This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVE NT
Google

Digitized by Google

123 R: 22

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE

DU R. P. DECHALLES.

Digitized by Google

Digitized by Google

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE

Du R. P. DECHALLES, de la Compagnie de Jesus;

Et de M. OZANAM, de l'Académie Royale des Sciences.

Démontrés d'une maniere nouvelle & facile, & augmentés d'un grand nombre de Propositions & d'Usages, & d'un Traité complet des Rapports.

Par M. AUDIERNE.

Seconde Édition, revue, corrigée & augmentée par l'Auteur.

A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÉFACE.

LE Nil qui chaque année étend ses eaux sur toute l'Egypte, enleve les bornes des terres de cette contrée ; de maniere que les propriétaires sont souvent obligés, lorsque ce Fleuve est rentré dans son lit, de rechercher le terrein qu'ils possédoient avant l'inondation. Cette nécessité fit inventer aux premiers Egyptiens, les moyens de mesurer l'étendue que peut avoir un certain espace, & ils donnerent à cet Art le nom de Géométrie, *qui en notre langue signifie* Mesure de la Terre. *Mais cette Science, qui dans son origine n'avoit eu que cet objet assez simple, sortit bientôt du limon du Nil où elle avoit pris naissance, & devint, pour me servir de l'expression de Platon, l'une des aîles avec lesquelles l'homme*

Digitized by Google

s'éleva jusqu'à ces globes immenses qui roulent sur sa tête. Alors, les machines furent inventées; les édifices les plus hardis furent élevés; les périodes des astres furent déterminées; les courses, les distances, les grandeurs des planetes, furent mesurées. Enfin, on construisit les vaisseaux, & la mer ne fut plus une barriere entre les Nations les plus éloignées.

On a donné plusieurs Traités d'une science dont on a retiré de si grands avantages, & qui en procure tous les jours de nouveaux. Mais, la plus grande partie de ces ouvrages n'a pas toute la perfection que l'on pourroit souhaiter. Les uns, trop secs & trop obscurs, sont la cause que l'on se dégoûte de la Géométrie avant que de la connoître: les autres, au contraire, trop dénués du style qui est propre & particulier à cette science, n'ont ni l'ordre, ni le génie qui lui convient. Ainsi, loin de donner à l'esprit l'étendue & la justesse, qui sont les prin-

Digitized by Google

cipaux fruits que l'on doit recueillir de ce genre d'étude, ils font penser que la Géométrie est aussi problématique que la Physique. Et comme ces deux sciences ne sont pas également séduisantes, on va quelquefois jusqu'à accuser la premiere de manquer de sens commun ; elle, qui est le chef-d'œuvre du bon sens.

L'abrégé des Elémens d'Euclide du P. Dechalles, n'a point le premier de ces défauts. Ce savant Mathématicien, en y simplifiant les démonstrations, met la Géométrie à la portée des personnes qui veulent s'instruire de cette science ; & en joignant des usages à plusieurs propositions, il prévient le dégoût que l'ignorance de l'utilité de ces mêmes propositions pourroit causer. Mais, comme il étoit trop Géometre pour s'imaginer que l'on recevroit un jour des preuves, ou simplement physiques, ou totalement arithmétiques, pour des démonstrations géométriques, il n'a pas toujours été attentif à ne démon-

Digitized by Google

trer qu'en rigueur : & par-là, il n'est d'aucun secours contre ces démonstrations vicieuses qui sont devenues si communes, qu'il est bien rare que ceux qui n'étudient la Géométrie que dans les Auteurs modernes, deviennent jamais Géometres.

C'est le desir de remédier à ce dernier défaut qui m'a fait entreprendre de démontrer de nouveau ces Elémens, sans m'assujettir à suivre, ni le Pere Dechalles, ni M. Ozanam, ni aucun autre Auteur. Je me suis seulement proposé deux objets dans mon travail, dont le premier a été de ne donner que des démonstrations qui eussent toute la rigueur de celle des Anciens ; & le second, de me mettre à la portée de toutes les personnes, qui, par goût ou par état, veulent s'appliquer à ce genre d'étude. Si quelques personnes trouvent que j'ai employé plus de mots que beaucoup d'autres Auteurs, pour démontrer quelques propositions, je supplie ces personnes de ne mesurer mes démons-

Digitized by Google

trations que par la durée du tems qu'elles employeront à les comprendre ; de faire attention que j'ai toujours démontré en rigueur ; & que si elles m'entendent sans peine, & si je n'ai laissé aucun voile sur les vérités que je voulois découvrir, j'ai fait ce que je devois faire.

A l'égard d'Euclide, qui est l'Auteur de ces Elémens, il étoit de la ville de Mégare, vivoit sous le premier des Ptolomées, environ 400 ans avant la Naissance de J. C. & l'on peut dire qu'il n'y a eu de Géometres depuis lui que ceux qu'il a formés.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

LEs Mathématiciens nomment *théorêmes*, les propositions qui ne font qu'exposer une vérité : *problêmes*, celles qui proposent quelque chose à faire : *corollaires*, celles qui sont des conséquences d'autres propositions : & enfin, *scholies*, celles qui ne sont que des remarques.

Ils nomment *hypothese*, les conditions auxquelles ils disent qu'une chose doit être : & *conséquence*, ce qui suit de l'hypothese, & qu'il faut démontrer.

Par exemple, dans cette proposition : *si un triangle est équilatéral, ses trois angles seront égaux ;* cette partie, *si un triangle est équilatéral,* est l'*hypothese ;* & celle-ci, *ses trois angles seront égaux,* est la *conséquence*, qu'il faut démontrer.

C'est l'usage de terminer tou-

Digitized by Google

jours la démonſtration d'une propoſition, par la répétition de l'hypotheſe & de la conſéquence. Mais, pour abréger, on déſigne l'un & l'autre par ces quatre lettres, C. Q. F. D, s'il s'agit d'un théorême; & par ces quatre lettres, C. Q. F. F, s'il eſt queſtion d'un problême. Les quatre premieres ſignifient, *ce qu'il falloit démontrer*, & les quatre autres, *ce qu'il falloit faire.*

C'eſt auſſi par le même motif de briéveté que nous nous ſommes ſervis de quelques ſignes, dont voici l'explication.

(n) Signifie, *par le n°. qui eſt chiffré à la marge.*

[C] Signifie, *par la conſtruction.*

[D] Signifie, *par ce qui vient d'être démontré.*

[H] Signifie, *par l'hypotheſe.*

[S] Signifie, *par la ſuppoſition.*

[C & D] Signifient, *par la conſtruction, & par ce qui vient d'être démontré.*

Digitized by Google

LES

Digitized by Google

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

EUCLIDE commence ce Livre par définir les termes les plus ordinaires de la Géométrie, & par poser les principes sur lesquels il doit fonder toutes ses démonstrations. Il considere ensuite les triangles ; détermine les conditions auxquelles on doit conclure l'égalité de leurs angles, de leurs côtés, & de leurs surfaces ; & enseigne la maniere de se servir de ces figures, pour résoudre les problêmes les plus simples de la Géométrie. Il passe aux lignes paralleles ; examine à quelles marques on peut connoître si des lignes le sont ; considere les propriétés de ces lignes ; en déduit une des plus considérables des triangles ; & natu-

Digitized by Google

rellement conduit aux parallélogrammes, qui sont des figures formées par ces mêmes lignes, il en expose aussi plusieurs propriétés; démontre quelques-uns des cas auxquels ils sont égaux, & donne des regles pour transformer en parallélogramme une figure rectiligne quelconque. Il termine enfin ce Livre par la fameuse proposition du quarré de l'hypoténuse, l'une des plus belles & des plus utiles de la Géométrie; & qui causa, dit-on, tant de plaisir à Pythagore, lorsqu'il l'eut trouvée, qu'il offrit aux Muses un sacrifice de cent bœufs, pour les remercier de la faveur qu'elles lui avoient faite.

DÉFINITIONS.

N°. 1. LA *Géométrie* est une science qui considere l'*étendue*.

2. Ce qui est étendu peut ne l'être qu'en un sens; c'est-à-dire, n'avoir que de la *longueur*. Il peut l'être en deux sens; c'est-à-dire, avoir en même tems de la *longueur* & de la *largeur* †. Enfin, il peut l'être en trois sens, c'est-à-dire, avoir en même tems de la *longueur*, de

† La largeur se nomme aussi la *hauteur*.

Digitized by Google

la *largeur*, & de l'*épaisseur* †.

Par exemple, la distance d'un lieu à un autre n'est que longue : *ce que nous voyons du plancher d'une chambre est en même tems* long & large : *un mur est en même tems* long, large & épais.

Ainsi il y a trois genres d'étendues.

3. La longueur, la largeur, & l'épaisseur se nomment chacune *dimension*.

I.

4. On nomme *point*, ce qui considéré dans l'étendue, n'a aucune partie.

II.

5. On nomme *ligne*, ce qui n'est étendu qu'en un sens.

III.

COROLLAIRE.

6. *Il suit de cette définition, que* les extrêmités d'une ligne sont des points.

Démonstration. *Les extrêmités d'une ligne ne sont étendues, ni en deux sens, ni en trois sens ; puisque* (n) *les lignes ne le sont qu'en un seul. Elles ne sont point non plus étendues en un sens ; puisque si elles l'étoient, elles seroient des lignes* (n). *Or, les extrémités A * & B d'une ligne AB ne sont point des lignes ;* N. 5. N. 5. Fig. 2.

† L'épaisseur se nomme aussi la *profondeur*.

puisque si elles étoient des lignes, par exemple AC & BD, elles auroient des extrémités A & C, B & D; & par conséquent, elles ne seroient point celles de la ligne AB, mais ce seroit leurs extrémités A & B qui le seroient. Ainsi, les extrémites d'une ligne ne sont étendues en aucun sens: donc elles n'ont aucune
N. 4. *partie; & par conséquent* (n) *elles sont des points. Donc C. Q. F. D.*

I.V

7. On nomme *ligne droite* †, celle qui va directement d'un point à un autre.

Fig. 1. *La ligne AB * qui en allant du point A au point B ne fait aucun détour, est une* ligne droite.

8. On nomme *ligne courbe*, celle qui ne va directement d'un point à un autre en aucune de ses parties.

Fig. 2. *La ligne CD * qui en allant du point C au point D se détourne continuellement de la ligne droite, est une* ligne courbe.

V.

9. On nomme *surface* ¶, ce qui n'est étendu qu'en deux sens.

† Il faut remarquer qu'Euclide ne considere que les lignes droites.

¶ La surface se nomme aussi *superficie* & *aire*. Son nom grec en donne une idée très-juste. Il signifie dans son sens propre, *ce qui paroît d'une chose, ce que l'on en voit.*

Digitized by Google

VI.

COROLLAIRE.

10. *Il suit de cette définition, que* les extrémités d'une surface sont des lignes.

Démonst. *Les extrémités d'une surface ne sont point étendues en trois sens, puisque* (n) *les surfaces ne le sont qu'en deux.* N. 9. *Elles ne sont point non plus étendues en deux sens; puisque si elles l'étoient, elles seroient des surfaces* (n). *Or, les extrémités AD *, BC, &c. d'une surface AC* N. 9. Fig. 3. *ne sont point des surfaces; puisque si elles étoient des surfaces, par exemple AF, GC, &c. elles auroient des extrémités AD & EF, &c. BC & GH, &c. & par conséquent, elles ne seroient point celles de la surface AC, mais ce seroit leurs extrémités AD, BC, &c. qui le seroient. Ainsi, les extrémités d'une surface ne sont étendues, ni en trois sens, ni en deux sens. Cependant elles sont étendues, puisque les surfaces l'étant en deux sens,* (n) *il faut nécessairement que ce qui termine l'un de ces deux sens soit étendu en l'autre. Donc elles ne sont étendues qu'en un sens; & par conséquent* (n) *elles sont* N. 5. *des lignes. Donc C. Q. F. D.*

Digitized by Google

VII.

11. On nomme *surface-plane* †, celle que tous les points d'une ligne droite toucheroient au même instant, en quelque sens que l'on posât cette ligne sur cette surface.

SCHOLIE.

12. *Lorsque l'on veut s'assurer qu'une surface est plane, on lui applique une regle en différens sens; & l'on examine à chaque position, si cette regle la touche par-tout. Les ouvriers ne s'y prennent point autrement pour rectifier leurs ouvrages.*

13. On nomme *surface courbe*, celle que tous les points d'une ligne droite ne toucheroient point au même instant, si l'on posoit cette ligne sur cette surface en un certain sens.

VIII.

14. On nomme *angle* ¶, l'ouverture de deux lignes qui ont un point commun.

Fig. 4. *L'ouverture des lignes BA * & BC*

† La surface plane se nomme un *plan*; & il faut remarquer qu'Euclide ne considere que ces surfaces.

¶ L'angle que l'on définit ici se nomme *angle-plan*, pour le distinguer d'un angle d'un autre genre, dont il n'est parlé qu'au onzieme Livre.

Digitized by Google

qui ont le point B commun, est un angle.

IX.

15. On nomme *côtés* d'un angle les deux lignes qui le forment.

*Les lignes BA * & BC, sont les* côtés *de l'angle B.* Fig. 4.

16. On nomme *sommet* d'un angle, le point qui est commun à ses côtés.

*Le point B * qui est commun aux lignes BA & BC, est le* sommet *de l'angle B.* Fig. 4.

SCHOLIE I.

17. *Lorsque plusieurs angles ont le même sommet, on les indique par leurs côtés; parce que la lettre qui est à leur sommet n'en désigneroit aucun en particulier. Ainsi, pour indiquer l'angle qui est à la droite de la ligne AB *, on dit,* Fig. 5. l'angle formé par les lignes AB & BC; *& pour indiquer celui qui est à la gauche de la même ligne, on dit,* l'angle formé par les lignes AB & BD. *Mais on abrege ordinairement cette expression, en disant seulement* l'angle ABC, *pour indiquer le premier; &* l'angle ABD, *pour indiquer le second. Remarquez que lorsqu'on se sert de cette expression abré-*

Digitized by Google

gée, la seconde lettre est toujours celle du sommet de l'angle dont il s'agit.

SCHOLIE II.

Fig. 4. 18. *Si l'on fait tourner la ligne BC * autour du point B, de maniere que ce point soit toujours l'extrémité commune des lignes BA & BC, plus le point C s'éloignera du point A, plus l'ouverture de ces lignes sera grande; & plus il s'en approchera, moins elle le sera. Ainsi, la grandeur de cette ouverture dépend de la position respective des lignes qui la for-*
N. 14. *ment. Mais* (n) *cette ouverture est un*
N. 15. *angle dont* (n) *ces lignes sont les côtés. Donc la grandeur d'un angle dépend de la position respective de ses côtés; & par conséquent, quelque augmentation, ou diminution, que l'on fasse aux côtés d'un angle, on n'augmente, ni ne diminue cet angle; puisque ni cette augmentation, ni cette diminution, ne changent la position respective de ses côtés.*

X.

19. On nomme réciproquement *lignes perpendiculaires*, deux lignes qui se rencontrent de maniere que l'une forme avec l'autre, prolongée s'il est nécessaire, deux angles égaux.

Digitized by Google

*La ligne AB * qui forme avec la ligne DC deux angles égaux ABC & ABD, est* perpendiculaire *à cette ligne DC.* Fig. 6.

20. On nomme réciproquement *lignes obliques*, deux lignes qui se rencontrent de maniere que l'une forme avec l'autre, prolongée s'il est nécessaire, deux angles inégaux.

*La ligne AB * qui forme avec la ligne DC deux angles inégaux ABC & ABD, est* oblique *à cette ligne DC.* Fig. 5.

21. On nomme *angle droit*, celui dont l'un des côtés est perpendiculaire à l'autre.

*L'angle A * est* droit. Fig. 7.

XI.

22. On nomme *angle obtus*, celui qui est plus grand, c'est-à-dire plus ouvert, qu'un angle droit.

*L'angle B * est* obtus. Fig. 8.

XII.

23. On nomme *angle aigu*, celui qui est plus petit, c'est-à-dire moins ouvert, qu'un angle droit.

*L'angle C * est* aigu. Fig. 9.

XIII.

24. On nomme *terme*, l'extrémité d'une étendue.

Digitized by Google

XIV.

25. On nomme *figure*, une étendue qui est terminée de tous les côtés.

26. On nomme *figures égales*, celles qui contiennent des espaces égaux.

SCHOLIE.

27. *Il ne faut point confondre les figures* égales *avec les figures* semblables. *Par exemple, une figure de trois côtés qui contient autant d'espace qu'une de quatre, est* égale *à cette figure de quatre côtés, & ne lui est point* semblable. *Un petit cercle au contraire est* semblable *à un grand, & ne lui est point* égal. *On verra au sixieme Livre les conditions que des figures doivent avoir pour être* semblables.

XV.

28. On nomme *cercle*, une figure plane qui est terminée par une seule ligne, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de cette figure.

Fig. 10. *La figure X* est un* cercle.

29. On nomme *circonférence* † d'un cercle, la ligne qui le termine.

† Le nom de *circonférence* se donne non-seulement à la ligne qui termine un cercle, mais aussi à toute ligne qui termine une surface quelconque. Une circonférence se nomme aussi un *périmetre*, une *périférie*, & un *circuit*.

Digitized by Google

La ligne ABDE * *est la* circonférence *du cercle X.* Fig. 10.

30. On nomme *arc* de cercle, une partie quelconque de la circonférence d'un cercle.

La partie, par exemple AB *, *de la circonférence du cercle X, est un* arc *de cercle.* Fig. 10.

31. On nomme *degré*, un arc de cercle qui est la 360me. partie de la circonférence d'un cercle : *minute*, un arc de cercle qui est la 60me. partie d'un degré : *seconde*, un arc de cercle qui est la 60me. partie d'une minute : *tierce*, un arc de cercle qui est la 60me. partie d'une seconde ; & ainsi de suite.

XVI.

32. On nomme *centre* d'un cercle, le point qui est également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle.

Le point C * *est le* centre *du cercle X.* Fig. 10.

XVII.

33. On nomme *diametre* d'un cercle, une ligne droite quelconque qui passe par le centre de ce cercle, & est terminée de part & d'autre par sa circonférence.

Digitized by Google

Fig. 10. *La ligne AD * est un* diametre *du cercle X.*

34. On nomme *rayon* d'un cercle, une ligne droite quelconque qui est tirée du centre de ce cercle à sa circonférence.

Fig. 10. *La ligne CB * est un* rayon *du cercle X.*

COROLLAIRE.

35. *Il suit des Nos.* 28, 32, 33. & 34. *Premierement, que* tous les diametres d'un même cercle sont égaux : *secondement, que* le rayon d'un cercle est la moitié de son diametre : *troisiemement,* enfin, que tous les rayons d'un même cercle sont égaux.

XVIII.

36. On nomme *demi-cercle*, une figure plane qui est terminée par la moitié de la circonférence d'un cercle, & par son diametre.

Fig. 11. *La figure Y * est un* demi-cercle.

SCHOLIE.

Fig. 12. 37. *Si une ligne droite AB * ayant l'une quelconque A de ses extrémités fixe, fait une révolution entiere autour de cette extrémité, chacun de ses autres points*

Digitized by Google

D, F, &c. décrit une circonférence de cercle : si elle ne fait que la moitié d'une révolution, chacun de ses autres points ne décrit que la moitié d'une circonférence : si elle ne fait que le tiers d'une révolution, chacun de ses autres points ne décrit que le tiers d'une circonférence ; & ainsi de suite. Or, on peut toujours considérer un angle quelconque BAC, comme ayant été formé par une ligne droite AC, qui après avoir été posée sur une autre AB, s'en seroit écartée vers C en tournant autour du point fixe A, qui est le sommet de cet angle, & en décrivant avec ses autres points E, G, &c. des arcs de cercle DE, FG, &c. compris entre ces deux mêmes lignes, & qui ont ce même sommet pour centre. Donc :

Premierement. *Si différens arcs de cercles, qui sont compris entre les côtés AB & AC d'un angle quelconque BAC, ont chacun pour centre le sommet A de cet angle, le premier DE est même partie de la circonference du cercle dont AD est le rayon, que le second FG l'est de la circonférence du cercle dont AF est le rayon, que le troisieme HI l'est de la circonférence du cercle dont AH est le rayon ; & ainsi de suite. Par conséquent, tous ces arcs sont* semblables ; *c'est-à-dire, sont*

chacun d'un même nombre de degrés.

Secondement. *Si l'un quelconque des arcs* Dk, Fm, *&c. d'un angle BAO, est d'autant de degrés que l'un quelconque des arcs* kl, mn, *&c. d'un autre angle OAP, ces deux angles sont égaux; puisqu'alors le chemin que la ligne AO est supposée avoir fait pour s'avancer de B en O, en tournant autour du point fixe A, est parfaitement égal à celui que la ligne AP est aussi supposée avoir fait pour aller de O en P, en tournant autour du même point fixe A. Par conséquent, si l'un quelconque des arcs* Dl, Fn, *&c. d'un angle BAP, est de deux fois autant de degrés que l'un quelconque des arcs* Dk, Fm, *&c. d'un autre angle BAO, le premier angle est double du second: si l'un quelconque des arcs DE, FG, &c. d'un angle BAC, est de trois fois autant de degrés que l'un quelconque des arcs* Dk, Fm, *&c. d'un autre angle BAO, le premier angle est triple du second; & ainsi de suite.*

Or, puisque tous les arcs d'un même angle sont semblables, que deux angles sont égaux, lorsque les arcs de l'un & de l'autre sont chacun d'un même nombre de degrés, & qu'enfin un angle est double, triple, quadruple, &c. d'un autre, sui-

Digitized by Google

vant que les arcs du premier sont de deux fois, de trois fois, de quatre fois, &c. autant de degrés que les arcs du dernier; la grandeur d'un angle est toujours déterminée par le nombre des degrés que l'un quelconque des arcs de cet angle contient. Par conséquent, la mesure naturelle d'un angle, est un arc de cercle quelconque compris entre les côtés de cet angle, & décrit de son sommet pris pour centre; & le nombre des degrés de cet arc est la valeur de ce même angle.

Par exemple, la mesure *de l'angle BAC, est celui des arcs DE, FG, &c. que l'on veut; & le nombre des degrés que cet arc contient, est la* valeur *de cet angle.*

COROLLAIRE.

38. *Il suit de cette scholie, qu'*un angle droit est de 90 degrés.

Démonst. *Lorsqu'un angle est droit, l'arc de cercle qui est décrit de son sommet, & compris entre ses côtés, est le quart de la circonférence d'un cercle. Or* (n) *le* N. 31. *quart de la circonférence d'un cercle est de 90 degrés. Donc un angle droit est de 90 degrés.*

XX.

39. On nomme *figure rectiligne*, celle qui n'est terminée que par des lignes droites.

Digitized by Google

On tire la dénomination des figures, du nombre de leurs côtés, ou de celui de leurs angles. Or, lorsque l'on tire la dénomination d'une figure, du nombre de ses côtés, on nomme :

XXI. XXII. & XXIII.

40. *Trilatere*, ou *triligne*, une figure qui a trois côtés; *quadrilatere*, ou *quadriligne*, celle qui en a quatre; *figure de vingt côtés*, celle qui en a vingt; *de cent côtés*, celle qui en a cent; & en général, *multilatere*, celle qui en a plusieurs.

Et lorsque l'on tire la dénomination d'une figure, du nombre de ses angles, on nomme :

41. *Trigone*, ou *triangle*, une figure qui a trois angles : *tétragone*, celle qui en a quatre : *pentagone*, celle qui en a cinq : *exagone*, celle qui en a six : *eptagone*, celle qui en a sept : *octogone*, celle qui en a huit : *ennéagone*, celle qui en a neuf : *décagone*, celle qui en a dix : *endécagone*, celle qui en a onze : *dodécagone*, celle qui en a douze : *pentédécagone*, celle qui en a quinze; & en général *polygone*, celle qui en a plusieurs.

On tire aussi la dénomination des triangles, de leurs côtés, ou de leurs angles. Or, lorsque l'on tire de ses côtés la dé-

nomination

Digitized by Google

nomination d'un triangle, on nomme :

XXIV.

42. *Triangle équilatéral*, celui dont tous les côtés sont égaux.

*Le triangle A * est* équilatéral. Fig. 13.

XXV.

43. *Triangle isoscelle*, celui qui a deux côtés égaux.

*Le triangle B * est* isoscele. Fig. 14.

XXVI.

44. *Triangle scalêne*, celui dont tous les côtés sont inégaux.

*Le triangle C * est* scalêne. Fig. 15.

Et lorsque l'on tire de ses angles la dénomination d'un triangle, on nomme :

XXVII.

45. *Triangle ortogone*, ou *rectangle*, celui qui a un angle droit.

*Le triangle A * est* rectangle. Fig. 16.

XXVIII.

46. *Triangle ambligone*, ou *obtusangle*, celui qui a un angle obtus.

*Le triangle B * est* obtusangle. Fig. 17.

XXIX.

47. *Triangle oxigone*, ou *acutangle*, celui dont tous les angles sont aigus.

*Le triangle C * est* acutangle. Fig. 18.

Digitized by Google

48. On nomme *hypotenuse*, le côté d'un triangle rectangle, qui est opposé à l'angle droit de ce triangle.

49. On nomme *angle extérieur* d'un triangle, un angle formé par le prolongement de l'un des côtés de ce triangle.

Fig. 19. *L'angle ABC* est un angle* extérieur *du triangle DAB.*

A l'égard de la dénomination des quadrilateres, elle dépend tout à la fois, & de leurs côtés, & de leurs angles. Ainsi l'on nomme:

XXX.

50. *Quarré*, un quadrilatere dont tous les côtés sont égaux, & dont tous les angles sont droits.

Fig. 20. *La figure A* est un* quarré.

XXXI.

51. *Quarré long*, un quadrilatere dont les seuls côtés opposés sont égaux, & dont tous les angles sont droits.

Fig. 21. *La figure B* est un* quarré long.

XXXII.

52. *Rhombe*, ou *lozange*, un quadrilatere dont tous les côtés sont égaux, mais dont les angles ne sont pas droits.

Fig. 22. *La figure C* est un* rhombe.

XXXIII.

53. *Rhomboïde*, un quadrilatere dont

Digitized by Google

les seuls côtés opposés sont égaux, & dont les angles ne sont pas droits.

*La figure D * est un* rhomboïde. Fig. 23.

XXXIV.

54. On nomme *trapeze*, tout quadrilatere différent des quatre que l'on vient de définir.

XXXV.

55. On nomme *lignes paralleles*, celles dont tous les points des unes sont également éloignés de tous les points correspondans des autres.

*Les lignes AB * & CD sont* paralleles. Fig. 24.

COROLLAIRE.

56. *Il suit de cette définition, que* des lignes paralleles ne se rencontrent point.

57. On nomme *parallélogramme*, toute figure plane dont les côtés opposés sont paralleles.

SCHOLIE.

58. *Il est démontré au N°. 127, que les côtés opposés du* quarré, *du* quarré long, *du* rhombe *& du* rhomboïde, *sont paralleles. Ainsi, ces quatre figures sont des* parallélogrammes; *& comme les deux premieres ont tous leurs angles droits, on les appelle des* parallélogrammes rectangles, *ou seulement, des* rectangles.

Digitized by Google

Il faut même remarquer, que quoique toute figure plane dont les côtés opposés sont paralleles soit un parallélogramme, cependant on ne donne ordinairement cette dénomination qu'aux quatre figures précédentes.

59. On nomme *diagonale* d'un quadrilatere, une ligne droite tirée de l'un quelconque des angles de ce quadrilatere à l'angle opposé de ce même quadrilatere.

Fig. 25. *La ligne AC * est la* diagonale *du quadrilatere DB.*

60. Enfin, on nomme *complément* d'un parallélogramme, deux parallélogrammes formés de part & d'autre de la diagonale du premier, par deux lignes paralleles à ses côtés, chacune à chacun; & qui ont un point commun entr'elles & cette même diagonale.

Fig. 25. *Les parallélogrammes DF * & FB sont les* complémens *du parallélogramme DB.*

DEMANDES.

On demande qu'il soit permis:

Premierement, de tirer une ligne droite d'un point quelconque à quelque autre point que l'on veuille; *& par conséquent*, de prolonger une ligne droite autant qu'on le veut.

Digitized by Google

Secondement, de décrire un cercle de quelque point que l'on veuille prendre pour centre, & avec quelque rayon que l'on veuille.

61. *Troisiemement*, enfin, de prendre indifféremment l'une pour l'autre, deux quantités égales.

AXIOMES.

I.

62. Les quantités qui sont égales chacune à une même quantité, sont égales entr'elles.

II.

63. Les quantités égales étant ajoutées à des quantités égales, forment des sommes égales.

III.

64. Les quantités égales étant retranchées de quantités égales, laissent des restes égaux.

IV.

