair; donc Γ est un nombre impair (25. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

PROPOSITIO XXX.

Εάν περισσὸς ἀριθμὸς ἀρτίον ἀριθμὸν μετρήῃ, καὶ τὸν ἥμισυ αὐτοῦ μετρήσει.

Περὶσσοὺς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀρτίον τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ τὸν ἥμισυ αὐτοῦ μετρήσει.

Si impar numerus parem numerum metitur, et dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem B metiatur; dico et dimidium ejus metiri.

A B
Γ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσὸς. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκειν· ὁ ἄρα Β' σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα περισσὸς ἐστίν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπὸκειται γὰρ ἀρτίος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσὸς ἐστίν· ἀρτίος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις, διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυ αὐτοῦ μετρήσει. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim A ipsum B metitur, metiatur ipsum per Γ; dico Γ non esse imparē. Si enim possibile, sit. Et quoniam A ipsum B metitur per Γ; ergo A ipsum Γ multiplicans ipsum B fecit; ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar est; ergo B impar est, quod absurdum, supponitur enim par; non igitur Γ impar est; impar igitur est Γ; quare A ipsum B metitur pariter, ob id utique et dimidium ejus metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera sa moitié.

Que le nombre impair A mesure le nombre pair B; je dis qu'il mesurera sa moitié.

Car puisque A mesure B, qu'il le mesure par γ ; je dis que γ n'est pas un nombre impair. Qu'il le soit, si cela est possible. Puisque A mesure B par γ , le nombre A multipliant γ fera B; donc B est composé de nombres impairs dont la quantité est un nombre impair; donc B est impair; ce qui est absurde, puisqu'il est supposé pair; donc γ n'est pas impair; donc γ est pair; donc A mesure B par un nombre pair; il mesurera sa donc moitié. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

PROPOSITIO XXXI.

Εάν περισσὸς ἀριθμὸς πρὸς τῆς ἀριθμὸν πρῶτος ἦ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus est, et ad duplum ipsius primus erit.

Περὶσσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ ὁ Α πρὸς τῆς ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλασίου³ ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α³ πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔστιν.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B primus sit, ipsius autem B duplus sit Γ; dico A ad Γ primum esse.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Α, Γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἔστιν ὁ Α περισσὸς· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὦν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὁ Γ ἄρτιος· καὶ τὴν ἡμισὺν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει ὁ Δ'. Τοῦ δὲ Γ ἡμισύς ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἔστιν· οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim non sunt A, Γ primi, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit Δ. Et est A impar; impar igitur et Δ. Et quoniam Δ impar existens ipsum Γ metitur, atque est Γ par; et dimidium igitur ipsius Γ metietur ipse Δ. Ipsius autem Γ dimidium est ipse Β; ergo Δ ipsum Β metitur. Metitur autem et ipsum Α; ergo Δ ipsos Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur Α ad Γ primus non est; ergo Α, Γ primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXI.

Si un nombre impair est premier avec un nombre, il sera premier avec son double.

Que le nombre impair A soit premier avec un nombre B, et que Γ soit double de B; je dis que A est premier avec Γ.

Car si les nombres A, Γ ne sont pas premiers, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Mais A est impair; donc Δ est impair. Et puisque Δ, qui est impair, mesure Γ, et que Γ est pair, le nombre Δ mesurera la moitié de Γ (30. 9). Mais B est la moitié de Γ; donc Δ mesure B. Mais il mesure A; donc Δ mesure les nombres A, B, qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; donc A ne peut point ne pas être premier avec Γ; donc les nombres A, Γ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λϛ'.

PROPOSITIO XXXII.

Τῶν ἀπὸ δυνάδου¹ διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Ἀπὸ γὰρ δυνάδου² τῆς *A* δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοῖδηποτιῶν ἀριθμοὶ, οἱ *B*, *Γ*, *Δ*. λέγω ὅτι οἱ *B*, *Γ*, *Δ* ἀρτιάκις ἄρτιοὶ εἰσι μόνον.

E, 1. *A*, 2. *B*, 4. *Γ*, 8. *Δ*, 16.

Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν *B*, *Γ*, *Δ* ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυνάδου³ ἐστὶ διπλασιασθείς. λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. Ἐκείσθω γὰρ μονάς ἢ *E*⁴. Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοῖων ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ *A* πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν *A*, *B*, *Γ*, *Δ* ὁ *Δ* ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πῶρεξ τῶν *A*, *B*, *Γ*. Καὶ ἐστὶν ἕκαστος τῶν *A*, *B*, *Γ* ἀρτιός· ὁ *Δ* ἄρα ἀρτιάκις ἀρτιός ἐστι μόνον. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι⁵ ἑκάτερος τῶν *A*, *B*, *Γ* ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

A binario duplatorum numerorum unusquisque pariter par est tantum.

A binario enim *A* duplentur quotcumque numeri *B*, *Γ*, *Δ*; dico *B*, *Γ*, *Δ* pariter pares esse tantum.

At vero unumquemque ipsorum *B*, *Γ*, *Δ* pariter parem esse, manifestum est; a binario enim est duplatus. Dico et tantum. Exponatur enim unitas *E*. Quoniam igitur ab unitate quotcumque numeri deinceps proportionales sunt, et post unitatem ipse *A* primus est, maximus ipsorum *A*, *B*, *Γ*, *Δ* ipse *Δ* a nullo alio mensurabitur, nisi ab ipsis *A*, *B*, *Γ*. Atque est unusquisque ipsorum *A*, *B*, *Γ* par; ergo *Δ* pariter par est tantum. Similiter utique demonstrabimus unumquemque ipsorum *A*, *B*, *Γ* pariter parem esse tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXII.

Chacun des nombres doubles, à partir du binaire, est pairement pair seulement. Qu'à partir du binaire *A*, soient tant de nombres doubles qu'on voudra *B*, *Γ*, *Δ*; je dis que les nombres *B*, *Γ*, *Δ* sont pairement pairs seulement.

Il est évident que chacun des nombres *B*, *Γ*, *Δ* est pairement pair (déf. 8. 7); car chacun est double à partir du binaire. Je dis qu'il l'est seulement. Car soit l'unité *E*. Puisqu'à partir de l'unité, on aura autant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que *A* est le premier après l'unité, le plus grand des nombres *A*, *B*, *Γ*, *Δ*, qui est *Δ*, ne sera mesuré par aucun nombre, si ce n'est par *A*, *B*, *Γ* (13. 9). Mais chacun des nombres *A*, *B*, *Γ* est pair; donc *Δ* est pairement pair seulement. Nous démontrerons semblablement que chacun des nombres *A*, *B*, *Γ* est pairement pair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Εάν ἀριθμὸς τὸν ἡμισὺν ἔχη περισσὸν, ἀρτιάκις περισσὸς ἐστὶ μόνον.

Ἀριθμὸς γάρ ὁ A τὸν ἡμισὺν ἔχεται περισσόν· λέγω ὅτι ὁ A ἀρτιάκις περισσὸς ἐστὶ μόνον.

A.

Ὅτι μὲν εὖν ἀρτιάκις περισσὸς ἐστὶ, φανερόν· ἔ γάρ ἡμισὺς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. Εἰ γὰρ ἔσται ὁ A καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἡμισὺς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ὢν, ὅπερ ἐστὶν ἀπίστον· ὁ A ἄρα ἀρτιάκις περισσὸς ἐστὶ μόνον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XXXIII.

Si numerus dimidium habet imparem, pariter impar est tantum.

Numerus enim A dimidium habeat imparem; dico A pariter imparem esse tantum.

At vero pariter imparem esse, manifestum est; dimidium enim ipsius impar existens metitur ipsum pariter. Dico utique et tantum. Si enim esset A et pariter par, mensuraretur a pari per parem numerum; quare et dimidium ipsius mensurabitur a pari numero, impar existens, quod est absurdum; ergo A pariter impar est tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impaire, ce nombre est parement impair seulement.

Que la moitié du nombre A soit impaire; je dis que A est parement impair seulement.

Il est évident qu'il est parement impair (déf. 9. 7); car sa moitié, qui est impaire, le mesure par un nombre pair. Je dis qu'il l'est seulement. Car si A était aussi parement pair, un nombre pair le mesurerait par un nombre pair (déf. 8. 7); donc sa moitié qui est impaire, serait mesurée par un nombre pair; ce qui est absurde; donc A est parement impair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

PROPOSITIO XXXIV.

Εάν ἄρτιος¹ ἀριθμὸς μίτε τῶν ἀπὸ δυάδος² διπλασιαζομένων ἢ, μίτε τὸν ἡμισὺν ἔχη περισσόν· ἀρτιάκιςτε ἀρτίος ἐστὶ, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Αριθμὸς γάρ ὁ Α μίτε τῶν ἀπὸ δυάδος³ διπλασιαζομένων ἔστω, μίτε τὸν ἡμισὺν ἔχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκιςτε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

A

Οτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἡμισὺν οὐκ ἔχει περισσόν. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστίν⁴. Εάν γάρ τὸν Α τέμνωμεν⁵ δίχα, καὶ τὸν ἡμισὺν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦμεν⁶, κατατήσομεν εἰς τινα ἀριθμὸν⁷ περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ οὐ, κατατήσομεν εἰς δυάδα⁸, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος⁹ διπλασιοζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ὥστε ὁ Α¹⁰ ἀρτιάκις περισσός ἐστίν. Εδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκιςτε ἀρτίος ἐστὶ, καὶ ἀρτιάκις περισσός. Οπιρ ἔδει δείξαι.

Si par numerus neque est a binario unus ex duplatis, neque dimidium habet imparem; et pariter par est, et pariter impar.

Numerus enim A neque sit a binario unus ex duplatis, neque dimidium habeat imparem; dico A pariter esse parem, et pariter imparem.

At vero pariter A esse parem, manifestum est; dimidium enim non habet imparem. Dico utique et pariter imparem esse. Si enim ipsum A secamus bifariam, et dimidium ipsius bifariam, et hoc semper facimus, incidemus in aliquem numerum imparem, qui metietur ipsum A per parem numerum. Si enim non, incidemus in binarium, et erit A a binario unus ex duplatis, quod non supponitur; quare A pariter impar est. Ostensum est autem et pariter parem; ergo A et pariter par est, et pariter impar. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIV.

Si un nombre, à partir du binaire, n'est pas un de ceux qui sont doubles, et si sa moitié n'est point impaire, il est parement pair et parement impair.

Que le nombre A, à partir du binaire, ne soit pas un de ceux qui sont doubles, et que sa moitié ne soit point impaire; je dis que A est parement pair et parement impair.

Or, il est évident que A est parement pair (déf. 8. 7), puisque sa moitié n'est pas impaire. Je dis de plus que A est parement impair; car si nous partageons A en deux parties égales, et sa moitié en deux parties égales, et si nous faisons toujours la même chose, nous arriverons à quelque nombre impair qui mesurera A par un nombre pair. Car si cela n'est point, nous arriverons au nombre binaire, et A sera, à partir du binaire, un des nombres qui sont doubles, ce qui n'est pas supposé; donc A est parement impair. Mais on a démontré qu'il est parement pair; donc A est parement pair et parement impair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35.

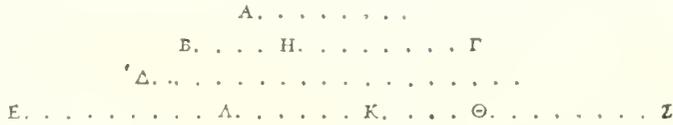
PROPOSITIO XXXV.

Ἴασι ὄσιν ἰσοειδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογοι, ἀφαιρέθῃσι δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἰσχατοῦ ἴσοι τῷ πρώτῳ ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπερβολὴ πρὸς τὸν πρώτον, οὕτως ἡ τοῦ ἰσχατοῦ ὑπερβολὴ πρὸς τοὺς προῖαυτοῦ² πάντας.

Ἐστωσαν ἰσοειδηποτοῦν³ ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογοι εἰ A, BΓ, Δ, EZ, ἀρχόμενοι ὑπὸ ἡλαχίστου τοῦ A, καὶ ἀφαιρέσθω ἀπὸ τοῦ BΓ καὶ τοῦ EZ τῷ A ἴσοι, ἐκάτεροι τῶν ΗΓ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ὁ BH πρὸς τὸν A οὕτως ὁ LΘ πρὸς τοὺς A, BΓ, Δ.

Si sunt quotcumque numeri deinceps proportionales, auferuntur autem et a secundo et ab ultimo æquales primo; erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsam antecedentes.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A, BΓ, Δ, EZ, incipientes a minimo A, et auferatur a BΓ et ab EZ ipsi A æqualis, uterque ipsorum ΗΓ, ΖΘ; dico esse ut BH ad A ita EΘ ad A, BΓ, Δ.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν BΓ ἴσος ὁ ZK, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ZΛ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ZK τῷ BΓ ἴσος ἔστιν, ὡν ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος ἔστι· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘK λοιπῷ τῷ ΗB ἔστιν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ EZ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν BΓ καὶ ὁ BΓ πρὸς τὸν A,

Ponatur enim ipsi quidem BΓ æqualis ZK, ipsi autem Δ æqualis ZΛ. Et quoniam ZK ipsi BΓ æqualis est, quorum ΖΘ ipsi ΗΓ æqualis est; reliquus igitur ΘK reliquo ΗB est æqualis. Et quoniam est ut EZ ad Δ ita Δ ad BΓ et BΓ

PROPOSITION XXXV.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui.

Soient tant de nombres qu'on voudra A, BΓ, Δ, EZ successivement proportionnels, à commencer du plus petit A, et retranchons de BΓ et de EZ les nombres ΗΓ, ΖΘ égaux chacun à A; je dis que BH est à A comme EΘ est à la somme des nombres A, BΓ, Δ.

Faisons ZK égal à BΓ, et ZΛ égal à Δ. Puisque ZK est égal à BΓ, et que ΖΘ est égal à ΗΓ, le reste ΘK est égal au reste ΗB. Et puisque EZ est à Δ comme Δ est à BΓ

ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ $Z\Lambda$, ὁ δὲ $B\Gamma$ τῷ ZK , ὁ δὲ A τῷ $Z\Theta$. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ EZ πρὸς τὸν ΛZ οὕτως ὁ ΛZ πρὸς τὸν ZK , καὶ ὁ KZ πρὸς τὸν $Z\Theta$. διελόντι, ὡς ὁ EA πρὸς τὸν ΛZ οὕτως ὁ ΛK πρὸς τὸν ZK , καὶ ὁ $K\Theta$ πρὸς τὸν $Z\Theta$. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἐπομένων οὕτως ἀπαιτεῖς εἰ ἡγούμενοι πρὸς ἀπαντας τοὺς ἐπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $K\Theta$ πρὸς τὸν $Z\Theta$ οὕτως εἰ EA , ΛK , $K\Theta$ πρὸς τοὺς ΛZ , KZ , ΘZ . ἴσος δὲ ὁ μὲν $K\Theta$ τῷ BH , ὁ δὲ $Z\Theta$ τῷ A , εἰ δὲ ΛZ , KZ , $Z\Theta$ τοῖς Δ , $B\Gamma$, A . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ BH πρὸς τὸν A οὕτως ὁ $E\Theta$ πρὸς τοὺς Δ , $B\Gamma$, A . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεραχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεραχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad A , æqualis autem Δ ipsi $Z\Lambda$, ipse et $B\Gamma$ ipsi ZK , ipse et A ipsi $Z\Theta$; est igitur ut EZ ad ΛZ ita ΛZ ad ZK , et KZ ad $Z\Theta$; dividendo, ut EA ad ΛZ ita ΛK ad ZK , et $K\Theta$ ad $Z\Theta$; est igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut $K\Theta$ ad $Z\Theta$ ita EA , ΛK , $K\Theta$ ad ΛZ , KZ , ΘZ . Æqualis autem $K\Theta$ ipsi quidem BH , ipse vero $Z\Theta$ ipsi A , et ΛZ , KZ , ΘZ ipsis Δ , $B\Gamma$, A ; est igitur ut BH ad A ita $E\Theta$ ad Δ , $B\Gamma$, A ; est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes. Quod oportebat ostendere.

et comme $B\Gamma$ est à A ; que Δ est égal à $Z\Lambda$; que $B\Gamma$ est égal à ZK , et A égal à $Z\Theta$, le nombre EZ est à $Z\Lambda$ comme ΛZ est à ZK , et comme KZ est à $Z\Theta$; donc par soustraction, EA est à ΛZ comme ΛK est à ZK , et comme $K\Theta$ est à $Z\Theta$; donc un des antécédents est à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 7); donc $K\Theta$ est à $Z\Theta$ comme la somme des nombres EA , ΛK , $K\Theta$ est à la somme des nombres ΛZ , KZ , ΘZ . Mais $K\Theta$ est égal à BH , $Z\Theta$ à A , et la somme des nombres $Z\Lambda$, KZ , ΘZ à la somme des nombres Δ , $B\Gamma$, A ; donc BH est à A comme $E\Theta$ est à la somme des nombres Δ , $B\Gamma$, A ; donc l'excès du second est au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ΄.

PROPOSITIO XXXVI.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκ-
τεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ
σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπαρ
ἐπὶ τὴν ἑσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῆ τινὰ
ὁ γειόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὅσοιδηποτοῦν¹
ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ
σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ $A, B, \Gamma,$
 Δ , καὶ τῶν σύμπαρτι ἴσος ἔστω ὁ E , καὶ ὁ E τὸν
 Δ πολλαπλασιάσας τὸν ZH ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ
 ZH τέλειός ἐστιν.

Ὅσοι γὰρ εἰσιν οἱ A, B, Γ, Δ τῶν πλῆθει το-
σοῦτοι ἀπὸ τοῦ E εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι
ἀναλογίᾳ, οἱ $E, \Theta K, \Lambda, M$ · δίσου ἄρα ἐστὶν
ὡς ὁ A πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν M^2 · ὁ
ἄρα ἐκ τῶν E, Δ ἴσος ἐστὶ τῶν ἐκ τῶν A, M . Καὶ
ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν E, Δ ὁ ZH · καὶ ὁ ἐκ τῶν A, M

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps
exponentur in duplâ analogiâ, quoad totus
compositus primus fiat, et totus in ultimum
multiplicatus faciat aliquem; factus perfec-
tus erit.

Ab unitate enim exponentur quotcunque nu-
meri A, B, Γ, Δ in duplâ analogiâ, quoad totus
compositus primus fiat, et toti æqualis sit ipse
 E , et E ipsum Δ multiplicans ipsum ZH faciat;
dico ZH perfectum esse.

Quot enim sunt A, B, Γ, Δ multitudine tot
ab ipso E sumantur ipsi $E, \Theta K, \Lambda, M$ in du-
plâ analogiâ; ex æquo igitur est ut A ad Δ
ita E ad M ; ipse igitur ex E, Δ æqualis est ipsi
ex A, M . Et est ipse ex E, Δ ipse ZH ; et

PROPOSITION XXXVI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra A, B, Γ, Δ suc-
cessivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme de-
viène un nombre premier; que E soit égal à leur somme, et que E multipliant
 Δ fasse ZH ; je dis que ZH est un nombre parfait.

Car, à partir de E , prenons une quantité de nombres, en raison double, qui
soit égale à celle des nombres A, B, Γ, Δ ; que ces nombres soient $E, \Theta K, \Lambda, M$;
par égalité, A sera à Δ comme E est à M (14. 7); donc le produit de E par Δ sera
égal au produit de A par M (19. 7). Mais le produit de E par Δ est ZH ; donc le

ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ· ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλα-
 σιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μι-
 τρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Καὶ ἔστι δυὰς
 ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἔστιν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. Εἰσὶ δὲ
 καὶ οἱ Μ, Α, ΘΚ, Ε ἕξῃς διπλάσιος ἀλλήλων·
 οἱ Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ ἄρα ἕξῃς ἀνάλογόν εἰσιν

ipse ex Α, Μ igitur est ΖΗ; ergo Α ipsum Μ
 multiplicans ipsum ΖΗ fecit; ergo Μ ipsum
 ΖΗ metitur per unitates quæ in Α. Atque est
 binarius Α; duplus igitur est ΖΗ ipsius Μ. Sunt
 autem et Μ, Α, ΘΚ, Ε deinceps dupli inter se;
 ergo Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ deinceps proportionales

1.	Α,	2.		Β,	4.		Γ,	8.	Δ,	16.
					62					
	Ε,	31.	Θ	Ν	Κ		Λ,	124.	Μ,	248.
			31	31						
	Ζ		Ξ	496					Η	
			51	465						
	Π-----			Ο-----						

ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. Αφηρήσθω δὴ ἀπὸ
 τοῦ δευτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἑσχατοῦ τοῦ ΖΗ
 τῷ πρώτῳ τῷ Ε ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘΝ, ΖΞ·
 ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ
 πρὸς τὸν πρώτον οὕτως ἡ τοῦ ἑσχατοῦ ὑπεροχὴ
 πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτῷ πάντας· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ
 ΝΚ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ, Α,
 ΘΚ, Ε. Καὶ ἔστιν ὁ ΝΚ ἴσος τῷ Ε· καὶ ὁ ΞΗ
 ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Μ, Α, ΘΚ, Ε. Ἔστι δὲ καὶ

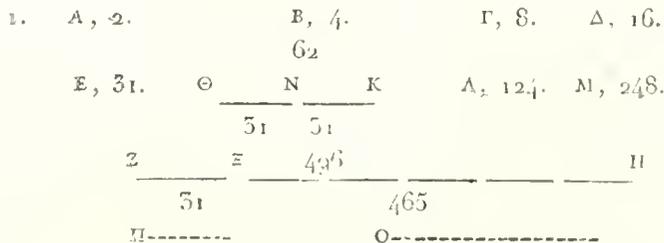
sunt in duplâ analogiâ. Auferatur igitur a se-
 cundo ΘΚ et ab ultimo ΖΗ ipsi primo Ε
 æqualis, uterque ipsorum ΘΝ, ΖΞ; est igitur ut
 secundi numeri excessus ad primum ita ex-
 cessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes;
 est igitur ut ΝΚ ad Ε ita ΞΗ ad Μ, Α, ΘΚ, Ε.
 Et est ΝΚ æqualis ipsi Ε; et ΞΗ igitur æqualis
 est ipsis Μ, Α, ΘΚ, Ε. Est autem et ΞΖ ipsi

produit de Α par Μ est aussi ΖΗ; donc Α multipliant Μ fait ΖΗ; donc Μ mesure ΖΗ
 par les unités qui sont en Α. Mais Α est le nombre binaire; donc ΖΗ est double
 de Μ; mais les nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε sont successivement doubles les uns des autres;
 donc Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ sont successivement proportionnels en raison double. Retranchons
 du second ΘΚ et du dernier ΖΗ, les nombres ΘΝ, ΖΞ égaux chacun
 au premier Ε; l'excès du second nombre sera au premier comme l'excès du
 dernier est à la somme des nombres qui sont avant lui (55. 9); donc ΝΚ est à Ε
 comme ΞΗ est à la somme des nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε. Mais ΝΚ est égal à Ε; donc
 ΞΗ est égal à la somme des nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε. Mais ΞΖ est égal à Ε, et Ε

108 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ ΞΖ τῶν Ε ἴσος, ὁ δὲ Ε τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ ἴσος ἐστὶ τοῖς τε Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπὸ αὐτῶν. Λέγω ὅτι ὁ καὶ ΖΗ ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶρεξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρεῖτω τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ἔστω ὁ αὐτός. Καὶ

E æqualis, sed E ipsis A, B, Γ, Δ et unitati; totus igitur ZH æqualis est et ipsis E, ΘΚ, Λ, Μ et ipsis A, B, Γ, Δ et unitati, et mensuratur ab ipsis. Dico et ZH a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis A, B, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ et ab unitate. Si enim possibile, metiatur aliquis O ipsum ZH, et ipse O cum nullo ipsorum A, B, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ sit idem. Et quoties O ipsum



ἑσάκις ὁ Ο τὸν ΖΗ μετρεῖ τσαυταὶ μονάδες ἔστωσαν ἐν τῶ Π· ὁ Π ἄρα τὸν Ο πολλαπλασιασάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιασάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν· ὁ Δ ἄρα ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ με-

ZH metitur tot unitates sint in Π; ergo Π ipsum O multiplicans ipsum ZH fecit. At vero quidem E ipsum Δ multiplicans ipsum ZH fecit; est igitur ut E ad Π ita O ad Δ. Et quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt A, B, Γ, Δ, sed post unitatem ipse A primus est; ergo Δ a nullo alio numero mensurabitur, nisi ab ipsis

égal à la somme des nombres A, B, Γ, Δ augmentée de l'unité; donc ZH tout entier égale la somme des nombres E, ΘΚ, Λ, Μ augmentée de la somme des nombres A, B, Γ, Δ et de l'unité, et ZH est mesuré par tous ces nombres (11. 9). Je dis que ZH n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par les nombres A, B, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ et par l'unité. Car si cela est possible, que quelque nombre O mesure ZH, et que O ne soit aucun des nombres A, B, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ. Qu'il y ait dans Π autant d'unités que O mesure de fois ZH; le nombre Π multipliant O fera ZH. Mais E multipliant Δ fait ZH; donc E est à Π comme O est à Δ (19. 7). Et puisque, à partir de l'unité, les nombres A, B, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que le premier nombre après l'unité est A, le nombre Δ n'est mesuré par aucun

πρήθῃσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὑπόκειται ἢ Ο οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἢ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ Ο τὸν Δ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ο πρὸς τὸν Δ οὕτως⁶ ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ Ε ἄρα τὸν Π μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμῶν ἢ μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν⁸· εἰ Ε, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, εἰ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς⁹ ἰσάκις, ἢ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ἢ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. Ο δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ· ὁ Π ἄρα ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ἢ αὐτός. Ἐστω τῶ Β ἢ αὐτός. Καὶ ἔσοι εἰσίν εἰ Β, Γ, Δ τῶ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε, εἰ Ε, ΘΚ, Λ. Καὶ εἰσιν εἰ Ε, ΘΚ, Λ τοῖς Β, Γ, Δ ἐν τῶ αὐτῷ λόγῳ· δίσκου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως¹⁰ ὁ Ε πρὸς τὸν Λ· ἢ ἄρα ἐκ τῶν Β, Λ ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Δ, Ε. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Π, Ο· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, Ο ἄρα ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Β, Λ· ἔστιν ἄρα

A, B, Γ; et supponitur O cum nullo ipsorum A, B, Γ idem; non igitur metietur O ipsum Δ. Sed ut O ad Δ ita E ad Π; neque E igitur ipsum Π metitur. Et est E primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo E, Π primi inter se sunt. Sed primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; et est ut E ad Π ita O ad Δ; æqualiter igitur E ipsum O metitur atque Π ipsum Δ. Sed Δ a nullo alio mensuratur, nisi ab ipsis A, B, Γ; ergo Π cum uno ipsorum A, B, Γ est idem. Sit cum ipso B idem. Et quot sunt B, Γ, Δ multitudine tot sumantur E, ΘΚ, Λ ab ipso E. Et sunt E, ΘΚ, Λ cum ipsis B, Γ, Δ in eadem ratione; ex æquo igitur est ut B ad Δ ita E ad Λ; ipse igitur ex B, Λ æqualis est ipsi ex Δ, E. Sed ipse ex Δ, E æqualis est ipsi ex Π, Ο; et ipse ex Π, Ο igitur æqualis est ipsi ex B, Λ; est igitur ut Π ad B ita Λ ad Ο.

autre nombre que par A, B, Γ (15. 9); mais on a supposé que O n'est aucun des nombres A, B, Γ; donc O ne mesure pas Δ. Mais O est à Δ comme E est à Π; donc E ne mesure pas Π (déf. 21. 7). Mais E est un nombre premier, et tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (51. 7); donc les nombres E, Π sont premiers entre eux. Mais les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), et E est à Π comme O est à Δ; donc E mesure O autant de fois que Π mesure Δ. Mais Δ n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par A, B, Γ; donc Π est un des nombres A, B, Γ. Qu'il soit B. A partir de E, prenons les nombres E, ΘΚ, Λ égaux en quantité aux nombres B, Γ, Δ. Mais les nombres E, ΘΚ, Λ sont en même raison que les nombres B, Γ, Δ; donc, par égalité, B est à Δ comme E est à Λ; donc le produit de B par Λ est égal au produit de Δ par E (19. 7). Mais le produit de Δ par B est égal au produit de Π par Ο; donc le produit de Π par Ο est égal au produit

ὡς ὁ Π πρὸς τὸν B οὕτως¹¹ ὁ Λ πρὸς τὸν O . Καὶ ἔστιν ὁ Π τῷ B ὁ αὐτός· καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ O ἔστιν ὁ αὐτός, ὅπερ ἀδύνατον, ὃ γὰρ O ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ἰσὺς αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν ZH μετρεῖ τις ἀριθμὸς, πᾶρεξ τῶν $\Lambda, E, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ καὶ τῆς μονάδος. Καὶ ἐδείχθη ὁ ZH τοῖς $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$, καὶ τῇ μονάδι ἴσος· τέλειος δὲ ἀριθμὸς ἔστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὧν τέλειος ἄρα ἔστιν ὁ ZH . Ὅπερ ἴδιον δεῖξαι.

Et est Π cum ipso B idem; et Λ igitur cum ipso O est idem, quod impossibile, etenim O supponitur cum nullo ipsorum expositorum idem; non igitur ipsam ZH metitur aliquis numerus, præter ipsos $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ et unitatem. Et ostensus est ZH ipsis $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$, et unitati æqualis; perfectus autem numerus est suis ipsius partibus æqualis existens; perfectus igitur est ZH . Quod oportebat ostendere.

de B par Λ ; donc Π est à B comme Λ est à O (19. 7). Mais Π est le même que B ; donc Λ est le même que O , ce qui est impossible; car on a supposé que O n'était aucun des nombres A, B, Γ ; donc aucun nombre ne mesure ZH , si ce ne sont les nombres $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ et l'unité. Mais on a démontré que ZH égale la somme des nombres $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ augmentée de l'unité, et un nombre parfait est celui qui est égal à ses parties (déf. 23. 7); donc ZH est un nombre parfait. Ce qu'il fallait démontrer.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

α. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα.

β. Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρήται.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eâdem mensurâ mensurantur.

2. Incommensurâbiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mensurantur.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Ou appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés sont mesurés par une même surface.

δ'. Ασύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γειέσθαι.

ε'. Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλῆθει ἀπειροὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει¹. καλεῖσθω οὖν ἡ μὲν προτεθείσα εὐθεῖα, ρητή.

ς'. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴτε μήκει καὶ δυνάμει, εἴτε δυνάμει μόνον, ρηταί.

ζ'. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλλοι καλεῖσθωσαν.

η'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετραγώνων, ρητόν.

θ'. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα, ρητά.

ι'. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα³, ἄλλα καλεῖσθω.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμεις αὐτὰ, ἄλλοι· εἰ μὲν τετραγωναί εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί· εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα⁵ αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

5. His suppositis, ostenditur propositæ recte esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocentur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

4. Et incommensurables, lorsque leurs carrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationnel le carré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles et les droites dont les carrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des carrés, lorsque ces surfaces sont des carrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des carrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des carrés.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

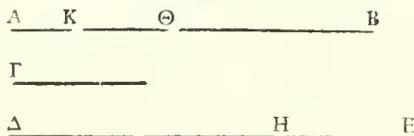
PROPOSITIO I.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρῆθῆ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνεται· λειφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἕλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἑλάσσονος μεγέθους.

Ἐστω δύο μέγεθῃ ἀνίσα τὰ AB, Γ, ὧν μείζον τὸ AB· λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρῆθῆ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνεται, λειφθήσεται τι μέγεθος ὃ ἔσται ἕλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

Sicut duæ magnitudines inæquales AB, Γ, quarum major AB; dico si ab ipsâ AB auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relictum iri quandam magnitudinem quæ erit minor magnitudine Γ.



Τὸ Γ γὰρ³ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ AB¹ μείζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔE τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ AB μείζον, καὶ διηρήσθω τὸ ΔE εἰς τὰ τῶν Γ ἴσα τὰ ΔZ, ZH, HE, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ

Etenim Γ multiplicata erit aliquando ipsâ AB minor. Multiplicetur, et sit ΔE ipsius quidem Γ multiplex, ipsâ autem AB major, et dividatur ΔE in partes ipsi Γ æquales ΔZ, ZH, HE, et auferatur ab AB quidem ipsa BΘ major quam

PROPOSITION I.

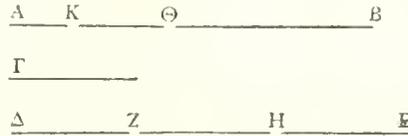
Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Soient deux grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ.

Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔE soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔE en parties ΔZ, ZH, HE égales chacune à Γ; retranchons de AB une partie BΘ

AB μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεων· ἕστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὗσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

dimidium ΒΘ, ab ΑΘ autem ipsa ΘΚ major quam dimidium, et hoc semper fiat quoad divisiones ipsius ΑΒ multitudine æquales fiant ipsius ΔΕ divisionibus; sint igitur divisiones ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ multitudine æquales ipsis ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.



Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῆρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἕλασσον τοῦ ἡμίσεως τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μείζον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῆρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μείζον ἐστίν. Ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μείζον ἐστίν. Ἐλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ· καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἕλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἕλασσονος μεγέθους τοῦ Γ. Ὅτερ εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam major est ΔΕ quam ΑΒ, et ablata est ab ΔΕ quidem ipsa ΕΗ minor quam dimidium, ab ΑΒ autem ipsa ΒΘ major quam dimidium; reliquum igitur ΗΔ reliquo ΘΑ majus est. Et quoniam major est ΗΔ quam ΘΑ, et ablatum est ab ipsa quidem ΗΔ dimidium ΗΖ, ab ΘΑ autem ipsa ΘΚ major quam dimidium; reliquum igitur ΔΖ reliquo ΑΚ majus est. Æqualis autem ΔΖ ipsi Γ; et Γ igitur quam ΑΚ major est. Minor igitur ΑΚ quam Γ; relicta est igitur ex magnitudine ΑΒ magnitudo ΑΚ minor existens expositâ minore magnitudine Γ. Quod oportebat ostendere.

plus grande que sa moitié, de ΑΘ une partie ΘΚ plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de ΑΒ soit égal au nombre des divisions de ΔΕ; que le nombre des divisions ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ soit donc égal au nombre des divisions ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

Puisque ΔΕ est plus grand que ΑΒ, et qu'on a retranché de ΔΕ une partie ΕΗ plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de ΑΒ une partie ΒΘ plus grande que sa moitié, le reste ΗΔ est plus grand que le reste ΘΑ. Et puisque ΗΔ est plus grand que ΘΑ, qu'on a retranché de ΗΔ sa moitié ΗΖ, et que de ΘΑ on a retranché ΘΚ plus grand que sa moitié, le reste ΔΖ sera plus grand que le reste ΑΚ. Mais ΔΖ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que ΑΚ; donc ΑΚ est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur ΑΒ une grandeur ΑΚ plus petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶν ἡμίση⁸ ἢ τὰ ἀφαιρούμενα⁹.

Similiter autem demonstrabitur, et si dimidia essent ablata.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

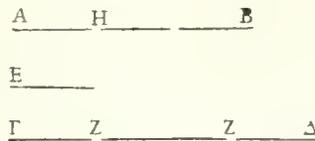
PROPOSITIO II.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρήῃ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων¹ ἀνίσων τῶν AB, ΓΔ, καὶ² ἐλάσσονος τοῦ AB, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρεῖται τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἔστι τὰ AB, ΓΔ μεγέθη.

Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; iueommensurabiles erunt magnitudines.

Duabus enim magnitudinibus existentibus inæqualibus AB, ΓΔ, et minore AB, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metiatur præcedentem; dico incommensurabiles esse AB, ΓΔ magnitudines.



Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ³ E· καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΔZ καταμετροῦν λειπέτω

Si enim sunt commensurabiles, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, si possibile, et sit E; et AB quidem ipsam ΔZ metiens relinquat

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

PROPOSITION II.

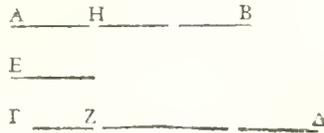
Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

Soient les deux grandeurs inégales AB, ΓΔ; que AB soit la plus petite, et que la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; je dis que les grandeurs AB, ΓΔ sont incommensurables.

Car si elles sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, s'il est possible, et que ce soit E; que AB mesurant ΔZ

ἑαυτοῦ ἔλασσαν τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ κατα-
μετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσαν τὸ ΑΗ, καὶ
τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λειφθῆ τι μέγεθος,
ὃ ἐστὶν ἔλασσαν τοῦ Ε. Γεγονέτω, καὶ λειφθῶ
τὸ ΑΗ ἔλασσαν τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ
μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα

se ipsâ minorem ΓΖ; sed ΓΖ ipsam ΒΗ metiens
relinquat se ipsâ minorem ΑΗ, et hoc semper
fiat, quoad relinquatur aliqua magnitudo, quæ
sit minor quam Ε. Fiat, et relinquatur ΑΗ minor
quam Ε. Quoniam igitur Ε ipsam ΑΒ metitur, sed
ΑΒ ipsam ΔΖ metitur; et Ε igitur ipsam ΔΖ



τὸ ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἅλιν τὸ ΓΔ· καὶ
λειπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ
μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ
καὶ ἅλιν τὸ ΑΒ· καὶ λειπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει,
τὸ μείζον τὸ ἔλασσαν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
Οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρήσει τι μέγεθος·
ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρήθη.

metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam
igitur ΓΖ metietur. Sed ΓΖ ipsam ΒΗ metitur;
et Ε igitur ipsam ΒΗ metitur. Metitur autem et
totam ΑΒ; et reliquam igitur ΑΗ metietur,
major minorem, quod est impossibile. Non
igitur magnitudines ΑΒ, ΓΔ metietur aliqua
magnitudo; incommensurabiles igitur sunt mag-
nitudines ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duabus magnitudinibus, etc.

laisse ΓΖ plus petit que lui; que ΓΖ mesurant ΒΗ laisse ΑΗ plus petit que lui; que
l'on fasse toujours la même chose jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur qui
soit plus petite que Ε. Que cela soit fait, et qu'il reste ΑΗ plus petit que Ε
(1. 10). Puisque Ε mesure ΑΒ, et que ΑΒ mesure ΔΖ, Ε mesurera ΔΖ. Mais Ε
mesure ΓΔ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΓΖ. Mais ΓΖ mesure ΒΗ; donc
Ε mesure ΒΗ. Mais Ε mesure ΑΒ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΑΗ, le plus
grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc aucune grandeur ne mesurera les
grandeurs ΑΒ, ΓΔ; donc les grandeurs ΑΒ, ΓΔ sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

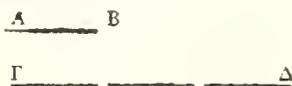
PROPOSITIO III.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δεθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Ἐστω τὰ δεθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα¹ τὰ AB, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ AB· δεῖ δὲ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Sint datae duae magnitudines commensurabiles AB, ΓΔ, quarum minor AB; oportet igitur ipsarum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.



Τὸ AB γὰρ μέγεθος ἤτοι² μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὐ. Εἰ μὲν οὖν³ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸ· τὸ AB ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστὶ, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον⁴· μείζον γὰρ τοῦ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Etenim AB magnitudo vel metitur ΓΔ vel non. Si quidem metitur, metitur autem et se ipsam; ergo AB ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est, et manifestum est etiam maximam; major enim magnitudine AB ipsam AB non metietur.

Μὴ μετρεῖται δὲ τὸ AB τὸ ΓΔ· καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος⁵ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπούμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ,

Non metiatur autem AB ipsam ΓΔ; et deducta semper minore de majore, reliqua metietur aliquando præcedentem, propterea

PROPOSITION III.

Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient AB, ΓΔ les deux grandeurs commensurables données; que AB soit la plus petite; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

Car la grandeur AB mesure ΓΔ ou ne le mesure pas. Si AB mesure ΓΔ, à cause qu'il se mesure lui-même, AB sera une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ, et il est évident qu'elle en est la plus grande, car une grandeur plus grande que AB ne mesurera pas AB.

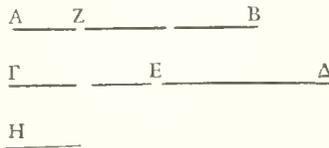
Mais que AB ne mesure pas ΓΔ. Retranchant toujours la plus petite de la plus grande, un reste mesurera enfin le reste précédent (2. 10), parce que les

διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ AB, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΕΔ⁶ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἕλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἕλασσον τὸ ΑΖ, τὸ ΑΖ δὲ⁷ τὸ ΓΕ μετρεῖτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΔΕ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τὰ

quod non sint incommensurabiles AB, ΓΔ; et AB quidem ipsam ΕΔ metiens relinquat se ipsâ minorem ΕΓ, sed ΕΓ ipsam ΖΒ metiens relinquat se ipsâ minorem ΑΖ, et ΑΖ ipsam ΓΕ metiatur.

Quoniam igitur ΑΖ ipsam ΓΕ metitur, sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΖΒ metitur. Metitur autem et se ipsam; et totam igitur ΑΒ metietur ipsa ΑΖ. Sed ΑΒ ipsam ΔΕ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΔΕ metietur. Metitur autem et ipsam ΓΕ; et totam igitur ΓΔ me-



AB, ΓΔ μετρεῖ⁸· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται τι μέγεθος μείζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ AB, ΓΔ. Ἐστω⁹ τὸ Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ¹⁰ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν¹¹ τὸ

titur; ergo ΑΖ ipsas AB, ΓΔ metitur; ergo ΑΖ ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non, erit aliqua magnitudo major ipsâ ΑΖ, quæ metietur ipsas AB, ΓΔ. Sit Η Quoniam igitur Η ipsam ΑΒ metitur, sed ΑΒ ipsam ΕΔ metitur; et Η igitur ipsam ΕΔ metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam igitur ΓΕ metietur Η. Sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et Η igitur ipsam ΖΒ metietur. Metitur autem et totam ΑΒ; et reliquam

grandeurs AB, ΓΔ ne sont pas incommensurables; que AB mesurant ΕΔ laisse ΕΓ plus petit que lui; que ΕΓ mesurant ΖΒ laisse ΑΖ plus petit que lui, et enfin que ΑΖ mesure ΓΕ.

Puisque ΑΖ mesure ΓΕ, et que ΓΕ mesure ΖΒ, ΑΖ mesurera ΖΒ. Mais ΑΖ se mesure lui-même; donc ΑΖ mesurera ΑΒ tout entier. Mais ΑΒ mesure ΔΕ; donc ΑΖ mesurera ΔΕ. Mais il mesure ΓΕ; il mesure donc ΓΔ tout entier; donc ΑΖ mesure les grandeurs AB, ΓΔ; donc ΑΖ est une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ. Je dis aussi qu'il en est la plus grande. Car si cela n'est point, il y aura une certaine grandeur plus grande que ΑΖ qui mesurera ΑΒ et ΓΔ. Qu'elle soit Η. Puisque Η mesure ΑΒ, et que ΑΒ mesure ΕΔ, Η mesurera ΕΔ. Mais Η mesure ΓΔ tout entier; donc Η mesurera le reste ΓΕ. Mais ΓΕ mesure ΖΒ; donc Η mesurera ΖΒ. Mais il mesure ΑΒ tout entier; il mesurera donc le reste ΑΖ, le plus grand le

AZ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μείζον τι μέγεθος τοῦ AZ τὰ AB, ΓΔ¹² μετρήσει· τὸ AZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν AB, ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρίσκεται τὸ AZ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρήῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

igitur AZ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur major aliqua magnitudo ipsâ AZ ipsas AB, ΓΔ metietur; ergo AZ ipsarum AB, ΓΔ maxima communis mensura est.

Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB, ΓΔ, maxima communis mensura inventa est AZ. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

PROPOSITIO IV.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

plus petit, ce qui est impossible. Donc quelque grandeur plus grande que AZ ne mesurera pas AB et ΓΔ; donc AZ est la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure AZ des deux grandeurs commensurables données AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

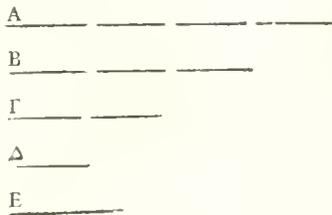
De là il est évident que si une grandeur mesure deux grandeurs, elle mesure aussi leur plus grande commune mesure.

PROPOSITION IV.

Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Ἐστω τὰ δεύετα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Sint datae tres magnitudines commensurabiles Α, Β, Γ; oportet igitur ipsarum Α, Β, Γ maximam communem mensuram invenire.



Εἰλήθω γὰρ δύοὶ τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἥτοι μετρεῖ ἢ οὐ². Μετρεῖτω πρότερον. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β· τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ³. τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β οὐ μετρεῖ⁵.

Μὴ μετρεῖτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστί

Sumatur enim duarum Α, Β maxima communis mensura, et sit Δ; itaque Δ ipsam Γ vel metitur vel non. Metiatur primum. Quoniam igitur Δ ipsam Γ metitur, metitur autem et ipsas Α, Β; ergo Δ ipsas Α, Β, Γ metitur; ergo Δ ipsarum Α, Β, Γ communis mensura est. Manifestum est etiam et maximam, major enim magnitudine Δ ipsas Α, Β non metitur.

Sed non metiatur Δ ipsam Γ. Dico primum commensurabiles esse Γ, Δ. Quoniam enim commensurabiles sunt Α, Β, Γ, metietur aliqua eas magnitudo, quæ scilicet et ipsas Α, Β metietur; quare et ipsarum Α, Β maximam communem mensuram Δ metietur. Metitur autem et Γ; quare dicta magnitudo metietur ipsas Γ, Δ;

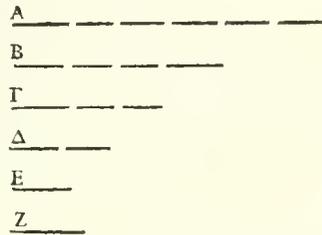
Soient Α, Β, Γ les trois grandeurs commensurables données; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ.

Prenons la plus grande commune mesure de Α et de Β (3. 10), et qu'elle soit Δ; Δ mesure Γ ou ne le mesure pas. Qu'il le mesure d'abord. Puisque Δ mesure Γ, et qu'il mesure aussi Α et Β, Δ mesure les grandeurs Α, Β, Γ; donc Δ est une commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ. Et il est évident qu'il en est la plus grande, car une grandeur plus grande que Δ ne mesure pas Α et Β.

Mais que Δ ne mesure pas Γ; je dis d'abord que les grandeurs Γ, Δ sont commensurables. Car puisque les grandeurs Α, Β, Γ sont commensurables, quelque grandeur les mesurera; mais cette même grandeur mesurera Α et Β; elle mesurera donc leur plus grande commune mesure Δ. Mais cette même grandeur mesure Γ; donc elle mesure Γ et Δ; donc Γ et Δ sont commensurables

τὰ Γ, Δ. Εἰλήφθω οὖν⁶ αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει⁷. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ⁸. τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν ἐστὶ μέτρον⁹. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε

commensurabiles igitur sunt Γ, Δ. Sumatur itaque ipsarum maxima communis mensura, et sit Ε. Quoniam igitur Ε ipsam Δ metitur, sed Δ ipsas Α, Β metitur; et Ε igitur ipsas Α, Β metitur. Metitur autem et Γ. Ergo Ε ipsas Α, Β, Γ metitur; ergo Ε ipsarum Α, Β, Γ communis est mensura. Dico et maximam. Si enim possibile, sit



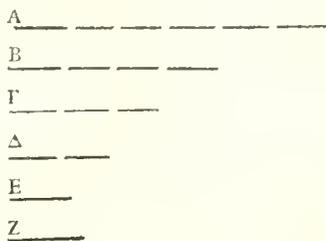
μείζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρεῖται τὰ Α, Β, Γ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα¹⁰ μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β¹¹ μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ¹², τὸ μείζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ

aliqua ipsa Ε major magnitudo Ζ, et metiatur ipsas Α, Β, Γ. Et quoniam Ζ ipsas Α, Β, Γ metitur, et ipsas Α, Β igitur metietur; et ipsarum Α, Β maximam communem mensuram metietur. Sed ipsarum Α, Β maxima communis mensura est Δ; ergo Ζ ipsam Δ metitur. Metitur autem et ipsam Γ; ergo Ζ ipsas Γ, Δ metitur; et igitur ipsarum Γ, Δ maximam communem mensuram metietur Ζ. Sed ipsarum Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ergo Ζ ipsam Ε metitur, major minorem, quod est

(déf. 1. 10). Prenons donc leur plus grande commune mesure (3. 10), et qu'elle soit Ε. Puisque Ε mesure Δ, et que Δ mesure Α et Β, Ε mesurera Α et Β. Mais il mesure Γ; donc Ε mesure les grandeurs Α, Β, Γ; donc Ε est une commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ. Je dis aussi qu'elle en est la plus grande. Car que ce soit Ζ plus grand que Ε, si cela est possible, et que Ζ mesure les grandeurs Α, Β, Γ. Puisque Ζ mesure les grandeurs Α, Β, Γ, il mesurera Α et Β; il mesurera donc la plus grande commune mesure de Α et Β (cor. 3. 10). Mais la plus grande commune mesure de Α et de Β est Δ; donc Ζ mesure Δ; mais il mesure Γ; donc Ζ mesure Γ et Δ; donc Ζ mesurera la plus grande commune mesure de Γ et de Δ. Mais la plus grande commune mesure de Γ et de Δ est Ε; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc une

ἄρα μείζον τι τοῦ Ε μεγέθους μέγεθος τὰ Α, Β, Γ μείζον¹³ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέ-

impossibile; non igitur major aliqua ipsâ Ε magnitudine magnitudo ipsas Α, Β, Γ magnitudines



γιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἐάν¹⁴ μὴ μετρήῃ τὸ Δ τὸ Γ· ἐάν δὲ μετρήῃ, αὐτὸ τὸ Δ.

metitur; ergo Ε ipsarum Α, Β, Γ maxima communis mensura est, si non metitur Δ ipsam Γ; si autem metitur, ipsa Δ.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δεθέντων¹⁵, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὔρηται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima communis mensura inventa est. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐάν μέγεθος τρία μέγεθι μετρήῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει¹⁶.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo tres magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλείονων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει¹⁷.

Similiter autem et in pluribus maxima communis mensura inveniatur, et corollarium procedet.

grandeur plus grande que la grandeur Ε ne mesurera pas les grandeurs Α, Β, Γ; done Ε sera la plus grande commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ, si Δ ne mesure pas Γ; et s'il le mesure, ce sera Δ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure de trois grandeurs commensurables données. Ce qu'il fallait faire.

C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si une grandeur mesure trois grandeurs, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

On trouvera semblablement la plus grande commune mesure d'un plus grand nombre de grandeurs, et le même corollaire s'en suivra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

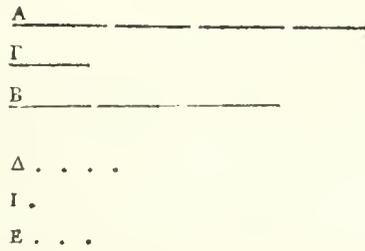
Ἐστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστί τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. Καὶ ὅσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὅσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines Α, Β; dico Α ad Β rationem habere, quam numerus ad numerum.

Quoniam enim commensurabiles sunt Α, Β, metietur aliqua ipsas magnitudo. Metiatur, et sit Γ. Et quoties Γ ipsam Α metitur tot unitates sint in Δ, quoties autem Γ ipsam Β metitur tot unitates sint in Ε.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν

Quoniam igitur Γ ipsam Α metitur per unitates quæ in Δ, metitur autem et unitas ipsum Δ per unitates quæ sunt in ipso; æqualiter igitur

PROPOSITION V.

Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

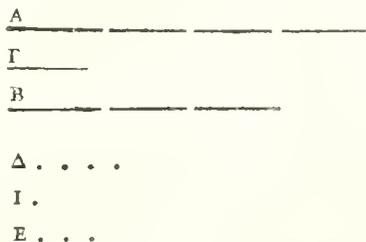
Soient les grandeurs commensurables Α, Β; je dis que Α a avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car puisque les grandeurs Α, Β sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Δ que Γ mesure de fois Α; qu'il y ait aussi autant d'unités dans Ε que Γ mesure de fois Β.

Puisque Γ mesure Α par les unités qui sont en Δ, et que l'unité mesure Δ par les unités qui sont en lui, l'unité mesure le nombre Δ autant de fois que la

Δ μετρεῖ ἀριθμὸν¹ καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας.

unitas ipsum Δ metitur numerum atque Γ magnitudo ipsam Α; est igitur ut Γ ad Α ita unitas ad Δ; convertendo igitur, ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem. Rursus, quoniam Γ ipsam Β metitur per unitates quæ in Ε, metitur autem et unitas ipsum Ε per unitates quæ in ipso; æqualiter



ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διῆσεν ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

igitur unitas ipsum Ε metitur atque Γ ipsam Β; est igitur ut Γ ad Β ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Δ numerus ad Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μέγεθῃ τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ὅν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Commensurabiles igitur magnitudines Α, Β inter se rationem habent quam Δ numerus ad numerum Ε. Quod oportebat ostendere.

grandeur Γ mesure Α; donc Γ est à Α comme l'unité est à Δ; donc, par conversion, Α est à Γ comme Δ est à l'unité. De plus, puisque Γ mesure Β par les unités qui sont en Ε, et que l'unité mesure Ε par les unités qui sont en lui, l'unité mesure Ε autant de fois que Γ mesure Β; donc Γ est à Β comme l'unité est à Ε. Mais on a démontré que Α est à Γ comme Δ est à l'unité; donc, par égalité, Α est à Β comme le nombre Δ est à Ε.

Donc les grandeurs commensurables Α, Β ont entr'elles la raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

PROPOSITIO VI.

Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχη ἐν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

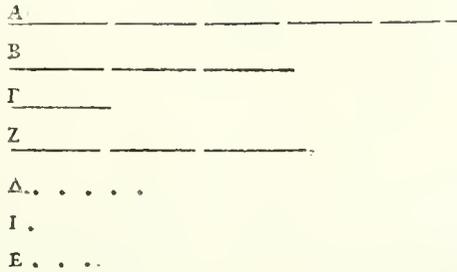
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα² λόγον ἔχέτω ἐν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω ὅτι σύμμετρα ἔστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ Α, καὶ ἐνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δέ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Δ ad numerum Ε; dico commensurabiles esse Α, Β magnitudines.

Quot enim sunt in Δ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Γ; quot autem sunt in Ε unitates, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi Γ componatur Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ἔσαι εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὁ ἄρα μέρος ἔστιν ἡ μονὰς τοῦ Δ τὸ αὐτὸ³ μέρος ἔστι καὶ τὸ Γ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α

Quoniam igitur quot sunt in Δ unitates, tot sunt et in Α magnitudines æquales ipsi Γ; quæ pars igitur est unitas ipsius Δ, eadem pars est et Γ ipsius Α; est igitur ut Γ ad Α ita

PROPOSITION. VI.

Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

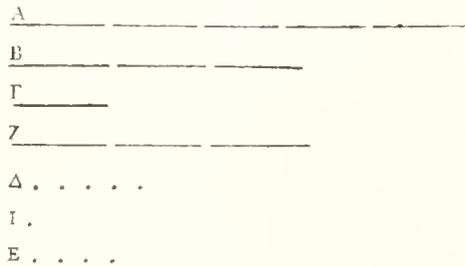
Que les deux grandeurs Α, Β aient entr'elles la même raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε; je dis que les grandeurs Α, Β sont commensurables.

Car que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Δ; que Γ soit égal à une de ces parties; et que Ζ soit composé d'autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Ε.

Puisqu'il y a dans Α autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Δ, Ε sera la même partie de Α que l'unité l'est de Δ; donc Γ est à Α comme

οὕτως ἡ μονάς πρὸς τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ἡ μονάς τὸν Δ ἀριθμὸν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ⁵ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονάς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν⁶· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες τσαυτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ ἴσα τῷ Γ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως ἡ μονάς πρὸς τὸν Ε⁸. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ

unitas ad Δ. Metitur autem unitas ipsum Δ numerum; metitur igitur et Γ ipsam Α. Et quoniam est ut Γ ad Α ita unitas ad Δ numerum; convertendo igitur ut Α ad Γ ita Δ numerus ad unitatem. Rursus, quoniam quot sunt in Ε unitates, tot sunt et in Ζ partes aequales ipsi Γ; est igitur ut Γ ad Ζ ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex aequo



οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα διῆσσυ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ἐστὶ⁹ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως καὶ τὸ Α¹⁰ πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Ἀλλὰ μετρεῖ¹¹ καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

igitur est ut Α ad Ζ ita Δ ad Ε. Sed ut Δ ad Ε ita est Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita et Α ad Ζ; ergo Α ad utramque ipsarum Β, Ζ eandem habet rationem; aequalis igitur est Β ipsi Ζ. Metitur autem Γ ipsam Ζ; metitur igitur et Β. Sed metitur et Α; ergo Γ ipsas Α, Β metitur; commensurabilis igitur est Α ipsi Β.

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

l'unité est à Δ. Mais l'unité mesure le nombre Δ; donc Γ mesure Α. Et puisque Γ est à Α comme l'unité est au nombre Δ, par conversion Α est à Γ comme le nombre Δ est à l'unité. De plus, puisqu'il y a en Ζ autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Ε, Γ sera à Ζ comme l'unité est au nombre Ε. Mais on a démontré que Α est à Γ comme Δ est à l'unité; donc par égalité Α est à Ζ comme Δ est à Ε. Mais Δ est à Ε comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Α est à Ζ; donc Α a la même raison avec Β et avec Ζ; donc Β égale Ζ (9. 5). Mais Γ mesure Ζ; donc il mesure Β. Mais Γ mesure Α; donc Γ mesure Α et Β; donc Α est commensurable avec Β (déf. 1. 10). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

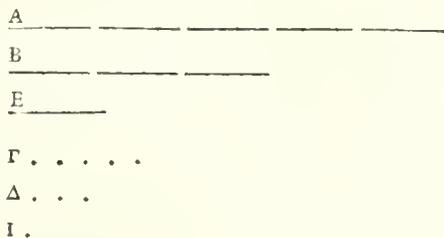
ALITER.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσὶν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ Α, καὶ ἐνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν οὕτως¹ τὸ Ε πρὸς τὸ² Α. Ἐστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Γ ad numerum Δ; dico commensurabiles esse magnitudines.

Quot enim sunt in Γ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Ε; est igitur ut unitas ad Γ numerum ita Ε ad Α. Est autem et ut Γ ad Δ ita Α ad Β; ex æquo



τὸν Δ οὕτως³ τὸ Α πρὸς τὸ Β· διίσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ οὕτως⁴ τὸ Ε πρὸς τὸ⁵ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ⁶ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπειδὴ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἐκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μετρὸν τὸ Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι⁸.

igitur est ut unitas ad Δ ita Ε ad Β. Metitur autem et unitas ipsum Δ; metitur igitur et Ε ipsam Β. Metitur autem et Ε ipsam Α, quoniam et unitas ipsum Γ; ergo Ε utramque ipsarum Α, Β metitur; ergo Α, Β commensurabiles sunt, et est ipsarum communis mensura Ε. Quod oportebat ostendere.

AUTREMENT.

Que les deux grandeurs Α et Β aient entr'elles la même raison que le nombre-Γ avec le nombre Δ; je dis que ces grandeurs sont commensurables.

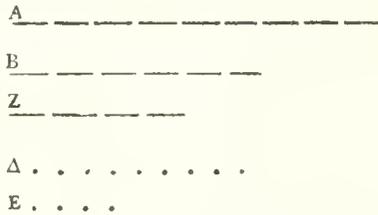
Que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Γ, et que Ε soit égal à une de ces parties; l'unité sera au nombre Γ comme Ε est à Α. Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; donc, par égalité, l'unité est à Δ comme Ε est à Β. Mais l'unité mesure Δ; donc Ε mesure Β. Mais Ε mesure Α, puisque l'unité mesure Γ; donc Ε mesure Α et Β; donc Α et Β sont commensurables, et Ε est leur commune mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰάν ᾧσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν. Εἰ δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῆ ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ

Ex hoc utique manifestum est, si sint duo numeri ut Δ, Ε, et recta ut Α, possibile esse fieri ut Δ numerus ad Ε numerum ita rectam ad rectam. Si autem et ipsarum Α, Ζ media proportionalis sumatur ut Β, erit ut Α ad Ζ ita



ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας².

quadratum ex Α ad ipsum ex Β, hoc est ut prima ad tertiam ita figura ex primâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam. Sed ut Α ad Ζ ita est Δ numerus ad Ε numerum; factum est igitur et ut Δ numerus ad Ε numerum ita figura ex rectâ Α ad ipsam ex rectâ Β.

C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si l'on a deux nombres comme Δ et Ε, et une droite comme Α, il sera possible de faire en sorte que le nombre Δ soit au nombre Ε comme la droite Α est à une autre droite. Mais si l'on prend une moyenne proportionnelle comme Β entre Α et Ζ (cor. 20. 6), Α sera à Ζ comme le carré de Α est au carré de Β; c'est-à-dire que la première sera à la troisième, comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et semblablement décrite sur la troisième (cor. 20. 6). Mais Α est à Ζ comme le nombre Δ est au nombre Ε; on a donc fait de telle manière que le nombre Δ est au nombre Ε comme la figure décrite sur la droite Α est à la figure décrite sur la droite Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

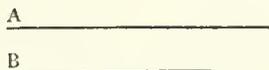
PROPOSITIO VII.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint incommensurabiles magnitudines Α, Β; dico Α ad Β rationem non habere quam numerus ad numerum.



Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα, καὶ τὰ ἕξις.

Si enim habet Α ad Β rationem quam numerus ad numerum, commensurabilis erit Α ipsi Β. Non est autem; non igitur Α ad Β rationem habet quam numerus ad numerum.

Incommensurabiles igitur, etc.

PROPOSITION VII.

Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

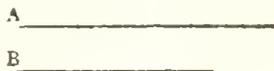
Soient les grandeurs incommensurables Α, Β; je dis que Α n'a pas avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car si Α avait avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre, Α serait commensurable avec Β (6. 10). Mais il ne l'est pas; donc Α n'a pas avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον μὴ ἔχῃ ὢν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον μὴ ἔχεται ἔν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστί τὰ Α, Β μεγέθη.



Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἔξει ὢν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν². Οὐκ ἔχει δέ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

PROPOSITIO VIII.

Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum; dico incommensurabiles esse Α, Β magnitudines.

Si enim fuerit commensurabilis Α ipsi Β, rationem habebit quam numerus ad numerum. Non habet autem; incommensurabiles igitur sunt Α, Β magnitudines.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

Que les deux grandeurs Α, Β n'ayent pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre; je dis que les grandeurs Α, Β sont incommensurables.

Car si elles étaient commensurables, Α aurait avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais il ne l'a pas; donc les grandeurs Α, Β sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει σύμμετρος· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσύμμετρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν¹ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἀλλήλα λόγον μὴ ἔχοντα ὃν² τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει συμμέτρος.

Ἐστωσαν γάρ³ αἱ *A*, *B* μήκει σύμμετροι·



λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* τετράγωνον λόγον ἔχει ὃν¹ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

A rectis longitudine commensurabilibus quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum et latera habebunt longitudine commensurabilia; sed a rectis longitudine incommensurabilibus quadrata inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

Sint enim *A*, *B* longitudine commensurabiles;

dico ex *A* quadratum ad quadratum ex *B* rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

PROPOSITION IX.

Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

Car que les droites *A*, *B* soient commensurables en longueur; je dis que le quarré de *A* a avec le quarré de *B* la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρος ἐστὶν ἢ A τῇ B μήκει· ἢ A ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. Ἐχέτω ὃν ἔ Γ πρὸς τὸν Δ . Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἢ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ^5 , ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς A πρὸς τὴν B λόγου διπλασίον ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετραγώνου· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ^6 λόγου διπλασίον ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνου, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετραγώνος πρὸς τὸν τετραγώνον ἀριθμὸν διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πῆρ ἢ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἐστὶν ἄρα καὶ⁸ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετραγώνου οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνου⁹.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετραγώνου¹⁰ οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνου¹¹· λέγω ὅτι σύμμετρος ἐστὶν ἢ A τῇ B μήκει. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine; ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat eam quam Γ ad Δ . Quoniam igitur est ut A ad B ita Γ ad Δ , sed ipsius quidem ex A ad B rationis duplicata est ratio quadrati ex A ad quadratum ex B ; similes enim figuræ in duplicatâ ratione sunt homologorum laterum; ipsius autem Γ ad Δ rationis duplicata est ratio quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ , duorum enim quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum numerum duplicatam rationem habet ejus quam latus ad latus; est igitur et ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ .

At vero sit ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ ; dico commensurabilem esse A ipsi B longitudine. Quoniam enim est ut ex A

Car puisque A est commensurable en longueur avec B , A aura avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Qu'il ait celle que Γ a avec Δ . Puisque A est à B comme Γ est à Δ ; que la raison du quarré de A au quarré de B est double de la raison de A avec B , car les figures semblables sont en raison double de leurs côtés homologues (20. 6; que la raison du quarré de Γ au quarré de Δ est double de celle de Γ à Δ , car il y a un moyen proportionnel entre deux nombres quarrés (11. 8); et que le quarré d'un nombre a avec le quarré d'un nombre une raison double de celle d'un côté à un côté, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ .

Mais que le quarré de A soit au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ ; je dis que A est commensurable en longueur avec B . Car puisque

γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B¹² οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ¹³. ἀλλὰ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B¹⁴ λόγος διπλασίων ἐστὶ¹⁵ τοῦ

quadratum ad ipsum ex B ita ex Γ quadratus ad ipsum ex Δ; sed quidem ex A quadrati ad ipsum ex B ratio duplicata est ipsius ex



τῆς A πρὸς τὴν B λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ¹⁶ τετραγώνου¹⁷ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ¹⁸ τετράγωνον¹⁹ λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ²⁰ πρὸς τὸν Δ λόγου²¹. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ Γ²² πρὸς τὸν Δ²³. ἢ A ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει²⁴.

A ad B rationis, quadrati autem ex Γ ad quadratum ex Δ ratio duplicata est ipsius Γ ad ipsum Δ rationis; est igitur et ut A ad B ita Γ ad Δ; ergo A ad B rationem habet quam numerus Γ ad numerum Δ; commensurabilis igitur est A ipsi B longitudine.

Ἀλλὰ δὴ²⁵ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ A τῇ B μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B²⁶ λόγόν οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον²⁷ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ A τῇ B μήκει²⁸. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A

At vero incommensurabilis sit A ipsi B longitudine; dico ex A quadratum ad ipsum ex B rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim habet ex A quadratum ad quadratum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. Non est autem; non

le carré de A est au carré de B comme le carré de Γ est au carré de Δ, que la raison du carré de A au carré de B est double de la raison de A à B (20. 6), et que la raison du carré de Γ au carré de Δ est double aussi de la raison de Γ à Δ (11. 8), A sera à B comme Γ est à Δ; donc A a avec B la raison que le nombre Γ a avec le nombre Δ; donc A est commensurable en longueur avec B (6. 10).

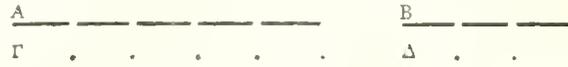
Mais que A soit incommensurable en longueur avec B; je dis que le carré de A n'a pas avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Car si le carré de A avait avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, A serait commensurable en longueur avec B. Mais

τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον²⁹ λόγον ἔχει ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Πάλιν δὴ³⁰ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον³¹ λόγον μὴ ἔχεται ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

igitur ex A quadratum ad quadratum ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus denique ex A quadratum ad quadratum ex B rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; dico



λέγω ὅτι ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ ἔσται³² σύμμετρος ἡ Α τῇ Β μήκει³³, ἔξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει, καὶ τὰ ἐξῆς.

incommensurabilem esse A ipsi B longitudine. Si enim fuerit commensurabilis A ipsi B longitudine, habebit ex A quadratum ad ipsum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Non habet autem; non igitur commensurabilis est A ipsi B longitudine.

Ergo a rectis longitudine, etc.

cela n'est point; donc le carré de A n'a pas avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

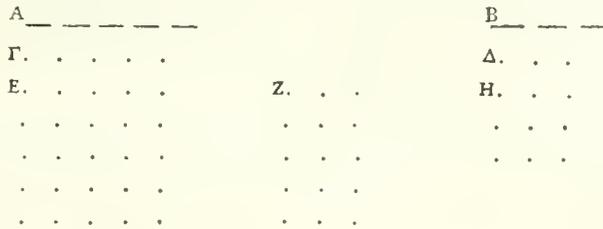
De plus, que le carré de A au carré de B n'ait pas la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; je dis que A est incommensurable en longueur avec B. Car si A était commensurable en longueur avec B, le carré de A aurait avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Mais il ne l'a pas; donc A n'est pas commensurable en longueur avec B; donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῆ Β μήκει, λόγον ἔχει ἐν ἀριθμῶς πρὸς ἀριθμῶν. Ἐχέτω ἐν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ² πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine, rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Γ ad Δ, et Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum E faciat, ipse autem Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat, et Δ se ipsum multiplicans ipsum H faciat. Quoniam itaque Γ se ipsum quidem multiplicans



πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τούτεστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως³ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ τὸν Γ² πολλαπλασιάσας τὸν Ζ

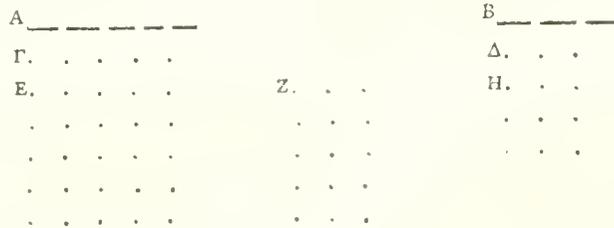
ipsum E fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad Δ, hoc est ut A ad B ita E ad Z. Sed ut A ad B ita ex A quadratum ad rectangulum sub A, B; est igitur ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita E ad Z. Rursus, quoniam Δ se ipsum multiplicans ipsum H fecit, ipse vero Δ ipsum Γ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad

AUTREMENT.

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, il a avec lui la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Que ce soit celle que Γ a avec Δ; que Γ se multipliant lui-même fasse E, que Γ multipliant Δ fasse Z, et que Δ se multipliant lui-même fasse H. Puisque Γ se multipliant lui-même fait E, et que Γ multipliant Δ fait Z, Γ est à Δ, c'est-à-dire A est à B comme E est à Z (17. 7). Mais A est à B comme le quarré de A est au rectangle sous A, B (1. 6); donc le quarré de A est au rectangle sous A, B comme E est à Z. De plus, puisque Δ se multipliant lui-même a fait H, et que Δ multipliant Γ a fait Z, Γ est à Δ,

πιτοίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· διίσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Η. Ἐστι δὲ ἐκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἔστιν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Δ, hoc est ut A ad B, ita Z ad H. Sed ut A ad B ita sub A, B rectangulum ad quadratum ex B; est igitur ut sub A, B rectangulum ad quadratum ex B ita Z ad H. Sed ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B, ita erat E ad Z; ex æquo igitur ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita erat E ad H. Est autem uterque ipsum E, H quadratus, ipse quidem enim E ex Γ est, ipse vero H ex Δ; ergo ex A quadratum ad ipsum ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum.



Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμετρος ἔστιν ἡ Α τῇ Β μήκει^δ. Ἐστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ

At vero habeat ex A quadratum ad ipsum ex B rationem quam quadratus numerus E ad quadratum numerum H; dico commensurabilem esse A ipsi B longitudine. Sit enim ipsius quidem E latus ipse Γ, ipsius autem H ipse Δ,

c'est-à-dire A est à B comme Z est à H (17. 7). Mais A est à B comme le rectangle sous A, B est au carré de B (1. 6); donc le rectangle sous A, B est au carré de B comme Z est à H. Mais le carré de A est au rectangle sous A, B comme E est à Z; donc par égalité le carré de A est au carré de B comme E est à H. Mais les nombres E, H sont des carrés, car E est le carré de Γ, et H le carré de Δ; donc le carré de A a avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

Mais que le carré de A ait avec le carré de B la raison que le nombre carré E a avec le nombre carré H; je dis que A est commensurable en longueur avec B. Car que Γ soit le côté de E, et Δ le côté de H, et que Γ multi-

τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι⁶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁸ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁹ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ¹⁰. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat; ergo E, Z, H deinceps sunt proportionales in ratione ipsius Γ ad Δ . Et quoniam ipsorum ex A, B medium proportionale est rectangulum sub A, B , ipsorum autem E, H ipse Z ; est igitur ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita E ad Z . Ut autem sub A, B rectangulum ad quadratum ex B ita Z ad H , sed ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita A ad B ; ergo A, B commensurabiles sunt, rationem enim habent quam numerus E ad numerum Z , hoc est quam Γ ad Δ ; ut enim Γ ad Δ ita E ad Z ; etenim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum E fecit, ipsum autem Δ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita E ad Z . Quod oportebat ostendere.

pliant Δ fasse Z , les nombres E, Z, H seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ (17. 7). Et puisque le rectangle sous A, B est moyen proportionnel entre les carrés de A et de B (1. 6), et que Z l'est entre E et H (11. 8), le carré de A sera au rectangle sous A, B comme E est à Z . Mais le rectangle sous A, B est au carré de B comme Z est à H , et le carré de A est au rectangle sous A, B comme A est à B ; donc A et B sont commensurables, car ils ont la raison qu'a le nombre E avec le nombre Z , c'est-à-dire la raison que Γ a avec Δ ; car Γ est à Δ comme E est à Z , puisque Γ se multipliant lui-même fait E , et que Γ multipliant Δ a fait Z ; donc Γ est à Δ comme E est à Z (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν¹ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται² ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι³ οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει⁴.

Εἴπερ γὰρ⁵ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ἕν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ἕν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶν⁶ μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ οὖν⁷ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ἕν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει εἰδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ἔντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα

COROLLARIUM.

Et manifestum ex demonstratis erit, rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ, rectas autem potentiâ commensurabiles non semper et longitudine, et rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ incommensurabiles, rectas autem potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

Quoniam enim ex commensurabilibus longitudine rectis quadrata rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, magnitudines autem rationem habentes quam numerus ad numerum commensurabiles sunt; quare longitudine commensurabiles rectæ non solum sunt longitudine commensurabiles, sed e iam potentiâ.

Rursus, quoniam igitur quæcumque quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, longitudine ostensa sunt commensurabilia, et potentiâ latera existentia commensurabilia; cum ipsorum qua-

COROLLAIRE.

D'après ce qui a été démontré, il est évident que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance; que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur; que celles qui sont incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, et que celles qui sont incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

Car puisque les carrés des droites commensurables en longueur ont la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que les grandeurs qui ont la raison qu'un nombre a avec un nombre sont commensurables, les droites commensurables en longueur sont commensurables non seulement en longueur, mais encore en puissance.

De plus, puisqu'on a démontré que les carrés qui sont entr'eux comme un nombre carré est à un nombre carré, ont leurs côtés commensurables en longueur, et que des droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés

λόγον ἔχειν ἐν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· ἴσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλ' ἀπλῶς ἐν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει⁸, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα⁹ πάντως καὶ δυνάμει, τὰ¹⁰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχειν ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ¹¹ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει¹². Ἐπεὶ δὴ γὰρ¹³ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ἐν ἀριθμὸς¹⁴ πρὸς ἀριθμὸν¹⁵, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὕσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥστε οὐχ αἱ τῶν¹⁶ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ μήκει δύνανται¹⁷ οὕσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει

drata rationem habeant quam numerus ad numerum; quæcumque igitur quadrata rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam numerus ad numerum, commensurabilia quidem erunt eadem quadrata potentiâ, non autem et longitudine; quare quadrata quidem longitudine commensurabilia omnino et potentiâ, quadrata autem potentiâ non semper et longitudine, nisi et rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico etiam rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ. Quoniam igitur rectæ potentiâ commensurabiles possunt rationem non habere quam numerus ad numerum, et idcirco potentiâ sunt commensurabiles, longitudine vero incommensurabiles; quare rectæ longitudine incommensurabiles non omnino et potentiâ, sed longitudine incommensurabiles existentes possunt potentiâ esse et commensurabiles et incommensurabiles.

Rectæ autem potentiâ incommensurabiles,

ont la raison qu'un nombre a avec un nombre, les quarrés qui n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et qui n'ont simplement que la raison qu'un nombre a avec un nombre, ont leurs côtés commensurables en puissance, mais non en longueur; donc les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, et les droites commensurables en puissance ne le sont pas toujours en longueur, à moins que leurs puissances n'ayent entre elles la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Je dis aussi que les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance; car elles peuvent n'avoir pas la raison qu'un nombre a avec un nombre, et elles sont à cause de cela commensurables en puissance et incommensurables en longueur; donc les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, mais les droites incommensurables en longueur peuvent être commensurables et incommensurables en puissance.

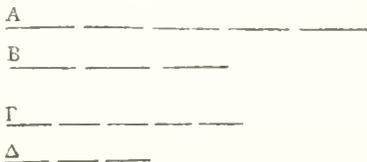
Mais les droites incommensurables en puissance sont toujours incommensu-

ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ μήκει¹⁸ σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκειται δὲ καὶ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει¹⁹.

omnino et longitudine incommensurabiles: si enim commensurabiles, erunt et potentiâ commensurabiles. Supponuntur autem et incommensurabiles, quod est absurdum; recte igitur potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἦ, τὸ δὲ πρῶτον τῶ δευτέρῳ σύμμετρον ἦ, καὶ τὸ τρίτον τῶ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ πρῶτον τῶ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὸ τρίτον τῶ τετάρτῳ¹ ἀσύμμετρον ἔσται.



Ἐστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῶ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῶ Δ σύμμετρον ἔσται².

PROPOSITIO X.

Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, ipsa Α autem ipsi Β commensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ commensurabilem fore.

rables en longueur; car si elles étaient commensurables en longueur, elles seraient commensurables en puissance. Mais on les suppose incommensurables, ce qui est absurde; donc les droites incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

PROPOSITION X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ; que Α soit à Β comme Γ est à Δ; et que Α soit commensurable avec Β; je dis que Γ sera commensurable avec Δ.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῶ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμῷ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμῷ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῶ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῶ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῶ Δ ἀσύμμετρον ἔσται³. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῶ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμῷ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμῷ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῶ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Λ Η Μ Μ Α.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

Car puisque A est commensurable avec B, A a avec B la même raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ a avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est commensurable avec Δ (6. 10.)

Mais que A soit incommensurable avec B; je dis que Γ sera incommensurable avec Δ. Car puisque A est incommensurable avec B, A n'a pas avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (7. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ n'a pas avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est incommensurable avec Δ; donc, etc.

L E M M E.

On a démontré dans les livres d'arithmétique (26. 8) que les nombres plans semblables ont entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré;

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B, ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum; commensurabilis igitur est Γ ipsi Δ.

At vero A ipsi B incommensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ incommensurabilem fore. Quoniam enim incommensurabilis est A ipsi B; ergo A ad B rationem non habet quam numerus ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ; neque Γ igitur ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum; incommensurabilis igitur est Γ ipsi Δ.

Si igitur quatuor, etc.

L E M M A.

Ostensum est in arithmetiis similes planos numeros inter se rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et si

μόν· καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. Καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes esse planos. Et manifestum est ex his, non similes planos numeros, hoc est non proportionalia habentes latera, inter se rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim haberent, similes plani essent. quod non supponitur; ergo non similes plani inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐστω ἡ προτεθείσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὲ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

PROPOSITIO XI.

Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

Sit proposita recta A; oportet igitur ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine solum, alteram autem et potentiâ.

et que si deux nombres ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ces nombres sont des plans semblables. De là il est évident que des nombres plans non semblables, c'est-à-dire des nombres plans qui n'ont pas leurs côtés proportionnels, n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Car s'ils l'avaient, ils seraient des plans semblables, ce qui n'est pas supposé; donc des plans non semblables n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

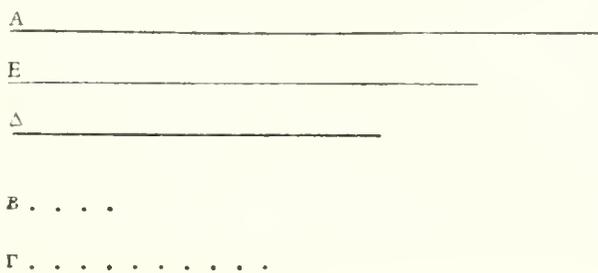
PROPOSITION XI.

Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

Soit A la droite proposée; il faut trouver deux droites incommensurables avec A, l'une en longueur seulement, et l'autre en longueur et en puissance.

Ἐκκείσθωσαν γάρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ταυτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γειροῦτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον, ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῶ ἀπὸ τῆς Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

Exponentur enim duo numeri Β, Γ, inter se rationem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est non similes plani, et fiat ut Β ad Γ ita ex Α quadratum ad quadratum ex Δ, hoc enim tradidimus; commensurable igitur ex Α quadratum ipsi ex Δ. Et quoniam Β ad Γ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non igitur ex Α quadratum ad ipsum ex Δ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommen-



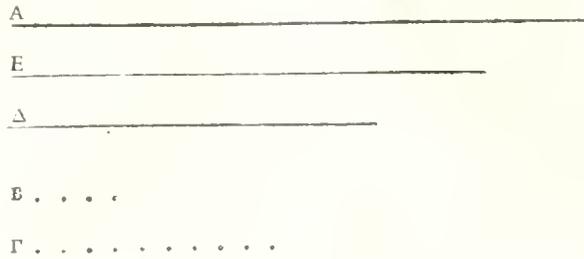
ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῆ Δ μήκει. Εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. Ἀσύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ Α τῆ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ

surabilis igitur est Α ipsi Δ longitudine. Sumatur ipsarum Α, Δ media proportionalis Ε; est igitur ut Α ad Δ ita ex Α quadratum ad ipsum ex Ε. Incommensurabilis autem est Α ipsi Δ longitudine; incommensurable igitur est

Car soient deux nombres Β, Γ qui n'ayent pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, c'est-à-dire qui soient deux plans non semblables; et faisons en sorte que Β soit à Γ comme le quarré de Α est au quarré de Δ, ce que nous avons déjà enseigné (cor. 6. 10); le quarré de Α sera commensurable avec le quarré de Δ. Et puisque Β n'a pas avec Γ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de Α n'aura pas avec le quarré de Δ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc Α est incommensurable en longueur avec Δ (9. 10). Prenons une moyenne proportionnelle Ε entre Α et Δ, Α sera à Δ comme le quarré de Α est au quarré de Ε (cor. 2. 6). Mais Α est incommensurable en longueur avec Δ; donc le quarré de Α est incommensurable avec le quarré

τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετραγώνου τῷ ἀπὸ τῆς *E* τετραγώνῳ ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *A* τῇ *E* δυνάμει.

et ex *A* quadratum ipsi ex *E* quadrato; incommensurabilis igitur est *A* ipsi *E* potentia; ergo



τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ *A* προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ , *E*· μήκει μὲν μόνον ἡ Δ , δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ E^3 . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

propositæ rectæ *A* inventæ sunt duæ rectæ incommensurabiles ipsæ Δ , *E*; longitudine quidem tantum ipsa Δ , potentia autem et longitudine scilicet ipsa *E*. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

PROPOSITIO XII.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Eidem magnitudini commensurabiles et inter se sunt commensurabiles.

Ἐκότερον γὰρ τῶν *A*, *B* τῷ Γ ἔστω σύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ *A* τῷ *B* ἐστὶ σύμμετρον.

Utraque enim ipsarum *A*, *B* ipsi Γ sit commensurabilis; dico et *A* ipsi *B* esse commensurabilem.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρον ἐστὶ τὸ *A* τῷ Γ , τὸ *A* ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει ὅν ἀριθμὸς πρὸς

Quoniam enim commensurabilis est *A* ipsi Γ , ergo *A* ad Γ rationem habet quam numerus ad

de *E* (10. 10); donc *A* est incommensurable en puissance avec *E*. On a donc trouvé pour la droite proposée *A* deux droites incommensurables Δ , *E*, savoir la droite Δ en longueur seulement, et la droite *E* en puissance et en longueur. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

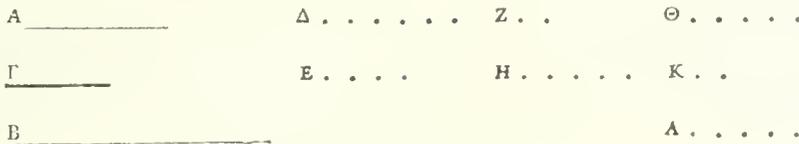
Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles.

Que chacune des grandeurs *A*, *B* soit commensurable avec Γ ; je dis que *A* est commensurable avec *B*.

Car puisque *A* est commensurable avec Γ , *A* a avec Γ la raison qu'un nombre

ἀριθμόν. Ἐχέτω ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρον ἔστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὅν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ λόγων διθέντων ὁποσσοῦν, τοῦτε ὁ Δ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἕξῃς ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις, οἱ Θ, Κ, Λ ὥστε εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸν Λ.

numerum. Habeat quam Δ ad Ε. Rursus, quoniam commensurabilis est Β ipsi Γ, ergo Γ ad Β rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Ζ ad Η. Et rationibus datis quibuscumque, et ipsâ quam habet Δ ad Ε et Ζ ad Η, sumantur numeri Θ, Κ, Λ deinceps in datis rationibus, et sit ut quidem Δ ad Ε ita Θ ad Κ, ut autem Ζ ad Η ita Κ ad Λ.



Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἐστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ διότου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει

Quoniam igitur est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, sed ut Δ ad Ε ita Θ ad Κ; est igitur et ut Α ad Γ ita Θ ad Κ. Rursus, quoniam est ut Γ ad Β ita Ζ ad Η, sed ut Ζ ad Η ita Κ ad Λ; et ut igitur Γ ad Β ita Κ ad Λ. Est autem et ut Α ad Γ ita Θ ad Κ; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Θ ad Λ; ergo Α ad Β rationem habet

a avec un nombre (5. 10.); qu'il ait celle que Δ a avec Ε. De plus, puisque Β est commensurable avec Γ, Γ a avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre. Qu'il ait celle que Ζ a avec Η. La raison que Δ a avec Ε, et celle que Ζ a avec Η étant données, prenons les nombres Θ, Κ, Λ successivement proportionnels dans les raisons données, de manière que Δ soit à Ε comme Θ est à Κ, et que Ζ soit à Η comme Κ est à Λ.

Puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que Δ est à Ε comme Θ est à Κ, Α sera à Γ comme Θ est à Κ. De plus, puisque Γ est à Β comme Ζ est à Η, et que Ζ est à Η comme Κ est à Λ, Γ est à Β comme Κ est à Λ. Mais Α est à Γ comme Θ est à Κ; donc, par égalité, Α est à Β comme Θ est à Λ (23. 5); donc Α a avec Β la raison que le

ὄν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἐξῆς.

quam numerus Θ ad numerum Λ; commensurabilis igitur est A ipsi B.

Ergo eadem, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13'.

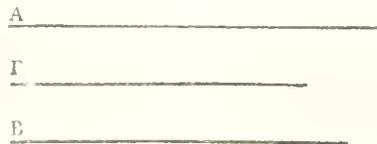
Εάν ἡ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ἡ τῷ αὐτῷ, τὸ δεῦτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἐστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστιν.

PROPOSITIO XIII.

Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

Sint enim duæ magnitudines A, B, alia autem Γ, et quidem A ipsi Γ commensurabilis sit, sed B ipsi Γ incommensurabilis; dico et A ipsi B incommensurabilem esse.



Εἰ γὰρ ἐστὶ σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρον ἔστιν. Ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

Si enim est commensurabilis A ipsi B, est autem et Γ ipsi A; et Γ igitur ipsi B commensurabilis est. Quod non supponitur.

nombre Θ a avec le nombre Λ; donc A est commensurable avec B (6. 10).
Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

Soient les deux grandeurs A, B, et une autre grandeur Γ; que A soit commensurable avec Γ, et que B soit incommensurable avec Γ; je dis que A est incommensurable avec B.

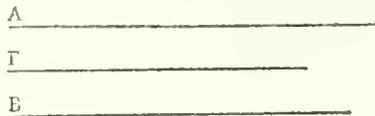
Car si A était commensurable avec B, à cause que Γ est commensurable avec A, Γ serait commensurable avec B (12. 10). Ce qui n'est pas supposé.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εάν ἡ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ἢ· καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἐστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἀλλοί τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστιν.



Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρον ἔστι· καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρον ἔστιν. Ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρον ἔστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Ἐάν ἄρα ἡ δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἕξῃς.

Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles Α, Β; altera autem ipsarum Α alii alicui Γ incommensurabilis sit; dico et reliquam Β ipsi Γ incommensurabilem esse.

Si enim est commensurabilis Β ipsi Γ, sed et Α ipsi Β commensurabilis est; et Α igitur ipsi Γ commensurabilis est. Sed et incommensurabilis, quod impossibile; non igitur commensurabilis est Β ipsi Γ; incommensurabilis igitur.

Si igitur sunt duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION XIV.

Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

Soient les deux grandeurs commensurables Α, Β, et que l'une d'elles soit incommensurable avec Γ; je dis que la grandeur restante Β sera aussi incommensurable avec Γ.

Car si Β était commensurable avec Γ, à cause que Α est commensurable avec Β, Α serait commensurable avec Γ (12. 10). Mais Α est incommensurable avec Γ, ce qui est impossible; donc Β n'est pas commensurable avec Γ; donc il lui est incommensurable. Donc, etc.

ΛΗΜΜΑ.

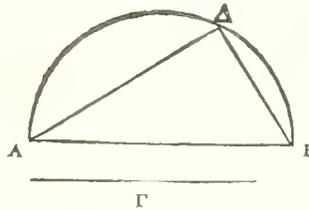
LEMMA.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὔρειν τίνι μείζον δύναται ἢ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἐστωσαν αἱ δοθείσαι δύο ἀνίσαι εὐθεῖαι, αἱ AB, Γ , ὧν μείζων ἔστω ἡ AB . δεῖ δὲ εὔρειν τίνι μείζον δύναται ἢ AB τῆς Γ .

Duabus datis rectis inæqualibus, invenire id quo plus potest major quam minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ AB, Γ , quarum major sit AB ; oportet igitur invenire id quo plus potest AB quam Γ .



Γεγράφω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον, τὸ $A\Delta B$, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσω τῇ Γ ἴση ἢ $A\Delta$, καὶ ἐπιζεύχω ἡ ΔB . Φανερόν δὲ ὅτι ὀρθή ἐστίν ἡ ὑπὸ $A\Delta B$ γωνία, καὶ ὅτι ἡ AB τῆς $A\Delta$, τουτίστι τῆς Γ , μείζον δύναται τῇ ΔB .

Ὀμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ δυναμένη αὐτὰς εὔρισκεται οὕτως.

Describatur super rectam AB semicirculus $A\Delta B$, et in eo aptetur ipsi Γ æqualis $A\Delta$, et jungatur ΔB . Evidens igitur rectum esse $A\Delta B$ angulum, et AB quam $A\Delta$, hoc est quam Γ , plus posse quadrato ex ΔB .

Similiter autem et datis rectis, quæ potest ipsas invenietur hoc modo.

L E M M A.

Deux droites inégales étant données, trouver ce dont le puissance de la plus grande surpassè la puissance de la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données; que AB soit la plus grande; il faut trouver ce dont la puissance de AB surpassè la puissance de Γ .

Décrivons sur AB le demi-cercle $A\Delta B$, adaptons dans ce demi-cercle une droite $A\Delta$ égale à Γ (I. 4), et joignons ΔB . Il est évident que l'angle $A\Delta B$ est droit (31. 5), et que la puissance de AB surpassè la puissance de $A\Delta$, c'est-à-dire de Γ , du carré de ΔB (47. 1).

On trouvera de la même manière la droite dont la puissance égale la somme des puissances de deux droites données.

Εστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι δοθεῖσαι³ αἱ ΑΔ, ΔΒ· καὶ δεόν ἐστω εὐρεῖν τὰς τὴν δυναμένην αὐτάς. Κείσθωσαν¹ γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερόν παλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένην ἐστὶν ἡ ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆ¹· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆ². Καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον δύνηται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ³· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ⁴.

Εστωσαν δὴ⁵ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ Α μὲν τῆς Β μείζον δυνάσθω τῷ

Sint duæ rectæ datæ ΑΔ, ΔΒ; et oporteat invenire rectam quæ possit ipsas. Ponantur enim, ut rectum angulum ΑΔΒ contineant, et jungatur ΑΒ; perspicuum est rursus, ipsas ΑΔ, ΔΒ rectam posse ΑΒ.

PROPOSITIO XV.

Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda, quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

. Sint igitur quatuor rectæ proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Α quidem quam Β plus possit quadrato ex Ε, sed Γ quam Δ plus

Soient ΑΔ et ΔΒ les deux droites données, il faut trouver la droite dont la puissance égale la somme des puissances de ces deux droites; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprennent un angle droit ΑΔΒ, et joignons ΑΒ; il est évident encore que la puissance de ΑΒ égale la somme des puissances des droites ΑΔ, ΔΒ (47. I).

PROPOSITION XV.

Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

Soient les quatre droites proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, de manière que Α soit à Β comme Γ est à Δ; que la puissance de Α surpasse la puissance de Β du

ἀπὸ τῆς E, ἢ δὲ Γ τῆς Δ μείζον δυνάσθω τῶ ἀπὸ τῆς Z· λέγω ὅτι εἴτε συμμετρὸς ἔστιν ἡ A τῆ^ι E, συμμετρὸς ἔστι καὶ ἡ Γ τῆ^ι Z· εἴτε ἀσύμμετρὸς ἔστιν ἡ A τῆ^ι E, ἀσύμμετρὸς ἔστι καὶ ἡ Γ τῆ^ι Z.



Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν A, B, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν Z, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῶν E, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῶν Z, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Z πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ E πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Z πρὸς τὴν Δ· ἐνάπαλιν ἄρα ἔστιν ὡς ἡ B πρὸς τὴν E οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Z. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· διίσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν E οὕτως ἡ Γ πρὸς

posit quadrato ex Z; dico et si commensurabilis sit A ipsi E, commensurabilem esse et Γ ipsi Z; et si incommensurabilis sit A ipsi E incommensurabilem esse et Γ ipsi Z.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ; est igitur et ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex Γ quadratum ad ipsum ex Δ. Sed ipsi quidem quadrato ex A æqualia sunt ex E, B quadrata, sed ex Γ quadrato æqualia sunt ex Z, Δ quadrata; sunt igitur ut ex E, B quadrata ad ipsum ex B ita ex Z, Δ quadrata ad ipsum ex Δ; dividendo igitur est ut ex E quadratum ad ipsum ex B ita ex Z quadratum ad ipsum ex Δ; est igitur et ut E ad B ita Z ad Δ; convertendo igitur est ut B ad E ita Δ ad Z. Est autem et ut A ad B ita Γ ad Δ; ex æquo igitur est ut A ad E ita Γ ad Z; et si igitur

quarré de la droite E, et que la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré de la droite Z; je dis que si A est commensurable avec E, Γ le sera avec Z; et que si A est incommensurable avec E, Γ le sera aussi avec Z.

Car puisque A est à B comme Γ est à Δ, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ (cor. 1. 22. 6). Mais la somme des quarrés de E et de B est égale au quarré de A, et la somme des quarrés de Z et de Δ est égale au quarré de Γ; donc la somme des quarrés de E et de B est au quarré de B comme la somme des quarrés de Z et de Δ est au quarré de Δ; donc, par soustraction, le quarré de E est au quarré de B comme le quarré de Z est au quarré de Δ (17. 5); donc E est à B comme Z est à Δ (22. 6); donc, par conversion, B est à E comme Δ est à Z (4. 5). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc, par égalité, A est à E comme Γ est à Z (22. 5); donc si A est commensurable avec

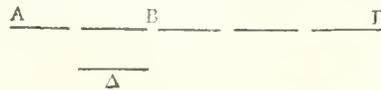
τὴν Ζ· εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἢ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἢ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἢ Γ τῇ Ζ.
 Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

commensurabilis est A ipsi E, commensurabilis est et Γ ipsi Z; et si incommensurabilis est A ipsi E, incommensurabilis est et Γ ipsi Z.
 Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῆ, καὶ τὸ ὅλον ἐκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν σύμμετρον ἢ, καὶ τα ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἐκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ σύμμετρον'.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ

Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles ΑΒ, ΒΓ; dico et totam ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ esse commensurabilem.

Quoniam enim commensurabiles sunt ΑΕ, ΒΓ, metietur aliqua eas magnitudo. Metietur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metitur, et totam ΑΓ metietur. Metitur autem et ΑΒ, ΒΓ;

E, la droite Γ le sera avec Z; et si A est incommensurable avec E, la droite Γ le sera avec Z (10. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme sera commensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est commensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront commensurables.

Ajoutons les deux grandeurs commensurables ΑΒ, ΒΓ; je dis que la grandeur entière ΑΓ est commensurable avec chacune des grandeurs ΑΒ, ΒΓ.

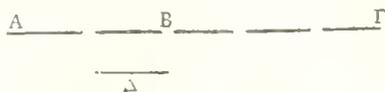
Car, puisque les grandeurs ΑΒ, ΒΓ sont commensurables, quelque grandeur les mesurera (déf. 1. 10). Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΑΒ et ΒΓ, il mesurera leur somme ΑΓ. Mais il mesure ΑΒ et ΒΓ,

AB, ΒΓ· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, ΒΓ, ΑΓ² μετρεῖ·
σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν AB, ΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἐνὶ τῶν AB, ΒΓ ἔστω σύμμετρον, ἔστω δὴ τῷ AB³. λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ AB, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

ergo Δ ipsas AB, ΒΓ, ΑΓ metitur; commensurabilis igitur est ΑΓ utrique ipsarum AB, ΒΓ.

At vero ΑΓ uni ipsarum AB, ΒΓ sit commensurabilis, sit igitur ipsi AB; dico et AB, ΒΓ commensurabiles esse.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, AB, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, ΒΓ.

Ἐάν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐάν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῆ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται. Καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Quoniam enim commensurabiles sunt ΑΓ, AB, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, AB metitur, et reliquam igitur ΒΓ metietur. Metitur autem et AB; ergo Δ ipsas AB, ΒΓ metitur; commensurabiles igitur sunt AB, ΒΓ.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

donc Δ mesure les grandeurs AB, ΒΓ, ΑΓ; donc ΑΓ est commensurable avec AB et ΒΓ.

Mais que ΑΓ soit commensurable avec une des grandeurs AB, ΒΓ; qu'il le soit avec AB; je dis que les grandeurs AB, ΒΓ sont commensurables.

Car puisque les grandeurs ΑΓ, AB sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΓΑ et AB, il mesurera le reste ΒΓ. Mais il mesure AB; donc Δ mesure AB et ΒΓ; donc les grandeurs AB, ΒΓ sont commensurables. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

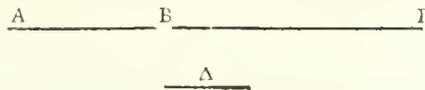
Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables, leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront incommensurables.

Συγκρίσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ AB, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ἕλον τὸ ΑΓ ἐκατέρω τῶν AB, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστιν.

Εἰ γὰρ μή ἔστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρήτω, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, τὸ Δ³. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἔστι τὰ ΑΒ, ΒΓ· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον³. οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἔστι τὰ ΓΑ, ΑΒ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρα ἔστι· τὸ ΑΓ ἄρα ἐκατέρω τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστιν.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles AB, ΒΓ; dico et totam ΑΓ utrique ipsarum AB, ΒΓ incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles ΓΑ, ΑΒ, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit, si possibile, ipsa Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, ΑΒ metitur, et reliquam igitur ΒΓ metietur. Metitur autem et ipsam ΑΒ; ergo Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metitur; commensurabiles igitur sunt ΑΒ, ΒΓ. Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile; non igitur ipsas ΓΑ, ΑΒ metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt ΓΑ, ΑΒ. Similiter utique demonstrabimus et ΑΓ, ΓΒ incommensurabiles esse; ergo ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabilis est.



Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἐνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ πρῶτον τῷ ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἔστιν. Εἰ γὰρ ἔσται⁵ σύμ-

At vero ΑΓ uni ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabilis sit, et primum ipsi ΑΒ; dico et ΑΒ, ΒΓ incommensurabiles esse. Si enim essent

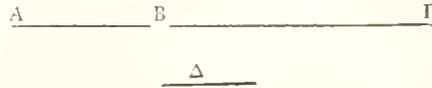
Soient ajoutées les deux grandeurs incommensurables AB, ΒΓ; je dis que leur somme ΑΓ est incommensurable avec chacune des grandeurs AB, ΒΓ.

Car si les grandeurs ΓΑ, ΑΒ ne sont pas incommensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ, si cela est possible. Puisque Δ mesure ΓΑ et ΑΒ, il mesurera le reste ΒΓ. Mais il mesure ΑΒ; donc Δ mesure ΑΒ et ΒΓ; donc ΑΒ et ΒΓ sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas ΓΑ et ΑΒ; donc ΓΑ et ΑΒ sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que ΑΓ et ΓΒ sont incommensurables; donc ΑΓ est incommensurable avec chacune des grandeurs ΑΒ, ΒΓ.

Mais que ΑΓ soit incommensurable avec une des grandeurs ΑΒ, ΒΓ, et qu'il le soit d'abord avec ΑΒ; je dis que ΑΒ et ΒΓ sont incommensurables. Car s'ils étaient

μετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ AB, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, AB μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, AB. Ὑπέκειτο δὲ

commensurables, metiretur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas AB, ΒΓ metitur, et totam igitur ΑΓ metietur. Metitur autem et ipsam AB; ergo Δ ipsas ΓΑ, AB metitur; commensurabiles igitur sunt ΓΑ, AB.



καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ AB, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ AB, ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται.

Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile; non igitur ip-sas AB, ΒΓ metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt AB, ΒΓ. Similiter utique demonstrabimus si ΑΓ ipsi ΓΒ incommensurabilis sit, etiam AB, ΒΓ incommensurabiles fore.

Ἐάν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

Λ Η Μ Μ Α.

L E M M A.

Ἐάν παρά τινα εὐθείαν παραβληθῆ παραλληλόγραμμον, ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Si ad aliquam rectam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ; applicatum æquale est rectangulo sub factis ex applicatione partibus rectæ.

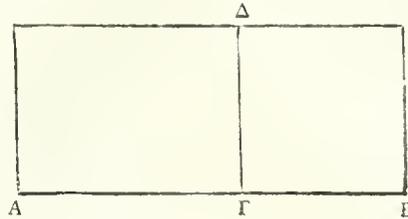
commensurables, quelque grandeur les mesurerait. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure AB et ΒΓ, il mesurera leur somme ΑΓ. Mais il mesure AB; donc Δ mesure ΓΑ et AB; donc ΓΑ et AB sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas AB et ΒΓ; donc AB et ΒΓ sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que si ΑΓ est incommensurable avec ΓΒ, les grandeurs AB, ΒΓ seront aussi incommensurables. Donc, etc.

L E M M E.

Si à une droite quelconque on applique un parallélogramme qui soit défailant d'une figure carrée, le parallélogramme appliqué est égal au rectangle compris sous les parties de la droite faites par l'application.

Παρά γάρ τινα εὐθείαν τὴν AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ AD^1 , ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τῷ ΔB · λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AD τῷ ὑπὸ τῶν AG, GB .

Ad aliquam enim rectam AB applicetur parallelogrammum AD , deficiens figurâ quadratâ ΔB ; dico æquale esse parallelogrammum AD rectangulo sub AG, GB .



Καὶ ἐστὶν αὐτίθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετραγώνον ἐστὶ τὸ ΔB , ἴση ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ GB , καὶ ἐστὶ τὸ AD τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB , τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB^2 .

Atque est hoc evidens; quoniam enim quadratum est ΔB , æqualis est $\Delta\Gamma$ ipsi GB , atque est rectangulum AD sub AG, GB , hoc est sub AG, GB .

Ἐὰν ἄρα παρὰ τινα εὐθείαν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur ad aliquam rectam, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

PROPOSITIO XVIII.

Ἐὰν ὧσι δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον¹ παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει²· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζων δυνήσεται

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus

Appliquons à une droite quelconque AB un parallélogramme AD qui soit défailant d'une figure quarrée ΔB ; je dis que le parallélogramme AD est égal au rectangle compris sous AG, GB .

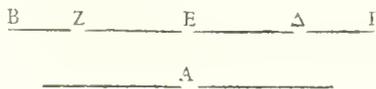
Cela est évident; car puisque ΔB est un quarré, $\Delta\Gamma$ est égal à GB , et AD est égal au rectangle sous AG, GB , c'est-à-dire sous AG, GB . Donc, etc.

PROPOSITION XVIII.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui

τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῆς μήκει³. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσινος μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῆς μήκει⁵, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσινος ἴσον παραλληλόγραμμον τὰ τὴν μείζονα παραβλήθῃ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει⁸.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ἂν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσινος τῆς Α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον τὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον παραβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῆς μήκει¹⁰.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ¹¹ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμηται εἰς

poterit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

Sint duæ rectæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti ex minori Α quadrati, hoc est quadrato ex dimidiâ Α, æquale ad ΒΓ parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ, commensurabilis autem sit ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine; dico ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine.

Secetur enim ΒΓ bifariam in puncto Ε, et ponatur ipsi ΔΕ æqualis ΕΖ; reliqua igitur ΔΓ æqualis est ipsi ΒΖ. Et quoniam recta ΒΓ secatur

sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande, et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du carré de la plus petite droite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

Soient les deux droites inégales Α, ΒΓ; que ΒΓ soit la plus grande; appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'un quarré, et qui soit égal à la quatrième partie du carré de la plus petite Α, c'est-à-dire au carré de la moitié de Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ, et que ΒΔ soit commensurable en longueur avec ΔΓ; je dis que la puissance de ΒΓ surpassera la puissance de Α du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΓ.

Partageons ΒΓ en deux parties égales au point Ε, et faisons ΕΖ égal à ΔΕ; le reste ΔΓ sera égal à ΒΖ. Et puisque la droite ΒΓ est coupée en deux parties

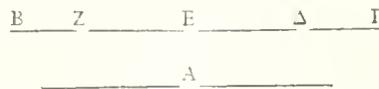
μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν¹² ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ, καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλάσιου τοῦ¹³ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλάσιῳ τοῦ¹⁴ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνον, τῷ δὲ τετραπλάσιῳ τοῦ¹⁵ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετραγώνον, διπλασίον γάρ ἐστι ἡ ΖΔ¹⁶ τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλάσιῳ τοῦ¹⁷ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνον, διπλασίον γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΕΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῇ ΖΔ. Δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρος

in partes quidem æquales ad Ε, in partes autem inæquales ad Δ; ergo sub ΒΔ, ΔΓ contentum rectangulum cum quadrato ex ΕΔ æquale est quadrato ex ΕΓ, et quadrupla; ergo quater sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum eum quadruplo ex ΔΕ æquale est quater quadrato ex ΕΓ. Sed quidem quadruplo ipsius sub ΒΔ, ΔΓ æquale est ex Α quadratum, quadruplo autem ipsius ex ΔΕ æquale est ex ΔΖ quadratum, dupla enim est ΖΔ ipsius ΔΕ; et quadruplo quadrati ex ΕΓ æquale est ex ΒΓ quadratum, dupla enim est rursus ΒΓ ipsius ΕΓ; ergo ex Α, ΔΖ quadrata æqualia sunt ex ΒΓ quadrato; quare ex ΒΓ quadratum quam quadratum ex Α majus est quadrato ex ΔΖ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et commensurabilem esse ΒΓ ipsi ΖΔ. Quoniam enim commensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, commensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΓΔ longitudine. Sed ΓΔ ipsis ΓΔ, ΒΖ est commensurabilis longitudine, æqualis enim est ΓΔ ipsi ΒΖ; et ΒΓ igitur commensurabilis est

égales en Ε, et en deux parties inégales en Δ, le rectangle compris sous ΒΔ, ΔΓ avec le carré de ΕΔ sera égal au carré de ΕΓ (5. 2). Mais les quadruples sont égaux aux quadruples; donc quatre fois le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ avec le quadruple carré de ΔΕ est égal au quadruple carré de ΕΓ. Mais le carré de Α est quadruple du rectangle sous ΒΔ, ΔΓ, et le carré de ΔΖ est égal au quadruple carré de ΔΕ, car ΖΔ est double de ΔΕ; et de plus, le carré de ΒΓ est égal au quadruple du carré de ΕΓ; car ΒΓ est double de ΕΓ; donc la somme des carrés des droites Α, ΔΖ est égale au carré de ΒΓ; donc le carré de ΒΓ surpasse le carré de Α du carré de ΔΖ; donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du carré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est commensurable avec ΖΔ. Car puisque ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (16. 10). Mais ΓΔ est commensurable en longueur avec la somme de ΓΔ et de ΒΖ; car ΓΔ égale ΒΖ (6. 10); donc ΕΓ est commen-

ἔστι ταῖς BZ, ΓΔ μήκει¹⁸. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς μήκει¹⁹.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς μήκει²⁰, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τῶν ΒΓ παραεπιθήσθαι, ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δύναται δὲ ἡ ΒΓ μείζον τῆς Α²¹ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς²². σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφότερῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. Ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ σύμ-

ipsis BZ, ΓΔ longitudine; quare et reliquæ ΖΔ commensurabilis est ΒΓ longitudine; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

At vero ΒΓ quam Α plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est commensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Isidem enim constructis, similiter demonstrabimus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed plus potest ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi commensurabili; commensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utriusque ΒΖ, ΔΓ commensurabilis est ΒΓ longitudine. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ commen-

surable en longueur avec la somme de BZ et de ΓΔ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec le reste ΖΔ (16. 10); donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΓ.

Mais que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du carré d'une droite qui soit commensurable en longueur avec ΒΓ, et appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'une figure carrée, et qui soit égal à la quatrième partie du carré de Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ. Il faut démontrer que ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du carré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du carré d'une droite qui est commensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (16. 10). Mais la somme des droites ΒΖ et ΔΓ est commensurable avec ΔΓ;

μετρός ἐστὶ τῆ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῆ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῆ ΔΓ ἐστὶ σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὡς δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἐξῆς.

surabilis est ipsi ΔΓ; quare et ΒΓ ipsi ΓΔ commensurabilis est longitudine; et dividendo igitur ΒΔ ipsi ΔΓ est commensurabilis longitudine.

Si igitur duæ rectæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16'.

Ἐὰν ὄσιν δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαίρῃ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνηται² τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαίρῃ μήκει³.

PROPOSITIO XIX.

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

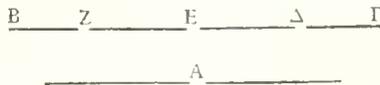
donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (12. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ (16. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

Ἐστώσαν δύο εὐθείαι ἄνισαι αἱ $A, B\Gamma$, ὧν μείζων ἢ $B\Gamma$, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσοις τῆς A ἴσον παρά τὴν $B\Gamma$ παραβελήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta, \Delta\Gamma$, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἢ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει· λέγω ὅτι ἢ $B\Gamma$ τῆς A μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς.

Siut duae rectae inaequales $A, B\Gamma$, quarum major $B\Gamma$, quartae autem partii ex minori A quadrati aequale parallelogrammum ad $B\Gamma$ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub $B\Delta, \Delta\Gamma$ rectangulum, incommensurabilis autem sit $B\Delta$ ipsi $\Delta\Gamma$ longitudine; dico $B\Gamma$ quam A plus posse quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερονί, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἢ $B\Gamma$ τῆς A μείζων δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$. Δεικτέον ὅτι καὶ⁵ ἀσύμμετρος ἔστιν ἢ $B\Gamma$ τῇ ΔZ μήκει. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἔστιν ἢ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει⁶, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ $B\Gamma$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει. Ἀλλὰ ἢ $\Delta\Gamma$ σύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς $BZ, \Delta\Gamma$ · καὶ ἢ $B\Gamma$ ἄρα ἀσύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς $BZ, \Delta\Gamma$ · ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ $Z\Delta$ ἀσύμμετρος ἔστιν ἢ $B\Gamma$ μήκει, καὶ ἢ $B\Gamma$ τῆς A

Isidem enim constructis quæ suprâ, similiter ostendemus $B\Gamma$ quam A plus posse quadrato ex $Z\Delta$. Ostendum est et incommensurabilem esse $B\Gamma$ ipsi ΔZ longitudine. Quoniam enim incommensurabilis est $B\Delta$ ipsi $\Delta\Gamma$ longitudine, incommensurabilis igitur est et $B\Gamma$ ipsi $\Delta\Gamma$ longitudine. Sed $\Delta\Gamma$ commensurabilis est utrisque $BZ, \Delta\Gamma$; et $B\Gamma$ igitur incommensurabilis est utrisque $BZ, \Delta\Gamma$; quare et reliquæ $Z\Delta$ incommensurabilis est $B\Gamma$ longitudine, et $B\Gamma$ quam A

Soient les deux droites inégales $A, B\Gamma$, et que $B\Gamma$ soit la plus grande; appliquons à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite A ; que ce parallélogramme soit celui qui est sous $B\Delta, \Delta\Gamma$, et que $B\Delta$ soit incommensurable en longueur avec $\Delta\Gamma$; je dis que la puissance de $B\Gamma$ surpasse la puissance de A du quarré d'une droite incommensurable avec $B\Gamma$.

Ayant fait la même construction qu'auparavant, nous démontrerons semblablement que la puissance de $B\Gamma$ surpasse la puissance de A du quarré de $Z\Delta$. Il reste à démontrer que $B\Gamma$ est incommensurable en longueur avec ΔZ . Car puisque $B\Delta$ est incommensurable en longueur avec $\Delta\Gamma$, $B\Gamma$ est incommensurable en longueur avec $\Delta\Gamma$ (17. 10). Mais $\Delta\Gamma$ est commensurable avec la somme de BZ et de $\Delta\Gamma$ (14. 10); donc $B\Gamma$ est incommensurable avec la somme de BZ et de $\Delta\Gamma$; donc $B\Gamma$ est incommensurable en longueur avec le reste $Z\Delta$ (17. 10); mais

μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἢ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς.

Δυνασθῶ δὴ πάλιν ἢ ΒΓ τῆς Α μείζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΒΔ τῆς ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι ἢ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἀλλ' ἢ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς⁸. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΒΓ τῆς ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῆ συναμφοτέρῳ τῆς ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΒΓ. Ἀλλὰ συναμφοτέρος ἢ ΒΖ, ΔΓ τῆς ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἢ ΒΓ ἄρα τῆς ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἢ ΒΔ τῆς ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ᾖσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἐξῆς¹⁰.

plus potest quadrato ex ΖΔ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

At plus possit rursus ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit quod sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est incommensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Isdem enim constructis, similiter ostendemus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; incommensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utrique ΒΖ, ΔΓ incommensurabilis est ΒΓ. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ ipsi ΔΓ commensurabilis est longitudine; ergo ΒΓ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine; quare et dividendo ΒΔ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine.

Si igitur sunt duæ rectæ inæquales, etc.

la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ; donc la puissance de ΒΓ surpassera la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Mais que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de Α; et que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ; il faut démontrer que ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est incommensurable avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (17. 10). Mais la somme de ΒΖ et de ΔΓ est commensurable avec ΔΓ (6. 10); donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (14. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Donc, etc.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ δὲ δεικνύται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἴσι σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει² οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει³ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερόν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ἢ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ⁴ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ἢ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὔσα δυνάμει, μήκει αὐτῇ⁵ ἢ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος⁶.

SCHOLIUM.

Quoniam demonstratum est rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ esse commensurabiles, rectas autem potentiâ non semper et longitudine, at vero posse longitudine commensurabiles esse et incommensurabiles; evidens est si expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit longitudine, vocari rationalem et commensurabilem ipsi non solum longitudine sed et potentiâ, quoniam rectæ longitudine commensurabiles omnino et potentiâ. Si autem expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit potentiâ, si quidem et longitudine, dicitur et sic rationalis et commensurabilis ipsi longitudine et potentiâ. Si autem expositæ rursûs rationali commensurabilis aliqua existens potentiâ, longitudine ipsi fuerit incommensurabilis, dicitur et sic rationalis potentiâ solum commensurabilis.

S C H O L I E.

Puisqu'on a démontré que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur, quoiqu'elles puissent être commensurables et incommensurables en longueur (cor. 9. 10), il est évident que si une droite est commensurable en longueur avec la rationelle proposée, elle est appelée rationelle, et elle est commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance avec la rationelle proposée, puisque les grandeurs commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable non seulement en puissance, mais encore en longueur, avec la rationelle proposée, elle est dite rationelle et commensurable en longueur et en puissance avec la rationelle proposée. Et si enfin une droite commensurable en puissance avec la rationelle proposée lui est incommensurable en longueur, elle est dite rationelle commensurable en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

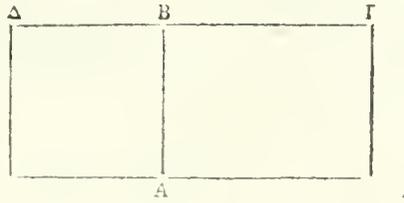
PROPOSITIO XX.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μίκει συμμέτρων κατὰ τινα τῶν εἰρημένων¹ τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Υπὸ γὰρ ῥητῶν μίκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

Sub rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis ΑΒ, ΒΓ rectangulum contineatur ΑΓ; dico rationale esse ΑΓ.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μίκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μίκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· σύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ²· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ³ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Ῥητόν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Et quoniam commensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, æqualis autem est ΑΒ ipsi ΒΔ; commensurabilis igitur est ΒΔ ipsi ΒΓ longitudine. Atque est ut ΒΔ ad ΒΓ ita ΔΑ ad ΑΓ; commensurabilis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ, commensurable igitur est et ΔΑ ipsi ΑΓ. Rationale autem ΔΑ; rationale igitur est et ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Ergo sub rationalibus, etc.

PROPOSITION XX.

Le rectangle compris sous des droites rationelles commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est rationel.

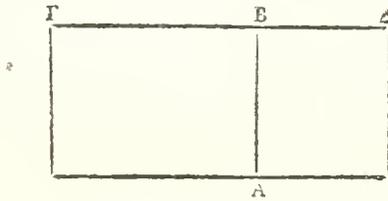
Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites rationelles ΑΒ, ΒΓ commensurables en longueur; je dis que ΑΓ est rationel.

Car décrivons sur ΑΒ le quarré ΑΔ; le quarré ΑΔ sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Puisque ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΓ, et que ΑΒ égale ΒΔ, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΒΓ. Mais ΒΔ est à ΒΓ comme ΔΑ est à ΑΓ (1. 6), et ΒΔ est commensurable avec ΒΓ; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ (10. 10). Mais ΔΑ est rationel; donc ΑΓ est aussi rationel (déf. 9 et pr. 12. 10). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Εάν ῥητον παρά ῥητὴν παραβλιθῆ, πλάτος ποιῆι ῥητὴν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρά ῥητὴν κατὰ τινα πάλιν τῶν προειρημένων¹ τρόπων τὴν ΑΒ παραβελύσθω, πλάτος ποιῶν ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητὴ ἔστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἔστί τὸ ΑΔ. Ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἔστί τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα ἔστί καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

Rationale enim ΑΓ ad rationalem ΑΒ secundum aliquem rursus prædictorum modorum applicetur, latitudinem faciens ΒΓ; dico rationalem esse ΒΓ, et commensurabilem ipsi ΑΒ longitudine.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Rationale autem et ΑΓ; commensurabile igitur est ΔΑ ipsi ΑΓ. Atque est ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΔΒ ad ΒΓ; commensurabilis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΓ. Æqualis autem ΔΒ

PROPOSITION XXI.

Si une surface rationelle est appliquée à une droite rationelle, elle fera une largeur rationelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

Que la surface rationelle ΑΓ soit appliquée, suivant quelqu'un des modes dont nous avons encore parlé, à la rationelle ΑΒ, faisant la largeur ΒΓ; je dis que ΒΓ est rationel et commensurable en longueur avec ΑΒ.

Car décrivons sur ΑΒ le carré ΑΔ; ΑΔ sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Mais ΑΓ est rationel; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ (déf. 9 et pr. 12. 10). Mais ΔΑ est à ΑΓ comme ΔΒ est à ΒΓ (1. 6); donc ΔΒ est commensurable avec ΒΓ (10. 10). Mais

ἴση δὲ ἢ ΔΒ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα² καὶ ἢ ΑΒ τῇ ΑΓ. Ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἢ ΑΒ· Ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.
 Ἐὰν ἄρα ῤητὸν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi ΒΑ; commensurabilis igitur et ΑΒ ipsi ΑΓ. Rationalis autem est ΑΒ; rationalis igitur est et ΒΓ, et commensurabilis ipsi ΑΒ longitudine.
 Si igitur rationale, etc.

Λ Η Μ Μ Α.

LEMMA.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Recta quæ potest irrationale spatium, irrationalis est.

Δυνασθῶ γὰρ ἢ Α ἄλογον χωρίον, ταυτίστω τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνον ἴσον ἔστω ἄλόγῳ χωρίῳ· λέγω ὅτι ἢ Α ἄλογός ἐστιν.

Possit enim recta Α irrationale spatium, hoc est ex Α quadratum æquale sit irrationali spatio; dico Α irrationalem esse.

A

Εἰ γὰρ ἔσται ῤητὴ ἢ Α, ῤητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνον, οὕτως γὰρ ἐστὶν² ἐν τοῖς ὅροις. Οὐκ ἔστι δὲ ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ Α³. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

Si enim esset rationalis Α, rationale esset ex ipsâ quadratum, sic enim est in definitionibus. Non est autem; irrationalis igitur est Α. Quod oportebat ostendere.

ΔΒ est égal à ΒΑ; donc ΑΒ est commensurable avec ΑΓ. Mais ΑΒ est rationel; donc ΒΓ est aussi rationel, et commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. 6 et pr. 12. 10).
 Donc, etc.

L E M M E.

La droite dont la puissance est une surface irrationnelle, est irrationnelle.

Que la puissance de Α soit une surface irrationnelle, c'est-à-dire que le carré de Α soit égal à une surface irrationnelle; je dis que Α est irrationnel.

Car si Α était rationel, le carré de Α serait rationel, ainsi que cela est dit dans les définitions (déf. 8 et cor. 9. 10). Mais il ne l'est pas; donc Α est irrationnel. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

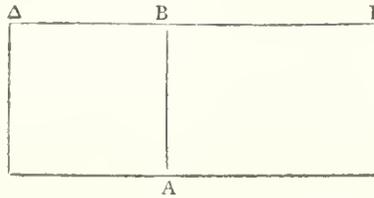
PROPOSITIO XXII.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογος ἔσται· καλεῖσθω δὲ μέση.

Υπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ $ΑΓ$ · λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ $ΑΓ$, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι· καλεῖσθω δὲ μέση.

Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationalis est, et recta quæ potest ipsum irrationalis erit; ea autem vocetur media.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm commensurabilibus rectis AB , $BΓ$ quadratum contineatur $ΑΓ$; dico irrationalis esse $ΑΓ$, et rectam quæ potest ipsum irrationalis esse; ea autem vocetur media.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ΑΔ$ · ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπέκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ AB τῇ $BΔ$ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔB$ τῇ $BΓ$ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως

Describatur enim ex AB quadratum $ΑΔ$; rationalis igitur est $ΑΔ$. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, potentiâ enim solùm eæ supponuntur commensurabiles, æqualis autem AB ipsi $BΔ$; incommensurabilis igitur est et $ΔB$ ipsi $BΓ$ longitudine. Atque est ut $BΔ$ ad

PROPOSITION XXII.

Le rectangle compris sous des droites rationnelles, commensurables en puissance seulement, est irrationnel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationnelle; cette droite s'appellera médiale.

Que le rectangle $ΑΓ$ soit compris sous les droites rationnelles AB , $BΓ$ commensurables en puissance seulement; je dis que le rectangle $ΑΓ$ est irrationnel, et que la droite dont la puissance est égale à ce rectangle est irrationnelle; que cette droite soit appelée médiale.

Car décrivons sur AB le carré $ΑΔ$; $ΑΔ$ sera irrationnel. Et puisque AB est incommensurable en longueur avec $BΓ$; car on a supposé que ces deux droites étaient commensurables en puissance seulement, et que de plus AB est égal à $BΔ$, $ΔB$ sera incommensurable en longueur avec $BΓ$. Mais $BΔ$ est à $BΓ$ comme $ΑΔ$ est à $ΑΓ$

τὸ $\Delta\Delta$ πρὸς τὸ $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ $\Delta\Delta$ τῷ $\Delta\Gamma$. Ρητὸν δὲ τὸ $\Delta\Delta$ ἄλογον ἄρα ἔστι τὸ $\Delta\Gamma$ ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ $\Delta\Gamma$, τού-
τέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη, ἄλο-
γός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέση². Ὅπερ ἔδει δεῖξαι³.

$\Delta\Delta$ ita $\Delta\Gamma$ ad $\Delta\Gamma$; incommensurable igitur est $\Delta\Delta$ ipsi $\Delta\Gamma$. Rationale autem $\Delta\Delta$; irrationalis igitur est $\Delta\Gamma$; quare et recta quæ potest ipsum $\Delta\Gamma$, hoc est recta quæ potest æquale ipsi quadratum, irrationalis est. Ea autem vocetur media. Quod oportebat ostendere.

A H M M A.

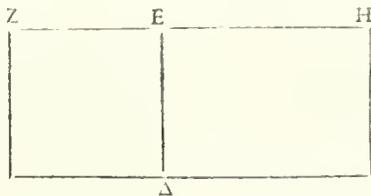
Ἐάν τις δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ZE , EH · λέγω ἔτι ἔστιν ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH .

LEMMA.

Si sint duæ rectæ, est ut prima ad secundam ita quadratum ex primâ ad rectangulum sub duabus rectis.

Sint duæ rectæ ZE , EH ; dico esse ut ZE ad EH ita ex ZE quadratum ad rectangulum sub ZE , EH .



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ZE τετράγωνον τὸ ΔZ , καὶ συμπληρώσθω τὸ $H\Delta$. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ ΔZ πρὸς τὸ ΔH , καὶ ἔστι τὸ μιν ΔZ τὸ ἀπὸ τῆς ZE , τὸ δὲ ΔH

Describatur enim ex ZE quadratum ΔZ , et compleatur $H\Delta$. Quoniam igitur est ut ZE ad EH ita ΔZ ad ΔH , atque est quidem ΔZ quadratum ex ZE , ΔH vero rectangulum sub

(I. 6); donc ΔA est incommensurable avec $\Delta\Gamma$ (10. 10); mais ΔA est rationel; donc $\Delta\Gamma$ est irrationnel (déf. 10 et pr. 15. 10); donc la droite dont la puissance égale $\Delta\Gamma$, c'est-à-dire la droite dont la puissance est un carré égal à $\Delta\Gamma$ est irrationnelle (déf. 11. 10). Cette droite sera appelée médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

L E M M A.

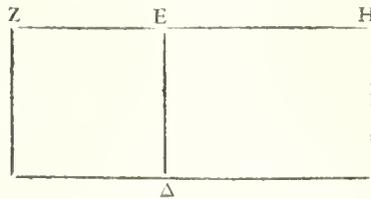
Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le carré de la première est au rectangle compris sous ces deux droites.

Soient les deux droites ZE , EH ; je dis que ZE est à EH comme le carré de ZE est au rectangle compris sous ZE , EH .

Décrivons sur ZE le carré ΔZ , et achevons $H\Delta$. Puisque ZE est à EH comme ΔZ est à ΔH (I. 6); que ΔZ est le carré de ZE , et que ΔH est le rectangle sous ΔE

τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως

ΔΕ, ΕΗ, hoc est sub ΖΕ, ΕΗ; est igitur ut ΖΕ ad ΕΗ ita ex ΖΕ quadratum ad rectan-



τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. Ομοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι².

gulum sub ΖΕ, ΕΗ. Similiter autem et ut sub ΗΕ, ΕΖ rectangulum ad quadratum ex ΕΖ, hoc est ut ΗΔ ad ΖΔ ita ΗΕ ad ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον¹ πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Quadratum ex mediâ ad ratiōnalem applicatum latitudinem facit ratiōnalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

Ἐστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ῥηθωνίων² τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητὴ ἔστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Sit mediâ quidem Α, rationalis autem ΓΒ; et quadrato ex Α æquale ad ΒΓ applicetur spatium rectangulum ΒΔ latitudinem faciens ΓΔ; dico ratiōnalem esse ΓΔ, et incommensurabilem ipsi ΓΒ longitudine.

ΕΗ, c'est-à-dire sous ΖΕ, ΕΗ, la droite ΖΕ est à ΕΗ comme le carré de ΖΕ est au rectangle sous ΖΕ, ΕΗ. Semblablement le rectangle sous ΗΕ, ΕΖ est au carré de ΕΖ, c'est-à-dire ΗΔ est à ΖΔ comme ΗΕ est à ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

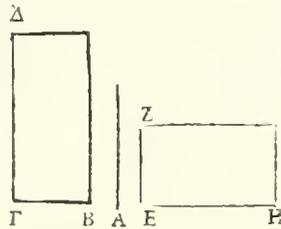
PROPOSITION XXIII.

Le carré d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une longueur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

Soit la médiale Α, et la rationnelle ΓΒ; appliquons à ΒΓ un rectangle ΒΔ, qui soit égal au carré de Α, et qui fasse la largeur ΓΔ; je dis que la droite ΓΔ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΓΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ A , δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμετρῶν. Δυνάσθω τὸ HZ . Δύναται δὲ καὶ τὸ ΔB ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔB τῷ HZ . Ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογωνίον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπρόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EH οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ · ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ πρὸς

Quoniam enim media est A , potest spatium contentatum sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus. Possit HZ . Potest autem et ΔB ; æquale igitur est ΔB ipsi HZ . Est autem illi et æquiangulum, æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos; proportionaliter igitur est ut $B\Gamma$ ad EH ita EZ ad $\Gamma\Delta$; est igitur et ut ex $B\Gamma$ quadratum



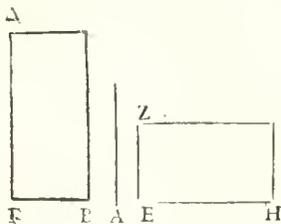
τὸ ἀπὸ τῆς EH οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ · σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓB τῷ ἀπὸ τῆς EH , ῥητὴ γὰρ ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$. ῤητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ · ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ EZ τῇ EH μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ

ad ipsum ex EH ita ex EZ quadratum ad ipsum ex $\Gamma\Delta$. Commensurable autem est ex ΓB quadratum quadrato ex EH , rationalis enim est utraque ipsarum; commensurable igitur est et ex EZ quadratum quadrato ex $\Gamma\Delta$. Rationale autem est quadratum ex EZ ; rationale igitur est et quadratum ex $\Gamma\Delta$; rationalis igitur est $\Gamma\Delta$. Et quoniam incommensurabilis est EZ ipsi EH longitudine, potentiâ enim solùm sunt commensurabiles, ut autem EZ ad EH ita ex EZ quadratum

Car, puisque la droite A est médiale, sa puissance égale une surface comprise sous des rationnelles commensurables en puissance seulement (22. 10). Que sa puissance soit égale à HZ ; mais sa puissance égale aussi ΔB ; donc ΔB égale HZ . Mais ΔB est équiangle avec HZ ; et dans les parallélogrammes équiangles et égaux, les côtés qui comprennent des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc $B\Gamma$ est à EH comme EZ est à $\Gamma\Delta$; donc le carré de $B\Gamma$ est au carré de EH comme le carré de EZ est au carré de $\Gamma\Delta$ (22. 6). Mais le carré de ΓB est commensurable avec le carré de EH ; car chacune de ces droites est rationnelle (22. 10); donc le carré de EZ est aussi commensurable avec le carré de $\Gamma\Delta$ (10. 10). Mais le carré de EZ est rationel; donc le carré de $\Gamma\Delta$ est rationel aussi; donc $\Gamma\Delta$ est rationel. Et puisque la droite EZ est incommensurable en longueur avec EH ; car celle-ci ne lui est commensurable qu'en puissance, et que

πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, EH· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῆ ὑπὸ τῶν ZE, EH. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς EZ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ZE, EH σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, ἴσα γάρ

ad rectangulum sub ZE, EH; incommensurable igitur est ex EZ quadratum rectangulo sub ZE, EH. Sed quadrato quidem ex EZ commensurable est quadratum ex ΓΔ, rationales enim sunt potentiâ, rectangulo autem sub ZE, EH commensurable est rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ;



ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῆ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ περιεχομένῳ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῆ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΓΒ μήκει. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

æqualia enim sunt quadrato ex A; incommensurable igitur est et ex ΓΔ quadratum rectangulo sub ΔΓ, ΓΒ contento. Ut autem ex ΓΔ quadratum ad rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ ita est ΔΓ ad ΓΒ; incommensurabilis igitur est ΔΓ ipsi ΓΒ longitudine; rationalis igitur est ΓΔ et incommensurabilis ipsi ΓΒ longitudine. Quod oportebat ostendere.

EZ est à EH comme le carré de EZ est au rectangle sous ZE, EH (lem. 22. 10), le carré de EZ est incommensurable avec le rectangle sous ZE, EH (10. 10). Mais le carré de ΓΔ est commensurable avec le carré de EZ, car ces droites sont rationnelles en puissance, et le rectangle sous ΔΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ZE, EH, car ils sont égaux chacun au carré de A; donc le carré de ΓΔ est incommensurable avec le rectangle sous ΔΓ, ΓΒ (13. 10). Mais le carré de ΓΔ est au rectangle sous ΔΓ, ΓΒ comme ΔΓ est à ΓΒ (lem. 22); donc ΔΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ; donc ΓΔ est rationnel et incommensurable en longueur avec ΓΒ (déf. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Ἡ τῆ μέση σύμμετρος μέση ἐστίν.

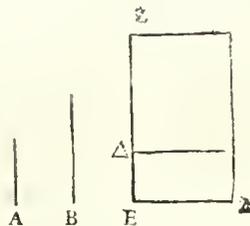
Ἐστω μέση ἡ Α, καὶ τῆ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω χωρίον ὀρθόγωνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστίν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΓΔ μήκει. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβελήσθω χωρίον ὀρθόγωνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν

Recta mediæ commensurabilis media est.

Sit media A, et ipsi A commensurabilis sit B; dico et B mediam esse.

Exponatur enim rationalis ΓΔ, et quadrato quidem ex A æquale ad ΓΔ applicetur spatium rectangulum ΓΕ latitudinem faciens ΕΔ; rationalis igitur est ΕΔ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quadrato autem ex B æquale ad ΔΓ applicetur spatium rectangulum ΓΖ lati-



τὴν ΖΔ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστίν ἡ Α τῆ Β, σύμμετόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ· σύμ-

metrinem faciens ΖΔ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B, commensurable est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale est ΕΓ, quadrato autem

PROPOSITION XXIV.

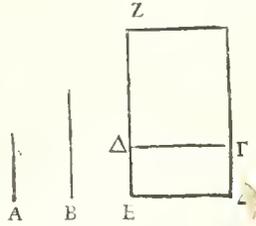
Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

Soit la médiale A, et que B soit commensurable avec A; je dis que la droite B est médiale.

Car soit la rationnelle ΓΔ, et soit appliqué à ΓΔ un rectangle ΓΕ qui, faisant la largeur ΕΔ, soit égal au carré de A; la droite ΕΔ sera rationnelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (25. 10). Soit aussi appliqué à ΔΓ un rectangle ΓΖ qui, faisant la largeur ΖΔ, soit égal au carré de B. Puisque A est commensurable avec B, le carré de A sera commensurable avec le carré de B (cor. 9. 10). Mais ΕΓ est égal au carré de A, et ΓΖ est égal au carré de B;

μετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ἢ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. Ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἢ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· Ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῤηταὶ εἰσι, δυνάμει

ex B æquale ΓΖ; commensurable igitur est ΕΓ ipsi ΓΖ. Atque est ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΕΔ ad ΔΖ; commensurabilis igitur est ΕΔ ipsi ΔΖ longitudine. Rationalis autem est ΕΔ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; rationalis igitur est et ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; ergo ΓΔ, ΔΖ rationales sunt, potentiâ



μόνον σύμμετροι. Ἡ δὲ τῶν ὑπὸ ῤητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυνάμει μέση ἐστίν³. ἢ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυνάμει μέση ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἢ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἢ Β.

solum commensurabiles. Recta autem quæ potest rectangulum sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus media est; recta igitur quæ potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ media est, et potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ ipsa B; media igitur est B.

donc ΕΓ est commensurable avec ΓΖ. Mais ΕΓ est à ΓΖ comme ΕΔ est à ΔΖ (1. 6); donc ΕΔ est commensurable en longueur avec ΔΖ (10. 10). Mais la droite ΕΔ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (25. 10); donc la droite ΔΖ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (13. 10); donc les droites ΓΔ, ΔΖ sont rationnelles et commensurables en puissance seulement. Mais la droite dont la puissance égale un rectangle sous des rationnelles commensurables en puissance seulement, est une médiale (22. 10); donc la droite, dont la puissance égale le rectangle sous ΓΔ, ΔΖ, est une médiale; mais la puissance de B égale le rectangle sous ΓΔ, ΔΖ; donc la droite B est une médiale.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῶ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστί. Δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι αἱ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ εἰτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν. Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἑξακολουθεῖ τὴν τῆ μέση μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσην, καὶ σύμμετρον αὐτῆ μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδὴ περ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῆ μέση σύμμετρός τις ἢ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει². Εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι³.

Ex hoc manifestum est spatium medio spatio commensurable medium esse. Possunt enim ipsa rectæ quæ sunt potentiâ commensurabiles, quarum altera media; quare et reliqua media est. Congruenter autem ipsis in rationalibus dictis, et in mediis quoque colligetur, rectam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, et commensurabilem ipsi non solum longitudine sed et potentiâ, quoniam universè rectæ longitudine commensurabiles semper et potentiâ. Si autem mediæ commensurabilis aliqua recta fuerit potentiâ, siquidem et longitudine, dicuntur et sic mediæ et commensurabiles longitudine et potentiâ. Si autem potentiâ solum, dicuntur mediæ potentiâ solum commensurabiles.

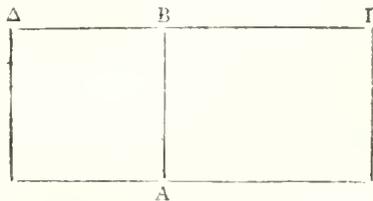
COROLLAIRE.

De là il est évident qu'une surface commensurable avec une surface médiale est médiale. Car les droites dont les puissances sont égales à ces surfaces sont commensurables en puissance, et l'une de ces droites est médiale; donc la droite restante est médiale. Mais d'après ce qui a été dit dans les rationelles, on peut conclure dans les médiales qu'une droite commensurable à une médiale est une médiale, cette droite lui étant commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance; car généralement les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable en puissance avec une médiale, et si elle l'est aussi en longueur, les médiales sont dites commensurables en longueur et en puissance. Mais si elles ne sont commensurables qu'en puissance, elles sont dites médiales commensurables en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατὰ τινὰ τῶν εἰρημένων τρόπων¹ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν.

ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ περιεχίσθω ὀρθογώνιον τὸ $ΑΓ$. λέγω ὅτι τὸ $ΑΓ$ μέσον ἐστίν.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ΑΔ$. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶ ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, ἴση δὲ ἡ AB τῇ $ΒΔ$. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔB$ τῇ $BΓ$ μήκει· ὥστε καὶ τὸ $ΔA$ τῷ $ΑΓ$ σύμμετρον ἐστὶ. Μέσον δὲ τὸ $ΔA$. μέσον ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Sub mediis longitudine commensurabilibus secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, medium est.

Sub mediis enim longitudine commensurabilibus rectis AB , $BΓ$ continetur rectangulum $ΑΓ$; dico $ΑΓ$ medium esse.

Describatur enim ex AB quadratum $ΑΔ$; medium igitur est $ΑΔ$. Et quoniam commensurabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, æqualis autem AB ipsi $ΒΔ$; commensurabilis igitur est et $ΔB$ ipsi $BΓ$ longitudine; quare et $ΔA$ ipsi $ΑΓ$ commensurable est. Medium autem $ΔA$; medium igitur et $ΑΓ$. Qued oportebat ostendere.

PROPOSITION XXV.

Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

Que le rectangle $ΑΓ$ soit compris sous les droites médiales AB , $BΓ$ commensurables en longueur; je dis que $ΑΓ$ est médial.

Décrivons sur AB le carré $ΑΔ$, $ΑΔ$ sera médial (cor. 24. 10). Et puisque AB est commensurable en longueur avec $BΓ$, et que AB est égal à $ΒΔ$, la droite $ΔB$ est commensurable en longueur avec $BΓ$; donc $ΔA$ est commensurable avec $ΑΓ$. Mais $ΔA$ est médial (cor. 24. 10); donc $ΑΓ$ est aussi médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

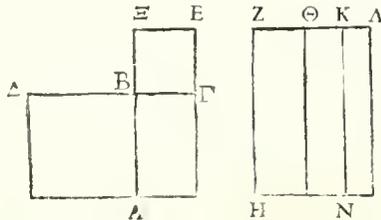
PROPOSITIO XXVI.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐ-
θειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἢτοι ῥητὸν ἢ
μέσον ἐστίν.

Υπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων
εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ περιεχέσθω ὀρθογώνιον² τὸ
 $ΑΓ$. λέγω ὅτι τὸ $ΑΓ$ ἢτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν³.

Sub mediis potentiâ solùm commensurabi-
libus rectis contentum rectangulum, vel ratio-
nale vel medium est.

Sub mediis enim potentiâ solùm commensura-
bilibus rectis AB , $BΓ$ contineatur rectangulum
 $ΑΓ$; dico $ΑΓ$ vel rationale vel medium esse.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τετράγωνα
τὰ $ΑΔ$, BE . μέσον ἄρα ἐστίν ἐκάτερον τῶν
 $ΑΔ$, BE . Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ ZH , καὶ τῷ μὲν
 $ΑΔ$ ἴσον παρὰ τὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον
παραλληλόγραμμον τὸ $HΘ$ πλάτος ποιῶν τὴν
 $ZΘ$, τῷ δὲ $ΑΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΘΜ$ παραβε-
βλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ MK

Describantur enim ex AB , $BΓ$ quadrata $ΑΔ$,
 BE ; medium igitur est utrumque ipsorum $ΑΔ$,
 BE . Et exponatur rationalis ZH , et ipsi quidem
 $ΑΔ$ æquale ad ZH applicetur rectangulum pa-
rallelogrammum $HΘ$ latitudinem faciens $ZΘ$,
ipsi autem $ΑΓ$ æquale ad $ΘΜ$ applicetur rectan-
gulum parallelogrammum MK latitudinem fa-

PROPOSITION XXVI.

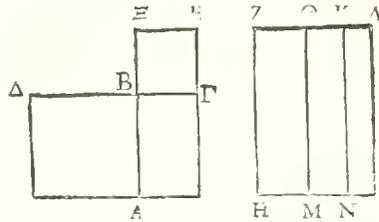
Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationel ou médial.

Que le rectangle $ΑΓ$ soit compris sous les droites médiales AB , $BΓ$, commensurables en puissance seulement; je dis que $ΑΓ$ est ou rationel ou médial.

Car décrivons sur les droites AB , $BΓ$ les quarrés $ΑΔ$, BE ; chacun des quarrés $ΑΔ$, BE sera médial. Soit la rationelle ZH ; appliquons à ZH le parallélogramme rectangle $HΘ$, qui ayant $ZΘ$ pour largeur, soit égal à $ΑΔ$; appliquons aussi à $ΘΜ$ le parallélogramme rectangle MK , qui ayant $ΘΚ$ pour largeur, soit égal à

πλάτος ποιούν τὴν ΘK , καὶ ἔτι τῷ BE ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν KN παραβεβλήσθω τὸ NA πλάτος ποιούν τὴν KA . ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ $\text{Z}\Theta$, ΘK , KA . Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν AD , BE , καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν AD τῷ

ciens ΘK , et adhuc ipsi BE æquale similiter ad KN applicetur NA latitudinem faciens KA ; in rectâ igitur sunt $\text{Z}\Theta$, ΘK , KA . Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum AD , BE , atque est æquale quidem AD ipsi $\text{H}\Theta$, ipsum



$\text{H}\Theta$, τὸ δὲ BE τῷ NA μέσον ἄρα καὶ ἐκάτερον τῶν $\text{H}\Theta$, NA , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παρακεῖται ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἐκάτερα τῶν $\text{Z}\Theta$, KA , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει. Καὶ ἐπειδ⁵ σύμμετρόν ἐστι τὸ AD τῷ BE σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $\text{H}\Theta$ τῷ NA . Καὶ ἔστιν⁶ ὡς τὸ $\text{H}\Theta$ πρὸς τὸ NA οὕτως ἢ $\text{Z}\Theta$ πρὸς τὴν KA σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ $\text{Z}\Theta$ τῇ KA μήκει· αἱ $\text{Z}\Theta$, KA ἄρα ῥηταὶ εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\text{Z}\Theta$, KA . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν BD τῇ BA , ἢ δὲ EB τῇ BF · ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΔB πρὸς τὴν BF οὕτως ἢ AB πρὸς τὴν BE . ἀλλ' ὡς μὲν ἢ ΔB πρὸς τὴν BF οὕτως τὸ ΔA πρὸς

autem BE ipsi NA ; medium igitur et utrumque ipsorum $\text{H}\Theta$, NA , et ad rationalem ZH applicatur; rationalis igitur est et utraque ipsarum $\text{Z}\Theta$, KA , et incommensurabilis ipsi ZH longitudine. Et quoniam commensurable est AD ipsi BE ; commensurable igitur est et $\text{H}\Theta$ ipsi NA . Atque est ut $\text{H}\Theta$ ad NA ita $\text{Z}\Theta$ ad KA ; commensurabilis igitur est $\text{Z}\Theta$ ipsi KA longitudine; ergo $\text{Z}\Theta$, KA rationales sunt longitudine commensurabiles; rationale igitur est rectangulum sub $\text{Z}\Theta$, KA . Et quoniam æqualis est quidem BD ipsi BA , ipsa autem EB ipsi BF ; est igitur ut ΔB ad BF ita AB ad BE . Sed ut ΔB ad BF

AF , et enfin appliquons semblablement à KN le parallélogramme rectangle NA , qui ayant KA pour largeur, soit égal à BE (45. 1); les droites $\text{Z}\Theta$, ΘK , KA seront en ligne droite (14. 1). Puisque chacun des quarrés AD , BE est médial; que AD est égal à $\text{H}\Theta$, et BE égal à NA , chacun des rectangles $\text{H}\Theta$, NA sera médial; mais ils sont appliqués sur la rationelle ZH ; donc chacune des droites $\text{Z}\Theta$, KA est rationelle et incommensurable en longueur avec ZH (25. 10). Mais AD est commensurable avec BE ; donc $\text{H}\Theta$ est commensurable avec NA . Mais $\text{H}\Theta$ est à NA comme $\text{Z}\Theta$ est à KA (1. 6); donc $\text{Z}\Theta$ est commensurable en longueur avec KA (10. 10); donc les droites $\text{Z}\Theta$, KA sont des rationelles commensurables en longueur; le rectangle sous $\text{Z}\Theta$, KA est donc rationel. Et puisque BD est égal à BA , et EB égal à BF , ΔB sera à BF comme AB est à BE ; mais ΔB est à BF

τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. Ἴσον δὲ ἔστι τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἢ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ οὕτως ἢ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. Ρητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ· ρητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΘΚ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΖΗ μήκει, ρητὸν ἐστὶ τὸ ΘΝ. Εἰ δὲ ἀσύμμετρος ἐστὶ τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ, ΘΜ⁸ ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΝ· τὸ ΘΝ ἄρα ἦτοι ρητὸν ἢ μέσον ἐστίν⁹. Ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἦτοι ρητὸν ἢ μέσον ἐστὶ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ita ΔΑ ad ΑΓ; ut autem ΑΒ ad ΒΞ ita ΑΓ ad ΓΞ; est igitur ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΞ. Æquale autem est quidem ΑΔ ipsi ΗΘ, ipsum vero ΑΓ ipsi ΜΚ, ipsum et ΓΞ ipsi ΝΛ; est igitur ut ΗΘ ad ΜΚ ita ΜΚ ad ΝΛ; est igitur et ut ΖΘ ad ΘΚ ita ΘΚ ad ΚΛ; rectangulum igitur sub ΖΘ, ΚΛ æquale est quadrato ex ΘΚ. Rationale autem rectangulum sub ΖΘ, ΚΛ; rationale igitur est et quadratum ex ΘΚ; rationalis igitur est ΘΚ. Et si quidem commensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine, rationale est ΘΝ. Si autem incommensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine, ipsæ ΚΘ, ΘΜ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; medium igitur est ΘΝ; ergo ΘΝ vel rationale vel medium est. Æquale autem ΘΝ ipsi ΑΓ; ergo ΑΓ vel rationale vel medium est.

Ergo sub mediis, etc.

comme ΔΑ est à ΑΓ, et ΑΒ est à ΒΞ comme ΑΓ est à ΓΞ (1. 6); donc ΔΑ est à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΞ. Mais ΑΔ est égal à ΗΘ, ΑΓ égal à ΜΚ, et ΓΞ égal à ΝΛ; donc ΗΘ est à ΜΚ comme ΜΚ est à ΝΛ; donc ΖΘ est à ΘΚ comme ΘΚ est à ΚΛ; le rectangle compris sous ΖΘ, ΚΛ est donc égal au carré de ΘΚ (17. 6). Mais le rectangle sous ΖΘ, ΚΛ est rationel (20. 10); donc le carré de ΘΚ est rationnel; donc la droite ΘΚ est rationelle. Et si ΘΚ est commensurable en longueur avec ΖΗ, la surface ΘΝ sera rationelle. Mais si ΘΚ est incommensurable en longueur avec ΖΗ, les droites ΚΘ, ΘΜ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, et la surface ΘΝ sera médiale (22. 10); donc ΘΝ est rationel ou médial. Mais ΘΝ est égal à ΑΓ; donc ΑΓ est ou rationel ou médial. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

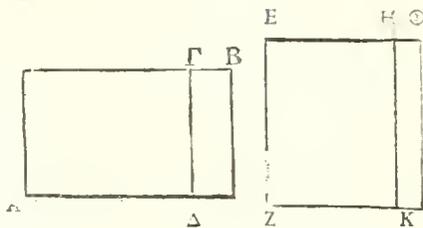
PROPOSITIO XXVII.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῶ.

Medium non medium superat rationali.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερέχεται ῥητῶ τῶ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῶ ΑΒ ἴσον παρά τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἑρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτες ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῶ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῶ τῶ ΚΘ ἐστὶν ἴσον. ῤητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ΔΒ· ῥητὸν

Si enim possibile, medium AB medium AG superet rationali ΔΒ, et exponatur rationalis ΕΖ, et ipsi ΑΒ æquale ad ΕΖ applicetur parallelogrammum rectangulum ΖΘ latitudinem faciens ΕΘ, ipsi autem ΑΓ æquale auferatur ΖΗ; reliquum igitur ΒΔ reliquo ΚΘ est æquale. Rationale autem est ΔΒ; rationale igitur est et



ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῶ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῶ ΖΗ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. Καὶ παρά ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ΕΘ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ

ΚΘ. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum ΑΒ, ΑΓ, atque est quidem ΑΒ ipsi ΖΘ æquale, ipsum autem ΑΓ ipsi ΖΗ; medium igitur et utrumque ipsorum ΖΘ, ΖΗ. Et ad rationalem ΕΖ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum ΕΘ, ΕΗ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam rationale est

PROPOSITION XXVII.

Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationelle.

Car, que la surface médiale ΑΒ, s'il est possible, surpasse la surface médiale ΑΓ d'une surface rationelle ΔΒ; soit la rationelle ΕΖ; appliquons à ΕΖ le parallélogramme rectangle ΖΘ, qui, étant égal à ΑΒ, ait ΕΘ pour largeur (45. 1); et de ΖΘ retranchons ΖΗ égal à ΑΓ; le reste ΒΔ sera égal au reste ΚΘ. Mais ΔΒ est rationel donc ΚΘ est rationel. Et puisque chacune des surfaces ΑΒ, ΑΓ est médiale, que ΑΒ est égal à ΖΘ, et que ΑΓ est égal à ΖΗ, chacune des surfaces ΖΘ, ΖΗ sera médiale. Mais ces surfaces sont appliquées à ΕΖ; donc chacune des droites ΕΘ, ΕΗ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Et puisque ΔΒ est

ῤητόν ἐστι τὸ ΔΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΚΘ· ῤητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῤητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῤητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῤητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα, ῤητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, διπλάσιον γὰρ ἐστὶν αὐτοῦ³. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τάτε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῤητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. Ἀλλὰ καὶ ῤητὴ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μέσου, καὶ τὰ ἐξῆς.

rational, et qu'il est égal à ΚΘ, ΚΘ sera rationel ; mais il est appliqué à la rationnelle ΕΖ ; donc ΗΘ est rationel et commensurable en longueur avec ΕΖ (21. 10). Mais ΕΗ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ ; donc ΕΗ est incommensurable en longueur avec ΗΘ (13. 10). Mais ΕΗ est à ΗΘ comme le carré de ΕΗ est au rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (1. 6) ; donc le carré de ΕΗ est incommensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (10. 10). Mais la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le carré de ΕΗ, car ces carrés sont rationels et le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, car il en est le double ; donc la somme des carrés de ΕΗ et de ΗΘ est incommensurable avec le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (14. 10) ; donc la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ, du double du rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, qui est le carré de ΕΘ (4. 2), est incommensurable avec la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ (17. 10). Mais les carrés de ΕΗ et de ΗΘ sont rationels ; donc le carré de ΕΘ est irrationel (déf. 10. 10) ; donc ΕΘ est irrationel. Mais il est rationel, ce qui est impossible. Donc, etc.

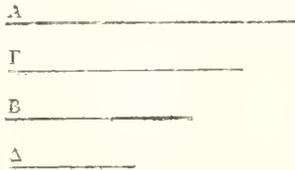
ΔΒ, atque est æquale ipsi ΚΘ; rationale igitur est et ΚΘ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΗΘ, et commensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Sed et ΕΗ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine; incommensurabilis igitur est ΕΗ ipsi ΗΘ longitudine. Atque est ut ΕΗ ad ΗΘ ita ex ΕΗ quadratum ad rectangulum sub ΕΗ, ΗΘ; incommensurable igitur est ex ΕΗ quadratum rectangulo sub ΕΗ, ΗΘ. Sed quadrato quidem ex ΕΗ commensurabilia sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata, rationalia enim utraque, rectangulo autem sub ΕΗ, ΗΘ commensurable est rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, duplum enim est ipsius; incommensurabilia igitur sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata rectangulo bis sub ΕΗ, ΗΘ; et utraque igitur ex ΕΗ, ΗΘ quadrata et rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, quod est quadratum ex ΕΘ, incommensurabilia sunt quadratis ex ΕΗ, ΗΘ. Rationalia autem quadrata ex ΕΗ, ΗΘ; irrationalis igitur est quadratum ex ΕΘ; irrationalis igitur est ΕΘ. Sed et rationalis, quod est impossibile.

Medium igitur medium, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B , καὶ εἰλήφθω τῶν A, B μέση ἀνάλογον ἡ Γ , καὶ γερονέτω ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ .



Καὶ ἐπεὶ αἱ A, B ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, B , ταυτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ , μέσον ἐστὶ μέση ἄρα ἡ Γ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , αἱ δὲ A, B δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἐστὶ μέση ἡ Γ . μέση ἄρα καὶ ἡ Δ . αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον

PROPOSITIO XXVIII.

Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

Exponantur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles A, B , et sumatur ipsarum A, B media proportionalis Γ , et fiat ut A ad B ita Γ ad Δ .

Et quoniam A, B rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, rectangulum igitur sub A, B , hoc est quadratum ex Γ , medium est; media igitur Γ . Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ , ipsæ autem A, B potentiâ solùm commensurabiles; et Γ, Δ igitur potentiâ solùm commensurabiles. Atque est media Γ ; media igitur et Δ ; ergo Γ, Δ mediæ sunt potentiâ

PROPOSITION XXVIII.

Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationnelle.

Soient A, B deux rationnelles commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle Γ entre A et B (13. 6), et faisons en sorte que A soit à B comme Γ est à Δ (12. 6).

Puisque les rationnelles A, B sont commensurables en puissance seulement, le rectangle sous A, B (22. 10), c'est-à-dire le carré de Γ , est médial (17. 6); donc Γ est médial. Et puisque A est à B comme Γ est à Δ , et que les droites A, B ne sont commensurables qu'en puissance; les droites Γ, Δ ne sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial (24. 10); donc les droites Γ, Δ sont des médiales commensurables en puissance

σύμμετροι. Λέγω δὴ² ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως³ ἡ Β πρὸς τὴν Δ. Ἀλλὰ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως⁴ ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ⁵ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι⁶.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Μέσας εὕρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας.

Ἐκείσθωσαν τρεῖς¹ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γερονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως² ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταὶ εἶσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι

solùm commensurabiles. Dico etiam et ipsas rationale continere. Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, permutando igitur est ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Sed ut Α ad Γ ita Γ ad Β; et ut igitur Γ ad Β ita Β ad Δ; rectangulum igitur sub Γ, Δ æquale est quadrato ex Β. Rationale autem quadratum ex Β; rationale igitur est et rectangulum sub Γ, Δ.

Inventæ sunt igitur mediæ potentiâ solùm commensurabiles. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIX.

Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, mediùm continentes.

Exponentur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles Α, Β, Γ, et sumatur ipsarum Α, Β media proportionalis Δ, et fiat ut Β ad Γ ita Δ ad Ε.

Quoniam Α, Β rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, rectangulum igitur sub Α, Β,

seulement (24. 10). Je dis aussi qu'elles comprennent une surface rationnelle. Car puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, par permutation Α est à Γ comme Β est à Δ (16. 5). Mais Α est à Γ comme Γ est à Β; donc Γ est à Β comme Β est à Δ; donc le rectangle sous Γ, Δ est égal au carré de Β (17. 6). Mais le carré de Β est rationel; le rectangle sous Γ, Δ est donc aussi rationel.

On a donc trouvé des médiales commensurable en puissance seulement. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXIX.

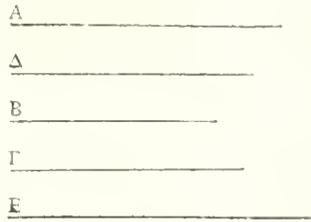
Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprennent une surface médiale.

Soient les trois rationnelles Α, Β, Γ commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle Δ entre Α et Β (15. 6), et faisons en sorte que Β soit à Γ comme Δ est à Ε (12. 6).

Puisque les droites Α, Β sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, le rectangle sous Α, Β (22. 10), c'est-à-dire le carré de Δ (17. 6)

τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστὶ· μέση ἄρα ἡ Δ.
 Καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι,
 καὶ ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως³ ἡ Δ πρὸς
 τὴν Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον
 εἰσὶ. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ,
 Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.
 Λέγω δὲ ὅτι μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν

hoc est quadratum ex Δ, medium est; media
 igitur Δ. Et quoniam Β, Γ potentiâ solùm
 sunt commensurabiles, atque est ut Β ad Γ
 ita Δ ad Ε; ergo Δ, Ε commensurabiles po-
 tentiâ solùm sunt. Media autem Δ; media igitur
 et Ε; ergo Δ, Ε mediæ sunt potentiâ solùm
 commensurabiles. Dico etiam ipsas medium con-



ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως⁵ ἡ Δ πρὸς τὴν Ε,
 ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως⁶ ἡ Γ
 πρὸς τὴν Ε. Ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως⁷ ἡ Δ
 πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α οὕτως⁸
 ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον
 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ
 τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Ἐῤῥηται ὅρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμε-
 τροι, μέσον περιέχουσαι. Ὅπερ εἶδει ποιῆται⁹.

tinere. Quoniam enim est ut Β ad Γ ita Δ ad
 Ε, permutando igitur ut Β ad Δ ita Γ ad Ε.
 Ut autem Β ad Δ ita Δ ad Α, et ut igitur
 Δ ad Α ita Γ ad Ε; rectangulum igitur sub
 Α, Γ æquale est rectangulo sub Δ, Ε. Me-
 dium autem rectangulum sub Α, Γ; medium
 igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur mediæ potentiâ solùm
 commensurabiles, medium continentes. Quod
 oportebat facere.

sera médial; donc la droite Δ est médiale. Et puisque les droites Β, Γ ne sont com-
 mensurables qu'en puissance, et que Β est à Γ comme Δ est à Ε, les droites Δ, Ε ne
 sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Δ est médial; donc Ε est
 médial (24. 10); donc les droites Δ, Ε sont des médiales commensurables en
 puissance seulement. Je dis aussi qu'elles comprennent une surface médiale; car
 puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε, par permutation Β est à Δ comme Γ est à Ε.
 Mais Β est à Δ comme Δ est à Α; donc Δ est à Α comme Γ est à Ε; donc le rec-
 tangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε (16. 6). Mais le rectangle sous
 Α, Γ est médial (22. 10); donc le rectangle sous Δ, Ε est médial.

On a donc trouvé des médiales commensurables en puissance seulement, qui
 comprennent une surface médiale. Ce qu'il fallait faire.

ΛΗΜΜΑ Α΄.

LEMMA I.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συρκεῖμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἕστωσαν δὲ ἢ ἴσοι ἢ ἀρτιοὶ ἢ περιττοί. Καὶ ἐπεὶ ἑάντε ἀπὸ ἀρτίου ἀρτιος ἀφαιρεθῆ, ἑάντε ἀπὸ περιττοῦ περιττός, ὁ λοιπὸς ἀρτίος ἐστίν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἀρτίος ἐστίν. Τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. Ἐστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσοι ἢ ὁμοιοὶ ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἱ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί

A Δ Γ Β

εἶσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ² τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ³ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΒ τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδὴ περ εἰδείχθη ὅτι ἑάν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαιτες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὐρηται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὃ, τε ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, οἱ συνθεθέντες ποιῶσιν τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΔ τετράγωνον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut et compositus ex ipsis sit quadratus.

Exponantur duo numeri ΑΒ, ΒΓ, sint autem vel pares vel impares. Et quoniam sive à pari par auferatur, sive ab impari impar, reliquus par est; reliquus igitur ΑΓ par est. Secetur ΑΓ bifariam in Δ. Sint autem et ΑΒ, ΒΓ vel similes plani vel quadrati, qui et ipsi similes

plani sunt; ergo sub ΑΒ, ΒΓ numerus cum quadrato ex ΓΔ æqualis est ex ΔΒ quadrato. Atque est quadratus ex ΑΒ, ΒΓ numerus, quoniam ostensum est si duo similes plani sese multiplicantes faciant aliquem, factum quadratum esse; inventi sunt igitur duo quadrati numeri, et quadratus ex ΑΒ, ΒΓ, et quadratus ex ΓΔ, qui compositi faciunt ex ΕΔ quadratum. Quod oportebat facere.

LEMME I.

Trouver deux nombres quarrés, de manière que leur somme soit un quarré.

Soient les deux nombres ΑΒ, ΒΓ; qu'ils soient ou pairs ou impairs. Puisque si d'un nombre pair on ôte un nombre pair, ou si d'un nombre impair on ôte un impair, le reste est pair (24, et 26. 9); le reste ΑΓ est donc pair. Partageons ΓΑ en deux parties égales en Δ. Que les nombres ΑΒ, ΒΓ soient ou des plans semblables ou des quarrés qui sont eux-mêmes des plans semblables; le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΔ sera égal au quarré de ΔΒ (6. 2). Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ est un quarré; car on a démontré que si deux plans semblables se multipliant eux-mêmes font un nombre, le produit est un quarré (1. 9); on a donc trouvé deux nombres quarrés, savoir le produit de ΑΒ par ΒΓ, et le quarré de ΓΔ, dont la somme égale le quarré de ΕΔ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν ὅτι εὔρηται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν¹ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιο ὦσιν ἐπίπεδοι². Ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιο ἐπίπεδοι, εὔρηται δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ³ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνος⁴.

ΛΗΜΜΑ Β΄.

Εὔρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἕξ αὐτῶν συγχείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἐστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφραμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ¹. φανερόν δὲ ἔστι ὅ² ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³

COROLLARIUM.

Et manifestum est inventos esse rursus duos quadratos, et quadratum ex ΒΔ et quadratum ex ΓΔ, ita ut excessus ipsorum sub ΑΒ, ΒΓ sit quadratus, quando ΑΒ, ΒΓ similes sunt plani. Quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, et quadratus ex ΒΔ et quadratus ex ΓΔ, quorum excessus sub ΑΒ, ΒΓ non est quadratus.

LEMMA II.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut ex ipsis compositus non sit quadratus.

Sit enim sub ΑΒ, ΒΓ, ut dicebamus, quadratus, et par ipse ΓΑ, et secetur ΓΑ bifariam in Δ; evidens est utique ex ΑΒ, ΒΓ quadratum

COROLLAIRE.

Il est évident de plus qu'on a trouvé deux quarrés, savoir le quarré de ΒΔ et celui de ΓΔ, de manière que leur différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, est un quarré, lorsque les nombres ΑΒ, ΒΓ sont des plans semblables. Mais lorsque ces nombres ne sont pas des plans semblables, on trouve deux quarrés, celui de ΒΔ et celui de ΓΔ, dont la différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, n'est pas un quarré.

LEMME II.

Trouver deux nombres quarrés, dont la somme ne soit pas un quarré.

Que le produit de ΑΒ par ΒΓ soit un quarré, comme nous l'avons dit; que ΓΑ soit un nombre pair; partageons ΓΑ en deux parties égales en Δ. Il est évident que le quarré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré

ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ⁴ ΒΔ τετραγώνῳ. Αφηρήσθω⁵ μονὰς ἢ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνος⁶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁷ ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁸ ΒΔ τετραγώνου. Λέγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁹ ΓΕ οὐκ ἐστὶ¹⁰ τετραγώνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετραγώνος, ἦτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ¹¹ ΒΕ ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ¹², οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῆ ἢ μονὰς¹³.

Α . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ Β

Εστω εἰ δυνατόν πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίον ὁ ΗΑ¹⁴. Ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίον, ὁ δὲ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίον¹⁵, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίον· δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁶ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ¹⁷ ΒΕ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ,

cum quadrato ex ΓΔ æqualem esse quadrato ex ΒΔ. Auferatur unitas ΔΕ; ergo ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ minor est quadrato ex ΒΔ. Dico igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratum cum quadrato ex ΓΕ non esse quadratum.

Si enim fuerit quadratus, vel æqualis est quadrato ex ΒΕ vel minor quadrato ex ΒΕ, non autem et major, ut nec secetur unitas. Sit, si pos-

sibile, primum ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΒΕ, et sit ipsius ΔΕ unitatis duplus ΗΑ. Quoniam igitur totus ΑΓ totius ΓΔ est duplus, ipse autem ΑΗ ipsius ΔΕ est duplus; et reliquus igitur ΗΓ reliqui ΕΓ est duplus; bifariam igitur secatur ΗΓ in Ε; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Sed et ex ΑΒ, ΒΓ

de ΓΔ est égal au carré de ΒΔ (6. 2). Retraichons l'unité ΔΕ; le carré qui résultera du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ sera plus petit que le carré de ΒΔ. Et je dis que le carré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ n'est pas un carré.

Car si ce nombre est un carré, ou il est égal au carré de ΒΕ, ou il est plus petit que lui; mais il ne peut pas être plus grand; car, si cela était, l'unité serait partagée. Que le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ soit d'abord égal au carré de ΒΕ, si cela est possible, et que ΗΑ soit double de l'unité ΔΕ. Puisque ΑΓ tout entier est double de ΓΔ tout entier, et que ΑΗ est double de ΔΕ, le reste ΗΓ sera double du reste ΕΓ; donc ΗΓ est partagé en deux parties égales en Ε; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est égal au carré de ΒΕ (6. 2).

ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁸ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁹ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν²⁰ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ²¹ ΓΕ. Καὶ κοινοῦ ἀφαιρέντες τοῦ ἀπὸ τοῦ²² ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ²³, ἔπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ²⁴ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ²⁵ ΒΕ. Λέγω δὲ ἔτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ²⁶ ΒΕ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ²⁷ ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ

quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis supponitur quadrato ex ΒΕ; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ. Et detracto communi quadrato ex ΓΕ, concludetur ΑΒ æqualis ipsi ΗΒ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Dico etiam neque minorem quadrato ex ΒΕ. Si enim possibile, sit quadrato ex ΒΖ æqualis, et ipsius

A . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ Β

διπλασίῳ²⁸ ὁ ΘΑ. Καὶ²⁹ συναρθῆσεται πάλιν διπλασίῳ³⁰ ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ, ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμήσθαι κατὰ τὸ Ζ· καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³¹ ΖΓ ἴσον γενέσθαι τῷ ἀπὸ τοῦ³² ΒΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³³ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ³⁴ ΖΒ· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ³⁵, ἔπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα

ΔΖ duplus ΘΑ. Et concludetur rursus duplus ΘΓ ipsius ΓΖ, ita ut et ΓΘ bifariam dividatur in Ζ; et ob id ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΖΓ æqualis fit quadrato ex ΒΖ. Supponitur autem et ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΖΒ; quare et ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΖ æqualis erit quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus

Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est supposé égal au carré de ΒΕ; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ. Le carré commun de ΓΕ étant retranché, on conclura que ΑΒ est égal à ΗΒ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ n'est pas égal au carré de ΒΕ. Je dis, de plus, qu'il n'est pas plus petit que le carré de ΒΕ. Car, si cela est possible, qu'il soit égal au carré de ΒΖ, et que ΘΑ soit double de ΔΖ. On conclura encore que ΘΓ est double de ΓΖ, de manière que ΓΘ sera partagé en deux parties égales en Ζ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le carré de ΖΓ sera égal au carré de ΒΖ (6. 2). Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est supposé égal au carré de ΖΒ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΖ sera égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ

ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³⁶ GE ἴσος ἐστὶ τῶ³⁷ ἐλάττωι τοῦ ἀπὸ BE . Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῶ³⁸ τῶ ἀπὸ τοῦ BE , οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ. ³⁹οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁴⁰ GE τετράγωνός ἐστι. Δυνατοῦ δὲ ὅτιος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύται, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος⁴¹, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπιπλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Εὔρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμετρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττωρος μείζον δύνασθαι τῶ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆ μήκει.

Εκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἢ AB , καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $\Gamma\Delta, \Delta E$, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν¹ GE μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB , καὶ

cum quadrato ex GE æqualis est quadrato minori quam est ipse ex BE . Ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE , neque majori quam est ipse; non igitur ex AB, BG quadratus cum quadrato ex GE quadratus est. Cum autem possibile sit, et in pluribus modis quod dictum demonstrare, sufficiat nobis expositus, ut ne longam tractationem longius producamus.

PROPOSITIO XXX.

Invenire duas rationales potentiâ solum commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Exponantur enim aliqua rationalis AB , et duo quadrati numeri $\Gamma\Delta, \Delta E$, ita ut excessus ipsorum GE non sit quadratus, et describatur super rectam AB semicirculus AZB , et fiat

par BG avec le carré de GE n'est pas égal à un plus petit carré que celui de BE . Mais on a démontré qu'il n'est pas égal au carré de BE , ni à un carré plus grand. Donc le produit de AB par BG avec le carré de GE n'est pas un carré. Ce lemme peut se démontrer de plusieurs manières; je me contenterai de celle que je viens d'exposer, afin de ne pas être trop long.

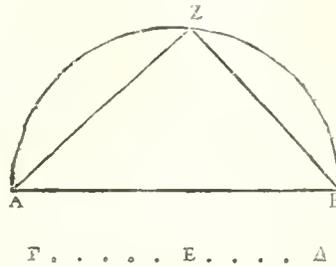
PROPOSITION XXX.

Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient une rationnelle AB , et deux nombres carrés $\Gamma\Delta, \Delta E$, de manière que leur excès GE ne soit pas un carré (cor. 29. 10). Sur AB décrivons le demi-

πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον², καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΒ.

ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex ΒΑ quadratum ad quadratum ex ΑΖ, et jungatur ΖΒ.



Ἐπεὶ οὖν³ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῶ ἀπὸ τῆς ΑΖ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῤητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῤητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΖ ἄρα ῤηταὶ εἰσι δυνάμει

Quoniam igitur est ut ex ΒΑ quadratum ad ipsum ex ΑΖ ita ΔΓ ad ΓΕ, ex ΒΑ igitur quadratum ad ipsum ex ΑΖ rationem habet quam numerus ΔΓ ad numerum ΓΕ; commensurable igitur est ex ΒΑ quadratum quadrato ex ΑΖ. Rationale autem quadratum ex ΑΒ; rationale igitur et quadratum ex ΑΖ; rationalis igitur et ΑΖ. Et quoniam ΔΓ ad ΓΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex ΒΑ igitur quadratum ad ipsum ex ΑΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurable igitur est ΒΑ ipsi ΑΖ longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΖ igitur rationales sunt potentiâ solum

cercle AZB; faisons en sorte que ΔΓ soit à ΓΕ comme le carré de ΒΑ est au carré de ΑΖ (6. 10), et joignons ΖΒ.

Car, puisque le carré de ΒΑ est au carré de ΑΖ comme ΔΓ est à ΓΕ, le carré de ΒΑ aura avec le carré de ΑΖ la raison que le nombre ΔΓ a avec le nombre ΓΕ; le carré de ΒΑ sera donc commensurable avec le carré de ΑΖ (6. 10). Mais le carré de ΑΒ est rationel (déf. 8. 10); donc le carré de ΑΖ est rationel (déf. 9. 10); donc la droite ΑΖ est rationelle (déf. 6. 10). Et puisque ΔΓ n'a pas avec ΓΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΑ n'aura pas avec le carré de ΑΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc ΒΑ est incommensurable en longueur avec ΑΖ (9. 10); donc les rationelles ΒΑ, ΑΖ ne sont commensurables qu'en puissance (déf. 3. 10). Et

μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέφαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ο δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. Καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μίξεν δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει.

Εὐρίηται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μίξεναι τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μίξεναι δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει. Ὅπερ εἶδει ποιῆται.

commensurables. Et quoniam est ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex ΒΑ quadratum ad ipsum ex ΑΖ; convertendo igitur ut ΓΔ ad ΔΕ ita ex ΑΒ quadratum ad ipsum ex ΒΖ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ex ΑΒ igitur quadratum ad ipsum ex ΒΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΑΒ ipsi ΒΖ longitudine. Atque est quadratum ex ΑΒ æquale quadratis ex ΑΖ, ΖΒ; ipsa ΑΒ igitur quam ΑΖ plus potest quadrato ex rectâ ΒΖ sibi commensurabili longitudine.

Inventæ sunt igitur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles ΒΑ, ΑΖ, ita ut major ΑΒ quam minor ΑΖ plus possit quadrato ex rectâ ΒΖ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

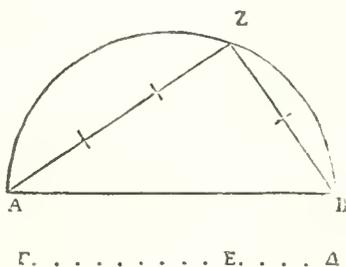
puisque ΔΓ est à ΓΕ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΑΖ; par conversion ΓΔ est à ΔΕ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΒΖ (19. 5 et 47. 1). Mais ΓΔ a avec ΔΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc le carré de ΑΒ a avec le carré de ΒΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΖ (9. 10.). Mais le carré de ΑΒ est égal à la somme des carrés de ΑΖ et de ΖΒ (47. 1); donc la puissance de ΑΒ surpasse la puissance de ΑΖ du carré de la droite commensurable en longueur avec ΑΒ.

On a donc trouvé deux rationnelles ΒΑ, ΑΖ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande ΒΑ surpasse la puissance de la plus petite ΑΖ du carré de la droite ΒΖ commensurable en longueur avec ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Εὔρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρον ἑαυτῆ μήκει.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ AB , καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $ΓΕ$, $ΕΔ$, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν $ΓΔ$ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB , καὶ



πεποιείσθω ὡς ὁ $ΓΔ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BZ . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου, ἔτι αἱ BA , AZ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ $ΔΓ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ . ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ $ΓΔ$ πρὸς τὸν

PROPOSITIO XXXI.

Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine.

Exponantur rationalis AB , et duo quadrati numeri $ΓΕ$, $ΕΔ$, ita ut $ΓΔ$ compositus ex ipsis non sit quadratus, et describatur super rectam AB semicirculus AZB , et fiat ut $ΓΔ$ ad $ΓΕ$ ita ex

AB quadratum ad ipsum ex AZ , et jungatur BZ ; similiter utique demonstrabimus, ut in antecedente, rectas BA , AZ rationales esse potentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam est ut $ΔΓ$ ad $ΓΕ$ ita ex BA quadratum ad ipsum ex AZ ; convertendo igitur ut $ΓΔ$ ad $ΔΕ$ ita

PROPOSITION XXXI.

Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

Soient la rationnelle AB , et les deux nombres carrés $ΓΕ$, $ΕΔ$, de manière que leur somme $ΓΔ$ ne soit pas un carré (lem. 2. 29. 10); sur la droite AB , décrivons le demi-cercle AZB ; faisons en sorte que $ΓΔ$ soit à $ΓΕ$ comme le carré de AB est au carré de AZ (cor. 6. 10), et joignons BZ . Nous démontrerons semblablement comme auparavant que les rationnelles BA , AZ ne sont commensurables qu'en puissance. Puisque $ΔΓ$ est à $ΓΕ$ comme le carré de BA est au carré de AZ , par conversion

ΔΕ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ. Ο δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον ἔχει ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. Καὶ δύναται ἡ AB τῆς AZ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς ZB ἀσύμμετρου ἑαυτῆ· αἱ AB, BZ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AB τῆς AZ μείζον δύναται τῷ³ ἀπὸ τῆς ZB ἀσύμμετρου ἑαυτῆ μήκει. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ex AB quadratum ad ipsum ex BZ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est AB ipsi BZ longitudine. Et plus potest AB quam AZ quadrato ex rectâ ZB sibi incommensurabili; ipsæ AB, BZ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et AB quam AZ plus potest quadrato ex rectâ ZB sibi incommensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛϚ.

PROPOSITIO XXXII.

Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει.

Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Ἐκκείσθωσαν γάρ! δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ-

Exponantur enim duæ rationales potentiâ solùm

ΓΔ sera à ΔΕ comme le carré de AB est au carré de BZ. Mais ΓΔ n'a pas avec ΔΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc le carré de AB n'a pas avec le carré de BZ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc AB est incommensurable en longueur avec BZ (9. 10); donc la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du carré d'une droite ZB incommensurable avec AB; donc les rationnelles AB, BZ ne sont commensurables qu'en puissance, et la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du carré de la droite ZB incommensurable en longueur avec AB. Ce qu'il fallait faire.

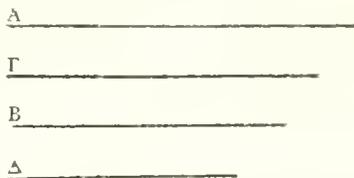
PROPOSITION XXXII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient les deux rationnelles A, B commensurables en puissance seulement,

μετροι αἱ A, B , ὥστε τὴν A μείζονα οὔσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς B μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμετρικῆς αὐτῆς μήκει. Καὶ τῷ ὑπὲρ τῶν A, B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ . Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A, B μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ . μέση ἄρα καὶ ἡ Γ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ , ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν

commensurabiles A, B , ita ut A major existens quam minor B plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine. Et rectangulo sub A, B æquale sit quadratum ex Γ . Medium autem rectangulum sub A, B ; medium igitur et quadratum ex Γ ; media igitur et Γ . Quadrato autem ex B æquale sit rectangulum sub Γ, Δ , rationale autem quadratum ex B ; rationale igitur est et rectangulum sub Γ, Δ . Et quoniam est ut A ad B ita sub A, B rectangulum ad quadratum



A, B ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ . ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ . Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ . Σύμμετρος δὲ ἡ A τῇ B δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ

ex B ; sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex Γ , quadrato autem ex B æquale rectangulum sub Γ, Δ ; ut igitur A ad B ita ex Γ quadratum ad rectangulum sub Γ, Δ . Ut autem ex Γ quadratum ad rectangulum sub Γ, Δ ita Γ ad Δ ; et ut igitur A ad B ita Γ ad Δ . Commensurabilis autem A ipsi B potentiâ solùm;

de manière que la puissance de la plus grande A surpasse la puissance de la plus petite B du carré d'une droite commensurable en longueur avec A (30. 10). Que le carré de Γ soit égal au rectangle sous A, B . Mais le rectangle sous A, B est médial (22. 10); donc le carré de Γ est médial; donc la droite Γ est médiale. Que le rectangle sous Γ, Δ soit égal au carré de B ; puisque le carré de B est rationel, le rectangle sous Γ, Δ sera rationel. Et puisque A est à B comme le rectangle sous A, B est au carré de B (1. 6), que le carré de Γ est égal au rectangle sous A, B , et que le rectangle sous Γ, Δ est égal au carré de B , la droite A sera à la droite B comme le carré de Γ est au rectangle sous Γ, Δ . Mais le carré de Γ est au rectangle sous Γ, Δ comme Γ est à Δ ; donc A est à B comme Γ est à Δ . Mais A n'est commensurable avec B qu'en puissance; donc Γ n'est

Γ τῆ Δ δυνάμει μόνον. Καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως¹ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου⁵ ἑαυτῆ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μείζον δύναται⁶ τῷ ἀπὸ συμμετρου⁷ ἑαυτῆ.

Εὕρονται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ, ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆ⁸ μήκει. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι⁹.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσύμμετρου, ὅταν τῆς Β μείζον δύνηται ἡ Α τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ¹⁰.

commensurabilis igitur et Γ ipsi Δ potentiâ solum. Atque est media Γ; media igitur et Δ. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, ipsa autem Α quam Β plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et Γ igitur quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles Γ, Δ, rationale continentes, et Γ quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

Similiter utique ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando quam Β plus potest ipsa Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

commensurable avec Δ qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial (24. 10). Et puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Β du carré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du carré d'une droite commensurable avec Γ (15. 10).

On a donc trouvé deux médiales Γ, Δ commensurables en puissance seulement, qui comprennent un rectangle rationel; et la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du carré d'une droite commensurable en longueur avec Γ. Ce qu'il fallait faire.

Si la puissance de Α surpassait la puissance de Β du carré d'une droite incommensurable avec Α, on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

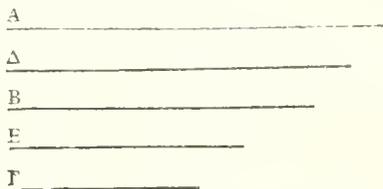
Εὑρεῖν δύο μίσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιχεύσας ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονης μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B, Γ , ὥστε τὴν A τῆς Γ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ^2 · μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ · καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστί. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ

PROPOSITIO XXXIII.

Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Exponantur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles A, B, Γ , ita ut A quam Γ plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et rectangulo quidem sub A, B æquale sit quadratum ex Δ ; medium igitur quadratum ex Δ ; et Δ igitur media est. Rectangulo autem sub B, Γ æquale sit rectangulum sub Δ, E .



τῶν Δ, E . Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ οὕτως ἡ A πρὸς τὴν Γ , ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἐστί τὸ ἀπὸ τῆς Δ , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον³ τὸ ὑπὸ

Et quoniam est ut sub A, B rectangulum ad ipsum sub B, Γ ita A ad Γ , sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex Δ , rectangulo autem sub B, Γ æquale

PROPOSITION XXXIII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande.

Soient les trois rationnelles A, B, Γ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de A surpasse la puissance de Γ du carré d'une droite commensurable avec A (50. 10); que le carré de Δ soit égal au rectangle sous A, B (14. 2); le carré de Δ sera médial (22. 10), et la droite Δ médiale. Que le rectangle sous Δ, E soit égal au rectangle sous B, Γ (45. 1). Puisque le rectangle sous A, B est au rectangle sous B, Γ comme A est à Γ (1. 6), que le carré de Δ est égal au rectangle sous A, B , et que le rectangle sous Δ, E est égal au rectangle

τῶν Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δύναμι μόνον⁵· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δύναμι μόνον. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ⁶· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μείζον διυίηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ⁷. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ⁸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ⁹ ὑπὸ τῶν Β, Γ· αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι¹⁰· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Ἐῤῥινται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε, μέσον περιέχουσαι· ὥστε τὴν μείζονα¹¹ τῆς ἐλάττονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ¹². Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι¹².

rectangulum sub Δ, Ε; est igitur ut Α ad Γ ita ex Δ quadratam ad rectangulum sub Δ, Ε. Ut autem ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε ita Δ ad Ε; et ut igitur Α ad Γ ita Δ ad Ε. Commensurabilis autem Α ipsi Γ potentiâ solùm; commensurabilis igitur et Δ ipsi Ε potentiâ solùm. Media autem Δ; media igitur et Ε. Et quoniam est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, ipsa autem Α quam Γ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et Δ igitur quam Ε plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Dico etiam et medium esse rectangulum sub Δ, Ε. Quoniam enim æquale est sub Β, Γ rectangulum rectangulo sub Δ, Ε, medium autem rectangulum sub Β, Γ; ipsæ enim Β, Γ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles Δ, Ε, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Quod oportebat facere.

sous Β, Γ, la droite Α est à Γ comme le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε. Mais le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε comme Δ est à Ε (52. 10); donc Α est à Γ comme Δ est à Ε. Mais Α n'est commensurable avec Γ qu'en puissance; donc Δ n'est commensurable avec Ε qu'en puissance (10. 10); mais Δ est médial; donc Ε est médial (24. 10). Et puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Γ du carré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Δ surpassera la puissance de Ε du carré d'une droite commensurable avec Δ (15. 10). Je dis aussi que le rectangle sous Δ, Ε est médial. Car puisque le rectangle sous Β, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε, et que le rectangle sous Β, Γ est médial, parce que les rationnelles Β, Γ ne sont commensurables qu'en puissance, le rectangle sous Δ, Ε sera médial.

On a donc trouvé deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande. Ce qu'il fallait faire.

Ὀμοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ A τῆς Γ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῆ¹³.

A H M M A.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $AB\Gamma$, ἐρθῶν ἔχον τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίαν, καὶ ἤχθω¹ κάθετος ἡ AD . λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν GB, BD ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BA , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $B\Gamma, \Gamma D$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓA , καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta, \Delta\Gamma$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AD , καὶ ἔτι τὸ² ὑπὸ τῶν $B\Gamma, AD$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$ ³. Καὶ πρῶτον τὸ ὑπὸ τῶν GB, BD ἴσον ἐστὶ⁴ τῷ ἀπὸ τῆς BA .

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ἐρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἕκται ἡ AD , τὰ $AB\Delta, A\Delta\Gamma$ ἄρα τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ἕλῳ τῷ $AB\Gamma$ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $AB\Delta$ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ GB πρὸς τὴν BA οὕτως

Similiter utique rursus ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando A quam Γ plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili.

L E M M A.

Sit triangulum rectangulum $AB\Gamma$, rectum habens sub $BA\Gamma$ angulum, et ducatur perpendicularis AD ; dico rectangulum quidem sub GB, BD æquale esse quadrato ex BA , rectangulum autem sub $B\Gamma, \Gamma D$ æquale quadrato ex ΓA , et rectangulum sub $B\Delta, \Delta\Gamma$ æquale quadrato ex AD , et adhuc rectangulum sub $B\Gamma, AD$ æquale esse rectangulo sub $BA, A\Gamma$. Et primum rectangulum sub GB, BD æquale esse quadrato ex BA .

Quoniam enim in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducitur AD , ipsa $AB\Delta, A\Delta\Gamma$ igitur triangula similia sunt et toti triangulo $AB\Gamma$ et inter se. Et quoniam simile est $AB\Gamma$ triangulum triangulo $AB\Delta$, est igitur ut GB ad BA ita BA ad BD ; rectangulum

Si la puissance de A surpassait la puissance de Γ du carré d'une droite incommensurable avec A , on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

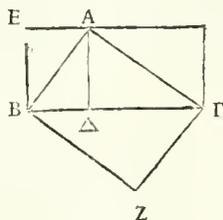
L E M M E.

Soit le triangle rectangle $AB\Gamma$, dont l'angle droit est $BA\Gamma$; menons la perpendiculaire AD ; je dis que le rectangle sous GB, BD est égal au carré de BA , que le rectangle sous $B\Gamma, \Gamma D$ est égal au carré de ΓA , que le rectangle sous $B\Delta, \Delta\Gamma$ est égal au carré de AD , et enfin que le rectangle sous $B\Gamma, AD$ est égal au rectangle sous $BA, A\Gamma$. Je dis d'abord que le rectangle sous GB, BD est égal au carré de BA .

Car puisque dans un triangle rectangle on a mené de l'angle droit la droite AD perpendiculaire à la base, les deux triangles $AB\Delta, A\Delta\Gamma$ sont semblables au triangle entier $AB\Gamma$, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle $AB\Gamma$ est semblable au triangle $AB\Delta$, GB est à BA comme BA est à BD (déf. 1. 6); donc le

ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ ἐάν-ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

igitur sub ΓΒ, ΒΔ æquale est quadrato ex ΑΒ. Propter eadem utique et rectangulum sub ΒΓ, ΓΔ æquale est quadrato ex ΑΓ. Et quoniam si in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducatur, ducta inter basis segmenta media proportionalis est; est igitur ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΑΔ ad ΔΓ; rectangulum igitur sub ΒΔ, ΔΓ æquale est quadrato ex ΔΑ. Dico



λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφραμεν, ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐάν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Καὶ ὅτι⁵ ἐάν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπλη-

et rectangulum sub ΒΓ, ΑΔ æquale esse rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quoniam enim, ut dicebamus, simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΒΑ ad ΑΔ. Si autem quatuor rectæ proportionales sunt, rectangulum sub extremis æquale est rectangulo sub mediis; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Dico et si describamus ΕΓ rectangulum parallelogrammum, et com-

rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au carré de ΑΒ (17. 6). Par la même raison, le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ est égal au carré de ΑΓ. Et puisque si de l'angle droit d'un triangle rectangle on mène une perpendiculaire à la base, la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les segments de la base (cor. 8. 6), la droite ΒΔ est à ΔΑ comme ΑΔ est à ΔΓ (18. 6); donc le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est égal au carré de ΔΑ. Je dis enfin que le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Car puisque, comme nous l'avons dit, ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΒΓ est à ΓΑ comme ΒΑ est à ΑΔ. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle sous les extrêmes est égal au rectangle sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ sera égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Je dis encore que, si nous décrivons le parallélogramme rectangle ΕΓ, et si nous

ρήσομεν τὸ AZ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ AZ, ἐκότερον γὰρ αὐτῶν διπλασίον ἔστι τοῦ ABΓ τριγώνου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν⁶ ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ AZ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἔστί τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συσκέμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν AB τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀπ' ἑπτεράς τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλείπειν εἶδει τετραγώνου, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ

pleanus AZ, æquale fore ΕΓ ipsi AZ, utrumque enim ipsorum duplum est trianguli ABΓ; atque est rectangulum quidem ΕΓ sub ΒΓ, ΑΔ, rectangulum autem AZ sub ΒΑ, ΑΓ; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXIV.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

Exponantur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles AB, ΒΓ, ita ut major AB quam minor ΒΓ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et secetur ΒΓ bifariam ad Δ, et quadrato ab alterutrâ ipsarum ΒΔ, ΔΓ æquale ad rectam AB applicetur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et describatur super

achevons AZ, le rectangle EF sera égal au rectangle AZ, car chacun d'eux est double du triangle ABΓ; mais EF est le rectangle compris sous ΒΓ, ΑΔ, et AZ le rectangle compris sous ΒΑ, ΑΓ; donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit rationnelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

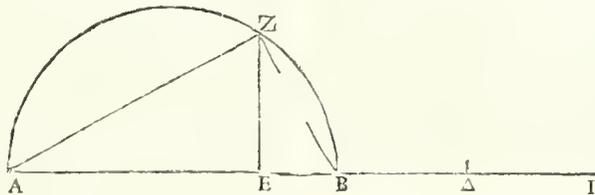
Soient les deux rationnelles AB, ΒΓ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande AB surpasse la puissance de la plus petite ΒΓ du carré d'une droite incommensurable avec AB (31, 10); coupons ΒΓ en deux parties égales en Δ; appliquons à AB un parallélogramme qui, étant égal à l'un ou à l'autre des carrés des droites ΒΔ, ΔΓ, soit défailant d'une figure carrée (26. 6), et que ce soit le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ; décrivons

τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB , καὶ ἤχθω τῇ AB πρὸς ἰρθὰς ἡ EZ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ AZ , ZB .