65. Les quantités égales étant ajoutées à des quantités inégales, forment des sommes inégales.

V.

66. Les quantités égales étant retranchées de quantités inégales, laissent des restes inégaux.

Digitized by Google

VI.

67. Les quantités qui sont doubles, triples, quadruples, &c. de quantités égales, sont égales.

VII.

68. Les quantités qui sont les moitiés, les tiers, les quarts, &c. de quantités égales, sont égales.

VIII.

69. Deux lignes droites, ou deux figures planes, qui étant posées l'une sur l'autre ne se surpassent point, c'est-à-dire, se couvrent réciproquement, sont égales.

COROLLAIRE.

70. *Il suit de cet axiome : Premierement, que* si deux lignes droites égales sont posées l'une sur l'autre, de maniere que l'une des extrémités de la premiere soit sur l'une des extrémités de la seconde, l'autre extrémité de la premiere sera sur l'autre extrémité de la seconde.

71. *Secondement, que* si deux angles égaux sont posés l'un sur l'autre, de maniere que le sommet du premier étant sur le sommet du second, l'un des côtés du premier soit sur l'un des côtés du second,

Digitized by Google

l'autre côté du premier sera sur l'autre côté du second.

IX.

72. Une quantité est égale à la somme de toutes ses parties; & par conséquent, plus grande qu'aucune de ses parties.

COROLLAIRE.

73. *Il suit de cet axiome, que* la somme des produits de toutes les parties d'une quantité multipliées chacune par un même multiplicateur, est égale au produit de cette même quantité multipliée aussi par ce même multiplicateur.

X.

74. Deux lignes droites qui ont deux points communs, sont posées l'une sur l'autre, & ne font qu'une seule ligne droite.

COROLLAIRE.

75. *Il suit de cet axiome: Premierement, que* deux lignes droites ne se rencontrent qu'en un point. *Secondement, que* deux lignes droites ne ferment point un espace.

Digitized by Google

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

76. Décrire sur une ligne droite donnée, un triangle équilatéral.

Fig. 26. IL faut décrire sur la ligne droite AB * un triangle équilatéral.

Construction. Avec la même ligne AB prise pour rayon, décrivez du point A pris pour centre, un cercle DCB; & du point B pris pour centre, un autre cercle ACE. Du point C commune section des circonférences de ces deux cercles, tirez aux points A & B les lignes droites CA & CB. Le triangle ACB que ces lignes formeront avec la ligne AB, sera équilatéral.

Démonst. Les lignes AB & AC sont
N. 35. égales (n), puisque [c] elles sont rayons
N. 35. du même cercle DCB. Or (n), les lignes AB & BC sont aussi égales; puisque [c] elles sont rayons du même cercle ACE.
N. 62. Donc (n), les lignes AB, AC, & BC
N. 42. sont égales; & par conséquent (n), le triangle ACB qu'elles forment, est équilatéral. Donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

Digitized by Google

SCHOLIE.

77. *Pour avoir le point C*, il suffit de décrire avec la ligne AB prise pour rayon, & des points A & B pris pour centres, deux arcs qui se coupent réciproquement.* Fig. 26.

USAGE.

78. *On peut se servir du triangle équilatéral pour mesurer une distance inaccessible; par exemple, la largeur d'une riviere. Il faut pour cela décrire sur une planche un triangle équilatéral ABC*, & s'en servir de cette maniere:* Fig. 27.

On pose horizontalement le triangle ABC, & l'on dirige son côté AC de maniere qu'il soit parallele au lit de la riviere. En regardant ensuite d'alignément au côté AB, on observe un point D au-delà de cette riviere; & d'alignement au côté AC, un autre point F éloigné de cinq à six toises du point A. On fait mettre un piquet en A, & un autre en F. On transporte ensuite le triangle ABC vers E; & l'on fait ensorte d'y trouver un point c où l'on puisse poser ce même triangle, de maniere qu'en regardant d'alignement au côté ca, le piquet F empêche de voir le piquet A; & d'alignement au côté cb,

Digitized by Google

on voye le même point précédent D. Lorsque l'on est parvenu à trouver ce point C, les rayons visuels AD, Ac & cD forment un triangle ADc qui est équilatéral, & dont on peut mesurer le côté Ac. Or, il est démontré que dans un triangle équilatéral, le quarré de la perpendiculaire est triple de celui de la moitié du côté. Ainsi, lorsque l'on connoît le côté Ac, il est facile de trouver la valeur de la perpendiculaire DG; de laquelle si l'on ôte la distance HG du bord de la riviere à la ligne Ac, le reste DH est la largeur demandée.

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

79. *Tirer d'un point donné, une ligne droite qui soit égale à une autre.*

Fig 28. IL faut tirer du point C * une ligne droite qui soit égale à la ligne droite AB.

Const. Avec un rayon égal à la ligne AB, & du point C pris pour centre, décrivez un cercle EFD. Du même point C, tirez à un point quelconque D de la

Digitized by Google

circonférence de ce cercle, une ligne droite CD. Cette ligne sera égale à la ligne AB.

Démonst. La ligne CD est [c] un rayon du cercle EFD : & [c] le rayon de ce cercle est égal à la ligne AB. Donc (n) la ligne CD est égale à la ligne AB ; N. 35. & par conséquent C. Q. F. F.

SCHOLIE.

80. *Il suffit de prendre avec un compas la longueur de la ligne AB **; de poser ensuite l'une des pointes de ce compas au point C ; de marquer avec l'autre un point D ; & de tirer de ce point C au point D une ligne droite CD.* Fig. 28.

Digitized by Google

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

81. *Diviser une ligne droite en deux parties, dont l'une soit égale à une autre ligne droite plus petite que la premiere.*

Fig. 29. IL faut diviser la ligne droite AB * en deux parties, dont l'une soit égale à la ligne droite CD, qui est plus petite que la ligne AB.

Const. Avec un rayon égal à la ligne CD, & de l'une des extrémités de la ligne AB, prise pour centre (par exemple, du point A) décrivez un cercle EFG. La circonférence de ce cercle divisera la ligne AB au point F, comme il est demandé.

Démonst. La partie AF de la ligne AB est [c] un rayon du cercle EFG : & [c] le rayon de ce cercle est égal à la ligne
N. 62. CD. Donc (n) la partie AF de la ligne AB est égal à la ligne CD ; & par conséquent C. Q. F. F.

SCHOLIE.

82. *Il suffit de prendre avec un compas la longueur de la ligne CD ; de poser en-*

Digitized by Google

suite l'une des pointes de ce compas à l'une des extrémités A ou B de la ligne AB, & de marquer avec l'autre pointe un point F sur cette ligne.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

83. *Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce second angle, chacun à chacun : ils auront aussi le troisieme côté égal au troisieme côté ; les autres angles égaux aux autres angles, chacun à chacun, & la surface égale à la surface.*

SI dans les triangles ABC * & DEF Fig. 30. l'angle A est égal à l'angle D, le côté AB au côté DE, & le côté AC au côté DF ; le côté BC sera égal au côté EF, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF †.

Const. Posez par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

† Voyez le N. 26.

Digitized by Google

Démonst. Le côté AB tombera sur le
N. 71. côté DE (n), puisque [H] l'angle A est égal à l'angle D. Le point B tombera sur
N. 70. le point E (n), puisque [H] le côté AB est égal au côté DE. Enfin, le point C
N. 70. tombera sur le point F (n), puisque [H] le côté AC est égal au côté DF. Or, puisque le point A étant [C] sur le point D, le point B tombe sur le point E, & le point C sur le point F; les triangles ABC & DEF se couvrent réciproque-
N. 69. ment. Donc (n), le côté BC est égal au côté EF, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

84. Il suit de ce théorême, que *si une ligne droite divise en deux parties égales un angle quelconque d'un triangle équilatéral, ou l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle isoscele : elle divisera en deux parties égales le côté de ce triangle qu'elle rencontrera, & lui sera perpendiculaire.*

Si dans le triangle équilatéral ou isos-
Fig. 31. cele ABC *, la ligne droite BD divise l'angle ABC en deux parties égales ABD & CBD; elle divisera aussi le côté AC

Digitized by Google

en deux parties égales DA & DC, & lui sera perpendiculaire.

Démonst. Dans les triangles BDA & BDC, l'angle ABD est égal [H] à l'angle CBD, le côté BA au côté BC [H], & le côté BD commun; ainsi (n) le côté DA est égal au côté DC, & l'angle BDA à l'angle BDC. Or, puisque le côté DA est égal au côté DC, le côté AC est divisé en deux parties égales; & puisque l'angle BDA est égal à l'angle BDC, la ligne BD est perpendiculaire à ce même côté (n). Donc C. Q. F. D. N. 83. N. 19.

USAGE.

85. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour mesurer une distance AB * qui n'est accessible que par ses extrémités A & B.* Fig. 32.

On choisit dans la campagne un point C d'où l'on puisse voir les extrémités A & B de cette distance, & aller directement à chacune. On pose un graphometre † *à ce point C. On dirige l'une des regles de cet instrument vers le point A, & l'autre vers le point B, afin d'avoir la grandeur de l'angle C formé par les deux rayons visuels CA & CB. Enfin, on mesure ces*

† Le *graphometre* est un instrument fait exprès pour mesurer les angles sur le terrein.

Digitized by Google

deux rayons visuels. On se retire ensuite en un endroit commode. On y forme un angle c *égal à l'angle C. On fait les côtés* c a *&* cb *de cet angle égaux aux côtés CA & CB de l'angle C, chacun à chacun ; & du point* a *au point* b, *on tire la ligne droite* ab.

N. 83. *Or* (n), *cette ligne est égale à la distance inaccessible AB ; puisque* [c] *les triangles ABC &* abc *ont l'angle C égal à l'angle* c, *& les côtés CA & CB qui forment le premier, égaux aux côtés* c a *&* c b *qui forment le second, chacun à chacun. Ainsi, si l'on mesure la ligne* a b, *ce sera la même chose que si l'on mesuroit la distance AB.*

Il est plus commode de rapporter sur le papier le triangle ABC par le moyen d'une échelle, que de le rapporter sur le terrein ; & cette derniere maniere fait également connoître la valeur de la distance AB ; parce que le côté a b *du triangle rapporté contient autant de parties de l'échelle, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer les rayons visuels CA & CB, comme on le démontre par la sixieme proposition du sixieme Livre.*

Digitized by Google

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

86. *Si dans un triangle deux côtés sont égaux, les angles qui leur sont opposés seront aussi égaux.*

SI dans le triangle ABC * le côté BA est égal au côté BC, l'angle C sera égal à l'angle A. Fig. 32.

Const. Supposez qu'une ligne droite BD divise l'angle ABC en deux parties égales ABD & CBD.

Démonst. Dans les triangles BDB & BDA, l'angle CBD est égal [c] à l'angle ABD, le côté BC au côté BA [H], & le côté BD commun. Ainsi (n) l'angle C est égal à l'angle A; & par conséquent C. Q. F. D. N. 83.

COROLLAIRE.

87. Il suit de ce théorême, que *dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux.*

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

88. *Si dans un triangle deux angles sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux.*

Fig. 33. SI dans le triangle ABC * l'angle A est égal à l'angle ACB, le côté BC sera égal au côté BA.

Const. Prolongez le côté AB vers E, à volonté. Tirez du point C aux points D & E pris à volonté sur la ligne AE; l'un au-dessous du point B & l'autre au-dessus, les lignes droites CD & CE.

Démonst. Si le côté BC n'étoit point égal au côté BA, il seroit égal à quelque ligne DA plus petite que ce côté, ou à quelque ligne EA plus grande que ce même côté. Or :

Premierement, le côté BC n'est point égal à une ligne DA plus petite que le côté BA; puisque s'il l'étoit, les triangles ABC & ADC, qui [H] ont l'angle ACB égal à l'angle A, & le côté AC commun, auroient aussi le côté BC égal au côté DA,
N. 83. & seroient par conséquent égaux (n); ce

Digitized by Google

qui n'eſt point, puiſque le premier ſurpaſſe le ſecond, du triangle DCB.

Secondement, le côté BC n'eſt point non plus égal à une ligne EA plus grande que le côté BA; puiſque s'il l'étoit, les triangles ABC & AEC, qui [H] ont l'angle ACB égal à l'angle A, & le côté AC commun, auroient auſſi le côté BC égal au côté EA, & ſeroient par conſéquent égaux (n); ce qui n'eſt point encore, N. 83. puiſque le premier differe du ſecond, du triangle BEC.

Donc le côté BC eſt égal au côté BA, & par conſéquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

89. Il ſuit de ce théorême, que *ſi dans un triangle tous les angles ſont égaux, ce triangle ſera équilatéral.*

Digitized by Google

PROPOSITION VIII. †

THÉORÊME.

90. *Si deux triangles ont les côtés égaux aux côtés, chacun à chacun : ils auront aussi les angles égaux aux angles, chacun à chacun, & la surface égale à la surface.*

Fig. 34. SI dans les triangles ABC * & DEF le côté AC est égal au côté DF, le côté AB au côté DE, & le côté BC au côté EF ; l'angle A sera égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF.

Const. Du point D pris pour centre, & avec le côté DE pris pour rayon, décrivez un cercle EG. Du point F pris pour centre, & avec le côté EF pris pour rayon, décrivez un autre cercle EH. Posez ensuite par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Premierement, le point C
N. 70. tombera sur le point F (n) ; puisque [H]

† Nous supprimons la Proposition VII. parce qu'elle est comprise dans la VIII.

Digitized by Google

le côté AC eſt égal au côté DF. Secondement, le point B extrémité du côté AB, tombera (n) ſur la circonférence du cercle EG; puiſque [c] le point A ſera ſur le point D, & que [H] le côté AB eſt égal au côté DE qui [c] eſt le rayon de ce cercle. Mais (n), le même point B extrémité du côté BC, tombera auſſi ſur la circonférence du cercle EH; puiſque [D] le point C ſera ſur le point F, & que [H] le côté BC eſt égal au côté EF qui [c] eſt le rayon de cet autre cercle. Donc le point B tombera ſur un point commun à ces deux circonférences, & par conſéquent ſur le point E, puiſque ces deux circonférences n'ont au deſſus du côté DF que ce ſeul point de commun. Or, puiſque le point A étant [c] ſur le point D; le point C tombe ſur le point F, & le point B ſur le point E; les triangles ABC & DEF ſe couvrent réciproquement. Donc (n), l'angle A eſt égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF; & par conſéquent C. Q. F. D.

N. 35.

N. 35.

N. 69.

Digitized by Google

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

91. *Diviser un angle en deux parties égales.*

Fig. 35. IL faut diviser l'angle ABC * en deux parties égales.

Const. Du point B pris pour centre, & avec un rayon BD pris à volonté, décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D, & l'autre en un point E, les côtés BA & BC de l'angle ABC. Des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon BD (ou avec un autre pris aussi à volonté, mais cependant plus grand que la moitié de la distance du point D au point E) décrivez deux arcs qui se coupent en un point F. Enfin, tirez du point B au point F une ligne droite BF. Elle divisera l'angle ABC en deux parties ABF & CBF qui seront égales.

Pour la démonstration, tirez du point F aux points D & E, les lignes droites FD & FE.

Démonst. Dans les triangles DBF & EBF, le côté BD est égal [c] au côté BE,

Digitized by Google

le côté FD au côté FE [c], & le côté BF commun. Ainsi (n) l'angle ABF est égal à l'angle CBF, & par conséquent C. Q. F. F. N. 90

COROLLAIRE.

92. Il suit de ce problême, que *pour diviser un angle en quatre parties égales, il faut commencer par le diviser en deux parties égales, & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales en deux autres qui le soient aussi. Et ainsi de suite, pour le diviser en 8, en 16, en 32, &c.*

SCHOLIE.

93. *Il est souvent nécessaire de diviser un angle en un nombre déterminé de parties égales. Mais lorsque ce nombre n'est pas 2, 4, 8, 16, & ainsi de suite en doublant, le problême n'est plus du ressort de la Géométrie élémentaire; & il est démontré qu'on ne peut le résoudre que par celle des lignes courbes. On le nomme alors le problême de la* trisection *de l'angle. Il a été fort recherché par les anciens Géometres.*

Digitized by Google

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

94. *Diviser une ligne droite en deux parties égales.*

Fig. 36. IL faut diviser en deux parties égales la ligne droite AB *.

Const. Des points A & B pris pour centres, & avec un rayon AC pris à volonté (mais cependant plus grand que la moitié de la ligne AB) décrivez deux arcs qui se coupent en un point C. Des mêmes points A & B pris pour centres, & avec le même rayon AC, (ou avec un autre AD pris aussi à volonté, mais cependant toujours plus grand que la moitié de la ligne AB) décrivez deux arcs qui se coupent en un point D. Enfin, tirez du point C au point D une ligne droite CD. Elle divisera la ligne AB en deux parties AE & EB qui seront égales.

Pour la démonstration, tirez du point C aux points A & B, les lignes droites CA & CB. Tirez aussi du point D aux mêmes points A & B, les lignes droites DA & DB.

Démonst.

Digitized by Google

Démonst. Premierement, dans les triangles ACD & BCD, le côté CA est égal [c] au côté CB, le côté DA au côté DB [c], & le côté CD commun. Ainsi (n) l'angle ACD est égal à l'angle BCD. N. 90. Secondement, dans les triangles ACE & BCE, l'angle ACD est égal [D] à l'angle BCD, le côté CA au côté CB [c], & le côté CE commun : ainsi (n), le N. 83. côté AE est égal au côté EB ; & par conséquent C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

95. Il suit de ce problême, que *pour diviser une ligne droite en quatre parties égales, il faut commencer par la diviser en deux parties égales, & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales en deux autres qui le soient aussi ; & ainsi de suite, pour la diviser en 8, en 16, en 32, &c.*

Nous donnerons au sixieme Livre la maniere de diviser une ligne droite en tel nombre de parties égales que l'on voudra.

Digitized by Google

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

96. *D'un point donné sur une ligne droite, élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Fig. 37. IL faut élever du point C * une perpendiculaire à la ligne droite AB.

Const. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D & l'autre en un point E, la ligne AB prolongée s'il est nécessaire. Des points D & E pris pour centres, & avec un rayon DF pris aussi à volonté (mais cependant plus grand que le rayon CD), décrivez deux arcs qui se coupent en un point F. Enfin, tirez du point F au point C, une ligne droite FC, elle sera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonstration, tirez du point F aux points D & E, les lignes droites ED & FE.

Démonst. Dans les triangles DFC & EFC, le côté CD est égal [c] au côté CE, le côté FD au côté FE [c] & le

Digitized by Google

côté FC commun. Ainsi (n), l'angle N. 90.
FCD est égal à l'angle FCE & par conséquent (n) la ligne FC est perpendicu- N. 19.
laire à la ligne AB. Donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

97. *D'un point donné hors d'une ligne droite, abaisser une perpendiculaire à cette ligne.*

IL faut abaisser du point C * une perpendiculaire à la ligne droite AB. Fig. 38.

Const. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, (mais cependant plus grand que la distance de ce point à la ligne AB) décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D, & l'autre en un point E, cette ligne prolongée s'il est nécessaire. Des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon CD, (ou avec un autre DF pris aussi à volonté, mais cependant plus grand que la moitié de la distance du point D au point E) décrivez deux arcs qui se coupent en un point F. Enfin, tirez du point C par le point F une ligne

Digitized by Google

droite CG, elle sera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonstration, tirez du point C aux points D & E, les lignes droites CD & CE. Tirez aussi du point F aux mêmes points D & E, les lignes droites FD & FE. Prolongez ensuite la ligne CG jusqu'au point F.

Démonst. Premierement, dans les triangles DCF & ECF, le côté CD est egal [c] au côté CE, le côté FD au côté FE [c], & le côté CF commun; ainsi
N. 90. (n) l'angle DCF est égal à l'angle ECF. Secondement, dans les triangles DCG & ECG, l'angle DCF est égal [c] à l'angle ECF, le côté CD au côté CE [c],
N. 83. & le côté CG commun. Ainsi (n) l'angle CGD est égal à l'angle CGE; & par con-
N. 19. séquent (n) la ligne CG est perpendiculaire à la ligne AB. Donc C. Q. F. F.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

98. *Une ligne droite qui en rencontre une autre indirectement, forme avec elle, prolongée s'il est nécessaire, deux angles dont la somme est égale à celle de deux angles droits.*

LA somme des angles ABC * & ABD est égale à celle de deux angles droits. Fig. 39 & 40.

La ligne AB est perpendiculaire, ou oblique à la ligne CD.

Premier cas. *Lorsque la ligne AB * est perpendiculaire à la ligne CD.* Fig. 39.

Démonst. Les angles ABC & ABD sont deux angles droits (n); ainsi leur somme est égale à celle de deux angles droits. N. 21.

Second cas. *Lorsque la ligne AB * est oblique à la ligne CD.* Fig. 40.

Const. Du point B, élevez (n) une perpendiculaire BE à la ligne CD. N. 96.

Démonst. La somme des deux angles ABC & ABD est égale (n) à celle des trois angles EBC, EBA & ABD; celle N. 72.

Digitized by Google

N. 72. de ces trois angles est égale (n) à celle des deux angles EBC & EBD ; & [c] ces deux derniers angles sont deux angles
N. 62. droits : donc (n) la somme des deux angles ABC & ABD est égale à celle de deux droits ; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

99. Il suit de ce théorème, que *la somme de tous les angles qui sont formés par plusieurs lignes droites tirées d'un même point & en tout sens, est égale à celle de quatre angles droits.*

Fig. 41. La somme de tous les angles ACB *, BCD, DCE, ECF & FCA est égale à celle des quatre angles droits.

Const. Prolongez l'un des côtés de ces angles, par exemple le côté AC, vers G à volonté.

Démonst. La somme des angles ACB
N. 98. & BCG est égale (n) à celle de deux angles droits ; & celle des angles ACF &
N. 98. FCG l'est aussi (n) : ainsi la somme des quatre angles ACB, BCG, ACF & FCG est égale à celle de quatre angles droits. Mais la somme de ces quatre mêmes an-
N. 72. gles ACB, BCG, &c. est aussi égale (n) à celle des angles ACB, BCD, DCE,
N. 62. ECF & FCA ; donc (n) la somme de ces

Digitized by Google

derniers angles est égale à celle de quatre angles droits ; & par conséquent C. Q. F. D.

USAGE.

100. *Puisque* (n) *un angle droit est de* N. 38.
90 degrés, la somme de deux angles qui sont formés par une ligne droite qui en rencontre une autre indirectement, est de 180 *degrés* (n). *Ainsi, lorsque l'on con-* N. 98.
noît la valeur de l'un quelconque de ces deux angles, il est facile de trouver celle de l'autre ; & par conséquent on peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour connoître sur le terrein la valeur d'un angle dans lequel on ne peut point entrer ; par exemple, celle d'un angle ABC formé par le concours de deux* Fig. 44.
murs BA & BC.

Par le moyen d'une corde, ou de quelque autre instrument, on prolonge à volonté vers D, l'alignement de l'un AB de ces deux murs. On mesure † ensuite l'angle DBC formé par le prolongement

† La maniere la plus sûre de mesurer sur le terrein ces sortes d'angles, est de joindre leurs côtés par une ligne droite quelconque DC, afin d'avoir un triangle DBC : de mesurer ensuite, le plus exactement qu'il est possible, les côtés de ce triangle : & de chercher enfin la valeur de l'angle proposé DBC, comme nous l'avons enseigné dans notre trigonométrie.

Digitized by Google

BD & par l'autre mur ; & la différence † *de cet angle à 180 degrés, est la valeur de l'angle cherché ABC.*

Si l'on trouve que l'angle DBC soit, par exemple, de 117 degrés, on en conclura que l'angle ABC est de 63 degrés.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

101. *Si deux lignes droites qui sont tirées de l'extrémité d'une troisieme forment avec cette troisieme deux angles dont la somme soit égale à celle de deux angles droits, ces deux lignes ne feront qu'une seule ligne droite.*

Fig. 42. SI la somme des angles ABC* & ABD est égale à celle de deux angles droits, les deux lignes droites BC & BD ne font qu'une seule ligne droite CBD.

Const. Tirez du point B aux points E & F pris à volonté, l'un au-dessus de la ligne BD, & l'autre au-dessous, les lignes droites BE & BF.

† La différence d'un angle à 180 degrés, se nomme le *supplément* de cet angle.

Démonst.

Digitized by Google

Démonſt. Si les deux lignes BC & BD ne faiſoient point une ſeule ligne droite CBD, la ligne BC étant prolongée vers D, paſſeroit ou au-deſſus de la ligne BD, ou au-deſſous.

Or premierement, ſi elle paſſoit au-deſſus, & étoit, par exemple la ligne CBE, la ſomme des angles ABC & ABE ſeroit égale à celle de deux angles droits (n). Mais [H] celle des angles ABC N. 98.
&ABD lui eſt auſſi égale. Donc (n), la N. 62.
ſomme des angles ABC & ABE ſeroit égale à celle des angles ABC & ABD. Ce qui n'eſt point, puiſque la premiere differe de la derniere de l'angle EBD.

Secondement, ſi elle paſſoit au-deſſous, & étoit, par exemple la ligne CBF, la ſomme des angles ABC & ABF ſeroit égale à celle de deux angles droits (n). N. 98.
Mais [H] celle des angles ABC & ABD lui eſt auſſi égale. Donc (n) la ſomme des N. 62.
angles ABC & ABF ſeroit égale à celle des angles ABC & ABD. Ce qui n'eſt point encore, puiſque la premiere ſurpaſſe la derniere de l'angle FBD.

Donc la ligne BC étant prolongée vers D, paſſe ſur la ligne BD; & par conſéquent ces deux lignes ne ſont qu'une ſeule ligne droite CBD. Donc C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

102. *Deux lignes droites qui se coupent forment quatre angles, dont chacun est égal à celui qui lui est opposé au sommet.*

Fig. 43. LES angles AEC * & BED sont égaux: & il en est de même des angles CEB & AED.

Démonst. Premierement, la somme des angles AEC & CEB est égale à celle
N. 98. de deux angles droits (n). Or (n), celle
N. 98. des angles CEB & BED l'est aussi. Donc
N. 52. (n) la somme des angles AEC & CEB est égale à celle des angles CEB & BED; & par conséquent, si l'on retranche le même angle CEB de chacune de ces deux sommes, les restes qui seront les angles
N. 64. AEC & BED seront égaux (n).

Secondement, on démontre de la même maniere, que les angles CEB & AED sont aussi égaux; & par conséquent C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

103. *L'angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'aucun des angles intérieurs de ce même triangle, qui sont opposés à cet angle.*

L'Angle extérieur BCD * du triangle ABC, est plus grand qu'aucun des angles intérieurs ABC & BAC qui lui sont opposés. Fig. 45.

Premierement. *Pour l'angle ABC.*

Const. Divisez (n) le côté BC en deux parties égales EB & EC. Tirez du point A par le point E, une ligne droite indéfinie AF. Faites (n) la ligne EF égale à la ligne EA. Enfin, tirez du point F au point C une ligne droite FC. N. 94. N. 79.

Démonst. L'angle BCD est (n) plus grand que l'angle BCF. Or (n), l'angle BCF est égal à l'angle ABC, puisque dans les triangles AEB & FEC, l'angle AEB est égal (n) à l'angle FEC qui lui est opposé au sommet, le côté EB au côté EC [c], & le côté EA au côté EF [c]. Donc l'angle BCD est plus grand que l'angle ABC. N. 72. N. 83. N. 102.

Digitized by Google

Secondement. *Pour l'angle BAC.*

N. 94. *Conſt.* Diviſez (n) le côté AC en deux parties égales GC & GA. Tirez du point B par le point G, une ligne droite in-
N. 79. définie BH. Faites (n) la ligne GH égale à la ligne GB. Enfin, tirez du point H par le point C, une ligne droite indéfinie HF.

N. 72. *Démonſt.* L'angle BCD eſt (n) plus
N. 103. grand que l'angle FCD. Or (n), l'angle FCD eſt égal à l'angle ACH qui lui eſt oppoſé au ſommet : & l'angle ACH eſt
N. 83. égal (n) à l'angle BAC ; puiſque dans les triangles HGC & BGA, l'angle HGC
N. 102. eſt égal (n) à l'angle BGA qui lui eſt oppoſé au ſommet, le côté GC au côté GA [c], & le côté GH au côté GB [c]; Donc l'angle BCD eſt plus grand que l'angle BAC.

Et par conſéquent C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

104. *La somme de deux quelconques des angles d'un triangle, est plus petite que celle de deux angles droits.*

DANS le triangle ABC *, la somme des angles, par exemple BCA & B, est plus petite que celle de deux angles droits. Fig. 46.

Const. Prolongez le côté AC vers D à volonté.