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀνισοί εἰσιν αἱ AB , $BΓ$, καὶ ἡ AB τῆς $BΓ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς $BΓ$, τευτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν AB παραβέβλυται παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ AE τῇ EB . Καὶ ἐπειδ' ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA , AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB , BE , ἴσον δὲ τὸ

rectam AB semicirculus AZB , et ducatur ipsi AB ad rectos angulos ipsa EZ , et jungantur AZ , ZB .

Et quoniam duæ rectæ inæquales sunt AB , $BΓ$, et AB quam $BΓ$ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; quartæ autem parti quadrati ex $BΓ$, hoc est quadrato dimidiæ ipsius, æquale ad AB applicatur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et facit rectangulum sub AE , EB ; incommensurabilis igitur est AE ipsi EB . Et quoniam est ut AE ad EB ita sub BA , AE rectangulum ad ipsum sub AB , BE , sed æquale quidem sub AB , AE rec-



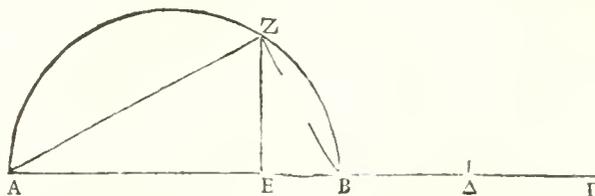
μὲν ὑπὸ τῶν AB , AE τῷ ἀπὸ τῆς AZ , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB . αἱ AZ , ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ῥητὴ ἐστὶ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ

rectangulum quadrato ex AZ , ipsum autem sub AB , BE rectangulum quadrato ex BZ ; incommensurable igitur est ex AZ quadratum quadrato ex ZB ; ergo AZ , ZB potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam AB rationalis est, rationale igitur est et

sur la droite AB le demi-cercle AZB ; menons la droite EZ perpendiculaire à AB , et joignons AZ , ZB .

Puisque les deux droites AB , $BΓ$ sont inégales; que la puissance de AB surpasse la puissance de $BΓ$ du quarré d'une droite incommensurable avec AB ; qu'on a appliqué à AB un parallélogramme qui, étant égal à la quatrième partie du quarré de $BΓ$, c'est-à-dire au quarré de la moitié de cette droite, est défailant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme est contenu sous AE , EB , la droite AE sera incommensurable avec EB (19. 10). Et puisque AE est à EB comme le rectangle sous BA , AE est au rectangle sous AB , BE (1. 6), que le rectangle sous AB , AE est égal au quarré de AZ , que le rectangle sous AB , BE est égal au quarré de BZ , le quarré de AZ sera incommensurable avec le quarré de ZB ; donc les droites AZ , ZB sont incommensurables en puissance. Et puisque la droite AB est ratio-

τὸ ἀπὸ τῆς AB ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ , ZB ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ , ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $BΔ$ ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ $BΔ$ · διπλὴ ἄρα ἡ $BΓ$ τῆς EZ ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ



τῶν AB , $BΓ$ σύμμετρόν ἐστι τῷ⁵ ὑπὸ τῶν AB , EZ . Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , EZ . Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ , ZB · μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB . Εδείχθη δὲ καὶ ῥητόν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὔρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ , ZB , ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

quadratum ex AB ; quare et compositum ex quadratis ipsarum AZ , ZB rationale est. Et, quoniam rursus rectangulum sub AE , EB æquale est quadrato ex EZ , supponitur autem sub AE , EB rectangulum et quadrato ex $BΔ$ æquale; æqualis igitur est ZE ipsi $BΔ$; dupla igitur $BΓ$

ipsius EZ ; quare et rectangulum sub AB , $BΓ$ commensurabile est rectangulo sub AB , EZ . Medium autem rectangulum sub AB , $BΓ$; medium igitur et rectangulum sub AB , EZ . Æquale autem sub AB , EZ rectangulum rectangulo sub AZ , ZB ; medium igitur et rectangulum sub AZ , ZB . Ostensum est autem et rationale compositum ex ipsarum quadratis.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AZ , ZB , facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium. Quod oportebat facere.

nelle, le carré de AB est rationel; donc la somme des carrés de AZ et de ZB est rationelle. Et de plus, puisque le rectangle sous AE , EB est égal au carré de EZ , et que le rectangle sous AE , EB est supposé égal au carré de $BΔ$, la droite ZE est égale à $BΔ$; donc $BΓ$ est double de EZ ; donc le rectangle sous AB , $BΓ$ est commensurable avec le rectangle sous AB , EZ (1. 6). Mais le rectangle sous AB , $BΓ$ est médial (22. 10); donc le rectangle sous AB , EZ est médial. Mais le rectangle sous AB , EZ est égal au rectangle sous AZ , ZB (lem. 1. 35); donc le rectangle sous AZ , ZB est médial. Mais on a démontré que la somme des carrés de AZ et de ZB est rationelle.

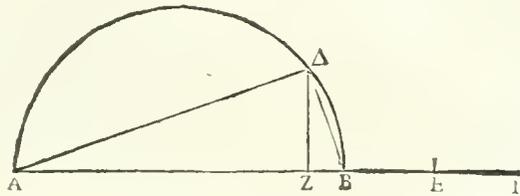
On a donc trouvé deux droites AZ , ZB incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés est rationelle, et que le rectangle sous ces mêmes droites est médial. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ΄.

PROPOSITIO XXXV.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσύμμετρος, ποιούσας τὸ μὲν ἰσχυκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale.



Ἐκτίσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , BF , ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν AB τῆς BF μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ, καὶ γεγραφθῶ ἐπὶ τῆς AB τὸ $AΔB$ ἡμικύκλιον, καὶ τετραίσθω ἡ BF δίχα κατὰ τὸ E , καὶ παραβελήσθω παρά τὴν AB τῷ ἀπὸ τῆς BE ἴσον παραλληλόγραμμον ἄλλείπον εἶδει τετραγώνω, τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB ; ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῆ ZB μήκει. Καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Z τῆ AB πρὸς ἑρθὰς ἡ $ZΔ$, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ $AΔ$, $ΔB$.

Exponantur duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles AB , BF , rationale continentes sub ipsis, ita ut AB quam BF plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et describatur super rectam AB semicirculus $AΔB$, et secetur BF bifariam in E , et applicetur ad AB quadrato ex BE æquale parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, rectangulum sub AZ , ZB ; incommensurabilis igitur est AZ ipsi ZB longitudine. Et ducatur à puncto Z ipsi AB ad rectos angulos ipsa $ZΔ$, et jungantur $AΔ$, $ΔB$.

PROPOSITION XXXV.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprennent soit rationel.

Soient deux médiales AB , BF commensurables en puissance seulement, et comprenant un rectangle rationel, de manière que la puissance de AB surpasse la puissance de BF du quarré d'une droite incommensurable avec AB (52. 10); sur AB décrivons le demi-cercle $AΔB$; coupons BF en deux parties égales en E ; appliquons à AB un parallélogramme qui, étant égal au quarré de BE , soit défailant d'une figure quarrée (28. 6), et que ce soit le rectangle sous AZ , ZB ; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZB (19. 10). Du point Z menons $ZΔ$ perpendiculaire à AB , et joignons $AΔ$, $ΔB$.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA , AZ τῷ ὑπὸ τῶν AB , BZ . Ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , AZ τῷ ἀπὸ τῆς AD , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BZ τῷ ἀπὸ τῆς DB . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AD τῷ ἀπὸ τῆς DB . Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AD , DB . Καὶ ἐπεὶ διπλῆ³ ἐστὶν ἡ $BΓ$ τῆς $ΔΖ$. διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$. ῤητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. ῤητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν AD , $ΔB$. ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AD , $ΔB$ ῤητὸν ἐστίν.

Ἐῤρηγεται ἄρα δύο εὐθεΐαι δυνάμεις ἀσύμμετροι αἱ AD , DB , ποιῶσαι τὸ μὲν⁷ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῤητόν. Ὅτερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam incommensurabilis est AZ ipsi ZB , incommensurable igitur est et sub BA , AZ rectangulum rectangulo sub AB , BZ . Sed æquale quidem sub BA , AZ rectangulum quadrato ex AD , sed sub AB , BZ rectangulum quadrato ex DB ; incommensurable igitur est et ex AD quadratum quadrato ex DB . Et quoniam medium est quadratum ex AB , medium igitur et compositum ex ipsarum AD , DB quadratis. Et quoniam dupla est $BΓ$ ipsius $ΔΖ$, duplum igitur et sub AB , $BΓ$ rectangulum rectanguli sub AB , $ZΔ$. Rationale autem rectangulum sub AB , $BΓ$; rationale igitur et rectangulum sub AB , $ZΔ$. Rectangulum autem sub AB , $ZΔ$ æquale rectangulo sub AD , DB ; quare et rectangulum sub AD , DB rationale est.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AD , DB , facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale. Quod oportebat facere.

Puisque AZ est incommensurable avec ZB , le rectangle sous BA , AZ est incommensurable avec le rectangle sous AB , BZ (1. 6, et 10. 10). Mais le rectangle sous BA , AZ est égal au carré de AD , et le rectangle sous AB , BZ est égal au carré de DB (54. lem. 1. 10); le carré de AD est donc incommensurable avec le carré de DB . Mais le carré de AB est médial; donc la somme des carrés de AD et de DB est médiale. Et puisque $BΓ$ est double de $ΔΖ$, le rectangle sous AB , $BΓ$ est double du rectangle sous AB , $ZΔ$ (1. 6). Mais le rectangle sous AB , $BΓ$ est rationel; donc le rectangle sous AB , $ZΔ$ est rationel. Mais le rectangle sous AB , $ZΔ$ est égal au rectangle sous AD , DB (54. lem. 5. 10); le rectangle sous AD , DB est donc rationel.

On a donc trouvé deux droites AD , DB incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

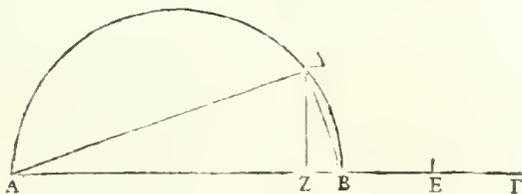
PROPOSITIO XXXVI.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμήτρους, ποιούσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκείμενῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$, μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν AB τῆς $BΓ$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $AΔB$, καὶ τὰ λοιπὰ γερονέτω τοῖς ἐπάνω ἰσῶς εἰρημίσις.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Exponantur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles AB , $BΓ$, medium continentes, ita ut AB quam $BΓ$ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et describatur super rectam AB semicirculus $AΔB$, et reliqua fiant congruenter iis superiùs dictis.



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστίν³ ἢ AZ τῆ ZB μήκει, ἀσύμμετρος ἐστὶ καὶ ἢ $AΔ$ τῆ $ΔB$ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB ἴσον

Et quoniam incommensurabilis est AZ ipsi ZB longitudine, incommensurabilis est et $AΔ$ ipsi $ΔB$ potentiâ. Et quoniam medium est quadratum ex AB , medium igitur et compositum ex quadratis ipsarum $AΔ$, $ΔB$. Et quoniam rectangulum sub AZ , ZB æquale est quadrato

PROPOSITION XXXVI.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des quarrés de ces mêmes droites.

Soient deux médiales AB , $BΓ$ commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale, de manière que la puissance de AB surpasse la puissance de $BΓ$ du quarré d'une droite incommensurable avec AB (53. 10); et sur AB décrivons le demi-cercle $AΔB$, et faisons le reste comme il a été dit auparavant.

Puisque AZ est incommensurable en longueur avec ZB , la droite $AΔ$ est incommensurable en puissance avec $ΔB$. Et puisque le quarré de AB est médial, la somme des quarrés de $AΔ$ et de $ΔB$ est médiale. Et puisque le rectangle sous AZ , ZB est

ἴστιν ἢ BE τῇ ΔZ ⁶. διπλῆ ἔρα ἢ $BΓ$ τῆς $ZΔ$. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν $AB, ZΔ$. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ μέσον ἔρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, ZΔ$ καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $AD, ΔB$, μέσον ἔρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AD, ΔB$. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἢ AB τῇ $BΓ$ μήκει, σύμμετρος δὲ ἢ $ΓB$ τῇ BE ἀσύμμετρος ἔρα καὶ ἢ AB τῇ BE μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, BE ἀσύμμετρον ἐστὶν. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἴστι τὰ ἀπὸ τῶν $AD, ΔB$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, ZΔ$, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν $AD, ΔB$ · ἀσύμμετρον ἔρα ἴστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AD, ΔB$ τῷ ὑπὸ τῶν $AD, ΔB$.

Εὕρηνται ἔρα δύο εὐθεῖαι αἱ $AD, ΔB$ δυναμίαι ἀσύμμετροι, ποιῶνται τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων¹⁰ μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. Ὅτι ποιῶνται.

égal au carré de l'une ou de l'autre des droites $BE, \Delta Z$, la droite BE est égale à ΔZ ; donc $BΓ$ est double de $ZΔ$; le rectangle sous $AB, BΓ$ est donc double du rectangle sous $AB, ZΔ$. Mais le rectangle sous $AB, BΓ$ est médial; le rectangle sous $AB, ZΔ$ est donc médial; mais il est égal au rectangle sous $AD, ΔB$ (34. lem. 1. 10.); le rectangle sous $AD, ΔB$ est donc médial. Et puisque AB est incommensurable en longueur avec $BΓ$, et que $ΓB$ est commensurable avec BE , la droite AB est incommensurable en longueur avec BE ; le carré de AB est donc incommensurable avec le rectangle sous AB, BE (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés de AD et de $ΔB$ est égale au carré de AB , et le rectangle sous $AB, ZΔ$, c'est-à-dire le rectangle sous $AD, ΔB$, est égal au rectangle sous AB, BE ; la somme des carrés de AD et de $ΔB$ est donc incommensurable avec le rectangle sous $AD, ΔB$.

On a donc trouvé deux droites $AD, ΔB$ incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme des carrés de ces mêmes droites. Ce qu'il fallait faire.

ex alterutra ipsarum $BE, \Delta Z$, æqualis igitur est BE ipsi ΔZ ; dupla igitur $BΓ$ ipsius $ZΔ$; quare et rectangulum sub $AB, BΓ$ duplum est rectanguli sub $AB, ZΔ$. Medium autem rectangulum sub $AB, BΓ$; medium igitur et rectangulum sub $AB, ZΔ$; atque est æquale rectangulo sub $AD, ΔB$, medium igitur et rectangulum sub $AD, ΔB$. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, commensurabilis autem $ΓB$ ipsi BE ; incommensurabilis igitur et AB ipsi BE longitudine; quare et ex AB quadratum rectangulo sub AB, BE incommensurabile est. Sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quadrata ex $AD, ΔB$, rectangulo autem sub AB, BE æquale est rectangulum sub $AB, ZΔ$, hoc est rectangulum sub $AD, ΔB$; incommensurabile igitur est compositum ex ipsarum $AD, ΔB$ quadratis rectangulo sub $AD, ΔB$.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ $AD, ΔB$ potentia incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

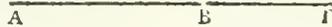
PROPOSITIO XXXVII.

Εὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συν-
τιθῶσιν, ἡ ὅλη ἀλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἐκ
δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον
σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$. λέγω ὅτι ὅλη² ἡ $ΑΓ$
ἀλογός ἐστιν.

Si duæ rationales potentiâ solùm commensu-
rabiles componantur, tota irrationalis est, vo-
cetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentiâ
solùm commensurabiles AB , $BΓ$; dico totam $ΑΓ$
irracionalem esse.



Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$
μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς
δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $BΓ$. ἀλλὰ τῷ
μὲν ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ σύμμετρον ἐστὶ τὸ δις
ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $BΓ$ σύμμετρον
ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$. αἱ γὰρ AB , $BΓ$ ῥηταὶ
αἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ἀσύμμετρον ἄρα

Quoniam enim incommensurabilis est AB
ipsi $BΓ$ longitudine, potentiâ enim solùm sunt
commensurabiles, ut autem AB ad $BΓ$ ita sub
 AB , $BΓ$ rectangulum ad quadratum ex $BΓ$; in-
commensurable igitur est sub AB , $BΓ$ rectan-
gulum quadrato ex $BΓ$. Sed rectangulo quidem
sub AB , $BΓ$ commensurable est rectangulum bis
sub AB , $BΓ$, quadrato autem ex $BΓ$ commensu-
rabilia sunt quadrata ex AB , $BΓ$; ipsæ enim AB ,
 $BΓ$ rationales sunt potentiâ solùm commensura-
biles; incommensurable igitur est bis sub AB ,

PROPOSITION XXXVII.

Si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée droite de deux noms.

Ajoutons les deux rationnelles AB , $BΓ$ commensurables en puissance seulement; je dis que leur somme $ΑΓ$ est irrationnelle.

Car puisque AB est incommensurable en longueur avec $BΓ$, ces deux droites n'étant commensurables qu'en puissance, et que AB est à $BΓ$ comme le rectangle sous AB , $BΓ$ est au carré de $BΓ$ (1. 6), le rectangle sous AB , $BΓ$ est incommensurable avec le carré de $BΓ$ (10. 10). Mais le double rectangle sous AB , $BΓ$ est commensurable avec le rectangle sous AB , $BΓ$ (6. 10), et la somme des carrés de AB et de $BΓ$ est commensurable avec le carré de $BΓ$ (16. 10), car les droites AB , $BΓ$ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; le double

ἔστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BG^2 , καὶ συνβίητι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG , τουτέστι τὸ

BG rectangulum quadratis ex AB, BG , et componendo, rectangulum bis sub AB, BG cum quadratis ex AB, BG , hoc est quadratum ex AG



ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρόν ἐστι τῶ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG . ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG . ὥστε καὶ ἡ AG ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων⁵.

incommensurable est composito ex ipsarum AB, BG quadratis. Rationale autem compositum ex ipsarum AB, BG quadratis; irrationale igitur est quadratum ex AG ; quare et AG irrationalis est; vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συνθεῶσι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἢ ἔλη ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, BG , ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω ὅτι ἔλη ἡ AG ἄλογός ἐστιν.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles AB, BG , rationale continentis; dico totam AG irrationalem esse.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BG μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἄρα' ἀσύμ-

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BG longitudine, et quadrata ex AB, BG igitur

rectangle sous AB, BG est donc incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de BG ; donc, par addition, le double rectangle sous AB, BG avec la somme des quarrés de AB et de BG , c'est-à-dire le quarré de AG (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de BG (17. 10). Mais la somme des quarrés de AB, BG est rationnelle; le quarré de AG est donc irrationnel (déf. 10. 10); la droite AG est donc irrationnelle (déf. 11. 10), et sera appelée droite de deux noms.

PROPOSITION XXXVIII.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme sera irrationnelle, et sera la première de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales AB, BG , qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle; je dis que leur somme AG est irrationnelle.

Car, puisque AB est incommensurable en longueur avec BG , la somme des

μετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG· καὶ συν-
θίγντι² τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ δις

incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AB,
BG; et componendo, quadrata ex AB, BG cum



ὑπὸ τῶν AB, BG, ὥστε ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AΓ,
ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν AB, BG. Ρητὸν δὲ
τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG, ὑπέκινται γὰρ αἱ AB, BG
ῤητὸν περιέχουσαι³. ἄλλοιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AΓ
ἄλλοιον ἄρα ἢ AΓ, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων
πρώτη⁴.

rectangulo bis sub AB, BG, quod est quadratum
ex AΓ, incommensurable est rectangulo sub
AB, BG. Rationale autem rectangulum sub AB,
BG, supponuntur enim ipsæ AB, BG rationale
continere; irrationale igitur quadratum ex AΓ;
irrationalis igitur AΓ, vocetur autem ex binis
mediis prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

PROPOSITIO XXXIX.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συν-
τεθῶσι, μέσον περιέχουσαι ἢ ἔλη ἄλλοιός ἐστι,
καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensura-
biles componantur, medium continentes, tota
irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis
secunda.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον
σύμμετροι αἱ AB, BG, μέσον περιέχουσαι λέγω
ὅτι ἄλλοιός ἐστιν ἢ AΓ.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ so-
lùm commensurabiles AB, BG, medium conti-
nentes; dico irrationalem esse AΓ.

quarrés de AB et de BG est incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (15. 10); donc, par addition, la somme des quarrés de AB et de BG avec le double rectangle sous AB, BG, c'est-à-dire le quarré de AΓ (4. 2), est incommensurable avec le rectangle sous AB, BG. Mais le rectangle sous AB, BG est rationel, car les droites AB, BG sont supposées comprendre un rectangle rationel; le quarré de AΓ est donc irrationnel; la droite AΓ sera donc irrationnelle, et sera appelée la première de deux médiales.

PROPOSITION XXXIX.

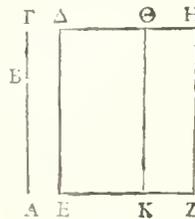
Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales AB, BG, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale; je dis que la droite AΓ est irrationnelle.

208 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκκείσθω γάρ¹ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβελήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιῶν τὴν ΔΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβελήσθω δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ² ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ΑΒ, ΒΓ· μίσα ἄρα ἐστὶ³ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Μέσον δὲ ὑπέκειται καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν

Exponatur enim rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΓ æquale ad ΔΕ applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ. Et quoniam quadratum ex ΑΓ æquale est et quadratis ex ΑΒ, ΒΓ et rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, applicetur etiam quadratis ex ΑΒ, ΒΓ ad ΔΕ æquale ΕΘ; reliquum igitur ΖΘ æquale est rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ. Et quoniam media est utraque ipsarum ΑΒ, ΒΓ; media igitur sunt et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ. Medium autem supponitur et rectangulum



ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μίσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται⁴ ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ΔΘ, ΘΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Ἐπεὶ οὖν⁵ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ

bis sub ΑΒ, ΒΓ, atque est quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale ΕΘ, rectangulo verò bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale ΖΘ; medium igitur utrumque ipsorum ΕΘ, ΘΖ, et ad rationalem ΔΕ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum ΔΘ, ΘΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Quoniam igitur incommensurabilis est

Soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un parallélogramme ΔΖ, qui étant égal au carré de ΑΓ, ait ΔΗ pour largeur (45. 1). Puisque le carré de ΑΓ est égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, et du double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (4. 2), appliquons à ΔΕ un rectangle ΕΘ égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, le rectangle restant ΖΘ sera égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ. Mais chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, les carrés de ΑΒ et de ΒΓ sont donc médiaux. Et puisque, par supposition, le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, que ΕΘ est égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, et que ΖΘ est égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, chacun des rectangles ΕΘ, ΘΖ est médial, et ils sont appliqués à la rationnelle ΔΕ; chacune des droites ΔΘ, ΘΗ est donc rationnelle (23. 10) et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΒ est incom-

AB τῆ βΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν βΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, βΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, βΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρόν ἐστι τὸ συγχεόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, βΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, βΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, βΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ συγχεόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, βΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, βΓ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, βΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, βΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ΕΘ τῷ ΟΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῆ ΘΗ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί· αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΔΗ ἀλογός ἐστι. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἀλογόν ἐστιν· ἀλογον ἄρα ἔστι τὸ ΔΖ χωρίον· καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἀλογός ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἀλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα¹⁰.

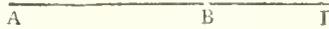
AB ipsi βΓ longitudine, atque est ut AB ad βΓ ita ex AB quadratum ad rectangulum sub AB, βΓ; incommensurable igitur est ex AB quadratum rectangulo sub AB, βΓ. Sed quadrato quidem ex AB commensurable est compositum ex quadratis ipsarum AB, βΓ, rectangulo autem sub AB, βΓ commensurable est rectangulum bis sub AB, βΓ; incommensurable igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB, βΓ, rectangulo bis sub AB, βΓ. Sed quadratis quidem ex AB, βΓ æquale est ipsum ΕΘ, rectangulo autem bis sub AB, βΓ æquale est ipsum ΟΖ; incommensurable igitur est ΕΘ ipsi ΟΖ; quare et ΔΘ ipsi ΘΗ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem rationales; ipsæ ΔΘ, ΘΗ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; quare ΔΗ irrationalis est. Rationalis autem ΔΕ, sed sub irrationali et rationali contentum rectangulum irrationale est; irrationale igitur est ΔΖ spatium; et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΖ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem ex binis mediis secunda.

mesurable en longueur avec βΓ, et que AB est à βΓ comme le carré de AB est au rectangle sous AB, βΓ (1. 6), le carré de AB sera incommensurable avec le rectangle sous AB, βΓ (10. 10). Mais la somme des carrés de AB et de βΓ est commensurable avec le carré de AB, et le double rectangle sous AB, βΓ est commensurable avec le rectangle sous AB, βΓ; la somme des carrés de AB et de βΓ est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, βΓ (14. 10). Mais ΕΘ est égal à la somme des carrés de AB et de βΓ, et ΟΖ est égal au double rectangle sous AB, βΓ; donc ΕΘ est incommensurable avec ΟΖ; la droite ΔΘ est donc incommensurable en longueur avec ΟΔ. Mais on a démontré que ces droites sont rationnelles; les droites ΔΘ, ΘΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΔΗ est donc irrationnelle (57. 10). Mais la droite ΔΕ est rationnelle, et un rectangle compris sous une irrationnelle et sous une rationnelle est irrationnel; la surface ΔΖ est donc irrationnelle, et par conséquent la droite qui peut cette surface. Mais la puissance de ΑΓ est égale à ΔΖ; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée la seconde de deux médiales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Εὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντε-
θῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
μέσον· ἢ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω
δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι, αἱ AB , BG , ποιῶσαι τὰ προκείμενα·
λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AG .



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπο τῶν AB , BG μέσον ἐστὶ,
καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AB , BG μέσον ἐστί.
Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , BG ῥητόν·
ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , BG
τῶ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , BG · ὥστε
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , BG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ
τῶν AB , BG , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG , ἀσύμ-
μετρόν ἐστι τῶ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 AB , BG · ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG ·
ὥστε καὶ ἡ AG ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μείζων.

PROPOSITIO XL.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles
componantur, facientes quidem compositum ex
ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem
sub ipsis medium; tota recta irrationalis est,
vocetur autem major.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-
commensurabiles AB , BG , facientes proposita;
dico irrationalem esse AG .

Quoniam enim rectangulum sub AB , BG me-
dium est, et rectangulum igitur bis sub AB ,
 BG medium est. Sed compositum ex quadratis
ipsarum AB , BG rationale; incommensurable
igitur est rectangulum bis sub AB , BG compo-
sito ex quadratis ipsarum AB , BG ; quare et
ex AB , BG quadrata cum rectangulo bis sub
 AB , BG , quod est quadratum ex AG , incommen-
surabilia sunt composito ex quadratis ipsarum
 AB , BG ; irrationale igitur est quadratum ex AG ;
quare et AG irrationalis est, vocetur autem major.

PROPOSITION XL.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée majeure.

Ajoutons les deux droites AB , BG incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationnelle.

Puisque le rectangle sous AB , BG est médial, le double rectangle sous AB , BG sera médial (24. cor. 10). Mais la somme des quarrés de AB et de BG est rationnelle; le double rectangle sous AB , BG est donc incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de BG ; donc la somme des quarrés de AB et de BG avec le double rectangle sous AB , BG , c'est-à-dire le quarré de AG (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de BG (17. 10); le quarré de AG est donc irrationnel; la droite AG est donc irrationnelle, et elle sera appelée majeure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

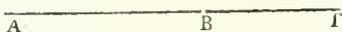
PROPOSITIO XLI.

Εάν δύο εὐθείαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντε-
θῶσι, πρῶτον μὲν συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
ῤητόν· ἢ ἔλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ
ῤητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθείαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι αἱ AB, ΒΓ, πρῶτον μὲν τὰ προκείμενα·
λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles
componantur, facientes quidem compositum ex
ipsarum quadratis medium, rectangulum autem
sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est,
vocetur autem rationale et medium potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-
commensurabiles AB, ΒΓ, facientes proposita;
dico irrationalem esse ΑΓ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
AB, ΒΓ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ
ῤητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκεῖμενον ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τῶν δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ·
ὥστε καὶ συνθέντι² τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν
ἐστὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. ῤητόν δὲ τὸ δις
ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ·
ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῤητὸν καὶ μέσον
δυναμένη².

Quoniam enim compositum ex quadratis ip-
sarum AB, ΒΓ medium est, rectangulum autem
bis sub AB, ΒΓ rationale; incommensurable
igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB,
ΒΓ rectangulo bis sub AB, ΒΓ; quare et compo-
nendo, quadratum ex ΑΓ incommensurable est
rectangulo bis sub AB, ΒΓ. Rationale au em rec-
tangulum bis sub AB, ΒΓ; irrationalis igitur
quadratum ex ΑΓ; irrationalis igitur ΑΓ, vo-
cetur autem rationale et medium potens.

PROPOSITION XLI.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationnel, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut une rationnelle et une médiale.

Ajoutons les deux droites AB, ΒΓ incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite ΑΓ est irrationnelle.

Car puisque la somme des quarrés des droites AB, ΒΓ est médiale, et que le double rectangle sous AB, ΒΓ est rationnel, la somme des quarrés de AB et de ΒΓ sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, ΒΓ; donc, par addition, le quarré de ΑΓ est incommensurable avec le double rectangle sous AB, ΒΓ (17. 10). Mais le double rectangle sous AB, ΒΓ est rationnel; le quarré de ΑΓ est donc irrationnel; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle est appelée celle qui peut une rationnelle et une médiale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛ'.

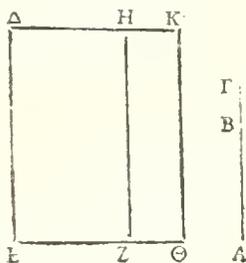
PROPOSITIO XLII.

Εάν δύο εὐθείαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιῶσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων¹. ἢ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθείαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AB, ΒΓ, ποιῶσαι τὰ προκείμενα². λέγῃ ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis; tota recta irrationalis est, vocetur autem bina media potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AB, ΒΓ, facientes proposita; dico ΑΓ irrationalem esse.



Εκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ. ἕλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Καὶ ἔπει μίσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB,

Exponatur rationalis ΔΕ, et applicetur ad ΔΕ quadratis quidem ex AB, ΒΓ æquale ipsum ΔΖ, rectangulo autem bis sub AB, ΒΓ æquale ipsum ΗΘ; totum igitur ΔΘ æquale est quadrato ex ΑΓ. Et quoniam medium est compositum ex qua-

PROPOSITION XLII.

Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationelle, et sera appelée celle qui peut deux médiales.

Ajoutons les deux droites AB, ΒΓ incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite ΑΓ est irrationelle.

Soit la rationelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un rectangle ΔΖ égal à la somme des quarrés de AB et de ΒΓ, et que ΗΘ soit égal au double rectangle sous AB, ΒΓ; le rectangle entier ΔΘ sera égal au quarré de ΑΓ (4. 2). Et puisque la somme des

ΒΓ, καὶ ἔστιν ὅσον τῷ ΔΖ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τευτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα⁵ ἐστὶ τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρος ἐστὶ. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυναμει μένον σύμμετροι· ἄλλοις ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλλοις ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλλοις ἐστὶ. Δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ ΑΓ· ἄλλοις ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη⁶.

dratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ, atque est æquale ipsi ΔΖ; medianum igitur est et ΔΖ; et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Propter eadem utique et ΗΚ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΗΖ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurable igitur est ΔΖ ipsi ΗΘ; quare et ΔΗ ipsi ΗΚ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ΔΗ, ΗΚ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; irrationalis igitur est ΔΚ quæ appellatur ex binis nominibus. Rationalis autem ΔΕ; irrationalis igitur est ΔΘ, et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΘ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem bina media potens.

quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΖ, le rectangle ΔΖ est médial, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; donc ΔΗ est rationel (23. 10), et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Par la même raison, la rationelle ΗΚ est incommensurable en longueur avec ΗΖ, c'est-à-dire avec ΔΕ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le rectangle ΔΖ est incommensurable avec ΗΘ; donc ΔΗ est incommensurable avec ΗΚ (1. 6, et 10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΗ, ΗΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; donc ΔΚ est la droite irrationelle appelée de deux noms (57. 10). Mais ΔΕ est rationel; donc ΔΘ est irrationel (59. 10), et par conséquent la droite qui peut ΔΘ. Mais ΑΓ peut ΔΘ; donc ΑΓ est irrationel, et cette droite est appelée celle qui peut deux médiales.

A H M M A.

Εκκείσθω εὐθεΐα ἡ AB , καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκατέρω τῶν Γ, Δ , καὶ ὑποκείσθω μείζων ἡ AG τῆς ΔB . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AG, GB μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta, \Delta B$.

Τετμήσθω γὰρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E . Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ AG τῆς ΔB , κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ $\Delta\Gamma$. καὶ² λοιπὴ ἄρα ἡ $A\Delta$ λοιπῆς τῆς GB μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ AE τῇ EB . ἐλάττων ἄρα

L E M M A.

Exponatur recta AB , et secetur tota in partes inæquales ad utrumque punctorum Γ, Δ , et supponatur major AG quam ΔB ; dico quadrata ex AG, GB majora esse quadratis ex $A\Delta, \Delta B$.

Secetur enim AB bifariam in E . Et quoniam major est AG quam ΔB , communis auferatur $\Delta\Gamma$; et reliqua igitur $A\Delta$ quam reliqua GB major est. Æqualis autem AE ipsi EB ; minor



ἐστίν³ ἡ ΔE τῆς $E\Gamma$. τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $E\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EB , ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta, \Delta B$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς EB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AG, GB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $E\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta, \Delta B$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE . Ὡν τὸ ἀπὸ τῆς ΔE ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $E\Gamma$. καὶ λοιπὸν ἄρα

igitur est ΔE quam $E\Gamma$; ergo Γ, Δ puncta non æqualiter distant à bipartitâ sectione. Et quoniam sub AG, GB rectangulum cum quadrato ex $E\Gamma$ æquale est quadrato ex EB , sed et sub $A\Delta, \Delta B$ rectangulum cum quadrato ex ΔE æquale quadrato ex EB ; ergo sub AG, GB rectangulum cum quadrato ex $E\Gamma$ æquale est sub $A\Delta, \Delta B$ rectangulo cum quadrato ex ΔE . Quorum quadratum ex ΔE minus est quadrato ex $E\Gamma$; et

L E M M E.

Soit la droite AB , que cette droite entière soit coupée en parties inégales aux points Γ, Δ , et supposons AG plus grand que ΔB ; je dis que la somme des quarrés AG et de GB est plus grande que la somme des quarrés de $A\Delta$ et de ΔB .

Coupons AB en deux parties égales en E . Puisque AG est plus grand que ΔB , retranchons la partie commune $\Delta\Gamma$; le reste $A\Delta$ sera plus grand que le reste GB . Mais AE est égal à EB ; donc ΔE est plus petit que $E\Gamma$; les points Γ, Δ ne sont donc pas également éloignés du point qui coupe AB en deux parties égales. Et puisque le rectangle sous AG, GB avec le quarré de $E\Gamma$ est égal au quarré de EB , et que le rectangle sous $A\Delta, \Delta B$ avec le quarré de ΔE est égal au quarré de EB (5. 2), le rectangle sous AG, GB avec le quarré de $E\Gamma$ sera égal au rectangle sous $A\Delta, \Delta B$ avec le quarré de ΔE . Mais le quarré de ΔE est plus petit que le quarré de $E\Gamma$; le rec-

τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζον ἐστι τοῦ συγκείμενου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

reliquum igitur rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ; quare et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ; et reliquum igitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ majus est composito ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημείον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημείον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

PROPOSITIO XLIII.

Recta ex binis nominibus ad unum solum punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus recta ΑΒ divisa in nomina ad Γ; ergo ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico ΑΒ ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ solum commensurabiles.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον

Si enim possibile, dividatur in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ rationales sint potentiâ solum com-

tangle restant sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; la somme restante des quarrés de ΑΓ et de ΒΓ est donc plus grande que la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIII.

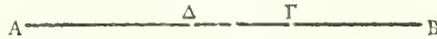
La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

Que la droite ΑΒ de deux noms soit divisée en ses noms au point Γ; les droites rationnelles ΑΓ, ΓΒ ne seront commensurables qu'en puissance; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être coupée en un autre point en deux rationnelles commensurables en puissance seulement.

Car si cela se peut, qu'elle soit coupée au point Δ, de manière que les ra-

συμμέτρους. Φανερόν δὴ ἔστι ἢ $ΑΓ$ τῆ $ΔΒ$ οὐκ ἔστιν ἢ αὐτή. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἔσται δὴ καὶ ἢ $ΑΔ$ τῆ $ΓΒ$ ἢ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἢ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$ οὕτως ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$, καὶ ἔσται ἢ $ΑΒ$ κατὰ τὸ αὐτὸ τμήμα κατὰ τὸ $Γ$ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ $Δ$, ἔπερ οὐκ ὑπόκειται οὐκ ἄρα ἢ $ΑΓ$ τῆ $ΔΒ$ ἔστιν ἢ αὐτή· διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ $Γ, Δ$ σημεῖα οὐκ

mensurabiles. Evidens utique est $ΑΓ$ cum ipsa $ΔΒ$ non esse eandem. Si enim possibile, sit; erit igitur et $ΑΔ$ cum ipsa $ΓΒ$ eadem; et erit ut $ΑΓ$ ad $ΓΒ$ ita $ΒΔ$ ad $ΔΑ$, et erit $ΑΒ$ in idem segmentum divisa in puncto $Γ$ atque in puncto $Δ$, quod non supponitur; non igitur $ΑΓ$ cum ipsa $ΔΒ$ est eadem; ob id igitur et $Γ, Δ$ puncta non æqualiter distant



ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας³. ἢ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$, τούτω διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$, διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ ἴσα εἶναι τῆ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ διαφέρει ρητῶν, ρητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$

à bipartitâ sectione; quo igitur differunt ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata à quadratis ex $ΑΔ, ΔΒ$, hoc differt et rectangulum bis sub $ΑΔ, ΔΒ$ à rectangulo bis sub $ΑΓ, ΓΒ$, propterea quòd et ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata cum rectangulo bis sub $ΑΓ, ΓΒ$ et ex $ΑΔ, ΔΒ$ quadrata cum rectangulo bis sub $ΑΔ, ΔΒ$ æqualia sunt quadrato ex $ΑΒ$. Sed ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata à quadratis ex $ΑΔ, ΔΒ$ differunt rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis igitur sub $ΑΔ, ΔΒ$ à rectangulo

tionelles $ΑΔ, ΔΒ$ ne soient commensurables qu'en puissance. Il est évident que $ΑΓ$ n'est pas égal à $ΔΒ$. Car que cela soit, si c'est possible; la droite $ΑΔ$ sera alors égale à $ΓΒ$, la droite $ΑΓ$ sera à la droite $ΓΒ$ comme $ΒΔ$ est à $ΔΑ$, et la droite $ΑΒ$ sera coupée en segments égaux au point $Δ$ qu'au point $Γ$, ce qui n'est pas supposé; donc $ΑΓ$ n'est pas égale à $ΔΒ$; donc les points $Γ, Δ$ ne sont pas également éloignés du point qui coupe $ΑΒ$ en deux parties égales; donc la différence de la somme des quarrés de $ΑΓ$ et de $ΒΓ$, à la somme des quarrés de $ΑΔ$ et de $ΔΒ$, est égale à la différence du double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$, au double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$; parce que la somme des quarrés de $ΑΓ$ et de $ΓΒ$ avec le double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$, et la somme des quarrés de $ΑΔ$ et $ΔΒ$ avec le double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$, sont égales chacune au quarré de $ΑΒ$ (4. 2). Mais la différence de la somme des quarrés de $ΑΓ$ et de $ΓΒ$, à la somme des quarrés de $ΑΔ$ et de $ΔΒ$, est une surface rationnelle; car ces deux sommes sont rationnelles; donc la différence du double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$ au double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$ est une surface

ΓΒ διαφέρει ῥητῶ μέσα ὄντα, ἕπερ ἄτοπον· μέσον γάρ⁵ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῶ· οὐκ ἄρα ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημείον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

bis sub ΑΓ, ΓΒ differt rationali, media existentia, quod absurdum; medium enim non medium superat rationali; non igitur recta ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

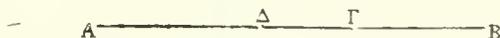
PROPOSITIO XLIV.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημείον διαιρεῖται¹.

Ex binis mediis prima ad unum solum punctum dividitur.

Ἐστω² ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἢ ΑΒ κατ' ἄλλο σημείον οὐ διαιρεῖται.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.



Εἰ γάρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ mediæ sint potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ

rationelle, ces surfaces étant médiales, ce qui est absurde; car une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une rationelle (27. 10); une droite de deux noms ne peut donc pas être divisée en plus d'un point; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIV.

La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite ΑΒ, première de deux médiales, soit divisée en Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle; je dis que la droite ΑΒ ne peut être divisée en un autre point.

Car, si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ, de manière que les médiales ΑΔ, ΔΒ, commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle. Puisque la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au

ὕπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῶ δὲ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα ῥητῶ ἄρα δια-

à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, rationali autem differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, rationalia enim utraque;



φέρει και τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ἰνόματα καθ' ἓν ἄρα μόνον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

rationali igitur differunt et ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, media existentia, quod absurdum; non igitur ex binis mediis prima ad aliud et aliud punctum dividitur in nomina; ad unum igitur solùm. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'..

PROPOSITIO XLV.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται'.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυναμίμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φα-

Ex binis mediis secunda ad unum solùm punctum dividitur.

Sit ex binis mediis secunda ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes;

double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ à la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ, et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ diffèrent d'une surface rationnelle; car l'une et l'autre de ces grandeurs sont rationnelles; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ diffère donc d'une surface rationnelle de la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est absurde (27. 10); donc une première de deux médiales ne peut pas être divisée en ses noms en deux points différents; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLV.

La seconde de deux média'es ne peut être divisée qu'en un seul point.

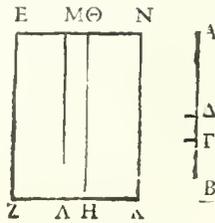
Que ΑΒ, seconde de deux noms, soit divisée au point Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, qui comprennent une surface médiale, ne soient commensu-

περὸν δὴ ἔτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ² οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διηρήσθω καὶ³ κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ. Δῆλον δὴ ἔτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ⁴, ὡς ἐπάνω εἰδείξαμεν, καὶ τὰς

evidens est utique punctum Γ non esse in bipartitâ sectione, quoniam non sunt longitudine commensurabiles; dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut ΑΓ cum ipsâ ΔΒ non sit eadem, sed ΑΓ major ex hypothesi. Evidens est utique quadrata ex ΑΔ, ΔΒ minora esse quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, ut supra ostendimus, et ΑΔ, ΔΒ medias esse potentia



ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνου συμμέτρους μέσον περιεχούσας. Καὶ⁵ ἐκκείσθω ῥητὴ EZ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον⁶ παραβεβλήσθω τὸ EK, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ EH· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἔστί τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἄπει-

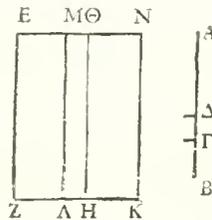
solum commensurabiles, medium continentes. Et exponatur rationalis EZ, et quadrato quidem ex AB æquale ad EZ parallelogrammum rectangulum applicetur EK, quadratis autem ex ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur EH; reliquum igitur ΘΚ æquale est rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Rursus et quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, quæ minora os-

rables qu'en puissance. Il est évident que le point Γ n'est pas le milieu de AB, parce que les droites ΑΓ, ΓΒ ne sont pas commensurables en longueur; je dis que la droite AB ne peut pas être divisée en un autre point.

Car si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ, de manière que ΑΓ ne soit pas égal à ΔΒ, et supposons que ΑΓ est plus grand que ΔΒ. Il est évident que la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ est plus petite que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme nous l'avons démontré plus haut (lem. 43. 10), et que les médiales ΑΔ, ΔΒ, qui comprennent une surface médiale, ne sont commensurables qu'en puissance (43. 10). Soit la rationelle EZ; appliquons à EZ un rectangle EK égal au quarré de AB, et retranchons EH égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ; le reste ΘΚ sera égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (4. 2). De plus, retranchons EA égal à la somme des quarrés de ΑΔ et ΔΒ, qui est plus petite que

ἐλάσσονα εἰδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα καὶ⁸ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμε-

tensa sunt quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, æquale auferatur ΕΛ; et reliquum igitur ΜΚ æquale est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam media sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ; medium igitur et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles; incommensu-



τρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ, τῶ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ

rabilis igitur est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine. Ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurable igitur est ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, potentiâ enim sunt commensurabiles ΑΓ, ΓΒ; rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurable est rectangulum bis

la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme on l'a démontré; le reste ΜΚ sera égal au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, le rectangle ΕΗ sera médial; mais ce rectangle est appliqué à la rationnelle ΕΖ; donc ΕΘ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (25. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais les médiales ΑΓ, ΓΒ ne sont commensurables qu'en puissance; donc ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ. Mais ΑΓ est à ΓΒ comme le quarré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (1. 6); le quarré de ΑΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (10. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le quarré de ΑΓ (16. 10), car les droites ΑΓ, ΓΒ sont commensurables en puissance, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commen-

τῶν AB , GB · καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AG , GB ἴσον ἐστὶ τὸ EH , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AG , GB ἴσον ἐστὶ τὸ ΘK · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ EH τῷ ΘK · ὥστε καὶ ἡ $E\Theta$ τῇ ΘN ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ $E\Theta$, ΘN ἄρα ῥηταί· εἴσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ἕλη ἀλογός ἐστιν, ἡ καλυμένη ἐκ δύο ἰσμεμάτων· ἡ EN ἄρα¹⁰ ἐκ δύο ἰσμεμάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ . Κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ EM , MN ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ EN ἐκ δύο ἰσμεμάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διηρημένη, τό, τε Θ καὶ τὸ M , καὶ οὐκ ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ MN ἢ αὐτῇ, ἐπειδὴ περ¹¹ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AD , ΔB . Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AD , ΔB μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ AD , ΔB · πολλῶν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB , τουτέστι τὸ EH , μείζον ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AD , ΔB , τουτέστι τοῦ MK ·

sub AG , GB ; et quadrata ex AG , GB igitur incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AG , GB . Sed quadratis quidem ex AG , GB æquale est EH , rectangulo autem bis sub AG , GB æquale est ΘK ; incommensurable igitur est EH ipsi ΘK ; quare et $E\Theta$ ipsi ΘN incommensurabilis est longitudine; et sunt rationales; ergo $E\Theta$, ΘN rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus; recta EN igitur ex binis nominibus est divisa in Θ . Propter eadem utique ostendentur et EM , MN rationales potentiâ solùm commensurabiles, et erit EN ex binis nominibus ad aliud et aliud divisa, et ad Θ et ad M , et non est $E\Theta$ cum ipsâ MN eadem, quoniam quadrata ex AG , GB majora sunt quadratis ex AD , ΔB . Sed quadrata ex AD , ΔB majora sunt rectangulo bis sub AD , ΔB ; multò igitur et quadrata ex AG , GB , hoc est EH , majus est rectangulo bis sub AD , ΔB , hoc est

surable avec le rectangle sous AG , GB ; la somme des carrés de AG et de GB est donc incommensurable avec le double rectangle sous AG , GB . Mais EH est égal à la somme des carrés de AG et de GB , et ΘK est égal au double rectangle sous AG , GB ; donc EH est incommensurable avec ΘK ; donc $E\Theta$ est incommensurable en longueur avec ΘN ; mais ces droites sont rationnelles; les rationnelles $E\Theta$, ΘN ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur somme est irrationnelle, et est appelée droite de deux noms (37. 10); la droite EN de deux noms est donc divisée au point Θ . On démontrera semblablement que les rationnelles EM , MN sont commensurables en puissance seulement, et que la droite EN de deux noms sera divisée en deux points; savoir, en Θ et en M ; mais $E\Theta$ n'est pas égal à MN , puisque la somme des carrés de AG et de GB est plus grande que la somme des carrés de AD et de ΔB (45. 10). Mais la somme des carrés de AD et de ΔB est plus grande que le double rectangle sous AD , ΔB ; la somme des carrés de AG , GB , c'est-à-dire le rectangle EH , est donc plus grande que le double rectangle sous AD , ΔB ; c'est-à-dire,

ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτή. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipso MK; quare et EΘ quàm MN major est; ergo EΘ cum ipsâ MN non est eadem. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μέρον σημεῖον διαιρεῖται'.

Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συζυγόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημείον οὐ διαιρεῖται.

PROPOSITIO XLVI.

Major ad idem solum punctum dividitur.

Sit major AB divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rationale, rectangulum autem sub ΑΓ, ΓΒ medium; dico AB in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συζυγόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. Καὶ

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ rationale, rectangulum autem

que le rectangle MK; donc EΘ est plus grand que MN; donc EΘ n'est pas égal à MN. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVI.

La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite majeure soit divisée en Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puissance seulement, la somme des quarrés de ΑΓ et de ΒΓ étant rationnelle, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant médial; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée au point Δ, si cela est possible, de manière que les droites ΑΔ, ΔΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ étant rationnelle, et le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ étant médial.

ἐπεὶ ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τοῦτω διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῶ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ ὑπερέχει ῥητῶ⁵, μέσα ἔντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἢ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον διαιρεῖται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

sub ipsis medium. Et quoniam quo differunt ex ΑΓ, ΒΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, hoc differt et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΒΒ; sed quadrata ex ΑΓ, ΒΒ quadrata ex ΑΔ, ΔΒ superant rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΒΒ superat rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur major ad aliud et aliud punctum dividitur; ad idem solum dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

PROPOSITIO XLVII.

Ἡ ῥητὴν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται¹.

Recta rationalis et medium potens ad unum solum punctum dividitur.

Ἐστω ῥητὴν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὅστε τὰς ΑΓ, ΒΒ δυνάμεις ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συσχεμί-

Sit rationalis et medium potens ipsa ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΒΒ potentia incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex

Puisque la différence de la somme des quarrés de ΑΓ et de ΒΒ, à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ (4. 2), est égale à la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au double rectangle sous ΑΓ, ΒΒ, et que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΒΒ surpasse d'une surface rationelle la somme des quarrés de ΑΔ, et de ΔΒ, car ces surfaces sont rationelles, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΒΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est impossible (27. 10); une majeure ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVII.

La droite qui peut une rationelle et une médiale ne peut être divisée qu'en un point.

Que la droite ΑΒ, pouvant une rationelle et une médiale, soit divisée au point Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΒΒ soient incommensurables en puis-

224 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ιον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δις² ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ medium; rectangulum autem bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δύναμει ἀσύμμετρος εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συζκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δις³ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῶ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ⁵, μέσα ὄντα, ὕπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim possibile, dividatur in puncto Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ medium, rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ à rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc differunt et ex ΑΔ, ΔΒ quadrata à quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulum autem bis sub ΑΓ, ΓΒ à rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ superat rationali; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur rationale et medium potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

sance, la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ étant médiale, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée en Δ, si cela est possible, de manière que les droites ΑΔ, ΔΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ étant médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ étant rationel. Puisque la différence du double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (4. 2) est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ à la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ, et que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ surpasse d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ surpassera d'une surface rationelle la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ; mais ces surfaces sont médiales, ce qui est impossible (27. 10); une droite pouvant une rationelle et une médiale ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μή.

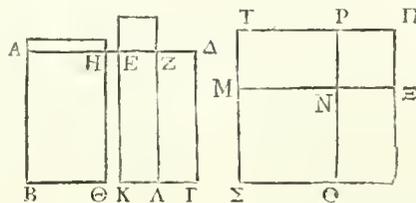
PROPOSITIO XLVIII.

Η δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται¹.

Ἐστω δύο μέσα δυναμένη² ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τό, τε συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσων, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσων, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῶν συγκεῖμενά ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιούσα τὰ προκείμενα.

Bina media potens ad unum solūm punctum dividitur.

Sit bina media potens ΑΒ divisa in Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiā incommensurabiles sint, facientes et compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, et rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsarum quadratis composito ex binis rectangulis sub ipsis; dico ΑΒ ad aliud punctum non dividi, faciens proposita.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν διδόνότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ,

Si enim possibile, dividatur in Δ, ita ut rursus scilicet ΑΓ cum ipsā ΔΒ non sit eadem, sed major ex hypothesi ΑΓ, et exponatur rationalis ΕΖ, et applicetur ad ΕΖ quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ΕΗ, rectangulo autem bis sub

PROPOSITION XLVIII.

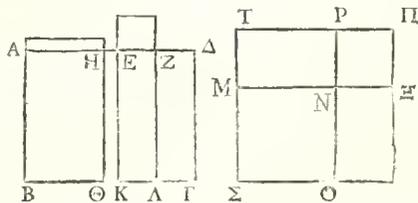
La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite ΑΒ, qui peut deux médiales, soit divisée en Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ étant médiale; le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant aussi médial; la somme de leurs quarrés étant incommensurable avec le double rectangle compris sous ces droites; je dis que la droite ΑΒ n'est pas divisée en un autre point, en faisant ce qui est proposé.

Car, qu'elle soit divisée en Δ, si cela est possible, de manière que ΑΓ ne soit pas égal à ΔΒ', et supposons que ΑΓ soit la plus grande. Soit la rationnelle ΕΖ, et appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΗ égal à la somme des quarrés de

τῶ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Πάλιν δὲ παραβελήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῶ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται ῥητὴ ἄρα

ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΚ; totum igitur ΕΚ æquale est quadrato ex ΑΒ. Rursus et applicetur ad ΕΖ quadratis ex ΑΔ, ΔΒ æquale ΕΛ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ reliquo ΜΚ æquale est. Et quoniam medium supponitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ; medium igitur est et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΘΕ, et



ἴστιν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΘΝ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρὸν ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρὸν ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρὸς ἐστίν. Καὶ εἴτι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ἰσομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ. Ομοίως, δὲ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διήρηται,

incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; et ΕΗ igitur ipsi ΘΚ incommensurabile est; quare et ΕΘ ipsi ΘΝ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΕΝ ex binis nominibus est divisa in Θ. Similiter utique ostendemus et

ΑΓ et de ΓΒ, et ΘΚ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme entier ΕΚ sera égal au quarré de ΑΒ (4. 2). De plus, appliquons à ΕΖ le parallélogramme ΕΛ égal à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ; le double rectangle restant sous ΑΔ, ΔΒ sera égal au reste ΜΚ (4. 2). Et puisque on a supposé que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale; donc ΕΗ est médial, et est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΘΕ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (25. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc ΕΗ est incommensurable avec ΘΚ; donc ΕΘ est incommensurable avec ΘΝ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les rationelles ΕΘ, ΘΝ ne sont donc commensurables qu'en puissance; la droite ΕΝ de deux noms est donc divisée au point Θ. Nous démontrerons semblablement qu'elle est divisée au point Μ; mais

καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἢ αὐτή· ἢ ἄρα ἐκ τῶν³ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διήρεται, ὅπερ ἔστιν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsam in M dividi, et non est EO cum ipsa MN eadem; recta igitur ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur, quod est absurdum; non igitur bina media potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solum punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἥς τὸ μείζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἐαυτῆς μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθω ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

1. Exposita rationali, et recta ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

EO n'est pas égal avec MN ; la droite de deux noms est donc divisée en un point et encore en un autre point, ce qui est absurde (43. 10); une droite qui peut deux médiales n'est donc pas divisée en un point et encore en un autre point; elle n'est donc divisée qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du carré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

γ'. Εάν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ἢ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ'. Πάλιν δὲ εἴαν τὸ μείζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρον ἑαυτῇ μήκει· εἴαν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ἢ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

ε'. Εάν δὲ τὸ ἐλάττον, πέμπτη.

ς'. Εάν δὲ μηδέτερον, ἕκτη².

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐκκείσθωσι δύο ἀριθμοὶ εἰ ΑΓ, ΓΒ, ὅστε τὸν συσκειμένον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ἓν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν ἓν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἢ Δ, καὶ

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du carré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

PROPOSITION XLIX.

Trouver la première de deux noms.

Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que leur somme n'ait pas avec ΓΑ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré (30. lem. 1. 10); soit exposée une rationelle Δ, et que ΕΖ soit commensurable

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quàm minus plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si verò neutrum, sexta.

PROPOSITIO XLIX.

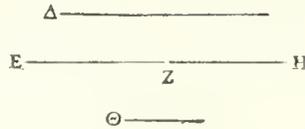
Invenire ex binis nominibus primam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ipsum quidem ΒΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΓΑ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur quædam rationalis Δ, et ipsi Δ

τῆ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ EZ. Καὶ γερρονέτω ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH. Ο δὲ AB πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ

commensurabilis sit longitudine ipsa EZ; rationalis igitur est et EZ. Et fiat ut BA numerus ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH. Ipse autem AB ad ΑΓ rationem habet quam numerus ad numerum; et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex ZH rationem habet quam numerus ad numerum; quare commen-

A Γ B



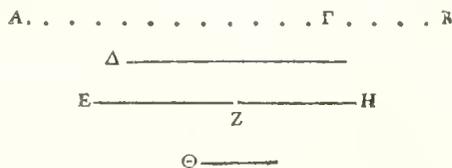
ἀπὸ τῆς EZ τῆ ἀπὸ τῆς ZH. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH. Καὶ ἔπειδ ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνος ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνος ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ EZ τῆ ZH μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δὲ αὐτῶν ἄρα ἰσότητων ἔστιν ἡ EH. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

surabile est ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Atque est rationalis EZ; rationalis igitur et ZH. Et quoniam BA ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi ZH longitudine; ergo EZ, ZH rationales sunt potentia solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est EH. Dico et primam esse.

rable en longueur avec Δ; la droite EZ sera rationelle (déf. 6. 10). Faisons en sorte que le nombre BA soit à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH (cor. 6. 6). Mais AB a avec ΑΓ la raison qu'un nombre a avec un nombre; le carré de EZ a donc avec le carré de ZH la raison qu'un nombre a avec un nombre; le carré de EZ est donc commensurable avec le carré de ZH (6. 10). Mais EZ est rationel; donc ZH est rationel. Et puisque BA n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de EZ n'aura pas avec le carré de ZH la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc rationelles commensurables en puissance seulement; la droite EH est donc de deux noms (57. 10); et je dis qu'elle est la première de deux noms.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῶ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ

Quoniam enim est ut BA numerus ad ipsum AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam AG; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ. Et quoniam est ut BA ad AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; convertendo igitur est ut AB ad BG ita



τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἢ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μείζων δύναται τῶ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἢ ΕΖ τῇ Δ μήκει· ἢ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad BG rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; ergo EZ quam ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH, et commensurabilis EZ ipsi Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est prima. Quod oportebat ostendere.

Car puisque le nombre BA est à AG comme le quarré de EZ est au quarré de ZH, et que BA est plus grand que AG; le quarré de EZ sera plus grand que le quarré de ZH. Que la somme des quarrés des droites ZH, Θ soit égale au quarré de EZ. Puisque BA est à AG comme le quarré de EZ est au quarré de ZH, par conversion, AB sera à BG comme le quarré de EZ est au quarré de Θ. Mais AB a avec BG la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de EZ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10); la puissance de EZ surpasse la puissance de ZH du quarré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont rationelles, et EZ est commensurable en longueur avec Δ; la droite EH est donc la première de deux noms (déf. secondes. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

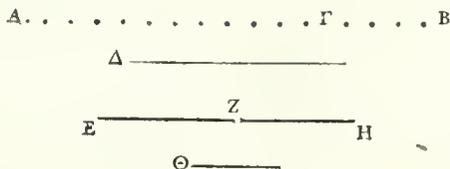
PROPOSITIO L.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ Δ, καὶ τῇ

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΑΓ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis Δ, et ipsi Δ com-



Δ σύμμετρος ἔστω ἢ ΖΗ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΖΗ. Γεγοιέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ

mensurabilis sit ΖΗ longitudine; rationalis igitur est ΖΗ. Fiat et ut ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ ita ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex ΖΕ; commensurable igitur est ex ΗΖ quadratum quadrato ex ΖΕ; rationalis igitur est et ΖΕ. Et quoniam ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex

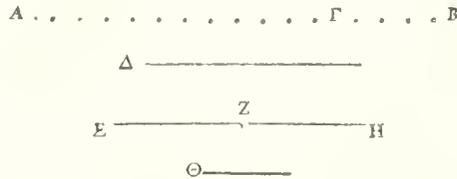
PROPOSITION L.

Trouver la seconde de deux noms.

Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré (5o lem. 1. 10), et que ΑΒ n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit la rationnelle Δ, et que ΖΗ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite ΖΗ sera rationnelle. Faisons en sorte que le nombre ΓΑ soit au nombre ΑΒ comme le carré de ΗΖ est au carré de ΖΕ (6. cor. 10); le carré de ΗΖ sera commensurable avec le carré de ΖΕ (6. 10); la droite ΖΕ est donc rationnelle (déf. 6. 10). Et puisque le nombre ΓΑ n'a pas avec le nombre ΑΒ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΗΖ n'aura pas non plus avec le carré de ΖΕ la raison

τῆς ΖΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΗΖ τῇ ΖΕ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ἰσομάτων ἐστὶν ἢ ΕΗ. Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρᾳ.

ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est HZ ipsi ZE longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ipsa EH. Ostendendum est et secundam esse.



Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω τῶ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαιτι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἀλλ' ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΖ τῇ Θ μήκει·

Quoniam enim invertendo est ut AB numerus ad ipsum ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam ΑΓ; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB ad ΒΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Sed AB ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare

qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite HZ est donc incommensurable en longueur avec ZE (g. 10); les droites EZ, ZH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; EH est donc une droite de deux noms (57. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la seconde de deux noms.

Car puisque, par inversion, le nombre AB est à ΑΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH, et que BA est plus grand que ΑΓ, le quarré de EZ est plus grand que le quarré de ZH. Que la somme des quarrés des droites ZH, Θ soit égale au quarré de EZ; par conversion, AB sera à ΒΓ comme le quarré de EZ est au quarré de Θ. Mais AB a avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de EZ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec Θ (g. 10);

ὥστε ἢ EZ τῇ ZH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμετρῶν ἑαυτῆς. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ EZ, ZH
 διαμέτρως μίον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἕλαττον
 ὄνομα συμμετρῶν ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ³ τῇ Δ
 μήκει· ἢ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.
 Οἷον εἶδει δεῖξαι.

EZ quam ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi
 commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH po-
 tentiâ solùm commensurabiles, et ZH minus
 nomen commensurabile est expositâ rationali
 Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus
 est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νά.

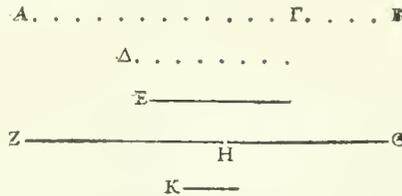
PROPOSITIO LI.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν
 συσκέιμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ
 λόγον ἔχειν ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ
 compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem rationem
 habeat quam quadratus numerus ad quadratum



γωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχει
 ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν·
 ἐκκείσθω δὲ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθ-
 μὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον

nummum, ad ΑΓ autem rationem non habeat
 quam quadratus numerus ad quadratum nume-
 rum; exponatur autem quidam et alius non
 quadratus numerus Δ, et ad utrumque ipsorum

(9. 10); la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du carré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ZH est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Δ; la droite EH est donc une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LI.

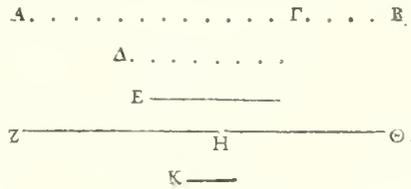
Trouver une troisième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que leur somme ΑΒ n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un carré, et que ce nombre n'ait pas avec chacun des nom-

234 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὴ ἔχέτω ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεία ἢ E, καὶ γεγορέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς E τῶ ἀπὸ τῆς ZH. Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἢ E²· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον

BA, AG rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur quaedam rationalis recta E, et fiat ut Δ ad AB ita ex E quadratum ad ipsum ex ZH; commensurable igitur est ex E quadratum quadrato ex ZH. Atque est rationalis E; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam Δ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex E quadratum ad ipsum ex



ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ ZH μίκει. Γεγορέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AG οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ZH· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ HΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ AB πρὸς τὸν AG λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ

ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est E ipsi ZH longitudine. Fiat autem rursus ut BA numerus ad ipsum AG ita ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ; commensurable igitur est quadratum ex ZH ad ipsum ex HΘ. Rationalis autem ZH; rationalis igitur et HΘ. Et quoniam AB ad AG rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ ratio-

bres BA, AG la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit enfin une droite rationelle E, et faisons en sorte que Δ soit à AB comme le quarré de E est au quarré de ZH; le quarré de E sera commensurable avec le quarré de ZH. Mais la droite E est rationelle; la droite ZH est donc rationelle (6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec AB la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de E n'a pas non plus avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite E sera incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). Faisons en sorte que le nombre BA soit à AG comme le quarré de ZH est au quarré de HΘ; le quarré de ZH sera commensurable avec le quarré de HΘ. Mais la droite ZH est rationelle; la droite HΘ est donc rationelle. Et puisque AB n'a pas avec AG la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de ZH

τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἢ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διίσαυ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν³ ἢ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐστω οὖν τῶ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν⁴ ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

nem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΖΘ ex binis nominibus est. Dico et tertiam esse.

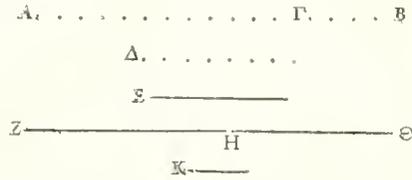
Quoniam enim est ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut autem ΑΒ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad ΑΓ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Δ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratur ex Ε igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΗΘ longitudine. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; majus igitur ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Sint igitur quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ; convertendo igitur est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad

n'a pas non plus avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ΖΗ, ΗΘ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΖΘ est donc une droite de deux noms (57. 10). Je dis aussi qu'elle est une troisième de deux noms.

Car, puisque Δ est à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ, et que ΑΒ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par égalité, Δ sera à ΑΓ comme le carré de Ε est au carré de ΗΘ. Mais Δ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et le carré de Ε n'a pas non plus avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ, le carré de ΖΗ sera plus grand que le carré de ΗΘ. Que la somme des carrés de ΗΘ et de Κ soit égale au carré de ΖΗ; par conversion ΑΒ sera à ΒΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de Κ. Mais ΑΒ a avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre

γωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστίν⁵ ἢ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἢ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μείζον

quadratum numerum; et quadratum ex ZH igitur ad quadratum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ZH ipsi Κ longitudine; ergo ZH quam ΗΘ plus potest quadrato



δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ. Καὶ εἴσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδέτερά αὐτῶν σύμμετρος ἐστὶ τῇ Ε μήκει· ἢ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt ΖΗ, ΗΘ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est ipsi Ε longitudine; ergo ΖΘ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ'.

PROPOSITIO LII.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Invenire ex binis nominibus quartam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ αἱ ΑΓ, ΒΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ¹ ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ Δ, καὶ

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΒΒ, ita ut ΑΒ ad ΒΓ rationem non habeat, neque quidem ad ΑΓ, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponentur rationalis Δ, et ipsi Δ

quarré; le quarré de ΖΗ a donc avec le quarré de Κ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΖΗ est donc commensurable en longueur avec Κ; la puissance de ΖΗ surpasse donc la puissance de ΗΘ du quarré d'une droite commensurable avec ΖΗ. Mais les droites ΖΗ, ΗΘ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec Ε; la droite ΖΘ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 3, 10). Ce qu'il fallait démontrer.

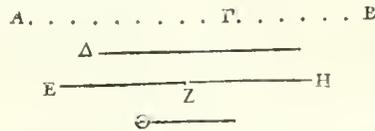
PROPOSITION LII.

Trouver une quatrième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΒΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec ΒΓ ni avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit la rationnelle Δ,

τῆ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἢ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΕΖ. Καὶ γεγοιόετω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῶ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν καὶ ἢ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς³ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΖ τῆ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἢ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ. Δέξω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

commensurabilis sit longitudine ipsa ΕΖ; rationalis igitur est et ΕΖ. Et fiat ut ΒΑ numerus ad ipsum ΑΓ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex ΖΗ; commensurable igitur est ex ΕΖ quadratum quadrato ex ΖΗ; rationalis igitur est et ΖΗ. Et quoniam ΒΑ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΕΖ ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΕΖ, ΖΗ igitur rationales sunt potentia solum commensurabiles; quare ΕΗ ex binis nominibus est. Dico et quartam esse.



Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῶ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ

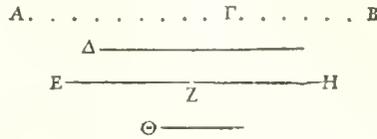
Quoniam enim est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex ΖΗ, major autem ΒΑ quam ΑΓ; majus igitur ex ΕΖ quadratum quadrato ex ΖΗ. Sicut igitur quadrato ex ΕΖ æqualia quadrata ex ΖΗ, Θ; convertendo igitur ut

et que la droite ΕΖ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite ΕΖ sera rationnelle. Faisons en sorte que le nombre ΒΑ soit à ΑΓ comme le carré de ΕΖ est au carré de ΖΗ; le carré de ΕΖ sera commensurable avec le carré de ΖΗ; la droite ΖΗ est donc rationnelle. Et puisque ΒΑ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que le carré de ΕΖ n'a pas non plus avec le carré de ΖΗ la raison qu'un nombre carré a avec nombre carré, la droite ΕΖ sera incommensurable en longueur avec ΖΗ (9. 10); les droites ΕΖ, ΖΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΕΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une quatrième de deux noms.

Car, puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΕΖ est au carré de ΖΗ, et que ΒΑ est plus grand que ΑΓ, le carré de ΕΖ est plus grand que le carré de ΖΗ. Que la somme des carrés de ΖΗ et de Θ soit égale au carré de ΕΖ; par con-

AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ AB πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμῶσιν^δ πρὸς τε-

AB numerus ad ipsum ΒΓ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-



τράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμῶσιν πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν^δ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν^ε ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς. Καὶ εἴσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον συμμέτροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Ὅπερ ἔδει ποιῆται.

tum numerum; neque igitur ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΕΖ ipsi Θ longitudine; ergo ΕΖ quàm ΖΗ plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili. Et sunt ΕΖ, ΖΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΕΖ ipsi Δ commensurabilis est longitudine; ergo ΕΗ ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17'.

PROPOSITIO LIII.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Invenire ex binis nominibus quintam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἐκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ἐν

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipsorum rationem non habeat

version, le nombre AB sera à ΒΓ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de Θ. Mais AB n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΕΖ n'a donc pas avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΕΖ est donc incommensurable en longueur avec Θ; la puissance de ΕΖ surpasse donc la puissance de ΖΗ du quarré d'une droite incommensurable avec ΕΖ. Mais les droites ΕΖ, ΖΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et ΕΖ est commensurable en longueur avec Δ; la droite ΕΗ est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait faire.

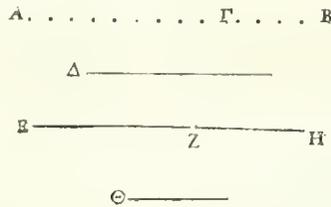
PROPOSITION LIII.

Trouver une cinquième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que AB n'ait pas avec chacun de ces

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ τις εὐθεΐα¹ ἢ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἢ HZ². ῥητὴ ἄρα ἢ HZ. Καὶ γηρονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ῥητὴ ἄρα ἔστί καὶ ἢ ZE. Καὶ ἐπεὶ ὁ³ ΓΑ πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἄρα⁴ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE λόγον ἔχει ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα⁵ ὄγκμάτων ἔστιν ἢ EH. Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quaedam recta Δ, et ipsi Δ commensurabilis sit longitudine ipsa HZ; rationalis igitur HZ. Et fiat ut ΓΑ ad AB ita ex HZ quadratum ad ipsum ex ZE; rationalis igitur est et ZE. Et quoniam ΓΑ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex HZ quadratum ad ipsum ex ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentia solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est EH. Dico et quintam esse.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ἀνάπαλιν ἄρα⁶ ὡς ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

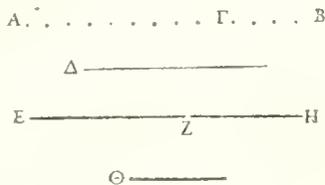
Quoniam enim est ut ΓΑ ad AB ita ex ZH quadratum ad ipsum ex ZE; invertendo igitur ut BA ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; majus igitur ex EZ quadratum quadrato

nombres la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit une droite rationelle Δ, et que HZ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite HZ sera rationelle. Faisons en sorte que ΓΑ soit à AB comme le quarré de HZ est au quarré de ZE; la droite ZE sera rationelle. Et puisque ΓΑ n'a pas avec AB la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de HZ n'a pas non plus avec le quarré de ZE la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, les droites EZ, ZH seront des rationelles commensurables en puissance seulement (9. 10); EH est donc une droite de deux noms (57. 10). Je dis aussi qu'elle est une cinquième de deux noms.

Car puisque ΓΑ est à AB comme le quarré de ZH est au quarré de ZE, par inversion, BA est à ΑΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH; le quarré de EZ

ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέφονται ἄρα ἔστιν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ

ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ aequalia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB numerus ad ipsum ΒΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex EZ quadratum ad



ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΕΖ τῆσ' ΖΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ. Καὶ εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἕλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ τῶν δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare EZ quam ΖΗ plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili. Et sunt ΕΖ, ΖΗ rationales potentia solum commensurabiles, et ΖΗ minus nomen commensurable est exposita rationali Δ longitudine; ergo ΕΗ ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat facere.

est donc plus grand que le carré de ΖΗ. Que la somme des carrés de ΖΗ et de Θ soit égale au carré de ΕΖ; par conversion, le nombre ΑΒ sera au nombre ΒΓ comme le carré de ΕΖ est au carré de Θ. Mais ΑΒ n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΕΖ n'a donc pas avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΕΖ est donc incommensurable en longueur avec Θ; la puissance de ΕΖ surpasse donc la puissance de ΖΗ du carré d'une droite incommensurable avec ΕΖ. Mais les droites ΕΖ, ΖΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ΖΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Δ; la droite ΕΗ est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10). Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14'.

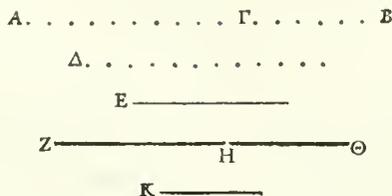
PROPOSITIO LIV.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὁνομάτων ἕκταν.

Invenire ex binis nominibus sextam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἐκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν, μήτε' πρὸς ἐκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε,

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipsorum rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; sicut autem et alius numerus Δ non quadratus existens, et non ad utrumque ipsorum ΒΑ, ΑΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur



καὶ γηρονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ². Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

quædam rationalis recta Ε, et fiat ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ; commensurable igitur est ex Ε quadratum quadrato ex ΖΗ. Atque est rationalis Ε; rationalis igitur et ΖΗ. Et quoniam non habet Δ ad ΑΒ rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum,

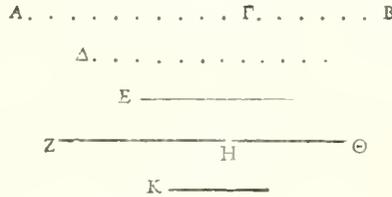
PROPOSITION LIV.

Trouver la sixième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec chacun de ces nombres la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un carré, et qui n'ait pas avec chacun des nombres ΒΑ, ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit aussi la droite rationnelle Ε; et faisons en sorte que Δ soit à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ; le carré de Ε sera commensurable avec le carré de ΖΗ. Mais la droite Ε est rationnelle; la droite ΖΗ est donc rationnelle (déf. 6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec ΑΒ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre

τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ ZH μήκει. Γεγονέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ

neque quadratum ex E igitur ad quadratum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est E ipsi ZH longitudine. Fiat igitur rursus ut BA ad ΑΓ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Commensurabile igitur ex ZH quadratum quadrato ex ΗΘ. Rationale autem quadratum



ἀπὸ τῆς ZH· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ρητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. Καὶ ἵσαί ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ZH, ΗΘ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ἰσόμετρων ἐστὶν ἡ ZΘ. Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ ἕκτη.

ex ZH; rationale igitur et quadratum ex ΗΘ; rationalis igitur ΗΘ. Et quoniam BA ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ZH igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi ΗΘ longitudine; ipsæ ZH, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ZΘ. Ostendendum est et sextam esse.

quarré, le quarré de E n'aura pas avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite E est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). De plus, faisons en sorte que BA soit à ΑΓ comme le quarré de ZH est au quarré de ΗΘ; le quarré de ZH sera commensurable avec le quarré de ΗΘ. Mais le quarré de ZH est rationel; le quarré de ΗΘ est donc rationel; la droite ΗΘ est donc rationelle. Et puisque BA n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ZH n'aura pas non plus avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ZH, ΗΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ZΘ est donc une droite de deux noms (57. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la sixième de deux noms.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διῆσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ἢν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ἢν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἢ Ε τῇ ΗΘ μῆκει. Ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρος ἔστι τῇ Ε μῆκει. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ἢν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ἢν τετράγωνος ἀριθμὸς

Quoniam enim est ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ, est autem et ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad ΑΓ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Δ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΗΘ longitudine. Ostensa est autem et ipsi ΖΗ incommensurabilis; utraque igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ incommensurabilis est ipsi Ε longitudine. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; majus igitur ex ΖΘ quadratum quadrato ex ΗΘ. Sint itaque quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ; converteudo igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare neque ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum nume-

Car puisque Δ est à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ, et que ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par égalité, Δ sera à ΑΓ comme le carré de Ε est au carré de ΗΘ. Mais Δ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de Ε n'a donc pas avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Mais on a démontré qu'elle est incommensurable avec ΖΗ; chacune des droites ΖΗ, ΗΘ est donc incommensurable en longueur avec Ε. Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ, le carré de ΖΘ sera plus grand que le carré de ΗΘ. Que la somme des carrés de ΗΘ et de Κ soit égale au carré de ΖΗ; par conversion, ΑΒ sera à ΒΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de Κ. Mais ΑΒ n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΖΗ n'a donc pas avec le carré de Κ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré;

πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἢ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς. Καὶ εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥητὰὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδέτερά αὐτῶν^δ σύμμετρός ἐστι μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ Ε· ἢ ΖΘ ἄρα ἐν δύο ἰσότητων ἐστὶν ἕκτι. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λ Η Μ Μ Α.

Ἐστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ, καὶ κείσθωσα ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῆ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῆ ΒΗ. Καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστὶ τὸ ΑΓ, καὶ ἔτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῆ ΒΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῆ ΒΗ· ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλη τῆ ΖΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἐστὶν

rum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi Κ longitudine; ergo ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΖΗ, ΗΘ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est longitudine expositæ rationali Ε; ergo ΖΘ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat facere.

L E M M A.

Sint duo quadrata ΑΒ, ΒΓ, et ponantur ita ut in directum sit ΔΒ ipsi ΒΕ; in directum igitur est et ΖΒ ipsi ΒΗ. Et compleatur ΑΓ parallelogrammum; dico quadratum esse ΑΓ, et ipsorum ΑΒ, ΒΓ medium proportionale esse ΔΗ, et adhuc ipsorum ΑΓ, ΓΒ medium proportionale esse ΔΓ.

Quoniam enim æqualis est quidem ΔΒ ipsi ΒΖ, ipsa verò ΒΕ ipsi ΒΗ; tota igitur ΔΕ toti ΖΗ est æqualis. Sed quidem ΔΕ utrique

la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec Κ; la puissance de ΖΗ surpasse donc la puissance de ΗΘ du carré d'une droite incommensurable avec ΖΗ; mais les droites ΖΗ, ΗΘ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Ε; la droite ΖΘ est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait faire.

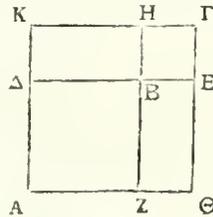
L E M M E.

Soient les deux carrés ΑΒ, ΒΓ; plaçons-les de manière que la droite ΔΒ soit dans la direction de ΒΕ; la droite ΖΒ sera dans la direction de ΒΗ. Achévous le parallélogramme ΑΓ; je dis que ΑΓ est un carré, que ΔΗ est moyen proportionnel entre ΑΒ et ΒΓ, et que ΔΓ est aussi moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ.

Puisque la droite ΔΒ est égale à ΒΖ, et que ΒΕ est égale à ΒΗ, la droite entière ΔΕ sera égale à la droite entière ΖΗ. Mais la droite ΔΕ est égale à chacune des

ἴση· ἢ δὲ ΖΗ ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση·
καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρα τῶν
ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ
παράλληλογράμμον. Ἐστὶ δὲ καὶ ῥηθωόνισιν·
τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν
ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν
ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως

ipsarum ΑΘ, ΚΓ est æqualis; ipsa verò ΖΗ utrique
ipsarum ΑΚ, ΘΓ est æqualis; et utraque igitur
ipsarum ΑΘ, ΚΓ utrique ipsarum ΑΚ, ΘΓ
est æqualis; æquilaterum igitur est ΑΓ paralle-
logrammum. Est autem et rectangulum; qua-
dratum igitur est ΑΓ. Et quoniam est ut ΖΒ ad
ΒΗ ita ΔΒ ad ΒΕ, sed ut quidem ΖΒ ad ΒΗ



τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ
οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ
πρὸς τὸ ΔΗ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν
ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσιν ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ. Λέγω δὲ
ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσιν ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.
Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ
ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ·
καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς
τὴν ΓΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως τὸ
ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ

ita ΑΒ ad ΔΗ, ut verò ΔΒ ad ΒΕ ita ΔΗ
ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΗ ita ΔΗ ad
ΒΓ; ipsorum ΑΒ, ΒΓ igitur medium propor-
tionale est ΔΗ. Dico et ipsorum ΑΓ, ΓΒ me-
dium proportionale esse ΔΓ. Quoniam enim
est ut ΑΔ ad ΔΚ ita ΚΗ ad ΗΓ, æqualis enim est
utraque utrique; et componendo ut ΑΚ ad ΚΔ
ita ΚΓ ad ΓΗ. Sed ut quidem ΑΚ ad ΚΔ ita ΑΓ
ad ΓΔ, ut verò ΚΓ ad ΓΗ ita ΔΓ ad ΓΒ; et ut

droites ΑΘ, ΚΓ, et la droite ΖΗ est aussi égale à chacune des droites ΑΚ, ΘΓ; chacune des droites ΑΘ, ΚΓ est donc égale à chacune des droites ΑΚ, ΘΓ; donc ΑΓ est un parallélogramme équilatéral. Mais il est aussi rectangle; donc ΑΓ est un carré. Et puisque ΖΒ est à ΒΗ comme ΔΒ est à ΒΕ, que ΖΒ est à ΒΗ comme ΑΒ est à ΔΗ (1. 6), et que ΔΒ est à ΒΕ comme ΔΗ est à ΒΓ, le carré ΑΒ est à ΔΗ comme ΔΗ est à ΒΓ; donc ΔΗ est moyen proportionnel entre ΑΒ et ΒΓ. Je dis aussi que ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ. Car puisque ΑΔ est à ΔΚ comme ΚΗ est à ΗΓ, à cause que chacune des droites ΑΔ, ΔΚ est égale à chacune des droites ΚΗ, ΗΓ, par addition, ΑΚ sera à ΚΔ comme ΚΓ est à ΓΗ. Mais ΑΚ est à ΚΔ comme ΑΓ est à ΓΔ (1. 6), et ΚΓ est à ΓΗ comme ΔΓ est à ΓΒ; donc

ΔΓ πρὸς τὴν⁶ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΓ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ. Ὅπερ προύκειτο δεῖξαι.

igitur ΑΓ ad ΔΓ ita ΔΓ ad ΒΓ; ipsorum ΑΓ, ΒΓ igitur medium proportionale est ΔΓ. Quod proponebatur demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΓΕ.

Ἐάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ¹ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ² πρώτη ἢ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μείζον ὄνομα τὸ ΑΕ. Φανερόν δὲ ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἢ ΑΕ τῇ ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἢ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ

PROPOSITIO LV.

Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus primâ ΑΔ; dico rectam quæ potest spatium ΑΓ irrationalem esse, quæ appellatur ex binis nominibus.

Quoniam enim ex binis nominibus est prima ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, et sit majus nomen ΑΕ. Evidens utique est ΑΕ, ΕΔ rationales esse potentiâ solum commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus posse quadrato ex rectâ sib commensurabili, et ΑΕ commensura-

ΑΓ est à ΔΓ comme ΔΓ est à ΒΓ; donc ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΒΒ. Ce qu'on s'était proposé de démontrer.

PROPOSITION LV.

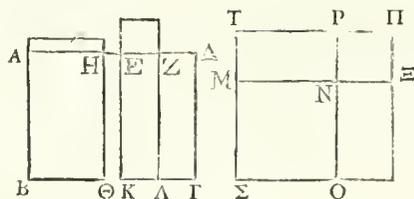
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la droite ΑΔ première de deux noms; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

Puisque la droite ΑΔ est première de deux noms; qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom. Il est évident que les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, que la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarté d'une droite commensurable avec ΑΕ, et que ΑΕ sera commensurable en longueur avec la rationnelle

ῥητῇ τῇ AB μήκει. Τετμήσθω δὴ³ ἡ ED δίχα κατὰ τὸ Z σημείον. Καὶ ἐπεὶ ἡ AE τῆς ED μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆς, ἔαν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τευτέστι τοῦ⁵ ἀπὸ τῆς EZ , ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν AE παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ⁶. Παραβελέσθω οὖν παρὰ τὴν AE τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον

bilem esse expositæ rationali AB longitudine. Secetur utique ED bifariam in puncto Z . Et quoniam AE quam ED plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, si igitur quartæ parti quadrati ex minori, hoc est quadrati ex EZ , æquale ad majorem AE applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Applicetur igitur ad AE qua-



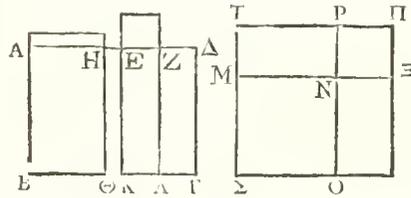
τὸ ὑπὸ τῶν⁷ AH, HE σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AH τῇ EH μήκει. Καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ⁸ τῶν H, E, Z ἑποτέρῃ τῶν $AB, ΓΔ$ παράλληλοι αἱ $HΘ, EK, ΖΑ$ · καὶ τῷ μὲν $AΘ$ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ $ΣΝ$, τῷ δὲ HK ἴσον τὸ $ΝΠ$, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν MN τῇ $ΝΞ$ · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ NP τῇ

drato ex EZ æquale parallelogrammum sub AH, HE ; commensurabilis igitur est AH ipsi EH longitudine. Et ducantur a punctis H, E, Z alterutri ipsarum $AB, ΓΔ$ parallelæ $HΘ, EK, ΖΑ$; et quidem $AΘ$ parallelogrammo æquale quadratum constituatur $ΣΝ$, quadrato autem HK æquale ipsum $ΝΠ$, et ponantur ita ut in directum sit MN ipsi $ΝΞ$; in directum igitur est et NP ipsi

exposée AB (déf. sec. 1. 10). Coupons ED en deux parties égales au point Z . Puisque la puissance de AE surpasse la puissance de ED du carré d'une droite commensurable avec AE , si nous appliquons à la plus grande AE un parallélogramme qui soit égal à la quatrième partie du carré de la plus petite, c'est-à-dire du carré de EZ , et défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera cette droite en parties commensurables (18. 10). Que le parallélogramme sous AH, HE , égal au carré de EZ , soit appliqué à AE (28. 6); la droite AH sera commensurable en longueur avec EH . Des points H, E, Z menons les droites $HΘ, EK, ΖΑ$ parallèles à l'une ou à l'autre des droites $AB, ΓΔ$ (14. 2). Faisons le carré $ΣΝ$ égal au parallélogramme $AΘ$, le carré $ΝΠ$ égal au parallélogramme HK , et faisons en sorte que la droite MN soit dans la direction de $ΝΞ$; la droite NP sera dans la direction

NO. Καὶ συμπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλό-
 γραμμοί· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. Καὶ
 ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ
 ΕΖ πρὸς τὴν¹⁰ ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ
 οὕτως τὸ ΕΛ πρὸς τὴν ΚΗ¹¹. τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα
 μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ¹², τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ

NO. Et compleatur ΣΠ parallelogrammum; qua-
 dratum igitur est ΣΠ. Et quoniam rectangulum
 sub ΑΗ, ΗΕ æquale est quadrato ex ΕΖ; est
 igitur ut ΑΗ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΗ, et ut igitur
 ΑΘ ad ΕΛ ita ΕΛ ad ΚΗ, ipsorum ΑΘ, ΗΚ
 igitur medium proportionale est ΕΛ. Sed qui-
 dem ΑΘ æquale est ipsi ΣΝ, ipsum vero ΗΚ



ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι
 τὸ ΕΛ. Ἐστὶ δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον
 ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ
 τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν¹³. Ἐστὶ δὲ
 καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα
 τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ
 ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἢ
 ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.
 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμ-
 μετρος ἐστὶ καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ.

æquale est ipsi ΝΠ; ipsorum ΣΝ, ΝΠ igitur
 medium proportionale est ΕΛ. Est autem eor-
 undem ΣΝ, ΝΠ medium proportionale et
 ΜΡ; æquale igitur est ΕΛ ipsi ΜΡ; quare et
 ipsi ΟΞ æquale est. Sunt autem et ΑΘ, ΗΚ ipsis
 ΣΝ, ΝΠ æqualia; totum igitur ΑΓ æquale est
 toti ΣΠ, hoc est quadrato ex ΜΞ; ipsum ΑΓ
 igitur potest ipsa ΜΞ; dico ΜΞ ex binis nom-
 nibus esse. Quoniam enim commensurabilis est
 ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique

de NO (14. 1). Achevons le parallélogramme ΣΠ, le parallélogramme ΣΠ sera un
 carré (lem. précéd.). Puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΕ est égal au carré de ΕΖ,
 la droite ΑΗ sera à ΕΖ comme ΕΖ est à ΕΗ (17. 6); donc ΑΘ est a ΕΑ comme ΕΑ est
 à ΚΗ (1. 6); donc ΕΑ est moyen proportionnel entre ΑΘ et ΗΚ. Mais ΑΘ est égal
 à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; donc ΕΑ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ. Mais
 ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ (lem. précéd.); donc ΕΑ est égal
 à ΜΡ, et par conséquent à ΟΞ (4. 5. 1). Mais la somme des rectangles
 ΑΘ, ΗΚ est égale à la somme des carrés ΣΝ, ΝΠ; donc ΑΓ tout entier est
 égal à ΣΠ tout entier, c'est-à-dire au carré de ΜΞ; la droite ΜΞ peut donc le
 parallélogramme ΑΓ; je dis que ΜΞ est une droite de deux noms. Car puisque ΑΗ
 est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des

Υπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει¹⁴. καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. Καὶ ἔστι ρητὴ ἡ ΑΒ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ¹⁵ καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ρητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, ταυτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ρητά ἐστὶ καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ¹⁶. ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΑ ἀσύμμετρον ἐστὶν¹⁷. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΕΑ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρον ἐστὶν. Ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ¹⁸. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΜ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμ-

ipsarum AH, HE. Supponitur autem et AE ipsi AB commensurabilis longitudine; et AH, HE igitur ipsi AB commensurabiles sunt. Atque est rationalis AB; rationalis igitur est et utraque ipsarum AH, HE; rationale igitur est utrumque ipsorum AO, HK, et est commensurable AO ipsi HK. Sed quidem AO ipsi SN æquale est, ipsum verò HK ipsi NP; et SN, NP igitur, hoc est quadrata ex MN, NX, rationalia sunt et commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, sed quidem AE ipsi AH est commensurabilis, ipsa verò DE ipsi EZ commensurabilis; incommensurabilis igitur et AH ipsi EZ; quare et AO ipsi EA incommensurable est. Sed quidem AO ipsi SN est æquale, ipsum verò EA ipsi MP; et ipsum SN igitur ipsi MP incommensurable est. Sed ut SN ad MP ita ON ad NP; incommensurabilis igitur est ON ipsi NP. Æqualis utique quidem ON ipsi NM, ipsa verò NP ipsi NX; incommensurabilis igitur est MN ipsi NX. Atque est quadratum ex MN commensurable

droites AH, HE (16. 10). Mais on a supposé que AE est commensurable en longueur avec AB; les droites AH, HE sont donc commensurables avec AB (12. 10). Mais la droite AB est rationnelle; chacune des droites AH, HE est donc rationnelle; chacun des parallélogrammes AO, HK est donc rationnel (20. 10); AO est donc commensurable avec HK (10. 10). Mais AO est égal à SN, et HK est égal à NP; les carrés SN, NP, c'est-à-dire les carrés des droites MN, NX, sont donc rationnels et commensurables. Et puisque AE est incommensurable en longueur avec ED (57. 10), que AE est commensurable avec AH, et que DE est commensurable avec EZ, la droite AH sera incommensurable avec EZ; donc AO est incommensurable avec EA. Mais AO est égal à SN, et EA égal à MP; donc SN est incommensurable avec MP. Mais SN est à MP comme ON est à NP; donc ON est incommensurable avec NP (10. 10). Mais la droite ON est égale à NM, et NP est égal à NX; donc MN est incommensurable avec NX. Mais le carré de MN est commensurable avec le carré de NX, et ils sont rationnels l'un et l'autre;

μετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἐκείτηρον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἢ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιέχεται γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστὶ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου

quadrato ex ΝΞ, et rationale utrumque; ergo ΜΝ; ΝΞ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΜΞ ex binis nominibus est, et potest ipsum ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO LVI.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secuudâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

Contineatur enim spatium ΑΒΓΔ sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus secundâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim ex binis nominibus secunda est ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ

les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΜΞ est donc une droite de deux noms (57. 10), et elle peut le parallélogramme ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LVI.

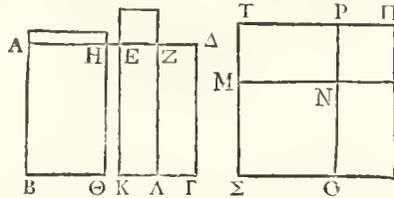
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la première de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la seconde de deux noms ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est la première de deux médiales.