Démonst. La somme des angles BCA & BCD est (n) égale à celle de deux angles droits. Or (n), l'angle BCD qui est extérieur au triangle ABC, est plus grand que l'angle intérieur B qui lui est opposé. Donc la somme des angles BCA & B est plus petite que celle de deux angles droits; & par conséquent C. Q. F. D. N. 98. N. 103.

COROLLAIRE I.

105. Il suit de ce théorême, que *si dans un triangle l'un des angles est ou droit ou obtus, les deux autres seront aigus.*

Digitized by Google

Démonst. Si dans un triangle un angle étant ou droit ou obtus, un autre l'étoit aussi, la somme de deux des angles de ce triangle seroit aussi grande, ou plus grande que celle de deux angles droits.
N. 104. Or (n), cela ne peut point être. Donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

106. Il suit de ce corollaire, que *chaque angle d'un triangle équilatéral est aigu; & qu'il en est de même de chaque angle égal d'un triangle isoscele.*

Démonst. Premierement, si l'un des angles d'un triangle équilatéral étoit ou droit, ou obtus, chaque autre angle du même triangle le seroit aussi, puisque
N. 87. (n) tous les angles d'un triangle équila-
N. 105. téral sont égaux. Mais (n) un triangle ne peut avoir ni plus d'un angle droit, ni plus d'un angle obtus. Donc C. Q. F. 1°. D.

Secondement, si l'un des angles égaux d'un triangle isoscele étoit ou droit, ou obtus, ce triangle auroit deux angles
N. 105. droits, ou deux angles obtus. Or (n), cela ne peut point être. Donc C. Q. F. 2°. D.

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

107. Il suit aussi de ce même corollaire, que *d'un point hors d'une ligne droite, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

Si la ligne droite CD * est perpendiculaire à la ligne droite AB, toute autre ligne droite tirée à cette ligne AB d'un point quelconque de cette perpendiculaire, lui sera oblique. Fig. 47.

Const. Tirez du point C pris à volonté sur la ligne CD, à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne droite CE.

Démonst. Si les lignes CD & CE étoient perpendiculaires chacune à la même ligne AB, l'angle CDE seroit droit (n), N. 21. & l'angle CED le seroit aussi (n). Ainsi N. 21. le triangle ECD auroit deux angles droits. Or (n), cela ne peut point être. Donc N. 105. si la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB, la ligne CE ne l'est point; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

108. Il suit encore du même corollaire, que *si d'un point quelconque d'une ligne droite qui est oblique à une autre,*

Digitized by Google

on abaisse une perpendiculaire à cette autre ; cette perpendiculaire sera du côté auquel l'oblique forme un angle aigu avec cette autre ligne.

Fig. 48. Si d'un point quelconque C* de la ligne droite CE, qui est oblique à la ligne droite AB, on abaisse une perpendiculaire à cette ligne AB ; cette perpendiculaire sera du côté de l'angle aigu CEB.

Const. Tirez du point C à un point quelconque F de la partie AE de la ligne AB, une ligne droite CF.

Démonst. Si la perpendiculaire abaissée du point C à la ligne AB, étoit une ligne droite quelconque CF tirée du côté de l'angle obtus CEA, le triangle FCE
N. 21. auroit (n) un angle droit CFE, & [H]
N. 105. un angle obtus CEA. Or (n), un triangle ne peut point avoir un angle droit & un angle obtus. Donc la perpendiculaire abaissée du point C à la ligne AB, sera du côté de l'angle aigu CEB ; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

109. Il suit enfin du dernier corollaire, que *si de l'un des angles d'un triangle on abaisse une perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, cette perpen-*

Digitized by Google

diculaire sera dans ce triangle, si les angles adjacens à ce côté sont de même espece † ; *& hors de ce triangle, si ces mêmes angles sont de différente espece.*

Premierement, si de l'angle B * du triangle ABC, dont les angles A & BCA adjacens au côté AC sont aigus, on abaisse une perpendiculaire à ce côté, elle sera dans ce triangle. Fig. 46.

Démonst. La perpendiculaire tirée de l'angle B au côté CA, doit (n) être du côté de l'angle aigu BAC, par rapport à l'oblique BA ; & du côté de l'angle aigu BCA, par rapport à l'oblique BC. Donc elle doit rencontrer le côté AC entre les points A & C ; & par conséquent, elle doit être dans le triangle ABC. Donc C. Q. F. 1°. D. N. 108.

Secondement, si de l'angle C * du triangle FCE, dont les angles CFE & CEF adjacens au côté FE sont l'un aigu, & l'autre obtus, on abaisse une perpendiculaire à ce côté, elle sera hors de ce triangle. Fig. 48.

Démonst. La perpendiculaire tirée de l'angle C au côté FE, ne peut point (n) N. 108.

† On appelle angles *de même espece*, ceux qui sont ou tous aigus, ou tous obtus ; & angles *de différente espece*, ceux dont les uns sont aigus, & les autres obtus.

Digitized by Google

être du côté de l'angle obtus CEF, par rapport à l'oblique CE. Donc il faut qu'elle soit du côté de l'angle aigu CEB; & par conséquent hors du triangle FCE. Donc C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

110. *Si dans un triangle un côté est plus grand qu'un autre, l'angle opposé à ce premier côté sera plus grand que l'angle opposé à cet autre côté.*

Fig. 49. SI dans le triangle ABC*, le côté BC est plus grand que le côté BA, l'angle BAC sera plus grand que l'angle C.

N. 81. *Const.* Prenez (n) sur le côté BC, une partie BD égale au côté BA. Tirez ensuite du point D au point A une ligne droite DA.

N. 72. *Démonst.* L'angle BAC est (n) plus
N. 86. grand que l'angle BAD. Or (n), l'angle BAD est égal à l'angle BDA, puisque [c] les côtés BD & BA du triangle ABD
N. 103. sont égaux: & (n) l'angle BDA qui est extérieur au triangle ADC, est plus grand que l'angle intérieur C qui lui est opposé.

Digitized by Google

Donc l'angle BAC eſt plus grand que l'angle C ; & par conſéquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

111. Il ſuit de ce théorême : premierement, que *dans un triangle, le plus grand angle eſt oppoſé au plus grand côté* ; Secondement, que *les angles d'un triangle ſcalêne ſont inégaux.*

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

112. *Si dans un triangle un angle eſt plus grand qu'un autre, le côté oppoſé à ce premier angle, ſera plus grand que le côté oppoſé à cet autre angle.*

SI dans le triangle ABC * l'angle A eſt plus grand que l'angle C, le côté BC ſera plus grand que le côté BA. Fig. 50.

Démonſt. Si le côté BC étoit égal au côté BA, l'angle A ſeroit égal à l'angle C (n) : & ſi le côté BC étoit plus petit que le côté BA, l'angle A ſeroit plus petit que l'angle C (n). Or, l'angle A n'eſt N. 86. N. 110.

Digitized by Google

ni égal à l'angle C, ni plus petit que l'angle C, puisque [H] il le surpasse. Donc le côté BC est plus grand que le côté BA; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

113. Il suit de ce théorême : Premierement, que *dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.* Secondement, que *si les angles d'un triangle sont inégaux, ce triangle sera scalène.*

COROLLAIRE II.

114. Il suit aussi de ce même théorême, que *de toutes les lignes que l'on peut tirer d'un même point à une même ligne droite, la perpendiculaire est la plus courte.*

Fig. 47. La ligne droite CD * qui est perpendiculaire à la ligne droite AB, est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut tirer du point C à cette ligne AB.

Const. Tirez du point C à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne droite CE.

Démonst. L'angle CDE est le plus
N. 105. grand angle du triangle ECD (n); puis-

Digitized by Google

que la ligne CD étant [H] perpendiculaire à la ligne AB, cet angle est droit (n). N. 21.
Ainsi l'oblique CE est opposée à un plus grand angle que la perpendiculaire CD; & par conséquent (n) elle est plus grande N. 112.
que cette perpendiculaire. Or, la même démonstration subsiste, quelque près que le point E soit du point D. Donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

115. *Dans un triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres.*

DANS le triangle ABC * la somme des côtés, par exemple AB & BC, est plus grande que le côté AC. Fig. 51.

Const. Prolongez le côté AB vers D, indéfiniment. Faites (n) le prolongement BD égal au côté BC. Enfin, tirez du point D au point C une ligne droite DC. N. 81.

Démonst. L'angle ACD est (n) plus grand que l'angle BCD. Or (n), l'angle BCD est égal à l'angle D; puisque [c] les côtés BD & BC du triangle CBD sont égaux. Donc l'angle ACD est plus N. 72. N. 86.

grand que l'angle D; & par conséquent
N. 112. (n) dans le triangle ADC, le côté ABD est plus grand que le côté AC. Mais [c] ce côté ABD est la somme des côtés AB & BC du triangle ABC. Donc dans le triangle ABC, la somme des côtés AB & BC est plus grande que le côté AC; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

PROBLÊME.

116. *Si deux lignes droites tirées des extrémités de l'un des côtés d'un triangle se rencontrent dans ce triangle, leur somme sera plus petite que celle des deux autres côtés de ce même triangle; & l'angle qu'elles formeront sera plus grand que celui qui est formé par ces deux autres côtés.*

Fig. 52. PREMIEREMENT, dans le triangle ABC* la somme ADC des deux lignes droites AD & DC, est plus petite que la somme ABEC des deux côtés AB & BC. Secondement, l'angle ADC est plus grand que l'angle B.

Const. Prolongez l'une de ces lignes, par exemple la ligne AD, jusqu'à ce

Digitized by Google

qu'elle rencontre en un point E, l'un des côtés du triangle ABC.

Démonst. Premierement, dans le triangle ABE, la somme ABE des côtés AB & BE est (n) plus grande que le côté ADE. Ainsi, si & à cette somme & à ce côté on ajoute la même ligne EC, la somme ABEC sera (n) plus grande que la somme ADEC. Pareillement, dans le triangle DEC, la somme DEC des côtés DE & EC est (n) plus grande que le côté DC. Ainsi, si & à cette somme & à ce côté on ajoute la même ligne AD, la somme ADEC sera (n) plus grande que la somme ADC. Or, puisque la somme ABEC est plus grande que la somme ADEC, & que cette somme ADEC est plus grande que la somme ADC, la somme ABEC est plus grande que la somme ADC.

N. 115. N. 65. N. 115. N. 65.

Secondement, l'angle ADC qui est extérieur au triangle DEC, est (n) plus grand que l'angle intérieur DEC qui lui est opposé. Or, cette angle DEC qui est extérieur au triangle ABE, est aussi (n) plus grand que l'angle intérieur B qui lui est opposé. Donc l'angle ADC est plus grand que l'angle B. Et par conséquent C. Q. F. D.

N. 103. N. 103.

Digitized by Google

PROPOSITION XXII.

PROBLÊME.

117. *Décrire un triangle qui ait les côtés égaux à trois lignes droites données, chacun à chacune; pourvu cependant que chacune de ces lignes soit plus petite que la somme des deux autres* (n).

N. 115.

Fig. 53. IL faut décrire un triangle qui ait les côtés égaux aux lignes droites A *, B & C, chacun à chacune.

N. 79. *Const.* Tirez (n) une ligne droite DF, qui soit égale à l'une des lignes données, par exemple à la ligne A. Du point D pris pour centre, & avec un rayon égal à l'une des autres lignes données, par exemple à la ligne B, décrivez un arc de cercle EG. Du point F pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne C, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent en un point E. Enfin, tirez du point E aux points D & F, les lignes droites ED & EF. Le triangle DEF que ces lignes formeront avec la ligne DF, sera le triangle demandé.

Démonst. Dans le triangle DEF, le côté

Digitized by Google

côté DF est égal à la ligne A [c], le côté ED à la ligne B [c], & le côté EF à la ligne C [c]. Donc les côtés de ce triangle sont égaux aux lignes données, chacun à chacune ; & par conséquent C. Q. F. F.

USAGE.

On peut se servir de cette proposition, pour lever le plan d'un terrein quelconque. Mais comme il y a des terreins que l'on peut traverser en tel sens que l'on veut ; & d'autres au contraire dans lesquels on ne peut point entrer, cet usage a deux cas.

PREMIER CAS.

118. Lorsqu'il s'agit d'un terrein ABCDE * que l'on peut traverser en tel sens que l'on veut. Fig. 54.

On suppose que le terrein proposé est divisé en triangles ABC, CAD & DAE ; & l'on mesure les côtés de ces triangles. On fait ensuite une échelle F proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan de ce terrein. Enfin, on décrit (n) N. 117. *des triangles* abc, cad & dae, *dont chaque côté contienne autant de parties*

de l'échelle F, que chaque côté correspondant des triangles ABC, CAD & DAE contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer; & la figure abcde *formée par les triangles* abc, cad, *&c. est le plan du terrein proposé ABCDE.*

SECOND CAS.

119. Lorsqu'il s'agit d'un terrein
Fig. 55. ABCDE * dans lequel on ne peut point entrer; ou d'un terrein que l'on ne peut parcourir que vers les sommets de quelques-uns de ses angles.

On néglige deux angles à volonté, mais cependant pris de suite; par exemple, les angles E & D. On fait ensuite planter des piquots: premierement aux points I & K pris à volonté sur les côtés BA & BC de l'angle B, que nous supposons être un de ceux que l'on peut parcourir: Secondement, aux points G & M pris à volonté sur les prolongemens indéfinis des côtés AE & CD des angles A & C, que nous supposons être ceux dans lesquels on ne peut point entrer: Troisiemement, aux points H & L pris aussi à volonté sur les autres côtés AB & CB des mêmes angles. Enfin, après avoir supposé des lignes droites tirées du point I au point

Digitized by Google

K, du point G aux points A & H, & du point M aux points C & L ; on mesure les côtés EA, AB, BC & CD du terrein proposé, & ceux des triangles AGH, IBK & LMC.

On fait ensuite une échelle F proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du terrein proposé. On décrit (n) *un triangle* agh *dont chaque côté contienne autant de parties de l'échelle F, que chaque côté correspondant du triangle AGH contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer. On prolonge les côtés* ah *&* ga *de ce triangle, l'un vers* b *& l'autre vers* e, *jusqu'à ce que les lignes* ab *&* ae *contiennent aussi chacune autant de parties de cette échelle, que les côtés correspondans AB & AE du terrein contiennent de fois chacun cette mesure.* N. 117.

On décrit ensuite un triangle ibk, *de la même maniere dont on a décrit le triangle* agh, *en donnant à chacun de ses côtés le nombre des parties de l'échelle F, qui lui convient ; & l'on prolonge vers* c *le côté* bk, *jusqu'à ce que la ligne* bc *contienne autant de parties de l'échelle qu'elle doit en contenir. On décrit aussi le triangle* lmc, *de la même maniere dont on a décrit les précédens ; & l'on prolonge*

aussi son côté m c *vers* d, *jusqu'à ce que la ligne* c d *contienne le nombre des parties de l'échelle qu'elle doit contenir. Enfin, du point* e *on tire au point* d *la ligne* e d; *& la figure* a b c d e *est le plan du terrein proposé ABCDE.*

A l'égard de la démonstration de ces deux pratiques, elle dépend de la 5me *&* 6me *propositions du* 6me *Livre.*

PROPOSITION XXIII.

PROBLÊME.

120. *Décrire sur une ligne droite donnée, un angle qui ait pour sommet un point donné sur cette même ligne, & qui soit égal à un angle donné.*

Fig 56. IL faut décrire sur la ligne droite AB *, un angle qui ait le point D pour sommet, & soit égal à l'angle C.

Const. Tirez une ligne droite EF qui rencontre en deux points quelconques E & F, les côtés de l'angle C, prolongés s'il
N. 117. est nécessaire. Décrivez ensuite (n) un triangle DHG qui ait le côté DG égal †

† Si la ligne DB est plus courte que la ligne CE, on la prolonge autant qu'il est nécessaire.

Digitized by Google

à la ligne CE, le côté DH égal à la ligne CF, & le côté GH égal à la ligne EF. L'angle HDG sera l'angle demandé.

Autre const. † Du point C * pris pour centre, & avec un rayon CE pris à volonté, décrivez un arc de cercle EIF, qui rencontre en deux points E & F les côtés CE & CF de l'angle C, prolongés s'il est nécessaire. Du point D pris pour centre, & avec le même rayon précédent CE, décrivez un arc de cercle GKH, indéterminé vers H; mais qui rencontre en un point G la ligne AB prolongée s'il est nécessaire. Du point G pris pour centre, & avec un rayon égal à la distance du point E au point F, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent en un point H. Enfin, tirez du point D par le point H une ligne droite indéfinie DH. L'angle HDG que cette ligne formera avec la ligne AB, sera l'angle demandé. Fig. 572

Pour la démonstration, tirez du point E au point F une ligne droite EF; & du point G au point H, une ligne droite GH.

Démonst. Dans les triangles DHG * & CFE, le côté DG est égal au côté CE [c], le côté DH au côté CF [c], Fig. 561 & 572

† Nous donnons ces deux constructions, parce que la premiere est la plus commode sur le terrein, & la derniere, sur le papier.

& le côté GH au côté EF [c]. Donc
N. 90. (n) l'angle HDG est égal à l'angle C ; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

121. *Si de deux triangles le premier a un angle plus grand que l'un des angles du second, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce second angle, chacun à chacun ; il aura aussi le côté opposé à ce premier angle, plus grand que le côté opposé à ce second angle.*

Fig. 58. SI dans les triangles ABC * & DEF, l'angle B étant plus grand que l'angle DEF, le côté BA est égal au côté ED, & le côté BC au côté EF, le côté AC sera aussi plus grand que le côté DF.

N. 120. *Const.* Décrivez sur le côté ED (n), un angle DEG qui ait le point E pour som-
N. 79. met, & soit égal à l'angle B. Faites (n) la ligne EG égale au côté BC. Enfin, tirez du point G aux points D & F, des lignes droites GD & GF.

N. 72. *Démonst.* L'angle DFG est (n) plus

Digitized by Google

grand que l'angle EFG. Or l'angle EFG est (n) égal à l'angle EGF, puisque [c] EG est égal à BC, que [H] BC l'est à EF, & que par conséquent (n) les côtés EG & EF du triangle FEG sont égaux. Enfin (n) l'angle EGF est plus grand que l'angle DGF. Donc l'angle DFG est plus grand que l'angle DGF; & par conséquent (n), dans le triangle DGF, le côté DG est plus grand que le côté DF. Mais (n) le côté AC est égal à ce côté DG; puisque dans les triangles ABC & DEG, l'angle B est égal à l'angle DEG [c], le côté BA au côté ED [H], & le côté BC au côté EG [c]. Donc le côté AC est plus grand que le côté DF; & par conséquent C. Q. F. D.

N. 86.
N. 62.
N. 72.
N. 112.
N. 83.

Digitized by Google

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

122. *Si de deux triangles le premier a un côté plus grand que l'un des côtés du second, & les autres côtés égaux aux autres côtés du second, chacun à chacun; il aura aussi l'angle opposé à ce premier côté, plus grand que l'angle opposé à ce second côté.*

Fig. 59. SI dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC étant plus grand que le côté DF, le côté BA est égal au côté ED, & le côté BC au côté EF; l'angle B sera aussi plus grand que l'angle E.

Démonst. Dans les triangles ABC & DCF, le côté BA est égal [H] au côté ED, & le côté BC au côté EF [H]. Ainsi, si l'angle B étoit égal à l'angle E, le
N. 83. côté AC seroit (n) égal au côté DF; & si l'angle B étoit plus petit que l'angle E,
N. 121. le côté AC seroit (n) plus petit que le côté DF. Or, le côté AC n'est ni égal au côté DF, ni plus petit que le côté DF, puisque [H] il le surpasse. Donc l'angle B est

est plus grand que l'angle E ; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

123. *Si deux triangles ont un côté égal à un côté, & les angles adjacens à ce premier côté égaux aux angles adjacens à ce second côté, chacun à chacun : ils auront aussi le troisieme angle égal au troisieme angle ; les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun ; & la surface égale à la surface.*

Il en sera de même, *si deux triangles ont un côté égal à un côté ; l'un des angles adjacens à ce premier côté, égal à l'un des angles adjacens à ce second côté ; & l'angle opposé à ce même premier côté, égal à l'angle opposé à ce même second côté.*

PREMIEREMENT.

SI dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC est égal au côté DF, l'angle A à l'angle D, & l'angle C à l'angle F ; l'angle B sera égal à l'angle E, le côté AB Fig. 6.

au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF †.

Const. Posez par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF; de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Le côté AB tombera sur le
N. 71. côté DE (n), puisque [H] l'angle A est égal à l'angle D. Le point C tombera sur
N. 70. le point F (n), puisque [H] le côté AC est égal au côté DF. Enfin, le côté CB
N. 71. tombera sur le côté FE (n), puisque [H] l'angle C est égal à l'angle F. Or, puisque le côté AC étant [C] sur le côté DF, le côté AB tombe sur le côté DE, & le côté CB sur le côté FE; les triangles ABC & DEF se couvrent réciproque-
N. 69. ment. Donc (n) l'angle B est égal à l'angle E, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF. Par conséquent C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 61. Si dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC est égal au côté DF, l'angle A à l'angle D, & l'angle B à l'angle E; l'angle C sera égal à l'angle DFE, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE,

† Voyez le N. 26.

Digitized by Google

& le triangle ABC au triangle DEF.

Conſt. Prolongez le côté DE vers H, indéfiniment. Tirez du point F aux points G & I pris à volonté ſur la ligne DH, l'un au-deſſous du point E & l'autre au-deſſus, des lignes droites FG & FI. Poſez enſuite par penſée le triangle ABC ſur le triangle DEF; de maniere que le point A étant ſur le point D, le côté AC ſoit ſur le côté DF.

Démonſt. Le côté AB tombera ſur le côté DE (n), puiſque [H] l'angle A eſt égal à l'angle D; & le point C tombera ſur le point F (n), puiſque [H] le côté AC eſt égal au côté DF. Ainſi il ne s'agit plus que de démontrer que le côté CB tombera ſur le côté FE. N. 71. N. 70.

Or, premierement, ſi le côté CB tomboit au-deſſous du côté FE, par exemple ſur la ligne FG, l'angle DGF ſeroit égal à l'angle B (n). Mais [H] l'angle B eſt égal à l'angle DEF. Donc (n) l'angle DGF qui eſt extérieur au triangle GEF, ſeroit égal à l'angle DEF qui lui eſt oppoſé; ce qui (n) ne peut point être. Secondement, ſi le côté CB tomboit au-deſſus du côté FE, par exemple ſur la ligne FI, l'angle DIF ſeroit égal à l'angle B (n). Mais [H] l'angle B eſt égal à l'angle DEF. Donc (n) l'angle DIF qui N. 69. N. 62. N. 103. N. 69. N. 62.

Digitized by Google

est intérieur au triangle EIF, seroit égal à l'angle extérieur DEF auquel il est op-
N. 103. posé; ce qui (n) ne peut point encore être.

Donc le côté CB tombera sur le côté FE. Or, puisque le côté AC étant [c] sur le côté DF, le côté AB tombe sur le côté DE, & le côté CB sur le côté FE; les triangles ABC & DEF se couvrent
N. 69. réciproquement. Donc (n) l'angle C est égal à l'angle DFE, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF. Par conséquent C. Q. F. 2°. D.

USAGE.

On peut se servir de cette proposition, pour mesurer telle distance inaccessible que ce puisse être, pourvu que l'on puisse voir ses extrémités. Mais comme une distance inaccessible peut être accessible par l'une de ses extrémites, ou être entierement inaccessible, ce problême a deux cas.

PREMIER CAS.

124. Lorsque la distance inaccessible
Fig. 62. AB * que l'on veut mesurer, est accessible par l'une de ses extrémités; par exemple, par son extrémité A.

On fait planter un piquet en un point quelconque C, auquel on puisse aller di-

Digitized by Google

rectement du point A. On pose un graphometre au point A. On dirige l'une des regles de cet instrument vers le point B, & l'autre vers le point C, afin d'avoir la grandeur de l'angle A, formé par les rayons visuels AB & AC. On ôte ensuite le graphometre du point A, & l'on fait mettre un piquet à sa place. On mesure la distance du point A au point C. On fait ôter le piquet du point C, & l'on y place le graphometre. Enfin, on dirige l'une des regles de cet instrument au point A, & l'autre au point B, afin d'avoir la grandeur de l'angle C, formé par les rayons visuels CA & CB.

On fait ensuite une échelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du triangle ABC. On tire une ligne droite DF qui contienne autant de parties de cette échelle, que la distance AC contient de fois la mesure dont on s'est servi pour la mesurer. On décrit † sur cette ligne un angle D, qui ait le point D pour sommet, & soit égal à l'angle A. On fait encore sur cette même ligne un angle F, qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle C. Enfin, on pro-

† Pour décrire ces angles sur le papier, on se sert ordinairement d'un instrument que l'on nomme un *rapporteur*.

Digitized by Google

longe s'il est nécessaire, les côtés DE & FE de ces angles, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point E; & l'on a un triangle DEF, dont le côté DE contient autant de parties de l'échelle G, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance AC, comme on le démontre par la quatrieme proposition du sixieme Livre.

SECOND CAS.

Fig. 63. 125. Lorsque la distance AB * que l'on veut mesurer, est entierement inaccessible.

On choisit dans la campagne deux points C & H, qui soient tels que l'on puisse aller directement de l'un à l'autre, & voir de chacun les extrémités A & B de la distance proposée. On fait mettre un piquet au point H, & un graphometre au point C. Avec cet instrument placé au point C, on prend la grandeur des angles ACH & BCH formés par les rayons visuels tirés du point C aux points A, B & H. On ôte le graphometre du point C, & l'on fait mettre un piquet à la place. On mesure la distance du point C au point H. On fait mettre le graphometre à la place du piquet H. Enfin, avec cet instrument placé à ce dernier point, on prend

Digitized by Google

la grandeur des angles BHC & AHC formés par les rayons visuels tirés du point H aux points B, A & C.

On fait ensuite une échelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du quadrilatere ABHC. On tire une ligne droite FI, qui contienne autant de parties de cette échelle, que la distance CH contient de fois la mesure dont on s'est servi pour la mesurer. On décrit sur cette ligne des angles DFI & EFI, qui aient chacun le point F pour sommet, & soient égaux l'un à l'angle ACH, & l'autre à l'angle BCH. On fait encore sur cette même ligne des angles EIF & DIF, qui aient chacun le point I pour sommet, & soient égaux l'un à l'angle BHC, & l'autre à l'angle AHC. On prolonge, s'il est nécessaire, les côtés de ces angles, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent les uns en un point D, & les autres en un point E. Enfin, on tire du point D au point E, une ligne droite DE; & cette ligne contient autant de parties de l'échelle G, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance CH: comme on le démontre par les quatrieme & sixieme propositions du sixieme Livre.

Digitized by Google

Voici les raisons des opérations que nous venons de prescrire dans ce second cas.

Premierement. *Dans le triangle ACB formé par la distance proposée AB, & par les rayons visuels CA & CB, on peut observer l'angle ACB. Ainsi, on l'observe* †, *afin de construire un angle DFE de même grandeur.*

Secondement. *Le rayon visuel CA est une distance accessible par son extrémité C. Ainsi, conformément à ce que nous avons enseigné dans le premier cas, on prend un point H, & l'on observe la grandeur des angles ACH & AHC, afin de construire un triangle FDI, dont le côté FD contienne autant de parties d'une échelle G, que la distance CA contient de fois la mesure qui a servi à mesurer la distance CH.*

Troisiemement. *Enfin, le rayon visuel CB est aussi une distance accessible par son extrémité C. Ainsi, par le même principe, on prend un point H, & l'on observe la grandeur des angles BCH & BHC, afin de construire encore un trian-*

† Dans la pratique, nous n'avons point fait observer immédiatement l'angle ACB; parce que l'on déduit sa grandeur, de celle des angles ACH & BCH.

Digitized by Google

gle FEI, dont le côté FE contienne aussi autant de parties de cette échelle G, que la distance CB contient de fois la mesure qui a servi à mesurer la distance CH.

Or, par ce moyen, on parvient à construire un triangle DEF, dont le côté DE contient autant de parties de l'échelle G, que le côté AB du triangle ABC, c'est-à-dire, la distance proposée, contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance CH : comme on le démontre par la sixieme proposition du sixieme Livre.

Digitized by Google

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

126. *Si deux lignes droites étant coupées par une troisieme, les angles alternes* † *sont égaux, ces deux lignes seront paralleles.*

Fig. 64. SI les angles alternes, par exemple AEF * DFE sont égaux, les lignes droites AB & CD seront paralleles.

Const. Prenez sur la ligne AB un point
N. 81. G, à volonté. Prenez ensuite (n) sur la ligne CD, prolongée s'il est nécessaire, & de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G, une partie FH égale à la partie EG. Enfin, tirez du point G au point F, & du point E au point H, des lignes droites GF & EH.