Car puisque ΑΔ est la seconde de deux noms, divisons cette droite en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et

ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἢ ΕΔ σύμμετρὸν² ἔστι τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω ἢ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρά τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδος τετραγώνου, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἢ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΔΓ αἰ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῶ μὲν ΑΘ παραλληλογρόμμῳ ἴσον τετράγωνον συνστάτω τὸ ΣΝ, τῶ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ

sibi commensurabili, et minus nomen ΕΔ commensurable est ipsi ΑΒ longitudine. Secetur ipsa ΕΔ bifariam in Ζ, et quadrato ex ΕΖ æquale ad ΑΕ applicetur deficiens figurâ quadratâ, parallelogrammo sub ΑΗ, ΗΕ; commensurabilis igitur ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. Et per puncta Η, Ε, Ζ parallelæ ducantur ipsis ΑΒ, ΔΓ ipsæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, et parallelogrammo quidem ΑΘ æquale quadratum constituatur ΣΝ, ipsi verò ΗΚ æquale



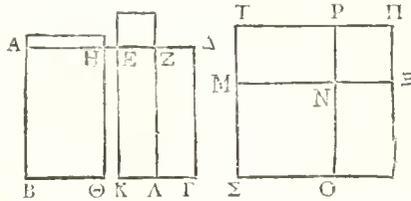
ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἔστι³ καὶ ἢ ΡΝ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὲ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῶ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἢ ΜΞ· δεικτέον δὲ ὅτι ἢ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἔστι πρώτη.

quadratum ΝΠ, et ponatur ita ut in directum sit ΜΝ ipsi ΝΞ; in directum igitur est et ΡΝ ipsi ΝΟ. Et compleatur ΣΠ quadratum; evidens utique est ex iis demonstratis, ipsum ΜΡ medium proportionale esse ipsorum ΣΝ, ΝΠ, et æquale ipsi ΕΛ, et ΑΓ spatium posse ipsam ΜΞ; ostendendum est et ΜΞ ex binis mediis esse

le plus petit nom ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 2. 10). Coupons ΕΔ en deux parties égales en Ζ, et appliquons à ΑΕ un parallélogramme, qui étant égal au carré de ΕΖ, soit défailant d'une figure carrée; que ce soit le parallélogramme sous ΑΗ, ΗΕ; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec ΗΕ (18. 10). Par les points Η, Ε, Ζ menons les droites ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles aux droites ΑΒ, ΔΓ; faisons le carré ΣΝ égal au parallélogramme ΑΘ; le carré ΝΠ égal au parallélogramme ΗΚ, et plaçons ΜΝ dans la direction de ΝΞ; la droite ΡΝ sera dans la direction de ΝΟ. Achévous le carré ΣΠ; il est évident, d'après ce qui a été démontré (5. 10), que le rectangle ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ; que ΜΡ est égal à ΕΛ, et que ΜΞ peut la surface ΑΓ; il faut démontrer que ΜΞ est la première de deux médiales. Car puisque ΑΕ est incommensurable en

Ἐπεὶ γὰρ^δ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπειδὴ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ ΑΕ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ· ὥστε ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστὶ καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ὅρα μέσαι εἰσί. Καὶ ἐπεὶ σύμ-

primam. Quoniam enim incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, commensurabilis autem ED ipsi AB; incommensurabilis igitur AE ipsi AB longitudine. Et quoniam commensurabilis est AH ipsi HE, commensurabilis est et AE utrique ipsarum AH, HE. Atque est rationalis AE; rationalis igitur et utraque ipsarum AH, HE. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi AB, commensurabilis autem AE utrique ipsarum AH, HE; ergo AH, HE incommensurabiles sunt ipsi AB longitudine; ergo BA, AH, HE rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare medium est utrumque ipsorum AΘ, ΗΚ; quare utrumque ipsorum ΣΝ, ΝΠ medium est; et MN,



μετρος ἐστὶν^δ ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τοῦτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τοῦτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ὀπὸ τῆς ΝΞ· ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ¹⁰.

ΝΞ igitur mediæ sunt. Et quoniam commensurabilis est AH ipsi HE longitudine, commensurable est et AΘ ipsi ΗΚ, hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ, hoc est ex MN quadratum quadrato ex ΝΞ; quare potentiâ

longueur avec ΕΔ (57. 10), et que ΕΔ est commensurable avec ΑΒ, la droite ΑΕ sera incommensurable en longueur avec ΑΒ (14. 10). Et puisque ΑΗ est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais ΑΕ est rationel; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationelle. Et puisque ΑΕ est incommensurable avec ΑΒ, et que ΑΕ est commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ, les droites ΑΗ, ΗΕ seront incommensurables en longueur avec ΑΒ; les droites ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; chacun des rectangles ΑΘ, ΗΚ est donc médial (22. 10); chacun des carrés ΣΝ, ΝΠ est donc médial; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc médiales. Et puisque ΑΗ est commensurable en longueur avec ΗΕ, le rectangle ΑΘ sera commensurable avec le rectangle ΗΚ (1. 6, et 10. 10), c'est-à-dire le carré ΣΝ avec le carré ΝΠ; c'est-à-dire le carré de ΜΝ avec le carré de ΝΞ; les droites ΜΝ,

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρος ἐστὶ τῆ ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ τῆ ΕΖ σύμμετρος¹¹. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῆ ΕΖ. ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῶ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΣΝ τῶ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ τῆ ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῆ ΝΞ ἀσύμμετρος ἐστὶ μήκει. Εδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἐκατέρα τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ¹² καὶ ἡ ΖΕ τῆ ΕΚ. Καὶ ῥητὴ ἐκατέρα αὐτῶν ῥητὸν ἄρα καὶ¹³ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τὸ δὲ ΜΡ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἀλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ἡ ἄρα ΜΞ¹⁴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

sunt commensurabiles MN, NΞ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, sed quidem ΑΕ commensurabilis est ipsi ΑΗ, ipsa verò ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis; incommensurabilis igitur ΑΗ ipsi ΕΖ; quare et ΑΘ ipsi ΕΛ incommensurabile est, hoc est ΣΝ ipsi ΜΡ, hoc est ΟΝ ipsi ΝΡ, hoc est ΜΝ ipsi ΝΞ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem ΜΝ, ΝΞ et mediæ existentes et potentiâ commensurabiles; ergo ΜΝ, ΝΞ mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico et cas rationale continere. Quoniam enim ΔΕ supponitur utrique ipsarum ΑΒ, ΕΖ commensurabilis; commensurabilis igitur est et ΖΕ ipsi ΕΚ. Et rationalis utraque ipsarum; rationale igitur et ΕΛ, hoc est ΜΡ, sed ΜΡ est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ. Si verò duæ mediæ potentiâ commensurabiles componantur rationale continentes, tota irrationalis est, appellatur autem ex binis mediis prima; ergo ΜΞ ex binis mediis est prima. Quod oportebat ostendere.

NΞ sont donc commensurables en puissance. Et puisque ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ, que ΑΕ est commensurable avec ΑΗ, et que ΔΕ l'est avec ΕΖ, la droite ΑΗ sera incommensurable avec ΕΖ; le rectangle ΑΘ est donc incommensurable avec le rectangle ΕΛ, c'est-à-dire le carré ΣΝ avec ΜΡ, c'est-à-dire la droite ΟΝ avec la droite ΝΡ, c'est-à-dire que la droite ΜΝ est incommensurable en longueur avec ΝΞ (1. 6). Mais on a démontré que les droites ΜΝ, ΝΞ sont et médiales et commensurables en puissance; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis enfin qu'elles comprennent une surface rationnelle. Car puisque ΔΕ est supposé commensurable avec chacune des droites ΑΒ, ΕΖ, la droite ΖΕ sera commensurable avec ΕΚ. Mais chacune d'elles est rationnelle; le rectangle ΕΛ est donc rationnel (20. 10), c'est-à-dire le rectangle ΜΡ qui est compris sous ΜΝ, ΝΞ. Mais si l'on ajoute deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme est irrationnelle, et s'appèle première de deux médiales (38. 10); donc ΜΞ est une première de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17΄.

PROPOSITIO LVII.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ οἰήματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μείζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἢ ΑΔ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἢ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ οὐδέτερα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῆ ΑΒ μήκει. Ομοίως δὲ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις δείξομεν ὅτι ἢ ΜΞ ἐστὶν

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus terciâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus terciâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ ΑΓ spatium potest, irrationalen esse, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam ex binis nominibus est terciâ ΑΔ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΑΕ, ΕΔ commensurabilis est ipsi ΑΒ longitudine. Congruenter utique suprâ ostensis ostendemus

PROPOSITION LVII.

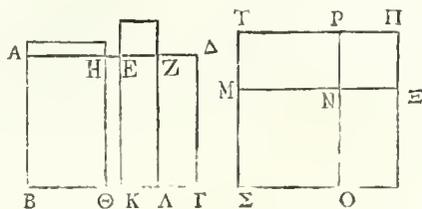
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la troisième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

Faisons la même construction qu'au paravant. Puisque la droite ΑΔ est la troisième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la droite ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et de plus aucune des droites ΑΕ, ΕΔ ne sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 5. 10). Nous démontrerons de la même

ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ³. Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τούτεστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ

rectam $MΞ$ esse quæ spatium $ΑΓ$ potest; et $MΝ$, $ΝΞ$ medias esse potentiâ solùm commensurabiles; quare $MΞ$ ex binis mediis est. Ostendendum est et secundam esse. Et quoniam incommensurabilis est $ΔΕ$ ipsi $ΑΒ$ longitudine, hoc est ipsi $ΕΚ$, commensurabilis autem $ΔΕ$



ἢ $ΔΕ$ τῇ $ΕΖ$ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΕΖ$ τῇ $ΕΚ$ μήκει. Καὶ εἰσὶ ρηταί· αἱ $ΖΕ$, $ΕΚ$ ἄρα ρηταί εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσων ἄρα ἐστὶ^δ τὸ $ΕΛ$, τούτεστι τὸ $ΜΡ$, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν $ΜΝ$, $ΝΞ$. Μέσων ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΜΝ$, $ΝΞ$ · ἢ $ΜΞ$ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ^δ δευτέρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsi $ΕΖ$; incommensurabilis igitur est $ΕΖ$ ipsi $ΕΚ$ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ $ΖΕ$, $ΕΚ$ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est $ΕΛ$, hoc est $ΜΡ$, et continetur sub $ΜΝ$, $ΝΞ$. Medium igitur est rectangulum sub $ΜΝ$, $ΝΞ$; ergo $ΜΞ$ ex binis mediis est secunda. Quod oportebat ostendere.

manière que nous l'avons déjà fait que la droite $MΞ$ peut la surface $ΑΓ$ (3. 10), et que les droites $MΝ$, $ΝΞ$ sont des médiales commensurables en puissance seulement; la droite $MΞ$ est donc une droite de deux médiales. Il faut démontrer qu'elle en est la seconde. Puisque $ΔΕ$ est incommensurable en longueur avec $ΑΒ$, c'est-à-dire avec $ΕΚ$, et que $ΔΕ$ est commensurable avec $ΕΖ$, la droite $ΕΖ$ sera incommensurable en longueur avec $ΕΚ$. Mais ces droites sont rationelles; les droites $ΖΕ$, $ΕΚ$ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle $ΕΛ$, c'est-à-dire le rectangle $ΜΡ$, est donc médial; mais il est compris sous $ΜΝ$, $ΝΞ$; le rectangle compris sous $ΜΝ$, $ΝΞ$ est donc médial (59. 10); la droite $MΞ$ est donc une seconde de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νή.

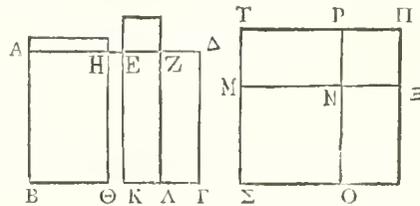
PROPOSITIO LVIII.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμικῆ ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ἂν μείζων ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμικῆ ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μείζων.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

Spatium enim ΑΓ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus quartâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, irrationalem esse, quæ appellatur major.



Επεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμεις μίνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΑΕ τῆ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. Τετμήσθω δὴ ἡ ΔΕ

Quoniam enim ΑΔ ex binis nominibus est quarta, ipsæ ΑΕ, ΕΔ igitur rationales sunt potentia solum commensurabiles, et ΑΕ quam ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis est longitudine. Secetur utique ΔΕ bifariam

PROPOSITION LVIII.

Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure.

Que la surface ΑΓ soit comprise sous la rationelle ΑΒ, et sous la quatrième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationelle appelée majeure.

Car, puisque ΑΔ est la quatrième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, et la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, et de plus ΑΕ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 4. 10). Coupons ΔΕ en

δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν¹ ἢ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Ἠχθῶσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γερονέτω· φανερὸν δὲ ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἢ ΜΞ. Δεικτέον δὲ² ὅτι ἢ ΜΞ ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μείζων. Ἐπεὶ³ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἢ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἢ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ⁴ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν⁵ ἢ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἢ ΔΕ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἢ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει· αἱ ΚΕ, ΕΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΔΕ, τουτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται

in Ζ, et quadrato ex ΕΖ æquale ad ΑΕ applicetur parallelogrammum sub ΑΗ, ΗΕ; incommensurabilis igitur est ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. Ducantur ipsi ΑΒ parallelæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, et reliqua eadem quæ suprâ fiant; evidens est utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est utique ΜΞ irrationalem esse, quæ vocatur major. Quoniam incommensurabilis est ΑΗ ipsi ΕΗ longitudine, incommensurable est et ΑΘ ipsi ΗΚ, hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam commensurabilis est ΑΕ ipsi ΑΒ longitudine, rationale est ΑΚ, atque est æquale quadratis ex ΜΝ, ΝΞ; rationale igitur est et compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam incommensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc est ipsi ΕΚ, sed ΔΕ commensurabilis est ipsi ΕΖ; incommensurabilis igitur ΕΖ ipsi ΕΚ longitudine; ipsæ ΚΕ, ΕΖ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; medium igitur ΔΕ, hoc est ΜΡ, et continetur sub ΜΝ, ΝΞ.

deux parties égales en Ζ, et appliquons à ΑΕ un parallélogramme sous ΑΗ, ΗΕ qui soit égal au carré de ΕΖ; la droite ΑΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΕ (19. 10). Conduisons les droites ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles à ΑΒ, et faisons le reste comme auparavant; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut démontrer que ΜΞ est l'irrationelle appelée majeure. Puisque ΑΗ est incommensurable en longueur avec ΕΗ, la surface ΑΘ sera incommensurable avec ΗΚ, c'est-à-dire le carré ΣΝ avec le carré ΝΠ (1. 6, et 10. 10); les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance. Et puisque ΑΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ, le rectangle ΑΚ sera rationel; mais il est égal à la somme des carrés des droites ΜΝ, ΝΞ; la somme des carrés de ΜΝ et de ΝΞ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-à-dire avec ΕΚ; et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ; la droite ΕΖ sera incommensurable en longueur avec ΕΚ; les droites ΚΕ, ΕΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle ΔΕ, c'est-à-dire ΜΡ, est donc médial (22. 10);

ὑπὸ τῶν MN , $NΞ$ μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN , $NΞ$, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμεον⁸ ἐν τῶν ἀπὸ τῶν MN , $NΞ$, καὶ εἶσιν ἀσύμμετροι αἱ MN , $NΞ$ δυνάμεις. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμεις ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἢ ἕλη ἄλογός ἐστι. Καλεῖται δὲ μείζων· ἢ $MΞ$ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ $ΑΓ$ χωρίον. Οἷον εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ἰσόμετρων πέμπτης· ἢ τὸ χωρίον διαμμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ $ΑΓ$ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς $ΑΒ$, καὶ τῆς ἐκ δύο ἰσομέτρων πέμπτης τῆς $ΑΔ$, διηρημένης εἰς τὰ ἰσόμετρα κατὰ τὸ $Ε$,

medium igitur est rectangulum sub MN , $NΞ$, et rationale compositum ex quadratis ipsarum MN , $NΞ$, et sunt incommensurabiles MN , $NΞ$ potentiâ. Si verò duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium, tota irrationalis est. Vocatur autem major; ergo $MΞ$ irrationalis est quæ appellatur major, et potest spatium $ΑΓ$. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO LIX.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

Spatium enim $ΑΓ$ contineatur sub rationali $ΑΒ$, et ex binis nominibus quintâ $ΑΔ$, divisâ in nomina ad $Ε$, ita ut majus nomen sit

mais il est contenu sous les droites MN , $NΞ$; le rectangle sous MN , $NΞ$ est donc médial, la somme des carrés de MN et de $NΞ$ étant rationnelle, et les droites MN , $NΞ$ étant incommensurables en puissance. Mais si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la somme de ces droites sera irrationnelle. Mais cette somme est appelée majeure (40. 10); la droite $MΞ$ est donc l'irrationnelle appelée majeure, et elle peut la surface $ΑΓ$. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LIX.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous une cinquième de deux nomis, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

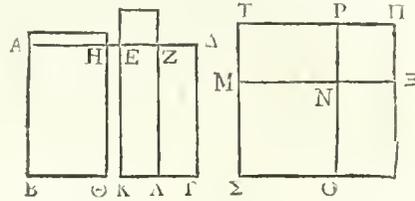
Que la surface $ΑΓ$ soit comprise sous la rationnelle $ΑΒ$ et sous une cinquième de deux nomis $ΑΔ$, divisée en ses nomis au point $Ε$, de manière que $ΑΕ$ soit le plus

ὅστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερόν δὲ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμε-

ΑΕ; dico rectam, quæ potest spatium ΑΓ, irrationalem esse, quæ vocatur rationale et medium potens.

Construantur enim eadem quæ suprâ; evidens est utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est autem ΜΞ esse quæ rationale et medium potest. Quoniam enim incommen-



τρὸς ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα¹ ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ἑνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἐστὶν ἕλασσον αὐτῆς τμήμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει³. Ἀλλ' ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει⁴, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει⁵ αἱ ΒΑ, ΑΕ ἄρα⁵ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-

surabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, incommensurable igitur est et ΑΘ ipsi ΘΕ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam ΑΔ ex binis nominibus est quinta, atque est minor ipsius portio ΕΔ; commensurabilis igitur ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine. Sed ΑΕ ipsi ΕΔ est incommensurabilis longitudine, et ΑΒ igitur ipsi ΑΕ est incommensurabilis longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΕ igitur rationales sunt potentiâ solùm com-

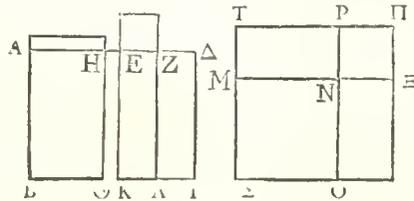
grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Faisons la même construction qu'auparavant; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut démontrer que la droite ΜΞ est celle qui peut une surface rationelle et une surface médiale. Car puisque ΑΗ est incommensurable avec ΗΕ, ΑΘ sera incommensurable avec ΘΕ, c'est-à-dire le carré de ΜΝ avec le carré de ΝΞ (10. 10); les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance. Et puisque la droite ΑΔ est la cinquième de deux noms, et que ΕΔ en est le plus petit segment, la droite ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 5. 10). Mais ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ; donc ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΑΕ (15. 10); les droites ΒΑ, ΑΕ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rec-

260 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τρεις μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλ' ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος ἐστὶ, καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρος ἐστὶ. Καὶ

mesurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc est ipsi ΕΚ, sed ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis est; et ΕΖ igitur ipsi ΕΚ com-



ῥητὴ ἡ ΕΚ ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΑ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

mesurabilis est. Et rationalis ΕΚ; rationale igitur et ΕΑ, hoc est ΜΡ, hoc est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ; ipsae ΜΝ, ΝΞ igitur potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; ipsa ΜΞ igitur rationale et medium potest, et potest spatium ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

taule AK, c'est-à-dire la somme des carrés de MN et de ΝΞ, est donc médial (22. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-à-dire avec ΕΚ; que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΕΖ sera commensurable avec ΕΚ. Mais la droite ΕΚ est rationelle, le rectangle ΕΑ, c'est-à-dire ΜΡ (20. 10), c'est-à-dire le rectangle sous MN, ΝΞ, est donc rationel; les droites MN, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle compris sous ces droites étant rationel; donc ΜΞ est la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale (41. 10), et elle peut la surface ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ'.

PROPOSITIO LX.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γάρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστί.

Κατεσκευάσθω γάρ¹ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Φανερόν δὴ ὅτι ἢ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἢ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν³ ΜΝ, ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΕΖ

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus sextâ ΑΔ, divisâ in nomina ad Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; dico rectam, quæ potest ipsum ΑΓ, bina media posse.

Construantur enim eadem quæ supra. Evidens est utique ipsum ΑΓ posse ΜΞ, et incommensurabilem esse ΜΝ ipsi ΝΞ potentiâ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΑ ipsi ΑΒ longitudine; ipsæ ΕΑ, ΑΒ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Rursus, quoniam incommensurabilis est ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine, incommensu-

PROPOSITION LX.

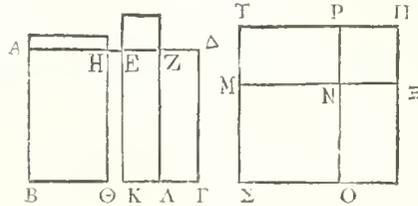
Si une surface est comprise sous une rationelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite qui peut deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationelle ΑΒ et sous une sixième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit le plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est celle qui peut deux médiales.

Faisons la même construction qu'au paravant. Il est évident que ΜΞ peut la surface ΑΓ, et que ΜΝ est incommensurable en puissance avec ΝΞ. Et puisque ΕΑ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, les droites ΕΑ, ΑΒ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des carrés de ΜΝ et de ΝΞ, sera donc médial (22. 10). De plus, puisque ΕΔ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, la droite ΕΖ sera incommensurable

τῆ EK· καὶ αἱ ZE, EK ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ EA, τουτέστι τὸ MP, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν MN, NΞ.

rabilis igitur est et EZ ipsi EK; et ipsæ ZE, EK igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est EA, hoc est MP, hoc est



καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν⁶ ἡ AE τῆ EZ, καὶ τὸ AK τῶ EA ἀσύμμετρον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν AK ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ, τὸ δὲ EA ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN, NΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ τῶ ὑπὸ τῶν MN, NΞ. καὶ ἐστὶ μέσον ἐκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ MN, NΞ⁷ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἡ MΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ AΓ. Ὅπερ εἶδει δείξαι.

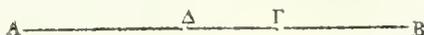
rectangulum sub MN, NΞ. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi EZ, et AK ipsi EA incommensurabile est. Sed quidem AK est compositum ex quadratis ipsarum MN, NΞ, ipsum verò EA est rectangulum sub MN, NΞ; incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum MN, NΞ rectangulo sub MN, NΞ. Atque est medium utrumque ipsorum, et MN, NΞ potentiâ sunt incommensurabiles; ergo MΞ bina media potest, et potest ipsum AΓ. Quod oportebat ostendere.

avec EK, les droites ZE, EK sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; le rectangle EA, c'est-à-dire MP, c'est-à-dire le rectangle sous MN, NΞ, sera donc médial. Et puisque AE est incommensurable avec EZ, le rectangle AK sera incommensurable avec EA. Mais AK est composé de la somme des carrés de MN, NΞ, et EA est le rectangle sous MN, NΞ; la somme des carrés de MN, NΞ est donc incommensurable avec le rectangle sous MN, NΞ. Mais l'une et l'autre de ces grandeurs est médiale; les droites MN, NΞ sont donc incommensurables en puissance; donc MΞ est la droite qui peut deux médiales, et elle peut la surface AΓ (42. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΛΗΜΜΑ.

Εάν εὐθεία γραμμὴ τριηθῆ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμησθῶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζων ἡ AG ; λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB .



Τετμησθῶ γὰρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ . Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ , εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ ; τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AG , GB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Delta$; ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB ἕλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Delta$; τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AG , GB ἕλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Delta$. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, $\Delta\Gamma$; τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AG , GB μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν $\Delta\Delta$, $\Delta\Gamma$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

LEMMA.

Si recta linea secetur in partes inæquales, ipsarum inæqualium quadrata majora sunt rectangulo bis contento sub ipsis inæqualibus.

Sit recta linea AB , et secetur in partes inæquales ad punctum Γ , et sit major AG ; dico quadrata ex AG , GB majora esse rectangulo bis sub AG , GB .

Secetur enim AB bisariam in Δ . Quoniam igitur recta linea secatur in partes quidem æquales ad Δ , in partes verò inæquales ad Γ ; rectangulum igitur sub AG , GB cum quadrato ex $\Delta\Gamma$ æquale est quadrato ex $\Delta\Delta$; quare rectangulum sub AG , GB minus est quadrato ex $\Delta\Delta$; rectangulum igitur bis sub AG , GB minus est quàm duplum quadrati ex $\Delta\Delta$. Sed quadrata ex AG , GB dupla sunt quadratorum ex $\Delta\Delta$, $\Delta\Gamma$; ergo quadrata ex AG , GB majora sunt rectangulo bis sub AG , GB . Quod oportebat ostendere.

LEMME.

Si une ligne droite est coupée en parties inégales, la somme des quarrés de ces parties inégales est plus grande que le double rectangle compris sous ces parties.

Soit la droite AB ; coupons-la en parties inégales au point Γ , et que AG soit la plus grande; je dis que la somme des quarrés de AG et de GB est plus grande que le double rectangle sous AG , GB .

Que la droite AB soit coupée en deux parties égales en Δ . Puisque la ligne droite AB est coupée en parties égales au point Δ , et en parties inégales au point Γ , le rectangle sous AG , GB avec le quarré de $\Delta\Gamma$ sera égal au quarré de $\Delta\Delta$ (5. 2); le rectangle sous AG , GB est donc plus petit que le quarré de $\Delta\Delta$; le double rectangle sous AG , GB est donc plus petit que le double quarré de $\Delta\Delta$. Mais la somme des quarrés de AG et de GB est double de la somme des quarrés de $\Delta\Delta$ et de $\Delta\Gamma$ (9. 2); la somme des quarrés de AG et de GB est donc plus grande que le double rectangle sous AG , GB . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΔ΄.

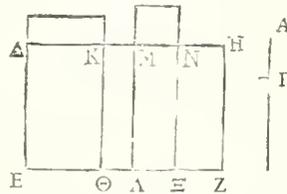
Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB , διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ , ὥστε το μείζον ὄνομα εἶναι τὸ AG , καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔEZH , πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

PROPOSITIO LXI.

Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus ipsa AB , divisa in nomina ad Γ , ita ut majus nomen sit AG , et exponatur rationalis ΔE , et quadrato ex AB æquale ad ΔE applicetur ipsum ΔEZH , latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse primam.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔE τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AG ἴσον τὸ $\Delta\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ ἴσον τὸ $ΚΛ$. λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , ΓB ἴσον ἐστὶ τῷ MZ . Τετμήσθω ἡ MH δίχα κατὰ τὸ N , καὶ παράλληλος ἦχθω ἡ $NΞ$ ἐκατέρᾳ τῶν $ΜΛ$, $HΞ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $MΞ$, NZ ἴσον ἐστὶ τῷ

Applicetur enim ad ΔE quadrato quidem ex AG æquale $\Delta\Theta$, ipsi verò ex $B\Gamma$ æquale $ΚΛ$; reliquum igitur rectangulum bis sub AG , ΓB æquale est ipsi MZ . Secetur MH bifariam in N , et parallela ducatur ipsa $NΞ$ alterutri ipsorum $ΜΛ$, $HΞ$; utrumque igitur ipsorum $MΞ$,

PROPOSITION LXI.

Le carré d'une droite de deux noms appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

Soit la droite AB de deux noms, divisée en ses noms au point Γ , de manière que AG soit son plus grand nom; soit exposée la rationnelle ΔE , et appliquons à la rationnelle ΔE un rectangle ΔEZH égal au carré de AB , et faisant la largeur ΔH ; je dis que la droite ΔH est une première de deux noms.

Appliquons à la rationnelle ΔE un rectangle $\Delta\Theta$ égal au carré de AG (45. 1), et un rectangle $ΚΛ$ égal au carré de $B\Gamma$; le double rectangle restant sous AG , ΓB sera égal au rectangle MZ (4. 2). Coupons MH en deux parties égales en N , et menons à l'une ou à l'autre des droites $ΜΛ$, $HΞ$ la parallèle $NΞ$; chacun des rectangles

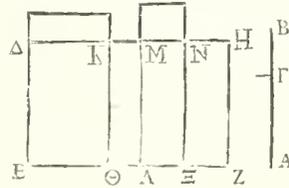
ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ἰσομάτων ἔστιν ἡ ΔΒ διηρημένη εἰς τὰ ἰσώματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΒΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ ῥητὰ ἔστι² καὶ σύμμετρα ἀλλήλοισι· ἄσπε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ³. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΑ ῥητὸν ἄρα ἔστι τὸ ΔΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἔστιν ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΒΒ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἔστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ, τοιούτεσι τὸ ΜΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΑ παράκειται ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἔστι⁴, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΑ, τοιούτεσι τῇ ΔΕ, μήκει. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ἰσομάτων ἔστιν ἡ ΔΗ. Δεικτέον

ΟΖ æquale est rectangulo semel sub ΑΓ, ΒΒ. Et quoniam ex binis nominibus est ΑΒ δι-
 visa in nomina ad Γ; ipsæ ΑΓ, ΒΒ igitur
 rationales sunt potentiâ solùm commensura-
 biles; ergo quadrata ex ΑΓ, ΒΒ rationalia sunt
 et commensurabilia inter se; quare et compo-
 situm ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΒΒ commensu-
 rabile est quadratis ex ΑΓ, ΒΒ. Atque est æquale
 ipsi ΔΑ; rationale igitur est ΔΑ, et ad rationalem
 ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΜ, et
 commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus,
 quoniam ΑΓ, ΒΒ rationales sunt potentiâ solùm
 commensurabiles; medium igitur est rectangu-
 lum bis sub ΑΓ, ΒΒ, hoc est ΜΖ. Et ad ratio-
 nalem ΜΑ applicatur; rationalis igitur et ΜΗ
 est, et incommensurabilis ipsi ΜΑ, hoc est ipsi
 ΔΕ, longitudine. Est autem et ΜΔ rationalis,
 et ipsi ΔΕ longitudine commensurabilis; incom-
 mensurabilis igitur est ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine.
 Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur ratio-
 nales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex
 binis igitur nominibus est ΔΗ. Ostendendum est

ME, NZ sera égal au rectangle compris sous ΑΓ, ΒΒ. Et puisque la droite ΑΒ de
 deux noms est divisée en ses noms au point Γ, les droites ΑΓ, ΒΒ seront des ra-
 tionnelles commensurables en puissance seulement (37. 10); les carrés de ΑΓ et de
 ΒΒ sont donc rationels, et commensurables entre eux; la somme des carrés de ΑΓ
 et de ΒΒ est donc commensurable avec la somme des carrés de ΑΓ et de ΒΒ (16. 10).
 Mais elle est égale au rectangle ΔΑ; le rectangle ΔΑ est donc rationel, et il est ap-
 pliqué à la rationelle ΔΕ; la droite ΔΜ est donc rationelle, et commensurable en
 longueur avec ΔΕ (25. 10). De plus, puisque les droites ΑΓ, ΒΒ sont des rationelles
 commensurables en puissance seulement, le double rectangle sous ΑΓ, ΒΒ, c'est-à-
 dire le rectangle ΜΖ, sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΜΑ; la droite ΜΗ
 est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΜΑ, c'est-à-dire avec ΔΕ
 (25. 10). Mais la droite ΜΔ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ;
 la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ (15. 10). Mais ces droites
 sont rationelles; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationelles commensurables en
 puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer

δη ὅτι καὶ πρῶτον. Ἐπεὶ γὰρ⁵ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσων ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ, ΚΑ ἄρα μέσων ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΑ. τοῦτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς

et primam esse. Quoniam enim quadratorum ex ΑΓ, ΓΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ipsorum ΔΘ, ΚΑ igitur medium proportionale est ΜΞ; est igitur ut ΔΘ ad ΜΞ ita ΜΞ ad ΚΑ, hoc est ut ΔΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΜΚ; rectangulum igitur sub ΔΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ. Et quoniam commensurabile est ex ΑΓ quadratum quadrato



ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΑ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΑ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει^δ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐάν δὲ ᾖσι δύο εὐθείαι ἀίσιαι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ

ex ΓΒ, commensurabile est et ΔΘ ipsi ΚΑ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ commensurabilis est longitudine. Et quoniam majora sunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; majus igitur et ΔΑ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ ipsa ΜΗ major est. Atque est æquale rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΜΗ, et commensurabilis ΔΚ ipsi ΚΜ longitudine. Si autem sunt duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex mi-

qu'elle est aussi une première de deux noms. Car puisque le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est moyen proportionel entre les carrés des droites ΑΓ, ΓΒ (55. lem. 10), le rectangle ΜΞ sera moyen proportionel entre les rectangles ΔΘ, ΚΑ; le rectangle ΔΘ est donc à ΜΞ comme ΜΞ est à ΚΑ, c'est-à-dire ΔΚ est à ΜΝ comme ΜΝ est à ΜΚ; le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est donc égal au carré de ΜΝ (17. 6). Et puisque le carré de ΑΓ est commensurable avec le carré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commensurable avec le rectangle ΚΑ (14. 10); la droite ΔΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (61. lem. 10), le rectangle ΔΑ sera plus grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au carré de ΜΝ, c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ΜΗ, et la droite ΔΚ est commensurable en longueur avec ΚΜ; or, si l'on a deux droites inégales,

ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παρα-
 βληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμ-
 μετρα αὐτὴν διαιρῆ, ἢ μείζων τῆς ἐλάττονος
 μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῆ· ἢ
 ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μετροῦ ἑαυτῆ¹⁰. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ,
 καὶ ἡ ΔΜ μείζων ὄνομα οὔσα σύμμετρος ἐστὶ
 τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἢ ΔΗ ἄρα ἐκ
 δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΒ΄.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ρητὴν
 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνο-
 μάτων δευτέραν.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διηρημένη
 εἰς τὰς μέσας¹ κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ
 ἐκκείσθω ρητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ παρα-

norū æquale ad majorem applicetur deficiens
 figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles
 ipsam dividat, major quàm minor plus potest
 quadrato ex rectâ sibi commensurabili; ipsa ΔΜ
 igitur quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ
 sibi commensurabili. Et sunt rationales ΔΜ,
 ΜΗ, et ΔΜ majus nomen existens commensu-
 rabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine;
 ergo ΔΗ ex binis nominibus est prima. Quod
 oportebat ostendere.

PROPOSITIO LXII.

Quadratum primæ ex binis mediis ad ra-
 tionalem applicatum latitudinem facit ex binis
 nominibus secundam.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ, divisa in
 medias ad Γ, quarum major sit ΑΓ, et expo-
 natur rationalis ΔΕ, et ad ipsam ΔΕ applicetur

si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du
 carré de la plus petite, si ce parallélogramme est défilant d'une figure carrée,
 et s'il partage la plus grande en parties commensurables, la puissance de la plus
 grande surpassera la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable
 en longueur avec la plus grande (18. 10); la puissance de ΔΜ surpasse
 donc la puissance de ΜΗ du carré d'une droite commensurable avec ΔΜ. Mais les
 droites ΔΜ, ΜΗ sont rationnelles, et ΔΜ, qui est le plus grand nom, est com-
 mensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une
 première de deux noms (déf. sec. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

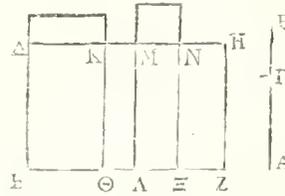
PROPOSITION LXII.

Le carré de la première de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une
 largeur qui est la seconde de deux noms.

Soit ΑΒ la première de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ; que la
 droite ΑΓ soit la plus grande; soit exposée la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un

Ἐπιθέσθω τῶ ἀπὸ τῆς AB ἴσον τὸ² παραλλη-
 γόγραμμεν τὸ ΔΖ, πλάτος ποιούσιν τὴν ΔΗ· λέγω
 ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔΖ;
 latitudinem faciens ΔΗ; dico ΔΗ ex binis nomi-
 nibus esse secundam.



Κατισκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου.
 Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διηρη-
 μένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυ-
 νάμει μόνων σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι ὥστε
 καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστὶ μέσων ἄρα
 τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβηται ὁ
 ῥητὴ ἄρα ἐστὶ ἡ ΜΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ
 μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν
 ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἐστὶ καὶ τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ
 ῥητὴν τὴν ΜΑ παράβηται ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ
 ἡ ΜΗ, καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΑ, ταυτεστι
 τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ

Construantur enim eadem quæ supra. Et quo-
 niam AB ex binis mediis est prima, divisa
 ad Γ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur mediæ sunt pot-
 tentiâ solum commensurabiles rationale conti-
 nentes; quare et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ media
 sunt; medium igitur ΔΛ, et ad rationalem ΔΕ
 applicatur; rationalis igitur est ΜΔ, et incom-
 mensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quo-
 niam rationale est rectangulam bis sub ΑΓ, ΓΒ,
 rationale est et ΜΖ, et ad rationalem ΜΑ appli-
 catur; rationalis igitur est et ΜΗ, et longitu-
 dine commensurabilis ipsi ΜΑ, hoc est ipsi ΔΕ;
 incommensurabilis igitur est ΔΜ ipsi ΜΗ longi-

parallélogramme ΔΖ égal au carré de AB, ce parallélogramme ayant ΔΗ pour largeur; je dis que ΔΗ est une seconde de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB, qui est divisée au point Γ, est la première de deux médiales, les droites ΑΓ, ΓΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface rationnelle (58. 10); les carrés de ΑΓ et de ΓΒ sont donc médiaux; le rectangle ΔΛ est donc médial, et il est appliqué à la rationnelle ΔΕ; la droite ΜΔ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ (25. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est rationnel, le rectangle ΜΖ sera rationnel, et il est appliqué à la rationnelle ΜΑ; la droite ΜΗ est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec ΜΑ (21. 10), c'est-à-dire avec ΔΕ; la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ (15. 10). Mais ces droites sont rationnelles;

μήκει. Καὶ εἴσι ρηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ρηταὶ εἴσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ἰσομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Ἐπεὶ γὰρ τα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΑ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΑ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῆ ΚΜ σύμμετρός ἐστι. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ ἐστὶν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ἰσομάτων ἐστὶ δευτέρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et secundam esse. Quoniam enim quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; majus igitur et ΔΑ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ ipsâ ΜΗ. Et quoniam commensurable est ex ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ, commensurable est et ΔΘ ipsi ΚΑ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ commensurabilis est. Atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Atque est ΜΗ commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΓ'.

PROPOSITIO LXIII.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ἰσομάτων τρίτην.

Quadratum secundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

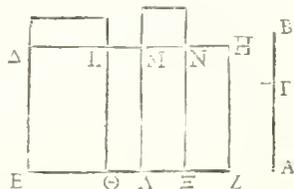
les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi la seconde de deux noms. Car puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (lem. 61. 10), le rectangle ΔΑ sera plus grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Et puisque le quarré de ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commensurable avec ΚΑ; la droite ΔΚ est donc commensurable avec ΚΜ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ surpasse donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10). Mais la droite ΜΗ est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXIII.

Le quarré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la troisième de deux noms.

Εστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ AB , διηρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ , ὅστε το μείζον τμήμα εἶναι τὸ AG , ῥητὴ δὲ τις ἔστω ἡ ΔE , καὶ παρὰ τὴν ΔE τῶ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παραλήνη ῥαμμαρον παραβιβήσῃ το ΔZ , πλάτος ποιῶν τὴν ΔH . λέγῃ ἴτι ἡ ΔH ἐκ δύο οὐμάτων ἐστὶ τρίτη.

Sit ex binis mediis secunda AB , divisa in medias ad Γ , ita ut majus segmentum sit AG , rationalis autem aliqua sit ΔE , et ad ipsam ΔE quadrato ex AB æquale parallelogrammum applicetur ΔZ , latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse tertiam.



Κατασκευάσθη γάρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδωγμένοις. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἡ AB , διηρημένη κατὰ τὸ Γ , αἱ AG , GB ἄρα μέσαι εἰσὶ οὐάμας μέσων σύμμετροι, μέσων περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB μέσων ἐστὶ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔA · μέσων ἄρα καὶ τὸ ΔA · καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν ΔE ³. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔM , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ MH ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ MA , τουτέστι τῇ ΔE , μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam ex binis mediis est secunda AB , divisa ad Γ ; ipsæ AG , GB igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. medium continentes; quare et compositum ex quadratis ipsarum AG , GB medium est. Atque est æquale ipsi ΔA ; medium igitur et ΔA ; et applicatur ad ratiorem ΔE ; rationalis igitur est et ΔM , et incommensurabilis ipsi ΔE longitudine. Propter eadem utique et MH rationalis est. et incommensurabilis ipsi MA , hoc est ipsi ΔE , longitudine; rationalis igitur est utraque ipsa-

Soit AB la seconde de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ , de manière que AG soit son plus grand segment; soit aussi la rationelle ΔE ; appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une troisième de deux noms.

Faisons la même construction qu'au paravant. Puisque AB est une seconde de deux médiales, divisée au point Γ ; les droites AG , GB seront des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface médiale (59. 10); la somme des carrés de AG et de GB est donc médiale. Mais elle est égale au rectangle ΔA ; le rectangle ΔA est donc médial; et il est appliqué à la rationelle ΔE ; la droite ΔM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (25. 10). Par la même raison, la droite MH est rationelle, et incommensurable en longueur avec MA , c'est-à-dire avec ΔE ; chacune des droites ΔM , MH

τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἔρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρον ἐστὶ, οὐδέστι τὸ ΔΑ τῶ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρος ἐστὶ. Καὶ εἴσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὁνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὴ⁶ ὅτι καὶ τρίτη. Ομοίως δὴ τοῖς προτέροις⁷ ἐπιλογισμῶμα, ὅτι μείζων ἐστὶν⁸ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῶ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῶ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὁνομάτων ἐστὶ τρίτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

rum ΔΜ, ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Et quoniam incommensurabilis est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine, ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurable igitur et ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ incommensurable est, hoc est ΔΑ ipsi ΜΖ; quare et ΔΜ ipsi ΜΗ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et tertiam esse. Congruenter utique præcedentibus concludemus majorem esse ΔΜ ipsâ ΜΗ, et commensurabilem ΔΚ ipsi ΚΜ. Atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ, et que ΑΓ est à ΓΒ comme le carré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, le carré de ΑΓ sera incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΔΑ avec ΜΖ; la droite ΔΜ est donc incommensurable avec ΜΗ. Mais ces droites sont rationnelles; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi une troisième de deux noms. Nous concluons comme auparavant que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que ΔΚ est commensurable avec ΚΜ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au carré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ est donc plus grande que la puissance de ΜΗ du carré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 5. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΔ'.

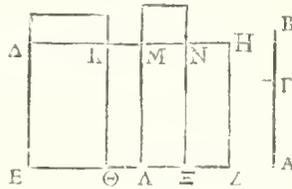
PROPOSITIO LXIV.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἐστω μείζων ἡ AB , διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὅστε μείζονα εἶναι τὴν AG τῆς GB , ῥητὴ δὲ τις ἔστω ἡ ΔE , καὶ τῶ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH ; λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major AB , divisa ad Γ , ita ut major sit AG quam GB , rationalis autem aliqua sit ΔE , et quadrato ex AB æquale ad ipsam ΔE applicetur ΔZ parallelogrammum, latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse quartam.



Κατεσκευάσθω γάρ τὰ αὐτὰ τοῖς προειρημένοις. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , αἱ AG , GB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὴν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam major est AB divisa ad Γ , ipsæ AG , GB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium.

PROPOSITION LXIV.

Le carré d'une majeure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

Soit la majeure AB , divisée en Γ , la droite AG étant plus grande que GB ; soit aussi une rationnelle ΔE ; appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ , qui étant égal au carré de AB , ait la droite ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une quatrième de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la majeure AB est divisée au point Γ , les droites AG , GB seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites

μέσον. Ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συζυγόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΔΛ ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τοῦτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὁνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. Ομοίως δὲ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετράν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ. Ἐὰν δὲ ὡς δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῆ

Quoniam igitur rationale est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, rationale igitur et ΔΛ; rationalis igitur est et ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ, et ad rationalem ΜΛ applicatur; rationalis igitur est et ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et quartam. Congruenter utique præcedentibus ostendemus, majorem esse ΔΜ quam ΜΗ, et rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΜΝ. Quoniam igitur incommensurabile est ex ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ; incommensurabile igitur est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare incommensurabilis est et ΚΔ ipsi ΚΜ. Si autem sint duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommen-

médial (40. 10). Puisque la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est rationnelle, le rectangle ΔΛ sera rationel; la droite ΔΜ est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΜΖ, est médial, et qu'il est appliqué à la rationnelle ΜΛ, la droite ΜΗ sera rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ (25. 10); la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (57. 10). Il faut démontrer qu'elle est aussi la quatrième de deux noms. Nous démontrerons, comme auparavant, que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au carré de ΜΝ. Et puisque le carré de ΑΓ est incommensurable avec le carré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera incommensurable avec ΚΛ (10. 10); la droite ΚΔ est donc incommensurable avec ΚΜ. Mais si deux droites sont inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du carré de la plus petite, et si ce parallélogramme, étant défailant d'une figure carrée, partage la plus grande droite en parties incommen-

μήκει¹¹, ἢ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ μήκει· ἢ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύνησεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ ΔΕ· ἢ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

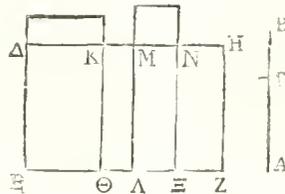
surabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; ergo ΔΜ quam ΜΗ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΔΜ, ΜΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΔΜ commensurabilis est expositæ ratioaali ΔΕ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ΄.

PROPOSITIO LXV.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρά ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῆ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, διηρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ

Sit rationale et medium potens ΑΒ, divisa in rectas ad Γ, ita ut major sit ΑΓ, et exponatur rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΒ

mensurables en longueur, la puissance de la plus grande droite surpassera la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable en longueur avec la plus grande droite (19. 10); la puissance de ΔΜ surpassera donc la puissance de ΜΗ du carré d'une droite incommensurable avec ΔΜ. Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et ΔΜ est commensurable avec la rationnelle exposée ΔΕ; ΔΗ est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXV.

Le carré d'une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

Que la droite ΑΒ, pouvant une surface rationnelle et une surface médiale, soit divisée en ses droites au point Γ, la droite ΑΓ étant la plus grande; soit exposée la

ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔZ , πλάτους ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω γάρ¹ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ AB , διηρημένη κατὰ τὸ Γ αἱ AG , GB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συζυγόμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συζυγόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔA . ὥστε ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΔM , καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔE . Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , τουτέστι τὸ MZ . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν² ἡ MH , καὶ σύμμετρος τῇ ΔE μήκει³. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔM τῇ MH . αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH . λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔK , KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔK τῇ KM

æquale ad ipsam ΔE applicetur ΔZ , latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse quintam.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Quoniam igitur rationale et medium potius est AB , divisa ad Γ ; ergo AG , GB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex quadratis ipsarum AG , GB ; medium igitur est et ΔA ; quare rationalis est ΔM , et longitudine incommensurabilis ipsi ΔE . Rursum, quoniam rationale est rectangulum bis sub AG , GB , hoc est MZ ; rationalis igitur est MH , et commensurabilis ipsi ΔE longitudine; incommensurabilis igitur ΔM ipsi MH ; ipsæ ΔM , MH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔH . Dico et quintam esse. Similiter enim demonstrabitur rectangulum sub ΔK , KM æquale esse quadrato ex MN , et incommensurabilem ΔK ipsi KM longitu-

rationnelle ΔE , et appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une cinquième de deux noms.

Car faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB , qui est divisée au point Γ , peut une surface rationnelle et une surface médiale, les droites AG , GB seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationnel (41. 10). Puisque la somme des carrés des droites AG , GB est médiale, le rectangle ΔA sera médial; la droite ΔM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (25. 10). De plus, puisque le double rectangle sous AG , GB , c'est-à-dire MZ , est rationnel, la droite MH sera rationnelle et commensurable en longueur avec ΔE (21. 10); la droite ΔM est donc incommensurable avec MH (15. 10); les droites ΔM , MH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔH est donc une droite de deux noms (57. 10). Je dis qu'elle est aussi une cinquième de deux noms. Car nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΔK , KM est égal au carré de MN , et que ΔK est in-

μήκειά· ἢ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. Καὶ εἶσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ρητὰ ἢ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἢ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἢ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ἰσομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

dine; ergo ΔΜ quam ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΔΜ, ΜΗ rationales potentiâ solum commensurabiles, et minor ΜΗ commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΕ΄.

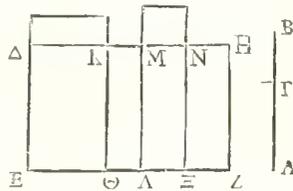
Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ἰσομάτων ἕκτην.

Ἐστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ, διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ρητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν

PROPOSITIO LXVI.

Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens ΑΒ, divisa ad Γ, rationalis autem sit ΔΕ, et ad ipsam ΔΕ



ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιούσιν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ἰσομάτων ἐστὶν ἕκτην.

quadrato ex ΑΒ æquale applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ; dico ΔΗ ex binis nominibus esse sextam.

commensurable en longueur avec ΕΜ; la puissance de ΔΜ surpasse donc la puissance de ΜΗ du carré d'une droite incommensurable avec ΔΜ (19. 10). Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et la plus petite ΜΗ est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10) Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXVI.

Le carré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

Que la droite ΑΒ, divisée au point Γ, puisse deux médiales; soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ le parallélogramme ΔΖ égal au carré de ΑΒ, et ayant ΔΗ pour largeur; je dis que ΔΗ est une sixième de deux noms.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον.
 Καὶ ἐπεὶ ἡ AB δυο μέσα δυναμένη ἐστὶ, διηρη-
 μένη κατὰ τὸ Γ . αἱ AG , GB ἄρα δυνάμει εἰσὶν
 ἀσύμμετροι, ποιεῖσθαι τό, τε συζκείμενον ἐκ τῶν
 ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν
 μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
 τετραγώνων συζκείμενον τῷ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν
 ὥστε κατὰ τὰ προειρημένα μέσον ἐστὶν ἐκά-
 τερον τῶν ΔA , MZ , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE πα-
 ράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔM ,
 MH , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. Καὶ ἐπεὶ
 ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συζκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν AG , GB τῶν δὲς ὑπὸ τῶν AG , GB , ἀσύμμετρον
 ἄρα ἐστὶ τὸ ΔA τῷ MZ . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ²
 καὶ ἡ ΔM τῇ MH . αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταί εἰσι
 δυνάμει μόνον σύμμετροι ἐκ δύο ἄρα ἐνομάτων
 ἐστὶν ἡ ΔH . Λέγω ὅτι καὶ ἔκτι. Ομοίως δὲ
 πάλιν³ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔK , KM ἴσον
 ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ὅτι ἡ ΔK τῇ KM
 μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δη ἡ

Construatur enim eadem quæ suprâ. Et
 quoniam AB bina media potens est, divisa ad
 Γ ; ipsæ AG , GB igitur potentiâ sunt incom-
 mensurabiles, facientes et compositum ex
 ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub
 ipsis medium, et adhuc incommensurable ex
 ipsarum quadratis compositum composito ex
 rectangulis sub ipsis; quare ex jam demonstratis
 medium est utrumque ipsorum ΔA , MZ , et
 ad rationalem ΔE applicantur; rationalis igitur
 est et utraque ipsarum ΔM , MH , et incommen-
 surabilis ipsi ΔE longitudine. Et quoniam in-
 commensurable est compositum ex quadratis
 ipsarum AG , GB rectangulo bis sub AG , GB , in-
 commensurable igitur est ΔA ipsi MZ ; incom-
 mensurabilis igitur est et ΔM ipsi MH ; ipsæ
 ΔM , MH igitur rationales sunt potentiâ solum
 commensurabiles; ergo ex binis nonanibus est
 ΔH . Dico et sextam esse. Similiter utique
 rursus ostendemus rectangulum sub ΔK , KM
 æquale esse quadrato ex MN , et ΔK ipsi KM
 longitudine esse incommensurabilem; et propter

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB , divisée au point Γ , peut deux médiales, les droites AG , GB seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme de leurs carrés étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces droites (42. 10), chacun des rectangles ΔA , MZ sera médial, d'après ce qui a été démontré; mais ils sont appliqués à la rationnelle ΔE ; chacune des droites ΔM , MH est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (23. 10). Et puisque la somme carrés de AG et de GB est incommensurable avec le double rectangle sous AG , GB , le rectangle ΔA sera incommensurable avec MZ ; la droite ΔM est donc incommensurable avec MH (10. 10); les droites ΔM , MH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔH est donc une droite de deux noms. Je dis qu'elle est aussi une sixième de deux noms. Nous démontrerons encore de la même manière que le rectangle sous ΔK , KM est égal au carré de MN , et que ΔK est incommensurable en longueur avec KM ; par la

ΔM τῆς MH μείζον δύσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ μήκει. Καὶ οὐδέτερά τῶν ΔM , MH σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκεκμηῆ ῥιτῇ τῇ ΔE μήκει· ἢ ΔH ἄρα ἐκ δύο ἰσομάτων ἐστὶν ἕκτη. Οὔτε ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ $\xi\zeta'$.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ἰσομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτῇ ἐκ δύο ἰσομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω ἐκ δύο ἰσομάτων ἡ AB , καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκ δύο ἰσομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ἰσομάτων ἐστὶν ἡ AB , διηρησθῆ εἰς τὰ ἰσομάτα κατὰ τὸ E , καὶ ἔστω μείζον ἰσομα το AE . αἱ AE , EB ἄρα ῥιτὰί εἰσι δύοῖσιν μόνον σύμμετροι. Γεγραμένω ὅς ἡ AB

eadem utique ΔM quam MH plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΔM , MH commensurabilis est expositæ rationali ΔE longitudine; ergo ΔH ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO LXVII.

Recta quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem.

Sit ex binis nominibus ipsa AB , et ipsi AE longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$; dico $\Gamma\Delta$ ex binis nominibus esse et ordine eadem ipsi AB .

Quoniam enim ex binis nominibus est AB , dividatur iu nomina ad E , et sit majus nomen AE ; ipsæ AE , EB igitur rationales sunt potentia solum commensurabiles. Fiat ut

même raison, la puissance de ΔM surpassera la puissance de MH du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΔM (19. 10). Mais aucune des droites ΔM , MH n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔE ; la droite ΔH est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXVII.

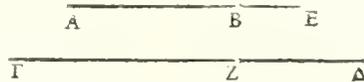
La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

Soit AB une droite de deux noms, et que $\Gamma\Delta$ soit commensurable en longueur avec AB ; je dis que $\Gamma\Delta$ est une droite de deux noms, et qu'elle est du même ordre que AB .

Car, puisque AB est une droite de deux noms, qu'elle soit divisée en ses noms au point E , et que AE soit son plus grand nom; les droites AE , EB seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (37. 10). Faisons en sorte que

πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τῆν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἢ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἴσι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπιπέδου ἐστὶν ὡς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἢ ΕΒ πρὸς τὴν

AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et reliqua igitur EB ad reliquam ΖΔ est ut AB ad ΓΔ. Commensurabilis verò AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur est et quidem AE ipsi ΓΖ, ipsa verò EB ipsi ΖΔ. Et sunt rationales AE, EB; rationales igitur sunt et ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam est ut AE ad ΓΖ ita EB ad ΖΔ; permutando



ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ¹. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἴσι² σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἴσι σύμμετροι. Καὶ εἴσι ῥηταὶ· ἐκ δύο ἄρα ἰσομέτρων ἐστὶν ἢ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἢ αὐτῇ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται ἢτοι³ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυσμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἢ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἢ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ εἰ μὲν

igitur est ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ; ipsæ autem AE, EB potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et sunt rationales; ex binis igitur nominibus est ΓΔ. Dico et ordine esse eandem ipsi AB.

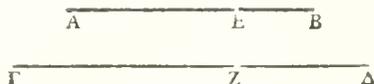
Vel enim AE quam EB plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Si quidem igitur AE quam EB plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si

AB soit à ΓΔ comme AE est à ΓΖ; la droite restante EB sera à la droite restante ΖΔ comme AB est à ΓΔ (19. 5). Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite AE est donc commensurable avec ΓΖ, et EB avec ΖΔ (10. 10). Mais les droites AE, EB sont rationnelles; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc rationnelles. Et puisque AE est à ΓΖ comme EB est à ΖΔ; par permutation, AE est à EB comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais les droites AE, EB ne sont commensurables qu'en puissance; les droites ΓΖ, ΖΔ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais elles sont rationnelles; ΓΔ est donc une droite de deux noms (57. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que AB.

Car la puissance de AE surpasse la puissance de EB du carré d'une droite commensurable ou incommensurable avec AE. Si la puissance de AE surpasse la puissance de EB du carré d'une droite commensurable avec AE, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du carré d'une droite commensurable avec ΓΖ (15. 10);

σύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται^π. καὶ διὰ τοῦτο ἑκάτερα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἔστι πρώτη, τοῦτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρος ἔστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ, ἑκάτερα γὰρ αὐτῶν ἔσται^θ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. Εἰ δὲ

quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis eidem erit; et ob id utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ ex binis nominibus est prima, hoc est ordine eadem. Si verò ΕΒ commensurabilis est expositæ rationali, et ΖΔ commensurabilis est eidem, et ob id rursus ordine eadem erit ipsi ΑΒ, utraque enim ipsarum erit ex binis nominibus secunda. Si autem



οὐδέτερά τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, οὐδέτερά τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἔστιν ἑκάτερα τρίτη. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύναται^ι τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος ἔστιν αὐτῇ, καὶ ἔστιν ἑκάτερα τετάρτη.

neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ commensurabilis sit expositæ rationali, neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ commensurabilis eidem erit, et est utraque tertia. Si verò ΑΕ quam ΕΒ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem ΑΕ commensurabilis est expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis est eidem, et est utraque quarta. Si autem

et si la droite ΑΕ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera aussi commensurable avec elle (12. 10). Chacune des droites ΑΒ, ΓΔ est donc la première de deux noms, c'est-à-dire que ces droites sont du même ordre. Si la droite ΕΒ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΖΔ sera aussi commensurable avec elle, et la droite ΓΔ sera encore du même ordre que ΑΒ, car chacune d'elles sera une seconde de deux noms. Mais si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une troisième de deux noms. Si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΖ (15. 10). Si la droite ΑΕ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une quatrième de deux noms. Si la droite ΕΒ est commensurable avec la

Εἰ δὲ ἢ EB, καὶ ἢ ZΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB, καὶ τῶν ΓZ, ZΔ οὐδετέρα σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὅστε ἢ τῇ ἐκ δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ΄.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτῇ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτή.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων ἢ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω μήκει ἢ ΓΔ. λέγω ὅτι ἢ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ AB.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἢ AB, διηρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γερονέτω ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ AE πρὸς τὴν ΓZ³· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ EB πρὸς λοιπὴν τὴν

EB, et ZΔ, et erit utraque quinta. Si verò neutra ipsarum AE, EB, et ipsarum ΓZ, ZΔ neutra commensurabilis est expositæ rationali, et erit utraque sexta.

Quare recta ei quæ est ex binis, etc.

PROPOSITIO LXVIII.

Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

Sit ex binis mediis ipsa AB, et ipsi AB commensurabilis sit longitudine ipsa ΓΔ; dico ΓΔ ex binis mediis esse, et ordine eadem ipsi AB.

Quoniam enim ex binis mediis est AB, dividatur in medias ad E; ipsæ AE, EB igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et fiat ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ; et reliqua igitur EB ad reliquam ZΔ est ut AB ad ΓΔ.

rationnelle exposée, la droite ZΔ le sera aussi, et chacune d'elles sera une cinquième de deux noms; et enfin si aucune des droites AE, EB n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓZ, ZΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une sixième de deux noms. Donc, etc.

PROPOSITION LXVIII.

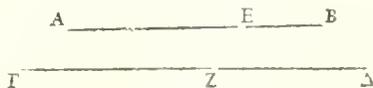
La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

Soit AB une droite de deux médiales, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec AB; je dis que ΓΔ est une droite de deux médiales, et que cette droite est du même ordre que AB.

Car puisque AB est une droite de deux médiales, qu'elle soit divisée en ses médiales au point E; les droites AE, EB seront des médiales commensurables en puissance seulement (38 et 39. 10). Faisons en sorte que AB soit à ΓΔ comme AE est à ΓZ; la droite restante EB sera à la droite restante ZΔ comme AB est à ΓΔ.

$Z\Delta$ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. Σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AE , EB ἑκατέρα τῶν ΓZ , $Z\Delta$ · μέσαι δὲ αἱ AE , EB · μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$ ⁶, αἱ δὲ AE , EB δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσι⁷· καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσι⁸. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ. Λέγω δὲ ἔτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ AB .

Commensurabilis autem AB ipsi $\Gamma\Delta$ longitudine; commensurabilis igitur et utraque ipsarum AE , EB utriusque ipsarum ΓZ , $Z\Delta$; mediæ verò AE , EB ; mediæ igitur et ΓZ , $Z\Delta$. Et quoniam est ut AE ad EB ita ΓZ ad $Z\Delta$, ipsæ autem AE , EB potentiâ solùm commensurabiles sunt; et ΓZ , $Z\Delta$ igitur potentiâ solùm commensurabiles sunt. Ostensæ sunt verò et mediæ; ergo $\Gamma\Delta$ ex binis mediis est. Dico et ordine eandem esse ipsi AB .



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$ ⁹· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ · ἐναλλάξ ἄρα¹⁰ τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς ΓZ · σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. Εἴτε οὖν ῥητὸν ἐστὶ τὸ

Quoniam enim est ut AE ad EB ita ΓZ ad $Z\Delta$; et ut igitur ex AE quadratum ad rectangulum sub AE , EB ita ex ΓZ quadratum ad rectangulum sub ΓZ , $Z\Delta$; permutando igitur ex AE quadratum ad ipsum ex ΓZ ita sub AE , EB rectangulum ad ipsum sub ΓZ , $Z\Delta$. Commensurable autem ex AE quadratum quadrato ex ΓZ ; commensurable igitur et sub AE , EB rectangulum rectangulo sub ΓZ , $Z\Delta$. Sive

Mais AB est commensurable en longueur avec $\Gamma\Delta$; chacune des droites AE , EB est donc commensurable avec chacune des droites ΓZ , $Z\Delta$. Mais les droites AE , EB sont médiales; les droites ΓZ , $Z\Delta$ sont donc médiales (24. 10). Et puisque AE est à EB comme ΓZ est à $Z\Delta$, et que les droites AE , EB ne sont commensurables qu'en puissance, les droites ΓZ , $Z\Delta$ ne seront commensurables qu'en puissance. Mais on a démontré qu'elles sont médiales; la droite $\Gamma\Delta$ est donc une droite de deux médiales (58 et 59. 10). Je dis aussi que $\Gamma\Delta$ est du même ordre que AB .

Car puisque AE est à EB comme ΓZ est à $Z\Delta$, le carré de AE sera au rectangle sous AE , EB comme le carré de ΓZ est au rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$ (11. 5, et 1. 6); donc, par permutation, le carré de AE est au carré de ΓZ comme le rectangle sous AE , EB est au rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$. Mais le carré de AE est commensurable avec le carré de ΓZ ; le rectangle sous AE , EB est donc commensurable avec le rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$. Si donc le rectangle sous AE , EB est rationel, le rectangle

ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητόν ἐστι· καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη. Ἐἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐστὶν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ τῆ ΑΒ τῆ τάξει ἢ αὐτῆ¹. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

igitur rationale est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ rationale est; et ob id est ex binis mediis prima. Sive medium rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, medium et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est utraque secunda; et ob id ΓΔ ipsi ΑΒ ordine eadem. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

PROPOSITIO LXIX.

Ἡ τῆ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῆ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μείζων ἐστίν.

Sit major ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ majorem esse.

Διηρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπὸ αὐτῶν μέσον. Γεγονέτω γάρ³ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢτε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ³. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ

Dividatur ΑΒ ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium. Fiant enim eadem quæ suprâ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita et ΑΕ ad ΓΖ et ΕΒ ad ΖΔ; et ut igitur ΑΕ ad ΓΖ ita ΕΒ ad ΖΔ.

sous ΓΖ, ΖΔ sera rationel; et ΓΔ sera, par conséquent, une première de deux médiales (58. 10). Si le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera médial. Mais les droites ΓΔ, ΔΒ sont l'une et l'autre la seconde de deux médiales (59. 10); la droite ΓΔ sera, par conséquent aussi, du même ordre que la droite ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

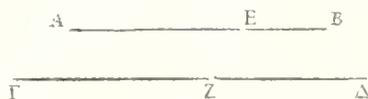
PROPOSITION LXIX.

Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

Soit la majeure ΑΒ; et que ΓΔ soit commensurable avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite majeure.

Divisons ΑΒ au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (40. 10). Car faisons les mêmes choses qu'au paravant. Puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ, et comme ΕΒ est à ΖΔ, la droite

οὕτως ἢ EB πρὸς τὴν ΖΔ. Σύμμετρος δὲ ἢ AB τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρω τῶν AE, EB ἑκατέρω τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ AE πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἢ EB πρὸς τὴν ΖΔ⁴, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἢ AE πρὸς τὴν EB⁵ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν⁶ ΖΔ· καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν BE οὕτως ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ⁸. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ



ἀπὸ τῆς BE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ἔτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Σύμμετροι δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ,

Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ; commensurabilis igitur et utraque ipsarum AE, EB utrique ipsarum ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam est ut AE ad ΓΖ ita EB ad ΖΔ, et permutando ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ; et componendo igitur est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔΖ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BE ita ex ΓΔ

quadratum ad ipsum ex ΔΖ. Similiter utique demonstrabimus et ut ex AB quadratum ad ipsum ex AE ita esse ex ΓΔ quadratum ad ipsum ex ΓΖ; et ut igitur ex AE quadratum ad ipsa ex AE, EB ita ex ΓΔ quadratum ad ipsa ex ΓΖ, ΖΔ; et permutando igitur est ut ex AB quadratum ad ipsum ex ΓΔ ita ex AE, EB quadrata ad ipsa ex ΓΖ, ΖΔ. Commensurable autem ex AB quadratum quadrato ex ΓΔ; commensurabilia igitur et ex AE, EB quadrata

AE sera à ΓΖ comme EB est à ΖΔ (11. 5). Mais AB est commensurable avec ΓΔ; chacune des droites AE, EB est donc commensurable avec chacune des droites ΓΖ, ΖΔ. Et puisque AE est à ΓΖ comme EB est à ΖΔ; par permutation, AE sera à EB comme ΓΖ est à ΖΔ; donc, par addition, AB est à BE comme ΓΔ est à ΔΖ; le carré de AB est donc au carré de BE comme le carré de ΓΔ est au carré de ΔΖ (22. 6). Nous démontrerons semblablement que le carré de AB est au carré de AE comme le carré de ΓΔ est au carré de ΓΖ; le carré de AB est donc à la somme des carrés des droites AE, EB comme le carré de ΓΔ est à la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ; donc, par permutation, le carré de AB est au carré de ΓΔ comme la somme des carrés des droites AE, EB est à la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais le carré de AB est commensurable avec le carré de ΓΔ; la somme des carrés des droites AE, EB est donc com-

ΖΔ. Καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἄμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἄμα ῥητόν ἐστιν. Ομοίως δὲ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρὸν ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστι μέσον τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἔρα δύναμει ἀσύμμετροί εἰσιθ, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἄμα¹⁰ ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μείζων.

Η ἔρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Η τῇ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη σύμμετρος καὶ αὐτῇ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

quadratis ex ΓΖ, ΖΔ. Et sunt quadrata ex ΑΕ, ΕΒ simul rationalia; et quadrata ex ΓΖ, ΖΔ simul rationalia sunt. Similiter verò et rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ commensurable est rectangulo bis sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est medium rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ; medium igitur et rectangulum bis sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; tota igitur ΓΔ irrationalis est, quæ vocatur major.

Recta igitur majori commensurabilis major est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO LXX.

Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

mensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais la somme des quarrés des droites ΑΕ, ΕΒ est rationelle (40. 10); la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc rationelle (déf. 9. 10). Par la même raison, le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est commensurable avec le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial (40. 10); le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial (24. 10); les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial; la droite entière ΓΔ est donc l'irracionelle appelée la droite majeure (40. 10).

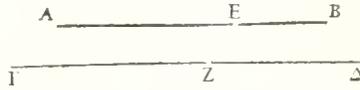
Une droite commensurable avec la majeure, est donc elle-même une droite majeure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXX.

Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. δεῖκτέον ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

Sit rationale et medium potens AB , et ipsi AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$; ostendendum est et $\Gamma\Delta$ rationale et medium potentem esse.



Διηρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E . αἱ AE , EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ μὲν συσκειμένον ἐκ τῶν ἀπὸ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρῶτερον. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συσκειμένον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τῶν συσκειμένων ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE , EB τῶν ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ ὥστε καὶ τὸ μὲν³ συσκειμένον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Dividatur AB in rectas ad E ; ipsæ AE , EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; et eadem construantur quæ supra. Similiter utique demonstrabimus et ΓZ , $Z\Delta$ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurable quidem compositum ex quadratis ipsarum AE , EB composito ex quadratis ipsarum ΓZ , $Z\Delta$, rectangulum verò sub AE , EB rectangulo sub ΓZ , $Z\Delta$; quare et quidem compositum ex ipsarum ΓZ , $Z\Delta$ quadratis est medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; rationale igitur et medium potens est $\Gamma\Delta$. Quod oportebat ostendere.

Que la droite AB puisse une surface rationelle et une surface médiale, et que $\Gamma\Delta$ soit commensurable avec AB ; il faut démontrer que la droite $\Gamma\Delta$ peut aussi une surface rationelle et une surface médiale.

Divisons AE en ses droites au point E ; les droites AE , EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Faisons la même construction qu'au paravant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓZ , $Z\Delta$ sont incommensurables en puissance, que la somme des carrés des droites AE , EB est commensurable avec la somme des carrés des droites ΓZ , $Z\Delta$, et que le rectangle sous AE , EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$; la somme des carrés des droites ΓZ , $Z\Delta$ est donc médiale, et le rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$ rationel (24. 10); la droite $\Gamma\Delta$ peut donc une surface rationelle et une surface médiale (41. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αά.

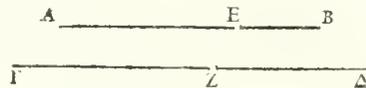
PROPOSITIO LXXI.

Ἡ τῆ δύο μέσα δυναμένη σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῆ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεκτέον δὴ ἔτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

Sit bina media potens ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis ΓΔ; ostendendum est et ΓΔ bina media potentem esse.



Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ, ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων² μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ἔτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον

Quoniam enim bina media potens est ΑΒ, dividatur in rectas ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis médium, et rectangulum sub ipsis médium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsarum ΑΕ, ΕΒ quadratis rectangulo sub ΑΕ, ΕΒ; et construantur eadem quæ supra. Similiter utique demonstrabimus et ΓΖ, ΖΔ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurable quidem

PROPOSITION LXXI.

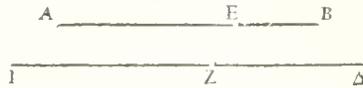
Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

Que la droite ΑΒ puisse deux surfaces médiales, et que ΓΔ soit commensurable avec ΑΒ; il faut démontrer que ΓΔ peut aussi deux surfaces médiales.

Car, puisque la droite ΑΒ peut deux surfaces médiales, qu'elle soit divisée en ses droites au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des quarrés des droites ΑΕ, ΕΒ étant incommensurable avec le rectangle sous les droites ΑΕ, ΕΒ (42. 10). Faisons la même construction qu'auparavant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓΖ, ΖΔ sont incommensurables en puissance; que la somme des quarrés des droites ΑΕ, ΕΒ est

ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῶ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῶ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ συ-

compositum ex quadratis ipsarum ΑΕ, ΕΒ composito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ, rectangulum verò sub ΑΕ, ΕΒ rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ;



κείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέσον, καὶ ἐπι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων τῶ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἢ ἄρα ΓΔ ἴσως δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quare et compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis medium est, et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ medium, et adhaec incommensurable compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ; ergo ΓΔ bina media potens est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αβ΄.

PROPOSITIO LXXII.

ῤητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρες ἄλλοι γίνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῤητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Rationali et medio compositis, quatuor irrationales fiunt, vel ex binis nominibus recta, vel ex binis mediis prima, vel major, vel et rationale et medium potens.

Ἐστω ῤητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢτοι ἐκ

Sit rationale quidem ipsum ΑΒ, medium verò ΓΔ; dico rectam, quæ ΑΔ spatium potest, vel

commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ; la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc médiale, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ médial aussi, et la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ incommensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (24. 10); la droite ΓΔ peut donc deux surfaces médiales (42. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

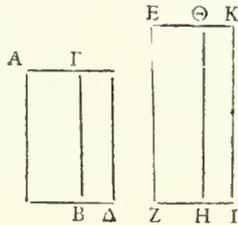
PROPOSITION LXXII.

Si l'on ajoute une surface rationnelle avec une surface médiale, on aura quatre droites irrationnelles; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

Soit la surface rationnelle ΑΒ, et la surface médiale ΓΔ; je dis que la droite qui

δύο ὀνομάτων ἐστίν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ AB τοῦ $\Gamma\Delta$ ἤτοι μείζον ἐστίν, ἢ ἔλασσον. Ἐστω πρότερον μείζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ EZ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν EZ τῷ AB ἴσον τὸ EH , πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$ · τῷ δὲ $\Gamma\Delta$ ἴσον παρὰ τὴν EZ , τουτέστι τὴν $\Theta\text{H}'$,



παραβεβλήσθω τὸ ΘI πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK . Καὶ ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ AB , καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ EH^2 · ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ EH , καὶ παρὰ ῥητὴν³ τὴν EZ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$ · ἢ $E\Theta$ ἄρα ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῇ EZ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΘI^2 · μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘI , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται, τουτέστι τὴν $\Theta\text{H}'$, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK · ῥητὴ ἄρα

ex binis nominibus esse, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale et medium potentem.

Etenim AB quam $\Gamma\Delta$ vel majus est, vel minus. Sit primum majus; et exponatur rationalis EZ , et applicetur ad ipsam EZ ipsi AB æquale EH , latitudinem faciens $E\Theta$; ipsi autem $\Gamma\Delta$ æquale ad EZ , hoc est ΘH , applicetur ΘI latitu-

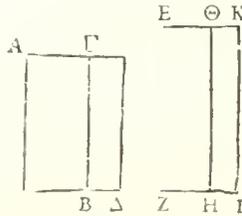
dinem faciens ΘK . Et quoniam rationale est AB , et est æquale ipsi EH ; rationale igitur et EH , et ad rationalem EZ applicatur latitudinem faciens $E\Theta$; ipsa $E\Theta$ igitur rationalis est et commensurabilis ipsi EZ longitudine. Rursus, quoniam medium est $\Gamma\Delta$, et est æquale ipsi ΘI ; medium igitur est et ΘI , et ad rationalem EZ applicatur, hoc est ad ΘH , latitudinem faciens ΘK ; rationalis igitur

peut la surface $A\Delta$, est ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou une droite majeure, ou la droite qui peut une surface rationelle et une surface mediale.

Car la surface AB est ou plus grande ou plus petite que $\Gamma\Delta$. Qu'elle soit d'abord plus grande. Soit exposée la rationelle EZ ; appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à AB , ce parallélogramme ayant la droite $E\Theta$ pour largeur; appliquons aussi à EZ , c'est-à-dire à ΘH , un parallélogramme ΘI égal à $\Gamma\Delta$, ce parallélogramme ayant la droite ΘK pour largeur. Puisque AB est rationel et égal à EH , le parallélogramme EH sera rationel; mais il est appliqué à la rationelle EZ , et il a pour largeur la droite $E\Theta$; la droite $E\Theta$ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec EZ (21. 10). De plus, puisque $\Gamma\Delta$ est medial, et qu'il est égal à ΘI , le parallélogramme ΘI sera medial; mais il est appliqué à la rationelle EZ , c'est-à-dire

ἐστὶν ἡ ΘK , καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ $\Gamma\Delta$, ῥητὸν δὲ τὸ AB . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τῷ $\Gamma\Delta$. ὥστε καὶ τὸ EH ἀσύμμετρον ἐστὶ τῷ ΘI . Ὡς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘI οὕτως ἐστὶν ἡ $\text{E}\Theta$ πρὸς τὴν ΘK . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $\text{E}\Theta$ τῇ ΘK μήκει· καὶ εἶσιν ἰσόζυτοι ῥηταί· αἱ $\text{E}\Theta$, ΘK ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ἰσότητων

est ΘK , et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam medium est $\Gamma\Delta$, rationale autem AB ; incommensurabile igitur est AB ipsi $\Gamma\Delta$; quare et EH incommensurabile est ipsi ΘI . Ut autem EH ad ΘI ita est $\text{E}\Theta$ ad ΘK ; incommensurabilis igitur est et $\text{E}\Theta$ ipsi ΘK longitudine; et sunt ambæ rationales; ipsæ $\text{E}\Theta$, ΘK igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ex binis igitur nominibus est EK divisa



ἐστὶν ἡ EK διαιρεμένη κατὰ τὸ Θ . Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τὸ AB τοῦ $\Gamma\Delta$, ἴσον δὲ τὸ μὲν AB τῷ EH , τὸ δὲ $\Gamma\Delta$ τῷ ΘI . μείζων ἄρα καὶ τὸ EH τοῦ ΘI . καὶ ἡ $\text{E}\Theta$ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘK . Ἦτοι εὖν ἡ $\text{E}\Theta$ τῆς ΘK μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἐστὶν ἡ^δ μείζων ἡ ΘE σύμμετρος

ad Θ . Et quoniam majus est AB quam $\Gamma\Delta$, æquale verò AB quidem ipsi EH , ipsum verò $\Gamma\Delta$ ipsi ΘI ; majus igitur et EH quam ΘI ; et $\text{E}\Theta$ igitur major est quam ΘK . Vel igitur $\text{E}\Theta$ quam ΘK plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et est major

à ΘH , et il a pour largeur la droite ΘK ; la droite ΘK est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec EZ (25. 10). Et puisque $\Gamma\Delta$ est médial, et que AB est rationel, AB sera incommensurable avec $\Gamma\Delta$; le parallélogramme EH est donc incommensurable avec ΘI . Mais EH est à ΘI comme $\text{E}\Theta$ est à ΘK ; la droite $\text{E}\Theta$ est donc incommensurable en longueur avec ΘK (1. 6). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites $\text{E}\Theta$, ΘK sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite EK divisée au point Θ est donc une droite de deux noms. Et puisque AB est plus grand que $\Gamma\Delta$, que AB est égal à EH , et que $\Gamma\Delta$ est égal à ΘI , le parallélogramme EH est plus grand que ΘI ; la droite $\text{E}\Theta$ sera par conséquent plus grande que ΘK . La puissance de $\text{E}\Theta$ surpasse donc celle de ΘK du carré d'une droite commensurable ou incommensurable en longueur avec $\text{E}\Theta$. Que la puissance de $\text{E}\Theta$ surpasse d'abord la puissance de ΘK du carré d'une droite commensurable

τῆ ἐκκεκμημένη ρητῆ τῆ EZ· ἢ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ρητὴ δὲ ἢ EG. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἢ ἄρα τὸ EI δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἢ τὸ AΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ἀλλὰ δὲ δυνασθῶ ἢ EΘ τῆς ΘK μείζον τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἐστὶν ἢ μείζων ἢ EΘ σύμμετρος τῆ ἐκκεκμημένη ρητῆ τῆ EZ μήκει· ἢ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, ρητὴ δὲ ἢ EZ. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστι, ἢ καλυμένη μείζων· ἢ ἄρα τὸ EI χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἢ τὸ AΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὲ ἔστω ἔλασσον τὸ AB τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ EH ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘI· ὥστε καὶ ἢ EΘ ἔλασσον ἐστὶ τῆς ΘK· ἦτοι δὲ ἢ ΘK τῆς EΘ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς,

ΘE commensurabilis expositæ rationali EZ ; ergo EK ex binis nominibus est prima, rationalis verò EZ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ, recta spatium potens ex binis nominibus est ; recta igitur ipsum EI potens ex binis nominibus est ; quare et recta ipsum AΔ potens ex binis nominibus est. Sed EΘ quam ΘK plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili ; et est major EΘ commensurabilis expositæ rationali EZ longitudine ; ergo EK ex binis nominibus est quarta, rationalis verò EZ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus quartâ, recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur major ; recta igitur spatium EI potens major est ; quare et recta ipsum AΔ potens major est.

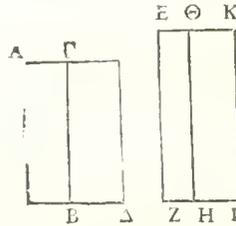
Sed et sit minus AB quam ΓΔ ; et EH igitur minus est quam ΘI ; quare et EΘ minor est quam ΘK ; vel autem ΘK quam EΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel qua-

avec EΘ ; mais ΘE, plus grand que ΘK, est commensurable avec la rationelle exposée EZ ; la droite EK est donc une première de deux noms (déf. sec. 1. 10) ; mais la droite EZ est rationelle ; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est une droite de deux noms (55. 10) ; la droite qui peut la surface EI est donc une droite de deux noms ; la droite qui peut la surface AΔ sera par conséquent une droite de deux noms. Mais que la puissance de EΘ surpasse la puissance de ΘK du carré d'une droite incommensurable en longueur avec EΘ, puisque EΘ, plus grand que ΘK, est commensurable en longueur avec la rationelle exposée EZ ; la droite EK sera la quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10) ; mais la droite EZ est rationelle ; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous une quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure (58. 10) ; la droite qui peut la surface EI est donc une droite majeure ; la droite qui peut la surface AΔ est donc aussi une droite majeure.

Mais que la surface AB soit plus petite que la surface ΓΔ ; la surface EH sera plus petite que la surface ΘI ; la droite EΘ sera par conséquent plus petite que ΘK ; or, la puissance de ΘK surpasse la puissance de EΘ du carré d'une droite commensurable avec EΘ ; mais ΘE, plus grand que ΘK, est commensurable avec la rationelle exposée EZ ; la droite EK est donc une première de deux noms (déf. sec. 1. 10) ; mais la droite EZ est rationelle ; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est une droite de deux noms (55. 10) ; la droite qui peut la surface EI est donc une droite de deux noms ; la droite qui peut la surface AΔ sera par conséquent une droite de deux noms. Mais que la puissance de EΘ surpasse la puissance de ΘK du carré d'une droite incommensurable en longueur avec EΘ, puisque EΘ, plus grand que ΘK, est commensurable en longueur avec la rationelle exposée EZ ; la droite EK sera la quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10) ; mais la droite EZ est rationelle ; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous une quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure (58. 10) ; la droite qui peut la surface EI est donc une droite majeure ; la droite qui peut la surface AΔ est donc aussi une droite majeure.

ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνασθῶ πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς μήκει, καὶ ἔστιν¹⁰ ἡ ἐλάσσων ἢ $E\Theta$ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ EZ μήκει· ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα, ῥητὴ δὲ ἡ EZ . Ἐάν δὲ χωρίον περιέχεται¹¹ ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον διαιρέσθαι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ EI χωρίον διαιρέσθαι ἐκ δύο μέσων

drato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; et est minor $E\Theta$ commensurabilis exposita rationali EZ longitudine; ergo EK ex binis nominibus est secunda, rationalis verò EZ . Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus secundâ, recta spatium potens ex binis mediis est prima; recta igitur spatium EI



ἐστὶ πρώτη· ἄστε καὶ ἡ τὸ $A\Delta$ χωρίον¹² διαιρέσθαι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ἀλλὰ δὲ ἡ $K\Theta$ τῆς $E\Theta$ μείζον διαιρέσθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἔστιν¹³ ἡ ἐλάσσων ἢ $E\Theta$ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ EZ · ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ EZ . Ἐάν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων

potens ex binis mediis est prima; quare et recta spatium $A\Delta$ potens ex binis mediis est prima. Sed et $K\Theta$ quam $E\Theta$ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est minor $E\Theta$ commensurabilis exposita rationali EZ ; ergo EK ex binis nominibus est quinta, rationalis verò EZ . Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis

surable ou incommensurable en longueur avec ΘK . Que la puissance de ΘK surpasse d'abord la puissance de $E\Theta$ du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΘK , puisque la droite $E\Theta$, plus petite que ΘK , est commensurable en longueur avec la rationelle exposée EZ ; la droite EK est donc la seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10); mais la droite EZ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous une seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est la première de deux médiales (56. 10); la droite qui peut la surface EI est donc la première de deux médiales; la droite qui peut la surface $A\Delta$ sera par conséquent la première de deux médiales. Mais que la puissance de $K\Theta$ surpasse la puissance de $E\Theta$ du carré d'une droite incommensurable avec $K\Theta$; puisque $E\Theta$, plus petit que $K\Theta$, est commensurable avec la rationelle exposée EZ ; la droite EK sera la cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10); mais la droite EZ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la cinquième de deux

πέμπτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ἢ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ῥητιῷ ἄρα καὶ μέσου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἢτοι ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα, ἢ ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἢτοι μείζον ἐστίν, ἢ ἔλασσον. Εστώ³ πρότερον μείζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκείσθω ῥητὴ ἢ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον

nomibus quinta, recta spatium potens rationale et medium potens est; recta igitur spatium EI potens rationale et medium potens est; quare et recta spatium AD potens rationale et medium potens est.

Rationali igitur et medio, etc.

PROPOSITIO LXXIII.

Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommensurabilia inter se ΑΒ, ΓΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis esse secundam, vel bina media potentem.

Etenim ΑΒ quam ΓΔ vel majus est, vel minus. Sit primum majus ΑΒ quam ΓΔ; et exponatur rationalis ΕΖ, et ipsi quidem ΑΒ

noms, la droite qui peut cette surface est celle qui peut une surface rationnelle et une surface médiale (59. 10); la droite qui peut la surface EI est donc celle qui peut une surface rationnelle et une surface médiale; la droite qui peut la surface AD sera par conséquent la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale. Donc, etc.

PROPOSITION LXXIII.

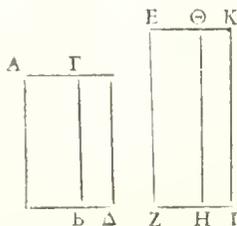
Deux surfaces médiales incommensurables entre elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationnelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Ajoutons les deux surfaces médiales ΑΒ, ΓΔ qui sont incommensurables entre elles; je dis que la droite qui peut la surface AD est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Car la surface ΑΒ est ou plus grande ou plus petite que la surface ΓΔ. Que ΑΒ soit d'abord plus grand que ΓΔ; soit exposée la rationnelle ΕΖ; et appliquons à ΕΖ un

παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος
 ποιῶν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος
 ποιῶν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον
 ΑΒ, ΓΔ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΙ,
 καὶ παρὰ ῥητῶν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος
 ποιῶν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκάτερα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ
 ῥητὴ ἔστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ
 ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἔστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καὶ ἴστιν

æquale ad ΕΖ applicetur ΕΗ latitudinem faciens
 ΕΘ, ipsi verò ΓΔ æquale ΘΙ latitudinem fa-
 ciens ΘΚ. Et quoniam medium est utrumque
 ipsorum ΑΒ, ΓΔ; medium igitur et utrumque
 ipsorum ΕΗ, ΘΙ, et ad rationalem ΕΖ appli-
 cantur, quæ latitudinem faciunt ΕΘ, ΘΚ; utraque
 igitur ipsarum ΕΘ, ΘΚ rationalis est, et incom-
 mensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam
 incommensurable est ΑΒ ipsi ΓΔ, et est æquale



ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, το δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμ-
 μετρον ἄρα ἔστι καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ
 τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν
 ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει·
 αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. Ἡτοι
 δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μίτρου αὐτῆς, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Δυ-

quidem ΑΒ ipsi ΕΗ, ipsum verò ΓΔ ipsi ΘΙ; in-
 commensurable igitur est et ΕΗ ipsi ΘΙ. Ut au-
 tem ΕΗ ad ΘΙ ita est ΕΘ ad ΘΚ; incommensura-
 bilis igitur est ΕΘ ipsi ΘΚ longitudine; ipsæ ΕΘ,
 ΘΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm com-
 mensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΕΚ.
 Vel autem ΕΘ quam ΘΚ plus potest quadrato ex
 rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ

parallélogramme ΕΗ égal à ΑΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΘ;
 appliquons aussi à ΕΖ un parallélogramme ΘΙ égal à ΓΔ, ce parallélogramme ayant
 pour largeur la droite ΘΚ. Puisque les surfaces ΑΒ, ΓΔ sont médiales l'une et l'autre,
 les surfaces ΕΗ, ΘΙ seront aussi médiales l'une et l'autre; mais ces surfaces sont
 appliquées à ΕΖ, et elles ont pour largeur les droites ΕΘ, ΘΚ; les droites ΕΘ, ΘΚ
 sont donc rationnelles l'une et l'autre (25. 10), et incommensurables en longueur
 avec ΕΖ. Et puisque ΑΒ est incommensurable avec ΓΔ, que ΑΒ est égal à ΕΗ, et
 que ΓΔ est égal à ΘΙ, la surface ΕΗ sera incommensurable avec ΘΙ. Mais ΕΗ est à ΘΙ
 comme ΕΘ est à ΘΚ; la droite ΕΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΚ;
 les droites ΕΘ, ΘΚ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seule-
 ment; ΕΚ est donc une droite de deux noms. Or, la puissance de ΕΘ surpasse
 la puissance de ΘΚ du carré d'une droite commensurable ou incommensurable

νάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆ μή-
κει, καὶ οὐδετέρα τῶν $E\Theta$, ΘK σύμμετρος
ἔστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ EZ μήκει· ἢ EK
ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἔστι τρίτη, ῥητὴ δὲ
ἢ EZ . Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς
καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἢ τὸ χωρίον
δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἔστι δευτέρα· ἢ ἄρα τὸ
 EI , τούτεστι τὸ $A\Delta$ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων
ἔστι δευτέρα. Ἀλλὰ δὲ ἢ $E\Theta$ τῆς ΘK μείζον
δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ μήκει, καὶ
ἀσύμμετρος ἔστιν ἑκατέρα τῶν $E\Theta$, ΘK τῇ
 EZ μήκει, ἢ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἔστιν
ἕκτη. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς
καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἢ τὸ χωρίον
δυναμένη ἢ ἰ δύο μέσα δυναμένη ἔστιν· ὥστε
καὶ ἢ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ἢ ἰ δύο μέσα
δυναμένη ἔστιν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι, καὶ
ἔλαττον ἢ τὸ AB τοῦ $\Gamma\Delta$, ἢ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυνα-
μένη, ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἔστι, δύο ἢ
μία δυναμένη.

Δύο ἄρα μέσων, καὶ τὰ ἐξήκς7.

incommensurabili. Possit primum quadrato ex
rectâ sibi commensurabili longitudine, et neutra
ipsarum $E\Theta$, ΘK commensurabilis est expositæ ra-
tionali EZ longitudine; ergo EK ex binis no-
minibus est tertia, rationalis verò EZ . Si autem spatium
contineatur sub rationali et ex binis nominibus
tertiâ; recta spatium potens ex binis mediis est
secunda; recta igitur ipsum EI , hoc est $A\Delta$ po-
tens, ex binis mediis est secunda. Sed $E\Theta$ quam
 ΘK plus possit quadrato ex rectâ sibi incommen-
surabili longitudine, et incommensurabilis est
utraq; ipsarum $E\Theta$, ΘK ipsi EZ longitudine;
ergo EK ex binis nominibus est sexta. Si autem
spatium contineatur sub rationali et ex binis no-
minibus sextâ; recta spatium potens bina media
potens est; quare et spatium $A\Delta$ potens bina
media potens est. Similiter utique demonstrabi-
mus, et si minus sit AB quam $\Gamma\Delta$, rectam quæ
spatium $A\Delta$ potest, vel ex binis mediis secundam
esse, vel bina media potentem.

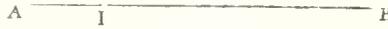
Duobus igitur mediis, etc.

avec $E\Theta$. Que la puissance de $E\Theta$ surpasse d'abord la puissance de ΘK d'une droite commensurable en longueur avec $E\Theta$; or, les droites $E\Theta$, ΘK ne sont ni l'une ni l'autre commensurables en longueur avec la rationelle exposée EZ ; la droite EK est donc la troisième de deux noms; mais la droite EZ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la seconde de deux médiales (57. 10); la droite qui peut la surface EI , c'est-à-dire $A\Delta$, est donc la seconde de deux médiales. Mais que la puissance de $E\Theta$ surpasse la puissance de ΘK du carré d'une droite incommensurable en longueur avec $E\Theta$; or, les droites $E\Theta$, ΘK sont l'une et l'autre incommensurables en longueur avec EZ ; la droite EK est donc la sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Mais si une surface est comprise sous une rationelle et sous une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la droite qui peut deux médiales (60. 10); la droite qui peut la surface $A\Delta$ est donc la droite qui peut deux médiales. Si AB était plus petit que $\Gamma\Delta$, nous démontrerions semblablement que la droite qui peut la surface $A\Delta$ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ εδ'.

Ἐὰν ἀπὸ ρητῆς ρητῆ ἀφαιρεθῆ, δυναμει μόνον σύμμετρος εὔσα τῇ ἔλη· ἢ λοιπὴ ἀλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ρητῆς τῆς AB ρητῆ ἀφαιρήσθω ἡ $BΓ$, δυναμει μόνον σύμμετρος εὔσα τῇ ἔλη· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$ ἀλογός ἐστιν, ἢ καλεῖται ἀποτομή.



Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ · ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρον ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ σύμμετρον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$ ἀσύμμετρον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ · καὶ

Si à rationali rationalis auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur $BΓ$, potentia solum commensurabilis existens toti; dico reliquam $ΑΓ$ irrationalem esse, quæ vocatur apotome.

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, atque est ut AB ad $BΓ$ ita ex AB quadratum ad rectangulum sub $AB, BΓ$, incommensurable igitur est ex AB quadratum rectangulo sub $AB, BΓ$; sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt ex $AB, BΓ$ quadrata, rectangulo verò sub $AB, BΓ$ commensurable est rectangulum bis sub $AB, BΓ$; quadrata igitur ex $AB, BΓ$ incommensurabilia sunt rec-

PROPOSITION LXXIV.

Si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome.

Que la rationnelle $BΓ$, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, soit retranchée de la droite AB ; je dis que la droite restante $ΑΓ$, appelée apotome, est irrationnelle.

Car puisque AB est incommensurable en longueur avec $BΓ$, et que AB est à $BΓ$ comme le carré de AB est au rectangle sous $AB, BΓ$ (1.6), le carré de AB sera incommensurable avec le rectangle sous $AB, BΓ$; mais la somme des carrés de AB et de $BΓ$ est commensurable avec le carré de AB (16.10), et le double rectangle sous $AB, BΓ$ est commensurable avec le rectangle sous $AB, BΓ$; la somme des carrés des droites $AB, BΓ$ est donc incommensurable avec le double rec-

λοιπῶν ἄρα τῶν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ². Ρητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλεῖσθω δὲ ἀποτομή.

tangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; et reliquo igitur quadrato ex ΑΓ incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; quoniam et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ æqualia sunt rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΑΓ. Rationalia autem sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem apotome.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αέ.

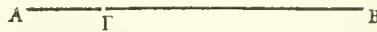
Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῆ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ἔλης ῥητὸν περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ΑΒ,

PROPOSITIO LXXV.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

A mediâ enim ΑΒ media auferatur ΒΓ, potentiâ solum commensurabilis existens ipsi ΑΒ,



μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιούσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

et cum eâ ΑΒ rationale faciens rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ; dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome prima.

tangle sous ΑΒ, ΒΓ (14. 10); la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est donc incommensurable avec le quarré restant de la droite ΑΓ (17. 10), parce que la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est égale au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le quarré de ΑΓ (7. 2). Mais la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est rationnelle; la droite ΑΓ est donc irrationnelle (déf. 11. 10), et elle sera appelée apotome.

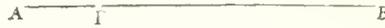
PROPOSITION LXXV.

Si d'une médiâle on retranche une médiâle, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationnelle, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appêlera le premier apotome de la médiâle.

De la médiâle ΑΒ retranchons la médiâle ΒΓ, commensurable en puissance seulement avec ΑΒ, et faisant avec ΑΒ le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ rationel; je dis que la droite restante ΑΓ est irrationnelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiâle.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ AB, BG μέσαι εἰσὶ, μέσα ἐστὶ²
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG . Ρητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ
τῶν AB, BG · ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν $AB,$
 BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG · καὶ λοιπῶ ἄρα τῷ

Quoniam enim AB, BG mediæ sunt, media
sunt et quadrata ex AB, BG . Rationale autem
rectangulum bis sub AB, BG ; incommensura-
bilia igitur ex AB, BG quadrata rectangulo bis
sub AB, BG ; et reliquo igitur quadrato ex AG



ὑπὸ τῆς AG ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν³
 AB, BG · ἐπεὶ γὰρ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον
ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.
Ρητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG · ἄλλογον ἄρα
τὰ ἀπὸ τῆς AG · ἄλλογον ἄρα ἐστὶν ἡ AG , κα-
λεῖσθω δὲ⁵ μέσης ἀποτομῆ πρώτη.

incommensurable est rectangulum bis sub $AB,$
 BG ; quoniam et si tota magnitudo cum unâ ἴ-
sarum incommensurabilis sit, et quæ à principio
magnitudines incommensurabiles erunt. Ratio-
nale autem bis rectangulum sub AB, BG ; irratio-
nale igitur quadratum ex AG ; irrationalis igitur
est AG , vocetur autem mediæ apotome prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ες'.

PROPOSITIO LXXVI.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῆ, δυνάμει μόνον
σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέ-
σει περιέχη¹· ἢ λοιπὴ ἄλλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ
μέσης ἀποτομῆ δευτέρα.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solum
commensurabilis existens toti, quæ cum totâ
medium continet; reliqua irrationalis est, vo-
cetur autem mediæ apotome secunda.

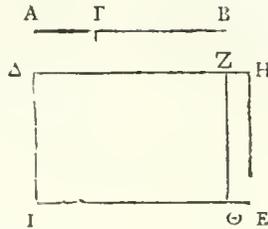
Car, puisque les droites AB, BG sont médiales, les carrés des droites AB, BG seront médiaux. Mais le double rectangle sous AB, BG est rationel; la somme des carrés des droites AB, BG est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG ; le double rectangle sous AB, BG est donc incommensurable avec le carré restant de la droite AG (7.2); parce que si une grandeur entière est incommensurable avec l'une de celles qui la composent, les grandeurs composantes sont incommensurables (17.10). Mais le double rectangle sous AB, BG est rationel; le carré de AG est donc irrationel; la droite AG est donc irrationelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiale.

PROPOSITION LXXVI.

Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seu-
lement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface
médiale, la droite restante est irrationelle, et elle s'appellera le second apotome
de la médiale.

Από γὰρ μέσης τῆς AB μέση ἀφηρήσθω ἡ $BΓ$,
 δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ τῇ AB ,
 μετὰ δὲ τῆς² ὅλης τῆς AB μέσον περιέχουσα
 τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$
 ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευ-
 τέρη.

A mediâ enim AB media auferatur $BΓ$, po-
 tentiâ solum commensurabilis existens toti AB ,
 et cum totâ AB medium continens rectangulum
 sub AB , $BΓ$; dico reliquam $ΑΓ$ irracionalem
 esse, voeetur autem mediæ apotome secuuda.



Εκκείσθω γάρ ρητὴ ἡ $ΔΙ$, καὶ τοῖς μὲν ὑπὸ
 τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβεβλήσθω
 τὸ $ΔΕ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ
 τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβεβλήσθω τὸ
 $ΔΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΖ$. λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΕ$
 ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. Καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ³
 τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ μέσον ἄρα καὶ τὸ $ΔΕ$.
 Καὶ παρὰ ρητὴν τὴν $ΔΙ$ παράκειται πλάτος
 ποιοῦν τὴν $ΔΗ$. ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΗ$, καὶ
 ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον

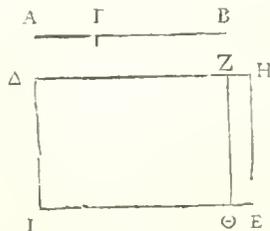
Exponatur enim rationalis $ΔΙ$, et quadratis
 quidem ex AB , $BΓ$ æquale ad ipsam $ΔΙ$ ap-
 plicetur $ΔΕ$ latitudinem faciens $ΔΗ$, rectangulo
 verò bis sub AB , $BΓ$ æquale ad ipsam $ΔΙ$ appli-
 cetur $ΔΘ$ latitudinem faciens $ΔΖ$; reliquum
 igitur $ΖΕ$ æquale est quadrato ex $ΑΓ$. Et quo-
 niam media sunt quadrata ex AB , $BΓ$; medium
 igitur et $ΔΕ$. Et ad rationalem $ΔΙ$ applicatur
 latitudinem faciens $ΔΗ$; rationalis igitur est
 $ΔΗ$, et incommensurabilis ipsi $ΔΙ$ longitudine.

De la médiale AB retranchons la médiale $BΓ$, commensurable en puissance seu-
 lement avec la droite entière AB , et comprenant avec la droite entière AB le rec-
 tangle médial sous AB , $BΓ$; je dis que la droite restante $ΑΓ$ est irrationnelle, et elle
 sera appelée le second apotome de la médiale.

Soit exposée la rationnelle $ΔΙ$; appliquons à $ΔΙ$ un parallélogramme $ΔΕ$ égal à la
 somme des quarrés des droites AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la
 droite $ΔΗ$; appliquons aussi à la droite $ΔΙ$ un parallélogramme $ΔΘ$ égal au double
 rectangle sous AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite $ΔΖ$; le
 reste $ΖΕ$ sera égal au quarré de $ΑΓ$ (7. 2). Et puisque les quarrés des droites
 AB , $BΓ$ sont médiaux, le parallélogramme $ΔΕ$ sera médial (24. cor. 10). Mais il est
 appliqué à la rationnelle $ΔΙ$, et il a pour largeur la droite $ΔΗ$; la droite $ΔΗ$ est donc
 rationnelle et incommensurable en longueur avec $ΔΙ$ (25. 10). De plus, puisque le

ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ μέσον ἔστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἔστί, καὶ παρὰ ῥητῆν τὴν ΔΙ παραβέβληται πλάτος ποιῶν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἔστιν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἔπει αἱ AB, BΓ δύναμις μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ AB καὶ τῇ BΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνον τῷ ὑπὸ τῶν AB,

Rursus, quoniam medium est rectangulum sub AB, BΓ; et rectangulum bis igitur sub AB, BΓ medium est. Atque est aequale ipsi ΔΘ; et ΔΘ igitur medium est, et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΖ; rationalis igitur est ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Et quoniam AB, BΓ potentiâ solum commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AB et ipsi BΓ longitudine; incommensurabile igitur et ex AB quadratum rectangulo sub



BΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BΓ σύμμετρον ἔστί τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστί τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ⁵. Ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστί⁶ τὸ ΔΕ τῷ

AB, BΓ. Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quadrata ex AB, BΓ, rectangulo autem sub AB, BΓ commensurabile est rectangulum bis sub AB, BΓ; incommensurabile igitur est rectangulum bis sub AB, BΓ quadratis ex AB, BΓ. Æquale verò quadratis quidem ex AB, BΓ ipsum ΔΕ, rectangulo autem bis sub AB, BΓ ipsum ΔΘ; incommensurabile igitur est ΔΕ ipsi

rectangle sous AB, BΓ est médial, le double rectangle sous AB, BΓ sera médial (24. cor. 10). Mais il est égal à ΔΘ; le parallélogramme ΔΘ est donc médial, et il est appliqué à la rationnelle ΔΙ, sa largeur étant la droite ΔΖ; la droite ΔΖ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΙ. Et puisque les droites AB, BΓ ne sont commensurables qu'en puissance, la droite AB sera incommensurable en longueur avec BΓ; le carré de AB est donc incommensurable avec le rectangle sous AB, BΓ (1.6, et 10. 10). Mais la somme des carrés des droites AB, BΓ est commensurable avec le carré de AB (16. 10), et le double rectangle sous AB, BΓ est commensurable avec le rectangle sous AB, BΓ (6. 10); le double rectangle sous AB, BΓ est donc incommensurable avec la somme des carrés des droites AB, BΓ. Mais ΔΕ est égal à la somme des carrés des droites AB, BΓ, et ΔΘ égal au double rectangle sous AB, BΓ; le parallélogramme ΔΕ est donc incommensurable avec ΔΘ. Mais

ΔΘ. Ως δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἢ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΗΔ τῇ ΔΖ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἢ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Ρητὴ δὲ ἢ ΔΙ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἑρθογώνιον⁸ ἀλογόν ἐστὶ· καὶ ἢ δυνάμει ἔρα⁹ αὐτὸ ἀλογός ἐστὶ. Καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἢ ΑΓ· ἢ ΑΓ ἄρα ἀλογός ἐστὶ, καλεῖσθω δὲ μέσος¹⁰ ἀποτομὴ δευτέρα.

ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita ΗΔ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΗΔ ipsi ΔΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ergo ΗΔ, ΔΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΖΗ apotome est. Rationalis autem ΔΙ, et sub rationali et irrationali contentum rectangulum irrationale est; et recta potens igitur ipsum irrationale est. Et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ.

PROPOSITIO LXXVII.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεία ἀφαιρεθῆ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ῥητὸν, τὸ δ' ὑπὸ αὐτῶν μέσον· ἢ λοιπὴ ἀλογός ἐστὶ, καλεῖσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεία ἀφαιρήσθω ἢ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; reliqua irrationale est, vocetur autem minor.

A rectâ enim ΑΒ recta auferatur ΒΓ, potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum

ΔΕ est à ΔΘ comme ΗΔ est à ΔΖ; la droite ΗΔ est donc incommensurable en longueur avec ΔΖ. Mais ces droites sont rationnelles; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΗ est donc un apotome (74. 10). Mais la droite ΔΙ est rationnelle, et le rectangle compris sous une rationnelle et sous une irrationnelle est irrationnel (59. 10); la droite qui peut ce rectangle est donc irrationnelle. Mais ΑΓ peut ΖΕ; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée le second apotome de la médiale.

PROPOSITION LXXVII.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés de ces droites rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

De la droite ΑΒ retranchons la droite ΒΓ, qui étant incommensurable en puissance

302 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετά τῆς ὅλης τῆς AB τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἅμα μέσον¹. λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἢ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ² ἐλάσσων.

totà AB compositum quidem ex quadratis ipsarum AB, ΒΓ simul rationale, rectangulum verò bis sub AB, ΒΓ simul medium; dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, vocetur autem minor.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τῶ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· καὶ ἀνοστρέψαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τῶ ἀπὸ τῆς ΑΓ³. Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἢ ΑΓ¹, καλεῖσθω δὲ ἐλάσσων.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB, ΒΓ quadratis rationale est, rectangulum verò bis sub AB, ΒΓ medium; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex AB, ΒΓ rectangulo bis sub AB, ΒΓ; et convertendo incommensurabilia sunt ex AB, ΒΓ quadrata quadrato ex ΑΓ. Rationalia autem quadrata ex AB, ΒΓ; irrationale igitur quadratum ex ΑΓ; irrationalis igitur ΑΓ, vocetur autem minor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ σή.

PROPOSITIO LXXVIII.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεία ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης πειοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium,

avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés des droites AB, ΒΓ rationnelle, et le double rectangle sous AB, ΒΓ médial; je dis que la droite restante ΑΓ est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

Car puisque la somme des carrés des droites AB, ΒΓ est rationnelle, et que le double rectangle sous AB, ΒΓ est médial, la somme des carrés des droites AB, ΒΓ sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, ΒΓ; donc, par conversion, la somme des carrés des droites AB, ΒΓ est incommensurable avec le carré de ΑΓ (17. 10). Mais la somme des carrés des droites AB, ΒΓ est rationnelle; le carré de ΑΓ est donc irrationnel; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

PROPOSITIO LXXVIII.

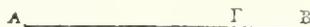
Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés de

τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἢ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἢ BF , δυνάμει ἀσύμμετρος εὔσα τῇ ὅλη τῇ AB , ποιούσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BF τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BF ῥητόν· λέγω ὅτι ἢ λοιπὴ ἢ AF ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα².

rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

A recta enim AB recta auferatur BF , potentiâ incommensurabilis existens toti AB , faciens quidem compositum ex ipsarum AB, BF quadratis medium, rectangulum verò bis sub AB, BF rationale; dico reliquam AF irrationalem esse, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BF τετραγώνων μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BF ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BF τῶν δις ὑπὸ τῶν AB, BF · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AF ἀσύμμετρον ἐστὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν AB, BF . Καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BF ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AF ἄλογόν ἐστι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ AF , καλεῖσθω δὲ ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB, BF quadratis medium est, rectangulum verò bis sub AB, BF rationale; incommensurabilia igitur sunt ex AB, BF quadrata rectangulo bis sub AB, BF ; et reliquum igitur quadratum ex AF incommensurable est rectangulo bis sub AB, BF . Atque est rectangulum bis sub AB, BF rationale; quadratum igitur ex AF irrationale est; irrationalis igitur est AF , vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationel, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

De la droite AB retranchons la droite BF , qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB , fasse la somme des carrés de AB et de BF médiale, et le double rectangle sous AB, BF rationel; je dis que la droite restante AF est irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car, puisque la somme des carrés des droites AB, BF est médiale, et que le double rectangle sous AB, BF est rationel, la somme des carrés des droites AB, BF sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BF ; le carré restant de la droite AF est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, BF (17. 10). Mais le double rectangle sous AB, BF est rationel; le carré de AF est donc irrationnel; la droite AF est donc irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΘΒ΄.

Εάν ἀπὸ εὐθείας εὐθεία ἀφαιρεθῆ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δε τῆς ὅλης ποιῶσα τὸ μὲν¹ συγχεόμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ² δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν ἢ λοιπῇ ἀλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιῶσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεία ἀφαιρήσθω ἢ $BΓ$, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ AB , ποιῶσα τὰ προκείμενα³. λέγω ὅτι ἢ λοιπὴ ἢ $ΑΓ$ ἀλογός ἐστι, ἢ καλουμένη ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιῶσαί.

Ἐκείσθω γὰρ ῥητὴ ἢ $ΔΙ$, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ ῥητὴν⁴ τὴν $ΔΙ$ παραβλήσθω τὸ $ΔΕ$ πλάτες ποιῶν τὴν $ΔΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον ἀφαιρήσθω τὸ $ΔΘ$

PROPOSITIO LXXIX.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

A rectâ enim AB recta auferatur $BΓ$, potentiâ incommensurabilis existens ipsi AB , faciens proposita; dico reliquam $ΑΓ$ irrationalem esse, quæ vocatur cum medio medium totum faciens.

Exponatur enim rationalis $ΔΙ$, et quadratis quidem ex AB , $BΓ$ æquale ad rationalem $ΔΙ$ applicetur $ΔΕ$ latitudinem faciens $ΔΗ$, rectangulo autem bis sub AB , $BΓ$ æquale auferatur $ΔΘ$

PROPOSITION LXXIX.

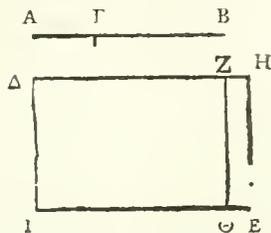
Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des quarrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

De la droite AB retranchons la droite $BΓ$, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB , fasse ce qui est proposé; je dis que la droite restante $ΑΓ$ est irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car soit exposée la rationnelle $ΔΙ$; appliquons à la rationnelle $ΔΙ$ un parallélogramme $ΔΕ$ égal à la somme des quarrés des droites AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite $ΔΗ$; retranchons de $ΔΕ$ un parallélogramme $ΔΘ$ égal au double rectangle compris sous AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la

πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ⁶. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ συγχεόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΕ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ

latitudinem faciens ΔΖ; reliquum igitur ΖΕ æquale est quadrato ex ΑΓ; quare ipsa ΑΓ potest ipsum ΖΕ. Et quoniam compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium est, atque est æquale ipsi ΔΕ; medium igitur est ΔΕ, et ad rationalem ΔΙ applicatur, latitudinem faciens ΔΗ; ratio-



ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΘ· τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁸ καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἐστὶ¹⁰ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. Καὶ εἴσιν

nalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Rursus, quoniam rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ medium est, atque est æquale ipsi ΔΘ; ergo ΔΘ medium est, et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΖ; rationalis igitur est ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, incommensurabile igitur est et ΔΕ ipsi ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita est et ΔΗ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΔΗ

droite ΔΖ, le parallélogramme restant ΖΕ sera égal au carré de ΑΓ (7. 2); la droite ΑΓ peut donc la surface ΖΕ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΕ, le parallélogramme ΔΕ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationnelle ΔΙ, et il a ΔΗ pour largeur; la droite ΔΗ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, et qu'il est égal à ΔΘ, le parallélogramme ΔΘ sera médial; mais il est appliqué à la rationnelle ΔΙ, et il a ΔΖ pour largeur; la droite ΔΖ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le parallélogramme ΔΕ sera incommensurable avec le parallélogramme ΔΘ. Mais ΔΕ est à ΔΘ comme ΔΗ est à ΔΖ (1. 6); la droite ΔΗ est donc incommensurable

ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἔστιν ἢ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἢ ΖΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ἰρρηγιάνιον¹² ἄλογόν ἐστι, καὶ ἢ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἢ ΑΓ· ἢ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον πικυῦσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον¹ προσαρμόζει εὐθεία ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

Ἐστω ἀποτομή ἢ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἢ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω ἔτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ῥητῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἢ ΒΔ· καὶ αἱ

ipsi ΔΖ. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΗΔ, ΔΖ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΖΗ, rationalis autem ΖΘ. Sed sub rationali et apotome contentum rectangulum irrationale est, et recta potens ipsum irrationale est, et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationale est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Sit apotome ΑΒ, congruens autem eidem ipsa ΒΓ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti.

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ,

avec ΔΖ (10. 10). Mais ces deux droites sont rationnelles; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΖΗ est donc un apotome (74. 10), et ΖΘ une rationnelle. Puisque le rectangle compris sous une rationnelle et un apotome est irrationnel (14. 10), que la droite qui peut ce rectangle est irrationnelle, et que ΑΓ peut la surface ΖΕ (59. 10), la droite ΑΓ sera irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROPOSITION LXXX.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

Soit l'apotome ΑΒ, et que ΒΓ lui convienne; les droites ΑΓ, ΓΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10); je dis qu'une autre rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière ne convient pas avec ΑΒ.

Que la droite ΒΔ, si cela est possible, convienne avec ΑΒ; les droites ΑΔ, ΔΒ

ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ῥ̄ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφοτέρω ὑπερέχει· εἰ ἀλλάξ ἄρα ῥ̄ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν

ΔΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; eodem enim quadrato ex ΑΒ utraque superant; permutando igitur quo su-



ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ³ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὴ γὰρ ἀμφοτέρω⁴· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ἕπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφοτέρω, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῆ ἄρα ΑΒ ἐτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλη.

perant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali; rationalis enim utraque; et rectangulum bis igitur sub ΑΔ, ΔΒ superat rationali rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali; ergo ipsi ΑΒ altera non congruit rationalis, potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Μία ἄρα, καὶ τὰ ἐξήης.

Media igitur, etc.

seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ de la même grandeur dont la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces deux excès sont égaux chacun au quarré de ΑΒ (7. 2), par permutation, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle, car ces deux sommes sont rationnelles; le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse donc le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle; ce qui est impossible, parce que ces deux grandeurs sont médiales, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle (27. 10); une autre rationnelle, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, ne peut donc pas convenir avec ΑΒ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

Τῆς μέσης ἀποτομῆς πρώτη μία μόνον' προσαρμόζει εὐθείᾳ μέσῃ, δυνάμει μόνον σύμμετρος εἶσα τῆς ἔλης, μετὰ δὲ τῆς ἔλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἐστω γάρ μέση ἀποτομή πρώτη ἡ AB , καὶ τῆς AB προσαρμोजέτω ἡ $BΓ$. αἱ $ΑΓ$, $ΓB$ ἄρα³ μέσαι εἰπὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$. λέγω ὅτι τῆς AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέσῃ δυνάμει μόνον σύμμετρος εἶσα τῆς ἔλης, μετὰ δὲ τῆς ἔλης ῥητὸν περιέχουσα.



Εἰ γάρ δυνατόν, προσαρμोजέτω καὶ ἡ $ΔB$. αἱ ἄρα $ΑΔ$, $ΔB$ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ

Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta mediâ, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

Sit enim mediâ apotome primæ AB , et ipsi AB congruat $BΓ$; ipsæ $ΑΓ$, $ΓB$ igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub $ΑΓ$, $ΓB$; dico ipsi AB alteram non congruere mediâ, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ rationale continet.

Si enim possibile, congruat et $ΔB$; ergo $ΑΔ$, $ΔB$ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub $ΑΔ$, $ΔB$. Et quoniam quo³ superant quadrata ex $ΑΔ$, $ΔB$ rectangulum bis sub $ΑΔ$, $ΔB$, hoc

PROPOSITION LXXXI.

Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationnelle.

Soit AB un premier apotome médial, et que $BΓ$ conviène avec AB ; les droites $ΑΓ$, $ΓB$ seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous $ΑΓ$, $ΓB$ (75. 10); je dis qu'une autre médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec AB .

Que la droite $ΔB$ conviène avec AB , si cela est possible; les droites $ΑΔ$, $ΔB$ seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface rationnelle sous $ΑΔ$, $ΔB$ (75. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites $ΑΔ$, $ΔB$ surpasse le double rectangle sous $ΑΔ$, $ΔB$ de la même grandeur dont

ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ³ ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἐναλλάξ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τοῦτ' ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον, μίσα γὰρ ἀμφοτέρω, μίσον δὲ μίσει οὐχ ὑπερέχει ῥητῶ.

Τῇ ἄρα μέσει, καὶ τὰ ἐξῆς.

superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; superant enim eodem ex ΑΒ quadrato; permutando igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali.

Mediæ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΒ΄.

PROPOSITIO LXXXII.

Τῇ μέσει¹ ἀποτομῇ δευτέρω μία μόνον προσαρμύζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα² τῇ ἔλῃ, μετὰ δὲ τῆς ἔλης μίσει περιέχουσα.

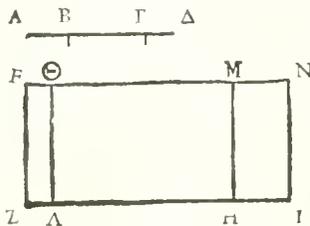
Mediæ apotomæ secundæ una solum congruit recta media, potentiâ solum commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces excès sont chacun le quarré de ΑΒ (7. 2); par permutation, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces surfaces sont rationelles l'une et l'autre; la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse donc la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle; ce qui est impossible, parce que ces surfaces sont médiales l'une et l'autre, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationelle (27. 10). Il n'y a donc, etc.

PROPOSITION LXXXII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome médial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

Εστω μέση³ ἀποτομή δευτέρα ἡ ΑΒ, καὶ τῆ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῆ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῆ ὅλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμόζετω καὶ ἡ ΒΔ· καὶ⁴ αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν⁵ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρά τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρά

Sit media apotome secunda AB, et ipsi AB congruat BG; ipsæ igitur AG, GB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes rectangulum sub AG, GB; dico ipsi AB alteram non congruere rectam median quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ medium contineat.

Si enim possibile, congruat BD; et ipsæ igitur AD, DB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes rectangulum sub AD, DB. Et exponatur rationalis EZ, et quadratis quidem ex AG, GB æquale ad ipsam EZ applicetur EH, latitudinem faciens EM; rectangulo autem bis sub AG, GB æquale auferatur OH, latitudinem faciens OM; reliquum igitur EL æquale est quadrato ex AB; quare AB potest ipsum EL. Rursus utique quadratis ex AD, DB

Soit un second apotome médial AB, et que la droite BF conviène avec AB; les droites AG, GB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous AG, GB (76. 10); je dis qu'une autre droite médiale commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec AB.

Que BD conviène avec AB, si cela est possible; les droites AD, DB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous AD, DB (76. 10). Soit exposée la rationelle EZ; appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à la somme des quarrés de AG et de GB, qui ait pour largeur la droite EM, et retranchons de EH un parallélogramme OH égal au double rectangle sous AG, GB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite OM; le reste EL sera égal au quarré de AB (7. 2); la droite AB pourra donc la surface EL. De plus, appliquons à EZ un parallélogramme EI égal à la somme des quarrés des

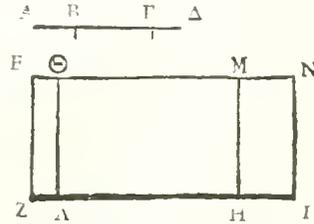
τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ EI, πλάτος ποιούν τὴν EN· ἔστι δὲ καὶ τὸ EA ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘI ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AD, ΔB. Καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ AG, GB, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG, GB. Καὶ ἔστιν ἴσα τῷ EH· μέσον ἄρα καὶ τὸ EH, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται, πλάτος ποιούν τὴν EM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AG, GB μέσον ἐστὶ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘH· καὶ τὸ ΘH ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται, πλάτος ποιούν τὴν ΘM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ AG, GB δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν⁶, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AG τῇ GB μήκει. Ὡς δὲ ἡ AG πρὸς τὴν GB οὕτως ἐστὶ⁷ τὸ ἀπὸ τῆς AG πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁸ τὸ ἀπὸ τῆς AG τῷ ὑπὸ τῶν AG, GB. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AG σύμ-

æquale ad ipsam EZ applicetur EI, latitudinem faciens EN; est autem et EA æquale ex AB quadrato; reliquum igitur ΘI æquale est rectangulo bis sub AD, ΔB. Et quoniam mediæ sunt AG, GB, mediæ igitur sunt et quadrata ex AG, GB. Et sunt æqualia ipsi EH; medium igitur et EH, et ad rationalem EZ applicatur, latitudinem faciens EM; rationalis igitur est EM, et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum sub AG, GB, et rectangulum bis sub AG, GB medium est. Atque est æquale ipsi ΘH; et ΘH igitur medium est, et ad rationalem EZ applicatur, latitudinem faciens ΘM; rationalis igitur est et ΘM, et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam AG, GB potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AG ipsi GB longitudine. Ut autem AG ad GB ita est ex AG quadratum ad rectangulum sub AG, GB; incommensurable igitur est ex AG quadratum rectangulo sub AG, GB. Sed quadrato quidem

droites AD, ΔB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EN; mais EA est égal au carré de AB; le reste ΘI est donc égal au double rectangle sous AD, ΔB (7. 2). Et puisque les droites AG, GB sont médiales, les carrés des droites AG, GB seront médiaux. Mais la somme de ces carrés est égale au parallélogramme EH; le parallélogramme EH est donc médial (cor. 24. 10), et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite EM, est appliqué à EZ; la droite EM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec EZ (25. 10). De plus, puisque le rectangle sous AG, GB est médial, le double rectangle sous AG, GB sera médial (cor. 24. 10). Mais ce rectangle est égal au parallélogramme ΘH; le parallélogramme ΘH est donc médial; et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite ΘM, est appliqué à la rationnelle EZ; la droite ΘM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec EZ (25. 10). Et puisque les droites AG, GB sont commensurables en puissance seulement, la droite AG sera incommensurable en longueur avec GB. Mais AG est à GB comme le carré de AG est au rectangle sous AG, GB; le carré de AG est donc incommensurable avec le rectangle sous AG, GB. Mais la somme des carrés des droites AG, GB est commen-

μετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῶ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρον ἐστὶ το δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐστὶ τοὶς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῶ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῶ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ οὕτως ἐστὶν ἢ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος

ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurable est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Atque est quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ΕΗ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΗ; incommensurable igitur est ΕΗ ipsi ΘΗ. Ut autem ΕΗ ad ΘΗ ita est



ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΜ τῆ ΘΜ μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφότεραι ῥηταὶ· αἱ ΕΜ, ΘΜ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυναμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐσ τὴν ἢ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἢ ΘΜ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἢ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῆ ἄρα ἀποτομῆ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα, δυναμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ἅλῃ, ὑπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

EM ad ΘΜ; incommensurabilis igitur est EM ipsi ΘΜ longitudine. Et sunt utraque rationales; ipsæ ΕΜ, ΘΜ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demonstrabimus et ΘΝ ipsi congruere; apotomæ igitur alia et alia congruit recta, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quod est impossibile.

Τῆ ἄρα μέση, καὶ τὰ ἐξῆς.

Mediæ igitur, etc.

surable avec le carré de ΑΓ (16. 10); et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais ΕΗ est égal à la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et ΘΗ est égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ. Mais ΕΗ est à ΘΗ comme ΕΜ est à ΘΜ (1. 6); la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΘΜ. Mais ces deux droites sont rationelles; les droites ΕΜ, ΘΜ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome, et ΘΜ convient avec cet apotome (74. 10). Nous démontrâmes semblablement que ΘΝ lui convient aussi; deux droites différentes, commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui est impossible (80. 10). Il n'y a donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

PROPOSITIO LXXXIII.

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμύζει εὐθεία δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, ποιῶσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶι μέσον.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ AB , καὶ τῇ AB προσαρμύζουσα ἔστω ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓB$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ AB ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμύσει, τὰ αὐτὰ ποιῶσα.

Minori una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium.

Sit minor AB , et ipsi AB congruens sit $BΓ$; ipsæ igitur $ΑΓ$, $ΓB$ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; dico ipsi AB alteram rectam non congruere, quæ eadem faciat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $BΔ$ · καὶ αἱ $ΑΔ$, $ΔB$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὰ πραιρεημένα². Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$, τοῦτω ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$

Si enim possibile, congruat $BΔ$; et ipsæ $ΑΔ$, $ΔB$ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt. Et quoniam quo superant quadrata ex $ΑΔ$, $ΔB$ quadrata ex $ΑΓ$, $ΓB$, hoc superat et rectangulum bis sub $ΑΔ$, $ΔB$

PROPOSITION LXXXIII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des carrés de ces droites rationnelle, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Soit la mineure AB , et que $BΓ$ conviène avec AB ; les droites $ΑΓ$, $ΓB$ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant médial (77. 10); je dis qu'aucune autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec AB .

Que $BΔ$ conviène avec AB , si cela est possible; les droites $ΑΔ$, $ΔB$ seront incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui vient d'être dit (77. 10). Et puisque la somme des carrés des droites $ΑΔ$, $ΔB$ surpasse la somme des carrés des droites $ΑΓ$, $ΓB$ de la même grandeur dont le double rectangle sous

τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῶν, ῥητὰ γὰρ ἐστὶν ἄμφότερα· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶν, ὅπερ ἐστὶν ἐδύνατον, μέσα γὰρ ἐστὶν ἄμφότερα.

Τῆ ἄρα ἐλάττωσι, καὶ τὰ ἐξῆς^δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Τῆ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ἕλον ποιούση μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῆ ἕλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ἕλον ποιούσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ'. αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῆ ΑΒ ἐτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιούσα.

ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (7. 2), et que la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpassera d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce qui est impossible (27. 10); car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre. Donc, etc.

PROPOSITION LXXXIV.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Que ΑΒ fasse avec une surface rationelle un tout médial, et que ΒΓ conviène avec ΑΒ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ étant médiale, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel (73. 10); je dis qu'une autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec ΑΒ.

rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, rationalia enim sunt utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, quod est impossibile, media enim sunt utraque.

Minori igitur, etc.

PROPOSITIO LXXXIV.

Ei quæ cum rationali medium totum facit una solum congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale.

Sit recta ΑΒ cum rationali medium totum faciens, congruens autem ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere eadem facientem.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν². Ἐπεὶ οὖν ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τοῦτω ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀκαλούθως τοῖς³ πρὸ

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ, ΔΒ igitur rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, congruenter præ-



αὐτοῦ· τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ, ῥητὰ γὰρ ἐστὶν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἐστὶν ἀμφότερα· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει⁵. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

cedentibus; rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim sunt utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile; media enim sunt utraque; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens ea quæ dicta sunt; una igitur solùm congruet. Quod oportebat ostendere.

Que ΒΔ conviène avec ΑΒ, si cela est possible; les droites ΑΔ, ΔΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ rationel (78. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, comme dans ce qui précède (7. 2), et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle; ce qui est impossible; car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre (27. 10). Il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière ce qu'on a dit; il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πέ.

Τῆ ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούση μία μόνον¹ προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῆ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

Ἐστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ AB , προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$ δυνάμει εἰδὸν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὰ προειρημένα². λέγω ὅτι τῆ AB ἑτέρα εὐθεῖα³ οὐ προσαρμόσει, ποιούσα τὰ προειρημένα⁴.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζετω ἡ $BΔ$, ὅστε καὶ τὰς $ΑΔ$, $ΔΒ$ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι, ποιούσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τετράγωνα⁵ ἅμα μέσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἀσύμμετρα⁶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ ,

PROPOSITIO LXXXV.

Ei quæ cum medio medium totum facit una solū congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis.

Sit recta AB cum medio medium totum faciens, ipsi autem congruens $BΓ$; ipsæ igitur $ΑΓ$, $ΓΒ$ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt; dico ipsi AB alteram rectam non congruere, facientem ea quæ dicta sunt.

Si enim possibile, congruat $BΔ$, ita ut et $ΑΔ$, $ΔΒ$ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem ex $ΑΔ$, $ΔΒ$ quadrata simul media, et rectangulum bis sub $ΑΔ$, $ΔΒ$ medium, et adhuc quadrata ex $ΑΔ$, $ΔΒ$ incommensurabilia rectangulo bis sub $ΑΔ$, $ΔΒ$. Et exponatur ra-

PROPOSITION LXXXV.

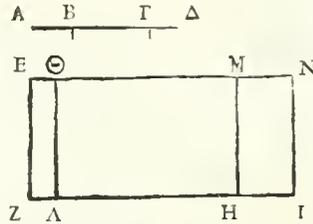
Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et commensurable avec la somme de leurs quarrés.

Que la droite AB fasse avec une surface médiale un tout médial, et que $BΓ$ conviène avec AB ; les droites $ΑΓ$, $ΓΒ$ seront incommensurables en puissance, et feront ce qui vient d'être dit (79. 10); je dis qu'une autre droite, faisant ce qui vient d'être dit, ne convient point avec AB .

Que $BΔ$, s'il est possible, conviène avec AB , les droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ étant incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés médiale, le double rectangle sous $ΑΔ$, $ΔΒ$ médial, et la somme des quarrés des droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ incommensurable avec le double rectangle sous $ΑΔ$, $ΔΒ$. Soit exposée la rationnelle EZ ;

καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιῶν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφγρίσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιῶν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἢ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν, τοῖς μὲν^δ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ,

tionalis EZ, et quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ad ipsam EZ applicetur ΕΗ, latitudinem faciens ΕΜ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΘΗ, latitudinem faciens ΘΜ; reliquum igitur quadratum ex ΑΒ æquale est ipsi ΕΛ; ipsa igitur ΑΒ potest ipsum ΕΛ. Rursus, quadratis quidem ex ΑΔ, ΔΒ æquale ad ipsam EZ applicetur ΕΙ, latitudinem



πλάτος ποιῶν τὴν ΕΝ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΙ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιῶν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ

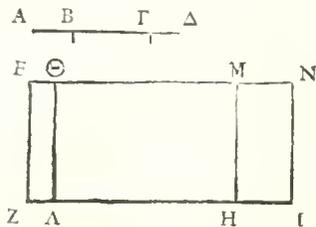
faciens EN. Est autem et quadratum ex ΑΒ æquale ipsi ΕΛ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsi ΘΙ. Et quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΕΗ; medium igitur est et ΕΗ; et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΕΜ; rationalis igitur est ΕΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis

appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EM; et retranchons de EH un parallélogramme ΘΗ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce parallélogramme ayant ΘΜ pour largeur; le carré restant de ΑΒ sera égal au parallélogramme ΕΛ (7. 2); la droite ΑΒ pourra donc le parallélogramme ΕΛ. De plus, appliquons à EZ un parallélogramme EI égal à la somme des carrés des droites ΑΔ, ΔΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EN. Mais le carré de ΑΒ est égal au parallélogramme ΕΛ; le double parallélogramme restant compris sous ΑΔ, ΔΒ est donc égal à ΘΙ (7. 2). Et puisque la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est médiale, et que cette somme est égale à ΕΗ, le parallélogramme ΕΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à EZ, et il a pour largeur la droite EM; la droite EM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est médial, et qu'il

318 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιῶν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ, ἀσύμμετρον ἄρα¹⁰ ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ

sub ΑΓ, ΒΒ, et est æquale ipsi ΘΗ; medium igitur et ΘΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΘΜ; rationalis igitur est ΘΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΒΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΒΒ, incommensurabile igitur est et ΕΗ ipsi ΘΗ; in-



τῇ ΜΘ μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστὶ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος¹¹ οὖσα τῇ ὅλη, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὖν ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεία· τῇ ἄρα ΑΒ μία

commensurabilis igitur est et ΕΜ ipsi ΜΘ longitudine. Et sunt utraque rationales; ipsæ igitur ΕΜ, ΜΘ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demonstrabimus ΕΘ rursus apotomen esse, et ΘΝ congruentem ipsi; apotomæ igitur alia et alia congruit rationalis, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quod demonstratum est impossibile; non igitur ipsi ΑΒ altera congruit

est égal à ΘΗ, le parallélogramme ΘΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationnelle ΕΖ, et il a pour largeur la droite ΘΜ; la droite ΘΜ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΕΖ (25. 10). Mais la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΒΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΒΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ; la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΘ (1. 6). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΕΜ, ΜΘ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome (74. 10), et ΕΜ convient avec ΕΘ. Nous démontrerions semblablement que ΕΘ est encore un apotome, et que ΘΝ convient avec ΕΘ; des rationnelles différentes commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui a été démontré impossible (80. 10); une autre droite ne convient donc pas avec ΑΒ;

μόνον προσαρμόσει εὐθεία δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιῶσα τὰ τε ἀπ' αὐτῶν τετραγώνια¹² ἅμα μέσον, καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι¹³ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνια ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΟΡΟΙ ΤΡΙΤΟΙ.

α. Ὑποκειμένης ῥιπῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένῃ ῥιπῇ μήκει, καλεῖσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένῃ ῥιπῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καλεῖσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκει-

recta; ipsi igitur AB una solū congruet recta potentiā incommensurabilis existens toti, et cum totā faciens et ex ipsis quadrata simul media, et rectangulum bis sub ipsis medium, et adhuc ex ipsis quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis. Quod oportebat ostendere.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expositā rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectā sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectā sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit ex-

il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec AB, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière AB, et qui fait avec la droite entière la somme des carrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial, et la somme des carrés incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites. Ce qu'il fallait démontrer.

DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationnelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du carré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du carré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appellera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la

μένη ῥητῆ μήκει, ἢ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἢ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ μήκει², ἐὰν μὲν ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη ῥητῆ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

ε'. Ἐὰν δὲ ἢ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΣ'.

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομὴν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ A , καὶ τῆ A μήκει σύμμετρος ἔστω ἢ BH . ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἢ BH . Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔE , EZ , ὧν ἢ ὑπεροχὴ ἢ $Z\Delta$ ¹ μὴ ἔστω

rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du carré d'une droite commensurable avec la droite entière, le reste s'appèlera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du carré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera quatrième apotome.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera sixième apotome.

PROPOSITION LXXXVI.

Trouver un premier apotome.

Soit exposée la rationnelle A , et que BH soit commensurable en longueur avec A , la droite BH sera rationnelle. Soient exposés deux nombres carrés ΔE , EZ , dont l'excès $Z\Delta$ ne soit pas un nombre carré (50. lem. 1. 10), le nombre ΔE n'aura pas avec ΔZ

positæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, si quidem tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome quarta.

5. Si verò sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

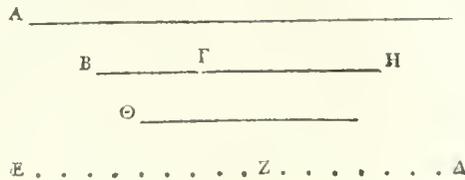
PROPOSITIO LXXXVI.

Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A , et ipsi A longitudine commensurabilis sit BH ; rationalis igitur est et BH . Et exponantur duo quadrati numeri ΔE , EZ , quorum excessus $Z\Delta$ non sit quadratus;

τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον²· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ·

neque igitur ΕΔ ad ΔΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad quadratum ex ΗΓ; commensurable igitur est ex ΒΗ quadratum quadrato ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum



ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη. Ὡ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν

ex ΗΓ; rationalis igitur est et ΗΓ. Et quoniam ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et primam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ.

la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Faisons en sorte que ΕΔ soit à ΔΖ comme le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ; le carré de ΒΗ sera commensurable avec le carré de ΗΓ (6. 10). Mais le carré de ΒΗ est rationel; le carré de ΗΓ est donc aussi rationel; la droite ΗΓ est donc rationnelle. Et puisque ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΗ n'aura pas avec le carré de ΗΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré (9. 10); la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ. Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi que cette droite est un premier apotome. Car que l'excès du carré de ΒΗ sur le carré de ΗΓ soit le

ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ³. καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δε ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἐκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῶ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει. Καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομή ἡ ΒΓ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι⁵.

Et quoniam est ut ΔΕ ad ΖΔ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ; et convertendo igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΗΒ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, uterque enim quadratus est; et quadratum ex ΗΒ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΗΒ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine. Atque est tota ΒΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est prima.

Inventa est igitur prima apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

quarré de Θ. Puisque ΔΕ est à ΖΔ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, par conversion, ΔΕ sera à ΕΖ comme le quarré de ΗΒ est au quarré de Θ (19. cor. 5). Mais le nombre ΔΕ a avec le nombre ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, car ces nombres sont des quarrés l'un et l'autre; le quarré de ΗΒ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΗΒ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la droite entière ΒΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10).

On a donc trouvé un premier apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ'._α

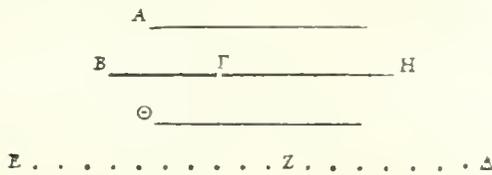
PROPOSITIO LXXXVII.

Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Invenire secundam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπερσχηὶς ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ².

Exponatur rationalis A, et ipsi A commensurabilis longitudine ipsa ΗΓ; rationalis igitur est et ΗΓ. Et exponantur duo quadrati numeri ΔΕ, ΕΖ, quorum excessus ΔΖ non sit quadratus. Et fiat ut ΖΔ ad ΔΕ ita ex ΓΗ quadratum ad



σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον³ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ· καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ⁵ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμῶς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα⁶

ipsum ex ΗΒ; commensurable igitur est ex ΓΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Rationale autem quadratum ex ΓΗ; rationale igitur est et ex ΗΒ; rationalis igitur est ΗΒ. Et quoniam ex ΓΗ quadratum ad ipsum ex ΗΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, incommensurabilis est ΓΗ ipsi ΗΒ longitudine. Et sunt utraëque rationales; ipsæ ΓΗ,

PROPOSITION LXXXVII.

Trouver un second apotome.

Soit exposée la rationnelle A, et que la droite ΗΓ soit commensurable en longueur avec A; la droite ΗΓ sera rationnelle (50. lem. 1. 10). Soient exposés deux nombres quarrés ΔΕ, ΕΖ, dont l'excès ΔΖ ne soit pas un quarré. Faisons en sorte que ΖΔ soit à ΔΕ comme le quarré de ΓΗ est au quarré de ΗΒ; le quarré de ΓΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΒ (6. 10). Mais le quarré de ΓΗ est rationel; le quarré de ΗΒ est donc rationel; la droite ΗΒ est donc rationelle. Et puisque le quarré de ΓΗ n'a pas avec le quarré de ΗΒ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite ΓΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΒ (9. 10). Mais ces droites sont

ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἢ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Ὡ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμὸν ἀναστρέφονται ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. Καὶ ἐστὶν ἐκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἢ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ἢ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἢ προσαρμύζουσα ἢ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκεκλιμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἢ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Ἐρρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομή ἢ ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

HB igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et secundam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ ita ΕΔ numerus ad numerum ΔΖ; convertendo igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ ita ΔΕ ad ΕΖ. Atque est uterque ipsorum ΔΕ, ΕΖ quadratus; quadratum igitur ex ΒΗ ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est congruens ΓΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est secunda.

Inventa est igitur secunda apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

rationnelles l'une et l'autre; les droites ΓΗ, ΗΒ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi que cette droite est un second apotome. Car que l'excès du carré de ΒΗ sur le carré de ΗΓ soit le carré de Θ. Puisque le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ comme le nombre ΕΔ est au nombre ΔΖ, par conversion, le carré de ΒΗ sera au carré de Θ comme ΔΕ est à ΕΖ. Mais ΔΕ et ΕΖ sont des carrés l'un et l'autre; le carré de ΒΗ a donc avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du carré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un second apotome (déf. trois. 2. 10).

On a donc trouvé un second apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πή.

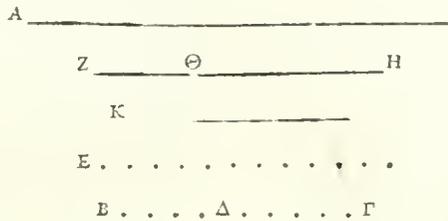
PROPOSITIO LXXXVIII.

Εύρειν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Invenire tertiam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ A , καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ E , $BΓ$, $ΓΔ$, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ $ΓB$ πρὸς τὸν $BΔ$ λόγον ἔχέτω ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $BΓ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ

Exponatur rationalis A , et exponantur tres numeri E , $BΓ$, $ΓΔ$, rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ipse autem $ΓB$ ad $BΔ$ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et fiat ut quidem E ad $BΓ$ ita ex



ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ $BΓ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$ τετράγωνον¹. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ZH τετραγώνῳ². ῥητὴν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον³. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZH . Καὶ ἐπεὶ ὁ E πρὸς τὸν $BΓ$ λόγον οὐχ ἔχει

A quadratum ad quadratum ex ZH , ut verò $BΓ$ ad $ΓΔ$ ita ex ZH quadratum ad quadratum ex $HΘ$; commensurable igitur est ex A quadratum quadrato ex ZH . Rationale autem ex A quadratum; rationale igitur et quadratum ex ZH ; rationalis igitur est ZH . Et quoniam E ad $BΓ$ rationem non habet quam quadratus

PROPOSITION LXXXVIII.

Trouver un troisième apotome.

Soient exposés la rationnelle A , et les trois nombres E , $BΓ$, $ΓΔ$, qui n'aient pas entre eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; que $ΓB$ ait avec $BΔ$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; faisons en sorte que E soit à $BΓ$ comme le quarré de A est au quarré de ZH , et que $BΓ$ soit à $ΓΔ$ comme le quarré de ZH est au quarré de $HΘ$; le quarré de A sera commensurable avec le quarré de ZH (G. 10). Mais le quarré de A est rationel; le quarré de ZH est donc rationel; la droite ZH est donc rationelle. Et puisque E n'a pas

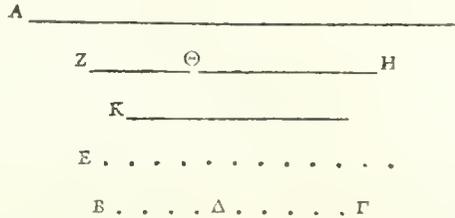
ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον ἔχει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ ZH μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ $BΓ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς $HΘ$. Ἐπιτὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH · ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $HΘ$. Καὶ ἐπεὶ ὁ $BΓ$ πρὸς $ΓΔ$ λόγον οὐκ ἔχει ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$ λόγον ἔχει ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ $HΘ$ μήκει. Καὶ αἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ZH , $HΘ$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ $ZΘ$. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $BΓ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ὡς δὲ ὁ $BΓ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$ · διῶσου ἄρα ἐστὶν

numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est A ipsi ZH longitudine. Rursus, quoniam est ut $BΓ$ ad $ΓΔ$ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex $HΘ$; commensurable igitur est ex ZH quadratum quadrato ex $HΘ$. Rationale autem quadratum ex ZH ; rationale igitur et quadratum ex $HΘ$; rationalis igitur est $HΘ$. Et quoniam $BΓ$ ad $ΓΔ$ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ZH quadratum ad ipsum ex $HΘ$ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi $HΘ$ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ZH , $HΘ$ igitur rationales sunt potentia solum commensurabiles; apotome igitur est $ZΘ$. Dico et tertiam. Quoniam enim est ut quidem E ad $BΓ$ ita ex A quadratum ad ipsum ex ZH , ut verò $BΓ$ ad $ΓΔ$ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex $HΘ$; ex æquo igitur est ut E ad $ΓΔ$ ita

avec $BΓ$ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de A n'aura pas avec le carré de ZH la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). De plus, puisque $BΓ$ est à $ΓΔ$ comme le carré de ZH est au carré de $HΘ$, le carré de ZH sera commensurable avec le carré de $HΘ$. Mais le carré de ZH est rationel; le carré de $HΘ$ est donc rationel; la droite $HΘ$ est donc rationelle. Et puisque $BΓ$ n'a pas avec $ΓΔ$ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ZH n'aura pas avec le carré de $HΘ$ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec $HΘ$ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ZH , $HΘ$ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite $ZΘ$ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi qu'elle est un troisième apotome. Car puisque E est à $BΓ$ comme le carré de A est au carré de ZH , et que $BΓ$ est à $ΓΔ$ comme le carré de ZH est au carré de $HΘ$; par égalité, E sera à $ΓΔ$

ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· εὐθ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει⁸. Ω εὖν μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ

ex A quadratum ad ipsum ex ΘΗ. Ipse autem E ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur A ipsi ΗΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine. Quo igitur majus est quadratum ex ΖΗ quadrato



τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἀναστρέφονται ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον⁹ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν·

ex ΗΘ, sit quadratum ex Κ. Quoniam igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; convertendo igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex ΖΗ igitur ad quadratum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur

comme le carré de A est au carré de ΘΗ (22. 5); mais E n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de A n'a donc pas avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée A. Que le carré de Κ soit la grandeur dont le carré de ΖΗ surpasse le carré de ΗΘ. Puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par conversion, ΓΒ sera à ΒΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de Κ (19. 5). Mais ΓΒ a avec ΒΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΖΗ a donc avec le carré de Κ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite

σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ ἢ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ¹⁰ σύμμετρον ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Εὑρίθαι ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή ἡ ΖΘ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΘ'.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τὸν ΔΖ, ΖΕ λόγον μὴ ἔχειν δι τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Καὶ πεποιθήσθω ἄς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ

est ZH ipsi K longitudine. Et ZH quam $H\Theta$ plus potest quadrato ex K ; ergo ZH quam $H\Theta$ plus potest quadrato ex recta sibi commensurabili. Et neutra ipsarum $ZH, H\Theta$ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine; ergo $Z\Theta$ apotome est tertia.

Inventa est igitur tertia apotome $Z\Theta$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO LXXXIX.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis A , et ipsi A longitudine commensurabilis BH ; rationalis igitur est et BH . Et exponantur duo numeri $\Delta Z, ZE$; ita ut totus ΔE ad utrumque ipsorum $\Delta Z, ZE$ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΔE ad EZ ita ex BH quadratum ad ipsum ex $H\Gamma$; commensurabile igitur

ZH est donc commensurable en longueur avec K (9. 10). Mais la puissance de ZH surpasse la puissance de $H\Theta$ du carré de K ; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de $H\Theta$ du carré d'une droite commensurable avec ZH ; mais aucune des droites $ZH, H\Theta$ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée A ; la droite $Z\Theta$ est donc un troisième apotome (déf. trois. 5. 10).

On a donc trouvé un troisième apotome $Z\Theta$. Ce qu'il fallait faire.

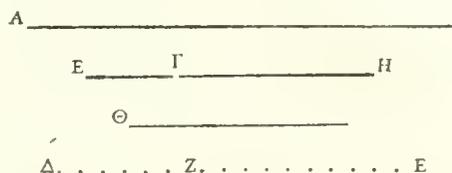
PROPOSITION LXXXIX.

Trouver un quatrième apotome.

Soit exposée la rationnelle A , et que BH soit commensurable en longueur avec A ; la droite BH sera rationnelle. Soient exposés les deux nombres $\Delta Z, ZE$, de manière que le nombre entier ΔE n'ait pas avec chacun des nombres $\Delta Z, ZE$ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; et faisons en sorte que ΔE soit à EZ comme le carré de BH est au carré de $H\Gamma$; le carré de BH sera commensurable

τῆς ΒΗ τῶ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῤητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῤητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῤητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος

est quadratum ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΓ; rationalis igitur est ΗΓ. Et quoniam ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum



ἀρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφοτέραι ῤηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῤηταί εἰσι δυναμί μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη¹. Ὁ οὖν μείζων ἐστὶ² τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ³ ἀναστρέφεται ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

num; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΒΓ. Dico et quartam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, et convertendo igitur est ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-

avec le carré de ΗΓ (6. 10). Mais le carré de ΒΗ est rationel, le carré de ΗΓ est donc rationel; la droite ΗΓ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le carré de ΗΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un quatrième apotome. Que le carré de Θ soit ce dont le carré de ΒΗ surpasse le carré de ΗΓ. Puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ, par conversion, ΕΔ sera à ΔΖ comme le carré ΒΗ est au carré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΒΗ n'a donc pas non plus avec le carré de

μόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ⁵ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΒΓ ἄποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Εὐρίπται ἄρα ἡ ΒΓ τετάρτη ἀποτομή. Ὅπερ εἶδει πειῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εὐρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει¹ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν² ἡ ΓΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ πεποιήσθω ἕς ὁ ΖΕ πρὸς

tum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine; et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectā sibi incommensurabili longitudine. Atque est tota ΒΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est quarta

Inventa est igitur ΒΓ quarta apotome. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XC.

Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α longitudine commensurabilis sit ΓΗ; rationalis igitur est ΓΗ. Et exponantur duo numeri ΔΖ, ΖΕ, ita ut ΔΕ ad utrumque ipsorum ΔΖ, ΖΕ rationem rursus non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut ΖΕ ad ΕΔ

Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec Θ (9. 10); mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du carré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la droite entière ΒΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10).

On a donc trouvé un quatrième apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

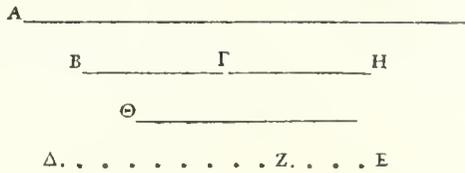
PROPOSITION XC.

Trouver un cinquième apotome.

Soit exposée la rationnelle Α, et que ΓΗ soit commensurable en longueur avec Α; la droite ΓΗ sera rationnelle. Soient exposés aussi deux nombres ΔΖ, ΖΕ, de manière que ΔΕ n'ait ni avec l'un ni avec l'autre des nombres ΔΖ, ΖΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; et faisons en sorte que ΖΕ soit à

τὸν³ ΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἰσητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῤητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως το ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὄν τετραγώνος ἀριθμὸς πρὸς τετραγώνον ἀριθ-

ita ex ΓΗ quadratum ad ipsum ex ΗΒ; commensurable igitur est ex ΓΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Rationale autem quadratum ex ΓΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΒ; rationalis igitur est et ΒΗ. Et quoniam est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-



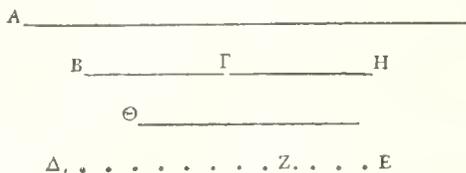
μὸν· οὐδ' ἄρα⁵ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὄν τετραγώνος ἀριθμὸς πρὸς τετραγώνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῤηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῤηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ὡ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ

tum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et quintam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex

ΕΔ comme le carré de ΓΗ est au carré de ΗΒ; le carré de ΓΗ sera commensurable avec le carré de ΗΒ (6. 10). Mais le carré de ΓΗ est rationel; le carré de ΗΒ est donc rationel; la droite ΒΗ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ, et que ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le carré de ΗΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais elles sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΗ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un cinquième apotome. Que le carré de Θ soit ce dont le carré de ΒΗ surpasse le carré de ΗΓ. Puisque le

ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἔστιν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος

ΗΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, convertendo igitur est ut ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus



ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον⁶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμύζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστὶ τέμπτη.

ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Atque est congruens ΓΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est quinta.

Εὕρηται ἄρα ἡ τέμπτη ἀποτομή ἡ ΒΓ. Οπερ ἔδει ποιῆται.

Inventa est igitur quinta apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ comme ΔΕ est à ΕΖ; par conversion, ΕΔ sera à ΔΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΒΗ n'a donc pas non plus avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10).

On a donc trouvé un cinquième apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

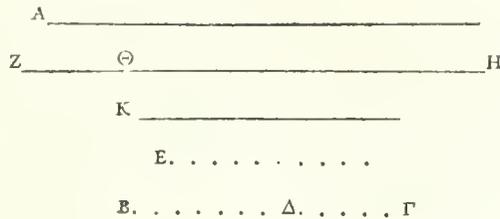
PROPOSITIO XCI.

Εὐρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Invenire sextam apotomen.

Ἐκτίσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ E , $BΓ$, $ΓΔ$ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ $ΓB$ πρὸς τὸν $BΔ$ λόγον μὴ ἔχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιθήσθω ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $BΓ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH^2 , ὡς δὲ ὁ $BΓ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$.

Exponatur rationalis A , et tres numeri E , $BΓ$, $ΓΔ$ rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum; adhuc autem et $ΓB$ ad $BΔ$ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut quidem E ad $BΓ$ ita ex A quadratum ad ipsum ex ZH , ut verò $BΓ$ ad $ΓΔ$ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex $HΘ$.



Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν $BΓ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH · σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς ZH . Ῥητὸν δὲ τῷ ἀπὸ τῆς A ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ

Quoniam igitur est ut E ad $BΓ$ ita ex A quadratum ad ipsum ex ZH ; commensurable igitur ex A quadratum quadrato ex ZH . Rationale autem quadratum ex A ; rationale igitur et

PROPOSITION XCI.

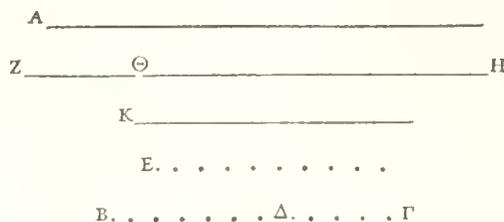
Trouver un sixième apotome.

Soient exposés la rationelle A , et trois nombres E , $BΓ$, $ΓΔ$, qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; de plus, que $ΓB$ n'ait pas avec $BΔ$ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; faisons en sorte que E soit à $BΓ$ comme le carré de A est au carré de ZH , et que $BΓ$ soit à $ΓΔ$ comme le carré de ZH est au carré de $HΘ$.

Puisque E est à $BΓ$ comme le carré de A est au carré de ZH , le carré de A sera commensurable avec le carré de ZH . Mais le carré de A est rationel; le

τῆς Κ λόγον ἔχει ἄν τετραγώνος ἀριθμὸς πρὸς τετραγώνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ

dratum ad ipsum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi Κ longi-



μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη φητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστὶν ἕκτη.

tudine. Et ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex Κ; ergo ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex rectā sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali Α longitudine; ergo ΖΘ apotome est sexta.

Εὑρίηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομή ἡ ΖΘ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Inventa est igitur sexta apotome ΖΘ. Quod oportebat facere.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

SCHOLIUM.

Εστὶ δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρησιν τῶν εἰρημένων ἕξ ἀποτομῶν. Καὶ δεῖ ἔστω εὐρεῖν τὴν πρώτην, ἐκκείσθω ἡ' ἐκ δύο ὁρο-

Licet autem et expeditius demonstrare inventionem dictarum sex apotomarum. Et igitur oporteat invenire primam apotomen, exponatur

ΖΗ n'a donc pas non plus avec le carré de Κ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec Κ (9. 10). Mais la puissance de la droite ΖΗ surpasse la puissance de la droite ΗΘ du carré de Κ; la puissance de ΖΗ surpasse donc la puissance de ΗΘ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΖΗ. Mais aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΖΗ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10).

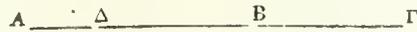
On a donc trouvé un sixième apotome ΖΘ. Ce qu'il fallait faire.

S C H O L I E.

On peut démontrer plus brièvement la recherche des six apotomes dont nous venons de parler. Car qu'il faille trouver un premier apotome; soit exposé

μάτων πρώτη ἢ ΑΓ, ἥς μείζον ὄνομα ἢ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἢ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῆς

ex binis nominibus prima ΑΓ, cujus majus nomen ipsa ΑΒ, et ipsi ΒΓ æqualis ponatur ΒΔ; ergo ΑΒ, ΒΓ, hoc est ΑΒ, ΒΔ, rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ΑΒ quam ΒΓ, hoc



ΒΔ, μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῆ· Καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΒ³. Ομοίως δὲ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὐρήσομεν, ἐκθέμενοι τὰς ἰσαριθμούς ἐκ δύο ὀνομάτων.

est quam ΒΔ, plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et ΑΒ commensurabilis est expositæ rationali longitudine; apotome igitur prima est ΑΒ. Similiter utique et reliquas apotomas inveniemus, exponendo eas quæ sunt ejusdem ordinis ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι,Ϟ.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομὴ ἐστίν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομὴ ἐστίν.

PROPOSITIO XCII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

Contineatur enim spatium ΑΒ sub rationali ΑΓ et apotome primâ ΑΔ; dico rectam quæ spatium ΑΒ potest apotomen esse.

la première de deux noms ΑΓ; que son plus grand nom soit ΑΒ (49. 10), et faisons ΒΔ égal à ΒΓ; les droites ΑΒ, ΒΓ, c'est-à-dire ΑΒ, ΒΔ, seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10); la puissance de ΑΒ surpassera la puissance de ΒΓ, c'est-à-dire de ΒΔ, du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΒ; mais la droite ΑΒ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée; la droite ΑΒ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Nous trouverons semblablement les autres apotomes en exposant les droites de deux noms qui sont du même ordre (50, 51, 52, 53, et 54. 10).

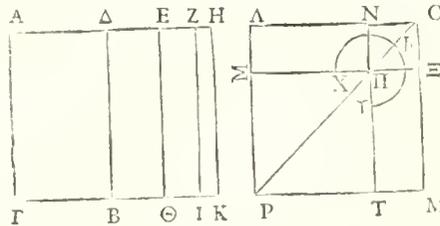
PROPOSITION XCII.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationnelle ΑΓ et sous un premier apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est un apotome.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη ἡ $\Lambda\Delta$, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΔH . αἱ ΛH , $\text{H}\Delta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἔλη ἡ ΛH σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $\Lambda\Gamma$, καὶ ἡ ΛH τῆς $\text{H}\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ τὴν ΛH παραλληλό-

Quoniam enim apotome est prima $\Lambda\Delta$, sit ipsi congruens ΔH ; ipsæ ΛH , $\text{H}\Delta$ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et tota ΛH commensurabilis est expositæ rationali $\Lambda\Gamma$, et ΛH quam $\text{H}\Delta$ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔH æquale



γραμμῶν² παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεί³. Τετμήσω ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν ΛH παραβελήσω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΛZ , ZH σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛZ τῇ ZH . Καὶ διὰ τῶν E , Z , H σημείων τῇ $\Lambda\Gamma$ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $\text{E}\Theta$, ZI , HK . Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ

ad ΛH parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Sectur ΔH bifariam in E , et quadrato ex EH æquale ad ipsam ΛH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΛZ , ZH ; commensurabilis igitur est ΛZ ipsi ZH . Et per puncta E , Z , H ipsi $\Lambda\Gamma$ parallelæ ducantur $\text{E}\Theta$, ZI , HK . Et quoniam commensurabilis est ΛZ ipsi ZH longitudine; et

Car, puisque $\Lambda\Delta$ est un premier apotome, que ΔH lui conviène; les droites ΛH , $\text{H}\Delta$ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. trois. 1. 10). Mais la droite entière ΛH est commensurable avec la rationnelle exposée $\Lambda\Gamma$, et la puissance de ΛH surpasse la puissance de $\text{H}\Delta$ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΛH ; si donc on applique à ΛH un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔH , soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΛH en parties commensurables (18. 10). Que ΔH soit coupé en deux parties égales au point E ; appliquons à ΛH un parallélogramme qui étant égal au quarré de EH , soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle compris sous ΛZ , ZH ; la droite ΛZ sera commensurable avec ZH . Par les points E , Z , H menons les droites $\text{E}\Theta$, ZI , HK parallèles à $\Lambda\Gamma$. Puisque ΛZ est commensurable en longueur avec ZH ,

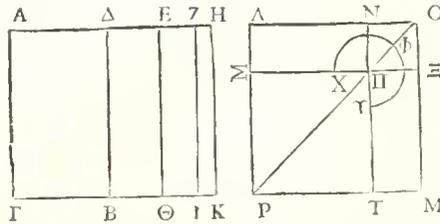
AZ τῆ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν AZ, ΖΗ σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρος ἐστὶ τῆ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ΖΗ σύμμετρος ἐστὶ τῆ ΑΓ μήκει. Καὶ ἐστὶ ρητὴ ἡ ΑΓ· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AZ, ΖΗ· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ ρητόν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῆ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΑΓ μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστὶ. Κείσθω δὲ τῶ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῶ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφηρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῶ, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράψθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ περιεχόμενον ἑρθογώνιον τῶ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνω, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ

AH igitur utriusque ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Sed AH commensurabilis est ipsi AG; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH commensurabilis est ipsi AG longitudine. Atque est rationalis AG; rationalis igitur et utraque ipsarum AZ, ZH; quare et utrumque ipsorum AI, ZK rationale est. Et quoniam commensurabilis est DE ipsi EH longitudine, et DH igitur utriusque ipsarum DE, EH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem DH, et incommensurabilis ipsi AG longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum DE, EH, et incommensurabilis ipsi AG longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ medium est. Ponatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale quadratum ΝΞ auferatur, communem angulum ΑΟΜ habens cum ipso; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur æquale est sub AZ, ΖΗ contentum rectangulum quadrato ex ΕΗ, est igitur ut AZ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ. Sed ut quidem AZ ad ΕΗ ita ΑΙ ad ΕΚ, ut verò

la droite AH sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est commensurable avec AG; chacune de droites AZ, ZH est donc commensurable en longueur avec AG (12. 10). Mais AG est rationnelle; les droites AZ, ZH sont donc rationnelles l'une et l'autre; les parallélogrammes AI, ZK sont donc aussi rationnels l'un et l'autre (20. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΕΗ, la droite ΔΗ est donc commensurable en longueur avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais ΔΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacun des rectangles ΔΘ, ΕΚ est donc médial (22. 10). Faisons le carré ΑΜ égal au parallélogramme ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ un carré ΝΞ égal au parallélogramme ΖΚ, le carré ΝΞ ayant l'angle commun ΑΟΜ; les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que ΟΡ soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ, ΖΗ est égal au carré de ΕΗ, la droite AZ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais AZ est à ΕΗ comme ΑΙ est

τὸ EK πρὸς τὸ KZ· τῶν ἄρα AI, KZ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK. Ἐστι δὲ καὶ τῶν AM, NΞ μέσον ἀνάλογον τὸ MN, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ ἔστι τὸ μὲν AI τῷ AM τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ZK τῷ NΞ· καὶ τὸ MN ἄρα τῷ EK ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν EK τῷ ΔΘ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ MN τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ

EH ad ZH ita est EK ad KZ; ipsorum igitur AI, KZ medium proportionale est EK. Est autem et ipsorum AM, NΞ medium proportionale MN, ut superius demonstratum est, atque est quidem AI quadrato AM æquale, ipsum verò ZK ipsi NΞ; et MN igitur ipsi EK æquale est. Sed quidem EK ipsi ΔΘ est æquale, ipsum verò MN ipsi ΛΞ; ergo ΔΚ æquale est



ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνόμονι καὶ τῷ NΞ. Ἐστι δὲ καὶ τὸ ΔΚ ἴσον τοῖς AM, NΞ τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ· τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς AN ἐστὶ τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AN τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τῷ AB· ἢ AN ἄρα δύναται τὸ AB. Λέγω δὲ ὅτι καὶ¹⁰ ἡ AN ἀποτομή ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκατέρων τῶν AI, ZK, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς AM, NΞ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν AM, NΞ ῥητόν ἐστι, τουτέστι

gnomoni ΥΦΧ et ipsi NΞ. Est autem et AK æquale quadratis AM, NΞ; reliquum igitur AB æquale est ipsi ΣΤ; sed ΣΤ ex AN est quadratum; ergo ex AN quadratum æquale est ipsi AB; ipsa AN igitur potest ipsum AB. Dico et AN apotomen esse. Quoniam enim rationale est utrumque ipsorum AI, ZK, atque est æquale quadratis AM, NΞ; et utrumque igitur ipsorum AM, NΞ rationale est, hoc est quadratum ex

à EK, et EH est à ZH comme EK est à KZ (1.6); le parallélogramme EK est donc moyen proportionel entre les parallélogrammes AI, KZ. Et puisque MN est moyen proportionel entre AM et NΞ, ainsi qu'on l'a démontré plus haut (55. 10), que AI est égal au carré AM, et que ZK l'est à NΞ, le parallélogramme MN sera égal à EK. Mais EK est égal à ΔΘ (57. 1), et MN à ΛΞ (45. 1); le parallélogramme ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec NΞ. Mais le parallélogramme AK est égal à la somme des carrés AM, NΞ; le parallélogramme restant AB est donc égal à ΣΤ. Mais ΣΤ est le carré de AN; le carré de AN est donc égal à AB; la droite AN peut donc la surface AB. Je dis aussi que AN est un apotome. Car puisque chacun des parallélogrammes AI, ZK est rationel, et qu'ils sont égaux aux carrés AM, NΞ, chacun des carrés AM, NΞ, c'est-à-dire chacun des carrés des

τὸ ἀπὸ ἐκατέρων¹¹ τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ ἐκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητὴ ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΛΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ¹² τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἐστὶν ἢ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυναμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΑΝ. Καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἢ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομὴ ἐστίν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἐξῆς¹³.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη μείσος ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μείσος ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

droites ΛΟ, ΟΝ sera rationel ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc rationelles l'une et l'autre. De plus, puisque le parallélogramme ΔΘ est médial, et qu'il est égal à ΛΞ, le parallélogramme ΛΞ sera aussi médial. Et puisque ΛΞ est médial, et que ΝΞ est rationel, le parallélogramme ΛΞ sera incommensurable avec le carré ΝΞ ; mais ΛΞ est à ΝΞ comme ΛΟ est à ΟΝ (1.6) ; la droite ΛΟ est donc incommensurable en longueur avec ΟΝ (10.10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement ; la droite ΑΝ est donc un apotome (74.10). Mais cette droite peut la surface ΑΒ ; la droite qui peut la surface ΑΒ est donc un apotome. Si donc, etc.

PROPOSITION XCIII.

Si une surface est comprise sous une rationelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous la rationelle ΑΓ et sous le second apotome ΑΔ ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est un premier apotome d'une médiale.

utrisque ΛΟ, ΟΝ ; et utraque igitur ipsarum ΛΟ, ΟΝ rationalis est. Rursus, quoniam medium est ΔΘ, atque est æquale ipsi ΛΞ ; medium igitur est et ΛΞ. Quoniam igitur quidem ΛΞ medium est, ipsum verò ΝΞ rationale, incommensurable igitur est et ΛΞ ipsi ΝΞ ; ut autem ΛΞ ad ΝΞ ita est ΛΟ ad ΟΝ ; incommensurabilis igitur est ΛΟ ipsi ΟΝ longitudine. Eū sunt ambæ rationales ; ipsæ ΛΟ, ΟΝ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles ; apotome igitur est ΑΝ. Et potest spatium ΑΒ ; recta igitur spatium ΑΒ potens apotome est.

Si igitur spatium, etc.

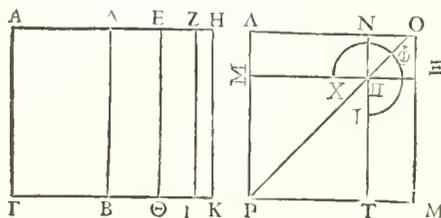
PROPOSITIO XCIII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est primâ.

Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ et apotome secundâ ΑΔ ; dico rectam quæ spatium ΑΒ potest mediæ apotomen esse primam.

Εστω γάρ τῆ ἈΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρος ἐστὶ τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει· ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et congruens ΔΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ, sed tota ΑΗ quam congruens ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; quoniam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si



μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ³. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ ἄ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβελήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῆ ΖΗ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῆ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ,

igitur quartæ parti quadrati ex ΗΔ æquale parallelogrammum ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔΗ bifariam in Ε; et quadrato ex ΕΗ æquale parallelogrammum ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; commensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. Et per puncta Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ paral-

Que la droite ΔΗ conviène avec ΑΔ, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la congruente ΔΗ sera commensurable avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ (déf. trois. 2. 10), puisque la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ, si nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΗΔ, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties commensurables (18. 10). Coupons ΔΗ en deux parties égales au point Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal au quarré de ΕΗ soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera commensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les

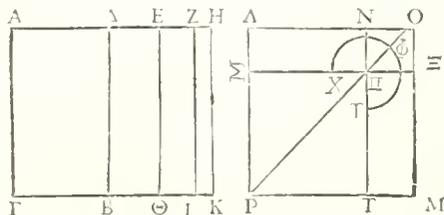
ZI, HK. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶ ἡ AZ τῆ ZH μήκει^δ· καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρα τῶν AZ, ZH σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Ρητὴ δὲ AH καὶ ἀσύμμετρος τῆ AG μήκει· καὶ ἑκατέρα τῶν AZ, ZH ρητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῆ AG μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν AI, ZK μέσον ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔE τῆ EH, καὶ ἡ ΔH ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔE, EH σύμμετρος ἐστὶν. Ἀλλ' ἡ ΔH σύμμετρος ἐστὶ τῆ AG μήκει· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔE, EH, καὶ σύμμετρος τῆ AG μήκει^ε· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, EK ρητόν ἐστι. Συνεστάτω οὖν τῶ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ ΔM, τῶ δὲ ZK ἴσον ἀφηρήσθω τὸ NΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὃν τῶ ΔM, τὴν ὑπὸ τῶν ΔOM^ζ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΔM, NΞ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὰ AI, ZK μέσα ἐστὶ, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις^δ, καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΔO, ON^η· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔO, ON ἄρα^θ

lelae ducantur EΘ, ZI, HK. Et quoniam commensurabilis est AZ ipsi ZH longitudine; et AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem AH et incommensurabilis ipsi AG longitudine; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH rationalis est, et incommensurabilis ipsi AG longitudine; utrumque igitur ipsorum AI, ZK medium est Rursus, quoniam commensurabilis est ΔE ipsi EH, et ΔH igitur utrique ipsarum ΔE, EH commensurabilis est. Sed ΔH commensurabilis est ipsi AG longitudine; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΔE, EH, et commensurabilis ipsi AG longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, EK rationale est. Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum ΔM, ipsi verò ZK æquale auferatur NΞ, circa eundem angulum ΔOM cum ipso ΔM; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΔM, NΞ. Sit ipsorum diameter OP, et describatur figura. Quoniam igitur AI, ZK media sunt, et commensurabilia inter se, et sunt æqualia quadratis ex ΔO, ON; et qua-

droites EΘ, ZI, HK parallèles à AG. Puisque AZ est commensurable en longueur avec ZH, la droite AH sera aussi commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacune des droites AZ, ZH est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacun des parallélogrammes AI, ZK sera par conséquent médial (22. 10). De plus, puisque ΔE est commensurable avec EH, la droite ΔH sera commensurable avec chacune des droites ΔE, EH. Mais la droite ΔH est commensurable en longueur avec AG; chacune des droites ΔE, EH est donc rationnelle et commensurable en longueur avec AG; chacun des parallélogrammes ΔΘ, EK est donc rationnel. Faisons le carré ΔM égal au parallélogramme AI (14. 2), et retranchons de ΔM un carré NΞ égal au parallélogramme ZK, ce carré étant dans le même angle que ΔM; savoir, dans l'angle ΔOM; les carrés ΔM, NΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit OP, et décrivons la figure. Puisque les parallélogrammes AI, ZK sont médiaux et commensurables entre eux, et qu'ils sont égaux aux carrés des droites ΔO, ON, les carrés des droites ΔO, ON

μέσα ἐστί· καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ. λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐπεὶ γάρ¹⁰ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ. Ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ¹¹ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ

drata ex ΛΟ, ΟΝ igitur mediae sunt; et ΛΟ, ΟΝ igitur mediae sunt. Dico et potentia solùm commensurabiles. Quoniam enim rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ; sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita ΑΙ ad ΕΚ. Ut autem ΕΗ ad ΖΗ, ita est ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et



τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ¹² τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΑΞ· ἔλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνόμονι, καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπεὶ οὖν ἔλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΜ, ΝΞ, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνόμονι, καὶ τῷ ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τοῦτέστι

quadratorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, atque est æquale quidem ΑΙ ipsi ΑΜ, ipsum verò ΖΚ ipsi ΝΞ; et ΜΝ igitur æquale est ipsi ΕΚ. Sed ipsi quidem ΕΚ æquale est ΔΘ, ipsi verò ΜΝ æquale ΑΞ; totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ. Quoniam igitur totum ΑΚ æquale est quadratis ΑΜ, ΝΞ, quorum ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est

seront médiaux ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales. Je dis que ces droites sont commensurables en puissance seulement. Car puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au carré de ΕΗ, la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ ; le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionel entre les parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ. Mais ΜΝ est aussi moyen proportionnel entre ΑΜ et ΝΞ (55. 10), et ΑΙ est égal à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ ; le parallélogramme ΜΝ est donc égal à ΕΚ. Mais ΔΘ est égal à ΕΚ (57. 1), et ΑΞ égal à ΜΝ (45. 1), le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Et puisque le parallélogramme ΑΚ tout entier est égal à la somme des carrés ΑΜ, ΝΞ, et que la partie ΔΚ est égale au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ, le parallélogramme restant

τῶ¹³ ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ¹⁴ ἴσον ἔστι τῶ ΑΒ χωρίῳ· ἢ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ¹⁵ ΑΒ χωρίον. Λέγω δὴ¹⁶ ὅτι ἢ ΑΝ μέσης¹⁷ ἀποτομῇ ἔστι πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῶ ΜΝ, τουτέστι¹⁸ τῶ ΑΞ· ῥητόν ἄρα ἔστι¹⁹ τὸ ΑΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ. Μέσον δὲ εἰδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ΑΞ τῶ ΝΞ· ὡς δὲ²⁰ τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἔστιν ἢ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἔρα ΑΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἢ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομῇ ἔστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἢ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῇ ἔστι πρώτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14^δ.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῇ ἔστι δευτέρα.

AB sera égal à ΣΥ, c'est-à-dire au carré de AN ; le carré de AN est donc égal à la surface AB ; la droite AN peut donc la surface AB. Or, je dis que AN est un premier apotome d'une médiale. Car, puisque le parallélogramme EK est rationel et égal à MN, c'est-à-dire à ΑΞ, le parallélogramme ΑΞ, c'est-à-dire le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ, sera rationel. Mais on a démontré que ΝΞ est médial ; le parallélogramme ΑΞ est donc incommensurable avec ΝΞ ; mais ΑΞ est à ΝΞ comme ΑΟ est à ΟΝ (1.6) ; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc incommensurables en longueur ; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle ; la droite AN est donc un premier apotome d'une médiale (75. 10), et elle peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc un premier apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCIV.

Si une surface est comprise sous une rationelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

II.

quadrato ex AN ; quadratum igitur ex AN æquale est spatio AB ; ergo AN potest spatium AB. Dico et AN mediæ apotomen esse primam. Quoniam enim rationale est EK, atque est æquale ipsi MN, hoc est ipsi ΑΞ ; rationale igitur est ΑΞ, hoc est rectangulum sub ΑΟ, ΟΝ. Medium autem ostensum est ΝΞ ; incommensurable igitur est ΑΞ ipsi ΝΞ ; ut verò ΑΞ ad ΝΞ ita est ΑΟ ad ΟΝ ; ipsæ ΑΟ, ΟΝ igitur incommensurabiles sunt longitudine ; ipsæ igitur ΑΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes ; ergo AN mediæ apotome est prima, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens mediæ apotome est prima. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XCIV.

Si spatium continetur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

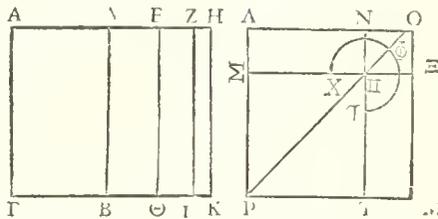
346 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς AD . λέγω ὅτι ἢ τὸ AB χωρίον δυναμένη μίσης ἀποτομῆ ἔστι δευτέρα.

Ἐστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ ΔH . αἱ AH , $H\Delta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μίσιον σύμμετροι, καὶ οὐδέτερα τῶν AH , $H\Delta$ σύμμετρος ἔστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG , ἢ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔH μείζον δύναται

Spatium enim AB continetur sub rationali AB et apotome tertiâ AD ; dico rectam, que spatium AB potest, medie apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AD congruens ΔH ; ipsæ AH , $H\Delta$ igitur rationales sunt potentia solùm commensurabiles, et neutra ipsarum AH , $H\Delta$ commensurabilis est longitudine expositæ rationali AG , tota autem AH quam congruens ΔH plus



τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Ἐπεὶ οὖν ἡ AH τῆς ΔH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς· ἂν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσων παρὰ τὴν AH παραβλήθῃ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελθῆ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσων παρὰ τὴν AH παραβλήσθω

potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Quoniam igitur AH quam ΔH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔH bifariam in E , et quadrato ex EH æquale

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un troisième apotome AD ; je dis que la droite qui peut la surface AB est un second apotome d'une médiale.

Car que ΔH conviène avec AD ; les droites AH , $H\Delta$ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; aucune des droites AH , $H\Delta$ ne sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG , et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente ΔH du carré d'une droite commensurable avec la droite entière AH (déf. trois. 5. 10). Et puisque la puissance de AH surpasse la puissance de ΔH du carré d'une droite commensurable avec AH , si nous appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΔH , soit défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera AH en parties commensurables (18. 10). Coupons ΔH en deux parties égales au point E , et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant

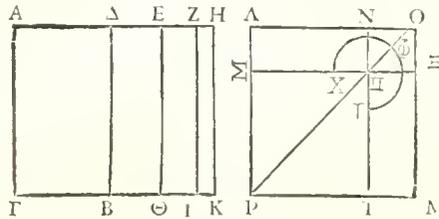
ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H σημείων τῇ AG παράλληλοι αἱ EΘ, ZI, HK· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ AZ, ZH· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῷ ZK: Καὶ ἐπεὶ αἱ AZ, ZH σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ AH ἄρα ἐκατέρα τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ AH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· καὶ ἐκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH ρητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· καὶ ἐκάτερον ἄρα τῶν AI, ZK μέσον ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔE τῇ EH μήκει, καὶ ἡ ΔH ἄρα ἐκατέρα τῶν ΔE, EH σύμμετρός ἐστι μήκει². Ρητὴ δὲ ἡ ΔH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἐκατέρα τῶν ΔE, EH, καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, EK μέσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ αἱ AH, HΔ δυναμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ AH τῇ ΔH. Ἀλλὰ ἡ μὲν AH τῇ AZ σύμμετρός ἐστι μήκει,

ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ, ZH. Et ducantur per puncta E, Z, H ipsi AG parallelae EΘ, ZI, HK; commensurabiles igitur sunt AZ, ZH; commensurabile igitur et AI ipsi ZK. Et quoniam AZ, ZH commensurabiles sunt longitudine, et AH igitur utriusque ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem AH et incommensurabilis ipsi AG longitudine; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH rationalis est et incommensurabilis ipsi AG longitudine; et utrumque igitur ipsorum AI, ZK medium est. Rursus, quoniam commensurabilis est ΔE ipsi EH longitudine, et ΔH igitur utriusque ipsarum ΔE, EH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΔH et incommensurabilis ipsi AG longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum ΔE, EH, et incommensurabilis ipsi AG longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, EK medium est. Et quoniam AH, HΔ potentiâ solum commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est longitudine ipsa AH ipsi ΔH. Sed quidem AH ipsi AZ commen-

égal au carré de EH, soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous AZ, ZH. Par les points E, Z, H menons les droites EΘ, ZI, HK parallèles à AG; les droites AZ, ZH seront commensurables; le parallélogramme AI sera donc commensurable avec ZK. Et puisque les droites AZ, ZH sont commensurables en longueur, la droite AH sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacune des droites AZ, ZH est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacun des parallélogrammes AI, ZK est donc médial (22. 10). De plus, puisque ΔE est commensurable en longueur avec EH; la droite ΔH sera commensurable en longueur avec chacune des droites ΔE, EH. Mais ΔH est rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacune des droites ΔE, EH est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacun des parallélogrammes ΔΘ, EK est donc médial (22. 10). Et puisque les droites AH, HΔ sont commensurables en puissance seulement, la droite AH sera incommensurable en longueur avec ΔH. Mais AH est commensurable en longueur

ή δὲ ΔΗ τῆς ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῆς ΕΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ⁴. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφηρίσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ἐν τῷ ΑΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ.

surabilis est longitudine, ipsa verò ΔΗ ipsi ΗΕ; incommensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΕΗ longitudine. Ut autem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ; incommensurable igitur est ΑΙ ipsi ΕΚ. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, eundem angulum habens cum ipso ΑΜ; ergo circa eandem dia-



Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ⁵. τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ

metrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ. Sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ, ut verò ΕΗ ad ΖΗ ita est ΕΚ ad ΖΚ; et ut igitur ΑΙ ad ΕΚ ita ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et quadratorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, et est æquale quidem ΑΙ ipsi ΑΜ,

avec AZ, et ΔΗ avec ΗΕ; la droite AZ est donc incommensurable en longueur avec ΕΗ (13. 10). Mais AZ est à ΕΗ comme le parallélogramme ΑΙ est au parallélogramme ΕΚ (1. 6); le parallélogramme ΑΙ est donc incommensurable avec le parallélogramme ΕΚ. Faisons le carré ΑΜ égal à ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ le carré ΝΞ égal à ΖΚ, ce carré étant dans le même angle que ΑΜ, les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit ΟΡ, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au carré de ΕΗ; la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ; le parallélogramme ΑΙ est donc à ΕΚ comme ΕΚ est à ΖΚ; le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionnel entre ΑΙ et ΖΚ. Puisque ΜΝ est moyen proportionnel entre les carrés ΑΜ, ΝΞ, que le parallélogramme ΑΙ est égal

ZK τῷ ΝΞ, καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον ἐστὶ⁶ τῷ ΔΘ· καὶ ἕλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνόμωνι καὶ τῷ ΝΞ· ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ· ἢ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα. Ἐπεὶ γὰρ μέσα εἰδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· μέσον ἄρα καὶ ἐκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· μέση ἄρα ἐκατέρω τῶν ΛΟ, ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρον ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ⁷, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΜ τῷ ΜΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ ἀσύμμετρος ἐστὶ μήκει τῇ ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον εἰδείχθη τὸ ΕΚ, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν

ipsum verò ZK ipsi ΝΞ, et ΕΚ ἰgitur æquale est ipsi ΜΝ. Sed quidem ΜΝ æquale est ipsi ΛΞ, ipsum verò ΕΚ æquale est ipsi ΔΘ: et totum ἰgitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ; est autem et ΑΚ æquale ipsis ΑΜ, ΝΞ; reliquum ἰgitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est ex ΑΝ quadrato; ergo ΑΝ potest spatium ΑΒ. Dico ΑΝ mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim mediæ ostensa sunt ΑΙ, ΖΚ, et sunt æqualia quadratis ex ΛΟ, ΟΝ; medium ἰgitur et utrumque ex ΛΟ, ΟΝ quadratorum; mediæ ἰgitur utraque ipsarum ΛΟ, ΟΝ. Et quoniam commensurable est ΑΙ ipsi ΖΚ, commensurable ἰgitur et ex ΛΟ quadratum quadrato ex ΟΝ. Rursus, quoniam incommensurable demonstratum est ΑΙ ipsi ΕΚ, incommensurable ἰgitur est et ΑΜ ipsi ΜΝ, hoc est quadratum ex ΛΟ rectangulo sub ΛΟ, ΟΝ; quare et ΛΟ incommensurabilis est longitudine ipsi ΟΝ; ipsæ ΛΟ, ΟΝ ἰgitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico et medium eas continere. Quoniam enim medium ostensum est ΕΚ, atque est æquale rectangulo sub ΛΟ, ΟΝ;

à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ, le parallélogramme ΕΚ sera égal à ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΛΞ (45. 1), et ΕΚ égal à ΔΘ (37. 1); le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais ΑΚ est égal à la somme des carrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc égal à ΣΤ, c'est-à-dire au carré de ΑΝ; la droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis que ΑΝ est un second apotome d'une médiale. Car puisqu'on a démontré que les surfaces ΑΙ, ΖΚ sont médiales, et qu'elles sont égales aux carrés des droites ΛΟ, ΟΝ, chacun des carrés des droites ΛΟ, ΟΝ sera médial; chacune des droites ΛΟ, ΟΝ est donc médiale. Et puisque ΑΙ est commensurable avec ΖΚ, le carré de ΛΟ sera commensurable avec le carré de ΟΝ. De plus, puisqu'on a démontré que ΑΙ est incommensurable avec ΕΚ, le carré ΑΜ sera incommensurable avec ΜΝ, c'est-à-dire le carré de ΛΟ avec le rectangle sous ΛΟ, ΟΝ; la droite ΛΟ est donc incommensurable en longueur avec ΟΝ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis que ces droites comprennent une surface médiale. Car puisqu'on a démontré que ΕΚ est médial, et qu'il est égal au rectangle sous ΛΟ, ΟΝ, le rectangle sous ΛΟ, ΟΝ

ΛΟ, ΟΝ⁸ μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε⁹ αἱ ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ἢ ἌΝ ἄρα μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον¹⁰· ἢ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστὶ.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Ἐστω γὰρ τῆ ΑΔ προσαρμόζουσα ἢ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἢ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ ΑΓ μήκει, ἢ δὲ ὅλη ἢ ΑΗ τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΗΔ μείζον δύναται² τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἢ ΑΗ

medium igitur est et rectangulum sub ΛΟ, ΟΝ; quare ΛΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ergo ἌΝ mediæ apotome est secunda, et potest spatium ΑΒ; recta igitur spatium ΑΒ potius mediæ apotome est secunda. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XCV.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potius minor est.

Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ et apotome quartâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΒ potest, minorem esse.

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ longitudine, et tota ΑΗ quam congruens ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quo-

sera médial; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprennent une surface médiale; la droite ἌΝ est donc un second apotome d'une médiale (76. 10), et elle peut la surface ΑΒ; la droite qui peut la surface ΑΒ est donc un second apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCV.

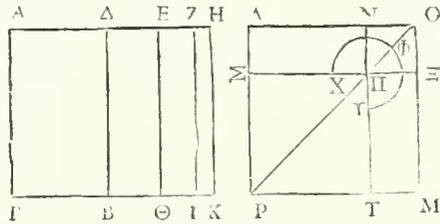
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationnelle ΑΓ et sous un quatrième apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est une mineure.

Car que ΔΗ conviène à ΑΔ, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΗΔ du carré d'une droite incommensurable en longueur

τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μίρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβλήσῃ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελείῃ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ

niam igitur AH quam ΗΔ plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili longitudine; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Sectetur igitur ΔΗ bifariam in Ε, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ;



μήκει ἡ ΑΖ τῆ ΖΗ³. Ηχθυσαν οὖν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΑΗ, καὶ σύμμετρος τῆ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔΗ τῆ ΑΓ μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν

incommensurabilis igitur est longitudine ipsa ΑΖ ipsi ΖΗ. Ducantur igitur per puncta Ε, Ζ, Η parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ ipsis ΑΓ, ΒΔ. Quoniam igitur rationalis est ΑΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; rationale igitur est totum ΑΚ. Rursus, quoniam incommensurabilis est ΔΗ ipsi ΑΓ longitudine, et sunt ambæ rationales; medium igitur est ΔΚ. Rursus, quoniam incom-

avec ΑΗ (déf. trois. 4. 10). Puisque la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ; si nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΔΗ, soit défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (18. 10). Coupons ΔΗ en deux parties égales en Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal au carré de ΕΗ, soit défailant d'une figure carrée; que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera incommensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles aux droites ΑΓ, ΒΔ. Puisque ΑΗ est rationnelle et commensurable en longueur avec ΑΓ, le parallélogramme entier ΑΚ sera rationnel (20. 10). De plus, puisque ΔΗ est incommensurable en longueur avec ΑΓ, et que ces droites sont rationnelles l'une et l'autre, le parallélogramme ΔΚ sera médial (22. 10). De plus, puisque ΑΖ est

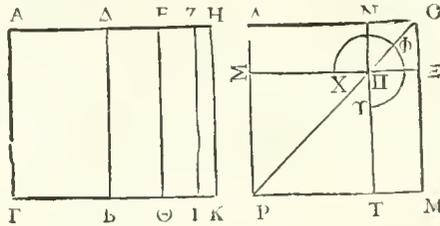
ἢ AZ τῆ ZH μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῷ ZK . Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετραγώνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηρήσθω τὸ $NΞ$, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ἐν τῷ AM , τὴν ἰπὸ $ΛOM$ · περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ AM , $NΞ$ τετραγώνια. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἢ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH , ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἢ EH πρὸς τὴν HZ . Ἀλλ' ὡς μὲν ἢ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK , ὡς δὲ ἢ EH πρὸς τὴν ZH οὕτως ἐστὶ τὸ EK πρὸς τὸ ZK · τῶν ἄρα AI , ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK . Ἐστι δὲ καὶ τῶν AM , $NΞ$ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN , καὶ ἴστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ AM , τὸ δὲ ZK τῷ $NΞ$ · καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ MN . Ἀλλὰ τῷ μὲν EK ἴσον ἐστὶ τὸ $ΔΘ$, τὸ δὲ MN ἴσον ἐστὶ τῷ $ΛΞ$ · ὅλον ἄρα τὸ $ΔK$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΥΦX$ γνόμονι καὶ τῷ $NΞ$. Ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ AK ἴσον ἐστὶ τοῖς AM , $NΞ$ τετραγώνοις, ὧν τὸ $ΔK$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΥΦX$ γνόμονι καὶ τῷ $NΞ$ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ $ΣΤ$,

incommensurable en longueur avec ZH , le parallélogramme AI sera incommensurable avec ZK (1. 6). Faisons le carré AM égal à AI , et retranchons de AM un carré $NΞ$ égal à ZK , ce carré étant autour d'un même angle $ΛOM$ que le carré AM ; les carrés AM , $NΞ$ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que OP soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ , ZH est égal au carré de EH , la droite AZ sera à EH comme EH est à HZ (17. 6). Mais AZ est à EH comme AI est à EK , et EH est à ZH comme EK est à ZK (1. 6), le parallélogramme EK est donc moyen proportionnel entre AI et ZK . Et puisque MN est moyen proportionnel entre les carrés AM , $NΞ$, que le parallélogramme AI est égal à AM , et ZK égal à $NΞ$, le parallélogramme EK sera égal à MN . Mais $ΔΘ$ est égal à EK (57. 1), et MN égal à $ΛΞ$ (45. 1); le parallélogramme entier $ΔK$ est donc égal au gnomon $ΥΦX$, conjointement avec $NΞ$. Et puisque le parallélogramme entier AK est égal à la somme des carrés AM , $NΞ$, et que $ΔK$ est égal au gnomon $ΥΦX$, conjointement avec le carré $NΞ$, le parallélogramme restant AB sera égal à $ΣΤ$, c'est-à-dire au carré de

mensurabilis est AZ ipsi ZH longitudine, incommensurable igitur et AI ipsi ZK . Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum AM , ipsi verò ZK æquale auferatur $NΞ$, eundem habens angulum $ΛOM$ eam ipso AM ; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata AM , $NΞ$. Sit ipsorum diameter OP , et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub AZ , ZH æquale est quadrato ex EH , proportionale igitur est ut AZ ad EH ita EH ad HZ . Sed ut quidem AZ ad EH ita est AI ad EK , ut verò EH ad ZH ita est EK ad ZK ; ipsorum igitur AI , ZK medium proportionale est EK . Est autem et quadratorum AM , $NΞ$ medium proportionale MN , et est æquale quidem AI ipsi AM , et ZK ipsi $NΞ$; et EK igitur æquale est ipsi MN . Sed ipsi quidem EK æquale est $ΔΘ$, et MN æquale est ipsi $ΛΞ$; totum igitur $ΔK$ æquale est gnomoni $ΥΦX$ et ipsi $NΞ$. Quoniam igitur totum AK æquale est quadratis AM , $NΞ$, quorum $ΔK$ æquale est gnomoni $ΥΦX$ et quadrato $NΞ$; reliquum igitur AB æquale est ipsi $ΣΤ$,

τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Lambda\text{N}$ τετραγώνῳ· ἢ $\Delta\Lambda\text{N}$ ἄρα δύναται τὸ AB χωρίον. Λέγω δὴ¹⁰ ὅτι ἡ $\Delta\Lambda\text{N}$ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητὸν ἐστὶ τὸ ΔK , καὶ ἴστω ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΔO , ON τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΔO , ON ῥητὸν ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔK μέσον ἐστὶ, καὶ ἴστω ἴσον τὸ ΔK τῷ δις ὑπὸ τῶν ΔO , ON · τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν

hoc est ex $\Delta\Lambda\text{N}$ quadrato; ergo $\Delta\Lambda\text{N}$ potest spatium AB . Dico et $\Delta\Lambda\text{N}$ irrationalem esse quæ appellatur minor. Quoniam enim rationale est ΔK , et est æquale quadratis ex ΔO , ON ; compositum igitur ex quadratis ipsarum ΔO , ON rationale est. Rursus, quoniam ΔK medium est, et est æquale ΔK rectangulo bis sub ΔO , ON ; rectan-



ΔO , ON μέσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ AI τῷ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔO τετραγώνου τῷ ἀπὸ τῆς ON τετραγώνῳ¹¹. αἱ ΔO , ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπὸ αὐτῶν μέσον· ἢ $\Delta\Lambda\text{N}$ ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἢ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tangulum igitur bis sub ΔO , ON medium est. Et quoniam incommensurable demonstratum est AI ipsi ZK , incommensurable igitur et ex ΔO quadratum quadrato ex ON ; ipsæ ΔO , ON igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; ergo $\Delta\Lambda\text{N}$ irrationalis est, quæ appellatur minor, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens minor est. Quod oportebat ostendere.