Démonst. Dans les triangles GEF & HFE, l'angle AEF est égal [H] à l'angle DFE, le côté EG au côté FH [C],

† On appelle *angles alternes*, deux des angles intérieurs, ou deux des angles extérieurs, qui sont formés par une ligne qui en coupe deux autres; & qui sont pris l'un d'un côté de cette ligne coupante, & l'autre de l'autre côté de cette même ligne.

Digitized by Google

& le côté EF commun. Ainsi (n), le côté GF est égal au côté EH ; & par conséquent les points G & E de la ligne AB, sont également éloignés des points F & H de la ligne CD, qui [c] leur correspondent. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point † de la ligne AB que l'on prenne le point G. Donc tous les points de la ligne AB sont également éloignés de tous les points correspondans de la ligne CD ; & par conséquent (n), ces deux lignes sont paralleles. Donc C. Q. F. D. N. 83. N. 55.

COROLLAIRE.

127. Il suit de ce théorême, que *les côtés opposés d'un quarré, d'un quarré long, d'un rhombe & d'un rhomboïde, sont paralleles.*

Dans le quarré A *, le quarré long B, le rhombe C, & le rhomboïde D, les côtés HG & EF sont paralleles, & les côtés HE & GF le sont aussi. Fig.

† Si l'on prenoit le point G sur la partie EB, les angles compris par les côtés égaux des triangles de la démonstration, n'en seroient pas moins égaux ; puisqu'ils seroient les supplémens des angles AEF & DFE qui sont donnés égaux. Ainsi, l'on a raison de dire, que *la même démonstration subsiste, à quelque point, &c.*

Digitized by Google

Conſt. Tirez la diagonale EG de chacune de ces figures.

Démonſt. Dans les triangles EHG & EFG, le côté HE eſt (n) égal au côté GF, le côté HG au côté EF, & le côté EG commun. Ainſi (n), l'angle HGE eſt égal à l'angle FEG, & l'angle HEG à l'angle FGE. Or, puiſque les angles HGE & FEG qui ſont alternes, ſont égaux, les côtés HG & EF ſont paralleles (n) : & puiſque les angles HEG & FGE qui ſont auſſi alternes, ſont auſſi égaux, les côtés HE & GF ſont auſſi paralleles (n). Donc C. Q. F. D.

N. 50, 51, 52 & 53.

N. 90.

N. 126.

N. 126.

Digitized by Google

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

128. *Si deux lignes droites étant coupées par une troisieme, l'un quelconque des angles extérieurs est égal à l'intérieur qui lui est opposé, ces deux lignes seront paralleles.*

Il en sera de même, *si la somme de deux quelconques des angles intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, est égale à celle de deux angles droits.*

PREMIEREMENT.

SI l'angle extérieur, par exemple BGE*, est égal à l'angle intérieur DHE qui lui est opposé, les lignes droites AB & CD seront paralleles. Fig. 6[illegible]

Démonst. L'angle AGF est (n) égal à l'angle BGE qui lui est opposé au sommet, & [H] l'angle BGE est égal à l'angle DHE. Ainsi (n), l'angle AGF est égal à l'angle DHE. Or (n), puisque les angles AGF & DHE qui sont alternes, sont égaux, les lignes AB & CD sont paralleles; & par conséquent C. Q. F. 1°. D. N. 102 N. 62 N. 12[illegible]

Digitized by Google

SECONDEMENT.

Si la ſomme des deux angles intérieurs,
Fig. 66. par exemple BGF * & DHE, eſt égale à celle de deux angles droits, les lignes droites AB & CD ſeront paralleles.

Démonſt. La ſomme des angles AGF
N. 98. & BGF eſt (n) égale à celle de deux angles droits; & [H] celle des angles BGF
N. 62. & DHE l'eſt auſſi. Ainſi (n), la ſomme des angles AGF & BGF eſt égale à celle des angles BGF & DHE; & par conſéquent, ſi l'on retranche le même angle BGF de chacune de ces deux ſommes, les reſtes qui ſeront les angles AGF &
N. 64. DHE, ſeront égaux (n). Or (n), puiſ-
N. 126. que les angles AGF & DHE qui ſont alternes ſont égaux, les lignes AB & CD ſont paralleles; & par conſéquent C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

129. Il ſuit de ce théorême, que *ſi deux lignes droites ſont perpendiculaires chacune à une même ligne droite, elles ſeront paralleles.*

Digitized by Google

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

130. *Si deux lignes droites & paralleles sont coupées par une troisieme ligne droite, les angles alternes seront égaux; chaque angle extérieur sera égal à l'intérieur qui lui est opposé; & la somme de deux quelconques des intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, sera égale à celle de deux angles droits.*

PREMIEREMENT.

SI les lignes droites AB * & CD sont paralleles, les angles alternes, par exemple AIF & DKE, seront égaux. Fig. 67.

Const. Prenez sur la ligne AB un point G à volonté. Prenez ensuite (n) sur la ligne CD, prolongée s'il est nécessaire, & de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G, une partie KH égale à la partie IG. Enfin, tirez du point G au point K, & du point I au point H, des lignes droites GK & IH. N. 82.

Démonst. Dans les triangles GIK & HKI, le côté IK est commun : le côté IG est [c] égal au côté KH ; & le côté

GK l'est au côté IH ; puisque les points G & I, K & H, étant [c] des points correspondans de deux lignes AB & CD qui sont paralleles [H], la distance du
N. 55. point G au point K est (n) égale à celle
N. 90. du point I au point H. Ainsi (n), l'angle AIF est égal à l'angle DKE ; & par conséquent C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

L'angle extérieur, par exemple BIE, sera égal à l'intérieur DKE qui lui est opposé.

N. 102. *Démonst.* L'angle BIE est (n) égal à l'angle AIF qui lui est opposé au sommet : & l'angle AIF est [D] égal à son alterne DKE ; puisque [H] les lignes AB & CD
N. 62. sont paralleles. Donc (n) l'angle BIE est égal à l'angle DKE ; & par consequent C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Enfin, la somme des angles intérieurs, par exemple BIF & DKE, sera égale à celle de deux angles droits.

Démonst. La somme des angles BIF
98. & BIE est (n) égale à celle de deux angles droits. Or, puisque [H] les lignes AB & CD sont paralleles, l'angle BIE qui est extérieur, est [D] égal à l'intérieur

DKE

DKE qui lui est opposé. Donc (n), la N. 61.
somme des angles BIF & DKE est égale à celle de deux angles droits; & par conséquent C. Q. F. 3°. D.

COROLLAIRE.

131. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *si une ligne droite est perpendiculaire à l'une quelconque de deux lignes droites qui sont paralleles, elle sera aussi perpendiculaire à l'autre:* & de la seconde partie de ce même théorême, que *si de deux lignes droites paralleles, l'une est perpendiculaire à une troisieme ligne droite, l'autre le sera aussi.*

PROPOSITION XXX.

THÉORÊME.

132. *Si deux lignes droites sont paralleles chacune à une même ligne, elles le seront aussi entre elles.*

SI les lignes droites AB * & CD sont Fig. 68.
paralleles chacune à une même ligne EF, elles le seront aussi entr'elles.

Const. Tirez une ligne droite quelconque GH, qui coupe les lignes AB,

Digitized by Google

EF & CD, prolongées s'il est nécessaire.
N. 130. *Démonst.* L'angle AIH est (n) égal à son alterne FKG, puisque [H] les lignes AB & EF sont paralleles; l'angle FKG
N. 102. est (n) égal à l'angle EKH qui lui est opposé au sommet; enfin, l'angle EKH
N. 130. est aussi (n) égal à son alterne DLG, puisque [H] les lignes EF & CD sont
N. 62. aussi paralleles. Donc (n) l'angle AIH est égal à l'angle DLG. Or, puisque les angles AIH & DLG qui sont alternes, sont égaux, les lignes AB & CD sont
N. 126. paralleles (n); & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXI.

PROBLÊME.

133. *D'un point donné hors d'une ligne droite, tirer une parallele à cette ligne.*

Fig. 69. IL faut tirer du point F * une parallele à la ligne droite AB.

Const. Tirez du point F à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne
N. 120. droite EF. Décrivez ensuite (n) sur cette ligne FE un angle DFE, qui ayant le

Digitized by Google

point F pour sommet, soit égal & alterne à l'angle AEF. Le côté FD de cet angle, prolongé s'il est nécessaire, sera la parallele demandée.

Démonst. Les angles alternes DFE & AEF sont égaux [c]. Donc (n) les lignes AB & CFD sont paralleles; & par conséquent C. Q. F. F. N. 126.

USAGE.

134. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour tirer par un point quelconque F * une parallele à une ligne droite inaccessible AB.* Fig. 70.

On choisit sur cette ligne deux points quelconques H & G que l'on puisse reconnoître. On pose ensuite un graphometre au point F; & après y avoir fait (n) *toutes les mêmes opérations que si l'on vouloit mesurer la distance inaccessible HG, on rapporte sur le papier le triangle HFG, de la même maniere dont on a rapporté en DFE le triangle ACB de la figure 63.* N. 125.

Lorsque l'on est parvenu à avoir sur le papier le triangle HFG, on y prend avec un rapporteur la grandeur de l'angle HGF. On dirige ensuite l'une des regles du graphometre au point G; & l'on fait tourner l'autre vers D, jusqu'à ce qu'elle forme

Digitized by Google

avec la premiere un angle DFG égal à cet angle HGF. Enfin, on fait planter un piquet D dans la direction de cette derniere regle; & par ce moyen, on a deux points F & D de la parallele demandée. Ainsi, si l'on fait passer par ces deux points une ligne droite CFD, elle sera cette parallele.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

135. *L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme de deux angles intérieurs de ce même triangle, qui sont opposés à cet angle.*

Fig. 71. L'ANGLE extérieur BCD * du triangle ABC, est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés.

N. 133. *Const.* Du point C, tirez (n) une parallele CE au côté AB.

N. 72. *Démonst.* L'angle BCD est (n) la somme des angles BCE & ECD. Mais puisque [c] les lignes AB & CE sont paralleles, ces angles BCE & ECD sont

N. 130. (n) égaux, l'un à son alterne B, & l'autre

Digitized by Google

à l'intérieur A qui lui est opposé. Donc (n) l'angle BCD est égal à la somme N. 62.
des angles B & A; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

136. Il suit de ce théorême, que *la somme de tous les angles d'un triangle, est égale à celle de deux angles droits.*

Dans le triangle ABC *, la somme de Fig. 71.
tous les angles BCA, B & A, est égale à celle de deux angles droits.

Const. Prolongez le côté AC vers D, à volonté.

Démonst. La somme des angles BCA & BCD est (n) égale à celle de deux an- N. 98.
gles droits. Mais (n) l'angle BCD qui N. 135.
est extérieur au triangle ABC, est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés. Donc (n) la somme N. 62.
des angles BCA, B & A est égale à celle de deux angles droits; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

137. Il suit de ce corollaire, que *si la somme de deux angles quelconques d'un triangle, est égale à celle de deux*

Digitized by Google

angles quelconques d'un autre triangle ; le troisieme angle du premier triangle sera égal au troisieme angle du second.

[Fig. 72. Si dans les triangles ABC * & DEF, la somme des angles, par exemple A & C, est égal à celle des angles, par exemple D & F ; l'angle B sera égal à l'angle E.

Démonst. La somme des angles A, B,
N. 62. & C est (n) égale à celle des angles D,
N. 136. E & F ; puisque (n) elles valent chacune deux angles droits : & la somme des angles A & C est [H] égale à celle des an-
N. 64. gles D & F. Ainsi (n), si l'on retranche la troisieme somme de la premiere, & la quatrieme de la seconde, les restes seront égaux. Or, ces restes sont l'angle B & l'angle E. Donc l'angle B est égal à l'angle E ; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

138. Il suit aussi de ce premier corollaire, que *si dans un triangle isoscele, l'angle formé par les côtés égaux est un angle droit, les autres angles seront chacun la moitié d'un angle droit.*

Fig. 73. Si dans le triangle isoscele ABC * l'angle A est droit, les angles B & C seront chacun la moitié d'un angle droit.

Démonst. La somme des angles A, B

Digitized by Google

& C est (n) égale à celle de deux angles droits. Ainsi, puisque [H] l'angle A est droit, les angles B & C valent ensemble un angle droit ; & par conséquent chacun la moitié d'un angle droit, puisque (n) ils sont égaux. Donc C. Q. F. D. N. 136. N. 86.

COROLLAIRE IV.

139. Il suit encore de ce même premier corollaire, que *dans un triangle équilatéral, chaque angle est les deux tiers d'un angle droit.*

Démonst. Dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux. (n) Ainsi (n), ils sont chacun le tiers de deux angles droits ; & par conséquent les deux tiers d'un angle droit. Donc C. Q. F. D. N. 87. N. 1.

COROLLAIRE V.

140. Il suit enfin de ce même premier corollaire, que *la somme de tous les angles d'une figure rectiligne quelconque, est égale à celle de deux fois autant d'angles droits, moins quatre, que cette figure a d'angles, ou de côtés.*

La somme de tous les angles A * B, C, &c. par exemple du pentagone ABCDE, Fig. 74.

Digitized by Google

eſt égale à celle de deux fois cinq angles droits, moins quatre, c'eſt-à-dire, à celle de ſix angles droits.

Conſt. Du point F pris à volonté dans le polygone propoſé, tirez à chaque angle A, B, C, &c. des lignes droites FA, FB, FC, FD & FE.

Démonſt. Les lignes FA, FB, FC, &c. diviſent en cinq triangles AFB, BFC, CFD, &c. le polygone propoſé; puiſque ce polygone a cinq côtés: & la ſomme de tous les angles de ces cinq triangles, eſt égale à celle de dix angles
N. 136. droits; puiſque (n) la ſomme de tous les angles d'un triangle eſt égale à celle de deux angles droits. Mais la ſomme de tous les angles de ces cinq triangles, ſurpaſſe celle de tous les angles A, B, C, &c. du polygone propoſé, de la ſomme de tous les angles qui ont leur ſommet
N. 99. au point F, laquelle (n) eſt égale à celle de quatre angles droits. Donc, ſi de la ſomme de dix angles droits, on retranche celle de quatre angles droits, le reſte qui ſera la ſomme de ſix angles droits, ſera auſſi celle de tous les angles A, B, C, &c. du polygone propoſé; & par conſéquent C. Q. F. D.

USAGE.

Digitized by Google

USAGE.

141. *Lorsque l'on connoît dans un triangle la valeur de deux angles quelconques, il est facile de trouver celle du troisieme; puisque* (n) *cette derniere valeur est toujours la différence de la premiere, à la somme de deux angles droits, c'est-à-dire* (n), *à* 180 *degrés.* N. 136. N. 38.

*Ainsi, si l'on sait que dans le triangle ABC * l'angle A est, par exemple de* 50 *degrés, & l'angle C de* 75; *on en conclura que l'angle B est de* 55. Fig. 75.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

142. *Si dans un quadrilatere deux côtés sont égaux & paralleles, les deux autres le seront aussi.*

SI dans le quadrilatere DB *, les côtés AB & DC sont égaux & paralleles, les côtés AD & BC le seront aussi. Fig. 76.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, l'angle BAC est (n) égal à son alterne DCA, puisque [H] les côtés AB N. 130.

Digitized by Google

& DC sont paralleles ; le côté AB est égal [H] au côté DC ; & le côté AC est
N. 83. commun. Ainsi (n), le côté AD est égal au côté BC ; & l'angle DAC à l'angle BCA. Or, puisque l'angle DAC est égal à l'angle BCA qui lui est alterne, ce même côté AD que nous venons de conclure égal au côté BC, lui est aussi paral-
N. 126. lele (n) ; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÊME.

143. *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux ; les angles opposés le sont aussi ; & la diagonale le divise en deux parties égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 76. DANS le parallélogramme DB *, le côté AB est égal au côté DC, & le côté AD au côté BC.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est commun ; l'angle
N. 130. BAC est (n) égal à son alterne DCA,
N. 57. puisque (n) les côtés AB & DC sont pa-
N. 130. ralleles ; & l'angle BCA est aussi (n) égal

Digitized by Google

à son alterne DAC, puisque (n) les côtés N. 57.
BA & AD sont aussi paralleles. Donc (n) N. 123.
le côté AB est égal au côté DC, & le côté AD au côté BC; & par conséquent C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

L'angle DAB est égal à l'angle DCB; & l'angle B à l'angle D.

Demonst. Premierement, les angles DAC & BAC sont [D] égaux aux angles BCA & DCA, chacun à chacun. Or, l'angle DAB est la somme des deux premiers; & l'angle DCB est celle des deux derniers. Donc (n) l'angle DAB est égal N. 63.
à l'angle DCB.

Secondement, dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est commun, l'angle BAC est égal à l'angle DCA [D], & l'angle BCA à l'angle DAC [D]. Donc (n) l'angle B est égal à l'angle D; & par N. 123.
conséquent C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Enfin, la diagonale AC divise le parallélogramme DB en deux parties égales ABC & CDA.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est, &c. Donc (n) le N. 123.
triangle ABC est égal au triangle CDA;

& par conséquent, C. Q. F. 3°. D.

COROLLAIRE I.

144. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *si dans un parallélogramme deux côtés de suite sont égaux, tous les côtés seront égaux.*

Fig. 65. Si dans le parallélogramme C * les côtés de suite, par exemple EF & EH, sont égaux, tous les côtés HG, EF, EH & FG seront égaux.

N. 143. *Démonst.* Le côté HG est (n) égal au côté EF qui lui est opposé; le côté EF est égal [H] au côté EH; & le côté EH est
N. 143. égal (n) au côté FG qui lui est opposé.
N. 62. Donc (n) tous les côtés sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

145. Il suit de la seconde partie de ce même théorême, que *si dans un parallélogramme un angle est droit, ce parallélogramme sera rectangle.*

Fig. 65. Si dans le parallélogramme B * l'angle, par exemple E est un angle droit, ce parallélogramme sera rectangle.

Démonst. La somme des angles E, F, G & H est égale à celle de quatre angles
N. 140. droits (n). Or [H], l'angle E est droit;
N. 143. & (n) l'angle G l'est aussi, puisqu'il est

Digitized by Google

opposé à l'angle E. Donc la somme des deux autres angles H & F est égale à celle de deux angles droits. Mais (n) N. 143.
ces deux autres angles sont égaux, puisqu'ils sont opposés. Donc ils sont deux angles droits. Ainsi, tous les angles du parallélogramme B sont des angles droits; & par conséquent (n) ce parallélogramme N. 58.
est rectangle. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

146. Il suit enfin de ces deux corollaires, que *si un parallélogramme a deux côtés de suite égaux, & un angle droit, ce parallélogramme sera un quarré.*

Si dans le parallélogramme A * les Fig. 65.
côtés de suite, par exemple HG & HE, sont égaux; & si l'angle, par exemple H est un angle droit, ce parallélogramme sera un quarré.

Démonst. Dans le parallélogramme A tous les côtés HG, GF, HE & EF sont égaux (n); puisque [H] les deux de suite N. 144.
HG & HE le sont: & tous les angles H, G, F & E sont droits (n), puisque [H] N. 145.
l'angle H est droit. Ainsi (n) ce parallé- N. 50.
logramme est un quarré; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXV.

THÉORÊME.

147. *Les parallélogrammes qui sont sur une même* base †, *entre mêmes parallelés, ont des surfaces égales.*

Fig. 77. LEs parallélogrammes DB * & DF qui sont sur une même base DC, & entre mêmes paralleles DC & AF, sont égaux.

Démonst. Dans les triangles DAE &
N. 143. CBF, le côté DA est (n) égal au côté CB, puisque [H] le quadrilatere DB est un parallélogramme. Par la même raison,
N. 130. l'angle intérieur DAE est (n) égal à l'extérieur CBF auquel il est opposé. Enfin,
N. 130. l'angle extérieur DEA est aussi (n) égal à l'intérieur CFB qui lui est opposé, puisque [H] le quadrilatere DF est aussi un
N. 123. parallélogramme. Donc (n) le triangle DAE est égal au triangle CBF; & par conséquent, si l'on retranche de chacun

† On appelle *base* d'une figure, le côté sur lequel on suppose que cette figure est posée. Par conséquent, la *hauteur* d'une figure est la perpendiculaire abaissée du sommet de cette figure à sa base.

Digitized by Google

le même triangle GBE, les restes qui seront les trapezes GA & GF, seront égaux (n). Mais puisque le trapeze GA N. 64.
est égal au trapeze GF, si l'on ajoute à chacun le même triangle DGC, les sommes seront égales (n). Or ces som- N. 63.
mes seront les parallélogrammes DB & DF. Donc ces parallélogrammes sont égaux; & par conséquent, C. Q F. D.

SCHOLIE.

148. *Comme le mesurage des surfaces dépend primitivement de ce théorême, nous allons enseigner ce que l'on entend par* mesure; *& la maniere de se servir des mesures.*

DES MESURES.

On appelle mesure, *une certaine étendue dont les hommes sont convenus entre eux, pour leur servir de terme auquel ils pussent comparer les autres étendues, & juger de leur grandeur, par le nombre qu'elles contiendroient de parties, égales chacune à cette premiere étendue. Or, comme chaque partie d'une étendue ne peut être égale qu'à une étendue de même genre qu'elle, ils ont été obligés* (n) *de* N. 1.

Digitized by Google

convenir de trois sortes de mesures : savoir, de mesures linéaires, pour leur comparer les lignes ; de mesures superficielles, pour leur comparer les surfaces ; & de mesures solides, pour leur comparer les corps.

Les premieres, qui sont des lignes droites, se nomment mesures courantes ; *les autres se nomment* mesures quarrées, *parce qu'elles sont des quarrés* † ; *& les dernieres s'appellent,* mesures cubiques, *parce qu'elles sont des cubes* ¶.

Du mesurage, ou de la maniere de se servir des mesures.

On appelle mesurer, *considérer combien une étendue contient de parties égales chacune à l'étendue que l'on a prise pour mesure. Or, la maniere la plus simple, de connoître combien une étendue contient de parties égales chacune à une autre éten-*

† On a pris un quarré pour être la mesure des surfaces ; parce que la longueur & la largeur d'un quarré étant égales, cette figure mesure également & en même tems les deux dimensions de la surface.

¶ Le *cube* est un corps qui a la figure d'un dez à jouer. On l'a pris pour être la mesure des corps ; parce que sa longueur, sa largeur & son épaisseur étant égales, il mesure également, & en même tems, les trois dimensions des corps.

Digitized by Google

due, c'est de la diviser en parties qui soient égales chacune à cette autre étendue, & de compter ensuite ces parties. Mais, comme on ne peut juger immédiatement si deux étendues sont égales, que lorsqu'elles sont semblables, il faut toujours diviser en parties semblables à la mesure dont on doit se servir, l'étendue que l'on veut mesurer. Ainsi, puisque les mesures des lignes sont des lignes droites, que celles des surfaces sont des quarrés, & que celle des corps sont des cubes; il faut diviser en lignes droites, les lignes que l'on veut mesurer; en quarrés, les surfaces que l'on veut mesurer; & en cubes, les corps que l'on veut mesurer. Mais, il n'y a que les lignes droites qui puissent se diviser en lignes droites; les rectangles, qui puissent se diviser en quarrés; & de certains corps nommés des parallelepipedes rectangles †, *qui puissent se diviser en cubes. Donc on ne peut mesurer immédiatement que les lignes droites, les rectangles, & les parallelepipedes rectangles; & par conséquent il suffit de savoir comment on doit mesurer ces trois sortes d'étendues, pour savoir se servir des mesures. Ainsi:*

† *Voyez* la vingt-neuvieme définition du onzieme Livre.

Digitized by Google

Premierement. *Pour* mesurer *une ligne droite (c'est-à-dire, considérer combien de fois une ligne droite en contient une certaine autre que l'on prend pour mesure), on applique successivement cette mesure sur cette ligne : & autant de fois que l'on peut l'y appliquer, autant de fois cette ligne contient cette mesure ; puisque cette ligne peut être divisée en autant de parties égales chacune à cette mesure, que cette même mesure peut lui être appliquée de fois.*

Secondement. *Pour* mesurer *un rectangle (c'est-à-dire, considérer combien de fois il contient un certain quarré que l'on prend pour mesure), il faudroit appliquer successivement ce quarré sur ce rectangle : & autant de fois que l'on pourroit l'y appliquer, autant de fois ce rectangle contiendroit cette mesure ; puisque l'on pourroit le diviser en autant de parties égales chacune à cette mesure, que cette même mesure pourroit lui être appliquée de fois. Mais il n'est point praticable de porter facilement une surface quarrée, ni de l'appliquer successivement sur toute celle d'un rectangle. Ainsi, il faut résoudre ce problême, sans se servir d'une surface pour mesure actuelle. Or, voici la maniere de le faire.*

Digitized by Google

Soit le quarré M * avec lequel il faille Fig. 78.
mesurer la surface du rectangle DB.

On prend une mesure courante égale au côté NO du quarré M; & l'on considere combien la base DC du rectangle proposé contient de parties égales chacune à cette mesure courante; & combien la hauteur DA en contient aussi. Or, si la base DC contient, par exemple trois de ces parties, il est évident que le rectangle DB pourroit être divisé en trois autres rectangles DE, FG & HB, qui auroient chacun une base égale à celle de la mesure M. Et si la hauteur DA contient, par exemple quatre de ces mêmes parties, il est encore évident que chacun des rectangles DE, FG, &c. pourroit être subdivisé en quatre autres DL, IP, &c. qui auroient aussi chacun la même hauteur que la mesure M. Ainsi, tout le rectangle DB pourroit être divisé en trois fois quatre, ou douze rectangles égaux chacun à la mesure M; & contient par conséquent douze parties égales chacune à cette mesure.

On verroit de la même maniere, que si la mesure courante NO se trouvoit, par exemple quatre fois $\frac{1}{2}$ *dans la base d'un rectangle, & six fois* $\frac{1}{3}$ *dans la hauteur; on verroit, dis-je (en tirant de la même*

Digitized by Google

maniere, des paralleles aux côtés par chaque point de division) que ce rectangle contiendroit 28 parties égales chacune à la mesure M, plus une partie égale à la moitié de cette même mesure; puisque ce rectangle seroit alors composé: 1°. d'un rectangle qui contiendroit 24 de ces parties: 2°. d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{6}{2}$, ou trois: 3°. d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{3}{3}$ ou 1: 4°. enfin, d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{3}{2}$ tiers, ou $\frac{1}{2}$.

D'où l'on conclud cette regle générale du mesurage des rectangles.

149. La surface d'un rectangle est égale au produit du nombre des mesures courantes qui sont contenues dans sa longueur, multiplié par le nombre des mêmes mesures qui se trouvent dans sa largeur: *ou, pour nous servir de l'expression ordinaire*, un rectangle est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur.

Troisiemement. *Nous ne parlerons qu'au onzieme Livre, de la maniere de mesurer les parallelepipedes rectangles.*

COROLLAIRE I.

150. Il suit du théorême qui précede cette scholie, que *la surface d'un parallélogramme quelconque, est égale à celle*

Digitized by Google

d'un rectangle qui auroit pour base l'un des côtés de ce parallélogramme, & pour hauteur, une perpendiculaire tirée de ce côté, à un point quelconque du côté qui lui est opposé, prolongé s'il est nécessaire.

Le parallélogramme DB * est égal à un rectangle qui auroit pour base, par exemple le côté DC de ce parallélogramme, & pour hauteur, une perpendiculaire tirée d'un point quelconque C de ce même côté, au côté opposé AB, prolongé s'il est nécessaire. Fig. 79.

Const. Du point C, abaissez (n) une perpendiculaire CF au côté AB, prolongé autant qu'il sera nécessaire. Prenez (n) sur la ligne BF prolongée vers E, une partie EF égale au côté DC. Enfin, tirez du point D au point E, une ligne droite DE. N. 97. N. 81.

Démonst. Le côté EF est égal [c] & parallele [H] au côté DC. Ainsi (n), le quadrilatere DF est un parallélogramme; & par conséquent un rectangle (n), puisque [c] il a un angle droit F. Or (n), le parallélogramme DB est égal à ce rectangle; puisque [c] il est sur une même base DC que lui, & entre mêmes paralleles DC & EB. Donc C. Q. F. D. N. 142. N. 145. N. 147.

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

151. Il ſuit du corollaire précédent, & du n°. 149, que *la ſurface d'un parallélogramme quelconque, eſt égale au produit de la baſe de ce parallélogramme multipliée par ſa hauteur.*

Fig. 79. Le parallélogramme DB * eſt égal au produit de ſa baſe DC multipliée par ſa hauteur.

N. 97. *Conſt.* Du point C, abaiſſez (n) une perpendiculaire CF au côté AB, prolongé autant qu'il ſera néceſſaire. Achevez enſuite le rectangle DF, de la même maniere que dans la conſtruction précédente.

Démonſt. Le parallélogramme DB eſt
N. 150. égal au rectangle DF (n). Or (n), le rec-
N. 149. tangle DF eſt égal au produit de ſa baſe DC multipliée par ſa hauteur CF. Donc
N. 62. (n) le parallélogramme DB eſt auſſi égal au produit de la baſe DC multipliée par
N. 147.† la hauteur CF. Mais (n) cette baſe DC & cette hauteur CF ſont auſſi, l'une la baſe, & l'autre la hauteur du parallélogramme DB. Donc ce parallélogramme eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur; & par conſéquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

USAGE.

152. *On se sert de la construction du premier de ces deux corollaires, pour faire un rectangle DF égal à un parallélogramme quelconque DB.*

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÊME.

153. *Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales, & entre mêmes paralleles, ont des surfaces égales.*

LEs parallélogrammes DB * & HF qui sont sur des bases égales DC & HG, & entre mêmes paralleles DG & AF, sont égaux. Fig. 80.

Const. Tirez du point D au point E, une ligne droite DE, & du point C au point F une ligne droite CF.

Démonst. Le côté DC est [H] égal au côté HG, & le côté HG au côté EF (n). N. 143. Ainsi (n) les côtés DC & EF sont égaux; N. 62. & par conséquent, puisque [H] ils sont aussi paralleles, le quadrilatere DF est un parallélogramme (n). Or, puisque le qua- N. 142.

Digitized by Google

drilatere DF est un parallélogramme, il
N. 147. est (n) égal & au parallélogramme DB qui [c] est sur une même base DC que lui, & entre mêmes paralleles DG & AF; & au parallélogramme HF qui [c] est aussi sur une même base EF que lui, & encore entre mêmes paralleles DG
N. 62. & AF. Donc (n) les parallélogrammes DB & HF sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

154. *Les triangles qui sont sur une même base, & entre mêmes paralleles, ont des surfaces égales.*

Fig 81. LEs triangles ABC * ADC qui sont sur une même base AC, & entre mêmes paralleles AC & BD, sont égaux.
N. 133. *Const.* Tirez (n) du point A, une parallele AE au côté CB; & du point C, une parallele CF au côté AD. Prolongez ensuite la ligne BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en des points E & F, les paralleles AE & CF.

Démonst.

Digitized by Google

Démonst. Les côtés AC & EB, AC & DF sont [H] paralleles, chacun à chacun; & [c] les côtés AE & CB, CF & AD le sont aussi, chacun à chacun. Ainsi (n) les quadrilateres CE & AF sont des N. 57.
parallélogrammes; & par conséquent ils sont égaux (n), puisque [c] ils sont sur N. 147.
une même base AC, & entre mêmes paralleles AC & EF. Mais (n) les triangles N. 145.
ABC & ADC sont les moitiés, l'un du parallélogramme CE, & l'autre du parallélogramme AF. Donc (n) ces triangles N. 68.
sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

155. *On se sert de ce théorême, de la maniere suivante : premierement*, pour faire un triangle rectangle, qui soit égal à un triangle quelconque ABC *. Fig. 82.

Const. *On tire du point B* (n) *une* N. 133.
parallele indéfinie BD au côté AC. Du point A, on éleve (n) *une perpendicu-* N. 96.
laire AD à ce même côté. Enfin, on tire du point D au point C, une ligne droite DC; & l'on a un triangle ADC qui est le triangle demandé.

Démonst. *Premierement, le triangle ADC est rectangle en A* [c]. *Secondement, il est égal au triangle ABC* (n); N. 154.

Digitized by Google

puisque [c] *il est sur une même base AC que cet autre triangle, & entre mêmes paralleles AC & BD. Donc C. Q. F. F.*

Secondement, pour faire un triangle
Fig. 83. & 84. égal à un autre triangle quelconque ABC*, & qui soit entre deux lignes droites quelconques paralleles AC & EF.

Const. *Du point D, auquel l'un des côtés du triangle proposé (par exemple le côté AB prolongé s'il est nécessaire), rencontre la parallele EF, tirez au sommet de l'angle C, une ligne droite DC.*
N. 133. *Du sommet de l'angle B, tirez* (n) *une parallele BG à cette ligne DC. Enfin, du point G auquel cette parallele rencontre le côté AC prolongé s'il est nécessaire, tirez au point D, une ligne droite GD. Le triangle ADG, qui* [c] *est entre les paralleles AC & EF, sera le triangle demandé.*

Fig. 83. Démonst. 1°. *Les triangles ADG* & ABC ont une partie commune ABG : &*
N. 154. *l'autre partie BDG du premier est* (n) *égale à l'autre partie BCG du second; puisque ces deux autres parties sont des triangles, qui* [c] *sont sur une même base BG, & entre mêmes paralleles BG &*
N. 63. *DC. Donc* (n) *les triangles ADG & ABC sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. F.*

Digitized by Google

2°. *Les triangles ADG * & ABC* Fig. 84.
ont une partie commune ADC : & l'autre partie DGC du premier est (n) *égale à* N. 154.
l'autre partie DBC du second ; puisque ces deux autres parties sont des triangles, qui [c] *sont sur une même base DC, & entre mêmes paralleles DC & BG. Donc* (n) *les triangles ADG & ABC sont égaux;* N. 72.
& par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÊME.

156. *Les triangles qui sont sur des bases égales, & entre mêmes paralleles, ont des surfaces égales.*

LEs triangles ABC * & DEF qui Fig. 85.
sont sur des bases égales AC & DF, & entre mêmes paralleles AF & GH, sont égaux.

Const. Tirez (n) du point A, une pa- N. 133.
rallele AG au côté CB ; & du point F une parallele FH au côté DE.

Démonst. Les côtés AC & GB, DF & EH sont [H] paralleles, chacun à chacun ; & [c] les côtés AG & CB, FH & DE le sont aussi, chacun à chacun. Ainsi (n), les quadrilateres GC & DH N. 57.

Digitized by Google

ſont des parallélogrammes ; & par con-
N. 153. ſéquent ils ſont égaux (n), puiſque [H] ils ſont ſur des baſes égales AC & DF, & entre mêmes paralleles AF & GH.
N. 143. Mais (n) les triangles ABC & DEF ſont les moitiés, l'un du parallélogramme GC, & l'autre du parallélogramme DH.
N. 68. Donc (n) ces triangles ſont égaux ; & par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIX.

THÉORÊME.

157. *Si des triangles qui ſont ſur une même baſe, ont des ſurfaces égales, ils ſeront entre mêmes paralleles.*

Fig. 86. SI les triangles ABC *, & ADC qui ſont ſur une même baſe AC, ſont égaux, la ligne droite tirée du point B au point D, ſera parallele à cette baſe.

Conſt. Prolongez le côté AD vers E, à volonté. Tirez du point B aux points E & F pris à volonté ſur la ligne AE, l'un au-deſſus du point D & l'autre au-deſſous, les lignes droites BE & BF. Enfin, tirez du point C aux mêmes points E & F, les lignes droites CE & CF.

Digitized by Google

Démonst. Si la ligne BD n'étoit point parallele à la base AC, une ligne tirée du point B parallelement à cette base, passeroit ou au-dessus de la ligne BD, ou au-dessous. Or:

Premierement, si elle passoit au-dessus, & étoit, par exemple la ligne BE, les triangles AEC & ABC seroient égaux (n), puisque [c] ils sont sur une même base AC, & que [H] ils seroient entre mêmes paralleles AC & BE. Mais [H] les triangles ADC & ABC sont aussi égaux. Donc (n) le triangle AEC seroit égal au triangle ADC. Ce qui n'est point, puisque le premier surpasse le second du triangle CDE. N. 154. N. 62.

Secondement, si elle passoit au-dessous, & étoit, par exemple la ligne BF, on démontreroit par un raisonnement pareil au précédent, que le triangle AFC seroit égal au triangle ADC. Ce qui n'est point encore, puisque le premier differe du second du triangle CFD.

Donc la ligne BD est parallele à la base AC; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XL.

THÉORÊME.

158. *Si des triangles qui sont sur des bases égales, prises chacune sur une même ligne droite, ont des surfaces égales; ils seront entre mêmes paralleles.*

Fig. 87. SI les triangles ABC * & DEF qui sont sur des bases égales AC & DF prises chacune sur la même ligne droite AF, sont égaux; la ligne droite tirée du point B au point E, sera parallele à cette ligne AF.

Const. Prolongez le côté DE vers H, à volonté. Tirez du point B aux points H & G pris à volonté sur la ligne DH, l'un au-dessus du point E, & l'autre au-dessous, des lignes droites BH & BG. Enfin, tirez du point F aux mêmes points précédens H & G, des lignes droites FH & FG.

Démonst. Si la ligne BE n'étoit point parallele à la ligne AF, une ligne droite tirée du point B parallelement à cette ligne AF, passeroit ou au-dessus de la ligne BE, ou au-dessous. Or:

Digitized by Google

Premierement, si elle passoit au-dessus, & étoit, par exemple la ligne BH, les triangles DHF & ABC seroient égaux (n); puisque [c] ils sont sur des bases égales DF & AC, & que [H] ils seroient entre mêmes paralleles AF & BH. Mais [H] les triangles DEF & ABC sont aussi égaux. Donc (n) le triangle DHF seroit égal au triangle DEF. Ce qui n'est point, puisque le premier surpasse le second du triangle EHF. N. 156. N. 62.

Secondement, si elle passoit au-dessous, & étoit, par exemple la ligne BG, on démontreroit par un raisonnement pareil au précédent, que le triangle DGF seroit égal au triangle DEF. Ce qui n'est point encore, puisque le premier differe du second, du triangle GEF.

Donc la ligne BE est parallele à la ligne AF; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XLI.

THÉORÊME.

159. *Si un parallélogramme & un triangle sont sur une même base, & entre mêmes paralleles, la surface du parallélogramme sera double de celle du triangle.*

Fig. 88. LE parallélogramme DB * qui est sur la même base DC que le triangle DEC, & entre mêmes paralleles DC & AE, est double de ce triangle.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Les triangles DEC & DAC
N. 154. sont égaux (n), puisque [H] ils sont sur une même base DC, & entre mêmes
N. 143. paralleles DC & AE. Or (n), le parallélogramme DB est double du triangle
N. 67. DAC. Donc (n) il est aussi double du triangle DEC; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

160. Il suit de ce théorême, & du n°. 151, que *la surface d'un triangle quelconque*

Digitized by Google

quelconque est égale au produit de la base de ce triangle, multipliée par la moitié de sa hauteur.

Le triangle ABC * est égal au produit de sa base AC, multipliée par la moitié de sa hauteur. Fig. 89.

Const. Tirez du point B à la base AC prolongée autant qu'il sera nécessaire, une perpendiculaire BD (n); & une parallele BE (n). Tirez aussi du point C (n) une parallele CE au côté AB. N. 97. N. 133. N. 133.

Démonst. Le parallélogramme AE est (n) égal au produit de sa base AC multipliée par sa hauteur BD. Or (n), le triangle ABC n'est que la moitié de ce parallélogramme. Donc il n'est égal qu'à la moitié de ce produit; & par conséquent, il est égal au produit de sa base AC, multipliée par la moitié de sa hauteur BD. Donc, C. Q. F. D. N. 151. N. 159.

SCHOLIE.

On déduit de ce corollaire cette regle générale du mesurage de toutes les figures planes qui ne sont terminées que par des lignes droites.

161. Divisez en triangles la figure proposée, en tirant des lignes droites de quelques-uns de ses angles à chacun de

Digitized by Google

N. 160. ses autres angles. Mesurez ensuite (n) la surface de chacun de ces triangles; & la somme de toutes ces surfaces sera la surface demandée.

Ainsi, soit, *par exemple*, le polygone

Fig. 90. ABCDE * qu'il faille mesurer.

On le divisera en triangles, par exemple AED, ABD & BCD, par des lignes droites DA & DB. On choisira pour bases de ces triangles, les côtés qui paroîtront les plus commodes, c'est-à-dire, ceux qu'il ne sera pas nécessaire de prolonger pour leur abaisser des perpendiculaires, & qui sont ici les côtés DA & DB. Des angles E, B & C qui sont opposés à ces bases, on abaissera à ces mêmes bases (n) *les perpendiculaires* Ef,

N. 97. *Bg & Ch. On mesurera ensuite chacune de ces bases, & chacune de ces perpendiculaires. Et si la base DA contient, par exemple, 100 mesures courantes égales chacune au côté de la mesure quarrée dont on voudra se servir, la base DB 70, la perpendiculaire* Ef *37, la perpendiculaire* Bg *28, & la perpendiculaire* Ch

N. 160. *23; on en conclura* (n) *que le triangle AED contient 1850 de ces mesures quarrées, le triangle ABD 1400, le triangle BCD 805; & que par conséquent le polygone ABCDE en contient 4055.*

Digitized by Google

PROPOSITION XLII.

PROBLÊME.

162. *Décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle aussi donné.*

IL faut décrire un parallélogramme qui soit égal au triangle ABC *, & qui ait un angle égal à l'angle D. Fig. 91.

Const. Divisez (n) le côté AC en deux parties égales AF & FC. Faites (n) sur l'une de ces parties, par exemple sur FC, un angle GFC qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle D. Tirez du point B (n) une parallele indéfinie BE au côté AC. Prenez sur cette parallele (n) une partie GE égale à la partie FC. Enfin, tirez du point C au point E une ligne droite CE. Le quadrilatere FE sera le parallélogramme demandé. N. 94. N. 122. N. 133. N. 81.

Pour la démonstration, tirez du point B au point F une ligne droite BF.

Démonst. Premierement, le côté GE est [c] égal & parallele au côté FC. Ainsi (n), le quadrilatere FE est un parallélogramme, & par conséquent (n) il N. 140. N. 152.

est double du triangle FBC, puisque [c] il est sur une même base FC que ce triangle, & entre mêmes paralleles AC & BE. Mais le triangle ABC est aussi dou-
N. 156. ble du même triangle FBC; puisque (n) les triangles ABF & FBC qui [c] sont sur des bases égales AF & FC, & entre mêmes paralleles AC & BE sont égaux.
N. 67. Donc (n) le parallélogramme FE est égal au triangle ABC.

Secondement, le même parallélogramme a l'angle GFC égal à l'angle D[c]. Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

163. *Si l'on proposoit au contraire de* décrire un triangle qui fût égal à un pa-
Fig. 22. rallélogramme quelconque DB *, & qui eût un angle égal à l'angle G; *on le feroit de la maniere suivante.*

Const. *On prolongeroit indéfiniment le côté DC vers F, & le côté AB vers*
N. 120. *E. On feroit sur la ligne DF* (n) *un angle EDF qui auroit le point D pour sommet, & feroit égal à l'angle G. On prendroit*
N. 81. *sur cette même ligne* (n) *une partie CF égale au côté DC. Enfin, on tireroit du point E au point F, une ligne droite EF; & le triangle DEF feroit le triangle demandé.*

Digitized by Google

Pour la démonstration, *on tireroit du point E au point C, une ligne droite EC.*

Démonst. *Premierement, le triangle DEF seroit double du triangle DEC; puisque* (n) *les triangles DEC & CEF qui* [c] *seroient sur des bases égales DC & CF, & entre mêmes paralleles DF & AE seroient égaux. Or* (n), *le parallélogramme DB seroit aussi double du même triangle DEC; puisque* [c] *il seroit sur une même base DC que ce triangle, & entre mêmes paralleles DF & AE. Donc* (n) *le triangle DEF seroit égal au parallélogramme DB.* N. 156. N. 159. N. 67.

Secondement, le même triangle auroit [c] *l'angle EDF égal à l'angle G. Par conséquent, C. Q. F. F.*

Digitized by Google

PROPOSITION XLIII.

THÉORÊME.

164. *Les complémens d'un parallélogramme ont des surfaces égales.*

Fig. 93. LEs complémens DF * & FB du parallélogramme DB, sont égaux.

Démonst. Les triangles DAC & BCA
N. 143. sont égaux (n); & (n) il en est de même
N. 143. des triangles EAF & GFA, & des trian-
N. 64. gles IFC & HCF. Ainsi (n), si l'on retranche du triangle DAC, les triangles EAF & IFC; & du triangle BCA, les triangles GFA & HCF, les restes seront égaux. Or, ces restes seront les complémens DF & FB du parallélogramme DB. Donc les complémens de ce parallélogramme sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XLIV.

PROBLÊME.

165. *Décrire sur une ligne droite donnée, un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle aussi donné.*

IL faut décrire sur la ligne droite AB *, un parallélogramme qui soit égal au triangle C, & qui ait un angle égal à l'angle D. Fig. 94.

Const. Prolongez la ligne AB vers E indéfiniment. Sur le prolongement BE pris aussi grand qu'il sera nécessaire, décrivez (n) un triangle BFE dont les côtés soient égaux à ceux du triangle C, chacun à chacun. Faites (n) un parallélogramme BH qui soit égal au triangle BFE, & qui ait l'angle GBE égal à l'angle D. Prolongez indéfiniment vers K, vers L & vers N, les côtés HG, HI & GB. Tirez par le point A (n) une parallele indéfinie KM à la ligne GN. Tirez aussi du point K par le point B une ligne droite KL. Enfin, tirez par le point L (n) N. 117. N. 162. N. 133. N. 133.

Digitized by Google

une parallele ML à la ligne AE †; & le quadrilatere MB sera le parallélogramme demandé.

Démonst. Premierement, le quadrilatere MB est un parallélogramme [c]. Secondement, il est égal au triangle
N. 62 C (n), puisqu'étant [c] l'un des complémens du parallélogramme MH, il est
N. 164. (n) égal à l'autre complément BH de ce même parallélogramme; que cet autre complément BH est égal [c] au triangle
N. 90. BFE, & que le triangle BFE est égal (n) au triangle G. Troisiemement, enfin,
N. 62. il a l'angle ABN égal (n) à l'angle D,
N. 102. puisque (n) les angles ABN & GBE qui sont opposés au sommet sont égaux, & que [c] l'angle GBE est égal à l'angle D. Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

166. *Si l'on proposoit au contraire, de*
Fig. 94. *décrire sur une ligne droite AB * un triangle qui fût égal à un parallélogramme donné, & qui eût un angle égal à l'angle D, on le feroit de la maniere suivante.*

† Pour tirer la parallele KM à la ligne GN, & la parallele ML à la ligne AE, on fait la ligne KG égale à la ligne AB, & la ligne AM égale à la ligne IL. On tire ensuite du point K par le point A, la ligne KM; & du point M par le point L, la ligne ML.

Premierement, on décriroit un triangle quelconque C, double du parallélogramme proposé. On construiroit ensuite sur la ligne AB, par le problême précédent, un parallélogramme MB égal à ce triangle C, & qui eût un angle égal à l'angle D. Enfin, on tireroit la diagonale AN de ce parallélogramme; & l'on auroit un triangle ABN qui seroit le triangle demandé.

Démonst. *Premierement, le triangle ABN auroit* [c] *la ligne AB pour l'un de ses côtés. Secondement, il seroit* (n) *égal au parallélogramme proposé: puisque* (n) *il seroit la moitié du parallélogramme MB, de même que* [c] *le parallélogramme proposé seroit celle du triangle C; & que* [c] *le parallélogramme MB & le triangle C seroient égaux. Troisiemement, enfin, il auroit* [c] *l'angle ABN égal à l'angle D. Par conséquent, C. Q. F. F.*

N. 68.

N. 143.

Digitized by Google

PROPOSITION XLV.

PROBLÊME.

167. *Décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne quelconque, & qui ait un angle égal à un angle donné.*

IL faut décrire un parallélogramme
Fig. 95. qui soit égal à la figure rectiligne BD*, & qui ait un angle égal à l'angle E.

Const. Divisez en triangles, par exemple ABC & ACD, la figure proposée
N. 162. BD. Décrivez ensuite (n) un parallélogramme IG, qui soit égal à celui de ces triangles qu'il vous plaira, par exemple au triangle ABC, & qui ait l'angle I
N. 165. égal à l'angle E. Faites enfin (n) sur l'un des côtés de ce parallélogramme, par exemple sur le côté HG, un autre parallélogramme HK qui soit égal au triangle ACD, & qui ait l'angle GHL égal à l'angle I. La figure rectiligne IK, formée par ces deux parallélogrammes, sera le parallélogramme demandé.

Démonst. La somme des angles GHI & I est égale à celle de deux angles
N. 130. droits (n); puisque [c] le quadrilatere

Digitized by Google

IG eſt un parallélogramme. Mais [c] l'angle GHL eſt égal à l'angle I. Donc (n) la ſomme des angles GHI & GHL eſt égale à celle de deux angles droits ; & par conſéquent (n) les lignes droites IH & HL qui [c] ſont tirées du même point H de la droite GH, ne font qu'une ſeule ligne droite IHL. N. 61. N. 101.

Pareillement, la ſomme des angles HGK & GHL eſt égale à celle de deux angles droits (n), puiſque [c] le quadrilatere HK eſt un parallélogramme. Mais (n) l'angle GHL eſt égal à ſon alterne HGF, puiſque [c & D] les lignes IHL & FG ſont paralleles. Donc (n) la ſomme des angles HGK & HGF eſt égale à celle de deux angles droits ; & par conſéquent (n) les lignes droites FG & GK, qui [c] ſont tirées du même point G de la droite GH, ne font qu'une ſeule ligne droite FGK. N. 130. N. 130. N. 61. N. 101.

Ainſi, la figure rectiligne IK eſt un quadrilatere, & par conſéquent un parallélogramme (n) ; puiſque [c & D] ſes côtés IHL & FGK ſont paralleles, & que (n) ſes côtés IF & LK qui [c] ſont paralleles chacun à la même HG, ſont auſſi paralleles entr'eux. Or, premierement, ce parallélogramme eſt égal (n) à la figure rectiligne BD ; puiſque [c] les N. 57. N. 132. N. 72.

Digitized by Google

parties IG & HK de l'un sont égales aux parties ABC & ACD de l'autre, chacune à chacune. Secondement, il a [c] l'angle I égal à l'angle E. Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

Fig. 95. 168. *Si la figure rectiligne BD * avoit plus de quatre côtés, & qu'il fallût la diviser, par exemple, en trois triangles: alors, après avoir décrit un parallélogramme IK égal aux deux premiers triangles ABC & ACD, de la maniere dont ce problême enseigne à le faire; on décriroit sur le côté LK de ce parallélogramme, un parallélogramme égal au troisieme triangle, de la même maniere dont on a décrit sur le côté HG le parallélogramme HK égal au triangle ACD. Et ainsi de suite, si la figure proposée se divisoit en un plus grand nombre de triangles.*

USAGE.

169. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour trouver la différence de deux figures rectilignes*
Fig. 96. *quelconques A * & B.*

On décrit un parallélogramme FD égal à la figure rectiligne A, & qui ait un angle F de telle grandeur que l'on

Digitized by Google

veut. Sur une ligne droite GK, égale à l'un des côtés de ce parallélogramme, par exemple au côté CF, on décrit aussi un parallélogramme KH égal à la figure rectiligne B, & qui ait un angle K égal à l'angle F. On prend sur les côtés FE & CD du plus grand de ces deux parallélogrammes, des parties FM & CL égales chacune au côté KI du moins grand. Enfin, on tire du point M au point L, une ligne droite ML; & le parallélogramme MD que cette ligne retranche du parallélogramme FD, est la différence de la figure B à la figure A.

Si l'on vouloit une démonstration, on feroit voir que si l'on posoit les parallélogrammes KH & FL l'un sur l'autre, ils se couvriroient réciproquement. Ainsi (n), N. 6. *ils sont égaux; & par conséquent, &c.*

Digitized by Google

PROPOSITION XLVI.

PROBLÊME.

170. *Décrire un quarré sur une ligne droite donnée.*

Fig. 97. IL faut décrire un quarré sur la ligne droite AB *.

N. 96. *Const.* Du point A, élevez (n) une perpendiculaire AD à la ligne AB. Du
N. 96. point B, élevez encore (n) une perpendiculaire BC à la même ligne. Faites ces perpendiculaires égales chacune à la ligne AB. Enfin, tirez du point D au point C, une ligne droite DC. Le quadrilatere AC que ces lignes formeront avec la ligne AB, sera le quarré demandé.

Démonst. Les côtés AD & BC sont
N. 129. égaux [c], & paralleles (n), puisque [c] ils sont perpendiculaires chacun à la
N. 142. même ligne droite AB. Ainsi (n), le quadrilatere AC est un parallélogramme. Or, dans ce parallélogramme, l'angle
N. 21. A est droit (n), & les côtés de suite AB
N. 14. & AD sont égaux [c]. Donc (n) ce parallélogramme est un quarré; & par conséquent, C. Q. F. F.

Digitized by Google

Autre Conſt. † Du point A *, élevez (n) une perpendiculaire AD à la ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale à cette ligne AB. Des points D & B pris pour centres, & avec encore cette même ligne AB priſe pour rayon, décrivez deux arcs qui ſe coupent en un point C. Enfin, tirez du point C aux points D & B, des lignes droites CD & CB. Le quadrilatere AC que ces lignes formeront avec les précédentes AB & AD, ſera le quarré demandé. Fig. 98. N. 96.

Démonſt. Les côtés oppoſés du quadrilatere AC ſont égaux [c]. Ainſi (n), ce quadrilatere eſt un parallélogramme. Or, dans ce parallélogramme, l'angle A eſt droit (n), & les côtés de ſuite AB & AD ſont égaux [c]. Donc (n), ce parallélogramme eſt un quarré; & par conſéquent, C. Q. F. F. N. 127. N. 21. N. 146.

† Nous donnons ces deux conſtructions, parce que la premiere eſt la plus commode ſur le terrein, & la ſeconde ſur le papier.

Digitized by Google

PROPOSITION XLVII.

THÉORÊME.

171. *Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypotenuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.*

Fig. 99. DANS le triangle ABC * qui est rectangle en B, le quarré AD de l'hypotenuse AC est égal à la somme des quarrés AG & CH des deux autres côtés AB & BC.

Const. Du sommet de l'angle droit B,
N. 133. tirez (n) une parallele BL au côté AE. Du même point B, tirez aux points E & D, des lignes droites BE & BD. Enfin, tirez du point F au point C une ligne droite FC, & du point A au point I, une ligne droite AI.

Démonst. Dans les triangles ABE &
N. 63. AFC, l'angle BAE est (n) égal à l'angle FAC; puisque le premier est la somme de
N. 50. l'angle BAC, & de l'angle CAE qui (n) est un angle droit; & que le second est celle du même angle BAC, & de l'angle
N. 50. BAF qui (n) est aussi un angle droit:
N. 50. le côté AE est (n) égal au côté AC; puisque

puisque [H] l'un & l'autre sont côtés du même quarré AD : enfin, le côté AB est (n) égal au côté AF ; puisque [H] l'un & l'autre sont aussi côtés du même quarré AG. Donc (n) ces deux triangles sont égaux. Mais (n) le premier est la moitié de la partie AL du quarré AD ; puisque [c] il est sur la même base AE, & entre les mêmes paralleles AE & BL que cette partie, qui [c] est un parallélogramme : & (n) le second est aussi la moitié du quarré AG ; puisque [c] il est aussi sur la même base AF que ce même quarré, & entre les mêmes paralleles AF & CG. Donc (n) la partie AL est égale au quarré AG.

N. 50. N. 83. N. 159. N. 159. N. 67.

Or, on démontre de la même maniere, que les triangles CBD & CIA sont égaux ; que le premier est la moitié de l'autre partie LC du quarré AD ; & que le second est la moitié du quarré CH. Par conséquent (n), cette autre partie LC est égale au quarré CH. Donc, le quarré AD qui est la somme de ces deux parties AL & LC, est égal à la somme des quarrés AG & CH ; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 67.

COROLLAIRE.

172. Il suit de ce théorême, que *de*

plusieurs lignes droites qui sont tirées d'un même point à une même ligne droite; celles qui sont plus éloignées de la perpendiculaire, sont plus grandes que celles qui en sont moins éloignées.

Fig. 101 La ligne droite CF * qui est plus éloignée de la perpendiculaire CD que la ligne droite CE, est plus grande que cette derniere ligne.

Démonst. Dans le triangle FCD qui [H] est rectangle en D, le quarré de
N. 171. l'hypoténuse CF est (n) égal à la somme des quarrés des côtés CD & DF: & dans le triangle ECD qui [H] est aussi rectangle en D, le quarré de l'hypoténuse
N. 171. CE est (n) égal à la somme des quarrés des côtés CD & DE. Or, cette premiere somme est plus grande que la derniere; puisque [H] le côté DF est plus grand que le côté DE. Donc, le quarré de l'hypoténuse CF est plus grand que celui de l'hypoténuse CE; & par conséquent, la ligne CF est plus grande que la ligne CE. Donc, C. Q. F. D.