$\Delta\Lambda\text{N}$; la droite $\Delta\Lambda\text{N}$ peut donc la surface AB . Or, je dis que $\Delta\Lambda\text{N}$ est l'irrationnelle qu'on nomme mineure. Car, puisque le parallélogramme ΔK est rationel, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites ΔO , ON , la somme des quarrés des droites ΔO , ON sera rationelle. De plus, puisque ΔK est médial, et qu'il est égal au double rectangle compris sous ΔO , ON , le double rectangle sous ΔO , ON sera médial. Et puisque on a démontré que AI est incommensurable avec ZK , le quarré de ΔO sera incommensurable avec le quarré de ON ; les droites ΔO , ON sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant rationelle la somme de leurs quarrés, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite $\Delta\Lambda\text{N}$ est donc l'irrationnelle qu'on appelle mineure (77. 10); mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 45.

Εάν χωρίον περιεχῆται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τεμπτῆς, ἢ τὸ χωρίον διαμήνῃ μεταῦτοῦ μέσον τὸ ἔλον ποιῶσά ἐστι.

Χωρίον γάρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς τεμπτῆς τῆς AD λέγω ἔστι ἢ τὸ AB χωρίον δυναμῆν ἢ μεταῦτοῦ μέσον τὸ ἔλον ποιῶσά ἐστιν.

Ἐστω γάρ τῃ AD προσαρμύζουσα ἡ A αἰθρα AH , HA ῥηταί εἰσι διαμέρι μόνε συμμετρῆ, καὶ ἡ προσαρμύζουσα ἡ $ΔH$ ἀσμετρῆς ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AG ἢ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμύζουσας τῆς $ΔH$ μᾶλλον δύσται τῷ ἀπο ἀσμετρῆν ἑαυτῆς ἢ ἔλα τὸ τετάρτο μέρος τῆς $ΔH$ ἢ τὸ τετάρτον τῆς AH παραβληθῆ ἰσχύεται εἶδει τετραγώνου, εἰς ἀσμετρῆς αὐτῆν διαιρεῖ. Τετραγωνοῦσθαι ἡ $ΔH$ διχα κατὰ τὸ E σημείον, καὶ τῷ σὲ τῆς EH ἴσον παραβληθῆσθαι εἰσεται

PROPOSITIO XCVI.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AG et apotome quintâ AD ; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum rationali medium totum facit.

Sit enim ipsi AD congruens $ΔH$; ipsæ igitur AH , HA rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et congruens $ΔH$ commensurabilis est longitudine expositæ rationali AG , et tota AH quam congruens $ΔH$ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex $ΔH$ æquale ad ipsam AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur $ΔH$ bifariam in puncto E , et quadrato ex EH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ qua-

PROPOSITION XCVI.

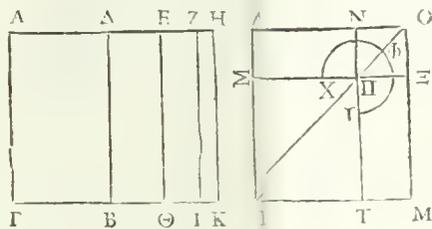
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est elle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un cinquième apotome AD ; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car, que la droite $ΔH$ conviène avec AD ; les droites AH , HA seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la congruente $ΔH$ sera incommensurable en longueur avec la rationnelle exosée AG , et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente $ΔH$ du carré d'une droite incommensurable avec la droite entière AH (dét. pois. 5. 10); si donc nous appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de $ΔH$, soit défailant d'une figure carrée, le parallélogramme divisera la droite AH en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite $ΔH$ en deux parties égales en E , et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal au carré de EH , soit

είδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H τῇ AG παράλληλαι εἰ EΘ, ZI, HK'. Καὶ ἐπιὰ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AH τῇ AG μήκει, καὶ εἶσιν ἀμφοτέραι ρηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK. Πάλιν, ἐπεὶ ρητὴ ἐστὶν ἡ ΔH, καὶ σύμμετρος τῇ AG μήκει, ρητόν ἐστι

catâ, et sit rectangulum sub AZ, ZH; incommensurabilis igitur est AZ ipsi ZH longitudine. Deducantur per E, Z, H ipsi AG paralleleæ EΘ, ZI, HK. Et quoniam incommensurabilis est AH ipsi AG longitudine, et sunt ambæ rationales; medium igitur est AK. Rursus, quoniam rationis est ΔH, et commensurabilis ipsi AG longi-



τὸ ΔΚ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετραγώνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφηρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ἐν τῷ ΑΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ²· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον³. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ ἢ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ἅλον ποιῶσά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον

tuine, rationale est ΔΚ. Constituatur igitur ip quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi vò ΖΚ æquale quadratum auferatur ΝΞ, eundem habens angulum ΑΟΜ cum ipso ΑΜ; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Similiter utique demonstrabimus rectam Α posse spatium ΑΒ. Dico ΑΝ esse eam quæ cum rationali medium totum facit. Quoniam

défilant d'une figure carrée, et que c soit le rectangle sous AZ, ZH; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZH. Par les points E, Z, H menons les droites EΘ, ZI, HK parallèles à AG. Puisque la droite AH est incommensurable en longueur avec AG, et que ces droites sont rationelles l'une et l'autre, le parallélogramme AK sera médial (22. 10). De plus, puisque la droite ΔH est rationelle, et qu'elle est incommensurable en longueur avec AG, la surface ΔΚ sera rationelle (20. 10). Faisons le carré ΑΜ égal ΑΙ, et retranchons de ΑΜ un carré ΝΞ égal à ΖΚ, ce carré étant autour du même angle ΑΟΜ que ΑΜ; les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diamètre soit ΟΡ, et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière que la droite ΑΝ peut la surface ΑΒ. Or, je dis que ΑΝ fait avec une surface rationelle un tout médial. Car, puisqu'on a démontré que le parallélogramme AK est médial, et

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἢ μετα τοῦ μέσον τὸ ἔλον ποιῶσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ρητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς AD . λέγω ἔτι ἢ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἢ μετα ρητοῦ μέσον τὸ ἔλον ποιῶσά ἐστιν.

Ἐστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἢ ΔH . αἱ ἄρα AH , HD ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἢ ΔH σύμμετρος ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ AG , ἢ δὲ ἔλν ἢ AH τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΔH μᾶλλον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ. ἔάν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἑλλείπων εἶδος τετραγώνου, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεί. Τετμήσθω οὖν ἢ ΔH δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβελήσθω ἑλλείπων

PROPOSITIO XCVI.

Si spatium continetur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

Spatium enim AB continetur sub rationali AG et apotome quintâ AD ; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum rationali medium totum facit.

Sit enim ipsi AD congruens ΔH , ipsæ igitur AH , HD rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et congruens ΔH commensurabilis est longitudine expositæ rationali AG , et tota AH quam congruens ΔH plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔH æquale ad ipsam AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔH bifariam in puncto E , et quadrato ex EH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ qua-

PROPOSITION XCVI.

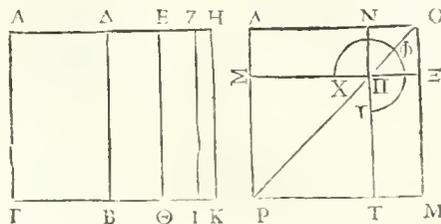
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un cinquième apotome AD ; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car, que la droite ΔH conviène avec AD ; les droites AH , HD seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la congruente ΔH sera incommensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG , et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente ΔH du carré d'une droite incommensurable avec la droite entière AH (déf. trois. 5. 10); si donc nous appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΔH , soit défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera la droite AH en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔH en deux parties égales en E , et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal au carré de EH , soit

εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H τῇ AG παράλληλοι αἱ EΘ, ZI, HK'. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἔστιν ἡ AH τῇ AG μήκει, καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῥηταὶ· μίσην ἄρα ἔστί τὸ AK. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητὴ ἔστιν ἡ ΔH, καὶ σύμμετρος τῇ AG μήκει, ῥητόν ἐστι

dratâ, et sit rectangulum sub AZ, ZH; incom-
mensurabilis igitur est AZ ipsi ZH longitudinae.
Et ducantur per E, Z, H ipsi AG parallele EΘ,
ZI, HK. Et quoniam incommensurabilis est AH
ipsi AG longitudine, et sunt ambæ rationales;
medium igitur est AK. Rursus, quoniam ratio-
nalis est ΔH, et commensurabilis ipsi AG longi-



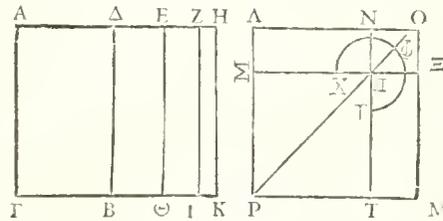
τὸ ΔΚ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετρά-
γωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετρίγωνον ἀφη-
ρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ἐν τῷ ΑΜ γωνίαν, τὴν
ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ²· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διά-
μετρὸν ἔστι τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἐστω
αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ
σχῆμα. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύσεται
τὸ ΑΒ χωρίον³. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ ἢ μετὰ ῥητοῦ
μέσον το ἕλον ποιούσα ἔστιν. Ἐπεὶ γὰρ μίσην

tudine, rationale est ΔΚ. Constituaturs igitur
ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi
verò ΖΚ æquale quadratum auferatur ΝΞ, eum-
dem habens angulum ΑΟΜ cum ipso ΑΜ; ergo
circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ,
ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur
figura. Similiter utique demonstrabimus rectam
ΑΝ posse spatium ΑΒ. Dico ΑΝ esse eam quæ
cum rationali medium totum facit. Quoniam

défaillant d'une figure carrée, et que ce soit le rectangle sous AZ, ZH; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZH. Par les points E, Z, H menons les droites EΘ, ZI, HK parallèles à AG. Puisque la droite AH est incommensurable en longueur avec AG, et que ces droites sont rationelles l'une et l'autre, le parallélogramme AK sera médial (22. 10). De plus, puisque la droite ΔH est rationelle, et qu'elle est incommensurable en longueur avec AG, la surface ΔΚ sera rationelle (20. 10). Faisons le carré AM égal à AI, et retranchons de AM un carré ΝΞ égal à ΖΚ, ce carré étant autour du même angle ΑΟΜ que ΑΜ; les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diamètre soit ΟΡ, et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière que la droite ΑΝ peut la surface ΑΒ. Or, je dis que ΑΝ fait avec une surface rationelle un tout médial. Car, puisqu'on a démontré que le parallélogramme AK est médial, et

εδείχθη τὸ ΔK , καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΔO , ON · τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΔO , ON μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔK , καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν ΔO , ON · καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΔO , ON ῥητόν ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ AI τῷ ZK , ἀσύμ-

enim medium ostensum est ΔK , et est æquale quadratis ex ΔO , ON ; compositum igitur ex quadratis ipsarum ΔO , ON medium est. Rursus, quoniam rationale est ΔK , et est æquale rectangulo bis sub ΔO , ON ; et rectangulum bis igitur sub ΔO , ON rationale est. Et quoniam incommensurable est AI ipsi ZK , incommensurable igitur est et ex ΔO quadratum quadrato ex ON ; ipsæ ΔO , ON igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium; rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua igitur AN irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum faciens, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.



μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔO τῷ ἀπὸ τῆς ON · αἱ ΔO , ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον· τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἢ λοιπὴ ἄρα ἢ AN ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον⁶ τὸ ὅλον ποιῶσα, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἢ τὸ AB ἄρα⁷ χωρίον δυναμείη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιῶσα ἐστὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

puisque ce parallélogramme est égal à la somme des quarrés des droites ΔO , ON , la somme des quarrés des droites ΔO , ON sera médiale. De plus, puisque le parallélogramme ΔK est rationel, et qu'il est égal au double rectangle sous ΔO , ON , le double rectangle sous ΔO , ON sera rationel. Mais le parallélogramme AI est incommensurable avec ZK ; le quarré de ΔO est donc incommensurable avec le quarré de ON ; les droites ΔO , ON sont donc incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites étant rationel; la droite restante AN est donc l'irrationnelle qui est dite pouvant avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

puisque ce parallélogramme est égal à la somme des quarrés des droites ΔO , ON , la somme des quarrés des droites ΔO , ON sera médiale. De plus, puisque le parallélogramme ΔK est rationel, et qu'il est égal au double rectangle sous ΔO , ON , le double rectangle sous ΔO , ON sera rationel. Mais le parallélogramme AI est incommensurable avec ZK ; le quarré de ΔO est donc incommensurable avec le quarré de ON ; les droites ΔO , ON sont donc incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites étant rationel; la droite restante AN est donc l'irrationnelle qui est dite pouvant avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

PROPOSITIO XC VII.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιῶσα ἔστι.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιέχεται ὑπὸ ρητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς τῆς AD· λέγω ὅτι ἢ τὸ AB χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιῶσα ἔστιν.

Ἐστω γὰρ τῇ AD προσαρμοζούσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδέτερά αὐτῶν¹ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ AG μήκει, ἢ δὲ ὅλη ἢ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει· εἰ ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΔΗ παραβληθῆ² ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελθῆ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ

Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AG et apotome sextâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum medio medium totum facit.

Sit enim ipsi AD congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est expositæ rationali AG longitudine, et tota ΑΗ quam congruens ΔΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quoniam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si igitur quartæ parti ex ΔΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur

PROPOSITION XC VII.

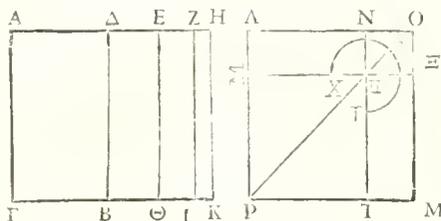
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un sixième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que ΔΗ conviène avec AD, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; aucune de ces droites ne sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΔΗ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ (déf. trois. G. 10). Puisque la puissance de ΑΗ surpassera la puissance de ΗΔ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ; si on applique à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΔΗ, soit défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔΗ en deux parties

τὸ E^3 , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἄσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. Ὡς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν ZH οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ ZK . ἄσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AI τῷ ZK . Καὶ ἐπεὶ αἱ AH, AG ῥηταὶ εἰσι διὰ μένους ἴσους ἄλλήλων, μέσον ἐστὶ τὸ AK . Πάλιν, ἐπεὶ αἱ $AG, \Delta H$ ῥηταὶ εἰσι καὶ ἄσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ

igitur ΔH bifariam in E , et quadrato ex EH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ, ZH ; incommensurabilis igitur est AZ ipsi ZH longitudine. Ut autem AZ ad ZH ita est AI ad ZK ; incommensurable igitur est AI ipsi ZK . Et quoniam AH, AG rationales sunt potentia solùm commensurabiles, medium est AK . Rursus, quoniam $AG, \Delta H$ rationales sunt et incommensu-



καὶ τὸ ΔK . Ἐπεὶ οὖν αἱ $AH, H\Delta$ δυνάμει μένους ἴσους ἄλλήλων εἰσιν, ἄσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AH τῇ $H\Delta$ μήκει. Ὡς δὲ ἡ AH πρὸς τὴν $H\Delta$ οὕτως ἐστὶ τὸ AK πρὸς τὸ $K\Delta$. ἄσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AK τῷ $K\Delta$. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τ. τετραγώνον τὸ ΛM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφ-

rabiles longitudine, medium est et ΔK . Quoniam igitur $AH, H\Delta$ potentia solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AH ipsi $H\Delta$ longitudine. Ut autem AH ad $H\Delta$ ita est AK ad $K\Delta$; incommensurable igitur est AK ipsi $K\Delta$. Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum ΛM , ipsi verò ZK æquale auferatur $N\Xi$,

égales en E , et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal au carré de AH , soit défailant d'une figure carrée; que ce soit le rectangle sous AZ, ZH ; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZH . Mais AZ est à ZH comme AI est à ZK (1. 6); le parallélogramme AI est donc incommensurable avec ZK (10. 10). Et puisque les droites AH, AG sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, le parallélogramme AK sera médial (22. 10). De plus, puisque les droites $AG, \Delta H$ sont rationnelles, et incommensurables en longueur, le parallélogramme ΔK sera médial. Puisque les droites $AH, H\Delta$ sont commensurables en puissance seulement, la droite AH sera incommensurable en longueur avec $H\Delta$. Mais AH est à $H\Delta$ comme AK est à $K\Delta$ (1. 6); le parallélogramme AK est donc incommensurable avec $K\Delta$ (10. 10). Faisons le carré ΛM égal à AI (14. 2), et retranchons de ΛM un carré $N\Xi$ égal à ZK , ce carré

μήσθω περί τήν αὐτήν ἄν τῷ AM γωνίαν τὸ NE ⁵.
περὶ τήν αὐτήν ἄρα διάμετρον ἔστι τὰ AM , NE
τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διαμέτρως ἡ OP , καὶ
καταγεράφθω τὸ σχῆμα. Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπαύω
δείξομεν ὅτι ἡ AN δύναται τὸ AB χωρίον. Λέγω
ὅτι ἡ AN ἢ μετὰ μέσον μέσον τὸ ἕλον ποιούσά
ἔστιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AK , καὶ ἔστιν
ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν AO , ON . τὸ ἄρα συγκεί-
μενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AO , ON μέσον ἔστί.
Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ $ΔK$, καὶ ἔστιν
ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν AO , ON . καὶ τὸ δις
ἄρα⁸ ὑπὸ τῶν AO , ON μέσον ἔστί. Καὶ ἐπεὶ
ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AK τῷ $ΔK$, ἀσύμμετρα
ἄρα ἔστί καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AO , ON τετράγωνα
τῷ δις ὑπὸ τῶν AO , ON . Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμε-
τρόν ἔστι τὸ AI τῷ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ
τὸ ἀπὸ τῆς AO τῷ ἀπὸ τῆς ON . αἱ AO , ON
ἄρα δυναίμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ, τε
συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ αὐτῶν τετραγῶνων μέσον,
καὶ τὸ δις ὑπὸ αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπὸ
αὐτῶν τετραγῶνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ αὐτῶν.

eumdem angulum habens cum ipso AM ; ergo
circa eandem diametrum sunt quadrata AM ,
 NE . Sit ipsorum diameter OP , et describatur
figura. Congruenter utique præcedentibus osten-
demus rectam AN posse spatium AB . Dico AN esse
eam quæ cum medio medium totum facit. Quo-
niam enim medium ostensum est AK , atque est
æquale quadratis ex AO , ON ; compositum igitur
ex quadratis ipsarum AO , ON medium est.
Rursus, quoniam medium ostensum est $ΔK$, et
est æquale rectangulo bis sub AO , ON ; et rec-
tangulum bis igitur sub AO , ON medium est.
Et quoniam incommensurable est AK
ipsi $ΔK$, incommensurabilia igitur sunt et ex
 AO , ON quadrata rectangulo bis sub AO , ON .
Et quoniam incommensurable est AI ipsi ZK ,
incommensurable igitur et ex AO quadratum
quadrato ex ON ; ipsæ AO , ON igitur potentia
sunt incommensurabiles, facientes et compo-
situm ex ipsarum quadratis medium, et rectan-
gulum bis sub ipsis medium, et adhuc ipsarum
quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub

étant autour du même angle que AM ; les carrés AM , NE seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit OP , et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que la droite AN peut la surface AB . Je dis que la droite AN est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Car, puisque nous avons démontré que le parallélogramme AK est médial, et qu'il est égal à la somme des carrés des droites AO , ON , la somme des carrés des droites AO , ON sera médiale. De plus, puisqu'on a démontré que le parallélogramme $ΔK$ est médial, et puisqu'il est égal au double rectangle sous AO , ON , le double rectangle sous AO , ON sera médial. Et puisqu'on a démontré que AK est incommensurable avec $ΔK$, la somme des carrés des droites AO , ON sera incommensurable avec le double rectangle sous AO , ON . Et puisque AI est incommensurable avec ZK , le carré de AO sera incommensurable avec le carré de ON ; les droites AO , ON sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant médial, et la somme des carrés de ces droites étant incommensurable avec le

ἢ ἄρα ΛN ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μετὰ μέσου μέσος τὸ ὅλον ποιούσα, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἢ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσος τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δείξαι.

ipsis; ergo ΛN irrationalis est, quæ vocatur cum medio medium totum faciens, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens est quæ cum medio medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἐστω ἀποτομὴ ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ , πλάτος ποιῶν τὴν ΓΖ . λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

Ἐστω γὰρ τῇ AB προσορμίζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB ῥηταὶ εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH τὸ ΚΑ . ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ

PROPOSITIO XCVIII.

Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

Sit apotome AB , rationalis autem ΓΔ , et quadrato ex AB æquale ad ipsam ΓΔ applicetur ΓΕ , latitudinem faciens ΓΖ ; dico ΓΖ apotomen esse primam.

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ , quadrato autem ex BH ipsum ΚΑ , totum igitur ΓΑ æquale est qua-

double rectangle sous ces mêmes droites; la droite AN est donc l'irracionnelle appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial (79. 10); mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCVIII.

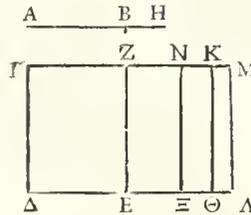
Le carré d'un apotome appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un premier apotome.

Soit l'apotome AB , et la rationnelle ΓΔ ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΓΖ pour largeur; je dis que ΓΖ est un premier apotome.

Car que BH conviène avec AB , les droites AH , HB seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ égal au carré de AH , et un parallélogramme ΚΑ égal au carré de BH (45. 1); le parallélogramme entier ΓΑ sera égal à la somme des carrés

τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ὡν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δῖς ὑπὸ τῶν¹ ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχῃ κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκείτηρον ἄρα τῶν ΖΞ, ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ

dratis ex ΑΗ, ΗΒ. Quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΔ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΑΝ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam quadrata ex ΑΗ, ΗΒ rationalia sunt, atque est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale ΔΜ; rationale igitur



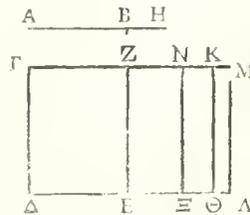
ΔΜ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραλέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δῖς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ² τῷ δῖς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΑΖ· μέσον ἄρα τὸ ΑΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν³ ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν

est ΔΜ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ, et est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΑΖ; medium igitur ΑΖ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata quidem ex ΑΗ,

des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais ΓΕ est égal au carré de ΑΒ; le parallélogramme restant ΖΔ est donc égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΑΝ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sont rationnels, et que ΔΜ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΔΜ sera rationnel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, et que le parallélogramme ΑΖ est égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΑΖ sera médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΖΜ, la droite ΖΜ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque

ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, τὰ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον⁵, ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ⁶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυναμίαι μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀπο-

HB rationalia sunt, rectangulum verò bis sub AH, HB medium, incommensurabilia igitur quadrata ex AH, HB rectangulo bis sub AH, HB. Et quadratis quidem ex AH, HB æquale est ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB ipsum ΖΛ; incommensurable igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensura-



τομή ἐστι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ⁸· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν

biles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et primam. Quoniam enim quadratorum ex AH, HB medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ; quadrato verò ex BH æquale ΚΛ, quadrato autem ex AH, HB ipsum ΝΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est

les carrés des droites AH, HB sont rationels, et que le double rectangle sous AH, HB est médial, la somme des carrés des droites AH, HB sera incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB. Mais ΓΛ est égal à la somme des carrés des droites AH, HB, et ΖΛ égal au double rectangle sous AH, HB; le parallélogramme ΓΛ est donc incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un premier apotome. Car, puisque le rectangle sous AH, HB est moyen proportionnel entre les carrés des droites AH, HB (55. 10), que ΓΘ est égal au carré de AH, que ΚΛ est égal au carré de BH, et que ΝΛ est égal au carré de AH, HB, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre les parallélogrammes ΓΘ, ΚΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ

ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἐστὶν ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ οὕτως ἐστὶν ἢ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἢ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ¹⁰. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τούτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι¹¹ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΑ οὕτως ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΚ τῇ ΚΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον πορὰ τὴν ΓΜ παραβέληται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ¹² ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἐστὶ σύμμετρος ἢ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἢ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς μήκει. Καὶ ἐστὶν ἢ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥιπῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἢ ἄρα ΓΖ ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur ut $\Gamma\Theta$ ad NA ita NA ad KA . Sed ut quidem $\Gamma\Theta$ ad NA ita est $ΓΚ$ ad NM ; ut verò NA ad KA ita est NM ad KM ; ut igitur $ΓΚ$ ad NM ita est NM ad KM ; rectangulum igitur sub $ΓΚ$, KM æquale est quadrato ex MN , hoc est quartæ parti quadrati ex ZM . Et quoniam commensurable est ex AH quadratum quadrato ex HB , commensurable est et $\Gamma\Theta$ ipsi KA . Ut autem $\Gamma\Theta$ ad KA ita $ΓΚ$ ad KM ; commensurabilis igitur est $ΓΚ$ ipsi KM . Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt $ΓΜ$, MZ , et quartæ parti quadrati ex ZM æquale ad $ΓΜ$ applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub $ΓΚ$, KM , et est commensurabilis $ΓΚ$ ipsi KM ; ergo $ΓΜ$ quam MZ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est $ΓΜ$ commensurabilis expositæ rationali $ΓΔ$ longitudine; ergo $ΓΖ$ apotome est prima.

Quadratum igitur, etc.

comme NA est à KA . Mais $\Gamma\Theta$ est à NA comme $ΓΚ$ est à NM , et NA est à KA comme NM est à KM ; la droite $ΓΚ$ est donc à NM comme NM est à KM ; le rectangle sous $ΓΚ$, KM est donc égal au carré de MN , c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ZM (17. 6). Et puisque le carré de AH est commensurable avec le carré de HB , le parallélogramme $\Gamma\Theta$ sera commensurable avec KA . Mais $\Gamma\Theta$ est à KA comme $ΓΚ$ est à KM ; la droite $ΓΚ$ est donc commensurable avec KM (10. 10). Et puisque les deux droites $ΓΜ$, MZ sont inégales, qu'on a appliqué à $ΓΜ$ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ZM , est défailant d'une figure carrée, que ce parallélogramme est celui qui est compris sous $ΓΚ$, KM , et que $ΓΚ$ est commensurable avec KM , la puissance de $ΓΜ$ surpassera la puissance de MZ du carré d'une droite commensurable en longueur avec $ΓΜ$ (18. 10). Mais $ΓΜ$ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée $ΓΔ$; la droite $ΓΖ$ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Le carré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ιθ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρά ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Ἐστω μέσης ἀποτομῆς πρώτης ἡ AB , ρητὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρά τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ ΓE , πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ . λέγω ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομὴ ἐστὶ δευτέρα.

Ἐστω γάρ τῇ AB προσαρμοζούσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB μέσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, ρητὸν περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρά τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ $\Gamma\Theta$, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓK , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $K\Lambda$, πλάτος ποιοῦν τὴν KM . ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB μέσοις οὔσι. μέσον ἄρα καὶ τὸ $\Gamma\Lambda$. Καὶ παρά ρητὴν τὴν $\Gamma\Delta$ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM . ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM , καὶ ἀσύμμετρος τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τῷ

PROPOSITIO XCIX.

Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit mediæ apotome prima AB , rationalis autem $\Gamma\Delta$, et quadrato ex AB æquale ad $\Gamma\Delta$ applicetur ΓE , latitudinem faciens ΓZ ; dico ΓZ apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes. Et quadrato quidem ex AH æquale ad $\Gamma\Delta$ applicetur $\Gamma\Theta$, latitudinem faciens ΓK , quadrato verò ex HB æquale $K\Lambda$, latitudinem faciens KM ; totum igitur $\Gamma\Lambda$ æquale est quadratis ex AH , HB quæ mediæ sunt; medium igitur et $\Gamma\Lambda$. Et ad rationalem $\Gamma\Delta$ applicatur, latitudinem faciens ΓM ; rationalis igitur est ΓM , et incommensurabilis ipsi $\Gamma\Delta$ longitudine. Et quoniam $\Gamma\Lambda$ æquale est quadratis ex AH , HB , quorum quadratum ex AB

PROPOSITION XCIX.

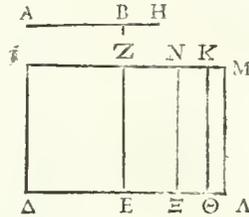
Le carré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un second apotome.

Soient un premier apotome d'une médiale AB , et la rationelle $\Gamma\Delta$; appliquons à $\Gamma\Delta$ un parallélogramme ΓE , qui étant égal au carré de AB , ait pour largeur la droite ΓZ ; je dis que ΓZ est un second apotome.

Car que BH conviène avec AB , les droites AH , HB seront des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprendront une surface rationelle (75. 10). Appliquons à $\Gamma\Delta$ un parallélogramme $\Gamma\Theta$, qui étant égal au carré de AH , ait la droite ΓK pour largeur; appliquons aussi à $\Gamma\Delta$ un parallélogramme $K\Lambda$, qui étant égal au carré de HB , ait KM pour largeur (45. 1); le parallélogramme entier $\Gamma\Lambda$ sera égal à la somme des carrés des droites AH , HB , ces carrés étant médiaux; le parallélogramme $\Gamma\Lambda$ sera donc médial. Mais il est appliqué à $\Gamma\Delta$, et il a ΓM pour largeur; la droite ΓM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec $\Gamma\Delta$ (25. 10). Et puisque $\Gamma\Lambda$ est égal à la somme des carrés des droites AH , HB , et que

ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΑ. Ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ῤητὸν ἄρα² τὸ ΖΑ, καὶ παρὰ ῤητὴν τὴν ΖΕ παράκειται, πλάτος ποιῶν τὴν ΖΜ· ῤητὴ ἄρα ἐστὶ³ καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΑ, μέσον ἐστὶ· τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ,

æquale est ipsi ΓΕ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ipsi ΖΑ. Rationale autem est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ; rationale igitur ΖΑ, et ad rationalem ΖΕ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quoniam igitur quadrata quidem ex ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΓΑ, medium est; rectangulum verò bis



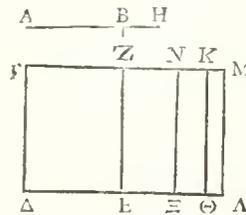
τουτέστι τὸ ΖΑ, ῤητὸν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφοτέραι ῤηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῤηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον

sub ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΖΑ, rationale; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et secundam. Secetur enim ΖΜ bifariam in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ

le carré de AB est égal à ΓΕ, le double rectangle restant compris sous ΑΗ, ΗΒ sera égal à ΖΑ (7. 2). Mais le double rectangle compris sous ΑΗ, ΗΒ est rationel; le parallélogramme ΖΑ est donc rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΖΕ, et il a pour largeur ΖΜ; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire le parallélogramme ΓΑ, est médiale, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire ΖΑ, est rationel; le parallélogramme ΓΑ sera incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Or, je dis que cette droite est un second apotome. Car coupous ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menous ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ,

ἔστι τῶ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῶ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῶ ΝΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῶ ΚΑ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΑ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΑ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἔστιν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ οὕτως ἔστιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἔστιν ἡ ΝΜ πρὸς

æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est æquale quadratum quidem ex ΑΗ ipsi ΓΘ, rectangulum verò sub ΑΗ, ΗΒ ipsi ΝΑ, quadratum autem ex ΗΒ ipsi ΚΑ; et ipsorum ΓΘ, ΚΑ igitur medium proportionale est ΝΑ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΑ ita ΝΑ ad ΚΑ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΑ ita est ΓΚ ad ΝΜ, ut verò ΝΑ ad ΚΑ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum



τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τοῦτέστι τῶ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῶ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῶ ΚΑ, τοῦτέστιν ἡ ΓΚ τῆ ΚΜ^β. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθείαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῶν τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον

igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam commensurable est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, commensurable est et ΓΘ ipsi ΚΑ, hoc est ΓΚ ipsi ΚΜ. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti

ΝΑ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, que le carré de ΑΗ est égal à ΓΘ, que le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est égal à ΝΑ, et que le carré de ΒΗ est égal à ΚΑ, le parallélogramme ΝΑ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΑ; la droite ΓΘ est donc à ΝΑ comme ΝΑ est à ΚΑ. Mais le parallélogramme ΓΘ est à ΝΑ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΑ est à ΚΑ comme ΝΜ est à ΚΜ (1. 6.); la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au carré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ΖΜ (17. 6). Et puisque le carré de ΑΗ est commensurable avec le carré de ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΑ, c'est-à-dire ΓΚ avec ΚΜ. Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, et que l'on a appliqué à la plus grande ΓΜ un parallélogramme compris sous ΓΚ, ΚΜ, qui étant égal à la quatrième partie du carré

παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει τῆς ἐκκειμένης ῥητῆς τῆς ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ.

Τὸ ἀπὸ μείσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Ἐστω μείση ἀποτομή δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιῶν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Ἐστω γάρ τῆς ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέτρον περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΘ

quadrati ex MZ æquale ad maiorem GM applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub $ΓΚ$, $ΚΜ$, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo $ΓΜ$ quam $ΜΖ$ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est congruens ZM commensurabilis longitudine expositæ rationali $ΓΔ$; ergo $ΓΖ$ apotome est secunda.

Quadratum igitur, etc.

PROPOSITIO C.

Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit media apotome secunda $ΑΒ$, rationalis autem $ΓΔ$, et quadrato ex $ΑΒ$ æquale ad $ΓΔ$ applicetur $ΓΕ$, latitudinem faciens $ΓΖ$; dico $ΓΖ$ apotomen esse tertiam.

Sit enim ipsi $ΑΒ$ congruens $ΒΗ$; ipsæ igitur $ΑΗ$, $ΗΒ$ mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, medium continentes. Et quadrato quidem ex $ΑΗ$ æquale ad $ΓΔ$ applicetur $ΓΘ$

de MZ , est défailant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise GM en parties commensurables, la puissance de GM surpassera la puissance de MZ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec GM (18. 10). Mais la congruente ZM est commensurable en longueur avec la rationelle exposée $ΓΔ$; la droite $ΓΖ$ est donc un second apotome (déf. trois. 2. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION C.

Le quarré d'un second apotome médial appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

Soient un second apotome médial $ΑΒ$, et une rationelle $ΓΔ$; appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΕ$, qui étant égal au quarré de $ΑΒ$, ait pour largeur la droite $ΓΖ$; je dis que $ΓΖ$ est un troisième apotome.

Que $ΒΗ$ conviène avec $ΑΒ$; les droites $ΑΗ$, $ΗΒ$ seront des médiales, qui étant incommensurables en puissance seulement, comprendront une surface médiale (76. 10). Appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΘ$, qui étant égal au quarré

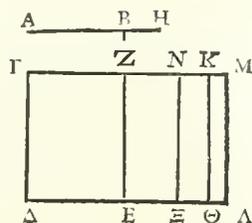
πλάτος ποιούν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρά τὴν ΚΘ παραβελίθω τὸ ΚΑ πλάτος ποιούν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐστὶ μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΑ, καὶ παρά ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβελίθεται πλάτος ποιούν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμησῶ εὖν ἡ ΖΜ διχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΝΞ· ἐκείτηρον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΑ, καὶ παρά ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιούν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μένον εἰςὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα

latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex ΒΗ æquale ad ΚΘ applicetur ΚΑ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΑ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ. Et sunt media quadrata ex ΑΗ, ΗΒ; medium igitur et ΓΑ, et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΑ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΑ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur igitur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ipsi ΓΔ parallela ducatur ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Medium autem rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ; medium igitur est et ΖΑ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentia solum sunt commensurabiles, incommensurabilis igitur est longi-

de ΑΗ, ait pour largeur la droite ΓΚ; appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΑ, qui étant égal au carré de ΒΗ, ait pour largeur la droite ΚΜ (45. 1); le parallélogramme entier ΓΑ sera égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ est médiale; le parallélogramme ΓΑ est donc médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (25. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et que le parallélogramme ΓΕ est égal au carré de ΑΒ, le parallélogramme restant ΖΑ sera égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΑ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial; le parallélogramme ΖΑ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (25. 10). Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΗ sera incommensurable en

ἐστὶ μήκει ἢ AH τῇ HB . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB . Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB σύμμετρον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB . ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB . Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AH, HB ἴσον ἐστὶ τὸ $\Gamma\Lambda$, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον ἐστὶ τὸ $Z\Lambda$. ἀσύμμετρον ἄρα

itudine ipsa AH ipsi HB ; incommensurable igitur est et ex AH quadratum rectangulo sub AH, HB . Sed quadrato quidem ex AH commensurabilia sunt quadrata ex AH, HB , rectangulo verò sub AH, HB commensurable est rectangulum bis sub AH, HB ; incommensurabilia igitur sunt ex AH, HB quadrata rectangulo bis sub AH, HB . Sed quadratis quidem ex AH, HB æquale est $\Gamma\Lambda$, rectangulo verò bis sub AH, HB æquale



ἐστὶ τὸ $\Gamma\Lambda$ τῷ $Z\Lambda$. Ὡς δὲ τὸ $\Gamma\Lambda$ πρὸς τὸ $Z\Lambda$ οὕτως ἐστὶν ἢ ΓM πρὸς τὴν ZM . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΓM τῇ ZM μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα $\Gamma M, ZM$ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἢ ΓZ . Λέγω δὲ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γὰρ σύμ-

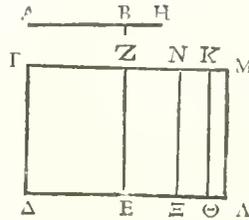
est $Z\Lambda$; incommensurable igitur est $\Gamma\Lambda$ ipsi $Z\Lambda$. Ut autem $\Gamma\Lambda$ ad $Z\Lambda$ ita est ΓM ad ZM ; incommensurabilis igitur est ΓM ipsi ZM longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur $\Gamma M, ZM$ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓZ . Dico et tertiam. Quoniam enim commensurable est ex

longueur avec HB ; le carré de AH est donc incommensurable avec le rectangle sous AH, HB (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés de AH et de HB est commensurable avec le carré de AH , et le double rectangle sous AH, HB commensurable avec le rectangle sous AH, HB ; la somme des carrés de AH et de HB est donc incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB . Mais le parallélogramme $\Gamma\Lambda$ est égal à la somme des carrés des droites AH, HB , et le parallélogramme $Z\Lambda$ égal au double rectangle sous AH, HB ; le parallélogramme $\Gamma\Lambda$ est donc incommensurable avec $Z\Lambda$. Mais $\Gamma\Lambda$ est à $Z\Lambda$ comme ΓM est à ZM ; la droite ΓM est donc incommensurable en longueur avec la droite ZM (10. 10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites $\Gamma M, ZM$ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓZ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un troisième apotome. Car puisque

370 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρήν ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα καὶ³ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσων ἀνάλογόν ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσων ἀνάλογόν ἔστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ.

AH quadratum quadrato ex HB, commensurable igitur et ΓΘ ipsi ΚΛ; quare et ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΝΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad



Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἔστιν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἔστιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἔστιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ

ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ, ut verò ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati

le carré de AH est commensurable avec le carré de HB, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΛ; la droite ΓΚ est donc aussi commensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (55. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au carré de ΗΒ, et que ΝΛ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au carré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ΖΜ (17. 10). Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui

ἀπὸ τῆς ZM ἴσον παρὰ τὴν ΓM παραβέλιται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ΓM ἄρα τῆς MZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΓM, MZ σύμμετρός ἐστι μήκει⁵ τῆ ἑκκειμένη ρητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓZ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρά.

Τὸ ἀπὸ ἐλάττονος παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Ἐστω ἐλάττωσιν ἡ AB, ρητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ ρητὴν τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκεείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ

ex ZM æquale ad ΓM applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo ΓM quam MZ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΓM, MZ commensurabilis est longitudine expositâ rationali ΓΔ; ergo ΓZ apotome est tertia.

Quadratum igitur, etc.

PROPOSITIO CI.

Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor AB, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex AB æquale ad rationalem ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quartam.

Sit enim ipsi AB congruens ΒΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΗ,

étant égal à la quatrième partie du carré de ZM, est défailant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise ΓM en parties commensurables, la puissance de ΓM surpassera la puissance de MZ du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΓM (18. 10); aucune des droites ΓM, MZ n'est donc commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓZ est donc un troisième apotome (déf. trois. 5. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION CI.

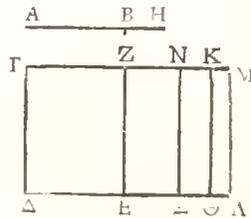
Le quarré d'une mineure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

Soient une mineure AB, et une rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de AB, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un quatrième apotome.

Car que ΒΗ conviène avec AB; les droites ΑΗ, ΗΒ seront incommensurables en puissance; la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera rationnelle, et le

τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δῖς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. Καὶ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιούν τὴν ΓΚ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον² τὸ ΚΑ πλάτος ποιούν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἔστι τὸ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παρ-

HB quadratis rationale, rectangulum verò bis sub AH, HB medium. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ, latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex BH æquale ΚΑ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΑ æquale est quadratis ex AH, HB. Atque est compositum ex quadratis ipsarum AH, HB rationale; rationale igitur est et ΓΑ, et ad ra-



κείται πλάτος ποιούν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῶ δῖς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν καὶ³ ἡ ΖΜ δίχῃ κατὰ τὸ Ν σημείον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὀποτέρῃ τῶν ΓΔ, ΜΑ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν

tionalium ΓΑ applicatur latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur et ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΑ æquale est quadratis ex AH, HB, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex AB; reliquum igitur ΖΑ æquale est rectangulo bis sub AH, HB. Secetur igitur et ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ducatur per Ν alterutri ipsarum ΓΔ, ΜΑ paral-

double rectangle sous AH, HB sera médial (77. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au carré de AH, ait ΓΚ pour largeur, et appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΑ, qui étant égal au carré de BH, ait ΚΜ pour largeur (45. 1), le parallélogramme entier ΓΑ sera égal à la somme des carrés des droites AH, HB. Mais la somme des carrés des droites AH, HB est rationnelle; le parallélogramme ΓΑ est donc rationnel; mais il est appliqué à la rationnelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites AH, HB, et que ΓΕ est égal au carré de AB; le parallélogramme restant ΖΑ sera égal au double rectangle sous AH, HB (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle aux droites ΓΔ, ΜΑ; chacun des parallélo-

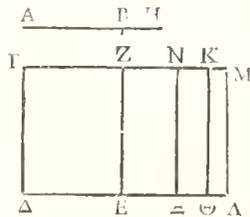
ΖΞ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΖΑ· καὶ τὸ ΖΑ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρόν ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ἴσον δὲ ἐστὶ⁵ τὸ ΓΑ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ⁶ τὸ ΖΑ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ⁷ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Καὶ ἔστι τῷ

lela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ medium est, et est æquale ipsi ΖΑ; et ΖΑ igitur medium est, et ad rationalem ΖΕ applicatur latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΗ, ΗΒ rationale est, rectangulum verò bis sub ΑΗ, ΗΒ medium, incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΗ, ΗΒ rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Æquale autem est ΓΑ quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, rectangulo verò bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΖΑ; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΖΜ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et quartam. Quoniam enim ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles; incommensurable igitur et ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Atque est quadrato quidem

grammes ΖΞ, ΝΑ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial et égal à ΖΑ, le parallélogramme ΖΑ sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΖΕ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (25. 10). Et puisque la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ est rationelle, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le parallélogramme ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et ΖΑ égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; le parallélogramme ΓΑ est donc incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΖΜ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un quatrième apotome. Car, puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le carré de ΑΗ sera incommensurable avec le

μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσων ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσων ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ

ex AH æquale ΓΘ, quadrato verò ex HB æquale ΚΛ; incommensurable igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est æquale quadrato quidem ex ΑΗ ipsum ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ ipsum ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ ipsum ΝΛ; ipsorum igitur ΓΘ, ΚΛ medium proportionale est ΝΛ;



πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ΑΛΛ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. Ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἢ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἢ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τριτῆσσι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς

est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ. Ut autem ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ.

quarré de ΗΒ. Mais ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, et ΚΛ égal au quarré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre le quarré de ΑΗ et le quarré de ΗΒ (55. lemm. 10), que le parallélogramme ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, le parallélogramme ΚΛ égal au quarré de ΗΒ, et le parallélogramme ΝΛ égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; la droite ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ (17. 6). Et

ZM. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβεβληταὶ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη. Τὸ ἄρα ἀπόθ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΜΖ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, rectan-gulum sub ΓΚ, ΚΜ, et in partes incommen-surabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est tota ΓΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quarta. Quadratum igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιούν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

PROPOSITIO CII.

Quadratum ex rectâ quæ cum rationali me-dium totum facit ad rationalem applicatum lati-tudinem facit apotomen quintam.

Sit recta ΑΒ quæ cum rationali medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem fa-ciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quintam.

puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un paral-lélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΜΖ, est défailant d'une figure quarrée, que ce rectangle est celui qui est compris sous ΓΚ, ΚΜ, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΜ (19. 10). Mais la droite entière ΓΜ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION CII.

Le quarré d'une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface rationelle un tout médial, et soit la ra-tionelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que ΓΖ est un cinquième apotome.

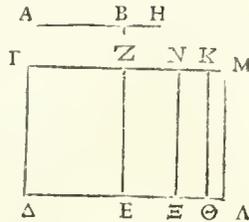
Ἐστω γάρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB εὐθείαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συζυγόμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρά τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ $\Gamma\Theta$. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ ΚΑ . ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB . Τὸ δὲ συζυγόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB ἅμα μέσον ἐστὶ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Gamma\Lambda$. Καὶ παρά ῥητὴν τὴν $\Gamma\Delta$ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν $\Gamma\text{Μ}$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\text{Μ}$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ $\Gamma\Delta$. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὡν τὸ $\Gamma\text{Ε}$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB . λοιπὸν ἄρα τὸ $Z\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . Τιτμήσθω οὖν ἡ $Z\text{Μ}$ δίχα κατὰ τὸ Ν , καὶ ἤχθω διὰ τὸ Ν ὅποτέρᾳ τῶν $\Gamma\Delta$, $\text{Μ}\Lambda$ παράλληλος ἡ $\text{Ν}\Xi$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $Z\Xi$, $\text{Ν}\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . Καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB ῥητόν ἐστὶ, καὶ ἴστιν² ἴσον τῷ

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale. Et quadrato quidem ex AH æquale ad $\Gamma\Delta$ applicetur $\Gamma\Theta$; quadrato verò ex HB æquale ΚΑ ; totum igitur $\Gamma\Lambda$ æquale est quadratis ex AH , HB . Compositum autem ex quadratis ipsarum AH , HB simul medium est; medium igitur est $\Gamma\Lambda$. Et ad rationalem $\Gamma\Delta$ applicatur latitudinem faciens $\Gamma\text{Μ}$; rationalis igitur est $\Gamma\text{Μ}$, et incommensurabilis ipsi $\Gamma\Delta$. Et quoniam totum $\Gamma\Lambda$ æquale est quadratis ex AH , HB , quorum $\Gamma\text{Ε}$ æquale est quadrato ex AB ; reliquum igitur $Z\Lambda$ æquale est rectangulo bis sub AH , HB . Secetur igitur $Z\text{Μ}$ bifariam in Ν , et ducatur per Ν alterutri ipsarum $\Gamma\Delta$, $\text{Μ}\Lambda$ parallela $\text{Ν}\Xi$; utrumque igitur ipsorum $Z\Xi$, $\text{Ν}\Lambda$ æquale est rectangulo sub AH , HB . Et quoniam rectangulum bis sub AH , HB rationale est, et est æquale ipsi $Z\Lambda$;

Car que BH conviène avec AB ; les droites AH , HB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Appliquons à $\Gamma\Delta$ un parallélogramme $\Gamma\Theta$, qui soit égal au quarré de AH ; appliquons aussi à cette droite un parallélogramme ΚΑ , qui soit égal au quarré de HB (45. 1), le parallélogramme entier $\Gamma\Lambda$ sera égal à la somme des quarrés des droites AH , HB . Mais la somme des quarrés des droites AH , HB est médiale; le parallélogramme $\Gamma\Lambda$ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle $\Gamma\Delta$, et il a $\Gamma\text{Μ}$ pour largeur; la droite $\Gamma\text{Μ}$ est donc rationelle et incommensurable avec $\Gamma\Delta$ (25. 10). Et puisque le parallélogramme entier $\Gamma\Lambda$ est égal à la somme des quarrés des droites AH , HB , et que $\Gamma\text{Ε}$ est égal au quarré de AB , le parallélogramme restant $Z\Lambda$ sera égal au double rectangle sous AH , HB (7. 2). Coupons la droite $Z\text{Μ}$ en deux parties égales en Ν , et par le point Ν menons la droite $\text{Ν}\Xi$ parallèle à l'une ou à l'autre des droites $\Gamma\Delta$, $\text{Μ}\Lambda$; chacun des parallélogrammes $Z\Xi$, $\text{Ν}\Lambda$ sera égal au rectangle sous AH , HB . Et puisque le double rectangle sous AH , HB est rationel, et qu'il est égal à $Z\Lambda$,

ΖΛ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΑ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν³ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-

rationale igitur est ΖΛ. Et ad rationalem ΕΖ applicatur latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quidem ΓΑ medium est, ipsum verò ΖΛ rationale; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur



μετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ομοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ

est ΓΖ. Dico et quintam. Similiter enim demonstrabimus rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam incommensurable est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, æquale autem quadratum ex ΑΗ ipsi ΓΘ, quadratum verò ex ΗΒ ipsi ΚΛ; incommensurable igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita ΓΚ ad ΚΜ;

le parallélogramme ΖΑ sera rationnel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque ΓΑ est médial, et ΖΑ rationnel, le parallélogramme ΓΑ sera incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un cinquième apotome. Nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est égal au carré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ΖΜ. Puisque le carré de ΑΗ est incommensurable avec le carré de ΗΒ, que le carré de ΑΗ est égal à ΓΘ, et que le carré de ΗΒ est égal à ΚΛ, le parallélogramme ΓΘ sera incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ

ΚΑ οὕτως ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἢ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσὶν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἢ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐνυτῇ. Καὶ ἔστιν ἢ πρὸς αὐτὴν ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκεκμημένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἢ ἄρα ΓΖ ἀποτομὴ ἐστὶ πέμπτη. Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Ἐστω ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἢ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἢ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἢ ΓΖ ἀποτομὴ ἐστὶν ἕκτη.

est à ΚΑ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΖΜ, est défilant d'une figure carrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ (19. 10). Mais la congruente ΖΜ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10). Le carré, etc.

PROPOSITION CIII.

Le carré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface médiale un tout médial; soit la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un sixième apotome.

incommensurabilis igitur ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Quoniam igitur due rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est congruens ΖΜ commensurabilis expositâ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quinta.

Quadratum igitur, etc.

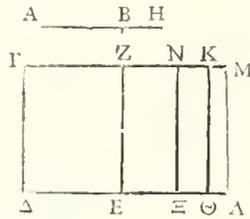
PROPOSITIO CIII.

Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit recta ΑΒ quæ cum medio medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse sextam.

Εστω γάρ τῆ AB προσαρμόζουσα ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τό, τε συζκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν² AH, HB τῶ δις ὑπὸ τῶν AH, HB. Παραβεβλήσθω οὖν παρά τὴν ΓΔ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιῶν τὴν ΓΚ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς

Sit enim ipsi AB congruus BH; ipsæ igitur AH, HB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum bis sub AH, HB medium, adhuc autem incommensurabilia ex AH, HB quadrata rectangulo bis sub AH, HB. Applicetur igitur ad ΓΔ quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ latitudinem faciens ΓΚ, quadrato



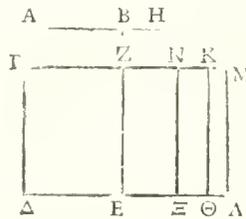
BH τὸ ΚΑ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB· μέσον ἄρα ἐστὶ³ καὶ τὸ ΓΑ. Καὶ παρά ρητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΓΜ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς AB· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν AH, HB. Καὶ ἔστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον· καὶ τὸ ΖΑ ἄρα

verò ex BH ipsum ΚΑ; totum igitur ΓΑ æquale est quadratis ex AH, HB; medium igitur est et ΓΑ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΑ longitudine. Quoniam igitur ΓΑ æquale est quadratis ex AH, HB, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex AB; reliquum igitur ΖΑ æquale est rectangulo bis sub AH, HB. Atque est rectangulum bis sub AH, HB medium;

Car que BH conviène avec AB; les droites AH, HB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces mêmes droites étant incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB (79. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au quarré de AH, ait ΓΚ pour largeur; appliquons à ΚΘ un parallélogramme ΚΑ égal au quarré de BH; le parallélogramme entier ΓΑ sera égal à la somme des quarrés des droites AH, HB; le parallélogramme ΓΑ sera donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a ΓΜ pour largeur; la droite ΓΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (25. 10). Et puisque ΓΑ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et que ΓΕ est égal au quarré de AB, le parallélogramme restant ΖΑ sera égal au double rectangle sous AH, HB (7. 2). Mais le double rectangle sous AH, HB est médial; le parallélogramme

μέσον ἐστὶ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρα ἐστὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῶν μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΑ, τῶν δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΑ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῶν ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ

et ZA igitur medium est. Et ad rationalem ZE applicatur latitudinem faciens ZM; rationalis igitur est ZM, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata ex ΑΗ, ΗΒ incommensurabilia sunt rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadratis quidem ex ΑΗ, ΗΒ æquale ΓΑ, rectangulo verò bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΖΑ; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΜΖ;



τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἔκτι. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκατέρων ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῶν

incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΓΜ, ΜΖ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et sextam. Quoniam enim ΖΑ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ, secetur bifariam ΖΜ in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ æquale est rectangulo

ZA est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ZE, et il a ZM pour largeur; la droite ZM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ. Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, que ΓΑ est égal à la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et que ΖΑ est égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΓΑ sera incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un sixième apotome. Car puisque ΖΑ est égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, coupons ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ, chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΑ sera

ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ⁸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁹ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν¹⁰ ἢ ΙΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν¹¹ ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀλόγονόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ¹² τὸ ΝΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΛ¹³. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἢ ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. Καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥιτῇ τῇ ΓΔ· ἢ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἕκτη. Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles, incommensurable igitur est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΗ æquale est ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale est ΚΛ; incommensurable igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΝΑ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΑ ita ΝΑ ad ΚΛ. Et eâdem ratione ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et neutra ipsarum commensurabilis est expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est sexta.

Quadratum igitur, etc.

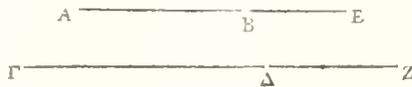
égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le carré de ΑΗ sera incommensurable avec le carré de ΗΒ. Mais ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, et ΚΛ égal au carré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΙΚ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΙΚ est donc incommensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (5. lem. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au carré de ΗΒ, et que ΝΑ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΑ comme ΝΑ est à ΚΛ. Par la même raison, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ; aucune des droites ΓΜ, ΜΖ n'est donc commensurable avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Le carré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρδ'.

Ἡ τῆ ἀποτομῆ μήκει σύμμετρος ἀποτομὴ ἐστὶ καὶ τῆ τάξει ἡ αὐτή.

Ἐστω ἀποτομὴ ἡ AB , καὶ τῆ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ἀποτομὴ ἐστὶ καὶ τῆ τάξει ἡ αὐτὴ τῆ AB .

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ AB , ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ BE . αἱ AE , EB ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῶ τῆς AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ λόγῳ ὁ αὐτὸς γηγιέτω ὁ τῆς



BE πρὸς τὴν ΔZ . καὶ ὡς ἐν ἄρα ἐστὶ² πρὸς ἐν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ AE πρὸς ὅλην τὴν ΓZ οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. Σύμμετρος δὲ ἡ AB τῆ $\Gamma\Delta$ μήκει. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE μὲν³ τῆ ΓZ , ἡ δὲ BE τῆ ΔZ . καὶ αἱ AE , EB ῥηταὶ εἰσι δυ-

PROPOSITIO CIV.

Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est et ordine eadem.

Sit apotome AB , et ipsi AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$; dico et $\Gamma\Delta$ apotomen esse atque ordine eandem quæ AB .

Quoniam enim apotome est AB , sit ij si congruens BE ; ipsæ AE , EB igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Et quæ est ipsius AB ad $\Gamma\Delta$ ratio eadem fiat ipsius BE ad ΔZ ;

et ut una igitur est ad unam, omnes sunt ad omnes; est igitur et ut tota AE ad totam ΓZ ita AB ad $\Gamma\Delta$. Commensurabilis autem AB ipsi $\Gamma\Delta$ longitudine; commensurabilis igitur et AE quidem ipsi ΓZ , ipsa verò BE ipsi ΔZ . Et AE , EB rationales sunt potentiâ solum commensurabiles;

PROPOSITION CIV.

Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

Soit l'apotome AB , et que $\Gamma\Delta$ soit commensurable en longueur avec AB ; je dis que $\Gamma\Delta$ est un apotome, et que cet apotome est du même ordre que AB .

Car puisque AB est un apotome, que BE lui conviène; les droites AE , EB seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Faisons en sorte que la raison de BE à ΔZ soit la même que celle de AB à $\Gamma\Delta$. Un antécédent est donc à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12.5); la droite entière AE est donc à la droite entière ΓZ comme AB est à $\Gamma\Delta$. Mais AB est commensurable en longueur avec $\Gamma\Delta$; la droite AE est donc commensurable avec ΓZ , et la droite BE avec ΔZ (10. 10). Mais les droites AE , EB sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; les

νάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῆ τάξει ἢ αὐτῇ τῆ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἦτοι δὲ ἢ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ

et ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΔ. Dico et ordine eandem quæ ΑΒ. Quoniam enim est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΒΕ ad ΖΔ; permutando igitur est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ. Vel autem ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΓΖ. Si autem ΕΒ, et ΔΖ. Si autem neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, et neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ. Si autem ΑΕ quam ΕΒ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ rationali longitudine,

droites ΓΖ, ΖΔ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement (10. 10); la droite ΓΔ est donc un apotome (74. 10). Je dis que cet apotome est du même ordre que ΑΒ. Car puisque ΑΕ est à ΓΖ comme ΒΕ est à ΖΔ, par permutation ΑΕ sera à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite commensurable, ou incommensurable avec ΑΕ. Si donc la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du carré d'une droite commensurable avec ΓΖ. Si ΑΕ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle. Si ΕΒ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΔΖ le sera aussi; et si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable en longueur avec elle; et si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΖ. Si la droite ΑΕ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle; si ΕΒ est commensurable avec la rationnelle exposée,

δε ἢ BE, καὶ ἢ ZΔ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΔ καὶ τῆ τάξει ἢ αὐτῇ τῆ ΑΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρέ.

Ἡ τῆ μέσης ἀποτομῆ σύμμετρος μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ καὶ τῆ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω μέσης ἀποτομῆ ἢ ΑΒ, καὶ τῆ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἢ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἢ ΓΔ μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ καὶ τῆ τάξει ἢ αὐτῇ τῆ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομῆ ἐστὶν ἢ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμύζουσα ἢ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγρανέτω ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, σύμμετρος ἄρα καὶ ἢ ΑΕ τῆ ΓΖ, ἢ δὲ ΒΕ τῆ ΔΖ· αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα

et ipsa ΓΖ. Si autem BE, et ZΔ. Si autem neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ; apotome igitur est ΓΔ et ordine eadem quæ ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO CV.

Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome ΑΒ, et ipsi ΑΒ longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ mediæ apotomen esse et ordine eandem quæ ΑΒ.

Quoniam enim mediæ apotome est ΑΒ, sit ipsi congruens ΒΕ; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Et fiat ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΒΕ ad ΔΖ, commensurabilis igitur et ΑΕ ipsi ΓΖ, ipsa verò ΒΕ ipsi ΔΖ; ipsæ autem ΑΕ, ΕΒ mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles; et ΓΖ, ΖΔ igitur mediæ sunt

ZΔ le sera aussi; et si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle; la droite ΓΔ est donc une apotome, et cet apotome est du même ordre que ΑΒ (déf. trois. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CV.

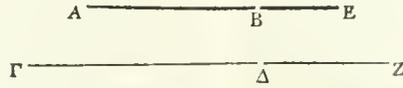
Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

Que ΑΒ soit un apotome d'une médiale, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est un apotome d'une médiale, et que cet apotome est du même ordre que ΑΒ.

Car, puisque ΑΒ est un apotome d'une médiale, que ΒΕ conviène avec la droite ΑΒ, les droites ΑΕ, ΕΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement (76. 10). Faisons en sorte que ΑΒ soit à ΓΔ comme ΒΕ est à ΔΖ; la droite ΑΕ sera commensurable avec ΓΖ, et la droite ΒΕ commensurable avec ΔΖ; mais les droites ΑΕ, ΕΒ sont des médiales commensurables en puissance seulement; les

μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι². μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ³ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς

potentiâ solùm commensurabiles; mediæ igitur apotome est ΓΔ. Dico et ordine esse eandem quæ ΑΒ. Quoniam enim est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; est igitur et ut ex ΑΕ quadratum



τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ⁵. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητὸν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἐσταὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· εἴτε μέσον ἐστὶ⁸ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον ἐστὶ⁹ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ad rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ. Commensurable autem ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΓΖ; commensurable igitur est et sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Et si igitur rationale est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, rationale crit et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; et si mediūm est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, mediūm est et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; mediæ igitur apotome est ΓΔ atque ordine eadem quæ ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

droites ΓΖ, ΖΗ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement ; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale. Je dis que cette droite est un apotome du même ordre que ΑΒ. Car, puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, le quarré de ΑΕ sera au rectangle sous ΑΕ, ΕΒ comme le quarré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (1. 6); mais le quarré de ΑΕ est commensurable avec le quarré de ΓΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Si donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est rationel, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera rationel; et si le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera médial; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρς'.

PROPOSITIO CVI.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

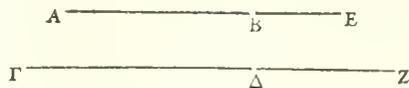
Ἐστω γάρ¹ ἐλάσσων ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ $ΓΔ$. λέγω ὅτι καὶ ἡ $ΓΔ$ ἐλάσσων ἐστίν.

Γιγνέτω γάρ τὰ αὐτὰ τῷ προτέρῳ². Καὶ ἑπεὶ αἱ AE , EB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ $ΓΖ$, $ZΔ$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ $ΓΖ$ πρὸς τὴν $ZΔ$. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit enim minor AB , et ipsi AB commensurabilis $ΓΔ$; dico et $ΓΔ$ minorem esse.

Fiant enim eadem quæ suprâ. Et quoniam AE , EB potentiâ sunt incommensurabiles, et $ΓΖ$, $ZΔ$ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Quoniam igitur est ut AE ad EB ita $ΓΖ$ ad $ZΔ$; est igitur et ut ex AE quadratum ad ip-



πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΖ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ZΔ$. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν³ AE , EB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν $ΓΖ$, $ZΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ZΔ$. Σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BE τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΖ$. σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων τῷ συγκεῖμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΓΖ$, $ZΔ$ τετραγώνων. Ρητὸν

sum ex EB ita ex $ΓΖ$ quadratum ad ipsum ex $ZΔ$; componendo igitur est ut ex AE , EB quadrata ad ipsum ex EB ita ex $ΓΖ$, $ZΔ$ quadrata ad ipsum ex $ZΔ$. Commensurable autem est ex BE quadratum quadrato ex $ΔΖ$; commensurable igitur et compositum ex ipsarum AE , EB quadratis composito ex ipsarum $ΓΖ$, $ZΔ$ quadratis. Rationale autem est compositum ex

PROPOSITION CVI.

Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

Soit AB une mineure, et que $ΓΔ$ soit commensurable avec AB ; je dis que $ΓΔ$ est une mineure.

Car faisons les mêmes choses qu'auparavant. Puisque les droites AE , EB sont incommensurables en puissance, les droites $ΓΖ$, $ZΔ$ seront incommensurables en puissance. Et puisque AE est à EB comme $ΓΖ$ est à $ZΔ$, le carré de AE sera au carré de EB comme le carré de $ΓΖ$ est au carré de $ZΔ$ (22.6); donc, par addition, la somme des carrés des droites AE , EB est au carré de EB comme la somme des carrés des droites $ΓΖ$, $ZΔ$ est au carré de $ZΔ$ (18.5). Mais le carré de BE est commensurable avec le carré de $ZΔ$; la somme des carrés des droites AE , EB est donc commensurable avec la somme des carrés des droites $ΓΖ$, $ZΔ$ (10. 10). Mais la somme des carrés des droites AE , EB est rationnelle; la somme

δέ ἐστὶ τὸ συζυγούμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν^δ AE, EB τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συζυγούμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ^ε· σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ^ζ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB· μέσον ἄρα ἐστὶ^δ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συζυγούμενον ἐκ τῶν ἀπὸ αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπὸ αὐτῶν μέσον· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

A Λ Λ Ω Σ'.

Ἐστω ἐλάττων ἡ A, καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω^ε ἡ B· λέγω ὅτι ἡ B ἐλάττων ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητή^β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτεις ποιῶν τὴν ΓΖ· ἀποτιμὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη^ι

ipsarum AE, EB quadratis; rationale igitur est et compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis. Rursus, quoniam est ut ex AE quadratum ad rectangulum sub AE, EB ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; commensurable autem ex AE quadratum quadrato ex ΓΖ, commensurable igitur est et sub AE, EB rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Medium autem rectangulum sub AE, EB; medium igitur est et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; minor igitur est ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

A L I T E R.

Sit minor A, et ipsi A commensurabilis sit B; dico B minorem esse.

Exponatur enim ΓΔ rationalis, et quadrato ex A æquale ad ipsam ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; apotome igitur est quarta ΓΖ.

des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc aussi rationnelle. De plus, puisque le quarré de AE est au rectangle sous AE, EB comme le quarré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ, et que le quarré de AE est commensurable avec le quarré de ΓΖ; le rectangle sous AE, EB sera commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le rectangle sous AE, EB est médial; le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (24. 10); la droite ΓΔ est donc une mineure (77. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

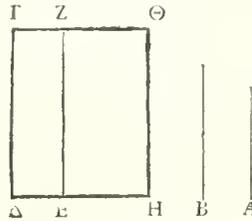
A U T R E M E N T.

Soit A une mineure, et que B soit commensurable avec A; je dis que la droite B est une mineure.

Soit exposée la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de A, ait ΓΖ pour largeur; la droite ΓΖ sera un quatrième

η ΓΖ. τῷ⁵ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβελήσθω τὸ ΖΗ πλάτος πειοῦν τὴν ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν⁶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ⁷ τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ⁸ τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα

Quadrato autem ex B æquale ad ZE applicetur ZH latitudinem faciens ZΘ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B; commensurable igitur est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale est GE, quadrato verò ex B æquale est ZH; commensurable igitur est GE



ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. Ὡς δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως ἐστὶ⁹ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν¹⁰ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Ἀποτομὴ δὲ ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ τετάρτη· τὸ ΖΗ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς¹¹ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης. Ἐὰν δὲ χαρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης¹²· ἡ τὸ χαρίον ἄρα δυναμένη ἐλάσσων ἐστὶ. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάττων ἄρα¹³ ἐστὶ ἡ Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

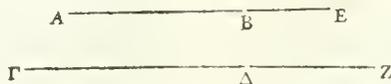
ipsi ZH. Ut autem GE ad ZH ita est GZ ad ZΘ; commensurabilis igitur est GZ ipsi ZΘ longitudine. Apotome autem est quarta GZ; apotome igitur est et ZΘ quarta; spatium ZH igitur continetur sub rationali et apotome quartâ. Si autem spatium continueatur sub rationali et apotome quartâ; recta spatium igitur potens minor est. Potest autem ipsum ZH ipsa B; minor igitur est B. Quod oportebat ostendere.

apotome (101. 10). Appliquons à ZE un parallélogramme ZH, qui étant égal au carré de B, ait ZΘ pour largeur. Puisque A est commensurable avec B, le carré de A sera commensurable avec le carré de B. Mais GE est égal au carré de A, et ZH égal au carré de B; le parallélogramme GE est donc commensurable avec ZH. Mais GE est à ZH comme GZ est à ZΘ (1. 6); la droite GZ est donc commensurable en longueur avec ZΘ (10. 10); mais la droite ΓΖ est un quatrième apotome; la droite ZΘ est donc un quatrième apotome (104. 10); la surface ZH est donc comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome. Mais si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure (95. 10). Mais la droite B peut la surface ZH; la droite B est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ.

Ἡ τῆ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούση σύμμετρος καὶ αὐτὴ¹ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστίν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ AB , καὶ τῆ AB σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω ὅτι καὶ² ἡ $\Gamma\Delta$ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστίν.



Ἐστω γάρ τῆ AB προσαρμόζουσα ἡ BE . αἱ AE , EB ὅρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. Ὁμοίως δὲ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ³ ΓZ , $Z\Delta$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς AE , EB , καὶ σύμμετρον ἐστὶ τὸ¹ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE , EB τῷ

PROPOSITIO CVII.

Recta ei quæ cum rationali medium totum facit commensurabilis et ipsa cum rationali medium totum faciens est.

Sit cum rationali medium totum faciens AB , et ipsi AB commensurabilis $\Gamma\Delta$; dico et $\Gamma\Delta$ cum rationali medium totum facere.

Sit enim ipsi AB congruens BE ; ipsæ AE , EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum AE , EB quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale. Et eadem construantur. Congruenter præcedentibus utique ostendemus, rectas ΓZ , $Z\Delta$ in eadem ratione esse cum ipsis AE , EB , et commensurable esse compositum ex ipsarum AE , EB quadratis composito ex ipsarum ΓZ , $Z\Delta$ quadratis, rectangulum

PROPOSITION CVII.

La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationelle un tout médial.

Que la droite AB fasse avec une surface rationelle un tout médial, et que $\Gamma\Delta$ soit commensurable avec AB ; je dis que $\Gamma\Delta$ fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car que BE conviène avec AB , les droites AE , EB seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Faisons la même construction. Nous démontrerons comme auparavant que les droites ΓZ , $Z\Delta$ sont en même raison que les droites AE , EB ; que la somme des quarrés des droites AE , EB est commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓZ , $Z\Delta$, et que le

ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἄσπε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συζείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ἅλον ποιῶσα ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

verò sub AE, EB rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ; quare et ΓΖ, ΖΔ potentià sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; recta ΓΔ igitur est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

Α Λ Λ Ω Σ'.

A L I T E R.

Ἐστω² μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ἅλον ποιῶσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ἅλον ποιῶσα ἐστίν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ πλάτους ποιῶν τὴν ΓΖ· ἀποτεμὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτῃ ἡ ΙΖ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβελήσθω τὸ ΖΗ πλάτους ποιῶν τὴν ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστίν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ

Sit cum rationali medium totum faciens A, et B commensurabilis ipsi; dico B cum rationali medium totum facere.

Exponatur rationalis ΓΔ, et quadrato quidem ex A æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; apotome igitur est quinta ΓΖ. Quadrato autem ex B æquale ad ipsam ΖΕ applicetur ΖΗ latitudinem faciens ΖΘ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B, commensurable est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale ΓΕ; quadrato

rectangle sous AE, EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant médiale la somme de leurs carrés, et rationel le rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite ΓΔ fait donc avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

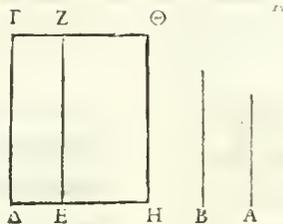
A U T R E M E N T.

Que A fasse avec une rationelle un tout médial, et que B soit commensurable avec A; je dis que B fait avec une surface rationelle un tout médial.

Soit exposée la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de A, ait ΙΖ pour largeur; la droite ΓΖ sera un cinquième apotome (102. 10). Appliquons à ΖΕ un parallélogramme ΖΗ, qui étant égal au carré de B, ait ΖΘ pour largeur. Puisque A est commensurable avec B, le carré de A sera commensurable avec le carré de B. Mais ΓΕ est égal au carré de A,

ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Ἀποτομή δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΕ.

autem ex B æquale ZH; commensurabile igitur est GE ipsi ZH; commensurabilis igitur et GZ ipsi ZΘ longitudine. Apotome autem quinta GZ; apotome igitur est quinta et ZΘ, rationalis verò ZE.



Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ἅλον ποιούσα ἐστὶ. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἢ Β· ἡ Β ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ἅλον ποιούσα ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quintà, recta spatium potens cum rationali medium totum facit. Potest autem ipsum ZH ipsa B; ipsa igitur B cum rationali medium totum faciens est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρή.

PROPOSITIO CVIII.

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ἅλον ποιούση σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ἅλον ποιούσα ἐστίν.

Recta ei quæ cum medio medium totum facit commensurabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

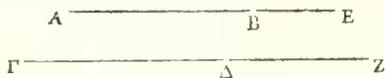
et ZH au carré de B; le parallélogramme GE est donc commensurable avec ZH; la droite GZ est donc commensurable en longueur avec ZΘ. Mais GZ est un cinquième apotome; la droite ZΘ est donc un cinquième apotome (104. 10). Mais la droite ZE est rationnelle: or, si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface fait avec une surface rationnelle un tout médial (96. 10). Mais la droite B peut la surface ZH; la droite B fait donc avec une surface rationnelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CVIII.

Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

Ἐστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ἕλον ποιούσα ἡ AB , καὶ τῇ AB ἕστω¹ σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω ὅτι καὶ² ἡ $\Gamma\Delta$ μετὰ μέσου μέσον τὸ ἕλον ποιούσα ἴστιν.

Sit cum medio medium totum faciens ipsa AB , et ipsi AB sit commensurabilis $\Gamma\Delta$; dico et $\Gamma\Delta$ cum medio medium totum facere.



Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE , καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω· αἱ AE , EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῶ ὑπ' αὐτῶν. Καὶ εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ AE , EB σύμμετροι ταῖς ΓZ , $Z\Delta$, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων τῶ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE , EB τῶ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ · καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τό, τε³ συγκείμενοι ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'

Sit enim ipsi AB congruens BE , et eadem construantur; ipsæ AE , EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsarum quadratis rectangulo sub ipsis. Et sunt, ut ostensum est, AE , EB commensurabiles ipsis ΓZ , $Z\Delta$, et compositum ex ipsarum AE , EB quadratis composito ex quadratis ipsarum ΓZ , $Z\Delta$, rectangulum autem sub AE , EB rectangulo sub ΓZ , $Z\Delta$; et ipsæ ΓZ , $Z\Delta$ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsa-

Que la droite AB fasse avec une surface médiale un tout médial, et que $\Gamma\Delta$ soit commensurable avec AB ; je dis que la droite $\Gamma\Delta$ fait aussi avec une surface médiale un tout médial.

Que BE conviène avec AB , et faisons la même construction; les droites AE , EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des carrés de ces droites étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces mêmes droites (79. 10). Et puisque les droites AE , EB sont commensurables avec les droites ΓZ , $Z\Delta$, ainsi qu'on l'a démontré; que la somme des carrés des droites AE , EB est aussi commensurable avec la somme des carrés des droites ΓZ , $Z\Delta$, et que le rectangle sous AE , EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$, les droites ΓZ , $Z\Delta$ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des carrés de ces droites étant aussi incommensurable avec

αὐτῶν τετραγώνων τῶ ὑπ' αὐτῶν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ἔλον παιοῦσά ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

rum quadratis rectangulo sub ipsis; ipsa igitur ΓΔ cum medio medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρθ'.

PROPOSITIO CIX.

Ἀπὸ ρητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεταί, ἥτοι ἀποτομή, ἢ ἐλάττων.

Medio a rationali detracto, recta reliquum spatium potens una duarum irrationalium fit, vel apotome, vel minor.

Ἀπὸ γὰρ ρητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφηρήσθω τὸ ΕΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον¹ δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεταί, ἥτοι ἀποτομή, ἢ ἐλάττων.

A rationali enim ΒΓ medium auferatur ΒΔ; dico rectam, quæ reliquum spatium ΕΓ potest, unam duarum irrationalium fieri, vel apotomen, vel minorem.

Ἐκείσθω γὰρ ρητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβελήσθω ἑρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΒΔ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. Ἐπεὶ οὖν ρητὸν μὲν ἐστὶ τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν² ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ· ρητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et ipsi quidem ΒΓ æquale ad ΖΗ applicetur rectangulum parallelogrammum ΗΘ, ipsi verò ΒΔ æquale auferatur ΗΚ; reliquum igitur ΕΓ æquale est ipsi ΛΘ. Quoniam igitur rationale quidem est ΒΓ; medium verò ΒΔ, æquale ΒΓ quidem ipsi ΗΘ, ipsum verò ΒΔ ipsi ΗΚ; rationale quidem igitur est ΗΘ,

le rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite ΓΔ fera avec une surface médiale un tout médial (79. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CIX.

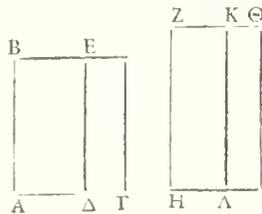
Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationnelle, la droite qui peut la surface restante est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

Qu'une surface médiale ΒΔ soit retranchée d'une surface rationnelle ΒΓ; je dis que la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

Car soit exposée une rationnelle ΖΗ; appliquons à ΖΗ un parallélogramme rectangle ΗΘ qui soit égal à ΒΓ, et retranchons ΗΚ égal à ΒΔ; le reste ΕΓ sera égal à ΛΘ. Puisque ΕΓ est rationel, que ΒΔ est médial, que ΒΓ est égal à ΗΘ, et que ΒΔ est égal à ΗΚ, le parallélogramme ΗΘ sera rationel, et le parallélogramme ΗΚ mé-

δὲ τὸ ΗΚ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα μὲν³ ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. Ἡτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Διιάσθω πρότερον τῷ

medium verò ΗΚ; et ad rationalem ΖΗ applicatur; rationalis igitur quidem ΖΘ et commensurabilis ipsi ΖΗ longitudine, rationalis verò ΖΚ et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine; incommensurabilis igitur est ΖΘ ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΖΘ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΚΘ, ipsi autem congruens ΚΖ. Vel autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili.



ἀπὸ ἀσύμμετρου. Καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιέχεται⁵ ἡ διαμέτρη ἀποτομὴ ἐστὶν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, ταυτέστι τὸ ΓΕ, δυνάμει ἀποτομῆς ἐστὶν. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ

Possit primum quadrato ex rectâ incommensurabili. Atque est tota ΘΖ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur prima est ΚΘ. Sp̄ t̄im autem sub rationali et apotome primâ contentum recta potens apotome est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΓΕ, apotome est. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus

dial. Mais ces parallélogrammes sont appliqués à la rationelle ΖΗ; la droite ΖΘ est donc rationelle et commensurable en longueur avec ΖΗ (21. 10), et la droite ΖΚ rationelle et incommensurable en longueur avec ΖΗ (25. 10); la droite ΖΘ est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (15. 10); les droites ΖΘ, ΖΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΚΘ est donc un apotome, et ΚΖ est la droite qui convient à ΚΘ (74. 10): or, la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du carré d'une droite ou commensurable ou incommensurable avec ΘΖ. Qu'elle la surpasse d'abord du carré d'une droite incommensurable. Mais la droite entière ΘΖ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ; la droite ΚΘ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un premier apotome est elle-même un apotome (92. 10); la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΓΕ, est donc un apotome. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du carré

μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἢ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα τῆς τετάρτης ἔστιν ἢ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιέχομενον ἢ δυναμένη ἐλάσσων ἔστιν· ἢ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἔστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et est tota ΖΘ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur quarta est ΚΘ. Spatium autem sub rationali et apotome quartâ contentum recta potens minor est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, minor est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρί.

PROPOSITIO CX.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται, ἧτοι μίσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel eum rationali medium totum faciens.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφηρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἧτοι μίσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

A medio enim ΒΓ rationale auferatur ΒΔ; dico rectam, quæ reliquum ΕΓ potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam eum rationali medium totum facientem.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἢ ΖΗ, καὶ παραβελήσθω ὁμοίως τὰ χωρία· ἔστι δὲ ἀκαλούθως ῥητὴ

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et applicentur similiter spatia; est igitur consequenter rationalis

d'une droite incommensurable avec ΟΖ, la droite ΚΘ sera un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10), parce que la droite entière ΟΖ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ. Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un quatrième apotome est une mineure (95. 10); la droite qui peut la surface ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CX.

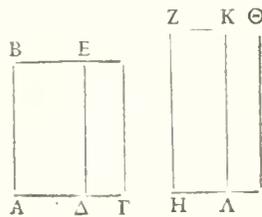
Une surface rationelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Retranchons la surface rationelle ΒΔ de la surface médiale ΒΓ; je dis que la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationelles suivantes; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car soit exposée une rationelle ΖΗ; appliquons semblablement des surfaces à ΖΗ;

μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΖΚ. Ἦτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἐστὶν

quidem ΖΘ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine. Rationalis autem ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΚΘ, et ipsi congruens ΖΚ. Vel autem ΟΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΟΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi



ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ δευτέρα² ἢ ΚΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὅστε ἡ τὸ ΛΘ, ταυτίσσι τὸ ΕΓ, δυναμένη, μέσης ἀποτομῆς πρώτης ἐστίν³. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζονί δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς¹, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ

commensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur est secunda ΚΘ Rationalis autem ΖΗ; quare ipsa potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome prima est. Si autem ΟΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine;

la droite ΖΘ sera conséquemment une rationelle, et cette droite sera incommensurable en longueur avec ΖΗ (21. 10); mais la droite ΖΚ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΖΗ (25. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΚΘ est donc un apotome, et ΖΚ convient avec cette droite (74. 10). Or, la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΘΖ. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un second apotome (déf. trois. 2. 10). Mais ΖΗ est une rationelle; la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc un premier apotome d'une médiâle (95. 10). Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée

ΖΗ· ἀποτομή ἄρα^β πέμπτη ἐστὶν ἢ ΚΘ· ὥστε ἢ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

apotome igitur quinta est ΚΘ; quare recta potens spatium ΕΓ eum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριά.

PROPOSITIO CXI.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέτρου τῷ ἔλω, αἱ λοιπαὶ δύο ἀλογοὶ γίνονται, ἥτοι μίσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel eum medio medium totum faciens.

Ἀφηρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τῷ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ἔλω· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἥτοι μίσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ τῷ¹ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Auferatur enim ut in propositis figuris a medio ΒΓ medium ΒΔ, incommensurabile toti; dico rectam, quæ potest spatium ΕΓ, unam esse duarum irrationalium, vel mediæ apotomen secundam, vel eum medio medium totum facientem.

Ἐπὶ γὰρ μέσον ᾽στὶν ἐκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρόν ᾽στι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ², τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστὶ³ καὶ ἢ ΘΖ

Quoniam enim medium est utrumque ipsorum ΒΓ, ΒΔ, et incommensurabile est ΒΓ ipsi ΒΔ, hoc est ΗΘ ipsi ΗΚ, incommensurabilis

ΖΗ, la droite ΚΘ sera un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10) ; la droite qui peut la surface ΕΓ fait donc avec une surface rationnelle un tout médial (96. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CXI.

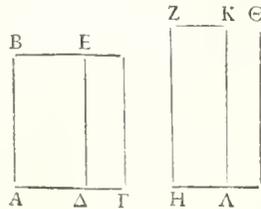
Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationnelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Retranchons, comme dans les figures précédentes, de la surface médiale ΒΓ la surface médiale ΒΔ, incommensurable avec la surface entière; je dis que la droite qui peut ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car puisque chacun des parallélogrammes ΒΓ, ΒΔ est médial, et que ΒΓ est incommensurable avec ΒΔ, c'est-à-dire ΗΘ avec ΗΚ, la droite ΘΖ sera incom-

τῆ ΖΚ· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Εἰ μὲν δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ ΖΗ μήκει⁵. ἀποτομή ἐστὶν ἄρα τρίτη⁶ ἡ ΚΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΚΑ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης

est et ΘΖ ipsi ΖΚ; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΘΚ. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome est igitur tertia ΚΘ. Rationalis autem ΚΑ, rectangulum verò sub ratio-



περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἀλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἀλογός ἐστι, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομῆ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τούτῃστι τὸ ΕΓ δυναμένη μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα⁷. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ μήκει, καὶ οὐδετέρα⁸ τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῆ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστὶν ἄρα ἕκτη ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ

nali et apotome tertiâ contentum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, vocatur autem mediæ apotome secunda; quare recta potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome est secunda. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine; apotome est igitur sexta ΚΘ. Rectangulum autem sub rationali et apotome

mesurable avec ΖΚ (1. 6 et 10. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc de rationnelles commensurables en puissance seulement (25. 10); la droite ΘΚ est donc un apotome (74. 10). Si donc la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du carré d'une droite commensurable avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un troisième apotome (déf. 5. 10). Puisque ΚΑ est une rationnelle, que le rectangle compris sous une rationnelle et un troisième apotome est irrationnel (94. 10), que la droite qui peut cette surface est irrationnelle, et que cette droite est appelée second apotome d'une médiale, la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, sera un second apotome d'une médiale. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec ΖΗ, la droite ΚΘ sera un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Mais la droite qui peut un rectangle

ἀποτομῆς ἑκτῆς ἢ δυναμένη ἐστὶν ἢ¹⁰ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα· ἢ τὸ $\Lambda\Theta$ ἄρα¹¹, τουτέστι τὸ $\text{E}\Gamma$, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριϛ'.

Ἡ ἀποτομή οὐκ ἐστὶν ἢ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐστω ἀποτομή ἢ AB · λέγω ὅτι ἢ AB οὐκ ἐστὶν ἢ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ $\Delta\Gamma$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν $\Delta\Gamma$ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓE , πλάτος ποιῶν τὴν ΔE . Ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστὶν ἢ AB , ἀποτομή πρώτη ἐστὶν ἢ ΔE . Ἐστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἢ EZ · αἱ ΔZ , ZE ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυναμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἢ ΔZ τῆς ZE μείζον δύναται τὸ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῆς, καὶ ἢ ΔZ

sexta recta potens est quæ cum medio medium totum facit; ipsa igitur potens spatium $\Lambda\Theta$, hoc est $\text{E}\Gamma$, cum medio medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO CXII.

Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.

Sit apotome AB ; dico AB non esse eandem quæ ex binis nominibus.

Si enim possibile, sit; et exponatur rationalis $\Delta\Gamma$, et quadrato ex AB æquale ad rationalem $\Delta\Gamma$ applicetur rectangulum ΓE , latitudinem faciens ΔE . Quoniam igitur apotome est AB , apotome prima est ΔE . Sit ipsi congruens EZ ; ipsæ ΔZ , ZE igitur rationales sunt potentia solum commensurabiles, et ΔZ quam ZE plus potest quadrato ex recta sibi commensu-

compris sous une rationnelle et un sixième apotome, est une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial (97. 10); la droite qui peut $\Lambda\Theta$, c'est-à-dire $\text{E}\Gamma$, est donc une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CXII.

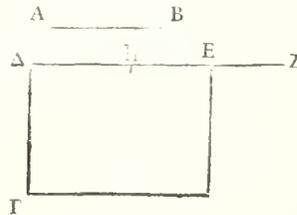
Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

Soit l'apotome AB ; je dis que AB n'est pas la même droite que celle de deux noms.

Car que cela soit, si c'est possible; soit exposée une rationnelle $\Delta\Gamma$, et appliquons à la rationnelle $\Delta\Gamma$ un rectangle ΓE , qui étant égal au carré de AB , ait ΔE pour largeur (45. 1). Puisque la droite AB est un apotome, la droite ΔE sera un premier apotome (98. 10). Que EZ conviène avec ΔE ; les droites ΔZ , ZE seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la puissance de ΔZ surpassera la puissance de ZE du carré d'une droite commensurable avec ΔZ , et ΔZ sera com-

σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ² ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρῶτη ἐστὶν³ ἡ ΔΕ. Διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐστω μείζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἡ ΔΗ

rabili, et ΔΖ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine. Rursus, quoniam ex binis nominibus est ΑΒ; ex binis igitur nominibus prima est ΔΕ. Dividatur in nomina ad punctum Η, et sit majus nomen ΔΗ; ipsæ ΔΗ, ΗΕ igitur rationales sunt potentiâ soliū commensurabiles. Et ΔΗ quam ΗΕ plus potest



τῆς ΗΕ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΗ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρος ἐστὶ μήκει· καὶ λοιπῇ ἄρα τῇ⁵ ΖΗ σύμμετρος ἐστὶν ἡ⁶ ΔΖ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ

quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et major ΔΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine; et ΔΖ igitur ipsi ΔΗ commensurabilis est longitudine; et reliquæ igitur ΖΗ commensurabilis est ΔΖ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔΖ ipsi ΖΗ, rationalis autem est ΔΖ; rationalis igitur est et ΖΗ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔΖ ipsi ΖΗ longitudine, incommensurabilis autem ΔΖ ipsi ΖΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΖΗ

mesurable en longueur avec la rationnelle exposée ΔΓ (déf. trois. 1. 10). De plus, puisque ΑΒ est une droite de deux noms, la droite ΔΕ sera une première de deux noms (61. 10). Que ΔΕ soit divisée en ses noms au point Η, et que ΔΗ soit sou plus grand nom; les droites ΔΗ, ΗΕ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10). Mais la puissance de ΔΗ surpasse la puissance de ΗΕ du quadré d'une droite commensurable avec ΔΗ, et la plus grande droite ΔΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΔΓ; la droite ΔΖ est donc commensurable en longueur avec ΔΗ (12. 10); la droite ΔΖ est donc commensurable avec la droite restante ΗΖ. Et puisque ΔΖ est commensurable avec ΖΗ, et que ΔΖ est rationnelle, la droite ΖΗ sera rationnelle. Et puisque ΔΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ, et que la droite ΔΖ est incommensurable en longueur avec ΖΕ, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec la

μήκει. Καὶ εἴσι ρηταί⁸· αἱ HZ, ZE ἄρα ρηταί εἴσι⁹ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ HE. Ἀλλὰ καὶ ρητὴ, ὅπερ, ἐστὶν¹⁰ ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῆ μίσει οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γάρ ἀπὸ μίσεως παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ρητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ μίσεως ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ μίσεως ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον

ipsi EZ. Et sunt rationales; ipsæ HZ, ZE igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est HE. Sed et rationalis, quod est impossibile.

Apotome igitur, etc.

COROLLARIUM.

Apotome et quæ post ipsam irrationales neque mediæ nèque inter se sunt eadem; quadratum quidem enim ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem et incommensurabilem ipsi ad quam applicatur longitudine. Quadratum autem ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. Quadratum autem ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. Quadratum autem ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. Quadratum autem ex minori ad rationalem applicatum

droite EZ; mais ces droites sont rationnelles; les droites HZ, ZE sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite HE est donc un apotome (74. 10). Mais elle est aussi rationnelle, ce qui est impossible. Un apotome, etc.

COROLLAIRE.

L'apotome et les irrationnelles qui la suivent ne sont ni médiales, ni les mêmes entr'elles; car le quarré d'une mediale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est appliquée (25. 10). Le quarré d'un apotome étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un premier apotome (98. 10); le quarré d'un premier apotome d'une mediale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un second apotome (99. 10); le quarré d'un second apotome d'une mediale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un troisième apotome (100. 10); le quarré d'une mineure étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un qua-

πλάτος ποιῆ ἀποτομὴν τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ἔλον ποιούσης παραῤῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῆ ἀποτομὴν πέμπτην. Το δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ἔλον ποιούσης παραῤῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῆ ἀποτομὴν ἕκτην. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημίνα πλάτη διαφέρει τοῦτε' πρώτου καὶ ἀλλήλων· τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητὴ ἔστι· ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῆ' τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ οὗται αἱ ἀγορῆ διαφέρουσιν ἀλλήλων. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ εὐκ οὕσα ἡ αὐτὴ τῆ' ἐκ δύο ὀνομάτων· ποιούσι δὲ πλάτη παραῤῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μὲν^δ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολουθῶσιν ἐκάστη τῆ' τάξει τῆ' καθ' αὐτή· αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῆ' τάξει ἀκολουθῶσιν· ἕτεραι ὅρα εἶσιν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῆ' τάξει πάσας ἀλόγους ἰγ'.

latitudinem facit apotomen quartam. Quadratum verò ex rectà quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomei quintam. Quadratum autem ex rectà quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter se; a primâ quidem, quod rationalis sit; inter se verò, quod ordine non sint eadem; manifestum et ipsas irrationales differre inter se. Et quoniam demonstratum est apotomen non esse eandem quæ ex binis nominibus; faciunt autem latitudines ad rationalem applicatæ post apotomen apotomas consequenter eodem ordine quæ post ipsam; ipsæ verò post ipsam ex binis nominibus latitudines ex binis nominibus, et quæ sunt eodem ordine congruenter; aliæ igitur sunt quæ post apotomen, et aliæ quæ post ipsam ex binis nominibus, ita ut sint ordine omnes irrationales tredecim,

trième apotome (101. 10); le carré d'une droite, qui fait avec une surface rationelle un tout médial, étant appliqué à une rationelle fait un cinquième apotome (102. 10); le carré d'une droite, qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationelle fait un sixième apotome (105. 10). Puis donc que les largeurs dont nous venons de parler diffèrent de la première droite et entr'elles; qu'elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationelle, et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre, il est évident que ces irrationelles sont différentes entr'elles. Et puisqu'on a démontré que l'apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms (112. 10), que les carrés de l'apotome et des droites qui viennent ensuite étant appliqués à une rationelle font des largeurs qui sont des apotomes du même ordre que les droites qui suivent l'apotome, et que les carrés de la droite de deux noms, et des droites qui viennent ensuite, étant appliqués à une rationelle, font des largeurs qui sont des droites de deux noms du même ordre que celles qui suivent la droite de deux noms (61, 62, 65, 64, 65 et 66. 10); les droites qui suivent l'apotome et la droite de deux noms sont donc différentes entr'elles, de manière que toutes ces irrationelles sont au nombre de treize.