USAGE I.

173. *On se sert ordinairement de cette proposition, pour résoudre le problême suivant.*

Fig. 100. On donne les côtés A * & B de deux

Digitized by Google

quarrés ; & l'on propose de faire un quarré qui soit égal à la somme de ces deux quarrés.

Solution. *Tirez une ligne droite ED égale à l'une des lignes données, par exemple à la ligne A. Du point D, élevez* (n) *une perpendiculaire DC à cette* N. 96. *ligne ED. Faites cette perpendiculaire égale à l'autre ligne donnée B. Enfin, tirez du point C au point E une ligne droite CE, & cette ligne sera le côté du quarré demandé.*

Démonst. *Le triangle ECD est rectangle en D* [c]. *Ainsi* (n), *le quarré de* N. 171. *l'hypoténuse CE est égal à la somme des quarrés des côtés ED & DC. Mais* [c] *ces côtés sont égaux aux lignes A & B, chacun à chacune. Donc, le quarré de l'hypoténuse CE est égal à la somme des quarrés des lignes A & B ; & par conséquent, C. Q. F. F.*

COROLLAIRE.

174. Il suit de la solution du problême précédent : Premierement, que *pour faire un quarré qui soit double de celui de la ligne A* *, *il faut faire la perpendiculaire DC égale à la ligne ED.* Fig. 190. *Secondement, que pour faire un quarré qui soit triple de celui de la même ligne A,*

il faut commencer par trouver le côté d'un quarré double, & faire ensuite la perpendiculaire DC égale à ce côté. Et ainsi de suite.

USAGE II.

175. *On se sert aussi de cette proposition, pour résoudre cet autre problême.*

Fig. 102. La longueur d'une échelle AB * est de 10 pieds, & cette échelle étant posée droite contre un mur D, elle est de même hauteur que ce mur. Si en appuyant le haut de cette échelle contre ce mur, on éloigne son pied de celui de ce même mur, de six pieds; de combien s'en faudra-t-il que la hauteur de cette échelle ainsi inclinée, ne soit égale à celle de ce mur.

Solution. *La longueur AB de l'échelle, sa hauteur AC, & la distance BC de son pied B au pied C du mur, forment un triangle ACB qui est rectangle en C.*

N. 171. *Ainsi* (n), *le quarré de la distance BC, (qui* [H] *est de 36 pieds) avec celui de la hauteur AC (qui est inconnu), doit être égal au quarré de la longueur AB, (qui* [H] *est de 100 pieds.) Mais, puisque 36 pieds, avec le quarré qui est inconnu, doit faire 100 pieds, ce quarré inconnu doit être de 64 pieds; & par con-*

Digitized by Google

séquent, son côté AC est de huit pieds. Or, puisque la hauteur AC de l'échelle est de huit pieds, & que [H] *la hauteur EC du mur est de dix pieds, il s'en faut de deux pieds que la hauteur de l'échelle ne soit égale à celle du mur. Par conséquent, C. Q. F. F.*

PROPOSITION XLVIII.

THÉORÊME.

176. *Si dans un triangle le quarré de l'un des côtés est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, ce triangle sera rectangle.*

SI dans le triangle ABC *, le quarré du côté AC est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés BC & BA, ce triangle sera rectangle. Fig. 133

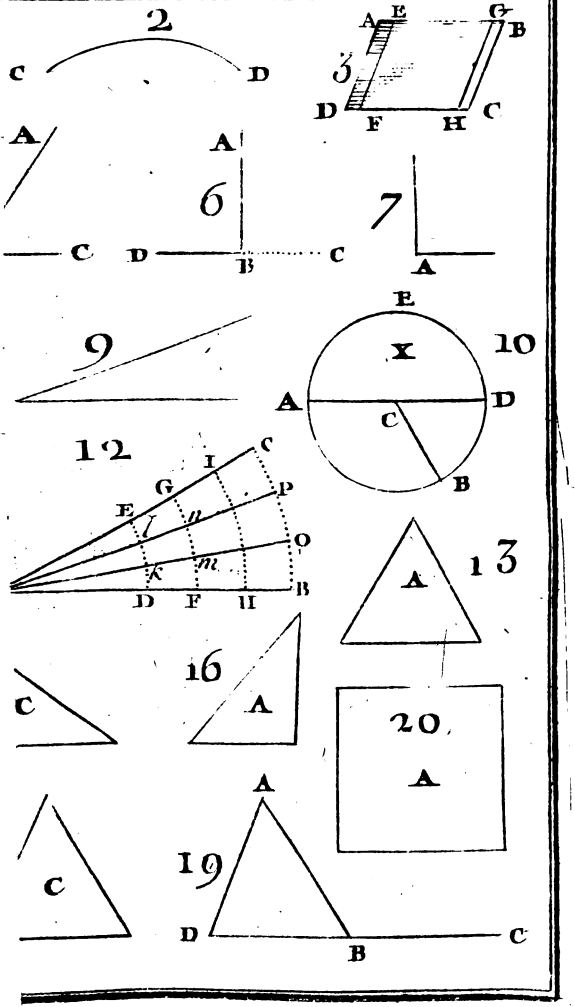
Const. De l'une quelconque des extrémités des côtés BA & BC, par exemple, de l'extrémité C du côté BC, élevez (n) une perpendiculaire CD à ce côté. N. 96. Faites cette perpendiculaire égale à l'autre côté BA. Enfin, tirez du point B au point D, une ligne droite BD.

Démonst. Le quarré du côté AC est

égal [H] à la somme des quarrés des côtés BC & BA ; & par conséquent, à celle des quarrés des côtés BC & CD, puisque [c] les côtés BA & CD sont
N. 171. égaux. Mais (n), le quarré du côté BD est aussi égal à la somme des quarrés de ces mêmes côtés BC & CD ; puisque [c] le triangle BCD est rectangle en C.
N. 62. Donc (n), le quarré du côté AC est égal à celui du côté BD ; & par conséquent, ces côtés sont égaux. Ainsi, les triangles ABC & BCD ont le côté BA égal au côté CD [c], le côté AC égal au côté BD [D], & le côté BC commun. Donc
N. 90. (n), l'angle ABC est égal à l'angle BCD ; & par conséquent, puisque l'angle BCD est droit [c], l'angle ABC l'est aussi. Donc, C. Q. F. D.

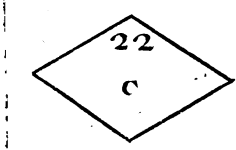
Fin du premier Livre.

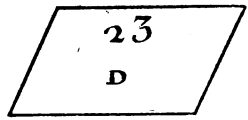
Digitized by Google

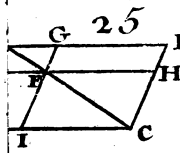


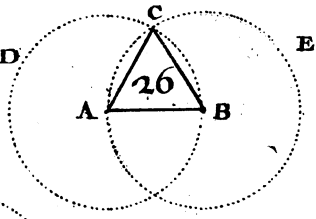
Digitized by Google

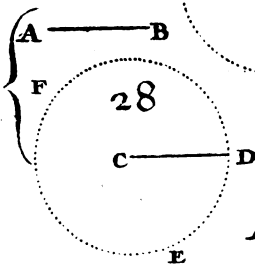
Digitized by Google

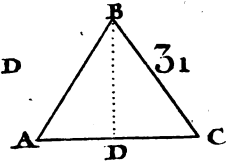


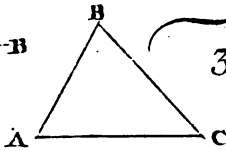


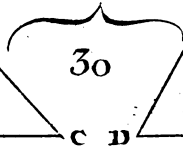


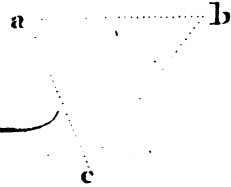


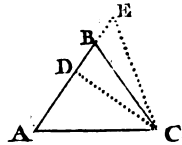






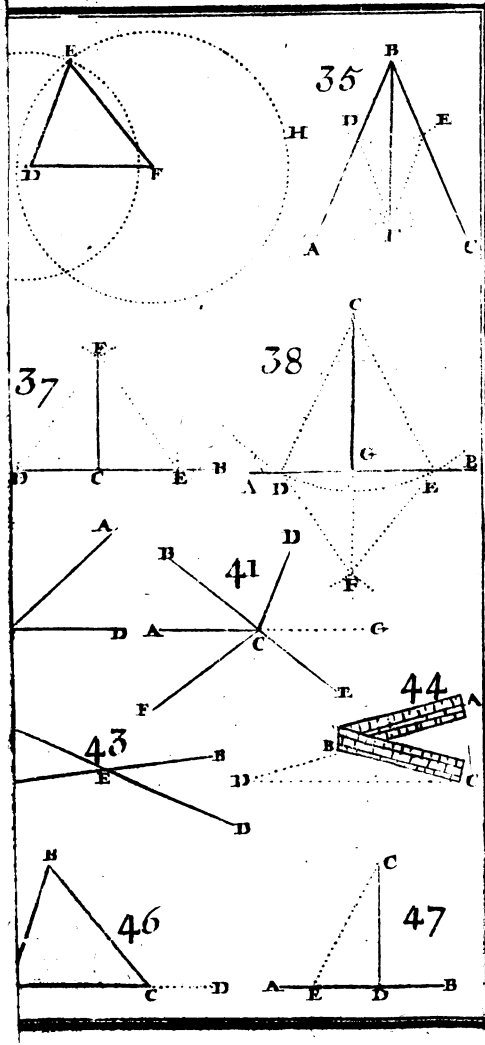






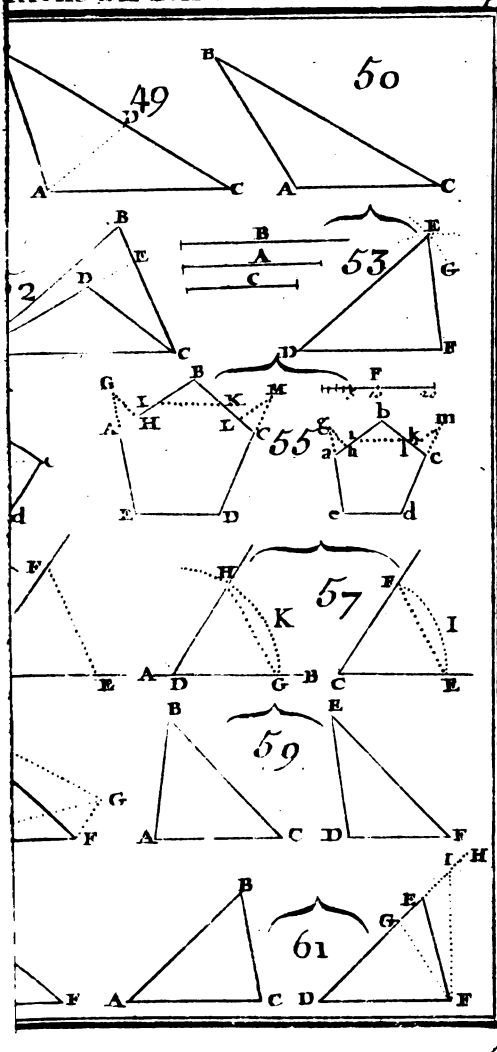
Digitized by Google

Digitized by Google



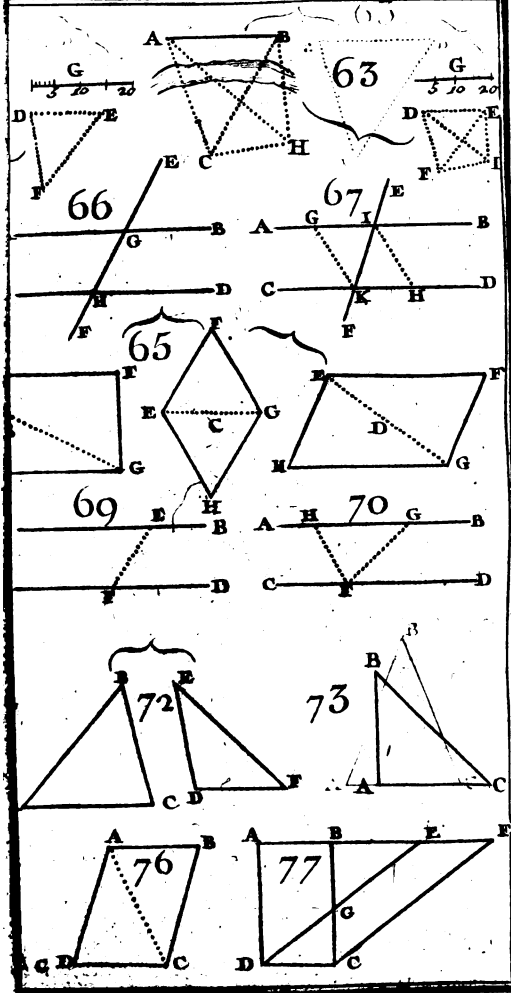
Digitized by Google

Digitized by Google



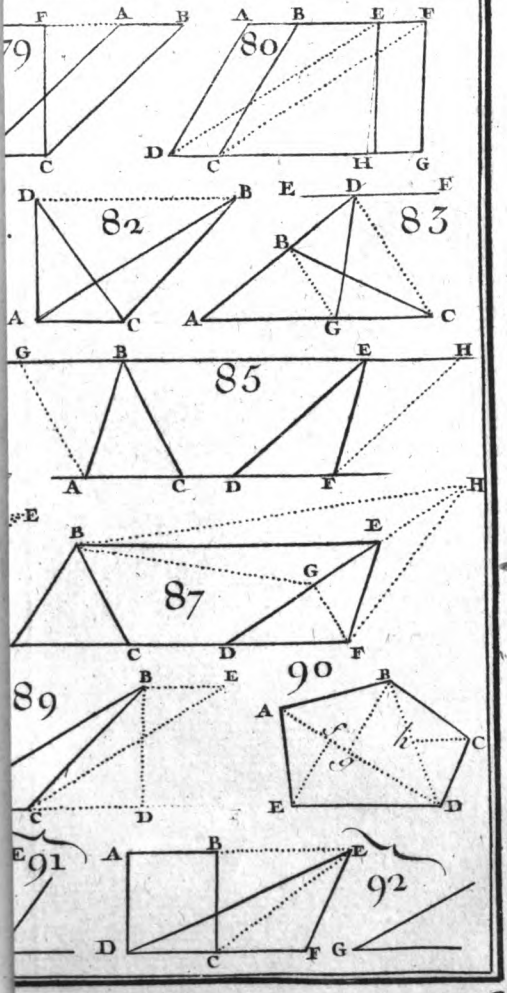
Digitized by Google

Digitized by Google



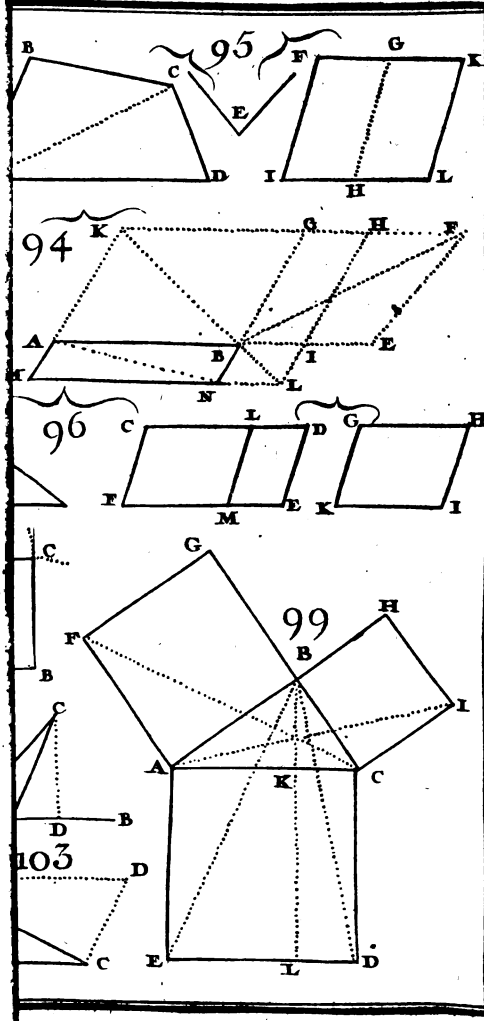
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

QUOIQUE ce Livre ne contienne que quatorze propositions, il est cependant très-considérable, puisque c'est par les principes qui y sont établis que l'on démontre les propriétés des lignes courbes, & que l'on résoud les problêmes qui en dépendent. Il est vrai qu'on peut le faire d'une maniere plus courte, par le moyen de l'algebre; mais les démonstrations que l'on tirera de ce second Livre seront toujours les plus satisfaisantes, parce qu'elles seront toujours les plus lumineuses. A l'égard de l'ordre, Euclide considere dans les premieres propositions les différens rectangles que l'on peut former des parties d'une

Digitized by Google

même ligne droite différemment divisée, & détermine de combien les uns different des autres. Il enseigne ensuite à diviser une ligne droite, suivant de certaines conditions; ce qui fait un problême dont l'usage est assez fréquent dans la Géométrie. Il démontre aussi de combien le quarré du côté opposé à l'angle obtus d'un triangle, surpasse la somme des quarrés des deux autres côtés; & de combien celui du côté opposé à un angle aigu, differe de cette somme. Enfin, il termine ce Livre par donner la maniere de faire un quarré qui soit égal à une figure rectiligne quelconque.

DÉFINITIONS.

I.

177. ON dit, *le rectangle fait de telles lignes*, ou seulement, *le rectangle de telles lignes*, pour exprimer la surface du parallélogramme rectangle, dont l'une de ces lignes est la longueur, & l'autre la largeur.

Par exemple, on dit, le rectangle des
Fig. 1. lignes AB * & BC, *pour exprimer la surface du parallélogramme rectangle*

AC

AC dont la ligne AB est la longueur, & la ligne BC la largeur.

178. On dit de même, *le quarré fait sur telle ligne*, ou seulement, *le quarré de telle ligne*, pour exprimer la surface du quarré dont cette ligne est le côté.

Par exemple, on dit, le quarré de la ligne AB *, *pour exprimer la surface du quarré AC dont cette ligne est le côté.* Fig. 1.

II.

179. On appelle *gnomon*, ce qui reste d'un parallélogramme, après en avoir retranché l'un quelconque des deux parallélogrammes dont les diagonales sont des parties de la diagonale du premier.

*La figure rectiligne ABCDEF *, est un* gnomon. Fig. 2.

AVERTISSEMENT.

180. Premierement, *lorsque deux lignes droites AB * & CD seront égales, nous prendrons indifféremment la ligne CD au lieu de la ligne AB, & la ligne AB au lieu de la ligne CD, conformément à ce qui a été demandé au* n°. 61. Fig. 4.

Secondement, *lorsque nous dirons d'un quadrilatere, qu'il* est rectangle [c], *cela signifiera*; 1°. *que ses côtés opposés seront paralleles* [c]; *& que par conséquent*,

il sera un parallélogramme : 2°. qu'il aura un angle droit [c] *; & que par conséquent, il sera rectangle* (n).
N. 145.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

181. *Si de deux lignes droites, l'une est divisée en plusieurs parties, le rectangle de ces deux lignes sera égal à la somme des rectangles faits de celle de ces lignes qui n'est point divisée, & de chaque partie de celle qui est divisée.*

Fig. 1. LE rectangle des lignes droites AB * & AD (dont l'une AB est divisée, par exemple en trois parties, AE, EF & FB) est égal à la somme des rectangles faits, l'un de la ligne AD & de la partie AE; l'autre, de la même ligne AD & de la partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AD & de la partie FB.

Const. Faites un rectangle AC dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD l'autre. Par chaque point de division E & F, tirez (n) des paralleles EG & FH à la ligne AD.
N. 133.

Démonst. Les lignes EG & FH sont (n) égales chacune à la ligne AD. Ainsi, puisque les quadrilateres AG, EH & FC sont rectangles [c], ils sont les rectangles, l'un de la ligne AD & de la partie AE; l'autre, de la même ligne AD & de la partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AD & de la partie FB. Or, ces trois rectangles sont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [c] est le rectangle des lignes AB & AD. Donc (n), le rectangle AC des lignes AB & AD est égal à la somme des rectangles faits de la ligne AD, & de chaque partie AE, EF & FB de la ligne AB; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 141. N. 72.

Digitized by Google

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

182. *Si une ligne droite est divisée en plusieurs parties ; le quarré de cette ligne sera égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne, & de chacune de ces parties.*

Fig. 6. LE quarré de la ligne AB * (qui est divisée, par exemple en trois parties AE, EF & FB) est égal à la somme des rectangles faits, l'un de cette ligne AB & de sa partie AE ; l'autre, de cette même ligne AB & de sa partie EF ; & le dernier, encore de cette même ligne AB & de sa partie FB.

N. 170. *Const.* Décrivez (n) un quarré AC sur la ligne AB. Par chaque point de
N. 133. division E & F, tirez (n) des paralleles EG & FH à la ligne AD.

Démonst. Les lignes AD, EG & FH
N. 62. sont (n) égales chacune à la ligne AB ;
N. 143. puisque (n) les lignes EG & FH le sont chacune à la ligne AD, qui [c] est égale à cette ligne AB. Ainsi, puisque les quadrilateres AG, EH & FC sont

Digitized by Google

rectangles [c], ils sont les rectangles, l'un de la ligne AB & de sa partie AE; l'autre, de la même ligne AB & de sa partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AB & de sa partie FB. Or, ces trois rectangles sont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [c] est le quarré de la ligne AB. Donc (n), le N. 72.
quarré AC de la ligne AB est égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne AB, & de chacune de ses parties AE, EF & FB; & par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Cette proposition ne differe de la premiere, qu'en ce que dans la premiere, les lignes AB & AD sont inégales; & que dans celle-ci, elles sont égales. Ainsi, elle n'est qu'un corollaire de cette premiere.

Digitized by Google

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

183. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de l'une quelconque de ces mêmes parties, sera égal au rectangle de cette ligne & de cette derniere partie.*

Fig. 7. SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AE & EB) le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de l'une de ces parties, (par exemple, de la partie AE) sera égal au rectangle de la ligne AB & de cette même partie AE.

Const. Faites un rectangle AC dont la ligne AB soit l'un des côtés, & dont l'autre côté soit une ligne AD, égale à la partie AE. Par le point de division E,
N. 133. tirez (n) une parallele EF à la ligne AD.

Démonst. Premierement, le quadri-
N. 146. latere AF est rectangle [c]. Ainsi (n), il est le quarré de la partie AE, puisque son côté AD est égal à cette partie [c].

Digitized by Google

Secondement, le quadrilatere EC est aussi rectangle [c]. Ainsi, il est le rectangle des parties AE & EB, puisque (n) son côté EF est égal à la partie AE. N. 50.

Or, ce quarré & ce rectangle sont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [c] est le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE. Donc (n), le rectangle EC des parties AE & EB, avec le quarré AF de la partie AE, est égal au rectangle AC de la ligne AB & de cette partie AE; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 72.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

184. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, les quarrés de ces deux parties; avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, seront égaux au quarré de cette ligne.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AE & EB) les quarrés de ces deux parties AE & EB, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, seront égaux au quarré de cette ligne AB. Fig. 6.

Digitized by Google

N. 170. *Const.* Décrivez (n) un quarré DB sur la ligne AB. Tirez la diagonale AC. Par
N. 233. le point de division E, tirez (n) une parallele EF à la ligne AD. Enfin, par le point G auquel cette parallele rencontre
N. 233. la diagonale AC, tirez (n) une parallele HI à la ligne AB.

Démonst. Premierement, l'angle ex-
N. 130. térieur EGA est (n) égal à son opposé intérieur BCA; puisque [c] les lignes
N. 86. EF & BC sont paralleles. Or (n), l'angle BAC est aussi égal au même angle BCA,
N. 50. puisque (n) les côtés BC & AB du trian-
N. 62. gle ABC sont égaux. Donc (n), l'angle EGA est égal à l'angle BAC; & par con-
N. 88. séquent (n), les côtés AE & EG du triangle AEG sont égaux. Mais, ces côtés AE & EG sont aussi ceux du quadrilatere HE. Donc, puisque ce quadrila-
N. 146. tere est rectangle [c], il est quarré (n); & par conséquent, il est le quarré de la partie AE, puisque cette partie est un de ses côtés.

Secondement, l'angle extérieur IGC
N. 130. est égal (n) à son opposé intérieur BAC; puisque [c] les lignes HI & AB sont paralleles. Or [D], l'angle BCA est aussi
N. 62. égal au même angle BAC. Donc (n), les angles IGC & BCA sont égaux;
N. 88. & par conséquent (n), les côtés IC &

Digitized by Google

GI du triangle GIC le sont aussi. Mais, ces côtés IC & GI sont aussi ceux du quadrilatere FI. Donc, puisque ce quadrilatere est rectangle [c], il est quarré (n); & par conséquent, il est le quarré N. 146.
de la partie EB, puisque (n) cette partie N. 143.
est égale au côté GI.

Troisiemement, le côté EG est égal (n) à la partie AE. Ainsi, puisque le quadrilatere GB est rectangle [c], il est le rectangle des parties AE & EB. N. 50.

Quatriemement, enfin, le côté HG est égal (n) à la partie AE, & le côté N. 50.
GF l'est (n) à la partie EB; puisque la N. 62.
même ligne GI est égale, & à ce côté (n), & à cette partie (n). Ainsi, puisque N. 50.
le quadrilatere DG est aussi rectangle N. 143.
[c], il est encore un rectangle des parties AE & EB.

Or, ces deux quarrés HE & FI, avec ces deux rectangles GB & DG, sont toutes les parties du quadrilatere DB, qui [c] est le quarré de la ligne AB. Donc (n), les quarrés HE & FI des N. 72.
parties AE & EB, avec les deux rectangles GB & DG faits chacun de ces mêmes parties, sont égaux au quarré DB de la ligne AB; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

185. Il suit de ce théorême, que *le quarré d'une ligne est quadruple de celui de la moitié de cette même ligne.*

Fig. 9. Le quarré de la ligne AB * est quadruple de celui de la moitié de cette ligne.

N. 94. *Const.* Divisez (n) la ligne AB en deux parties égales AC & CB.

Démonst. Le quarré de la partie AC, celui de la partie CB, & le rectangle de ces deux parties sont trois choses égales; puisque [H] ces deux parties sont égales. Ainsi, deux quarrés des parties AC & CB, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, sont égaux à quatre quarrés de la partie AC. Mais
N. 184. (n), ces deux mêmes quarrés, avec ces deux mêmes rectangles, sont aussi égaux
N. 62. au quarré de la ligne AB. Donc (n), le quarré de la ligne AB est égal à quatre quarrés de la partie AC; & par conséquent, C. Q F. D.

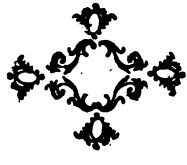
COROLLAIRE II.

186. Il suit aussi de la démonstration de ce même théorême, qu'*un parallélogramme qui a un angle commun avec un quarré, & dont la diagonale est une partie de celle de ce quarré, est un quarré.*

Digitized by Google

Le parallélogramme, par exemple HE *, qui a l'angle A commun avec le quarré DB, & dont la diagonale AG est une partie de la diagonale AC de ce même quarré, est un quarré. Fig. 8.

Démonst. Par quelque point de la diagonale AC que l'on tire des paralleles EF & HI, pour former avec les côtés du quarré DB un parallélogramme tel que le proposé HE, l'angle EGA sera toujours (n) égal à l'angle BCA; & par N. 130. conséquent (n) à l'angle BAC, puisque N. 86. [H] les côtés BA & BC seront toujours égaux. Ainsi (n), le parallélogramme HE N. 82. aura toujours deux côtés de suite AE & EG égaux: d'ailleurs, il sera toujours rectangle (n); puisque [H] il aura tou- N. 50. jours un angle commun avec le quarré DB. Donc (n), il sera toujours un quar- N. 146. ré; & par conséquent, C. Q. F. D.



Digitized by Google

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

187. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de leur différence, sera égal au quarré de la moitié de cette ligne.*

Fig. 20. SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AE & EB), le rectangle de ces deux parties AE & EB, avec le quarré de la moitié de leur différence, sera égal au quarré de la moitié de cette ligne AB.

N. 94. *Const.* Divisez (n) la ligne AB en deux
N. 170. parties égales AK & KB. Décrivez (n) un quarré KC sur la partie KB. Tirez la diagonale DB. Par le point de division E,
N. 133. tirez (n) une parallele EF à la ligne KD. Par le point G, auquel cette parallele ren-
N. 133. contre la diagonale DB, tirez (n) une parallele HL à la ligne AB. Enfin, par
N. 133. le point A, tirez (n) une parallele AH à la ligne KD.

Démonst. Premierement, les quadri-
N. 153. lateres AI & KL sont égaux (n); puis-

Digitized by Google

que [c] ils sont des parallélogrammes sur des bases égales AK & KB, & entre mêmes paralleles AB & HL. Mais (n), N. 63.
les quadrilateres EC & KL sont aussi égaux; puisqu'ils ont une partie commune EL, & que l'autre partie GC du premier & l'autre partie KG du second, qui sont les complémens du parallélogramme KC, sont égales (n). Donc (n), N. 164. N. 62.
les quadrilateres AI & EC sont égaux.

Secondement, le quadrilatere EL est un quarré (n). Ainsi (n), le côté EG est N. 186. N. 50.
égal à la partie EB; & par conséquent, puisque le quadrilatere AG est rectangle [c], il est le rectangle des parties AE & EB.

Troisiemement, enfin, le quadrilatere IF est aussi un quarré (n). Ainsi, il est le N. 186.
quarré de la demi différence KE † des parties AE & EB; puisque (n) son côté N. 141.
IG est égal à cette demi-différence.

† Lorsqu'une ligne droite quelconque AB est divisée Fig. 20.
en deux parties inégales AE & EB, la partie KE qui est comprise entre son milieu K & son point de division E, est toujours la moitié de la différence de ces parties inégales. Car, si sur la plus grande partie AE on prend une partie AM égale à la plus petite EB, le reste ME est la différence de ces deux parties AE & EB. Or, les parties AK & KB sont égales, puisque [H] le point K est le milieu de la ligne AB; & les parties AM & EB sont aussi égales [c]. Donc la partie MK est égale à la partie KE; & par conséquent cette partie KE est la moitié de la différence ME.

Digitized by Google

Or, le quadrilatere EC (ou [D] son égal AI) le quadrilatere KG, & le quarré IF, sont toutes les parties du quadrilatere KC, qui [E] est le quarré de la
N. 72. moitié de la ligne AB. Donc (n), ces deux quadrilateres AI & KG (c'est-à-dire, le rectangle AG des parties AE & EB) avec le quarré IF de la demi-différence de ces parties, sont égaux au quarré KC de la moitié de la ligne AB; & par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

188. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Fig. 11. Un rectangle AC * a 112 pieds de surface, & 44 pieds de circonférence. Combien sa longueur AB, & sa largeur BC, contiennent-elles de pieds, chacune?

SOLUTION. *Puisque* [H] *le rectangle AC a 44 pieds de circonference, sa longueur AB & sa largeur BC ont ensemble 22 pieds. Ainsi, l'on suppose une ligne droite ABE de 22 pieds, dont la moitié FE n'est par conséquent que de 11 pieds; après quoi, l'on raisonne de cette maniere:*

La ligne ABE est divisée en deux par-

Digitized by Google

ties AB & BE, & le point F est son milieu. Ainsi (n), *le rectangle AC de ces* N. 187.
deux parties (qui [H] *est de 112 pieds), avec le quarré de leur demi-différence FB (qui est inconnu) doit être égal au quarré de la ligne FE (lequel* [H] *est de 121 pieds). Donc, ce quarré qui étoit inconnu est de neuf pieds; & par conséquent, la demi-différence FB est de trois pieds. Or, puisque la ligne AF est de 11 pieds, & la demi-différence FB de trois, le côté AB est de 14 pieds, & le côté BC de huit; & par conséquent, C. Q. F. F.*

SCHOLIE.

189. *La surface d'un rectangle considérée comme une quantité discrete, n'est autre chose* (n) *que le produit des deux* N. 149.
nombres qui expriment les valeurs des côtés de ce rectangle. Ainsi, l'on auroit pu énoncer de cette maniere le problême précédent.

Le produit de deux nombres est 112; & leur somme 22; quels sont ces deux nombres?

Et pour le résoudre, on auroit dit, par le même principe que dans l'usage précédent: le produit 112 des deux nombres demandés, avec le quarré de leur demi-

Digitized by Google

différence, doit être égal au quarré 121 *de la moitié de leur somme. Donc, le quarré de leur demi-différence est* 9; *& par conséquent, leur demi-différence est* 3. *Or, puisque la moitié de la somme des deux nombres demandés est* 11, *& que leur demi-différence est* 3, *le plus grand de ces deux nombres est* 14, *& le plus petit est* 8.

D'où l'on voit que l'on peut résoudre par cette proposition, toutes les questions numériques dans lesquelles il ne s'agit que de trouver deux nombres dont on connoît le produit & la somme.

PROPOSITION

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

190. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le rectangle de cette ligne & de l'une quelconque de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de l'autre partie, sera égal au quarré d'une ligne qui seroit composée de cette premiere partie, & de la moitié de cette autre partie.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AE & EB) le rectangle de cette ligne AB, & de l'une de ces parties (par exemple de la partie EB) avec le quarré de la moitié de l'autre partie AE, sera égal au quarré d'une ligne qui seroit composée de cette premiere partie EB, & de la moitié de cette autre partie AE. Fig. 12.

Const. Divisez (n) la partie AE en deux parties égales AK & KE. Décrivez (n) un quarré KC sur la ligne KB. Tirez la diagonale DB. Par le point de division E, tirez (n) une parallele EF à la ligne KD. Par le point G, auquel cette N. 54. N. 170. N. 133.

Digitized by Google

parallele rencontre la diagonale DB,
N. 133. tirez (n) une parallele HL à la ligne AB.
N. 133. Enfin, par le point A, tirez (n) une parallele AH à la ligne KD

Démonst. Premierement, les quadri-
N. 153. lateres AI & KG sont égaux (n); puisque [c] ils sont des parallélogrammes sur des bases égales AK & KE, & entre mêmes paralleles AB & HL. Mais, les quadri-
N. 164. lateres GC & KG sont aussi égaux (n); puisqu'ils sont les complémens du paral-
N. 62. lélogramme KC. Donc (n), les quadrilateres AI & GC sont égaux.

Secondement, le quadrilatere EL est
N. 186. un quarré (n). Ainsi (n), son côté BL est
N. 50. égal à la partie EB; & par conséquent, puisque le quadrilatere AL est rectangle [e], il est le rectangle de la ligne AB & de la partie EB.

Troisiemement, enfin, le quadrilatere
N. 186. IF est aussi un quarré (n). Ainsi, il est le quarré de la moitié KE de la partie AE;
N. 143. puisque (n) son côté IG est égal à cette moitié.

Or, le quadrilatere GC (ou [D] son égal AI) le quadrilatere KL, & le quarré IF, sont toutes les parties du quadrilatere KC, qui [c] est le quarré de la ligne
N. 72. KB. Donc (n), les deux quadrilateres

AI & KL (c'est-à-dire, le rectangle AL de la ligne AB & de la partie EB) avec le quarré IF de la moitié KE de l'autre partie AE, sont égaux au quarré KC de la ligne KB, laquelle est composée de la partie EB, & de la moitié KE de l'autre partie AE; & par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

191. *La ligne KE * est la moitié de la différence des lignes AB & EB. Ainsi, la ligne KB est la moitié de leur somme; & par conséquent, ce théorême & le précédent ne sont qu'une même proposition, que l'on auroit pu énoncer de cette maniere:* le rectangle de deux lignes droites quelconques, avec le quarré de la moitié de leur différence, est égal au quarré de la moitié de leur somme. Fig. 12

USAGE.

192. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce Problême:*

Un rectangle AC * a 216 pieds de surface, & sa longueur AB surpasse de six pieds sa largeur BC. Combien cette longueur & cette largeur contiennent-elles de pieds chacune? Fig. 13

Digitized by Google

SOLUTION. *Puisque* [H] *le côté AB surpasse de six pieds le côté BC, on prend sur ce côté AB une partie AE de six pieds, & le reste EB est égal au côté BC; après quoi, l'on raisonne de cette maniere:*

La ligne AB est divisée en deux parties AE & EB. Ainsi (n), *le rectangle AC de cette ligne & de la partie EB,* (*lequel* [H] *est de* 216 *pieds*) *avec le quarré de la moitié FE de la partie AE,* (*lequel* [C] *est de neuf pieds*) *doit être égal au quarré de la ligne FB. Donc, le quarré de la ligne FB est de* 225 *pieds; & par conséquent, cette ligne est de* 15 *pieds. Or, puisque la ligne FB est de* 15 *pieds, & que* [C] *la ligne AF est de trois pieds, le côté AB est de* 18 *pieds, & le côté BC de* 12; *& par conséquent, C. Q. F. F.*

P. 190.

SCHOLIE.

193. *Par la même raison que dans la dernière scholie* (n), *on auroit pu énoncer de cette maniere le problême précédent.*

P. 189.

Le produit de deux nombres est 216, & leur différence six; quels sont ces deux nombres.

Et pour le résoudre, on auroit dit, par le même principe que dans l'usage précé-

Digitized by Google

dent : le produit 216 des deux nombres demandés, avec le quarré neuf de leur demi-différence, doit être égal au quarré de la moitié de leur somme. Donc, ce quarré est 225 ; & par conséquent, cette demi-somme est 15. Or, puisque la moitié de la somme des deux nombres demandés est 15, & que leur demi-différence est trois, le plus grand de ces deux nombres est 18, & le plus petit 12.

D'où l'on voit que l'on peut résoudre par cette proposition, toutes les questions numériques dans lesquelles il ne s'agit que de trouver deux nombres dont on connoît le produit & la différence.

Digitized by Google

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

194. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le quarré de l'une quelconque de ces deux parties, avec deux rectangles faits chacun de cette ligne & de son autre partie, sera égal aux quarrés de cette même ligne & de cette autre partie.*

Fig. 84. SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AE & EB) le quarré de l'une de ces parties, (par exemple, de la partie EB) avec deux rectangles faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie AE, sera égal aux quarrés de cette même ligne AB & de cette autre partie AE.

N. 170. *Const.* Décrivez (n) un quarré AC sur la ligne AB. Tirez la diagonale DB. Par
N. 133. le point de division E, tirez (n) une parallele EF à la ligne AD. Prolongez les lignes AD & EF, jusqu'à ce que leurs prolongemens AK & EL soient égaux chacun à la partie AE. Tirez du point K au point L, une ligne droite KL. Enfin,

Digitized by Google

par le point G, auquel la parallele LF rencontre la diagonale DB, tirez (n) N. 133.
une parallele HI à la ligne AB.

Démonst. Premierement, le quadrilatere EI est (n) le quarré de la partie N. 186.
EB.

Secondement, le côté HI est (n) égal N. 145.
à la ligne AB : & le côté HD l'est (n) à N. 62.
la partie AE; puisque la même ligne HG est égale, & à ce coté (n), & à cette N. 50.
partie (n). Ainsi, puisque le quadrilatere N. 143.
HC est rectangle [c], il est le rectangle de la ligne AB & de la partie AE.

Troisiemement, enfin, la partie EL est [c] égale à la partie AE; & la partie GE l'est (n) à la partie EB. Ainsi, le N. 50.
côté GL est égal à la ligne AB; & par conséquent, puisque (n) le côté KL est N. 50.
aussi égal à la partie AE, & que le quadrilatere KG est aussi rectangle [c], ce quadrilatere KG est encore un rectangle de la ligne AB & de la partie AE.

Or, ce quarré EI, & ces deux rectangles HC & KG, sont toutes les parties de la figure KDCBEL, qui [c] est la somme du quarré AC de la ligne AB, & du quarré AL de la partie AE. Donc (n), le quarré EI de la partie EB, avec N. 72.
deux rectangles HC & KG faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie AE,

Digitized by Google

est égal aux quarrés AC & AL de cette même ligne AB & de cette autre partie AE ; & par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

195. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Fig. 25. Un rectangle DB * a 432 pieds de surface, & 30 pieds de diagonale. Combien sa longueur AB & sa largeur BC contiennent-elles de pieds, chacune ?

SOLUTION. On tire la diagonale AC. On suppose ensuite le plus grand côté AB divisé en deux parties, dont l'une EB soit égale au plus petit côté BC ; après quoi, l'on raisonne de cette maniere :

La ligne AB est divisée en deux par-
N. 194. *ties AE & EB. Ainsi* (n), *le quarré de la partie AE (qui est inconnu) avec deux rectangles DB & DB faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie EB (lesquels pris ensemble, valent* [H] *864 pieds) doit être égal aux quarrés de cette ligne AB & de cette autre partie EB ; c'est-à-dire,* [c], *aux quarrés des*
N. 171. *côtés AB & BC ; & par conséquent* (n), *au quarré de l'hypoténuse AC, puisque* [H] *le triangle ABC est rectangle en B.*

Mais

Mais [H], *ce quarré est de* 900 *pieds. Donc, celui de la partie AE qui étoit inconnu, n'est que de* 36 *pieds; & par conséquent, cette partie est de six pieds. Or, puisque la partie AE est de six pieds, la longueur AB du rectangle DB, qui a* 432 *pieds de surface, surpasse de six pieds sa largeur BC. Donc* (n), *cette longueur AB est de* 24 *pieds, & cette largeur BC de* 18; *& par conséquent, C. Q. F. F.* N. 192.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

196. *Si une ligne droite est divisée en deux parties; quatre rectangles faits chacun de ces deux parties, avec le quarré de la différence de ces deux mêmes parties, seront égaux au quarré de cette ligne.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AC & CB) quatre rectangles de ces deux parties, avec le quarré de la différence de ces deux mêmes parties, seront égaux au quarré de cette ligne AB. Fig. 16.

Digitized by Google

Démonst. La ligne AB est divisée en
N. 187. deux parties AC & CB. Ainsi (n), le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de leur différence, est égal au quarré de la moitié de cette
N. 67. ligne ; & par conséquent (n), quatre rectangles de ces deux parties, avec quatre quarrés de cette demi-différence,
N. 185. (c'est-à-dire (n), avec le quarré de la différence entiere) sont égaux à quatre quarrés de la moitié de cette ligne, c'est-
N. 185. à-dire (n), au quarré de cette ligne entiere. Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

197. *Cette proposition n'est qu'un corollaire de la cinquieme.*

Digitized by Google

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

198. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, les quarrés de ces deux parties seront doubles du quarré de la moitié de cette ligne, & du quarré de la moitié de la différence de ces mêmes parties.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AC & CB) les quarrés de ces parties AC & CB seront doubles du quarré de la moitié de cette ligne AB, & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes parties AC & CB. Fig. 17.

Const. Divisez (n) la ligne AB en deux parties égales AD & DB. Du point D, élevez (n) une perpendiculaire DE à cette ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale à l'une des parties AD & DB. Tirez du point E aux points A & B, des lignes droites EA & EB. Par le point de division C, tirez (n) une parallele CF à la ligne DE. Par le point F auquel cette parallele rencontre la ligne EB, tirez (n) une parallele GF à la ligne AB. Enfin, N. 94. N. 96. N. 133. N. 133.

Digitized by Google

tirez du même point F au point A, une ligne droite FA.

Démonst. Premierement, l'angle ex-
N. 130. térieur CFB est (n) égal à son opposé intérieur DEB; puisque [c] les lignes
N. 86. CF & DE sont paralleles. Or (n), l'angle B est aussi égal à l'angle DEB; puisque les côtés DE & DB du triangle EDB
N. 62. sont égaux [c]. Donc (n), l'angle CFB est égal à l'angle B; & par conséquent
N. 83. (n), les côtés CB & CF du triangle FCB sont égaux.

Secondement, le triangle ADE est
N. 171. [c] rectangle & isoscele. Ainsi (n), le quarré du côté AE est double de celui de la moitié AD de la ligne AB.

Troisiemement, le triangle EGF est
N. 130. aussi rectangle & isoscele; puisque (n) les lignes GF & AB étant paralleles [c], les angles extérieurs EGF & GFE sont égaux, l'un à son opposé intérieur EDB qui est droit [c], & l'autre à son opposé intérieur B qui [D] est égal à l'angle
N. 171. DEB. Ainsi (n), le quarré du côté EF est aussi double du quarré du côté GF; & par conséquent, de celui de la demi-
N. 143. différence DC, puisque (n) cette demi-différence est égale à ce dernier côté. Cela posé:

Les quarrés des parties AC & CB,

Digitized by Google

(c'eſt-à-dire, des côtés AC & CF, puiſque [D] CB eſt égal à CF) ſont égaux (n) au quarré de l'hypoténuſe AF; puiſ- N. 171.
que [C] le triangle ACF eſt rectangle en C. Or (n), le quarré de cette hypoté- N. 171.
nuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des côtés AE & EF; puiſque les angles DEA & DEB étant chacun la moitié d'un angle droit (n), le triangle AEF eſt auſſi N. 138.
rectangle en E: & [D] les quarrés de ces côtés AE & EF ſont doubles, l'un du quarré de la moitié AD de la ligne AB, & l'autre du quarré de la demi-différence DC des parties AC & CB. Donc (n), N. 62.
les quarrés des parties AC & CB ſont doubles du quarré de la moitié AD de la ligne AB, & de celui de la demi-différence DC des parties AC & CB; & par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

199. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.*

Un rectangle DB * a 70 pieds de cir- Fig. 18.
conférence, & 25 pieds de diagonale. Combien ſa longueur AB & ſa largeur BC, contiennent-elles de pieds, chacune?

SOLUTION. Puiſque [H] *le rectangle DB a* 70 *pieds de circonférence, ſa lon-*

gueur AB & sa largeur BC, ont ensemble 35 pieds. Ainsi, l'on suppose une ligne droite ABE de 35 pieds, dont la moitié AF n'est par conséquent que de 17 $\frac{1}{2}$ pieds; & après avoir tiré la diagonale AC, on raisonne de cette maniere :

La ligne AE est divisée en deux parties AB & BE, & le point F est son mi-
N. 198. *lieu. Ainsi* (n), *le quarré de la ligne AF, (lequel* [H] *est de 306 $\frac{1}{4}$ pieds) avec celui de la demi-différence FB (qui est inconnu) doit être égal à la moitié de la somme des quarrés des parties AB & BE; c'est-à-dire* [C], *à la moitié de la somme des quarrés des côtés AB & BC;*
N. 171. *& par conséquent* (n), *à la moitié du quarré de la diagonale AC, puisque* [H] *le triangle ABC est rectangle en B. Mais* [H], *la moitié de ce quarré est de 312 $\frac{1}{2}$ pieds. Donc, le quarré qui étoit inconnu est de 6 $\frac{1}{4}$ pieds; & par conséquent, la demi-différence FB est de 2 $\frac{1}{2}$ pieds. Or, puisque la ligne AF est de 17 $\frac{1}{2}$ pieds, & la demi-différence FB de 2 $\frac{1}{2}$ pieds, le côté AB est de 20 pieds, & le côté BC de 15; & par conséquent, C. Q. F. F.*

Digitized by Google

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

200. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le quarré de cette ligne, avec celui de l'une de ces parties, sera double du quarré de la moitié de l'autre partie, & du quarré d'une ligne qui seroit composée de cette premiere partie & de la moitié de cette autre partie.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AC & CB) le quarré de cette ligne AB, avec celui de l'une de ces parties, (par exemple, de la partie CB) sera double du quarré de la moitié de l'autre partie AC, & du quarré d'une ligne qui seroit composée de cette premiere partie CB & de la moitié de cette autre partie AC. Fig. 19.

Const. Divisez (n) la partie AC en deux parties égales AD & DC. Du point D, élevez (n) une perpendiculaire DE à la ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale à l'une des parties AD & DC. Par le point E, tirez (n) une parallele indé- N. 94. N. 96. N. 135.

Digitized by Google

finie EF à la ligne AB. Du même point E, tirez par le point de division C, une ligne droite indéfinie ECG. Par le point
N. 133. B, tirez (n) une ligne FBG parallele à la perpendiculaire DE, & qui rencontre les lignes EF & EG, l'une en un point F, & l'autre en un point G. Enfin, tirez du point A aux points E & G, des lignes droites AE & AG.

Démonst. Premierement, l'angle EGF
N. 130. est (n) égal à son alterne DEG, puisque les lignes FG & DE sont paralleles [c].
N. 86. Or, l'angle DEG est (n) égal à l'angle DCE, puisque les côtés DC & DE du triangle EDC sont égaux [c]; & l'angle
N. 102. DCE est (n) égal à l'angle BCG qui lui
N. 62. est opposé au sommet. Donc (n), les angles EGF & BCG sont égaux; & par
N. 88. conséquent (n), les côtés CB & BG du triangle CBG le sont aussi.

Secondement, le triangle ADE est [c]
N. 171. rectangle & isoscele. Ainsi (n), le quarré du côté AE est double de celui de la moitié AD de la partie AC.

Troisiemement, le triangle EFG est
N. 130. aussi rectangle & isoscele; puisque (n) les lignes EF & AB étant paralleles [c], les angles intérieurs EFG & FEG sont égaux, l'un à son opposé extérieur ABG
N. 130. qui est droit (n); & l'autre à son opposé

Digitized by Google

extérieur BCG qui [D] est égal à l'angle EGF. Ainsi (n), le quarré du côté EG est aussi double du quarré du côté EF; & par conséquent, de celui de la ligne DB, puisque (n) cette ligne est égale à ce dernier côté. Cela posé : N. 17K N. 143.

Le quarré de la ligne AB, avec celui de la partie CB (c'est-à-dire, les quarrés des côtés AB & BG, puisque [D] les lignes CB & BG sont égales) est égal (n) au quarré de l'hypoténuse AG; puisque (n) le triangle ABG est rectangle en B. Or (n), le quarré de cette hypoténuse est égal à la somme des quarrés des côtés AE & EG; puisque les angles DEA & DEC étant chacun la moitié d'un angle droit (n), le triangle AEG est aussi rectangle en E: & [D] les quarrés des côtés AE & EG sont doubles, l'un du quarré de la moitié AD de la partie AC, & l'autre du quarré de la ligne DB. Donc (n), le quarré de la ligne AB, avec celui de la partie CB, est double du quarré de la moitié AD de la partie AC, & du quarré de la ligne DB, qui est composée de la partie CB & de la moitié DC de la partie AC; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 17M N. 130. N. 171. N. 138. N. 62.

Digitized by Google

SCHOLIE.

Fig. 19. 201. *La ligne DC* est la moitié de la différence des lignes AB & CB, comme nous l'avons déja observé au* n°. 191. *Ainsi, la ligne DB est la moitié de leur somme; & par conséquent, ce théorême & le précédent ne sont aussi qu'une même proposition, que l'on auroit pu énoncer de cette maniere.*

Les quarrés de deux lignes droites quelconques sont doubles de ceux de la moitié de la somme de ces deux lignes, & de la moitié de la différence de ces mêmes lignes.

USAGE.

202. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Fig. 20. Un rectangle DB* a 35 pieds de diagonale, & sa longueur AB surpasse de sept pieds sa largeur BC. Combien cette longueur & cette largeur ont-elles de pieds, chacune?

SOLUTION. *Puisque* [H] *le côté AB surpasse de sept pieds le côté BC, on prend sur le côté AB une partie AE de sept pieds, & le reste EB est égal au côté BC; après quoi, l'on raisonne de cette maniere:*

Digitized by Google

La ligne AB est divisée en deux parties AE & EB. Ainsi (n), *le quarré de la moitié AF de la partie AE* (*lequel* [C] *est de* 12 $\frac{1}{4}$ *pieds*) *avec celui de la ligne FB* (*qui est inconnu*) *doit être égal à la moitié de la somme des quarrés de la ligne AB & de la partie EB; c'est-à-dire* [C], *à la moitié de la somme des quarrés des côtés AB & BC; & par conséquent* (n), *à la moitié du quarré de la diagonale AC, puisque* [H] *le triangle ABC est rectangle en B. Mais* [H], *la moitié de ce quarré est de* 612 $\frac{1}{2}$ *pieds: donc, le quarré qui étoit inconnu, est de* 600 $\frac{1}{4}$ *pieds; & par conséquent, la ligne FB est de* 24 $\frac{1}{2}$ *pieds. Or, puisque cette ligne est de* 24 $\frac{1}{2}$ *pieds, & que la ligne AF est trois* $\frac{1}{2}$ *pieds, le côté AB est de* 28 *pieds, & le côté BC de* 21; *& par conséquent, C. Q. F. F.*

N. 200.

N. 171.

Digitized by Google

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

203. *Diviser une ligne droite en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite de ces deux parties, soit égal au quarré de la plus grande.*

Fig. 21. IL faut diviser la ligne droite AB * en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite de ces deux parties, soit égal au quarré de la plus grande.

N. 96. *Const.* Du point A, élevez (n) à la ligne AB une perpendiculaire indéfinie
N. 81. FAD. Prenez (n) sur cette perpendiculaire, une partie AE égale à la moitié de cette ligne AB; & une partie EF égale à la distance du point E au point B. En-
N. 81. fin, prenez (n) sur la ligne AB, une partie AH égale à la ligne AF; & cette ligne sera divisée, comme il est demandé.

Pour la démonstration, faites la partie
N. 170. AD égale à la ligne AB; & (n) achevez le quarré AC. Par le point H, tirez
N. 133. (n) une parallele GHI à la ligne FD; &

Digitized by Google

par le point F, une parallele FG à la ligne AB. Enfin, tirez du point E au point B, une ligne droite EB.

Démonst. Premierement, les lignes BC & AB sont égales (n). Ainsi, puisque le quadrilatere HC est rectangle [c], il est le rectangle de la ligne AB & de la partie HB. N. 50.

Secondement, les lignes AF & AH sont aussi égales [c]. Ainsi, puisque le quadrilatere AG est rectangle [c], il est (n) le quarré de la partie AH. N. 50.

Troisiemement, enfin, les lignes FG & AF sont encore égales (n). Ainsi, puisque le quadrilatere DG est encore rectangle [c], il est le rectangle de la ligne DF & de sa partie AF. Cela posé : N. 50.

La ligne DF est divisée en deux parties DA & AF, & [c] la ligne EA est la moitié de la partie DA. Ainsi (n), le rectangle de la ligne DF & de la partie AF (c'est-à-dire [D], le rectangle DG) avec le quarré de la ligne EA, est égal au quarré de la ligne EF ; & par conséquent, à celui de la ligne EB, puisque les lignes EF & EB sont égales [c]. N. 198. Mais (n), les quarrés des lignes AB & EA sont aussi égaux au quarré de la même ligne EB, puisque [c] le triangle EAB est rectangle en A. Donc (n), le rectangle N. 171. N. 62.

DG, avec le quarré de la ligne EA, est égal aux quarrés des lignes AB & EA;
N. 64. & par conséquent (n), le rectangle DG est égal au quarré de la ligne AB. Or, puisque le quarré AC de la ligne AB & le rectangle DG, qui ont une partie commune DH, sont égaux, l'autre partie HC du premier est égale à l'autre partie AG du second; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

204. *Dans un triangle obtusangle, le quarré du côté opposé à l'angle obtus est égal aux quarrés des deux autres côtés, & à deux rectangles faits chacun de l'un quelconque de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'à la perpendiculaire.*

Fig. 22. DANS le triangle ABC * dont l'angle C est obtus, le quarré du côté AB est égal aux quarrés des autres côtés AC & CB, & à deux rectangles faits chacun de l'un quelconque de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'à la

Digitized by Google

perpendiculaire ; (par exemple, du côté AC & de son prolongement CD).

Const. Du point B, abaissez (n) une perpendiculaire BD au côté AC, prolongé autant qu'il sera nécessaire. N. 97.

Démonst. La ligne AD est divisée en deux parties AC & CD. Ainsi (n), le quarré de cette ligne est égal aux quarrés des lignes AC & CD, & à deux rectangles faits chacun de ces mêmes lignes; & par conséquent (n), les quarrés des lignes AD & DB sont égaux à ceux des lignes AC, CD & DB, & à deux rectangles faits chacun des lignes AC & CD. Mais, puisque [c] les triangles ADB & CDB sont rectangles l'un & l'autre en D, les quarrés des lignes AD & DB sont (n) égaux au quarré du côté AB; & ceux des lignes CD & DB le sont au quarré du côté CB. Donc (n), le quarré du côté AB est égal aux quarrés des côtés AC & CB, & à deux rectangles faits chacun des lignes AC & CD, c'est-à-dire, du côté AC & de son prolongement CD; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 184. N. 63. N. 171. N. 61.

USAGE.

205. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Digitized by Google

Fig. 22. Les côtés AB *, AC & CB du triangle ABC dont l'angle C est obtus, sont, l'un de 20 toises, l'autre de 11, & le dernier, de 13. Combien la perpendiculaire abaissée de l'un des autres angles au côté opposé (par exemple, de l'angle B au côté AC) en contient-elle?