- α. Μέσην.
 β. Εκ δύο ὀνομάτων.
 γ. Εκ δύο μέσων πρώτων.
 δ. Εκ δύο μέσων δευτέρων.
 ε. Μείζουσα.
 ς. ῤητὸν καὶ μέσον δυναμένην.
 ζ. Δύο μέσα δυναμένην.
 η. Ἀποτομήν.
 θ. Μέσης⁶ ἀποτομὴν πρώτην.
 ι. Μέσης⁷ ἀποτομὴν δευτέραν.
 ια. Ελάχιστα.
 ιβ. Μετὰ ῤητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιῶσαν.
 ιγ. Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιῶσαν.

1. Media.
 2. Recta ex binis nominibus.
 3. Ex binis mediis prima.
 4. Ex binis mediis secunda.
 5. Major.
 6. Rationale et medium potens.
 7. Bina media potens.
 8. Apotome.
 9. Mediæ apotome prima.
 10. Mediæ apotome secunda.
 11. Minor.
 12. Cum rationali medium totum faciens.
 15. Cum medio medium totum faciens.

1. La médiale.
 2. La droite de deux noms.
 3. La première de deux médiales.
 4. Le seconde de deux médiales.
 5. La majeure.
 6. La droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.
 7. La droite qui peut deux surfaces médiales.
 8. L'apotome.
 9. Le premier apotome d'une médiale.
 10. Le second apotome d'une médiale.
 11. La mineure.
 12. La droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.
 13. La droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριγ'.

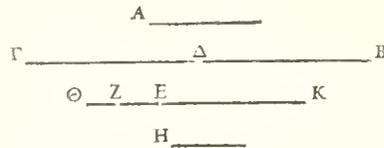
PROPOSITIO CXIII.

Τὸ ἀπὸ ρητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ἰσομέτρων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ἰσόμετρα σύμμετρα ἔστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ἰσομέτρων ἰσομέτρων, καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ γινόμενη ἀποτομή τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ἰσομέτρων.

Ἐστω ρητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ἰσομέτρων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μείζον ἰσομέτρον ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστίν, ἧς τὰ ἰσομέτρα σύμμετρα ἔστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν τῇ ΒΓ.

Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eadem ratione; et adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

Sit rationalis quidem Α, ex binis nominibus verò ΕΓ, cujus majus nomen sit ΓΔ, et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΓ, ΕΖ; dico ΕΖ apotomen esse, cujus nomina commensurabilia sunt ipsis ΓΔ, ΔΒ, et in eadem ratione, et adhuc ΕΖ eundem habituram ordinem quem ΒΓ.



Ἐστω γὰρ ἄλλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ

Sit enim rursus quadrato ex Α æquale rectangulum sub ΒΔ, Η. Quoniam igitur rectangulum sub ΒΓ, ΕΖ æquale est rectangulo sub ΒΔ, Η;

PROPOSITION CXIII.

Le carré d'une rationnelle étant appliqué à une droite de deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

Soit Α une rationnelle, et ΒΓ une droite de deux noms, dont le plus grand nom soit ΓΔ; que le rectangle sous ΒΓ, ΕΖ soit égal au carré de Α; je dis que ΕΖ est un apotome dont les noms sont commensurables avec les droites ΓΔ, ΔΒ, et en même raison que ces droites, et que ΕΖ sera du même ordre que ΒΓ.

Que le rectangle sous ΒΔ, Η soit encore égal au carré de Α. Puisque le rectangle sous ΒΓ, ΕΖ est égal au rectangle sous ΒΔ, Η, la droite ΓΒ sera à ΒΔ comme Η

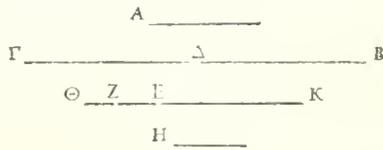
πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ Η πρὸς τὴν ΕΖ. Μείζων δὲ ἢ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἢ Η τῆς ΕΖ. Ἐστω τῆ Η ἴση ἢ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἔστιν⁵ ὡς ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Γεγονέτω ὡς ἢ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως ἢ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἢ ΟΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἔστιν ὡς ἢ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγουμένων⁶ πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγουμένα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. Ὡς δὲ ἢ ΖΚ πρὸς τὴν⁷ ΚΕ οὕτως ἔστιν ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΟΚ πρὸς τὴν⁸ ΚΖ οὕτως ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἔστι⁹ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΟΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ οὕτως ἢ ΟΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΟΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἢ ΟΚ τῆ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἢ ΘΕ τῆ ΕΚ σύμμετρος ἔστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ ἔστι¹⁰ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα ἔστι¹¹ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΟΚ, ΒΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ

est igitur ut ΓΒ ad ΒΔ ita Η ad ΕΖ. Major autem ΓΒ quam ΒΔ; major igitur et Η quam ΕΖ. Sit ipsi Η æqualis ΕΘ; est igitur ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΕ ad ΕΖ; dividendo igitur est ut ΓΔ ad ΒΔ ita ΟΖ ad ΖΕ. Fiat ut ΟΖ ad ΖΕ ita ΖΚ ad ΚΕ; et tota igitur ΟΚ ad totam ΚΖ est ut ΖΚ ad ΚΕ, ut enim unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut autem ΖΚ ad ΚΕ ita est ΓΔ ad ΔΒ; et ut igitur ΟΚ ad ΚΖ ita ΓΔ ad ΔΕ. Commensurable autem ex ΓΔ quadratum quadrato ex ΔΒ; commensurable igitur est et ex ΟΚ quadratum quadrato ex ΚΖ. Atque est ut ex ΟΚ quadratum ad ipsum ex ΚΖ ita ΟΚ ad ΚΕ, quoniam tres rectæ ΟΚ, ΚΖ, ΚΕ proportionales sunt; commensurabilis igitur ΟΚ ipsi ΚΕ longitudine; quare et ΘΕ ipsi ΕΚ commensurabilis est longitudine. Et quoniam quadratum ex Α æquale est rectangulo sub ΘΕ, ΒΔ, rationale autem est quadratum ex Α; rationale igitur est et rectangulum sub ΟΚ, ΒΔ. Et

est à ΕΖ (16. 6). Mais ΓΒ est plus grand que ΒΔ; la droite Η est donc plus grande que ΕΖ. Que ΕΘ soit égal à Η, la droite ΓΒ sera à ΒΔ comme ΘΕ est à ΕΖ; donc, par soustraction, ΓΔ est à ΒΔ comme ΟΖ est à ΖΕ (17. 5). Faisons en sorte que ΟΖ soit à ΖΕ comme ΖΚ est à ΚΕ; la droite entière ΟΚ sera à la droite entière ΚΖ comme ΖΚ est à ΚΕ; car un antécédent est à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5). Mais ΖΚ est à ΚΕ comme ΓΔ est à ΔΒ; la droite ΟΚ est donc à ΚΖ comme ΓΔ est à ΔΒ; mais le carré de ΓΔ est commensurable avec le carré de ΔΒ (37. 10); le carré de ΟΚ est donc commensurable avec le carré de ΚΖ (10. 10). Mais le carré de ΟΚ est au carré de ΚΖ comme ΟΚ est à ΚΕ, parce que les trois droites ΟΚ, ΚΖ, ΚΕ sont proportionnelles (20. cor. 2.6); la droite ΟΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΕ; la droite ΘΕ est donc aussi commensurable en longueur avec ΕΚ (16. 10). Et puisque le carré de Α est égal au rectangle sous ΘΕ, ΒΔ, et que le carré de Α est rationel, le rectangle sous ΟΚ, ΒΔ sera rationel. Mais ce rectangle est appliqué à la rationelle ΒΔ; la droite

παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. Ἐπει οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν¹² ΔΒ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν¹³ ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Ῥητι δὲ ἐστὶν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει¹⁴· ῥητὴ

ad rationalem ΒΔ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine; quare et ipsi commensurabilis ΕΚ rationalis est et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine. Quoniam igitur est ut ΓΔ ad ΔΒ ita ΖΚ ad ΚΕ, ipsæ autem ΓΔ, ΔΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Rationalis autem est ΚΕ, et commensurabilis ipsi ΒΔ lou-



ἄρα ἐστὶ¹⁵ καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει¹⁶· αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ¹⁷ σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. Ἦτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς¹⁸, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δύνησεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς.

gitudine; rationalis igitur est et ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine; ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur rationales potentiâ solùm sunt commensurabiles; apotome igitur est ΕΖ. Vel autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex

OE est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΒΔ (21. 10); la droite EK, qui est commensurable avec OE, est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΒΔ. Et puisque ΓΔ est à ΔΒ comme ΖΚ est à ΚΕ, et que les droites ΓΔ, ΔΒ sont commensurables en puissance seulement, les droites ΖΚ, ΚΕ seront commensurables en puissance seulement. Mais ΚΕ est rationnelle, et commensurable en longueur avec ΒΔ; la droite ΖΚ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΓΔ; les droites ΖΚ, ΚΕ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΖ est donc un apotome (74. 10). Mais la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du carré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΓΔ. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du carré d'une droite commensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du carré d'une droite commensurable avec ΖΚ, et

Καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἔστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ αὐδετέρα¹⁹ τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ αὐδετέρα²⁰ τῶν ΖΚ, ΚΕ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δυήσεται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς²¹. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ αὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ αὐδετέρα²² τῶν ΖΚ, ΚΕ ὥστε ἀποτομή ἔστιν ἡ ΖΕ, ἥς τὰ ὀνόματα τὰ²³ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρα ἔστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει²⁴ τῇ ΒΓ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

recta sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΓΔ exposita rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si autem neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ. Si autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex recta sibi incommensurabili. Et si quidem ΓΔ commensurabilis est exposita rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si vero neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ; quare apotome est ΖΕ, cuius nomina ΖΚ, ΚΕ commensurabilia sunt nominibus ΓΔ, ΔΒ rectae ex binis nominibus, et in eadem ratione, et eundem habebit ordinem quem ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi ; si ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, ΚΕ lui sera aussi commensurable ; et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du carré d'une droite incommensurable avec ΖΚ. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi ; si la droite ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΕ lui sera aussi commensurable. Et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable ; la droite ΖΕ est donc un apotome, dont les noms ΖΚ, ΚΕ sont commensurables avec les noms ΓΔ, ΔΒ d'une droite de deux noms, et en même raison qu'eux ; et la droite ΖΕ sera du même ordre que ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριδ'.

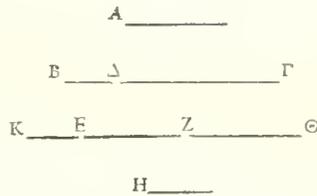
PROPOSITIO CXIV.

Τὸ ἀπὸ ρητῆς παρὰ ἀποτομῆν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρα ἔστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔτι δὲ ἡ γειομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἐστω ρητὴ μὲν ἡ A , ἀποτομὴ δὲ ἡ $B\Delta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $K\Theta$, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς A ρητῆς παρὰ τὴν $B\Delta$ ἀπο-

Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, ejus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eundem ordinem habet quem apotome.

Sit rationalis quidem A , apotome verò $B\Delta$; et quadrato ex A æquale sit rectangulum sub $B\Delta$, $K\Theta$, ita ut quadratum ex rationali A ad



τομῆν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν $K\Theta$. λέγω ὅτι καὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἔστιν ἡ $K\Theta$, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρα ἔστι τοῖς τῆς $B\Delta$ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ $K\Theta$ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ $B\Delta$.

apotomen $B\Delta$ applicatum latitudinem faciat $K\Theta$; dico et ex binis nominibus esse $K\Theta$; ejus nomina commensurabilia sunt ipsius $B\Delta$ nominibus, et in eadem ratione, et adhuc $K\Theta$ eundem habere ordinem quem $B\Delta$.

PROPOSITION CXIV.

Le carré d'une rationelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

Soit la rationelle A , et l'apotome $B\Delta$; que le rectangle sous $B\Delta$, $K\Theta$ soit égal au carré de A , de manière que le carré de la rationelle A étant appliqué à l'apotome $B\Delta$ ait $K\Theta$ pour largeur; je dis que $K\Theta$ est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de $B\Delta$, et en même raison qu'eux, et que $K\Theta$ est du même ordre que $B\Delta$.

Εστω γὰρ τῆ ΒΔ προσαρμύζουσα ἢ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῶ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω⁴ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβηται⁵· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ Η, καὶ σύμμετρος τῆ ΒΓ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ⁶ τῶ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΚΘ πρὸς τὴν ΗΓ. Μείζων δὲ ἢ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἢ ΚΘ τῆς Η. Κείσθω τῆ Η ἴση ἢ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΚΕ τῆ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΚΘ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. Γεγραμένω ὡς ἢ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἢ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν ὡς ἢ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τουτέστιν ὡς⁸ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσὶ⁹ σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως¹⁰ ἢ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἢ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως¹¹ ἢ ΟΖ πρὸς τὴν

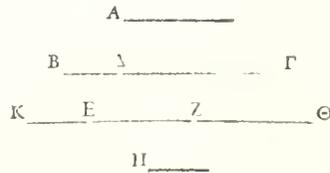
Sit enim ipsi ΒΔ congruens ΔΓ; ipsæ ΒΓ, ΓΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΓ, Η. Rationale autem quadratum ex Α; rationale igitur et rectangulum sub ΒΓ, Η. Et ad rationalem ΒΓ applicatur; rationalis igitur est Η, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine. Quoniam igitur rectangulum sub ΒΓ, Η æquale est rectangulo sub ΒΔ, ΚΘ, proportionaliter igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΚΘ ad Η. Major autem ΓΒ quam ΒΔ; major igitur et ΚΘ quam Η. Ponatur ipsi Η æqualis ΚΕ; commensurabilis igitur est ΚΕ ipsi ΒΓ longitudine. Et quoniam est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΚΘ ad ΚΕ; convertendo igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΘ ad ΘΕ. Fiat ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΟΖ ad ΖΕ; et reliqua igitur ΚΖ ad ΖΘ est ut ΚΘ ad ΘΕ, hoc est ut ΒΓ ad ΓΔ. Ipsæ autem ΒΓ, ΓΔ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΚΖ, ΖΘ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et quoniam est ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΚΖ ad ΖΘ, sed ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΟΖ ad ΖΕ; et ut igitur ΚΖ ad ΖΘ

Car que ΔΓ conviène avec ΒΔ, les droites ΒΓ, ΓΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Que le rectangle sous ΒΓ, Η soit égal au quarré de Α. Puisque le quarré de Α est rationel, le rectangle sous ΒΓ, Η sera aussi rationel. Mais il est appliqué à la rationelle ΒΓ; la droite Η est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ (21. 10). Et puisque le rectangle sous ΒΓ, Η est égal au rectangle sous ΒΔ, ΚΘ, la droite ΓΒ sera à la droite ΒΔ comme ΚΘ est à Η (16. 6). Mais la droite ΓΒ est plus grande que ΒΔ; la droite ΚΘ est donc plus grande que la droite Η. Faisons ΚΕ égale à Η; la droite ΚΕ sera commensurable en longueur avec ΒΓ. Et puisque ΓΒ est à ΒΔ comme ΚΘ est à ΚΕ, par conversion ΒΓ sera à ΓΔ comme ΚΘ est à ΘΕ. Faisons en sorte que ΚΘ soit à ΘΕ comme ΟΖ est à ΖΕ, la droite restante ΚΖ sera à ΖΘ comme ΚΘ est à ΘΕ, c'est-à-dire comme ΒΓ est à ΓΔ (19. 5). Mais les droites ΒΓ, ΓΔ sont commensurables en puissance seulement; les droites ΚΖ, ΖΘ sont donc commensurables en puissance seulement. Et puisque ΚΘ est à ΘΕ comme ΚΖ est à ΖΘ, et que ΚΘ est à ΘΕ comme ΟΖ est à ΖΕ; la droite

410 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ZE· καὶ ὡς ἄρα ἡ KZ πρὸς τὴν ZΘ οὕτως¹² ἢ ΘZ πρὸς τὴν ZE· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης¹³ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ KZ πρὸς τὴν ZE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς KZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΘ. Σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς KZ τῆ ἀπὸ τῆς ZΘ, αἱ γὰρ KZ, ZΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ¹⁴ καὶ ἡ KZ τῆ

ita ΘZ ad ZE; quare et ut prima ad tertiam ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ; et ut igitur KZ ad ZE ita ex KZ quadratum ad ipsum ex ZΘ. Commensurable autem est ex KZ quadratum quadrato ex ZΘ, ipsæ enim KZ, ZΘ potentiâ sunt commensurabiles; commensurabilis igitur est et KZ ipsi ZE longitudine; quare ZK



ZE μήκει· ὥστε ἡ ZK καὶ τῆ KE σύμμετρος ἐστὶ¹⁵ μήκει. Ρητὴ δὲ ἐστὶν ἡ KE, καὶ σύμμετρος τῆ ΒΓ μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἡ KZ, καὶ σύμμετρος τῆ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ KZ πρὸς τὴν ZΘ· ἐναλλάξ ἄρα¹⁶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν KZ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ZΘ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῆ KZ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῆ ZΘ¹⁷ μήκει. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ¹⁸ ρηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ KZ, ZΘ ἄρα ρηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμε-

et ipsi KE commensurabilis est longitudine. Rationalis autem est KE, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine; rationalis igitur et KZ, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine. Et quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita KZ ad ZΘ; permutando igitur ut ΒΓ ad KZ ita ΔΓ ad ZΘ. Commensurabilis autem ΒΓ ipsi KZ; commensurabilis igitur et ΓΔ ipsi ZΘ longitudine. Ipsæ autem ΒΓ, ΓΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ipsæ KZ, ZΘ igitur rationales sunt potentiâ

KZ sera à ZΘ comme ΘZ est à ZE; la première droite est donc à la troisième comme le carré de la première est au carré de la seconde (20. cor. 2. 6); la droite KZ est donc à ZE comme le carré de KZ est au carré de ZΘ; mais le carré de KZ est commensurable avec le carré de ZΘ, parce que les droites KZ, ZΘ sont commensurables en puissance; la droite KZ est donc commensurable en longueur avec ZE; la droite ZK est donc commensurable en longueur avec KE (16. 10). Mais KE est rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ; la droite KZ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ. Et puisque ΒΓ est à ΓΔ comme KZ est à ZΘ, par permutation ΒΓ sera à KZ comme ΔΓ est à ZΘ. Mais ΒΓ est commensurable avec KZ; la droite ΓΔ est donc commensurable en longueur avec ZΘ (10. 10). Mais les droites ΒΓ, ΓΔ sont des rationelles commensurables en puissance seulement; les droites KZ, ZΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement;

τραί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν¹⁹ ἡ ΚΘ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μείζον δυναίσεται²⁰ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ἐκκειμένης ῥητῆς μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστὶ τῆς ἐκκειμένης ῥητῆς μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ²¹ οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ. Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μείζον δυναίσεται²² τῷ ἀπὸ ἀσύμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ἐκκειμένης ῥητῆς μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ²³ οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά ἐστι²⁴ τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῆς ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΚΘ. Si quidem igitur ΒΓ quam ΓΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ. Si autem ΒΓ quam ΓΔ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ; ex binis igitur nominibus est ΚΘ, cujus nomina ΚΖ, ΖΘ commensurabilia sunt apotomæ nominibus ΒΓ, ΓΔ, et in eâdem ratione; et adhuc ΚΘ eundem quem ΒΓ habet ordinem. Quod oportebat ostendere.

la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms (57. 10). Si donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du carré d'une droite commensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du carré d'une droite commensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle. Si la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du carré d'une droite incommensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle; la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms, dont les noms ΚΖ, ΖΘ sont commensurables avec les noms ΒΓ, ΓΔ de cet apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, ΚΘ sera du même ordre que ΒΓ (déf. sec. et tr. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριέ.

Εάν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρα τε ἔστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ρητὴ ἔστι.

Περιέχσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν $AB, ΓΔ$, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς AB , καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς $ΓΔ$, ἧς μείζον ὀνομά ἐστι τὸ $ΓΕ$ · καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ $ΓΕ, ΕΔ$ σύμμετρα τε τοῖς² τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς AZ, ZB , καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω ἢ ὑπὸ τῶν $AB, ΓΔ$ δυναμένη ἢ H · λέγω ὅτι ρητὴ ἔστιν ἡ H .

Εκκείσθω γὰρ ρητὴ ἡ $Θ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Θ$ ἴσον παρα τὴν $ΓΔ$ παραβελήσθω πλάτος ποισῶν τὴν $ΚΛ$ · ἀποτομὴ ἄρα ἔστιν ἡ $ΚΛ$, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ $ΚΜ, ΜΛ$, σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς $ΓΕ, ΕΔ$, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἀλλὰ καὶ αἱ $ΓΕ, ΕΔ$ σύμμετροί τε εἰσι ταῖς AZ, ZB , καὶ ἐν τῷ

PROPOSITIO CXV.

Si spatium contineatur sub apotome et recta ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; recta spatium potens rationalis est.

Contineatur enim spatium sub $AB, ΓΔ$, sub apotome AB , et recta $ΓΔ$ ex binis nominibus, cujus majus nomen est $ΓΕ$; et sint nomina $ΓΕ, ΕΔ$ rectæ ex binis nominibus commensurabilia et apotomæ nominibus AZ, ZB , et in eadem ratione; et sit recta H spatium sub $AB, ΓΔ$ potens; dico rationalem esse ipsam H .

Exponatur enim rationalis $Θ$, et quadrato ex $Θ$ æquale ad $ΓΔ$ applicetur latitudinem faciens $ΚΛ$; apotome igitur est $ΚΛ$, cujus nomina sint $ΚΜ, ΜΛ$, commensurabilia nominibus $ΓΕ, ΕΔ$ rectæ ex binis nominibus, et in eadem ratione. Sed et ipsæ $ΓΕ, ΕΔ$ commensurabiles sunt ipsis AZ, ZB , et in eadem ratione; est igitur

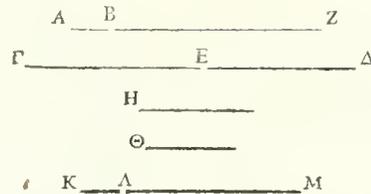
PROPOSITION CXV.

Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui pent cette surface est rationelle.

Qu'une surface soit comprise sous $AB, ΓΔ$, c'est-à-dire sous un apotome AB , et sous une droite de deux noms $ΓΔ$, dont $ΓΕ$ est le plus grand nom; que les noms $ΓΕ, ΕΔ$ de la droite de deux noms soient commensurables avec les noms AZ, ZB de l'apotome AB , et en même raison qu'eux; et que H soit la droite qui pent la surface comprise sous $AB, ΓΔ$; je dis que la droite H est rationelle.

Car soit exposée la rationelle $Θ$; appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme, qui étant égal au carré de $Θ$, ait $ΚΛ$ pour largeur (45. 1); la droite $ΚΛ$ sera un apotome, dont les noms $ΚΜ, ΜΛ$ seront commensurables avec les noms $ΓΕ, ΕΔ$ de la droite de deux noms, et en même raison qu'eux (113. 10). Mais les droites $ΓΕ, ΕΔ$ sont commensurables avec les droites AZ, ZB , et en même raison qu'elles; la droite AZ est

αὐτῶν λόγῳ ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ZB οὕτως ἡ KM πρὸς τὴν ΜΑ⁵. ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν ΑΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ AB πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΑ ἔστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM⁶. Σύμμετρος δὲ ἡ AZ τῇ KM· σύμμετρος ἄρα ἔστι⁷ καὶ ἡ AB τῇ ΚΑ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν⁸ ΚΑ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΑ.



ut AZ ad ZB ita KM ad ΜΑ; permutando igitur est ut AZ ad KM ita ZB ad ΑΜ; et reliqua igitur AB ad reliquam ΚΑ est ut AZ ad KM. Commensurabilis autem AZ ipsi KM; commensurabilis igitur est et AB ipsi ΚΑ. Atque est ut AB ad ΚΑ ita sub ΓΔ, AB rectangulum ad ipsum sub ΓΔ, ΚΑ; commensu-

σύμμετρον ἄρα ἔστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB τῷ ὑπὸ τῶν⁹ ΓΔ, ΚΑ. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΑ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον ἔστι τῷ¹⁰ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ¹¹ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἔστι¹² καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἔστιν ἡ Η, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB.

rabile igitur est et sub ΓΔ, AB rectangulum rectangulo sub ΓΔ, ΚΑ. Æquale autem sub ΓΔ, ΚΑ rectangulum quadrato ex Θ; commensurable igitur est sub ΓΔ, AB rectangulum quadrato ex Θ. Rectangulum autem sub ΓΔ, AB æquale est quadrato ex Η; commensurable igitur et ex Η quadratum quadrato ex Θ. Rationale autem quadratum ex Θ; rationale igitur est et quadratum ex Η; rationalis igitur est Η, et potest spatium sub ΓΔ, ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur spatium, etc.

donec à ZB comme KM est à ΜΑ (11. 5); donc, par permutation, la droite AZ sera à KM comme ZB est à ΑΜ; la droite restante AB est donc à la droite restante ΚΑ comme AZ est à KM (19. 5). Mais AZ est commensurable avec KM; la droite AB est donc commensurable avec ΚΑ (10. 10). Mais AB est à ΚΑ comme le rectangle sous ΓΔ, AB est au rectangle sous ΓΔ, ΚΑ (1. 6); le rectangle sous ΓΔ, AB est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΔ, ΚΑ. Mais le rectangle sous ΓΔ, ΚΑ est égal au carré de Θ; le rectangle sous ΓΔ, AB est donc commensurable avec le carré de Θ. Mais le rectangle sous ΓΔ, AB est égal au carré de Η; le carré de Η est donc commensurable avec le carré de Θ. Mais le carré de Θ est rationel; le carré de Η est donc rationel; la droite Η est donc rationelle, et cette droite peut la surface comprise sous ΓΔ, AB. Si donc, etc.

Η ΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτων φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι¹.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρις'.

Ἀπὸ μέσης ἀπειροὶ ἀλογοὶ γίνονται, καὶ οὐδεμία¹ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή.

Ἐστω μέση ἢ A λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς A ἀπειροὶ ἀλογοὶ γίνονται, καὶ οὐδεμία² οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἐστίν³ ἢ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ B , καὶ τῶ ὑπὸ τῶν A , B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ ἀλογοῦ ἄρα ἐστὶν ἢ Γ τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἀλογόν ἐστι. Καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἐστίν¹ ἢ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσσην. Πάλιν δὲ, τῶ

COROLLARIUM.

Et ex iis manifestum nobis est fieri posse, ut rationale spatium sub irrationalibus rectis contineatur.

PROPOSITIO CXVI.

A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nullâ nulli præcedentium eadem.

Sit media A ; dico ex ipsâ A infinitas irrationales gigni, et nullam nulli præcedentium esse eandem.

Exponatur rationalis B , et rectangulo sub A , B æquale sit quadratum ex Γ ; irrationalis igitur est Γ ; rectangulum enim sub irrationali et rationali irrationale est. Et nulli præcedentium est eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediam. Rursus utique, rectangulo sub

COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident pour nous qu'il est possible qu'une surface rationnelle soit comprise sous deux droites irrationnelles.

PROPOSITION CXVI.

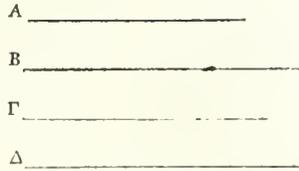
Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

Soit la médiale A ; je dis qu'il résulte de A une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles n'est commensurable avec aucune de celles qui la précèdent.

Soit exposée la rationnelle B , et que le carré de Γ soit égal au rectangle sous A , B , la droite Γ sera irrationnelle (déf. 11. 10); car le rectangle compris sous une irrationnelle et une rationnelle est irrationnel (59. sch. 10), et la droite Γ ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une surface rationnelle ne fait une largeur médiale (61, 62, 63, 64, 65, 66, 98, 99, 100, 101, 102, 115. 10). De plus, que le carré de Δ soit égal

ὕπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἐστίν⁵ ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν

B, Γ æquale sit quadratum ex Δ; irrationale igitur quadratum ex Δ; irrationalis igitur est Δ, et nulli præcedentium est eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem ap-



παραβαλλόμενον πλάτος ποιῶ τὴν Γ. Ομοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαίνουσης, φανερόν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμιᾶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

plicatum latitudinem facit ipsam Γ. Similiter utique eodem ordine infinitè protracto, evidens est a mediâ infinitas irrationales gigni, et nullam nulli præcedentium eandem. Quod oportebat ostendere.

Α Λ Λ Ω Σ'.

ALITER.

Ἐστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίνονται², καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ πρότερον ἐστὶν ἡ αὐτή³.

Sit mediâ ΑΓ; dico ex ipsâ ΑΓ infinitas irrationales gigni, et nullam nulli præcedentium esse eandem.

Ἦχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθᾶς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσω τὸ ΒΓ· ἄλογον

Ducatur ipsi ΑΓ ad rectos angulos ipsa ΑΒ, et sit rationalis ΑΒ, et compleatur ΒΓ, irra-

au rectangle sous Β, Γ; le carré de Δ sera irrationel (39. sch. 10); la droite Δ est donc irrationnelle, et elle n'est aucune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fait la largeur Γ. En procédant à l'infini de la même manière, il est évident qu'il résultera d'une médiale une infinité d'irrationelles, et qu'aucune d'elles ne sera la même qu'aucune de celles qui la précèdent. Ce qu'il fallait démontrer.

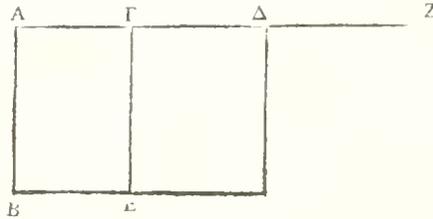
AUTREMENT.

Soit la médiale ΑΓ; je dis qu'il résulte de ΑΓ une infinité d'irrationelles, et qu'aucune d'elles n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

Menons la droite ΑΒ perpendiculaire à ΑΓ; que la droite ΑΒ soit rationnelle, et achevons le parallélogramme ΒΓ; le parallélogramme ΒΓ sera irrationel, ainsi que

ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνασθῶ αὐτὸ ἢ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἢ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτῆ· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν, συμ-

tionale igitur est ΒΓ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΓΔ; irrationalis igitur ΓΔ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediani. Rursus,



πεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνασθῶ αὐτὸ ἢ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτῆ· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς⁶ μέσης ἄρα, καὶ τὰ ἴξῃς.

compleatur ΕΔ; irrationale igitur est ΕΔ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΔΖ; irrationalis igitur est ΔΖ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit ipsam ΓΔ.

A mediâ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριθ'.

Πρακείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

PROPOSITIO CXVII.

Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

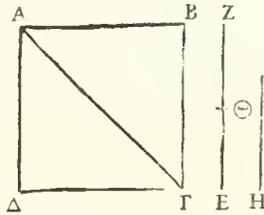
la droite qui pourra ce parallélogramme. Que la droite ΓΔ puisse ce parallélogramme; la droite ΓΔ sera irrationnelle, et ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fera une largeur médiale. De plus, achevons le parallélogramme ΕΔ, le parallélogramme ΕΔ sera irrationnel, ainsi que la droite qui peut ce parallélogramme. Que la droite ΔΖ puisse ce parallélogramme; la droite ΔΖ sera irrationnelle, et cette droite ne sera aucune des droites qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fera la largeur ΓΔ. Il résulte donc, etc.

PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Ἐστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἢ ΑΓ· λέγω ὅτι ἢ ΑΓ ἀσύμμετρος ἔστι τῇ ΑΒ μήκει.

Sit quadratum ΑΒΓΔ, ipsius autem diometer ΑΓ; dico ΑΓ incommensurabilem esse ipsi ΑΒ longitudine.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερόν μὲν οὖν ἔτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλασίον ἔστι² τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἔστιν ἢ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἢ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν³ Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἔστιν ὁ ΕΖ. Εἰ γὰρ ἴσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ⁴ λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἢ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἢ ΕΖ μονὰς⁵ τοῦ Η ἀριθμοῦ, ἔπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονὰς ἔστιν⁶ ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἢ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ

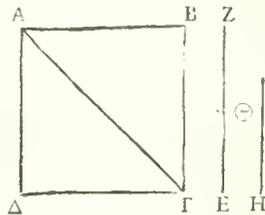
Si enim possibile, sit commensurabilis; dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse et impar-rem; evidens est quidem quadratum ex ΑΓ duplum esse quadrati ex ΑΒ. Et quoniam commensurabilis est ΑΓ ipsi ΑΒ, ipsa ΑΓ igitur ad ΑΒ rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat rationem quam ΕΖ ad Η, et sint ΕΖ, Η minimi eorum eandem rationem habentium cum ipsis; non igitur unitas est ΕΖ. Si enim ΕΖ esset unitas, et habet rationem ad Η quam habet ΑΓ ad ΑΒ, et major ΑΓ quam ΑΒ; major igitur et ΕΖ unitas quam Η numerus, quod absurdum; non igitur unitas est ΕΖ; numerus igitur. Et quoniam est ut

Soit le quarré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.

Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le quarré de ΑΓ est double du quarré de ΑΒ (47. 10); mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6. 10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; le nombre ΕΖ ne sera pas l'unité. Car si ΕΖ était l'unité, à cause que ΕΖ a avec Η la raison que ΑΓ a avec ΑΒ, et que ΑΓ est plus grand que ΑΒ, l'unité ΕΖ serait plus grande que le nombre Η, ce qui est absurde; ΕΖ n'est donc pas l'unité; ΕΖ est donc un nombre. Et puisque ΓΑ est à ΑΒ comme ΕΖ est à Η, le quarré de ΓΑ

οὕτως ὁ EZ πρὸς τὸν H, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AB οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H. Διπλασίον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τῷ ἀπὸ τῆς AB· διπλασίον ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· ἄρτιος ἄρα ἐστίν⁸ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ EZ ἄρτιός ἐστιν. Εἰ γὰρ ἦν περισσὸς, καὶ ὁ ἀπὸ αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἀν⁹ ἦν, ἐπειδήτερ ἐὰν

GA ad AB ita EZ ad H, et ut igitur ex GA quadratum ad ipsum ex AB ita ex EZ quadratum ad ipsum ex H. Duplum autem ex GA quadratum quadrati ex AB; duplus igitur et ex EZ quadratus quadrati ex H; par igitur est quadratus ex EZ; quare et ipse EZ par est. Si enim esset impar, et ex ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quotecunque com-



περισσὸι ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἢ, ὅλος περισσὸς ἐστίν· ὁ EZ ἄρα ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ EZ, H ἀριθμοὶ¹⁰ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς¹¹, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐστίν¹² ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστίν ὁ H. Εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς EZ, H δυὰς ἀν¹³ ἐμέτρει, πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἡμισυ, πρῶτους ὄντας

ponantur, multitudo autem ipsorum impar sit, totus impar est; ipse EZ igitur par est. Secetur bifariam in Θ. Et quoniam numeri EZ, H minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Atque est EZ par; impar igitur est H. Si enim esset par, ipsos EZ, H binarius metiretur, omnis enim par habet partem dimidiam, primos existentes

sera au carré de AB comme le carré de EZ est au carré de H. Mais le carré de GA est double du carré de AB; le carré de EZ est donc double du carré de H; le carré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair; car s'il était impair, son carré serait impair; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (25. 9); le nombre EZ est donc un nombre pair. Partageons le nombre EZ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre EZ est pair; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible.

πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἔρα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιον ἐστὶν ἰὶ ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἔρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· διπλάσιος ἔρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ¹⁵. ἄρτιος ἔρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἔρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η. Ἀλλὰ καὶ περισσὸς, ἕπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ μήκει· ἀσύμμετρος ἔρα¹⁶. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A Λ Λ Ω Σ'.

Ἐστω² ἐντὶ μὲν τοῦ διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω ὅτι ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· καὶ γηγονέτω³ πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Ηί· οἱ ΕΖ, Η ἔρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Λέγω πρῶτον ὅτι Η οὐκ ἐστὶ μονάς. Εἰ γὰρ δυατὸν, ἔστω

Le nombre Η n'est donc pas un nombre pair ; il est donc impair. Mais ΕΖ est double de ΕΘ ; le carré de ΕΖ est donc quadruple du carré de ΕΘ (11. 8). Mais le carré de ΕΖ est double du carré de Η ; le carré de Η est donc double du carré de ΕΘ ; le carré de Η est donc pair ; le nombre Η est donc pair, d'après ce qui a été dit (29. 9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible ; la droite ΑΓ n'est donc pas commensurable en longueur avec ΑΒ ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

A U T R E M E N T.

Soit Α la diagonale, et Β le côté ; je dis que Α est incommensurable en longueur avec Β. Que Α, s'il est possible, soit commensurable avec Β ; faisons en sorte que Α soit encore à Β comme le nombre ΕΖ est au nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (24. 7) ; les nombres ΕΖ, Η seront premiers entr'eux. Je dis d'abord que Η n'est pas l'unité ; que Η soit l'unité,

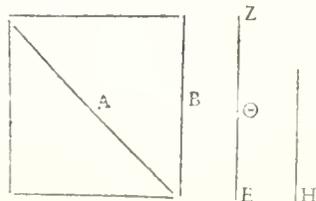
inter se, quod est impossibile; non igitur par est Η; impar igitur. Et quoniam duplus est ΕΖ ipsius ΕΘ, quadruplus igitur ex ΕΖ quadratus quadrati ex ΕΘ; duplus autem ex ΕΖ quadratus quadrati ex Η; duplus igitur ex Η quadratus quadrati ex ΕΘ; par igitur est quadratus ex Η; par igitur ex dictis ipse Η. Sed et impar, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est ΑΓ ipsi ΑΒ longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

A L I T E R.

Sit pro diametro quidem Α, pro latere verò Β; dico incommensurabilem esse Α ipsi Β longitudine. Si enim possibile, sit commensurabilis; et fiat rursus ut Α ad Β ita ΕΖ numerus ad Η, et sint minimi ΕΖ, Η eorum eandem rationem habentium cum ipsis; ipsi ΕΖ, Η igitur primi inter se sunt. Dico primum Η non esse unitatem. Si enim

μονάς. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ⁵ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ⁶ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος⁸ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. Καὶ ἔστι μονάς ὁ Η, δυάς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ⁹ ΕΖ τετράγωνος, ἔπερ

possibile, sit unitas. Et quoniam est ut A ad B ita EZ ad H; et ut igitur ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex EZ quadratus ad ipsum ex H. Duplum autem ex A quadratum quadrati ex B; duplus igitur et ex EZ quadratus quadrati ex H. Atque est unitas ipse H; binarius igitur ex EZ quadratus, quod est impossibile;



ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἔστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ¹⁰ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ. Μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοῦς ΕΖ, Η μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλους, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἔστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

non igitur unitas est ipse H; numerus igitur. Et quoniam est ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex EZ quadratus ad ipsum ex H, et invertendo ut ex B quadratum ad ipsum ex A ita ex H quadratus ad ipsum ex EZ. Metitur autem quadratum ex B quadratum ex A; metitur igitur et quadratus ex H quadratum ex EZ: quare et H latus ipsius ipsum EZ metitur. Metitur autem et H se ipsum; ipse H igitur ipsos EZ, H metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est A ipsi B longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

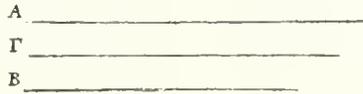
si cela est possible. Puisque A est à B comme EZ est à H, le carré de A sera au carré de B comme le carré de EZ est au carré de H. Mais le carré de A est double du carré de B; le carré de EZ est donc double du carré de H; mais H est l'unité; le carré de EZ est donc le nombre deux, ce qui est impossible, H n'est donc pas l'unité; H est donc un nombre. Et puisque le carré de A est au carré de B comme le carré de EZ est au carré de H, par inversion, le carré de B sera au carré de A comme le carré de H est au carré de EZ. Mais le carré de B mesure le carré de A; le carré de H mesure donc le carré de EZ, le nombre H mesure donc le nombre EZ (14. 8). Mais H se mesure lui-même; le nombre H mesure donc les nombres EZ, H qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; la droite A n'est donc pas commensurable en longueur avec la droite B; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

ΣΧΟΛΙΟΝ'.

SCHOLIUM.

Ἐξηγημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν A, B, εὐρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ἐὰν γὰρ τῶν A, B εὐθειῶν^α μέσον ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἴσται ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A εἶδος^β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ἰσοείας ἀνα-

Inventis utique longitu dine incommensurabilibus rectis, ut A, B, invenientur et aliae plurimae magnitudines ex duabus dimensionibus, dico et superficies incommensurabiles inter se. Si enim rectarum A, B mediam proportionalem Γ sumamus, erit ut A ad B ita figura ex A ad figuram ex Γ, similem et si-



γραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε καὶ κύκλοι περὶ διαμέτρους τύς^δ A, Γ, ἐπεὶπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα, εὐρίσκειται ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

militer descriptam, sive quadrata sint descripta, sive alia rectilinea similia, sive circuli circa diametros A, Γ, quoniam circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata; inventa igitur erunt et plana spatia incommensurabilia inter se. Quod oportebat ostendere.

Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων ἀσυμμέτρων χωρίων, δείξομεν τοῖς^δ ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρα τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις.

Ostensis utique et duarum dimensionum diversis incommensurabilibus spatiis, demonstrabimus ex solidorum theoriâ, esse etiam solida et commensurabilia et incommensura-

SCHOLIE.

Des droites incommensurables en longueur étant trouvées, comme les droites A, B, on trouvera plusieurs autres grandeurs de deux dimensions, c'est-à-dire des surfaces incommensurables entr'elles. Car si l'on prend une moyenne proportionnelle Γ entre les droites A, B (15. 6); la droite A sera à B comme la figure construite sur la droite A est à la figure construite sur la droite Γ, les figures A, Γ étant semblables et semblablement décrites (20. 6), soit que les figures décrites soient des carrés ou des figures rectilignes semblables; ou bien des cercles décrits autour des diamètres A, Γ, parce que les cercles sont entr'eux comme les carrés de leurs diamètres (2. 12). On aura donc trouvé des surfaces planes incommensurables entr'elles. Ce qu'il fallait démontrer.

Ayant donc démontré que diverses figures de deux dimensions sont incommensurables entr'elles, nous démontrerons qu'il y a des solides commensurables et incommensurables entr'eux, d'après la théorie des solides. Car si sur les carrés

Εάν γάρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἰσῶν αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοῦψῆ στερεὰ, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἴσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά· εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. Οὔτε ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὲν καὶ δύο κύκλων ὕψων τῶν Α, Β, ἐάν ἀπ' αὐτῶν ἰσοῦψεῖς κώνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἴσοιται πρὸς ἀλλήλους ὡς¹⁰ αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. Καὶ εἰ



μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἵτε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους¹¹ καὶ οἱ κύλινδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. Καὶ φανερόν ἡμῖν γέγρανεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἔστι σύμμετρία καὶ ἀσύμμετρία¹², ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

bilia inter se. Si enim super quadrata ex A, B, vel æqualia ipsis rectilinea, constituamus æque alta solida, parallelepipeda, vel pyramides, vel prismata, solida constructa erunt inter se ut bases. Et si quidem commensurabiles sint bases, commensurabilia erunt et solida; si verò incommensurabiles, incommensurabilia. Quod oportebat ostendere.

Sed quidem et duobus circulis existentibus A, B, si super ipsos conos æque altos, vel cylindros constituamus, erunt hi inter se ut bases, hoc est ut circuli A, B. Et si quidem com-

mensurabiles sint circuli, commensurabiles erunt et conii inter se et cylindri; si verò incommensurabiles sint circuli, incommensurabiles erunt et conii et cylindri. Et manifestum est nobis fieri non solum et in lineis et superficiebus commensurabilitatem et incommensurabilitatem, sed et in solidis figuris.

des droites A, B ou sur des figures rectilignes qui leur soient égales, nous construisons des solides de même hauteur, des parallélépipèdes, des pyramides, des prismes; les solides qu'on aura construits seront entr'eux comme leurs bases (52. 11, et 6. 5. 12). Si les bases sont commensurables, les solides seront commensurables; et si les bases sont incommensurables, les solides le seront aussi (10. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on a deux cercles A, B, et si sur ces cercles on construit des cônes ou des cylindres de même hauteur, ces solides seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire comme les cercles A, B (11. 12). Si les cercles sont commensurables, les cônes et les cylindres seront commensurables entr'eux (10. 10); et si les cercles sont incommensurables, les cônes et les cylindres seront incommensurables. Il est donc évident pour nous que la commensurabilité ou l'incommensurabilité se rencontre non seulement dans les lignes et dans les surfaces, mais encore dans les solides.

COLLATIO CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ

REGIÆ,

CUM EDITIONE OXONIÆ,

CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI
SUNT MOMENTI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῶν A, B, Γ, Δ τῶ πλήθει τῶν E, Z, H, Θ	τῶ πλήθει	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οἱ δὲ ἐλάχιστοι	<i>Id.</i>	deest.
4. ὁ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τευτίστι	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO II.

1. ἂν τις ἐπιτάξῃ,	<i>Id.</i>	ἐπίταξή τις,
2. ἀριθμὸς δὲ ὁ A δύο τούς A, B πολλαπλασιάσας τούς Γ, Δ πε- ποίηκεν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
in hac demonstratione quater deest adhuc hoc vocabulum.		
4. τῶν	τὸν	concordat cum edit. Paris.
5. Ως δὲ	<i>Id.</i>	ἀλλ' ὡς

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

6. οὕτως	οὕτως καὶ	concordat cum edit. Paris.
7. ἀλλ'	<i>Id.</i>	ἐδείχθη δὲ καὶ
8. τε	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐ- τοῖς,	deest.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

10. ἐὰν	ἂν	concordat cum edit. Paris.
-------------------	--------------	----------------------------

PROPOSITIO III.

1. μὲν ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	ὀριθμοὶ μὲν
2. αἰεὶ	αἰ	concordat cum edit. Paris.
3. οὕ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόν- των αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλ- λήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν	<i>Id.</i>	Οἱ ἄρα αὐτῶν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Ε, Ζ πρῶτοί εἰσιν, ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν
5. ἑκάτερον τῶν	<i>Id.</i>	τὸν ἕτερον τῶν
6. καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ.	<i>Id.</i>	οἱ Η, Κ ἄρα πρῶτοι καὶ οἱ Λ, Ξ.
7. Καὶ εἰσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.	<i>Id.</i>	Καὶ ἐπεὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλ- λήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ μὲν Λ τῷ Α, ὁ δὲ Ξ τῷ Δ.

PROPOSITIO IV.

1. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
2. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
5. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
6. τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονται τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσ-	ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

σοιρες ἀριθμοὶ ἐν τε τοῖς τοῦ Α	<i>a</i>	<i>b, d, e, f, g, h, k, l, n.</i>
πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς		
τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν		
Ζ λόγους.		
7. οἱ δὲ ἐλάχιστοι	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ	<i>Id.</i>	τῶν ὑπὸ Β, Γ
9. μετρουμένός ἐστίν,	μετρεῖται,	concordat cum edit. Paris.
10. ἐν	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἐν	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. Καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε	<i>Id.</i>	εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ
15. ἔτι	<i>Id.</i>	deest.
16. ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ	<i>Id.</i>	Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν αἱ Ν, Ξ, Μ, Ο
λόγους. Εἰ γὰρ μὴ,		ἕξις ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β,
		Γ, Δ, Ε, Ζ λόγους,
17. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
18. τε	<i>Id.</i>	deest.
19. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
20. ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν	ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσι	ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς
τοῖς	τοῖς	

PROPOSITIO V.

1. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸν	ὁ	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	ὁ	concordat cum edit. Paris.
4. Καὶ ὁ Δ	<i>Id. a, d, e, f, g, n.</i>	Οἱ ἄρα Η, Θ, Κ πρὸς ἀλλήλους
		ἔχουσιν τοὺς τῶν πλευρῶν λό-
		γους. Ἀλλ' ὁ τοῦ Η πρὸς τὸν Κ
		λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ Η
		πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς
		τὸν Κ· ὁ Η ἄρα πρὸς τὸν Κ λό-
		γον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν
		πλευρῶν· λέγω οὖν ὅτι ἐστὶν ὡς
		ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς
		τὸν Κ. Ο Δ γὰρ <i>h, k, l.</i>

5. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

1. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖται ὁ Α τὸν Γ. Καὶ ὅσοι *Id.* λέγω γὰρ ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ.
 2. ἀριθμὸν μετρεῖ, *Id.* μετρεῖ ἀριθμὸν.
 3. οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. οὐ *Id.* μὴ
 2. μετρήσει *Id.* μετρήσει, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖν·

PROPOSITIO VIII.

1. αὐτοῖς deest. concordat cum edit. Paris.
 2. αἱ deest. concordat cum edit. Paris.
 3. τουτέστιν ὁ ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. Ἰσάνεις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, καὶ ὁ Λ τὸν Ζ· ὁσάνεις δὲ
 4. εἰσὶν καὶ εἰσιν concordat cum edit. Paris.
 5. ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· *Id.* ἀνάλογόν εἰσιν ἐξῆς

PROPOSITIO IX.

1. μονάδος μονάδος ἐξῆς concordat cum edit. Paris.
 2. μεταξὺ *Id.* deest.
 3. τῆς τῆς Ε concordat cum edit. Paris.
 4. ὁ Ζ *Id.* ὁ Ζ πρὸς
 5. τῷ Ζ *Id.* αὐτῷ
 6. ὁ Θ ὁ Ε concordat cum edit. Paris.
 7. ἶσος δὲ ὁ Μ τῷ Α· *Id.* Ο δὲ Μ τῷ Α ἶσος ἐστίν·

PROPOSITIO X.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἀριθμῶν	ἀριθμῶν ἑκατέρου . . .	concordat cum edit. Paris.
2. μονάδος	<i>Id.</i>	μοιάδος ἐξῆς
3. τε	<i>Id.</i>	deest.
4. ἄρα	ἄρα ἀριθμὸς	concordat cum edit. Paris.
5. μονάς	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. πεποιήκειν*	<i>Id.</i>	deest.
7. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, . .	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XI.

1. ἐστίν	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἀριθμὸς
2. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β* .	<i>Id. a.</i>	Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλα- πλασιάσας τὸν Ε πεποιήκειν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκειν, δύο δὲ ἀριθ- μοὶ οἱ Γ, Δ ἓνα ἀριθμὸν καὶ τὸν αὐτὸν τὸν Δ πολλαπλασιάσαν- τες τοὺς Ε, Β πεποιήκασιν* ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε* <i>b, d, e, f, g, h, k, l, n.</i>
3. ὁ Ε	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πλευράν.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XII.

1. καὶ ὁ Γ	<i>Id.</i>	ὁ Γ ἄρα
2. ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλα- σιάσας τὸν Ε πεποιήκειν, . .	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐπεὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ἔ, τε Α πρὸς τὸν Θ, Δ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Θ	καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Θ	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐξῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. εἰσιν ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσιν
3. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. ἔστωσαν	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Ἀλλὰ δὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ ^ο	πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ με- τρεῖτω	concordat cum edit. Paris.
4. ἐξῆς	<i>Id.</i>	deest.
5. μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ ^ο μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XV.

1. ριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρεῖ	<i>Id.</i>	μετρήσει.
3. ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιά- σας τὸν Η ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ,	<i>Id.</i>	καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω,
4. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
5. Καὶ ἐπεὶ	<i>Id.</i>	ἐπεὶ γάρ

PROPOSITIO XVI.

1. οὐδ'	<i>Id.</i>	οὐδὲ ὅδε
2 ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἔστωσαν	<i>Id.</i>	deest.
4. λέγω	λέγω δὲ	concordat cum edit. Paris.
5. μετρεῖ	<i>Id.</i>	μετρήσει.
6. μετρεῖτω	<i>Id.</i>	μετρεῖτω δὴ
7. μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ.	καὶ ὁ τὸν Δ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι . . .	ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· τουτέστιν ἢ περ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον.	<i>Id.</i>	ἢ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ Γ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ὅ, τε	<i>Id.</i>	ὅ

PROPOSITIO XIX.

1. μὲν ὁ	<i>Id.</i>	ὁ μὲν
2. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐδείχθη.	<i>Id.</i>	ἐδείχθη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. εἰσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ·	Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ πρὸς τὸν Θ· <i>a.</i> . . .	concordat cum edit. Paris. <i>b, d, e, f, g, h, k, l, n.</i>
8. εἰσιν ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσιν
9. λόγῳ.	<i>Id.</i>	deest.
10. Θ	<i>Id.</i>	Θ λόγῳ
11. πολλαπλασιάσας	<i>Id.</i>	πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῆς Ζ, Η
12. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
13. ἔστιν ἄρα ὡς	καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα	concordat cum edit. Paris.
14. ὅ, τε	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. οἱ	<i>Id.</i>	deest.
2. γάρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. Ὡς δη ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε·	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. δὲ	<i>Id.</i>	δὴ
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολ- πλασιάσας τὸν Α πεποιήκει· τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ· ἔστιν ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τευτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποιήκει·	<i>Id.</i> a, h, l.	Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Ζ, Η τὸν Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Β πεποιήκει· <i>b, d, e,</i> <i>f, g, k, n.</i>
8. Καὶ ἐαλλάξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η·	<i>Id.</i>	deest.
9. πλευραὶ αὐτῶν	<i>Id.</i>	αὐτῶν πλευραὶ

PROPOSITIO XXI.

1. οἱ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γάρ	<i>Id.</i>	γὰρ τρεῖς
3. τρεῖς	<i>Id.</i>	deest.
4. ἀριθμοί	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τοῦ πρὸ	<i>Id.</i>	deest.
6. εἰσι ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσι
7. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ·	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
8. δὴ ὁ Ε τὸν Γ	<i>Id.</i>	δὴ ὁ Η τὸν Β
9. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. πεποίηκε	<i>Id.</i>	πεποίηκε τὸν δὲ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν.
11. αὐτοῦ	<i>Id.</i>	αὐτῶν
12. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIV.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
--------------------	----------------	----------------------------

PROPOSITIO XXV.

1. λέγω	<i>Id.</i>	λέγω δὴ
2. ἀριθμοὶ,	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVII.

1. ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	deest.
----------------------	----------------------	--------



LIBER NONUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐπίπεδοι	<i>Id.</i>	deest.
2. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α εἰαυτὸν μὲν . .	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ ὁ Α εἰαυτὸν
3. ἀριθμῶν μεταξὺ	<i>Id.</i>	μεταξὺ ἀριθμῶν

PROPOSITIO II.

1. ἀριθμοί.	<i>Id.</i>	deest.
2. Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω . .	<i>Id.</i>	Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλα- πλασιάσαντες ἀλλήλους τετρά- γωνον τὸν Γ ποιείτωσαν*
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἀριθμός.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα Α, Β	<i>Id.</i>	Α, Β ἄρα

PROPOSITIO III.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἀριθμοὶ ἔμπεπτώκασιν* . .	<i>Id.</i>	ἔμπεπτώκασιν ἀριθμοί*
6. ἔμπεσοῦνται	<i>Id.</i>	ἔμπεπτώκασιν
7. δεύτερες	<i>Id.</i>	τέταρτος

PROPOSITIO IV.

1. γὰρ Α	<i>Id.</i>	Α γὰρ
2. οἱ Α, Β*	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμός	<i>Id.</i>	deest.
----------------------	----------------------	--------

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

2. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.
 3. τῶν *Id.* τὸν

PROPOSITIO VI.

1. ἑαυτὸν *Id.* ἑαυτὸν μὲν
 2. ὁ A ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν A κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B. Καὶ ἐπεὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ B ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ A μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν A κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ ὡς ἄρα
 3. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.
 4. οἱ *Id.* deest.
 5. B, Γ deest. concordat cum edit. Paris.
 6. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.

Nota. Tredecim priores propositiones desunt in codice 2544.

PROPOSITIO VII.

1. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας· *Id.* deest.
 2. πεποίηκεν· *Id.* πεποίηκεν· ὁ B ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ, E πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν·

PROPOSITIO VIII.

1. ἔσται *Id.* ἔστιν
 2. πάντες, deest. concordat cum edit. Paris.
 II. 55

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. πάντες,	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πάντες.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. πάντες.	<i>Id.</i>	ἀπαντες.
6. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
7. πάντες	<i>Id.</i>	deest.
8. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. πάντες κύβου εἰσὶ	<i>Id.</i>	ἀπαντες κύβου τέ εἰσι

PROPOSITIO IX.

1. ἀριθμοὶ ἐξῆς	ἐξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ	concordat cum edit. Paris.
2. ὀσπεθηπετοῦν	<i>Id.</i>	ὀσπεσιῶν
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	τε	concordat cum edit. Paris.
5. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. λέγω	<i>Id.</i>	λέγω δὲ
8. καὶ ἐ Β ἄρα κύβου ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO X.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
2. ὀσπεθηπετοῦν	<i>Id.</i>	deest.
3. χωρὶς	<i>Id.</i>	πλὴν
4. καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὑπέκειτο	<i>Id.</i>	ὑπέκειται
7. τετράγωνός ἐστι,	<i>Id.</i>	deest.
8. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. κύβου	<i>Id.</i>	κύβου· εἰ Β, Γ ἄρα ἕμοις στέρεσι.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XI.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIENSIS.

1. ἐλάχιστος ὁ Β τὸν Ε . . .	<i>Id.</i>	ἐλάσσων ὁ Β τὸν Ε μείζονα
2. αὐτῷ	<i>Id.</i>	τῷ Δ
5. τῷ Δ	<i>Id.</i>	αὐτῷ
4. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

deest.	Καὶ φανερόν ὅτι ἢν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ μοιᾶδος τὴν αὐτὴν ἔχει, καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρούμενου κατὰ τὸν πρὸ αὐτοῦ ὡς τὸν Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	deest in codicibus <i>b, c, d,</i> <i>e, g, h, k, l, m, n</i> ; hoc corollarium inter lineas codicis <i>f</i> est exaratum.
----------------	---	--

PROPOSITIO XII.

1. ἐξῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρήται,	<i>Id.</i>	μετρεῖται,
5. ὀποσειδηποτοῦν	<i>Id.</i>	ὀσειδηποτοῦν
4. ἐξῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μετρεῖτω ὁ Ε τὸν Α.	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἀριθμὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἴσος ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος	ὁ ἄρα ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ὅ τε	<i>Id.</i>	ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάτ- των τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ
13. καὶ ὁ Ε τὸν Α.	ὁ Ε τὸν Α, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενος.	concordat cum edit. Paris.
14. πρώτου	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. οἱ Α, Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται.	deest.	concordat cum edit. Paris.
16. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἄλλου	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἕξῃς	deest.	ἰποσοιῦν ἀριθμὸν ἀπὸ μονάδος
5. πᾶς	<i>Id.</i>	ἅπας
4. ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	<i>Id.</i>	deest.
5. πρώτου μετριθήσεται, . . .	<i>Id.</i>	μετριθήσεται πρώτου,
6. τὸν Δ μετρεῖ	<i>Id.</i>	μετρεῖ τὸν Δ,
7. ὁ Ζ οὐκ ἔστι	<i>Id.</i>	οὐκ ἔστι ὁ Ζ
8. ἐστὶ πρώτος,	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖ- ται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	<i>Id.</i>	ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ὑπὸ τῶν	<i>Id.</i>	ἐκ τῶν
12. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ὑφ'	ὑπὸ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

1. πρώτου	<i>Id.</i>	deest.
2. τῶν	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μετρούμενος*	<i>Id.</i>	μετρούμενος*

PROPOSITIO XV.

1. τῶν Α, Β, Γ	<i>Id.</i>	deest.
2. δι	<i>Id.</i>	δι

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- | | | |
|---|---|--|
| <p>3. πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· .</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν ΕΖ·</p> |
| <p>4. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ᾦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ἄσπε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ὡστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Εὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν.</p> | <p><i>Id.</i> a, l, n.</p> | <p>καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ἄσπε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. b, d, e, f, g, h, k, m.</p> |
| <p>6. ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι.</p> | <p>ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί.</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |
| <p>7. τῶν</p> | <p>deest.</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |
| <p>8. τῶν</p> | <p>deest.</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |

PROPOSITIO XVI.

- | | | |
|---|-----------------------------|-----------------------------------|
| <p>1. οὕτως</p> | <p>deest.</p> | <p>concordat cum edit. Paris.</p> |
| <p>2. ἀριθμοὶ</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>deest.</p> |
| <p>3. ἔχειτας</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>ἔχειτας αὐτοῖς</p> |
| <p>4. ἀτοπον</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>ἀτοπὸν ἐστιν·</p> |
| <p>5. ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β</p> | <p><i>Id.</i></p> | <p>ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἐστὶν·</p> |

PROPOSITIO XVII.

EDICIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἔχειτας	<i>Id.</i>	ἔχειτας αὐτοῖς
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὁ Α καὶ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ Α

PROPOSITIO XVIII.

1. Καὶ εἰ	<i>Id.</i>	Εἰ μὲν οὖν
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIX.

1. πότε	<i>Id.</i>	
2. πότε	<i>Id.</i>	εἰ

Tertium *alinea* sic se habet in codicibus *a*, *b*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

Ἡ οὐκ εἰσὶν ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσὶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἢ οὐτε ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, οὐτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ καὶ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Tertium *alinea* sic se habet in editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Οἱ δὲ Α, Β, Γ ἦτοι ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἰσὶν, εἰ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ οὐτε ἀνάλογον ἐξῆς, οὐτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Post quartum *alinea* hæc leguntur in codicibus *a, d, g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ *A, B, Γ* ἐξῆς ἀνάλογον, τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστι αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εἶδ' οὐκ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἶσιν, ἄκροι δὲ οἱ πρώτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἔστιν ἀδύνατον. Εἰ γὰρ μὴ, προσευρήσθω, καὶ ἔστω ὁ *Δ*· ὡς οὖν ὁ *A* πρὸς τὸν *B* οὕτως ὁ

A, 4. B, 6. Γ, 5. Δ----- E-----

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ *Δ*, ὥστε εἶναι ὡς τὸν *A* πρὸς τὸν *B* οὕτως τοῖς *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, καὶ χειριέτω ὡς ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς μὲν ὁ *A* πρὸς τὸν *B* ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, ὡς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* ὁ *E* πρὸς τὸν *E*· διήσου ἄρα ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. Οἱ δὲ *A, Γ* πρώτοι, οἱ δὲ πρώτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ὅ, τε ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὡς ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ ἄρα τοὺς *A, Γ* μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοῖς *A, B, Γ* δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Γ πρὸς τὸν *Δ*, ὡς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*· ἐξ ἴσου γοῦν ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ* οὕτως ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. Ἀλλὰ μὴν οἱ *A, Γ* πρώτοί εἰσι, πρώτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ, τε ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὁ ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ *A* ἄρα τοὺς *A, Γ* μετρεῖ πρώτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον· τοῖς *A, B, Γ* ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀδύνατον.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν οἱ *A, B, Γ* ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ *A, Γ* μὴ ἔστωσαν πρώτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν·

Πάλιν οἱ *A, B, Γ* ἀνάλογον ἐξῆς ἔστωσαν μὲν οἱ δὲ *A, Γ* ἄκροι οὐ πρώτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστι·

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX IGO.

EDITIO OXONIÆ.

3. ὁ δὴ <i>A</i>	ὁ <i>A</i> ἄρα	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	μὴν	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τοῖς	<i>Id.</i>	τῶν
7. ἀνάλογον	ἀνάλογον εἶς	concordat cum edit. Paris.

Post ultimum *alinea* editionis Parisiensis hæc leguntur in codicibus *a*, *d*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Αλλὰ δὴ οἱ Α, Β, Γ μήτε ἕξις ἕστωσαν ἀνάλογον, μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω.

Αλλὰ μὴν οὐτ' ἀνάλογον ἕξις οἱ Α, Β, Γ οὔτε πρῶτοι οἱ Α, Γ ἄκροι ἕστωσαν, καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁμοίως

A, 5. B, 4. Γ, 9. E, 12. Δ, 56.
 A, 4. B, 5. Γ, 14. E----- Δ, 70.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ, δυνατόν ἐστίν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δείξομεν ἂν ὁ Α τὸν Δ μετρή ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστίν· ἂν δὲ μὴ μετρή, ὅτι ἀδύνατον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Nota. Subsequentia adsunt in codice 190 inter et vocabulum ἀλλήλους et vocabulum λέγω secundi *alinea* paginæ 459; quæ quidem Euclidis esse non possunt.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

deest.

* Λέγω ἔτι καὶ οὕτως ἀδύνατον. Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν ὑπὸ Β, Γ μετρεῖ, προσθήσεται ἢ δεῖξις ὁμοίως τοῖς ἕξις. Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν ὑπὸ Β, Γ, ἀδύνατον αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Οἷον ἔστω ἔμὲν Α τριῶν τινῶν, ὁ δὲ Β, ἕξις ὁ δὲ Γ, ἑπτά· καὶ δηλοῦσθαι δυνατόν. Εἰ δὲ ὁ Α εἴη πέντε, οὐκ ἔστι δυνατόν καὶ ἀπλῶς ὅτι μὲν ὁ Β πολλαπλασιάσας ἐστὶ τοῦ Α, δυνατόν ἐστὶ τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν. Εἰ δὲ μὴ, ἀδύνατον.

deest.

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
1. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω.	<i>Id.</i>	Εἰ γὰρ ὁ Η ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ εἰσὶν αὐτὸς,
2. ἄρα	<i>Id.</i>	concordat cum edit. Paris.
3. Ο αὐτὸς δὲ καὶ	<i>Id.</i>	καὶ

PROPOSITIO XXII.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Ἔστι	Ἔστω	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIII.

1. ὀποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθμοί,	<i>Id.</i>	ἀριθμοὶ περισσοὶ ὀποσοιοῦν,
--	----------------------	-----------------------------

PROPOSITIO XXIV.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ
2. ἀφηρήσθω ἄρτιος,	<i>Id.</i>	ἄρτιος ἀφηρήσθω
3. ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἡμισυᾶ ἄρτιος ἄρα ἔστιν ὁ ΑΓ.	ἄρτιός ἐστιν ὁ ΑΓ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXV.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ
2 ὅτι ὁ	<i>Id.</i>	ὅτι καὶ

PROPOSITIO XXVI.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ
----------------	----------------------	-------

PROPOSITIO XXVII.

1. περισσοῦ	<i>Id.</i>	περισσοῦ ἀριθμοῦ
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Ἔστι δὲ καὶ μινὰς ἢ ΔΑ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἴσσοιεύν ἴσσοὺ concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIX.

1. ἔστιν *Id.* Ο δε συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ἂν τὸ πλῆθος περισσόν, περισσός ἐστιν*

PROPOSITIO XXX.

1. ὁ ἄρα B ἔ B ἄρα concordat cum edit. Paris.
2. ἐστίν *Id.* deest.

PROPOSITIO XXXI.

1. διπλασίονα *Id.* διπλάσιον
2. διπλασίον *Id.* διπλάσιος
3. ἔ A *Id.* ἔ A καὶ
4. ἔ Δ deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXII.

1. δυάδες *Id.* διάδες
2. δυάδες *Id.* διάδες
3. Ὅτι μὲν εἴν ἕκαστος τῶν B, Ὅτι μὲν ἕκαστος ἀρτίος concordat cum edit. Paris.
Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτίος ἐστι, φα- ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ
ιερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδες διάδες
4. λέγω *Id.* λέγω δὲ
5. ἢ E deest. concordat cum edit. Paris.
6. ἔτι deest. ἔτι καὶ

PROPOSITIO XXXIII.

1. ἀρτίος, *Id.* ἀρτίος, ἔ ἡμισυς αὐτοῦ ἄρτίος
ἐστι, καὶ

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIENSIS.
1. ἄρτιος	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. διάδος	Id.	διάδος
3. διάδος	Id.	διάδος
4. περισσός ἐστιν.	Id.	ἐστὶ περισσός.
5. τέμνωμεν	Id.	τ'μαμεν
6. ποιῶμεν	Id.	ποιῶμεν,
7. ἀριθμὸν	Id.	deest.
8. διάδα,	Id.	τινα περισσὸν ὃ μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν, κατατμή- σομεν εἰς διάδα,
9. διάδος	Id.	διάδος
10. ὁ Α	Id.	ὁ Α καὶ

PROPOSITIO XXXV.

2. ἴσοι	Id.	ἴσος
2. πάντας	Id.	ἅπαντας
3. ὁποσοιδηποτοῦν	Id.	ὁσοιδηποτοῦν
4. ἐστί	Id.	deest.
5. τοὺς	Id.	τὸν

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὁσοιδηποτοῦν	Id.	ὁποσοιοῦν
2. deest.	Περιττὸν ἔχέτω. Λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρ- τιος καὶ ἀρτιάκις πε- ρισσός. Ὅτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιακίς ἐστὶν ἄρ- τιος, φαιερόν· τὸν γὰρ ἡμισυ οὐκ ἔχει περισ- σόν· λέγω δὲ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐσ- τιν. Εἰ γὰρ τὸν Α	deest.

τέμνομεν δίχα, καὶ τὸν
 ἥμισυ αὐτοῦ δίχα, καὶ
 τοῦτο αἰ ποιοῦμεν,
 καταστήσωμεν εἰς τινα
 ἀριθμὸν περισσόν, ὃς
 μετρήσει τὸν Α κατὰ
 ἄρτιον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ
 οὐ, καταστήσωμεν εἰς
 τινα ἀριθμὸν περισσόν,
 ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ
 ἄρτιον ἀριθμὸν· κατα-
 στήσωμεν εἰς δυάδα, καὶ
 ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυά-
 δος διπλασιαζομένων,
 ὅπερ οὐκ ὑπόκειται·
 ὡςπερ ὁ Α ἀρτιάκις πε-
 ρισσὸς ἐστίν. Εδείχθη
 δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος·
 ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός
 ἐστὶ καὶ ἀρτιάκις περισ-
 σός. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν·	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὐδὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἀριθμὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστίν·	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

LIBER DECIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
1. ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει . . .	<i>Id. a.</i>	σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον. <i>b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>
4. τετράγωνα	<i>Id. a, b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>	τετράγωνα
5. ἴσα	<i>Id. a, b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>	ἴσαι

PROPOSITIO I.

1. γίγνηται· λειψθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἕλασσον τοῦ . . .	<i>Id.</i>	ἂν γίγνηται· ληφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔστιν ἕλασσον
2. καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειψθήσεται τι μέγεθος ὃ ἔσται . . .	<i>Id.</i>	καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, ληφθήσεται τι μέγεθος ὃ ἔστιν
3. Τὸ Γ γὰρ	<i>Id.</i>	Τὸ γὰρ Γ
4. ΑΒ	<i>Id.</i>	ΑΒ μεγέθους
5. ἡμίσιος	<i>Id.</i>	ἡμίσιος
6. ἢ τὸ ἥμισυ	<i>Id.</i>	τοῦ ἡμίσιος
7. ἢ τὸ ἥμισυ	<i>Id.</i>	τοῦ ἡμίσιος
8. ἡμίση	<i>Id.</i>	ἡμίση

ΑΛΛΩΣ*.

ALITER.

Ἐκείσθω δύο μεγέθη ἀνισα τὰ ΑΒ, Γ, ἔστω δὲ τὸ Γ ἕλασσον', καὶ ἐπεὶ ἕλασσόν ἐστι τὸ Γ, Ἐxponantur due magnitudines inæquales ΑΒ, Γ, sit autem Γ minor, et quoniam minor est

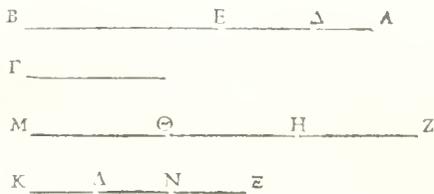
AUTREMENT.

Soient exposées deux grandeurs inégales ΑΒ, Γ; que Γ soit la plus petite.

* Hoc ἄλλως in margine codicis a est exaratum; deest autem in codicibus d, g, et in omnibus aliis est in textu.

πολλαπλασιαζόμενον ἴσται τοῦ AB μείζονος μείζον. Γεγοιέντω ὡς τὸ ZM, καὶ διηρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἔστω³ τὰ MΘ, ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ AB ἀσμήσθω μείζον ἢ τὸ ἡμισυ τὸ BE, καὶ ἀπὸ τοῦ AE μείζον ἢ τὸ ἡμισυ τὸ EA. Καὶ τούτο ἀεὶ γηρήσθω³ ἕως αἰ ἐν τῷ AB διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ ZM διαιρέσει. Γεγονέτωσαν ὡς αἱ BE, EA, AA, καὶ τῷ AA ἕκαστον τῶν KA, AN, NZ ἔστω ἴσον, καὶ τούτο γηρήσθω³ ἕως ἀπὸ αἰ διαιρέσεις τοῦ KΞ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ZM.

Γ, multiplicata, erit aliquando magnitudine AB major. Fiat ut ZM, et dividatur in partes æquales ipsi Γ, et sit MΘ, ΘΗ, ΗΖ, et ab AB auferatur majus quam dimidium BE, et ab AE majus quam dimidium EA. Atque hoc semper fiat quoad divisiones quæ in AB æquales fiant divisionibus quæ in ZM. Fiant ut BZ, EA, AA, et ipsi AA unaquæque ipsarum KA, AN, NZ sit æqualis, atque hoc fiat quoad divisiones ipsius KΞ æquales fiant divisionibus ipsius ZM.



Καὶ ἐπεὶ τὸ BE μείζον ἢ τὸ ἡμισυ ἔστι τοῦ AB, τὸ BE μείζον ἔστι τοῦ EA· πολλῶν ἄρα μείζον ἔστι τοῦ AA. Ἀλλὰ τὸ AA ἴσον ἐστὶ τῷ EN⁴· τὸ BE ἄρα μείζον ἔστι τοῦ NE. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ EA μείζον ἢ τὸ ἡμισυ ἔστι τοῦ EA, μείζον ἔστι τοῦ AA. Ἀλλὰ τὸ AA ἔστιν ἴσον τῷ

Et quoniam BE major quam dimidium est ipsius AB, ipsa BE major est quam EA; multo igitur major est quam AA. Sed AA æqualis est ipsi EN; ergo BE major est quam NE. Rursus, quoniam EA major quam dimidium est EA, major est quam AA. Sed AA est æqualis ipsi NA; ergo

Puisque la grandeur Γ est la plus petite, cette grandeur étant multipliée deviendra enfin plus grande que AB. Qu'elle devienne ZM. Partageons ZM en parties égales chacune à Γ; que ces parties soient MΘ, ΘΗ, ΗΖ; retranchons de AB une partie BE plus grande que sa moitié, de AE une partie EA plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de AB soit égal au nombre des divisions de ZM. Que les divisions de AB soient BE, EA, AA; que chacune des droites de KA, AN, NE soit égale à AA, et que le nombre des divisions de KΞ soit égal au nombre des divisions de ZM.

Puisque BE est plus grand que la moitié de AB, la droite BE sera plus grande que AA, et à plus forte raison que AA. Mais AA est égal à EN; la droite BE est donc plus grande que NE. De plus, puisque la droite EA est plus grande que la moitié de EA, cette droite sera plus grande que AA. Mais

$ΝΑ$ · τὸ $ΕΔ$ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ $ΝΑ$ · ὅλον ἄρα τὸ $ΒΔ$ μείζον ἐστὶ τοῦ $ΞΑ$. Ἴσον δὲ τὸ $ΔΑ$ τῷ $ΑΚ$ · ὅλον ἄρα τὸ $ΒΑ$ μείζον ἐστὶν ὅλου τοῦ $ΞΚ$. Ἀλλὰ τοῦ $ΒΑ$ μείζον ἐστὶ τὸ $ΜΖ$ · πολλῶν ἄρα τὸ $ΜΖ$ μείζον ἐστὶ τοῦ $ΞΚ$. Καὶ ἐπεὶ τὰ $ΞΝ$, $ΝΑ$, $ΑΚ$ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἐπὶ δὲ καὶ τὰ $ΜΘ$, $ΘΗ$, $ΗΖ$ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ $ΜΖ$ τῷ πλείθει τῶν ἐν τῷ $ΞΚ$ · ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $ΚΑ$ πρὸς τὸ $ΖΗ$ οὕτως τὸ $ΞΚ$ πρὸς τὸ $ΖΜ$. Μείζον δὲ τὸ $ΖΜ$ τοῦ $ΞΚ$ · μείζον ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ$ τοῦ $ΑΚ$. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $ΖΗ$ ἴσον τῷ $Γ$, τὸ δὲ $ΚΑ$ τῷ $ΑΔ$ · τὸ $Γ$ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ $ΑΔ$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

$ΕΔ$ major est quam $ΝΑ$; tota igitur $ΒΔ$ major est quam $ΞΑ$. $Ἐ$ quale autem $ΔΑ$ ipsi $ΑΚ$; tota igitur $ΒΑ$ major est quam tota $ΞΚ$. Sed quam $ΒΑ$ major est $ΜΖ$; multo igitur $ΜΖ$ major est quam $ΞΚ$. Et quoniam $ΞΝ$, $ΝΑ$, $ΑΚ$ æquales inter se sunt, sunt autem et ipsæ $ΜΘ$, $ΘΗ$, $ΗΞ$ æquales inter se, atque est æqualis multitudo ipsarum in $ΜΖ$ multitudini ipsarum in $ΞΚ$; est igitur ut $ΚΑ$ ad $ΖΗ$ ita $ΞΚ$ ad $ΖΜ$. Major autem $ΖΜ$ quam $ΞΚ$; major igitur et $ΖΗ$ quam $ΑΚ$. Atque est quidem $ΖΗ$ æqualis ipsi $Γ$; ipsa autem $ΚΑ$ ipsi $ΑΔ$; ergo $Γ$ major est quam $ΑΔ$. Quod oportebat ostendere.

$ΑΔ$ est égal à $ΝΑ$; la droite $ΕΔ$ est donc plus grande que $ΝΑ$; la droite entière $ΒΔ$ est donc plus grande que $ΞΑ$. Mais $ΔΑ$ est égal à $ΑΚ$; la droite entière $ΒΑ$ est donc plus grande que la droite entière $ΞΚ$. Mais $ΜΖ$ est plus grand que $ΒΑ$; la droite $ΜΖ$ est donc à plus forte raison plus grande que $ΞΚ$. Et puisque les droites $ΞΝ$, $ΝΑ$, $ΑΚ$ sont égales entr'elles, que les droites $ΜΘ$, $ΘΗ$, $ΗΖ$ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties de $ΜΖ$ est égal au nombre des parties de $ΞΚ$, la droite $ΚΑ$ sera à $ΖΗ$ comme $ΞΚ$ est à $ΖΜ$ (12. 5). Mais $ΖΜ$ est plus grand que $ΞΚ$; la droite $ΖΗ$ est donc plus grande que $ΑΚ$ (14. 5). Mais $ΖΗ$ est égal à $Γ$, et $ΚΑ$ égal à $ΑΔ$; la droite $Γ$ est donc plus grande que $ΑΔ$. Ce qu'il falloit démontrer.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἔστω δὲ τὸ $Γ$ ἕλασσον, . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ ἴσα τῷ $Γ$, καὶ ἔστω . . .	Id.	τὰ ἴσα τῷ $Γ$
3. γιγνέσθω	γίνεσθω	concordat cum edit. Paris.
4. γιγνέσθω	γινέσθω	concordat cum edit. Paris.
5. ἄν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ $ΔΑ$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΞΝ$ · . . .	Id.	τῷ $ΔΑ$ ἴσον ἐστὶ τὸ $ΞΝ$ ·
7. τὸ $ΑΔ$ ἐστὶν ἴσον τῷ $ΝΑ$ · . . .	Id.	τῷ $ΔΑ$ ἴσον ἐστὶ τὸ $ΝΑ$ ·
8. Ἴσον δὲ τὸ $ΔΑ$ τῷ $ΑΚ$	Id.	Ἀλλὰ καὶ τῷ $ΔΑ$ ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΚ$ ·

PROPOSITIO II.

1. ὅτων Id. ἐκκειμένων

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

2. καὶ	<i>Id.</i>	καὶ ἕϊτος
3. τὸ	<i>Id.</i>	ὁ
4. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO III.

1. μεγέθη σύμμετρα	<i>Id.</i>	σύμμετρα μεγέθη
2. μέγεθος ἦτοι	μέγεθος	ἦτοι
3. εὖν	<i>Id.</i>	εὖν τὸ AB τὸ ΓΔ
4. τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν, καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον.	<i>Id.</i>	κοινὸν μέτρον ἐστὶ τῶν AB, ΓΔ. Καὶ φανερόν ὅτι μέτρον ἐστὶ μέγιστον.
5. καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος	<i>Id.</i>	ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάτ- τονος ἀεὶ
6. ΕΔ	<i>Id.</i>	ΓΔ
7. ΑΖ δὲ	<i>Id.</i>	δὲ ΑΖ
8. τὸ ΑΖ ἄρα τὰ AB, ΓΔ μετρεῖ.	Hæc phrasis contrac- ta margini exarata est manu alienâ.	concordat cum edit. Paris.
9. Ἐστω	<i>Id.</i>	μετρεῖτω, καὶ
10. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. λοιπὸν	<i>Id.</i>	λοιπὸν ἄρα
12. AB, ΓΔ	<i>Id.</i>	AB, ΓΔ μεγέθη

PROPOSITIO IV.

1. δύο	<i>Id.</i>	deest.
2. εὖ	<i>Id.</i>	εὖ μετρεῖ
3. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ.	Hæc phrasis exarata est litteris mino- ribus in infimâ pa- ginâ.	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ Δ ἄρα	τὸ δὲ ΑΔ	concordat cum edit. Paris.
5. Α, Β εὖ μετρεῖ.	<i>Id.</i>	Α, Β, Γ εὖ μετρίσει. Εἰ γὰρ δυ- ιατὸν, μετρεῖτω τὰ Α, Β, Γ μεῖζον τοῦ Δ μεγέθους, τὸ Ε.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

	<i>a, e.</i>		Καὶ ἐπεὶ τὰ A, B, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ A, B μετρήσει, καὶ τὸ τῶν A, B μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Δ, τὸ μείζον τὸ ἔλαστον, ὕπερ ἀδύνατον. <i>d, f,</i> <i>g, h, l, m, n.</i>
6. οὖν	<i>Id.</i>	deest.	
7. μετρήσει	<i>Id.</i>	μετρεῖ	
8. Τὸ E ἄρα τὰ A, B, Γ μετρεῖ	<i>Id.</i>	deest.	
9. ἐστὶ μέτρον.	<i>Id.</i>	μέτρον ἐστὶ.	
10. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.	
11. A, B	<i>Id.</i>	A, B ἄρα	
12. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστοι κοι- νὸν μέτρον ἐστὶ τὸ E· τὸ Z ἄρα τὸ τὸ E μετρεῖ,	ἔστι δὲ τὸ E, τὸ Z ἄρα τὸ E μετρήσει,	concordat cum edit. Paris.	
13. μεζέθη	deest.	concordat cum edit. Paris.	
14. ἐάν	ἂν	concordat cum edit. Paris.	
15. συμμετρῶν δεθέντων, . . .	<i>Id.</i>	δεθέντων συμμετρῶν,	

COROLLARIUM.

16. μέτρον μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρήσει μέτρον.
17. προχωρήσει.	προχωρήσει. Οπερ ἔδει δείξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

1. ἔσται	<i>Id.</i>	ἐστὶ
2. τὰ A, B πρὸς ἄλληλα . . .	<i>Id.</i>	πρὸς ἄλληλα τὰ A, B
3. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	ταυτό
4. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

linea 1	μετρεῖ δὲ ἢ μίας τὸν Δ ἀριθμὸν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α.	Legere est in infimâ paginâ edit. Oxoniæ: <i>illa in uncis inclusa desiderantur in utroque codd. mss.</i>	concordat cum edit. Paris.
		Illa non desiderantur in codicibus <i>a, d, e, f, g, h, l, m, n.</i>	
5.	τὸ Γ	ὁ Γ	concordat cum edit. Paris.
6.	ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
7.	τῷ Ζ	<i>Id.</i>	τῷ Ζ μετρήθη
8.	τὸν Ε.	<i>Id.</i>	τὸν Ε ἀριθμὸν.
9.	ἐπὶ	<i>Id.</i>	deest.
10.	τὸ Α	deest.	concordat cum edit. Paris.
11.	μετρεῖ	deest.	μὲν

A L I T E R*.

1.	οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2.	τὸ	τὸν	concordat cum edit. Paris.
3.	οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4.	οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5.	τὸ	<i>Id.</i>	τὸν
6.	καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7.	Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8.	Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	<i>Id.</i>	deest.

C O R O L L A R I U M**.

1.	ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως ἢ εὐθεία	<i>Id.</i>	τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὴν εὐθείαν
2.	εὐθείας.	εὐθείας. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

* Deest in codd. *d, e*; reperitur autem in codd. *f, g, h, l, m, n*; atque est exaratum in summâ paginâ codicis *a*.

** Reperitur in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n*.

PROPOSITIO VIII.

EDITIO PARISIENSIS.	COD. 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἔστι	<i>Id.</i>	ἔσται
2. Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.	<i>Id.</i>	Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει ὄνπερ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

PROPOSITIO IX.

1. ὄν	<i>Id.</i>	ἔνπερ
2. ὄν	<i>Id.</i>	ἴδιπερ
3. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
4. ὄν	<i>Id.</i>	ἔνπερ
5. πρὸς τὸν Δ,	<i>Id.</i>	ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν,
6. τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ	<i>Id.</i>	τοῦ δὲ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν
7. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
8. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον.	<i>Id.</i>	ἀριθμοῦ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμὸν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.
10. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τετράγωνον*	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
13. τοῦ Δ*	<i>Id.</i>	τοῦ Δ τετράγωνον*
14. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
15. ἔστι	<i>Id.</i>	deest.
16. τοῦ Γ	<i>Id.</i>	τοῦ Γ ἀριθμοῦ
17. τετραγώνου	<i>Id.</i>	τετραγώνου ἀριθμοῦ
18. τοῦ Δ	<i>Id.</i>	τοῦ Δ ἀριθμοῦ
19. τετράγωνον	<i>Id.</i>	τετράγωνον ἀριθμὸν
20. τοῦ Γ	<i>Id.</i>	τοῦ Γ ἀριθμοῦ
21. λόγου*	<i>Id.</i>	ἀριθμοῦ λόγον
22. ὁ Γ	<i>Id.</i>	ὁ Γ ἀριθμὸς
23. τὸν Δ	<i>Id.</i>	τὸν Δ ἀριθμὸν*

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
24. μήκει	<i>Id.</i>	μήκει. Οπερ εἶδει δεῖξαι.
25. δὴ	<i>Id.</i>	δὴ
26. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
27. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
28. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
29. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
50. δὴ	<i>Id.</i>	δε
51. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
52. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται
53. μήκει,	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R.

In editionibus Basilicae et Oxoniae variae partes hujus ἀλλως insertae sunt in varias partes propositionis 9; in codicibus autem *a* et *d* hoc ἀλλως exaratum est in margine; in codicibus vero *a, d, e, f, g, h, l, m, n* sic ordo se habet: 1° prop. 9 corollarium; 2° lemma prop. 10; 3° ἀλλως prop. 9; 4° prop. 11; 5° prop. 10.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
1. μήκει,	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ δὲ Γ τὸν Δ	<i>Id.</i>	τὸν δὲ Δ
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ὁ δὲ Δ τὸν Γ	<i>Id.</i>	τὸν δὲ Γ
linea 15 ἀριθμὸν.	<i>Id.</i>	ἀριθμὸν. Οπερ εἶδει δεῖξαι.
5. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴσται	εἴσται	concordat cum edit. Paris.
7. Ως δε τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τῶν Η,	Legere est in infimâ paginâ editionis Oxoniae : <i>desiderantur in codd. mss.</i>	concordat cum edit. Paris.
	Illa non desiderantur in codicibus <i>a, e, f, g, h, l, m, n.</i>	

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

linea 12	ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, etc. usque ad vocabulum ὄπερ.	Legere quoque est in infimâ paginâ : <i>illa uncis inclusa non agnoscunt codd. mss.</i>	concordat cum edit. Paris.
		Illa agnoscunt codices <i>a, e, f, g, h, l, m, n.</i>	
8.	εὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9.	εὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10.	τὸν Ζ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	τὸν Ζ.	concordat cum edit. Paris.

C O R O L L A R I U M*.

1.	φανερὸν	<i>Id.</i>	φανερὸν ἔστω
2.	ἴσται	<i>Id.</i>	deest.
3.	σύμμετροι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4.	καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι εὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.	deest. <i>a, d, e, f, g, h, l, m, n.</i>	concordat cum edit. Paris.
5.	γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6.	εἰσὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7.	εὖν	<i>Id.</i>	deest.
8.	ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει,	<i>Id.</i>	ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἕτερόν τινα ἀριθμὸν, σύμμετρά ἔσται τὰ τετράγωνα, τούτέστιν αἱ εὐθεῖαι ἀφ' ὧν ἀνεγράφησαν δυνάμει,
9.	τὰ μὲν μήκει σύμμετρα	<i>Id.</i>	αἱ μὲν μήκει σύμμετροι
10.	τὰ	<i>Id.</i>	αἱ
11.	καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12.	δυνάμει.	deest.	δυνάμει ἀσπμμετροι.
13.	Ἐπεὶ δὴ γὰρ	<i>Id.</i>	Ἐπειδήπερ
14.	ἀριθμὸς	τετράγωνα ἀριθμὸς	concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

15. ἀριθμὸν,	τετράγωνον ἀριθμὸν, . .	concordat cum edit. Paris.
16. τῷ	<i>Id.</i>	deest.
17. μήκει δύνανται,	<i>Id.</i>	καὶ δύνανται μήκει,
18. μήκει	<i>Id.</i>	εἶσιν

PROPOSITIO X.

2. ἔσται	<i>Id.</i>	ἔστιν.
3. ἔσται.	<i>Id.</i>	ἔστιν.
4. ἀριθμὸν	<i>Id.</i> <i>a, d, e, h, l.</i>	ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔχει λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, καὶ ἔσται σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄταστον, ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον τὸ Γ ὅρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν <i>f, g, m, n.</i>

PROPOSITIO XI.

1. τῆς	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
3. τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεῦρηται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε· μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε.	<i>Id.</i> <i>a, e, h, l.</i>	τῇ ὅρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἷονεὶ τῇ Α, δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. Ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ. <i>d, f, g, m, n.</i>

PROPOSITIO XII.

1. Β τῷ Γ,	Γ τῷ Β	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

Hæc propositio, quæ prorsus eadem est quæ subsequens, exarata est vocabulis contractis, et alienâ manu in summâ paginâ codicis *a*, in margine vero cod. *d*, et in textu codd. *e, f, g, h, l, m, n*.

PROPOSITIO XIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἄλλω	<i>Id.</i>	ἐτέρω
lin. 9 paginæ 147 τὸ Β τῶ Γ,	τὸ Γ τῶ Β	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστι	<i>Id.</i>	deest.

LEMMA.

1. ὀρθή ἐστιν	<i>Id.</i>	ἐστὶν ὀρθή
2. τῆς	<i>Id.</i>	τῆ
3. εὐθείαι δοθεῖσαι	<i>Id.</i>	δοθεῖσαι εὐθείαι
4. κείσθωσαν	<i>Id.</i>	ἐκείσθωσαν

PROPOSITIO XV.

1. ἑαυτῆ	<i>Id.</i>	ἑαυτῆ μήκει
2. ἑαυτῆ	<i>Id.</i>	ἑαυτῆ μήκει.
3. ἑαυτῆ	<i>Id.</i>	ἑαυτῆ μήκει
4. ἑαυτῆ	<i>Id.</i>	ἑαυτῆ μήκει.
5. δὴ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
6. τῆ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
10. ἐστι	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVI.

1. ἐστὶ σύμμετρον.	<i>Id.</i>	σύμμετρόν ἐστιν.
2. ΑΓ	<i>Id.</i>	καὶ τὸ ΑΓ

5. ΑΓ ἐνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἔστω σύμμετρον, ἔστω δὲ τῷ ΑΒ* . . . τῇ ΑΒ* concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVII.

1. Συγκείσθω *Id.* Συγκείσθωσαν
 2. ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρίτω, καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, τὸ Δ. ἀσύμμετρον τὸ ΓΑ, ΑΓ μετρήσει τι μέγεθος. Μετρίτω, εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω τὸ Δ. concordat cum edit. Paris.
 3. ἔστιν ἀδύνατον* *Id.* ἀδύνατον ἔστιν*
 4. ἔστω, καὶ ἔστω δὲ concordat cum edit. Paris.
 5. ἔσται *Id.* ἔστι
 6. ὑπέκειτο *Id.* ὑπέκειτο
 7. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται. deest. *a, d, e, f, g.* concordat cum edit. Paris.

LEMMA*.

1. παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, *Id.* τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον,
 2. ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. *Id.* ΑΓ, ΓΒ.

PROPOSITIO XVIII.

1. παραλληλόγραμμον deest. concordat cum edit. Paris.
 2. μήκει* *Id.* μήκει*
 3. μήκει. deest. concordat cum edit. Paris.
 4. δύνηται *Id.* δυνήσεται
 5. μήκει, deest. concordat cum edit. Paris.
 6. τετάρτῳ *Id.* τετάρτῳ μέρει
 7. παραλληλόγραμμον deest. concordat cum edit. Paris.
 8. μήκει. *Id.* μήκει.
 9. παραλληλόγραμμον deest. concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, r.*

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

10. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τῆ	<i>Id.</i>	τῶ
12. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τετραπλασίου τοῦ	<i>Id.</i>	τετράκις
14. τετραπλασίῳ τοῦ	<i>Id.</i>	τετράκις
15. τετραπλασίῳ τοῦ	<i>Id.</i>	τετράκις
16. ἡ ΖΔ	<i>Id.</i>	ΖΔ
17. τετραπλασίῳ τοῦ	<i>Id.</i>	τετράκις
18. σύμμετρος ἔστι ταῖς ΒΖ, ΓΔ μήκει	<i>Id.</i>	ταῖς ΒΖ, ΓΔ ἔστι σύμμετρος μήκει
19. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. μήκει,	deest.	concordat cum edit. Paris.
21. μείζον τῆς Α	deest.	τῆς Α μείζον
22. ἑαυτῆ	ἑαυτῆς.	concordat cum edit. Paris.
linea 2 paginæ 159 σύμμετρος ἔστι τῆ ΔΓ ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῆ ΓΔ σύμμετρος ἔστι μήκει καὶ διελόντι	<i>Id.</i>	τῆ ΔΓ σύμμετρος ἔστι μήκει, ἴση γάρ ἔστι ἡ ΒΖ τῆ ΔΓ καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρος ἔστι μήκει τῆ ΔΓ δηλονότι

PROPOSITIO XIX.

1. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δύνηται	<i>Id.</i>	δυνήσεται
5. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πρότερον,	<i>Id.</i>	προτέρω
5. ὅτι καὶ	<i>Id.</i>	οὖν ὅτι
6. μήκει,	<i>Id.</i>	deest.
linea 15 paginæ 160 ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
linea 2 paginæ 161 ἑαυτῆ	ἑαυτῆς.	concordat cum edit. Paris.
8. ἑαυτῆ	ἑαυτῆς	concordat cum edit. Paris.
9. ἡ	<i>Id.</i>	καὶ ἡ

SCHOLIUM I*.

1. Ἐπεὶ	<i>Id.</i>	Ἐπεὶ δὴ
-------------------	----------------------	---------

* Non deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

2. εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμεις	αἱ δὲ δυνάμεις σύμμετροι	concordat cum edit. Paris.
5. δὴ δύναται μήκει	<i>Id.</i>	δηλαδὴ δύναται καὶ μήκει
4. ἐπεὶ αἱ	<i>Id.</i>	αἱ γὰρ
5. αὐτῇ	<i>Id.</i>	deest.

ΣΧΟΛΙΟΝ β*.

SCHOLIUM II.

Ῥητὰς γὰρ¹ καλεῖ τὰς τῇ ἑκκειμένη ῤητῇ ἥτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. Εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ἑκκειμένη ῤητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῤηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ' ἑ ῤηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἥτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῤηταὶ μήκει σύμμετροι, ἐπακουσμένου καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως² ῤηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὅτι δὲ αἱ ῤηταὶ σύμμετροί εἰσιν,

Rationales enim vocat eas expositæ rationali vel longitudine et potentiâ commensurabiles, vel potentiâ solùm. Sunt autem et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt expositæ rationali, potentiâ vero solùm commensurabiles, et ob id rursus dicuntur rationales et commensurabiles inter se quatenus rationales, sed commensurabiles inter se, vel longitudine scilicet et potentiâ vel potentiâ solùm. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentiâ; si vero potentiâ solùm inter se sunt commensurabiles, dicuntur et ipsæ sic rationales potentiâ solùm commensurabiles. Quod et rationales commensurabiles sint, ex his manifestum est; quoniam

SCHOLIE II.

Car il appelle rationnelles celles qui sont commensurables en longueur et en puissance, ou en puissance seulement avec la rationnelle exposée. Il est d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec la rationnelle exposée, lui sont commensurables en puissance seulement; et à cause de cela elles sont encore dites rationnelles et commensurables entr'elles en tant que rationnelles; mais commensurables entr'elles en longueur et en puissance, ou en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, elles sont dites rationnelles commensurables en longueur, afin que l'on entende qu'elles le sont aussi en puissance; mais si elles sont commensurables entr'elles en puissance seulement, elles sont dites rationnelles commensurables en puissance seulement. Or, il est évident que les rationnelles sont com-

* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ρηταὶ εἰσιν αἱ τῇ ἐκ-
κειμένη ρητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμ-
μετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα
ρητὰ σύμμετροί εἰσιν³.

enim rationales sunt quæ expositæ rationali
commensurabiles, quæ vero eidem commensu-
rabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ
igitur rationales commensurabiles sunt.

mesurables; car puisque les rationelles sont commensurables avec la rationelle exposée, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles (12. 10), il s'ensuit que les rationelles sont commensurables.

EDITIO PARIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. Ρητὰς γὰρ	<i>Id.</i>	Ρητὰς
2. οὕτως	<i>Id.</i>	deest.
3. εἰσιν.	<i>Id.</i>	εἰσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XX.

1. εἰρημένων	<i>Id.</i>	προεἰρημένων
2. σύμμετρος δὲ ἐστὶν ἢ ΒΔ τῇ ΒΓ·	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXI.

1. προεἰρημένων	<i>Id.</i>	εἰρημένων
2. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ἐστὶ

LEMMA*.

1. ἔσται	<i>Id.</i>	ἔστι
2. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶν ἢ Α.	<i>Id.</i>	ἢ Α ἐστὶν.
4. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	hæc phrasis contrac- ta est.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXII.

1. ἔσται·	<i>Id.</i>	ἔστω
-------------------	----------------------	------

* Non deest in codicibus a, d, e, f, g, h, l, m, n.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

<p>2. μέση.</p>	<p>μέση, δια τὸ τὴν ἴσον ἀνα- γράφουσαν τετράγωνον τῷ ΑΓ χωρίῳ ἢν καλεῖ μέσην, μέσην ἀνάλογον εἶναι τῶν ΑΒ, ΒΓ. <i>a, d.</i></p>	<p>μέση, διὰ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετρά- γωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τῶν ΑΒ, ΒΓ. <i>c,</i> <i>f, g, h, l, m, n.</i></p>
-------------------------	--	---

Subsequens scholium nihil aliud est quam propositio 22 aliter demonstrata.

ΣΧΟΛΙΟΝ*

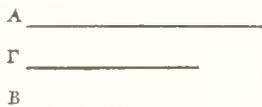
SCHOLIUM.

Μέση ἐστὶν ἄλογος ἢ δυναμένη χωρίον περιε-
χόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Media est irrationalis quæ potest spatium con-
tinentum sub rationalibus potentiâ solùm com-
mensurabilibus.

Υπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων
εὐθειῶν τῶν Α, Β περιεχέσθω χωρίον. Δεικτέον
ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm com-
mensurabilibus rectis Α, Β contineatur spatium.
Ostendendum est irrationale esse hujusmodi
spatium.



Εὐλήθω γὰρ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἢ Γ·
τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ·
ὥστε ἢ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα

Sumatur enim ipsarum Α, Β media propor-
tionalis Γ; rectangulum igitur sub Α, Β æquale
est quadrato ex Γ; quare Γ potest rectangulum

SCHOLIE.

La médiale qui peut une surface comprise sous des rationnelles commensurables en puissance seulement, est irrationnelle.

Qu'une surface soit comprise sous les droites rationnelles Α, Β commensurables en puissance seulement; il faut démontrer qu'une telle surface est irrationnelle.

Car prenons une droite Γ moyenne proportionnelle entre Α et Β; le rectangle sous Α, Β sera égal au carré de Γ (17. 6); la droite Γ peut donc le rectangle

* Deest in codd. *a, c, d, e, f, g, h, l, m, n*; reperitur vero in cod. *g*.

ὡς ἢ *A* πρὸς τὴν *B* οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Γ*, ὡς γὰρ ἢ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δίδιχται ἐν τῷ περίσματι τοῦ β' τοῦ ε' στοιχείου. Ἀσύμμετροι δὲ ἢ *A* τῇ *B* μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τῷ ἀπὸ τῆς *Γ*. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *A*· ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν *A*, *B*· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ *Γ*. Μέση δὲ ἐκλήθη, ἔτι ἄλογος οὖσα μέσση δύο ρητῶν τῶν *A*, *B* ἀνάλογον ἐστίν.

sub *A*, *B*; est igitur ut *A* ad *B* ita ex *A* quadratum ad ipsum ex *Γ*, ut enim prima ad tertiam ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ, hoc enim demonstratum est in corollario propositionis 28 sexti Elementorum. Incommensurabilis autem *A* ipsi *B* longitudine; incommensurable igitur et ex *A* quadratum quadrato ex *Γ*. Rationale autem quadratum ex *A*; irrationale igitur rectangulum sub *A*, *B*; irrationalis igitur est *Γ*. Media autem vocatur, quod irrationalis existens media duarum rationalium *A*, *B* proportionalis est.

sous *A*, *B*; la droite *A* est donc à *B* comme le quarré de *A* est au quarré de *Γ*; car la première est à la troisième comme le quarré de la première est au quarré de la seconde, ainsi que cela est démontré dans le corollaire 28 du sixième livre des Éléments. Mais *A* est incommensurable en longueur avec *B*; le quarré de *A* est donc incommensurable avec le quarré de *Γ* (10. 10). Mais le quarré de *A* est rationel; le rectangle compris sous *A*, *B* est donc irrationel; la droite *Γ* est donc irrationelle; et on l'appèle médiale, parce qu'étant irrationelle, elle est moyenne proportionnelle entre les deux rationelles *A*, *B*.

L E M M A*.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἐστίν	<i>Id.</i>	ἔσται
2. Ὁπερ ἔδει δεῖξαι.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXIII.

1. παραβαλλόμενον	<i>Id.</i>	παραβαλλόμενον
2. ὀρθογώνιον	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστὶ	<i>Id.</i>	εἶσι
6. περιεχομένηφ.	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codd. *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO XXIV.

EDITIO PARIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Ἡ δὲ τὸ	<i>Id.</i>	τὸ δὲ
3. δυναμένη μέση ἐστίν*	<i>Id.</i>	εὐθείον περιεχόμενοι ἑρθωόνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἡ δυναμένη μέση.

COROLLARIUM*.

1. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει.	<i>Id.</i>	μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι.

Subsequentia, quæ desunt in codd. *e, m, n*, reperiuntur in codd. *a, d, f, g, l*.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὼς μέσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἦτοι μήκει διπλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγεται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ἐπομένῃ τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οἱ δὲ

Sunt autem rursus et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt mediæ, potentiâ vero solùm commensurabiles, et dicuntur rursus mediæ, quoniam commensurabiles sunt potentiâ mediæ et commensurabiles inter se, nam mediæ aliæ commensurabiles inter se vel longitudine scilicet et potentiâ, vel potentiâ solùm. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ mediæ longitudine commensurabiles, consequenter etiam et potentiâ. Si autem potentiâ solùm sunt commensurabiles, dicuntur et sic mediæ potentiâ solùm com-

Il est encore d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec une médiale, ne sont commensurables avec elle qu'en puissance; on les appelle encore médiales, parce qu'elles sont commensurables en puissance avec une médiale et commensurables entr'elles; car les autres médiales sont commensurables entr'elles, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, on les appelle médiales commensurables en longueur, et par conséquent en puissance; et si elles ne sont commensurables qu'en puissance, on les appelle médiales commensurables en puissance seulement. On

* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n*.

αὶ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως² δεικτέον. Ἐπεὶ αὶ μέσαι μέση τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῶ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αὶ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

mesurables. Quod vero mediæ commensurabiles sint, sic ostendendum est. Quoniam mediæ mediæ cuidam commensurabiles sunt, et quæ eidem commensurabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ igitur mediæ commensurabiles sunt.

démontre ainsi que ces médiales sont commensurables. Puisque ces médiales sont commensurables avec une médiale, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles, les médiales sont commensurables.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. μέσαι *Id.* deest.
2. οὕτως *Id.* οὕτω

PROPOSITIO XXV.

1. κατὰ τινὰ τῶν εἰρημίμων τρό- *Id.* deest.
πων
2. ἐστὶ *Id.* ἐστὶ καὶ

PROPOSITIO XXVI.

1. εὐθειῶν *Id.* deest.
2. περιεχέσθω ἑρθογώνιον . . . *Id.* ἑρθογώνιον περιεχέσθω
3. ἢ μέσον ἐστίν. *Id.* ἐστὶν ἢ μέσον.
4. ἄρα *Id.* ἄρα ἐστὶ
5. καὶ ἐπεὶ *Id.* Ἐπεὶ οὖν
6. καὶ ἐστὶν *Id.* Ἐστὶν ἄρα καὶ
7. σύμμετρός ἐστι *Id.* ἢ ΘΚ σύμμετρός ἐστὶ τῆ ΘΝ, τ.υ-
τέστι
8. ΘΜ *Id.* ΘΜ ἄρα
9. ἢ μέσον ἐστίν. *Id.* ἐστὶν ἢ μέσον

PROPOSITIO XXVII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἴστί· ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον ἴστί.
2. παράκειται	<i>Id.</i>	παράκειται·
4. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 21 paginæ 179 Μέσον ἄρα μέσου,	<i>Id.</i>	Οὐκ ἄρα μέσον μέσου,

PROPOSITIO XXVIII.

1. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
6. σύμμετροι. Ὅπερ ἔδει δείξαι.	<i>Id.</i>	σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

PROPOSITION XXIX.

1. τρεῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνά- μει μόνον εἰσὶ.	καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι.	concordat cum edit. Paris.
5. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. αὐτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. μέσον περιέχουσαι. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.	καὶ τὰ ἐξῆς.	concordat cum edit. Paris.

LEMMA I*.

1. δὲ	<i>Id.</i>	δὴ
2. ἐκ	<i>Id.</i>	ὑπὸ

* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|-------------------------------|----------------|----------------------------|
| 5. τοῦ | τῆς | concordat cum edit. Paris. |
| 4. Οπερ εἶδει δεῖξαι. | deest. | concordat cum edit. Paris. |

C O R O L L A R I U M*.

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1. τὸν | <i>Id.</i> | τὴν |
| 2. ὧσιν ἐπίπεδοι. | <i>Id.</i> | ἐπίπεδοι ὧσιν. |
| 5. ὁ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τετράγωνος. | τετράγωνος. Ο ἄρα ὁ | concordat cum edit. Paris. |

L E M M A I I**.

- | | | |
|--|---|---|
| 1. κατὰ τὸ Δ | τῷ Δ | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ὁ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τοῦ | τῆς | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τοῦ | τῆς | concordat cum edit. Paris. |
| 5. Αφηρήσθω | Αφηρήσθω ὁμοίως | concordat cum edit. Paris. |
| 6. AB, ΒΓ τετράγωνος | AB, ΒΓ | concordat cum edit. Paris. |
| 7. τοῦ | τῆς | concordat cum edit. Paris. |
| 8. τοῦ | τῆς | concordat cum edit. Paris. |
| 9. τοῦ | τῆς | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἐστὶ | <i>Id.</i> | ἐσται |
| 11. τοῦ | τῆς | concordat cum edit. Paris. |
| 12. τοῦ ἀπὸ τοῦ BE, | <i>Id.</i> | deest. |
| 13. μονάς. | <i>Id.</i> | μονάς, μήτε ὁ ἐκ τῶν AB, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΔ, ἴσος ἢ τῷ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ. |
| 14. τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ BE, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ HA. | τῆς ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τῆς BE, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίους ὁ HA. | τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ BE, καὶ ἔστω διπλασίων ὁ HA τῆς ΔΕ μονάδες. |
| 15. ὁ δὲ AH τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίων | <i>Id.</i> | ὧν ὁ AH ἐστὶ διπλασίων τοῦ ΔΕ. |
| 16. τοῦ | deest. | concordat cum edit. Paris. |

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

** Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
17. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
18. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. ἐκ τῶν	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν
21. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
23. ὁ AB ἴσος τῷ HB, . . .	ἡ AB ἴση τῇ HB, . . .	concordat cum edit. Paris.
24. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
25. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
26. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
27. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
28. διπλασίον	<i>Id.</i>	διπλάσιος κείσθω
29. Καὶ	<i>Id.</i>	deest.
30. διπλασίον	<i>Id.</i>	διπλάσιος
31. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
32. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
33. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
34. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
35. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἴσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ,	<i>Id.</i>	συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ τῷ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΖ,
36. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
37. τῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
38. αὐτῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
39. τοῦ ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ.	τῆς ΒΕ.	concordat cum edit. Paris.
40. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
41. τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύται, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος,	τοὺς εἰρημένους ἀριθμούς ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσ- θωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι,	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXX.

1. τὴν	τὴν	concordat cum edit. Paris.
2. τετράγωνον,	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

5. εἶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστίν	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 12 μῦκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μείζον	μείζονα	concordat cum edit. Paris.
7. ποιῆσαι	Id.	δείξαι.

PROPOSITIO XXXI.

1. ἀριθμοὶ	Id.	deest.
2. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶ	τῆ	concordat cum edit. Paris.

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ*.

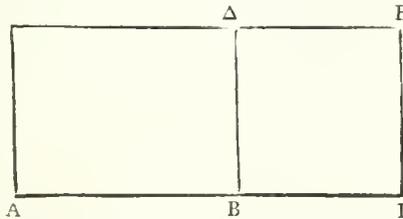
LEMMA.

Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Si sint duæ rectæ in ratione aliquâ, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub duabus rectis ad quadratum ex minori.

Ἐστωσαν δη δύο εὐθεῖαι αἱ AB, ΒΓ ἐν λόγῳ τινί· λέγῳ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως

Sint igitur duæ rectæ AB, ΒΓ in ratione aliquâ; dico esse ut AB ad ΒΓ ita sub AB, ΒΓ



τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ

rectangulum ad quadratum ex ΒΓ. Describatur enim ex ΒΓ quadratum ΒΔΕΓ, et compleatur

LEMMA.

Si l'on a deux droites dans une raison quelconque, l'une d'elles sera à l'autre comme le rectangle sous ces deux droites est au carré de la plus petite.

Soient les deux droites AB, ΒΓ dans une raison quelconque; je dis que AB est à ΒΓ comme le rectangle sous AB, ΒΓ est au carré de ΒΓ. Car décrivons sur ΒΓ

* Deest in codd. a, d, e, h, l, m, n; reperitur autem in cod. f.

ΒΔΕΓ, καὶ συμπληρώσω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. Φανερόν δὲ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἢ ΒΓ τῇ ΒΔ, τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΑΔ parallelogrammum. Manifestum est igitur esse ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ parallelogrammum ad ΒΕ parallelogrammum. Atque est ΑΔ quidem rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΒΔ, sed ΒΕ quadratum ex ΒΓ; ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum ad quadratum ex ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

le carré ΒΔΕΓ, et achevons le parallélogramme ΑΔ. Il est évident que ΑΒ est à ΒΓ comme le parallélogramme ΑΔ est au parallélogramme ΒΕ (1. 6). Mais le rectangie ΑΔ est compris sous ΑΒ, ΒΓ; car ΒΓ égale ΒΔ, et le parallélogramme ΒΕ est le carré de ΒΓ; donc ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est au carré de ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXII.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. γάρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	Id.	τῶ
3. ἐστὶ	Id.	deest.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. συμμετρου	ἀσυμμέτρου	concordat cum edit. Paris.
6. δύναται	Id.	δυνήσεται
7. συμμετρου	ἀσυμμέτρου	concordat cum edit. Paris.
8. συμμετρου ἑαυτῇ	ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.	συμμέτρου ἑαυτῶ
9. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν τῆς Β μείζον δύνηται ἢ Α τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. d, e	Id. a.	Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α μείζον δυνήται τοῦ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. d, f

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

Λ Η Μ Μ Α*.

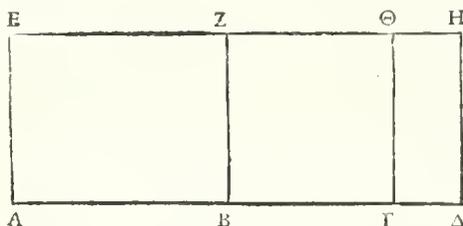
LEMMA.

Εάν ὡς τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ AB, BG, ΓΔ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BG, ΓΔ.

Si sint tres rectæ in ratione aliquâ, erit ut prima ad tertiam ita rectangulum sub primâ et mediâ ad ipsum sub mediâ et minimâ.

Sint tres rectæ AB, BG, ΓΔ in ratione aliquâ; dico esse ut AB ad ΓΔ ita sub AB, BG rectangulum ad ipsum sub BG, ΓΔ.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῆ AB πρὸς ὀρθῶς ἡ AE, καὶ κείσθω τῆ BG ἴση ἡ AE, καὶ διὰ τοῦ E σημείου τῆ AD εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ EH, διὰ δὲ τῶν B, Γ, Δ σημείων τῆ AE παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ZB, ΘΓ, ΗΔ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως τὸ AZ

Ducatur enim a puncto A ipsi AB ad rectos angulos AE, et ponatur ipsi BG æqualis AE, et per punctum E ipsi AD recta parallela ducatur EH, sed per puncta B, Γ, Δ ipsi AE parallele ducantur ZB, ΘΓ, ΗΔ. Et quoniam est ut AB ad BG ita AZ parallelogrammum ad BΘ pa-

L E M M E.

Si l'on a trois droites dans une raison quelconque, la première sera à la troisième comme le rectangle sous la première et la moyenne est au rectangle sous la moyenne et la plus petite.

Soient les trois droites AB, BG, ΓΔ dans une raison quelconque; je dis que AB est à ΓΔ comme le rectangle sous AB, BG est au rectangle sous BG, ΓΔ.

Car du point A menons la droite AE perpendiculaire à AB; faisons AE égal à BG; par le point E menons la droite EH parallèle à AD, et par les points B, Γ, Δ menons ZB, ΘΓ, ΗΔ parallèles à AE. Puisque AB est à BG comme le parallé-

* * Deest in codd. a, d, e, h, m, n; reperitur autem in codd. c, f, l.

παρλληλόγραμμον προς τὸ ΒΘ παρλληλό-
 γραμμον, ὡς δὲ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ
 ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· διίσει ἄρα ὡς ἢ ΑΒ προς τὴν
 ΓΔ οὕτως τὸ ΑΖ παρλληλόγραμμον πρὸς τὸ
 ΓΗ παρλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ
 τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἢ ΑΕ τῆ ΒΓ,
 τὸ δὲ ΓΗ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἴση γὰρ ἢ ΒΓ
 τῆ ΓΘ.

Εάν ἄρα τρεῖς ᾧσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

rallelogrammum, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita ΒΘ
 ad ΓΗ; ex æquo igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΖ
 parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΗ.
 Atque est quidem ΑΖ rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ,
 æqualis enim ΑΕ ipsi ΒΓ, rectangulum vero ΓΗ
 sub ΒΓ, ΓΔ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΓΘ.

Si igitur tres sint, etc.

gramme ΑΖ est au parallélogramme ΒΘ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme ΒΘ est à ΓΗ
 (I. 6); par égalité, ΑΒ sera à ΓΔ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallélo-
 gramme ΓΗ. Mais ΑΖ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; car ΑΕ égale ΒΓ, et ΓΗ est le
 rectangle sous ΒΓ, ΓΔ; car ΒΓ égale ΓΘ. Donc, etc.

PROPOSITIO XXXIII.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ	<i>Id.</i>	εἰ Α, Β, Γ δυνάμει μόνον σύμ- μετροι,
2. τῆς Δ'	<i>Id.</i>	τῆς Δ, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β.
3. ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον ἔστι
4. Ὡς δὲ	<i>Id.</i>	Αλλ' ὡς
5. μόνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ	τῶ	concordat cum edit. Paris.
8. τῶ	<i>Id.</i>	τὸ
9. τὸ	τῶ	concordat cum edit. Paris.
10. αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνά- μει μόνον σύμμετροι	<i>Id.</i>	deest.
11. τὴν μείζονα	<i>Id.</i>	deest.
12. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἢ Α τῆς Γ μείζον δύνηται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ	<i>Id.</i>	Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἢ Ε τοῦ ἀπὸ τῆς Γ μείζον δύνηται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ.

ΛΗΜΜΑ*.

LEMMA.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. ὑπὸ ΒΑΓ ῥωμίαν, καὶ ἤχθω . | ὑπὸ Α ῥωμίαν, καὶ ἤχθω | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ ἔτι τὸ | <i>Id.</i> | τὸ δὲ |
| 3. ἴσον ἐστὶ τῶ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. | ἴσον ἐστὶ τῶ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ. | ἴσον τῶ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. |
| 4. τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ . . . | ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ . . . | τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον |
| 5. Καὶ ὅτι | Η καὶ ὅτι | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τῶν | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 7. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. | deest. | concordat cum edit. Paris. |

ΛΗΜΜΑ β'**.

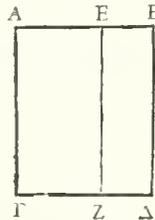
LEMMA II.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἀνίσαι, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Si recta linea secetur in partes inæquales, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub totâ et majori ad rectangulum sub totâ et minori.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἀνίσαι κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Recta enim aliqua AB secetur in partes inæquales ad E; dico ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE.



Αναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ἰσοπέρα τῶν

Describatur enim ex AB quadratum ΑΓΔΒ, et per punctum E alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΒ

LEMMA III.

Si une ligne droite est partagée en deux parties inégales, une partie sera à une partie comme le rectangle compris sous la droite entière et la plus grande partie est au rectangle compris sous la droite entière et sous la plus petite.

Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties inégales en E; je dis que AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE.

Car décrivons avec AB le quarré ΑΓΔΒ, et par le point E menons la droite EZ

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

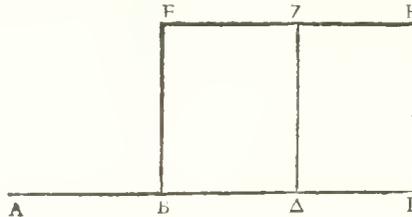
** Deest in codd. a, d, e, h, m, n; reperitur autem in codd. f, g, l.

ΑΓ, ΔΒ παράλληλος ἢ χθω ἢ ΕΖ. Φανερόν οὖν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῆ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῆ ΑΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ Η Μ Μ Α γ'*

Εὰν ᾖσι δύο εὐθεῖαι ἀίσιαι, τμηθῆ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι ἀίσιαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα



κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ.

parallela ducatur EZ. Evidens est igitur ut AE ad EB ita AZ parallelogrammum ad parallelogrammum ZB. Atque est quidem AZ rectangulum sub BA, AE, æqualis enim ΑΓ ipsi ΑΒ, rectangulum vero ΖΒ sub ΑΒ, ΒΕ, æqualis enim ΔΒ ipsi ΑΒ; ut igitur ΑΕ ad ΕΒ ita sub ΒΑ, ΑΕ rectangulum ad ipsum sub ΑΒ, ΒΕ. Quod oportebat ostendere.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, secetur autem minima ipsarum in partes æquales; rectangulum sub duabus rectis duplum erit rectanguli sub majori et dimidiâ minimæ.

Sint duæ rectæ inæquales ΑΒ, ΒΓ, quarum major sit ΑΒ, et secetur ΒΓ bifariam in Δ;

dico rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ duplum esse rectanguli sub ΑΒ, ΒΔ.

parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΒ. Il est évident que ΑΕ sera à ΕΒ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallélogramme ΖΒ (1.6). Mais ΑΖ est le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ; car ΑΓ égale ΑΒ, et ΖΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΕ, car ΔΒ est égal à ΑΒ; donc ΑΕ est à ΕΒ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ est au rectangle sous ΑΒ, ΒΕ. C'est qu'il fallait démontrer.

LEMMA III.

Si deux droites sont inégales, et si la plus petite est coupée en deux parties égales, le rectangle compris sous ces deux droites sera double du rectangle compris sous la plus grande et la moitié de la plus petite.

Soient les deux droites inégales ΑΒ, ΒΓ; que ΑΒ soit la plus grande; coupons ΒΓ en deux parties égales au point Δ; je dis que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle sous ΑΒ, ΒΔ.

* Deest in codd. a, d, e, f, h, l, m, n; reperitur autem in codd. g, l.

Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῆ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΒΕ, καὶ κείσθω τῆ ΒΑ ἴση ἢ ΒΕ, καὶ καταγεγράψθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἢ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ. Καὶ ἔστιν ἢ ΒΓ τῆς ΔΓ διπλασίων· διπλασίον ἄρα ἔστι καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἢ ΑΒ τῆ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἴση γὰρ τῆ μὲν ΒΔ ἢ ΔΓ, τῆ δὲ ΑΒ ἢ ΔΖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ducatur enim a puncto B ipsi ΒΓ ad rectos angulos ipsa ΒΕ, et ponatur ipsi ΒΑ æqualis ΒΕ, et describatur figura. Quoniam igitur est ut ΔΒ ad ΔΓ ita ΒΖ ad ΔΗ, componendo igitur ut ΒΓ ad ΔΓ ita ΒΗ ad ΔΗ. Atque est ΒΓ ipsius ΔΓ dupla; duplum igitur est et ΒΗ ipsius ΔΗ. Atque est quidem ΒΗ rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΑΒ ipsi ΒΕ, rectangulum vero ΔΗ est ipsum sub ΑΒ, ΒΔ, æqualis enim quidem ipsi ΒΔ ipsa ΔΓ, ipsi vero ΑΒ ipsa ΔΖ. Quod oportebat ostendere.

Lemma subsequens in codice 190 locum tenet lemmatis secundi edit. Oxoniæ.

Λ Η Μ Μ Α.

L E M M A.

Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι, ἔσται ὡς ἢ μία πρὸς τὴν ἕτεραν οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ μίας αὐτῶν πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ τῆς ἕτερας.

Si sint duæ rectæ, erit ut una ad alteram ita rectangulum sub utrâque et unâ ipsarum ad rectangulum sub utrâque et alterâ.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΕ.

Sint duæ rectæ ΑΒ, ΒΓ; dico esse ut ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΓ, ΑΒ rectangulum ad ipsum sub ΑΓ, ΒΕ.

Du point B menons BE à angles droits à ΒΓ; faisons BE égal à ΒΑ, et décrivons la figure. Puisque ΔΒ est à ΔΓ comme ΒΖ est à ΔΗ (1. 6); par addition, ΒΓ sera à ΔΓ comme ΒΗ est à ΔΗ. Mais ΒΓ est double de ΔΓ; donc ΒΗ est double de ΔΗ. Mais ΒΗ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, car la droite ΑΒ est égale à ΒΕ; et ΔΗ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ, car ΔΓ est égal à ΒΔ, et ΔΖ à ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

L E M M E.

Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le rectangle compris sous leur somme et sous l'une de ces droites est au rectangle compris sous la somme de ces droites et sous l'autre droite.

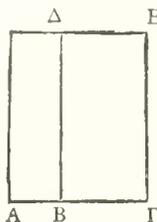
Soient les deux droites ΑΒ, ΒΓ; je dis que ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle compris sous ΑΓ, ΑΒ est au rectangle compris sous ΑΓ, ΒΕ.

Ἐχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ῥεθὰς ἴση τῇ ΑΓ ἢ ΒΔ, καὶ συμπληρώσω τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΓ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ

Ducatur enim a puncto B ad rectos angulos æqualis ipsi ΑΓ ipsa ΒΔ, et complectatur ΑΕ parallelogrammum.

Quoniam enim est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΓ; atque est quidem rectangulum ΑΔ ipsum sub ΒΔ,



ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΒ, ταυτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ, ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ· τὸ δὲ ΔΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΓΒ, ταυτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

ΑΒ, hoc est rectangulum sub ΓΑ, ΑΒ, æqualis enim supponitur ΒΔ ipsi ΓΔ; est autem rectangulum ΔΓ ipsum sub ΒΔ, ΓΒ, hoc est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΓΑ, ΑΒ rectangulum ad ipsum sub ΑΓ, ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

Car du point B menons à angles droits la droite ΒΔ égale à ΑΓ, et achevons le parallélogramme ΑΕ.

Car puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΔ est à ΔΓ (1. 6), que ΑΔ est le rectangle sous ΒΔ, ΑΒ, c'est-à-dire sous ΓΑ, ΑΒ, car ΒΔ est supposé égal à ΓΑ, et que ΔΓ est le rectangle sous ΒΔ, ΓΒ, c'est-à-dire sous ΑΓ, ΓΒ; la droite ΑΒ sera à ΒΓ comme le rectangle sous ΓΑ, ΑΒ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῆς	Id.	τῆ
2. ἀπὸ	Id.	ἀπὸ ἐλάσσονος
3. ἐπὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. σύμμετρον ἔστι τῶ	Id.	διπλάσιόν ἔστι τοῦ

PROPOSITIO XXXV.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τοῦ	<i>Id.</i>	τῆς
2. τῆς ΔΒ.	<i>Id.</i>	τῆς ΔΒ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰπὴν ἀσύμμετροι.
3. διπλῆ	<i>Id.</i>	διπλασίῳ
4. ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ.	<i>Id.</i>	ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· ἄστε καὶ σύμμετρον.
5. τῶν ΑΒ, ΒΓ·	<i>Id.</i>	τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπόκειται γὰρ οὕτως·
6. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ·	Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ·	concordat cum edit. Paris.
7. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVI.

1. τῆς	<i>Id.</i>	τῆ
2. τοῖς ἐπάνω ὁμοίως	<i>Id.</i>	ὁμοίως τοῖς ἐπάνω
3. ἐστίν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν ἀπὸ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἴσον ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἴσιν ἴσον
6. ἐστὶν ἢ ΒΕ τῆ ΔΖ·	<i>Id.</i>	ἢ ΔΖ τῆ ΒΕ·
7. μέσον ἄρα	<i>Id.</i>	μέσον, μέσον
8. ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.
9. αἱ ΑΔ, ΔΒ	<i>Id.</i>	deest.
10. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVII.

1. καλεῖσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. ὅλη	<i>Id.</i>	deest.
3. αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.	<i>Id.</i>	τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρὸν ἐστὶ,

4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest. <i>d, f, l.</i>
5. ὀνομάτων.	ὀνομάτων. Εκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν σύγκεισθαι, κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητὸν καθ' ὃ ῥητόν. Οπερ ἔδει δεῖξαι. <i>a, e, g, h, m, n.</i>	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ συνθέντι	<i>Id.</i>	συνθέντι ἄρα
3. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ὑπέκεινται γὰρ αἱ AB, BΓ ῥητὸν περιέχουσιν.	<i>Id.</i>	ὑπόκειται δὲ ῥητὸν περιέχουσιν*
4. πρώτη.	πρώτη. Εκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτων, διὰ τὸ ῥητὸν περιέχειν καὶ προτερεῖν τὸ ῥητόν. Οπερ ἔδει δεῖξαι. <i>a, e, g, h, m, n.</i>	concordat cum edit. Paris. <i>d, f, l.</i>

PROPOSITIO XXXIX.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
2. τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ παρὰ τὴν ΔΕ	<i>Id.</i>	παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ
3. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. παράκεινται	<i>Id.</i>	παράκεινται*
5. Ἐπεὶ οὖν	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ
6. τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ	<i>Id.</i>	τῷ ἀπὸ τῆς AB τὸ
7. ἀσύμμετρος ἐστὶ μήκει. Εδείχθησαν δὲ ῥηταί.	ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει*	concordat cum edit. Paris.
8. χωρίον καὶ	deest.	χωρίον* ὥστε καὶ
9. αὐτὸ	deest.	concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 40 adest in *b* subsequens scholium, quod Euclidis esse minime potest.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ μέσον περιέχειν τὸ ὑπὸ αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἀλογόν ἐστι, δῆλον. Εἰ γὰρ ἐστὶ ῥητὸν καὶ παραβέβηται παρὰ ῥητὴν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. Ἀλλὰ καὶ ἀλογος, ὅπερ ἄτοπος· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἀλογόν ἐστίν³.

SCHOLIUM.

Vocavit autem illam ex binis mediis secundam, quoniam medium et non rationale continetur sub ipsis, posterius est vero medium rationali. Quod autem sub rationali et irrationali continetur irrationale esse, manifestum est. Si enim sit rationale et applicetur ad rationalem, esset et alterum ipsius latus rationale. Sed et irrationale, quod absurdum; spatium igitur sub rationali et irrationali irrationale est.

SCHOLIE.

Il l'appèle seconde de deux médiales, parce que la surface comprise sous AB, BF est médiale et non rationelle, car la surface médiale est après la rationelle. Et il est évident que la surface comprise sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle; car si elle était rationelle, et qu'elle fût appliquée à une droite rationelle, l'autre côté serait rationel. Mais il est irrationel, ce qui est absurde; donc une surface sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. τὸ	<i>Id.</i>	τὸ τὸ
2. ἐστὶ	ἔσται	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστίν.	ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XL.

1. ἀρξ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. AB, BF	<i>Id.</i>	AB, BF. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BF.

* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.

Post propositionem 40 adest in δ scholium subsequens, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μίσου¹, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκείουτος τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. Ὅτι δὲ καὶ² μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB, BG , οὕτως δεικτέον.

Ἐπεὶ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν

Vocavit autem ipsam majorem, quia quadrata ex AB, BG rationalia majora sunt rectangulo medio bis sub AB, BG , et oportet ex rationalium proprietate nomen imponere. At vero majora esse quadrata ex AB, BG rectangulo bis sub AB, BG , sic demonstrabimus.

Evidens est quidem inæquales esse AB, BG . Si enim sint æquales, æqualia erunt et quadrata



AB, BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG , καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG ῥητὸν, ἔπερ οὐχ ὑπέκειται ἄνιστοι ἄρα εἰσὶν αἱ AB, BG . Ὑποκείσθω μείζων ἢ AB , καὶ κείσθω τῇ BG ἴση ἢ $BΔ$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $AB, BΔ$ ἴσα ἐστὶ τῷ τρις δις ὑπὸ τῶν $AB, BΔ$ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς³ AD . Ἴση δὲ ἢ $ΔB$ τῇ BG . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BG

ex AB, BG rectangulo bis sub AB, BG , et erit rectangulum sub AB, BG rationale, quod non supponitur; inæquales igitur sunt AB, BG . Supponatur major AB , et ponatur ipsi BG æqualis $BΔ$; quadrata igitur ex $AB, BΔ$ æqualia sunt et rectangulo bis sub $AB, BΔ$ et quadrato ex AD . Æqualis autem $ΔB$ ipsi BG ; qua-

SCHOLIE.

Il l'appèle majeure, parce que la somme des carrés des rationnelles AB, BG est plus grande que le rectangle médial qui est le double rectangle sous AB, BG , et qu'il fallait choisir un nom d'après la propriété des rationnelles. Nous démontrons ainsi que la somme des carrés de AB et de BG est plus grande que le double rectangle sous AB, BG .

Car il est évident que les droites AB, BG sont inégales. Car si elles étaient égales, la somme des carrés de AB et de BG serait égale au double rectangle sous AB, BG , et le rectangle sous AB, BG serait rationel, ce qui n'est point supposé; donc les droites AB, BG sont inégales. Supposons que AB est la plus grande, et faisons $BΔ$ égal à BG ; la somme des carrés de AB et de $BΔ$ sera égale au double rectangle sous $AB, BΔ$, et au carré de AD (7.2). Mais $ΔB$ est égal à BG ; donc

* Deest in codd. d, f, l ; reperitur autem in codd. a, e, g, h, m, n .

ἴσα ἐστὶ τῶν τε δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ καὶ τῶν ἀπὸ τῆς AΔ· ὅστε τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ μείζονά ἐστι τῶν δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τῶν ἀπὸ τῆς AΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

drata igitur ex AB, BΓ æqualia sunt et rectangulo bis sub AB, BΓ et quadrato ex AΔ; quare quadrata ex AB, BΓ majora sunt quam rectangulum bis sub AB, BΓ quadrato ex AΔ. Quod oportebat ostendere.

la somme des quarrés de AB et de BΓ est égale au double rectangle sous AB, BΓ et au quarré de AΔ; donc la somme des quarrés de AB et de BΓ surpasse le double rectangle sous AB, BΓ du quarré de AΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. μέσου	μέσων	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	Id.	deest.
3. τῆς	Id.	deest.
4. ἐστι	εἶναι	concordat cum edit. Paris.
5. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLI.

1. καλείσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. συνθέντι	deest.	concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 41 adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

ῤητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσε¹, διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῤητὸν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῤητοῦ πρῶταρξιν, πρῶτον τὸ ῤητὸν³ ἐκάλεσεν¹.

Rationale autem et medium potentem ipsam vocavit, quia potest bina spatia, unum quidem rationale, alterum vero medium; et quoniam ipsius rationalis prius mentionem fecit, primum rationale vocavit.

SCHOLIE.

Il l'appelle celle dont la puissance est rationelle et médiale, parce que sa puissance renferme deux surfaces, l'une rationelle, et l'autre médiale; et à cause que la surface rationelle est avant la médiale, il parle d'abord de la rationelle.

* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. αὐτὴν ἐκάλεσε, | καλεῖται αὐτὴ | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ ῥητὸν | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐκάλεσεν. | ἐκάλεσεν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XLII.

- | | | |
|--------------------------------|----------------------|---|
| 1. τετραγώνων* | τετραγώνῳ* | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὰ προκείμενα* | <i>Id.</i> | τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν AB, ΒΓ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκείμενῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραγώνων* |
| 3. ἔστιν | <i>Id.</i> | deest. |
| 4. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ | <i>Id.</i> | ἀσύμμετόν ἐστι τὸ |
| 5. ἄρα | <i>Id.</i> | deest. |

Post propositionem 42 adsunt in δ duo scholia subsequētia, quæ quidem Euclidis non sunt.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α*.

SCHOLIUM I.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό, τε συγκείμενον¹ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ, καὶ τὸ² δὲ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ³.

Vocat autem ipsam bina media potentem, quia potest bina media spatia, et compositum ex ipsarum AB, ΒΓ quadratis, et rectangulum bis sub AB, ΒΓ.

SCHOLIE I.

Il l'appèle celle dont la puissance est une double médiale, parce que sa puissance égale deux surfaces médiales; savoir, la somme des quarrés de AB et de ΒΓ, et le double rectangle sous AB, ΒΓ.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. τό, τε συγκείμενον | τά, τε συγκείμενα | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὸ | τοῦ | concordat cum edit. Paris. |
| 3. AB, ΒΓ. | AB, ΒΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. | concordat cum edit. Paris. |

* Deest in cod. *d*; reperitur autem in codd. *a, e, f, g, h, m, n*.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄*

SCHOLIUM II.

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημίαι ἄλογοι μοναχῶς διαι-
ροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ἧν σύγκειται, ποιου-
σῶν τὰ προκείμενα εἶδη, δείξομεν ἤδη, προεκ-
θέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον.

At vero dictas irrationales uno tantum modo
dividi in rectas ex quibus componuntur, et quas
faciunt propositas species, mox ostendemus,
si prius exposuerimus quoddam lemma hujus-
modi.

SCHOLIE II.

Après avoir exposé le lemme suivant, nous démontrerons que les irratio-
nelles dont nous avons parlé ne peuvent se diviser que d'une seule manière dans
les droites qui les compoent, et qui constituent les espèces proposées.

LEMMA**.

EDITIO PARIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, καὶ ὑπο- κείσθω	deest.	ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ
2. καὶ	Id.	deest.
3. ἐστὶν	Id.	deest.
4. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ.	Id.	ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ.
5. ΑΔ, ΔΒ. Ὅπερ ἔδει δείξαι.	Id.	ΑΔ, ΔΒ, εἴπερ συσμοφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

PROPOSITIO XLIII.

1. ΑΓ	Id.	ΑΒ
2. τμημα κατὰ τὸ Γ	Id.	τῆ κατὰ τὸ Δ
3. τῆς διχοτομίας	τοῦ διχοτόμου	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	Id.	τοῦ
5. ὄντα, ὅπερ ἄτοπον* μέσον γάρ	Id.	ὄντα* μέσον δὲ

* Reperitur in codd. a, e, f, g, h, l, m, n; deest autem in cod. d.

** Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

PROPOSITIO XLIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. Ἐστω	<i>Id.</i>	Ἐστω δὴ

PROPOSITIO XLV.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ	τῆς διχοτομίας, ὅτι	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,	<i>Id.</i>	ΑΓ, ΓΒ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ,
5. Καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον	<i>Id.</i>	deest.
7. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἐπειδήπερ	ἔτι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLVI.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερ- ἔχει ῥητῶ,	<i>Id.</i>	ῥητῶ ὑπερέχει τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,
linea 9 μόνον διαιρείται.	deest.	ἄρα διαιρεῖται μόνον.

PROPOSITIO XLVII.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. τὸ δε δις	<i>Id.</i>	τὸ δ'
3. τὸ δέ δις	<i>Id.</i>	τὸ δ'
linea 12 τὰ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ὑπερέχει ῥητῶ,	<i>Id.</i>	ῥητῶ ὑπερέχουσι,

PROPOSITIO XLVIII.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX IGO.	EDITIO OXONIÆ.
1. διαιρεῖται	<i>Id.</i>	διαιρεῖται εἰς τὰ ἑνόματα.
2. δύο μέσα δυναμένη	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν	<i>Id.</i>	deest.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. ἐλάσσονος vocabulum ἐλάσσονος concordat cum edit. Paris. contractum est, et inter lineas manu recenti exaratum.

Has post definitiones adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Ἐξ οὖν εὐθειῶν τῶν αὐτῶς καταλαμβανομένων εὐθειῶν, τάττει πρώτας τῆ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου αὐτῆ· δευτέρας δὲ τῆ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῆ ἐκκειμένη

Sex igitur rectis existentibus ita sumptis, facit primas ordine tres, in quibus major quam minor plus potest quadrato ex recta sibi commensurabili; secundas autem ordine reliquas tres, in quibus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili, propterea quod prius est commensurabile incommensurabili; et adhuc primam quidem, in qua majus nomen

SCHOLIE.

Six droites étant prises ainsi, il (Euclide) fait une classe de trois droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande; il fait ensuite une classe de trois autres droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable avec la plus grande, parce que le commensurable est avant l'incommensurable. La première classe est celle dont le plus grand nom est commensurable avec la rationnelle exposée; la seconde

* Reperitur in codd. *a, d, e, f, g, h, m, n*; deest autem in cod. *l*.

ῥητῇ· δευτέραν δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μίζον τοῦ ἰσάττους τῶ ἔμπεριέχειν τὸ ἔλαττον· τρίτην δὲ, ἐφ' ἧν μη-
 δι-τρι τῶν ἰσμάτων σύμμετρον ἐστὶ τῇ ἐκκει-
 μένῃ ῥητῇ· καὶ ἐπὶ τῶ ἕξῃς τριῶν ἰσοίως,
 τὴν πρώτην τῆς εἰρημίως δευτέρας τάξεως
 τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην,
 καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

commensurable est expositæ rationali; secun-
 dam vero, in quâ minus, propterea quod
 rursus majus antecedit minus, cùm contineat
 minus; tertiam autem, in quâ neutrum nomi-
 num est commensurable expositæ rationali; et
 deinceps in tribus similiter, primam dictæ se-
 cundi ordinis quartam appellans, et secundam
 quintam, et tertiam sextam.

classe, est celle dont le plus petit nom est commensurable avec la rationelle ex-
 posée, parce que le plus grand précède le plus petit, puisque le plus grand
 contient le plus petit; la troisième classe enfin, est celle où aucun des noms
 n'est commensurable avec la rationelle exposée. Il fait de la même manière
 une classe des trois autres droites, appelant la première la quatrième de la
 seconde classe, la seconde la cinquième, et la troisième la sixième.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. δύαται | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐστὶ σύμμετρον | σύμμετρον ἐστὶ | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XLIX.

- | | | |
|------------------|-------------|--------|
| 1. μὲν | Id. | deest. |
| 2. καὶ | Id. | deest. |

PROPOSITIO L.

- | | | |
|--|---|----------------------------|
| 1. ἄρα | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἄρα καὶ | ἄρα τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ
σύμμετρον ἐστὶ | concordat cum edit. Paris. |
| 5. σύμμετρον ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη
ῥητῇ | τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμ-
μετρον ἐστὶ | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LI.

- | | | |
|---------------------------------------|-------------|--------------------|
| linea 11 τετράγωνος ἀριθμὸς | Id. | ἀριθμὸς τετράγωνος |
| 2. καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἢ L. | Id. | ῥητὴ δὲ ἢ E. |

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. εὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν *Id.* ἐσύμμετρος ἄρα
4. ἐστίν *deest.* concordat cum edit. Paris.
5. ἴσθιν *Id.* *deest.*

PROPOSITIO LII.

1. τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τοῖς ΑΓ *Id.* ἐκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν
2. καὶ *Id.* *deest.*
3. εὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν *Id.* *deest.*
4. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς τὸ ἀπὸ concordat cum edit. Paris.
5. τετράγωνος ἀριθμὸς *Id.* ἀριθμὸς τετράγωνος
6. εὐδὲ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν *Id.* *deest.*
7. ἐστίν *Id.* *deest.*

PROPOSITIO LIII.

1. ῥητὴ τις εὐθεῖα *Id.* τις εὐθεῖα ῥητὴ
2. μήκει *deest.* concordat cum edit. Paris.
3. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ο δὲ concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα *Id.* *deest.*
5. ἄρα *deest.* concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα vocabulum ἄρα, difficile lectu, inter lineas manu recenti exaratum est. concordat cum edit. Paris.
7. τῆς *Id.* τῆ

PROPOSITIO LIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIENSIS.
1. μήτε	<i>Id.</i>	μήδε
2. συμμετρων ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ.	<i>Id.</i>	σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ Ε τῆ ΖΗ δύναμις.
3. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ῥητὸν ἄρα καὶ	ῥητὸν ἄρα καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
linea 9 ΗΘ	<i>Id.</i>	ΚΘ
5. τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς	ΖΘ τοῦ ἀπὸ ΗΘ	concordat cum edit. Paris.
6. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. αὐτῶν	<i>Id.</i>	τῶν ΖΗ, ΗΘ

L E M M A *

1. τῆ ΒΗ*	<i>Id.</i>	τῆ ΒΗ μήκει*
2. ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση*	ΑΘ, ΚΓ ἐστὶν ἴση* ἢ δὲ ΖΗ ἑκατέρω τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση*	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν ἑκατέρα ἑκατέρα*	ἑκατέρα*	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν ΚΔ οὕτως ἢ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ*	ΚΔ οὕτως ἢ ΕΓ πρὸς ΓΕ*	concordat cum edit. Paris.
linea 16 τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 17 τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LV.

1. ΑΒΓΔ	ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
2. ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἐκ δύο ὀνομάτων
3. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
4. τοῦ	<i>Id.</i>	τῶν
5. τοῦ	<i>Id.</i>	τῶν

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. <i>σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ.</i> . . .	<i>σύμμετρον αὐτὴν διαιρεῖ.</i>	<i>σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ.</i>
7. <i>τῶν</i>	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.
8. <i>ἀπὸ</i>	<i>Id.</i>	<i>διὰ</i>
9. <i>τῆν</i>	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.
10. <i>τὴν</i>	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.
11. <i>τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως</i> <i>τὸ ΕΑ πρὸς τὴν ΚΗ.</i>	<i>τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΑ τὸ ΕΑ</i> <i>πρὸς ΚΗ.</i>	concordat cum edit. Paris.
12. <i>τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ,</i>	<i>Id.</i>	<i>τῷ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ΣΝ,</i>
13. <i>ΕΑ τῷ ΜΡ. ὥστε καὶ τῷ ΟΞ.</i>	<i>Id.</i>	<i>ΜΡ τῷ ΕΑ. Αλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ</i> <i>ΟΞ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΕΑ τῷ</i> <i>ΓΖ. ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ,</i> <i>ΟΞ.</i>
14. <i>μήκει.</i>	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.
15. <i>ἐστίν.</i>	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>
16. <i>τῆ ΕΖ.</i>	<i>Id.</i>	<i>τῆ ΕΖ μήκει.</i>
17. <i>ἐστιν.</i>	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>
18. <i>οὕτως ἢ ΟΝ πρὸς ΝΡ.</i> . . .	<i>ἢ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ.</i> . . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LVI.

1. <i>τὸ</i>	<i>Id.</i>	<i>τὸ μὲν</i>
2. <i>σύμμετρόν.</i>	<i>Id.</i>	<i>σύμμετρός</i>
3. <i>ἐστὶ.</i>	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.
4. <i>τῶν</i>	<i>Id.</i>	<i>τῷ</i>
5. <i>γάρ.</i>	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.
6. <i>ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ</i>	<i>ΑΒ. Καὶ</i>	concordat cum edit. Paris.
7. <i>Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἢ ΑΕ. ῥητὴ ἄρα</i> <i>καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ</i> <i>ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἢ ΑΕ τῆ</i> <i>ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἢ ΑΕ ἑκα-</i> <i>τέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. αἱ ΑΗ, ΗΕ</i> <i>ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῆ ΑΒ</i> <i>μήκει. αἱ ΒΑ,</i>	<i>Αλλ' ἢ ΑΕ σύμμετρος τῆ</i> <i>ΑΒ μήκει. καὶ αἱ ΑΗ,</i> <i>ΗΕ ἄρα σύμμετροί εἰσι</i> <i>τῆ ΑΒ. αἱ</i>	concordat cum edit. Paris.
8. <i>ἐστιν</i>	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.
9. <i>τῷ</i>	<i>τῆ</i>	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
10. ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ MN, NE.	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. EZ σύμμετρος.	Id.	EZ.
12. ἐστὶ	Id.	deest.
15. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. ἄρα ME	Id.	ME ἄρα

PROPOSITIO LVII.

1. μᾶλλον ἔστω	τὸ μᾶλλον ἔστι	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ αἱ MN, NE μῆσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ὥστε ἢ ME ἐν δύο μέσων ἔστι. . .	Id.	καὶ ὅτι αἱ MN, NE ἐν δύο μέσων εἰσὶ.
4. ἀσύμμετρος	Id.	ἀσύμμετρον
5. ἐστὶ	Id.	deest.
6. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LVIII.

1. ἐστὶν	Id.	deest.
2. δὴ	Id.	δὴ
3. Ἐπεὶ	Id.	Ἐπεὶ γὰρ
4. δυνάμει	Id.	deest.
5. ἐστὶ	Id.	deest.
6. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τῆ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. συγκείμενον	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. καὶ εἰσὶν ἀσύμμετροι αἱ MN, NE	Id.	καὶ ἔστιν ἀσύμμετρος ἢ MN τῆ NE

PROPOSITIO LIX.

1. ἄρα	Id.	deest.
2. τῆς	τῶν	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. καὶ ἔστιν	καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. μήκει,	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. Καὶ ῥητὴ	<i>Id.</i>	ῥητὴ δὲ
7. τῶν MN, ΝΞ	MNΞ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LX.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἢ	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἀπὸ τῶν	<i>Id.</i>	deest.
4. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
5. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Καὶ ἔστι μίσον ἑκάτερον αὐ- τῶν, καὶ αἱ MN, ΝΞ	deest.	concordat cum edit. Paris.

LEMMA*.

1. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τῆς	<i>Id.</i>	τῶν
4. ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ	ἔστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ	τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ
5. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXI.

1. ἑκατέρᾳ τῶν ΜΑ, ΗΞ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστι	<i>Id.</i>	ἔστι
3. ΑΓ, ΓΒ.	<i>Id.</i>	ΑΓ, ΓΒ ῥητὸν ἄρα ἔστι τὸ συγ- κείμενον ἐκ τῶν ΑΓ, ΓΒ.
4. ἢ ΜΗ ἔστιν,	<i>Id.</i>	ἔστιν ἢ ΜΗ,
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μέρει	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Reperitur in codicibus a, d, e, f, g, h, l, m, n.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

9. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἢ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῆ.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXII.

1. τας μεσας	deest.	τὰ μέσα
2. παρὰ τὴν ΔΕ παραβελήσθω τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τὸ . . .	<i>Id.</i>	παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον
3. τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέληται	ἔστι τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥη- τὴν ΔΕ παραβέληται	τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν παρά- κειται
4. ἔστι	<i>Id.</i>	deest.
5. ἔστι	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXIII.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστι δευτέρα	<i>Id.</i>	δευτέρα ἔστιν
3. τὴν ΔΕ ῥητὴν	<i>Id.</i>	ῥητὴν τὴν ΔΕ
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. πρότερος	<i>Id.</i>	πρότερον
8. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXIV.

linea 7 τις ἔστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 2 καὶ	ἔστι	concordat cum edit. Paris.
3. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΜΑ παράκειται	ἔστι τὴν ΜΑ	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. δεῖξομεν τοῖς πρότερον,	<i>Id.</i>	τοῖς πρότερον ἐπιλογισμέθα,
8. ἔστι	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|---|----------------------|-------------------------------------|
| 9. ἀσύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ ΚΔ τῆ
ΚΜ. | <i>Id.</i> | καὶ ἡ ΚΔ τῆ ΚΜ ἀσύμμετρος
ἐστίν. |
| 10. παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ | <i>Id.</i> | παραβληθῆ παρὰ τὴν μείζονα |
| 11. μήκει | deest. | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LXV.

- | | | |
|--------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. γάρ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐστίν | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. μήκει | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῆ ΚΜ μήκει | <i>Id.</i> | μήκει τῆ ΚΜ |
| 5. ῥηταὶ | deest. | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LXVI.

- | | | |
|---|----------------------|---|
| 1. ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
συγκείμενον τῷ ἐκ τῶν . . . | <i>Id.</i> | συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τε-
τραγώνων τῷ |
| 2. ἐστὶ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. δὴ πάλιν | <i>Id.</i> | γάρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου |

PROPOSITIO LXVII.

- | | | |
|--|---|----------------------------|
| 1. τὴν ΓΖ οὕτως ἢ ΕΒ πρὸς τὴν
ΖΔ ἑναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΑΕ
πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς
ΓΖ πρὸς ΖΔ | ΓΖ ἢ ΕΒ πρὸς ΖΔ ἑναλ-
λάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ
ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἢ
ΓΖ πρὸς ΖΔ | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὴν ΖΔ | ΓΖ πρὸς ΖΔ | |
| 3. ἦται | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 4. δύναται | <i>Id.</i> | δυνήσεται |
| 5. ἔσται | <i>Id.</i> | ἔστί. |
| 6. ἔσται | <i>Id.</i> | ἔστίν |
| 7. δύναται | <i>Id.</i> | δυνήσεται |
| 8. ἐστὶ | <i>Id.</i> | ἔσται |

PROPOSITIO LXVIII.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ αὐτὴ	<i>Id.</i>	deest.
2. διηγήσθω	<i>Id.</i>	διηρημένῃ
3. τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ	ΓΔ ἢ ΑΕ πρὸς ΓΖ . . .	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΓΔ	ΓΔ	concordat cum edit. Paris.
5. ἑκατέρω τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρω τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ	<i>Id.</i>	ἢ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι μέσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ·
6. τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ,	ΕΒ ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ, . . .	concordat cum edit. Paris.
7. σύμμετροί εἰσι	<i>Id.</i>	εἰσὶ σύμμετροι·
8. ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν.	δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν.	ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι.
9. τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ	ΕΒ ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ . . .	concordat cum edit. Paris.
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. καὶ διὰ τοῦτο ἔστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη. Εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστιν ἑκατέρω δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἢ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἢ αὐτή. . . .	εἴτε μέσον, μέσον καὶ ἔσ- τιν ἑκατέρω δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἢ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἢ αὐτή.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXIX.

1. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Γεγονένω γάρ	<i>Id.</i>	Καὶ γεγονένω
3. τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἢ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ	ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ·	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΖΔ,	ΖΔ	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν ΕΒ	ΕΒ	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

8. τὴν ΔΖ	ΔΖ	concordat cum edit. Paris.
9. ἀσύμμετροί εἰσι,	<i>Id.</i>	εἰσὶν ἀσύμμετροι,
10. ἄμα	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXX.

1. καὶ αὐτὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῶν ΑΕ, ΕΒ τῶ ὑπὸ τῶν	ΑΕ, ΕΒ τῶ ὑπὸ	concordat cum edit. Paris.
3. μὲν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXXI.

1. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ δὲ	ὥστε καὶ τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ἢ ἄρα ΓΔ	<i>Id.</i>	ἢ ΓΔ ἄρα

PROPOSITIO LXXII.

1. τευτέστι τὴν ΘΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῶ ΕΗ	<i>Id.</i>	τὸ ΕΗ.
3. ῥητὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἢ ΕΘ ἄρα ῥητὴ ἐστὶ	<i>Id.</i>	ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΘ
5. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. τῶ ΘΙ	<i>Id.</i>	τὸ ΘΙ.
7. τευτέστι τὴν ΘΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶν ἢ	<i>Id.</i>	ἔστω
9. ἐστὶν ἢ	<i>Id.</i>	ἔστω
10. ἐστὶν ἢ	<i>Id.</i>	ἔστω
11. περιέχεται	περιέχεται	concordat cum edit. Paris.
12. χωρίον	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ἐστὶν	<i>Id.</i>	ἔστω

PROPOSITIO LXXIII.

1. ἢ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἢ	deest.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARIISIENSIS.	COD. N. 190.	EDITIO OXONIÆ.
5. Εστω	Εστω εἰ τύχοι	concordat cum edit. Paris.
4. ἢ	<i>Id.</i>	deest.
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. ἢ	<i>Id.</i>	deest.
linea 17 Ομοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι, καὶ ἔλαττον ἢ τὸ AB τοῦ ΓΔ, ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυαμείνη, ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶ, δύο ἢ μέσα δυαμείνη	deest.	concordat cum edit. Paris.

Subsequens corollarium in textu adesse deberet.

ΠΟΡΙΣΜΑ*.

COROLLARIUM.

Ἡ ἐκ δύο ἰσομέσων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλλο-
ζοι οὔτε τῆ μείσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί·
τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μείσῃ παρὰ ῥητῶν παραβαλλόμε-
νον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῆ
παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ
δύο ἰσομέσων παρὰ ῥητῶν παραβαλλόμενον
πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ἰσομέσων πρώτην.
Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ
ῥητῆς παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο
ἰσομέσων δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο
μέσων δευτέρας παρὰ ῥητῶν παραβαλλόμενον

Quæ ex binis nominibus et irrationales quæ
post ipsam neque mediæ neque inter se sunt
eædem; quadratum enim ex mediâ ad rationa-
lem applicatum latitudinem facit rationalem et
longitudine incommensurabilem ipsi ad quam
applicatur. Quadratum autem rectæ ex binis
nominibus ad rationalem applicatum latitudi-
nem facit ex binis nominibus primam. Qua-
dratum autem primæ ex binis mediis ad rati-
onalem applicatum latitudinem facit ex bi-
nis nominibus secundam. Quadratum autem
secundæ ex binis mediis ad rationalem appli-

COROLLAIRE.

La droite de deux noms et les irrationnelles qui la suivent ne sont les mêmes ni
avec la médiâle, ni entr'elles; en effet, le carré d'une médiâle étant appliqué à une
rationnelle fait une largeur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite
à laquelle elle est appliquée (25. 10). Le carré d'une droite de deux noms étant
appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une première de deux noms
(61. 10). Le carré d'une première de deux médiâles étant appliqué à une rati-
onnelle fait une largeur qui est une seconde de deux noms (65. 10). Le carré
d'une seconde de deux médiâles étant appliqué à une rationnelle fait une largeur

* Reperitur in codicibus a, d, e, f, h, l, m, n.

πλάτος ποιῆ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῆ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμείας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῆ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμείας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῆ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. Τὰ δὲ εἰρημμένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου ὅτι ῥητὴ ἐστίν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, ὥστε² καὶ αὐταὶ αἱ ἄλλοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

catum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quadratum autem ex majori ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum autem ex rectâ rationale et medium potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam. Quadratum autem ex rectâ bina media potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Ipsæ vero dictæ latitudines differunt et à primâ et inter se, à primâ quidem quod rationalis sit, inter se vero quod ordine non sint eadem, quare et ipsæ irrationales differunt inter se.

qui est une troisième de deux noms (63. 10). Le carré d'une majeure étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une quatrième de deux noms (64. 10). Le carré d'une droite, qui peut une surface rationelle et une surface médiale, étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une cinquième de deux noms (65. 10). Le carré d'une droite, qui peut deux surfaces médiales, étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une sixième de deux noms (66. 10). Or les largeurs dont nous venons de parler sont différentes de la première et différentes entr'elles; elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationelle; et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre; ces irrationelles sont donc différentes entr'elles.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. Τὰ δὲ	<i>Id.</i>	Ἐπεὶ ὁ ³ τὰ
2. ὥστε	<i>Id.</i>	ἐῆλον ὅς

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Ἑπτὰ εἰσὶν ἑξάδες ἄχρι τῶν ἑνταῶθα εἰρημύται· ὧν ἡ μὲν πρώτη ἐδείκνυ τὴν ῥέεσιν αὐτῶν· ἡ δὲ δευτέρα τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἓν μόλις σημεῖον διαίρουνται· ἡ δὲ τρίτη τὴν ἐκ δύο ἰσομάτων εἴρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης, ἀφ' ἧς ἡ τετάρτη ἕξας τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλόγων, πῆ διαφέρουσι προσχρώμενος γὰρ τῇ ἐκ δύο ἰσομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἕξ ἀλόγων. Πέμπτην καὶ ἕκτην ἕξέθετο, δείκνυσι ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολὰς, τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων, ποίας ἀλόγους ποιῶσι τὰ πλάτη τῶν παρακαλλομένων χωρίων. Ἐν δὲ τῇ ἕκτῃ, πᾶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ἑμοειδεῖς αὐταῖς εἰσὶ. Πάλιν, ἐν τῇ ἐβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσι.

Septem sunt senarii usque ad ea de quibus hactenus dictum est; quorum primus quidem ostendit generationem ipsarum; secundus vero divisionem, propterea quod ad unum duntaxat punctum dividuntur; tertius autem ex binis nominibus inventionem primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, sextæ, postquam quartus senarius ostendit differentiam irrationalium, quomodo illæ differant; usus enim eis quæ ex binis nominibus ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum et sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum ex irrationalibus, quales irrationales faciunt latitudines applicatorum spatiorum. In sexto autem, quomodo commensurabiles irrationalibus ejusdem speciei sint. Rursus, in septimo evidenter differentiam ipsarum nobis ostendit.

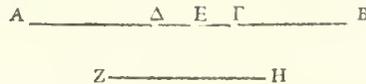
SCHOLIE.

Il y a sept sixains dans ce qui a été dit jusqu'à présent. Le premier fait voir l'origine des irrationnelles (37, 58, 59, 40, 41, 42); le second leur division, parce qu'elles ne peuvent être divisées qu'en un seul point (43, 44, 45, 46, 47, 48); le troisième enseigne à trouver les droites de deux noms: la première de deux noms (49), la seconde (50), la troisième (51), la quatrième (52), la cinquième (55), et enfin la sixième (54); le quatrième sixain démontre la différence des irrationnelles, c'est-à-dire ce en quoi elles diffèrent; car faisant usage des droites de deux noms, il (Euclide) fait voir la différence des six irrationnelles (55, 56, 57, 58, 59, 60); il expose le cinquième et le sixième sixain; dans le cinquième, il démontre les applications des carrés des irrationnelles, c'est à-dire qu'il démontre quelles sont les irrationnelles que produisent les largeurs des surfaces appliquées (61, 62, 63, 64, 65, 66); dans le sixième, il fait voir comment les droites commensurables avec les irrationnelles sont de la même espèce qu'elles (67, 68, 69, 70, 71); et enfin dans le septième, il nous démontre clairement leur différence (72, 75).

* Deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

Αναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἢ ἀριθμητικῆ ἀνάλογον· καὶ ἡ μέση λαμβανόμενῃ ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἰασθήτωτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδής ἐστίν ὧν ἐστὶ μέση ἀνάλογον. Καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστὶ. Κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εἰ τύχοι AB, καὶ διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· φανερόν ὅτι ἡ AG τῆς GB ἐστὶ μείζων. Αφηρήσθω ἀπὸ

Apparet autem et in his irrationalibus arithmetica proportio; et media sumpta proportionalis portionum cujusque irrationalis secundum arithmetica proportionem, et ipsa ejusdem speciei est cum eis quarum est media proportionalis. Et primum arithmetica medietas in his est. Ponatur enim ex binis nominibus si contigerit AB, et dividatur in nomina ad Γ; evidens est AG quam GB esse majorem. Auferatur ex AG



τῆς AG τῆ GB ἴση ἢ AD, καὶ δίχα τεμήσθω ἢ ΓΔ κατὰ τὸ Ε· φανερόν ὅτι ἡ AE τῆ EB ἐστὶν ἴση. Κείσθω ὅποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἢ ZH· φανερόν δὲ ὅτι ἡ διαφέρει ἢ AG τῆς ZH τούτω διαφέρει καὶ ἡ EB τῆς GB, ἢ μὲν γὰρ AG τῆς ZH τῆ EF, τῶ αὐτῶ δὲ καὶ ἡ ZH τῆς GB, ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ ZH σύμμετρος ἐστὶ τῆ AB, τῆ γὰρ ἡμισεία αὐτῆς ἐστὶν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ομοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

ipsi GB æqualis AD, et bifariam secetur ΓΔ in E; evidens est AE ipsi EB esse æqualem. Ponatur alterutri ipsarum æqualis ZH; manifestum est igitur quo differt AG ab ipsa ZH hoc differre et EB ab ipsa GB, etenim differt AG ab ipsa ZH ipsa EF, eadem vero magnitudine et ipsa ZH differt ab ipsa GB, quod est arithmetice proportionis. Perspicuum est autem ZH commensurabilem esse ipsi AB, dimidiæ enim ipsius est æqualis; quare ipsa ex binis nominibus est. Similiter demonstrabitur et in aliis.

Il y a évidemment dans les irrationnelles une proportion arithmétique; et la moyenne proportionnelle prise arithmétiquement entre les parties d'une irrationnelle quelconque est de la même espèce que les droites entre lesquelles elle est moyenne proportionnelle. Il y a d'abord une médiété arithmétique entre les parties d'une irrationnelle. Car, que AB soit une droite quelconque de deux noms, et que cette droite soit divisée en ses noms au point Γ; il est évident que AG est plus grand que GB. Retranchons de AG une droite AD égale à GB, et partageons ΓΔ en deux parties égales en E; il est évident que la droite AE sera égale à la droite EB. Que ZH soit égal à chacune de ces droites; il est évident que la différence de AG à ZH sera la même que la différence de EB à GB; car la différence de AG à ZH est EG, ainsi que la différence de ZH à GB, ce qui appartient à la proportion arithmétique. Mais il est évident que la droite ZH est commensurable avec AB, car elle en est la moitié; la droite ZH est donc une droite de deux noms (67. 10). Nous démontrerons la même chose pour les autres irrationnelles.

PROPOSITIO LXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἀσύμ- μετρά ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ·	καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ·	concordat cum edit. Paris.
2. ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXV.

1. καλείσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. τῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
5. δὲ	δὴ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXVI.

1. περιέχη*	περιέχουσα	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶ	καὶ σύμμετρά ἐστι . . .	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ.	<i>Id.</i>	ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. μύκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὀρθογώνιον	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ὄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. μίσσης	<i>Id.</i>	μίσση

PROPOSITIO LXXVII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μετὰ τῆς ὅλης τῆς AB τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἅμα μέσον.	τὰ προκείμενα . . .	concordat cum edit. Paris.
2. καλείσθω δὲ	ἡ καλουμένη	concordat cum edit. Paris.
3. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ ἀπὸ τῆς AG. . .	λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ ἀπὸ τῆς AG. . . .	concordat cum edit. Paris.
4. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG ἄλογος ἄρα ἢ AG,	ἄλογόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AG,	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXVIII.

1. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ῥητόν	τὰ προκείμενα	concordat cum edit. Paris.
2. καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ἡτοῦ μέσον τὸ ὅλον παιούσα.	ἡ προειρημένη.	concordat cum edit. Paris.
3. AB, BG	<i>Id.</i>	AB, BG τετραγώνων
4. καὶ	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXIX.

1. τὸ μὲν	τό, τε	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ δὲ	τό, τε	concordat cum edit. Paris.
3. τὰ προκείμενα	<i>Id.</i>	τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. ἡ καλουμένη	<i>Id.</i>	καλείσθω δε
5. ῥιτήν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. πλάτος ποιῶν την ΔΖ· . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῷ ΔΘ.	τῇ ΔΘ.	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶ καὶ
11. τὴν ΔΖ·	ΔΖ·	concordat cum edit. Paris.
12. ὀρθογώνιον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXX.

1. μόνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὰ	<i>Id.</i>	τὸ
5. ἀμφοτέρω	<i>Id.</i>	ἐκατέρω.

PROPOSITIO LXXXI.

1. μία μόνον	<i>Id.</i>	μόνον μία
2. ΑΓ, ΓΒ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ΑΓ, ΓΒ
3. αὐτῷ	<i>Id.</i>	αὐτῷ πάλιν

PROPOSITIO LXXXII.

1. μίση	μίσης	concordat cum edit. Paris.
2. οὔσα	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. μίση	μίσης	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
6. σύμμετροί εἰσιν,	<i>Id.</i>	εἰσὶ σύμμετροι,
7. ἐστὶ	<i>Id.</i>	καὶ
8. ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶ καὶ

PROPOSITIO LXXXIII.

EDITIO PARIENSIS.	CODEX I90.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. τὰ προειρημένα.	<i>Id.</i>	τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετρά- γωνα ἄμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον.
3. τετραγώνων	<i>Id.</i>	deest.
4. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXXXIV.

1. προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ*	καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζετω ἡ ΒΓ*	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιεῖσα.	τὰ προκείμενα.	concordat cum edit. Paris.
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζετω ἡ ΒΔ* καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθείαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιεῖ- σαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν.		
3. τοῖς	<i>Id.</i>	τῶν
3. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
4. τὰ προειρημένα* μία ἄρα μό- νον προσαρμόσει.	<i>Id.</i>	τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ αὐ- τῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιού- σῃ μία μόνον προσαρμόσει.

PROPOSITIO LXXXV.

1. μίον	μίον	concordat cum edit. Paris.
-------------------	----------------	----------------------------

EDITIO PARIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OKONIAE.

2. τὰ προειρημένα	<i>Id.</i>	τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.
3. εὐθεία	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ποιῶσα τὰ προειρημένα	<i>Id.</i>	δυναίμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιῶσα τὰ προκείμενα.
5. τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα	τό, τε ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων	concordat cum edit. Paris.
6. ἀσύμμετρα	ἀσύμμετρον	concordat cum edit. Paris.
7. ἀφηρήσθω	παρὰ τὴν ΕΖ παραβελήσθω	concordat cum edit. Paris.
8. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἔστιν ἴσον τῷ	<i>Id.</i>	ἴσον τὸ
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. σύμμετρος	<i>Id.</i>	ἀσύμμετρος
12. τετράγωνα	τετράγωνον	concordat cum edit. Paris.
13. καὶ ἔτι	<i>Id.</i>	ἔτι τε

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. ἦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει,	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVI.

1. ἡ ΖΔ	ὁ ΔΖ	concordat cum edit. Paris.
2. ΗΓ τετράγωνον	<i>Id.</i>	ΗΓ.
3. ΗΓ	<i>Id.</i>	ΘΓ.
4. τῇ Α μήκει	μήκει τῇ Α	concordat cum edit. Paris.
5. ποιῆσαι	εὐρεῖν	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVII.

1. καὶ	<i>Id.</i>	concordat cum edit. Paris.
------------------	----------------------	----------------------------

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

2. ΗΒ'	ΗΒ τετράγωνον'	concordat cum edit. Paris.
3. ΓΗ τετράγωνον	<i>Id.</i>	ΓΗ
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἀπὸ	<i>Id.</i>	deest.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει'	τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμ- μετρος τῇ Α'	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVIII.

1. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετρά- γωνον'	τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετρά- γωνον'	concordat cum edit. Paris.
2. τετραγώνω'	<i>Id.</i>	deest.
3. τετράγωνον'	<i>Id.</i>	deest.
4. τετράγωνον	<i>Id.</i>	deest.
5. τετράγωνον	<i>Id.</i>	deest.
6. οὐδ'	<i>Id.</i>	οὐκ
7. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τῇ Α μήκει.	<i>Id.</i>	μήκει τῇ Α.
9. τετράγωνον	<i>Id.</i>	deest.
10. ἀπὸ	<i>Id.</i>	ἀπὸ τῆς Κ' ἢ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ

PROPOSITIO LXXXIX.

1. λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη.	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. μήκει. καὶ ἐστὶν ἢ	καὶ ἐστὶν	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα ΒΓ	<i>Id.</i>	ΒΓ ἄρα
7. ΒΓ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XC.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX IGO.	EDITIO OXONIÆ.
1. μήκει	<i>Id.</i>	deest.
2. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ρη- τὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 4 ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ῥητὴ	ῥητὸν	concordat cum edit. Paris.
5. οὐδ' ἄρα	οὐδὲ	concordat cum edit. Paris.
6. μείζον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCI.

1. ἐπι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἔχεται ὡς τετράζωνες ἀριθμὸς πρὸς τετράζωνον ἀριθ- μὸν	<i>Id.</i>	deest.
5. οὐδετέρα ἄρα	<i>Id.</i>	καὶ οὐδετέρα

SCHOLIUM.

1. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. πρώτη ἔστιν ἡ ΑΒ.	<i>Id.</i>	ἔστιν ἡ ΑΓ πρώτη.

PROPOSITIO XCII.

1. πρώτης	<i>Id.</i>	deest.
2. παραλληλόγραμμον	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. διελεί.	διαρρεῖ.	concordat cum edit. Paris.
4. περιεχόμενον ἑρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, . . .	<i>Id.</i>	τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ,
5. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. μιν	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
8. ἴστων ἴσων,	<i>Id.</i>	ἴσων ἴστω,
9. λοιπὸν	<i>Id.</i>	καὶ λοιπὸν
10. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. ἑκατέρων	ἑκατέρας.	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCIII.

1. ἔλη ἢ ΑΗ	<i>Id.</i>	ΑΗ ἔλη
2. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. διελεί.	διαιρεί.	concordat cum edit. Paris.
4. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
5. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΑΚ. Καὶ ἐπεὶ σύμμε- τρὸς ἔστιν ἢ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει .	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ῥιπὴ ἄρα ἔστι καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν ὑπὸ ΛΟΜ	τῷ ἀπὸ τῶν ΛΟΜ	concordat cum edit. Paris.
8. καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις,	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μίνον σύμμετροι. Ἐπεὶ γὰρ	<i>Id.</i>	δυνάμει σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ γὰρ
11. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τουτέστι τῷ	τὸ δὲ ΤΣ ἔστι τῷ	concordat cum edit. Paris.
14. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΝ	τὸ ἀπὸ τῆς ΔΝ ἄρα	concordat cum edit. Paris.
15. τὸ	τὸ ἀπὸ τῆς	concordat cum edit. Paris.
16. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. μέσης	μέσῃ	concordat cum edit. Paris.
18. τῷ ΜΝ, τουτέστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. ὡς δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ὡς ἄρα

PROPOSITIO XCIV.

EDITIO PARIISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ ἐκατέρᾳ ἄρα τῶν AZ, ZH ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει καὶ	ὥστε καὶ αἱ AZ, ZH .	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει	<i>Id.</i>	deest.
3. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. τὸ ΖΚ	ZK	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. τῷ ΖΚ,	<i>Id.</i>	τῷ τῷ ΖΚ,
8. τῶν ΛΟ, ΟΝ	<i>Id.</i>	τῆς ΛΟ, ΟΝ.
9. ὥστε	<i>Id.</i>	ὥστε καὶ
10. χωρίον	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XCV.

1. τῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. δύναται	δυναμένη	concordat cum edit. Paris.
3. μήκει ἢ AZ τῇ ΖΗ	<i>Id.</i>	ἢ AZ τῇ ΖΗ μήκει.
4. τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῷ ΑΜ, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ	περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ἀπὸ τῶν ΑΟΜ, τὴν ΝΞ.	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
9. τὸ	<i>Id.</i>	τῷ
10. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τετραγώνῳ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XCVI.

1. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
--	----------------	----------------------------

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

2. περὶ τὴν αὐτὴν ὄν τῷ ΛΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ·	τὸν ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ·	concordat cum edit. Paris.
5. χωρίον.	<i>Id.</i>	deest.
4. καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι.	καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστι.	concordat cum edit. Paris.
5. λοιπὴ	ἢ λοιπὴ	concordat cum edit. Paris.
6. μέσον	<i>Id.</i>	deest.
7. ἄρα χωρίον	<i>Id.</i>	χωρίον

PROPOSITIO XCVII.

1. τῶν ΑΗ, ΗΔ	αὐτῶν	concordat cum edit. Paris.
2. παραβληθῆ	<i>Id.</i>	παραβάλλωμεν
3. τὸ Ε,	<i>Id.</i>	τὸ Ε σημεῖον,
4. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταὶ εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὃν τῷ ΛΜ γωνίαν τὸ ΝΞ·	γωνίαν τὸ ΝΞ·	concordat cum edit. Paris.
6. ἢ	<i>Id.</i>	ὁ
7. ἢ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ΑΒ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCVIII.

1. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
4. τὸ	τὰ	concordat cum edit. Paris.
5. μέσον,	μέσα	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΑ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΑ·	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΑ·
9. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
10. ὡς ἄρα ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἢ ΝΜ πρὸς τὴν ΝΜ·	deest.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

11. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. τὸ	<i>Id.</i>	τῶ

PROPOSITIO XCIX.

1. μέσοις οὔσι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα καὶ
3. ἔστι	<i>Id.</i>	deest.
4. ἐστίν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῶ . . .	τῶ δὲ ἀπὸ τῆς HB τὸ	concordat cum edit. Paris.
6. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῶ ἀπὸ τῆς HB, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῶ ΚΛ, τριτέστιν ἢ ΓΚ τῆ ΚΜ* .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ τῶ	<i>Id.</i>	τῶ δὲ
8. τὸ	τῶ	concordat cum edit. Paris.
9. μήκει	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO C.

1. σύμμετρόν ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῶ δις ὑπὸ τῶν AH, HB*	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ὡς	<i>Id.</i>	καὶ ὡς
5. σύμμετρός ἐστι μήκει . . .	<i>Id.</i>	μήκει σύμμετρός ἐστι

PROPOSITIO CI.

1. ῥητίν	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον παρὰ τὸν ΚΘ παραβελήσθω
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶν ἢ ΓΜ	<i>Id.</i>	ἢ ΓΜ

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- | | | |
|----------------------|----------------------|---------|
| 8. τὸ ΝΑ | <i>Id.</i> | ἢ ΝΑ |
| 9. ἄρα ἀπὸ | <i>Id.</i> | ἄρα ὑπὸ |

PROPOSITIO CII.

- | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. διὰ | <i>Id.</i> | ἀπὸ |
| 2. ἔστιν | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐστίν | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 5. αὐτὴν διαιρεῖ | <i>Id.</i> | διαιρεῖ αὐτήν. |

PROPOSITIO CIII.

- | | | |
|---|---------------------------|---|
| 1. ὅτι | <i>Id.</i> | ὅσι |
| 2. ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν | καὶ ἀσύμμετρον τὸ ἀπὸ τῶν | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐστὶ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἀπὸ τῶν | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 7. τὸ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 8. τὸ | τὸ ἀπὸ τῆς | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἐστὶ | <i>Id.</i> | deest. |
| 10. ἐστίν | <i>Id.</i> | deest. |
| 11. ἀπὸ τῶν | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 12. ἐστὶ | <i>Id.</i> | deest. |
| 13. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ
ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΛ | <i>Id.</i> | καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνά-
λογόν ἐστὶ τὸ ΝΑ |

PROPOSITIO CIV.

- | | | |
|--|----------------------|----------------------------|
| 1. μήκει σύμμετρος ἔστω | <i>Id.</i> | σύμμετρος ἔστω μήκει |
| 2. ἐστὶ | deest. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ΑΕ μὲν | <i>Id.</i> | μὲν ΑΕ |
| 4. Καὶ αἱ | <i>Id.</i> | Αἱ δὲ |
| 5. ἀποτομὴ ἄρα ἐστίν ἢ ΓΔ. Λέ-
γω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ
τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ | Ἐπεὶ οὖν | concordat cum edit. Paris. |

6. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
7. δὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὐδετέρα	οὐθέρα	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CV.

1. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE τῇ ΓΖ, ἢ δὲ BE τῇ ΔΖ	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι	<i>Id.</i>	deest.
3. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ	<i>Id.</i>	Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ
4. τὴν ΖΔ	<i>Id.</i>	τὴν ΖΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
5. ΓΖ, ΖΔ	<i>Id.</i>	ΓΖ, ΖΔ ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἔσται	<i>Id.</i>	ἐστὶ
8. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CVI.

1. γάρ	<i>Id.</i>	deest.
2. τῷ προτέρῳ	deest.	concordat eum edit. Paris.
3. ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν	ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῆς	ὡς τὸ ἀπὸ τῶν
4. ΖΔ	<i>Id.</i>	ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.
5. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ΓΖ, ΖΔ	<i>Id.</i>	ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.
7. τετραγώνῳ,	<i>Id.</i>	deest.
8. ἐστὶ	deest.	concordat eum edit. Paris.

A L I T E R*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. ἔστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Εκκείσθω γὰρ ἢ ΓΔ ρητὴ, . .	Κεείσθω ρητὴ ἢ ΓΔ, . .	concordat cum edit. Paris.
4. τετάρτη	<i>Id.</i>	deest.
5. Τῷ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest..
7. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
10. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
11. ρητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρ- της.	ρητῆς τῆς ΖΕ καὶ ἀπο- τομῆς τετάρτης τῆς ΖΘ.	concordat cum edit. Paris.
12. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀποτομῆς τε- τάρτης.	<i>Id.</i>	deest.
13. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CVII.

1. καὶ αὐτὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. αἱ	<i>Id.</i>	ἢ
4. ἐστὶ τὸ	<i>Id.</i>	τὸ μὲν

A L I T E R**.

2. Εστω	Εστω ἢ	concordat cum edit. Paris.
3. ρητὴ	ρητὸν	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	ἄρα ἢ	concordat cum edit. Paris.

* Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a, e, l, m, n* post propositionem 116, et in capite habet ἢ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν; et in codd. *d, f, g, h* reperitur post propositionem 106.

** Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a, e, l, m, n* post ἄλλως præcedens, et habet in capite ἢ τῇ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούση σύμμετρος μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν; et in codd. *d, f, g, h* reperitur post propositionem 107.

PROPOSITIO CVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἔστω	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. τε	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CIX.

1. χωρίον	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἄρα μὲν	μὲν ἄρα	ἄρα ἐστίν
4. ἐαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέ- τρου	ἢ οὐ.	concordat cum edit. Paris.
5. περιέχομενον	<i>Id.</i>	deest.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἢ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITION CX.

1. αὐτῇ	ταύτῃ	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα ἐστὶ δευτέρα	δευτέρα ἐστίν	concordat cum edit. Paris.
3. πρώτη ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἐστὶ πρώτη.
4. τῆς ΖΚ μείζον	<i>Id.</i>	μείζον τῆς ΖΚ
5. ἐαυτῇ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXI.

1. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ,	τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκο- λούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμ- μετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστίν· ὑπόκειται τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ,	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Εἰ μὲν δὴ	<i>Id.</i>	προσαρμόζουσα δὲ ἢ ΚΖ. Ἡτοι δὲ ἢ ΘΖ τῆς ΖΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν
5. τῇ ΖΗ μήκει.	<i>Id.</i>	μήκει τῇ ΖΗ.
6. ἐστὶν ἄρα τρίτη	τρίτη ἐστὶν	concordat cum edit. Paris.
7. μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα.	μέσης ἀποτομῆ δευτέρα ὥστε ἢ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ διαιρεμένη μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα.	ἀποτομῆ μέσης δευτέρα.
8. μήκει, καὶ οὐδέτερα	καὶ οὐδέτερα	concordat cum edit. Paris.
9. ΖΗ μήκει ἀποτομῆ ἐστὶν ἄρα ἕκτη ἢ ΚΘ.	ἢ ΖΗ μήκει ἀποτομῆ ἕκτη ἐστὶν ἢ ΚΘ.	ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ ἀπο- τομῆ ἐστὶν ἄρα ἕκτη ἢ ΚΘ.
10. ἢ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἢ τὸ ΛΘ ἄρα,	<i>Id.</i>	ὥστε ἢ τὸ ΛΘ,

PROPOSITIO CXII.

linea 16 τῆς	<i>Id.</i>	τῇ
2. μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ	<i>Id.</i>	τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν,
3. πρώτη ἐστὶν	<i>Id.</i>	ἐστὶ πρώτη
4. μήκει καὶ	καὶ	μήκει*
5. τῇ	ἢ	concordat cum edit. Paris.
6. ἢ	τῇ	concordat cum edit. Paris.
7. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἢ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἢ ΔΖ ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἢ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει,	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. εἴσι	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM*.

1. τοῦ τε	<i>Id.</i>	τό τε
---------------------	----------------------	-------

* Hoc corollarium in omnibus adest codicibus.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. ἐπεὶ τῆ	<i>Id.</i>	ἔστι
3. αἱ μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῆ	<i>Id.</i>	deest.
5. μετὰ	κατὰ	concordat cum edit. Paris.
6. Μέσης	<i>Id.</i>	Μέσων
7. Μέσης	<i>Id.</i>	Μέσων

PROPOSITIO CXIII.

1. ἔξει τάξιν	<i>Id.</i>	ἔχει
2. ἰσομάτων δὲ	<i>Id.</i>	δὲ ἰσομάτων
3. ἔξει	<i>Id.</i>	ἔχει
4. τῆ Ἡ ἴση	<i>Id.</i>	ἴση τῆ Ἡ
5. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
6. τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγου- μένων	ΚΕ ἐν ἡγούμενον . . .	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
12. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. καὶ σύμμετρος τῆ ΒΔ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
16. καὶ σύμμετρος τῆ ΓΔ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. εἰσὶ	<i>Id.</i>	deest.
18. ἑαυτῆ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. οὐδέτερα	οὐδέτερα	concordat cum edit. Paris.
20. οὐδέτερα	οὐδέτερα	concordat cum edit. Paris.
21. καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δυ- νίσσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. οὐδέτερα	οὐδέτερα	concordat cum edit. Paris.
23. τὰ	deest.	concordat cum edit. Paris.
24. τάξιν ἔχει	<i>Id.</i>	ἔχει τάξιν

PROPOSITIO CXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἐστὶ τοῖς	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἢ	<i>Id.</i>	ὅτι ἢ
4. ἔστω	ἔστω καὶ	concordat cum edit. Paris.
5. παραβέβληται	<i>Id.</i>	παράκειται*
6. ἴσον ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴσον
7. τὴν Η.	in reliquâ demonstra- tione vocabulum τὴν deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. εἰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης	τὸ ἀπὸ τῆς ἀ	concordat cum edit. Paris.
14. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
15. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
16. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. ΓΔ τῆ ΖΘ	ΘΖ τῆ ΓΔ	concordat cum edit. Paris.
18. δὲ ΒΓ, ΓΔ	ΒΓ, ΓΔ δὲ	concordat cum edit. Paris.
19. ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν	ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα	concordat cum edit. Paris.
20. δυνήσεται	<i>Id.</i>	δύναται
21. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. δυνήσεται	<i>Id.</i>	δύναται
23. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
24. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXV. —

1. τέ	<i>Id.</i>	deest.
2. τοῖς	<i>Id.</i>	τοῖς ἀπὸ
3. ἢ	<i>Id.</i>	deest.
4. τέ	<i>Id.</i>	deest.
5. τὴν ΜΑ	ΜΑ	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. τὴν KM.	KM.	concordat cum edit. Paris.
7. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσων ἐστὶ τῶ	Τῶ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσων ἐστὶ τὸ	concordat cum edit. Paris.
11. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.

C O R O L L A R I U M.

1. περιέχεται.	περιέχεται. Ὅτι δὲ δείξαι.	concordat cum edit. Paris.
------------------------	---------------------------------------	----------------------------

P R O P O S I T I O C X V I.

1. οὐδεμία	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὐδεμία	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν πρότερόν ἐστὶν	<i>Id.</i>	πρότερόν ἐστὶν
5. ἐστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὐδεμία	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R*.

2. γίνονται,	γίνονται,	concordat cum edit. Paris.
3. οὐδεμιᾶ πρότερόν ἐστὶν ἢ αὐτή.	τῶν πρότερον ἢ αὐτή.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
6. Ἀπὸ τῆς	Ἀπὸ	concordat cum edit. Paris.

P R O P O S I T I O C X V I I**.

2. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

** In codicibus hæc propositio numero non signatur.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. ἔχει δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ἔχει
5. μονὰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
7. τῆς ΓΑ	τοῦ ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
9. ἀν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἀριθμοὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἐστίν	deest.	concordat cum edit. Pa ri.
13. ἀν	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. διπλάσιον ἐστὶ	διπλάσιος	concordat cum edit. Paris.
15. ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· . . .	<i>Id.</i>	ἐστίν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ·
16. ἀσύμμετρος ἄρα.	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R*.

1. deest.	deest.	Δευτέριον δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμ- μετρός ἐστίν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.
2. Ἐστω	<i>Id.</i>	Ἐστω γάρ
3. σύμμετρος* καὶ γερονέτω	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οἱ ΕΖ, Η·	<i>Id.</i>	deest.
5. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ	τὸν	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. διπλάσιος	διπλάσιον	concordat cum edit. Paris.
9. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. αὐτοῦ	αὐτῆ	concordat cum edit. Paris.

* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

SCHOLIUM*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. εὐθείων	<i>Id.</i>	deest.
3. εἶδος	ἐπίπεδον	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. τὰς	<i>Id.</i>	τοὺς
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἀσυμμέτρων χωρίων, . . .	<i>Id.</i>	χωρίων ἀσυμμέτρων,
8. τοῖς	<i>Id.</i>	deest.
9. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. πρὸς ἀλλήλους	<i>Id.</i>	ἀλλήλοις
12. γέγονεν ἔτι οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἔστι συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, .	γέγονε διὸ οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφα- νειῶν ἔστι συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, . .	γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν ἔστι συμμετρία καὶ ἀσυμμε- τρία,

* Hoc scholium, quod in omnibus adest codicibus, Euclidis esse non potest, utpote ex sequentibus pendet.

FINIS TOMI SECUNDI.

E R R A T A.

Pagina	linea		Pagina	linea	
xxxiv,	5,	ea et, <i>lege</i> ea et fere.	565*	4,	incommensurable, <i>le-</i>
xxliv,	alineæ 5,	in aliquot exemplaribus			<i>ge</i> commensurable.
		pro B, <i>lege</i> A.	565*	10, b.	rationelle et incom-
164*	5, b.	encore, <i>lege</i> déjà.			mensurable, <i>lege</i> ra-
166*	4, b.	irrationel, <i>lege</i> ra-			tionelle et commen-
		tionel.			surable.
171,		littera Γ deest in figurâ.	366*	6,	la droite, <i>lege</i> le pa-
254*	5, b.	la droite AE, <i>lege</i> la			rallélogramme.
		puissance de AE.	367*	2,	incommensurable, <i>le-</i>
264*		littera B deest in figurâ.			<i>ge</i> commensurable.
277*	7, b.	la somme, <i>lege</i> la som-	374*	4,	la droite, <i>lege</i> le pa-
		me des.			rallélogramme.
279,		in figurâ littera B ponat-	394*	4,	ZH, <i>lege</i> ZK; et eadem
		ur in loco litteræ E,			correctio in linguâ
		et vice versâ.			græcâ et in linguâ
283*	3,	ΔB, <i>lege</i> AB.			latinâ.
308*	6,	surface médiale, <i>lege</i>	394*	8,	incommensurable, <i>le-</i>
		surface rationelle.			<i>ge</i> commensurable.
316*	5,	commensurable, <i>lege</i>	394*	10,	ἀσυμμέτρου, <i>lege</i> συμμέ-
		incommensurable.			τρου.
329*		in secundâ lineâ figuræ	394*	11,	incommensurabili, <i>le-</i>
		littera B ponatur in			<i>ge</i> commensurabili.
		loco litteræ E.	396*	2,	21, 10, <i>lege</i> 32, 10.
251,	5,	18. 10, <i>lege</i> 19. 10.	396,	3,	23, 10, <i>lege</i> 21, 10.
352,	3,	ΔOM, <i>lege</i> ΔOM.	405*	1, b.	ΘΚ, <i>lege</i> ΘΕ, et eadem
358*	1,	quarré de AH, <i>lisez</i>			correctio in linguâ
		quarré de EH.			græcâ et linguâ latinâ.
362*	2, b.	ἀπο, <i>lege</i> ὑπὸ.	405,	1, b.	ΘΚ, ΒΔ, <i>lege</i> ΘΕ, ΕΔ.
362*	3,	quadrato autem ex,	446*	3, b.	plus grande que ΔΑ,
		<i>lege</i> rectangulo au-			<i>lege</i> plus grande que
		tem sub.			ΕΑ.
362*	2,	quarré de, <i>lege</i> rectan-	446*	1, b.	ΔΑ, <i>lege</i> ΔΑ.
		gle sous.	479*	1, b.	avant la rationelle, <i>le-</i>
365*	5,	ἀσύμμετρος, <i>lege</i> σύμμε-			<i>ge</i> avant la médiale.
		τρος.			
365*	6,	incommensurabilis, <i>le-</i>			
		<i>ge</i> commensurabilis.			