SOLUTION. L'angle C est obtus [H].
N. 204. *Ainsi* (n), *les quarrés des côtés AC & CB, (qui* [H] *sont de 290 toises) avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & CD (lesquels sont inconnus) doivent être égaux au quarré du côté AB (lequel* [H] *est de 400 toises). Donc, ces deux rectangles qui étoient inconnus sont de 110 toises; & par conséquent, chacun de ces rectangles est de 55. Mais, puisque le rectangle des lignes AC & CD est de 55 toises, & que* [H] *la ligne AC est de 11,*
N. 149. *55 sont* (n) *le produit de la ligne CD multipliée par 11; & par conséquent, cette ligne est de cinq toises. Or, puisque dans le triangle CDB qui* [H] *est rectangle en D, on connoît l'hypoténuse CB de 13 toises, avec le côté CD de cinq, on*
N. 175. *trouvera* (n) *que le côté BD, qui est la perpendiculaire demandée, en contient 12; & par conséquent, C. Q. F. F.*

PROPOSITION

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

206. *Dans un triangle quelconque, le quarré du côté opposé à l'un des angles aigus, avec deux rectangles faits chacun de l'un quelconque des autres côtés de sa partie comprise entre cet angle aigu & la perpendiculaire, est égal aux quarrés des autres côtés.*

DANS le triangle ABC *, le quarré du côté, par exemple AB, opposé à l'angle aigu C, avec deux rectangles faits chacun de l'un quelconque des autres côtés & de sa partie comprise entre cet angle aigu C & la perpendiculaire (par exemple, du côté AC & de sa partie DC) est égal aux quarrés des autres côtés AC & CB. Fig. 23.

Const. Du point B, abaissez (n) une perpendiculaire BD au côté AC. N. 97.

Démonst. La ligne AC est divisée en deux parties AD & DC. Ainsi (n), le quarré de la ligne AD, avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & DC, est égal aux quarrés de ces mêmes lignes AC & DC; & par conséquent (n), les N. 194. N. 63.

Digitized by Google

quarrés des lignes AD & DB, avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & DC, sont égaux aux quarrés des lignes AC, DC & DB. Mais, puisque [c] les triangles ADB & CDB sont rectangles l'un & l'autre en D, les quarrés des lignes
N. 171. AD & DB sont (n) égaux au quarré du côté AB; & ceux des lignes DC & DB
N. 61. le sont au quarré du côté CB. Donc (n), le quarré du côté AB, avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & DC, (c'est-à-dire, du côté AC & de sa partie DC) est égal aux quarrés des autres côtés AC & CB; & par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

207. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Fig. 23. Les côtés AB *, AC & CB du triangle ABC dont l'angle C est aigu, sont l'un, de 45 toises; l'autre, de 42; & le dernier, de 39. Combien la perpendiculaire abaissée de l'un des autres angles au côté opposé (par exemple, de l'angle B au côté AC) en contient-elle?

SOLUTION. L'angle C est aigu [H].
N. 206. *Ainsi* (n), *le quarré du côté AB* (*qui* [H] *est de 2025 toises*) *avec deux rectangles*

Digitized by Google

faits chacun des lignes AC & DC (lesquels sont inconnus) doit être égal aux quarrés des côtés AC & CB (qui [H] *sont de 3285 toises). Donc, ces deux rectangles qui étoient inconnus, sont de 1260 toises; & par conséquent, chacun de ces rectangles est de 630. Mais, puisque le rectangle des lignes AC & DC est de 630 toises, & que* [H] *la ligne AC est de 42, 630 sont* (n) *le produit de la ligne* N. 149. *DC multipliée par 42; & par conséquent, cette ligne est de 15 toises. Or, puisque dans le triangle DBC qui* [H] *est rectangle en D, on connoît l'hypoténuse CB de 39 toises, avec le côté DC de 15, on trouvera* (n) *que le côté BD, qui est la* N. 175. *perpendiculaire demandée, en contient 36; & par conséquent, C. Q. F. F.*

SCHOLIE.

208. *Cette proposition & la précédente peuvent être fort utiles dans le toisé, & dans l'arpentage; parce qu'il est bien plus facile, dans la pratique, de mesurer les trois côtés d'un triangle, que d'abaisser une perpendiculaire de l'un des angles à l'un des côtés.*

Digitized by Google

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

209. *Décrire un quarré, dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne donnée.*

IL faut décrire un quarré qui soit égal
Fig. 24. à la figure rectiligne A *.

N. 167. *Const.* Décrivez (n) un rectangle BD égal à la figure proposée A. Prolongez l'un des côtés de ce rectangle, par exemple le côté BC, jusqu'à ce que le prolongement CF soit égal à l'autre côté CD.

N. 94. Divisez (n) la ligne BF en deux parties égales BG & GF. Du point G pris pour centre, & avec l'une de ces parties égales prise pour rayon (par exemple, avec la partie GF) décrivez un demi-cercle BHF. Enfin, prolongez le côté CD, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point H la circonférence de ce demi-cercle; & le prolongement CH sera le côté du quarré demandé.

Pour la démonstration, tirez du point G au point H, une ligne droite GH.

Démonst. La ligne BF est divisée en deux parties BC & CF, & [c] le point

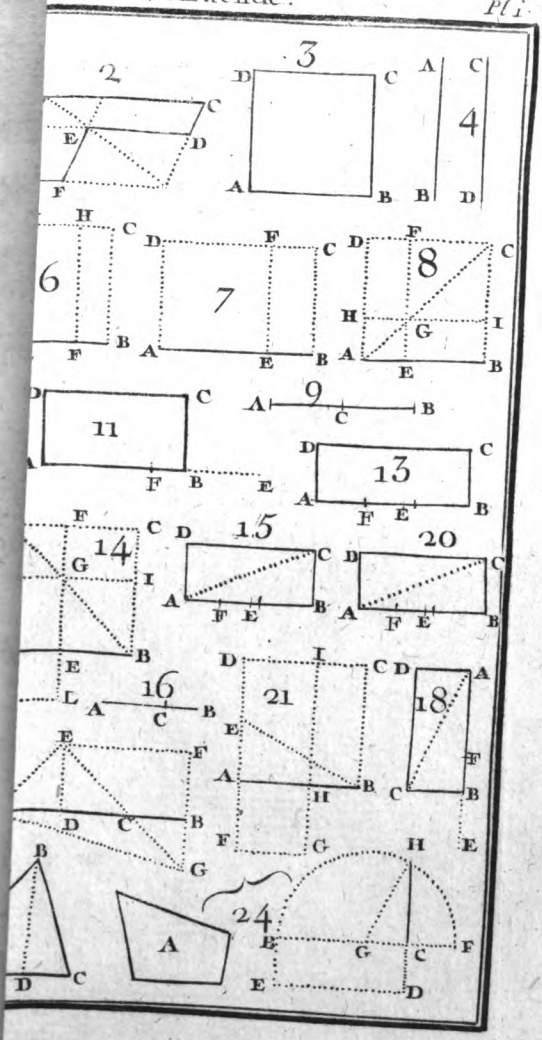
Digitized by Google

G est son milieu. Ainsi (n), le rectangle N. 187.
de ces deux parties (c'est-à-dire, le rectangle BD, puisque les lignes CF & CD sont égales [c]) avec le quarré de la ligne GC, est égal au quarré de la ligne GF; & par conséquent, à celui de la ligne GH, puisque (n) les lignes GF & GH N. 35.
sont égales. Mais (n), les quarrés des N. 171.
lignes GC & CH sont aussi égaux au quarré de la même ligne CH; puisque [c] le triangle GCH est rectangle en C. Donc (n), le rectangle BD, avec le N. 62.
quarré de la ligne GC, est égal aux quarrés des lignes GC & CH; & par conséquent (n), le rectangle BD est égal au N. 64.
quarré de la ligne CH. Or [c], ce même rectangle est aussi égal à la figure rectiligne A. Donc (n), le quarré de la ligne N. 62.
CH est égal à cette figure; & par conséquent, C. Q. F. F.

Fin du second Livre.

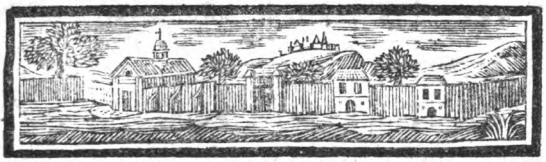
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE TROISIEME.

EUCLIDE, après avoir démontré dans les deux premiers Livres les propositions fondamentales de la Géométrie, examine dans celui-ci les propriétés des lignes droites qui vont se terminer à la circonférence d'un cercle. Il considere ensuite la maniere dont les circonférences des cercles peuvent ou se toucher, ou se couper. Il détermine aussi ce qui doit être la mesure des angles qui sont formés dans un cercle, par des lignes droites tirées chacune d'un même point de sa circonférence. Enfin, il résoud quelques problêmes qui concernent encore le cercle, & démontre dans les dernieres propositions, les propriétés caractéristiques de cette figure.

Digitized by Google

DÉFINITIONS.

I.

210. ON nomme *cercles égaux*, ceux dont les diametres, ou dont les rayons, sont égaux.

II.

211. On dit d'une ligne droite, qu'elle *touche* une figure, lorsqu'elle a un point commun avec la circonférence de cette figure, & qu'étant prolongée de part & d'autre, elle ne peut avoir que ce seul point de commun avec cette même figure.

Fig. 1. *La ligne AB* * touche *le cercle X.*

212. On nomme *tangente*, une ligne droite qui touche une figure.

Fig. 1. *La ligne AB* * *est une* tangente *au cercle X.*

213. On nomme *sécante*, une ligne droite qui étant prolongée, s'il est nécessaire, a plus d'un point commun avec une figure.

Fig. 1. *La ligne CD* * *est une* sécante *du cercle X.*

III.

Digitized by Google

III.

214. On dit que des figures se *touchent*, lorsque leurs circonférences ont un point commun, & ne peuvent avoir que ce seul point de commun.

IV.

215. On dit que des lignes droites sont *également éloignées* d'un certain point, lorsque les perpendiculaires qui sont tirées de ce point à chacune de ces lignes, sont égales.

*Les lignes AB * & CD sont* également *éloignées du centre K du cercle X, si les perpendiculaires KG & KH sont égales.* Fig. 2

216. On dit qu'une ligne droite est *plus éloignée* qu'une autre d'un certain point, lorsque la perpendiculaire qui est tirée de ce point à cette premiere ligne, est plus grande que la perpendiculaire qui est tirée de ce même point à cette autre ligne.

*La ligne EF * est* plus éloignée *que la ligne AB du centre K du cercle X, si la perpendiculaire KI est plus grande que la perpendiculaire KG.* Fig. 2

217. On nomme *corde*, une ligne droite qui est tirée de l'une des extrémi-

Digitized by Google

tés d'un arc à l'autre extrémité du même arc.

Fig. 3. *La ligne AC * est la* corde *de l'arc ABC.*

218. On dit d'une corde, qu'elle *tend* l'arc dont elle est la corde.

Fig. 3. *La corde AC ** tend *l'arc ABC.*

V.

219. On nomme *segment* de cercle, une figure plane qui est terminée par un arc de cercle & par une corde.

Fig. 3. *La figure ABC * est un* segment *de cercle.*

VI.

220. On nomme *angle du segment*, un angle qui est formé par la corde qui tend l'arc de ce segment, & par une tangente à ce même arc, tirée de l'une de ses extrémités.

Fig. 4. *L'angle ABC * est l'angle du* segment *CDB.*

VII.

221. On dit d'un angle, qu'il est *inscrit dans* un segment, ou seulement, qu'il est *dans* un segment, lorsqu'il a son sommet dans l'arc de ce segment, & que ses côtés passent par les extrémités de cet arc.

Digitized by Google

*L'angle E * est* dans *le segment CEB.* Fig. 4.

VIII.

222. On dit d'un angle, qu'il *s'appuie* sur la ligne ou droite, ou courbe, qui est tirée de l'extrémité de l'un de ses côtés à l'extrémité de l'autre.

*L'angle B ** s'appuie *sur l'arc ADC.* Fig. 5.

IX.

223. On nomme *secteur* de cercle, une figure plane qui est terminée par un arc de cercle, & par deux rayons de ce même cercle.

*Les figures ABCD * & ABCE sont* Fig. 6. *chacune un* secteur *de cercle.*

X.

224. Enfin, on dit que des segmens de cercles sont *semblables*, lorsque les angles qui sont inscrits dans chacun de ces segmens, sont égaux.

*Les segmens ABC * & DEF sont* Fig. 7. semblables, *si les angles B & E qui sont inscrits, l'un dans le segment ABC, & l'autre dans le segment DEF, sont égaux.*

Digitized by Google

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

225. *Trouver le centre d'un cercle donné.*

Fig. 8. IL faut trouver le centre du cercle X *.

Const. Tirez dans le cercle X une
N. 94. corde AB, à volonté. Divisez (n) cette corde en deux parties égales AE & EB. Du point E, élevez à cette même corde
N. 96. (n) une perpendiculaire CD, qui se termine de part & d'autre à la circonférence.
N. 94. Enfin (n), divisez aussi cette perpendiculaire en deux parties égales CF & FD; & le point F sera le centre demandé.

Pour la démonstration. Du point G pris à volonté dans le cercle X; (mais cependant hors de la perpendiculaire CD) tirez aux points A, E & B, des lignes droites GA, GE & GB.

Démonst. Si le centre du cercle X étoit un point hors de la perpendiculaire CD (par exemple, le point G) les triangles AGE & BGE, qui [c] ont le côté AE égal au côté BE, & le côté GE com-
N. 35. mun, auroient aussi (n) le côté GA égal
N. 90. au côté GB. Ainsi (n), l'angle GEA seroit égal à l'angle GEB; & par consé-

Digitized by Google

quent (n), la ligne GE seroit perpendi- N. 19.
culaire à la ligne AB. Mais (n), la ligne N. 21.
GE n'est point perpendiculaire à la ligne AB, puisque l'angle GEB n'est qu'une partie de l'angle CEB qui est [c] un angle droit. Donc, le point G n'est pas le centre du cercle X; & par conséquent, puisque la même démonstration subsisteroit, à quelque point de ce cercle que l'on prît le point G, pourvu que ce fût hors de la perpendiculaire CD, le centre demandé n'est pas hors de cette perpendiculaire. Or, puisque le centre demandé est dans cette perpendiculaire, & que [c] le point F est le seul point de cette ligne qui soit également éloigné des points C & D de la circonférence, le point F est (n) ce centre; & par consé- N. 32.
quent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

226. Il suit de la démonstration de ce problême, que *si dans le cercle une corde en coupe une autre perpendiculairement, & par le milieu, cette premiere corde sera le diametre de ce cercle.*

Digitized by Google

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

227. *Si une ligne droite a plus d'un point commun avec la circonférence d'un cercle, elle passera dans ce cercle.*

Fig. 9. LA ligne droite AB * qui a les points A & B communs avec la circonférence du cercle X, passe dans ce cercle.

Const. Prenez sur la ligne AB un point D, à volonté; mais qui soit cependant entre les points A & B. Tirez ensuite du centre C du cercle X aux points A, D & B, des lignes droites CA, CD & CB.,

Démonst. Dans le triangle ACD,
N. 103 l'angle extérieur CDB est (n) plus grand
N. 86. que son opposé intérieur A. Mais (n), l'angle B est égal à l'angle A; puisque
N. 35. (n) les côtés CA & CB du triangle ACB sont égaux. Donc, l'angle CDB est plus grand que l'angle B. Or, puisque dans le triangle DCB, l'angle CDB est plus
N. 112. grand que l'angle B, le côté CB est (n) plus grand que le côté CD. Donc l'extrémité D de ce dernier côté est dans

Digitized by Google

le cercle X ; & par conséquent, puisque [c] la ligne AB passe par cette extrémité, elle passe dans ce cercle. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

228. *Dans le cercle, si une ligne droite qui passe par le centre divise en deux parties égales une corde qui n'y passe point, elle lui sera perpendiculaire : & si elle lui est perpendiculaire, elle la divisera en deux parties égales.*

PREMIEREMENT.

SI dans le cercle X *, la ligne droite CD qui passe par le centre F, divise en deux parties égales AE & EB la corde AB qui n'y passe point, elle sera perpendiculaire à cette corde. Fig. 10.

Const. Tirez du centre F aux points A & B, des lignes droites FA & FB.

Démonst. Dans les triangles AFE & BFE, le côté AE est [H] égal au côté EB, le côté FA au côté FB (n), & le côté FE commun. Donc (n), l'angle CEA est égal à l'angle CEB ; & par con- N. 35. N. 90.

N. 19. séquent (n), la ligne CD est perpendiculaire à la corde AB.

SECONDEMENT.

Fig. 10. Si dans le cercle X *, la ligne droite CD qui passe par le centre F, est perpendiculaire à la corde AB qui n'y passe point, elle la divisera en deux parties égales AE & EB.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les triangles AEF & BEF sont [H] rectangles l'un & l'autre en E.

N. 171. Ainsi (n), les quarrés des côtés AE & EF sont égaux au quarré de l'hypoténuse AF; & ceux des côtés EB & EF le sont

N. 35. à celui de l'hypoténuse BF. Mais (n), ces

N. 62. hypoténuses sont égales. Donc (n), les quarrés des côtés AE & EF sont égaux à ceux des côtés EB & EF; & par con-

N. 64. séquent (n), le quarré du côté AE est égal à celui du côté EB. Or, puisque les quarrés des côtés AE & EB sont égaux, ces côtés le sont aussi.

Par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

229. *Dans le cercle, si deux cordes se coupent à un point qui n'est pas le centre, elles ne se diviseront point chacune en deux parties égales.*

DANS le cercle X*, les cordes AB & CD qui se coupent au point F qui n'est pas le centre, ne se divisent point chacune en deux parties égales. Fig. 111

Const. Tirez du centre E au point d'intersection F, une ligne droite EF.

Démonst. Si le point F étoit le milieu de chacune des cordes AB & CD, la ligne EF qui [c] passe par le centre E, seroit (n) perpendiculaire à chacune de ces cordes. N. 228. Ainsi (n), chaque angle EFB & EFD seroit un angle droit; & par conséquent, ces deux angles seroient égaux. N. 21. Or (n), ces deux angles ne sont point égaux, puisque le second n'est qu'une partie du premier. N. 72. Donc, le point F n'est pas le milieu de chacune des cordes AB & CD; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

230. *Les cercles dont les circonférences se coupent, n'ont point le même centre.*

Fig. 12. LES cercles ABC * & DCB dont les circonférences se coupent aux points B & C, n'ont point le même centre.

Démonst. Dans le cercle, le centre est également éloigné de tous les points de
N. 32. la circonférence (n). Ainsi (n), les cir-
N. 35. conférences des cercles qui ont le même centre, sont paralleles; & par conséquent (n), elles ne se coupent point.
N. 56. Or, les circonférences des cercles ABC & BDC ne sont point paralleles, puisque [H] elles se coupent aux points B & C. Donc, ces cercles n'ont point le même centre; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

231. *Les cercles dont les circonférences se touchent, n'ont point le même centre.*

LEs cercles ABC * & DBE dont les circonférences se touchent au point B, n'ont point le même centre. Fig. 13.

Démonst. Dans le cercle, le centre est également éloigné de tous les points de la circonférence (n). Ainsi (n), les circonférences des cercles qui ont le même centre, sont paralleles; & par conséquent (n), elles ne se touchent point. Or, les circonférences des cercles ABC & DBE ne sont point paralleles, puisque [H] elles se touchent au point B. Donc, ces cercles n'ont point le même centre; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 32. N. 35. N. 56.

Digitized by Google

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

232. *Si d'un point pris dans un cercle, mais qui n'en est pas le centre, on tire à la circonférence plusieurs lignes droites :* Premierement, *celle qui passera par le centre sera la plus grande ; & celle qui y passeroit, si elle étoit prolongée, sera la plus petite :* Secondement, *celles qui seront plus près du centre, seront plus grandes que celles qui en seront plus éloignées :* Troisiemement, *enfin, il pourra y en avoir deux égales ; & il ne pourra y en avoir plus de deux.*

PREMIEREMENT.

Fig. 14. DANS le cercle X *, la ligne droite AEB qui passe par le centre E, est la plus grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A qui n'est pas le centre à la circonférence ; & la ligne droite A C qui passeroit par le centre E, si elle étoit prolongée, est la plus petite.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence, tirez au centre E &

Digitized by Google

au point A, des lignes droites DE & DA.

Démonst. Premierement, dans le triangle AED, la somme des côtés AE & ED est (n) plus grande que le côté AD. Or (n), la ligne AEB est égale à cette somme, puisque (m) les lignes EB & ED sont égales. Donc, la ligne AEB est plus grande que le côté AD. N. 115. N. 63. N. 35.

Secondement, dans le même triangle AED, le côté ED est (n) plus petit que la somme des autres côtés EA & AD. Or (n), la ligne EAC est égale à ce côté ED. Donc cette ligne est plus petite que la somme de ces autres côtés; & par conséquent, si l'on retranche la même ligne EA, & de cette ligne & de cette somme, le reste AC de cette ligne sera plus petit que le reste AD de cette somme. N. 115. N. 35.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point D. Donc, de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence, la ligne AEB est la plus grande, & la ligne AC la plus petite; & par conséquent, C. Q F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si du point A * pris dans le cercle X, Fig. 15.

mais qui n'en eſt pas le centre, on tire à la circonférence les lignes droites AC & AD, la ligne AC qui eſt le plus près du centre E, ſera la plus grande.

Conſt. Tirez du centre E aux points C & D, des lignes droites EC & ED.

Démonſt. Dans les triangles AEC &
N. 71. AED, l'angle AEC eſt (n) plus grand que l'angle AED, le côté EC eſt égal au
N. 35. côté ED (n), & le côté EA commun.
N. 121. Donc (n), le côté AC eſt plus grand que le côté AD; & par conſéquent, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Fig. 16. Enfin, du point A * pris dans le cercle X, mais qui n'en eſt pas le centre, on peut tirer à la circonférence des lignes droites égales; & l'on ne peut en tirer plus de deux.

Conſt. Tirez du point A par le centre E, une ligne droite AEB. Du point C pris à volonté ſur la circonférence, tirez aux points A & E, des lignes droites CA
N. 120. & CE. Décrivez ſur la ligne AEB (n), un angle AED qui ait le point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle AEC. Enfin, tirez du point A au point D, une ligne droite AD.

Démonſt. Premierement, dans les

Digitized by Google

triangles AED & AEC, l'angle AED est [c] égal à l'angle AEC, le côté ED au côté EC (n), & le côté EA commun. N. 35.
Donc (n), le côté AD est égal au côté N. 83.
AC; & par conséquent, on peut tirer du point A à la circonférence, deux lignes droites égales.

Secondement [D], toute ligne droite qui étant tirée du point A à la circonférence, sera plus près du centre E que ne l'est la ligne AD, sera plus grande que cette ligne AD: & toute ligne droite qui étant tirée du même point A à la même circonférence, sera plus éloignée du centre E que ne l'est la ligne AD, sera plus petite que cette même ligne AD. Donc, la ligne AD est la seule ligne droite égale à la ligne AC, qu'il soit possible de tirer du point A à la circonférence; & par conséquent, on ne peut tirer de ce point à la circonférence, plus de deux lignes droites égales.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point C. Donc, C. Q. F. 3°. D.

Digitized by Google

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

233. *Si d'un point pris hors d'un cercle, on tire à la circonférence plusieurs lignes droites :* Premierement, *celle qui passera par le centre sera la plus grande ; & celle qui y passeroit, si elle étoit prolongée, sera la plus petite :* Secondement, *si elles traversent le cercle, celles qui seront plus près du centre, seront plus grandes que celles qui en seront plus éloignées ; mais si elles n'entrent point dans ce cercle, celles qui seront plus près du centre, seront au contraire plus petites que celles qui en seront plus éloignées :* Troisiemement, *enfin, deux de celles qui traverseront le cercle pourront être égales, & deux de celles qui n'y entreront point pourront aussi l'être ; mais, des unes comme des autres, il ne pourra y en avoir plus de deux.*

PREMIEREMENT.

Fig. 17. AU cercle X *, la ligne droite AEC qui passe par le centre E, est la plus grande de toutes les lignes droites qu'il est

est possible de tirer du point A, pris hors de ce cercle, à sa circonférence; & la ligne droite AB qui passeroit par le centre E, si elle étoit prolongée, est la plus petite.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence, tirez au centre E & au point A, des lignes droites DE & DA.

Démonst. Premierement, dans le triangle AED, la somme des côtés AE & ED est (n) plus grande que le côté AD. Or, (n), la ligne AEC est égale à cette somme, puisque (n) les lignes EC & ED sont égales. Donc, la ligne AEC est plus grande que le côté AD. N. 115. N. 63. N. 35.

Secondement, dans le même triangle AED, le coté EBA est (n) plus petit que la somme des autres côtés ED & DA. Donc, si du côté EBA, l'on retranche le rayon EB, & de la somme des côtés ED & DA le rayon ED, le reste AB de ce côté sera plus petit que le reste AD de cette somme. N. 115.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point D. Donc, de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence, la ligne AEC est la plus grande, & la ligne AB la plus petite; & par conséquent, C. Q. F. 1° D.

Digitized by Google

SECONDEMENT.

Fig. 18. Si du point A * pris hors du cercle X, on tire à la circonférence des lignes droites AF & AD qui traversent ce cercle, la ligne AF qui est le plus près du centre E, sera la plus grande. Mais, si du point
Fig. 19. A * pris hors du cercle Y, on tire à la circonférence des lignes droites AF & AD qui n'entrent point dans ce cercle, la ligne AF qui est la plus éloignée du centre E, sera alors la plus grande.

Fig. 18. & 19. *Const.* Du centre E *, tirez aux points F & D, des lignes droites EF & ED.

Démonst. Dans les triangles AEF &
N. 72. AED, l'angle AEF est (n) plus grand que l'angle AED, le côté EF est égal au
N. 35. côté ED (n), & le côté AE commun.
N. 121. Donc (n), le côté AF est plus grand que le côté AD; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Fig. 20. & 21. Enfin, du point A * pris hors du cercle X, on peut tirer à la circonférence deux lignes droites égales qui traversent ce cercle, & deux lignes droites égales qui n'y entrent point; mais, des unes comme des autres, on ne peut en tirer plus de deux.

Digitized by Google

Conſt. Tirez du point A au centre E, une ligne droite AE. Du point C, pris à volonté ſur la circonférence, tirez aux points A & E, des lignes droites CA & CE. Décrivez ſur la ligne AE (n), un angle AED qui ait le point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle AEC. Enfin, tirez du point A au point D, une ligne droite AD. N. 120.

Démonſt. Premierement, dans les triangles AED & AEC, l'angle AED eſt [c] égal à l'angle AEC, le côté ED au côté EC (n), & le côté AE commun. N. 35. Donc (n), le côté AD eſt égal au côté AC; & par conſéquent, on peut tirer du point A à la circonférence deux lignes droites égales AC * & AD qui traverſent le cercle, & deux lignes droites égales AC * & AD qui n'y entrent point. N. 83. Fig. 20. Fig. 21.

Secondement [D], toute ligne droite qui étant tirée du point A * à la circonférence, ſera plus près du centre E que ne l'eſt la ligne AD, ſera plus grande que cette ligne AD, *dans le premier cas*, & plus petite, *dans le ſecond:* & toute ligne droite qui étant tirée du même point A à la circonférence, ſera plus éloignée du centre E que ne l'eſt la ligne AD, ſera plus petite que cette même ligne AD, *dans le premier cas;* & plus grande, Fig. 20. & 21.

Digitized by Google

dans le ſecond. Donc, *dans l'un comme dans l'autre cas*, la ligne AD eſt la ſeule ligne droite égale à la ligne AC, qu'il ſoit poſſible de tirer du point A à la circonférence; & par conſéquent, *dans l'un comme dans l'autre cas*, on ne peut tirer de ce point à la circonférence, plus de deux lignes droites égales.

Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point C. Donc, C. Q. F. 3°. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

234. *Dans le cercle, un point duquel on peut tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales, eſt le centre.*

Fig. 22. SI dans le cercle X*, les lignes droites AB, AC & AD qui ſont tirées chacune du même point A à la circonférence, ſont égales, ce point ſera le centre.

Démonſt. D'un point qui n'eſt pas le
N. 232. centre d'un cercle, on ne peut (n) tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales. Or, on peut tirer du point A

Digitized by Google

à la circonférence du cercle X plus de deux lignes droites égales ; puisque [H] les trois lignes AB, AC & AD le sont. Donc, ce point est le centre de ce cercle ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

235. *La circonférence d'un cercle ne peut couper à plus de deux points, celle d'un autre cercle.*

LA circonférence du cercle ABC * qui coupe aux deux points B & C celle du cercle BDC, ne peut pas la couper à un troisieme point. Fig. 23.

Démonst. Si la circonférence du cercle ABC pouvoit couper à trois points celle du cercle BDC, ces deux circonférences pourroient avoir trois points communs. Ainsi, les trois lignes droites que l'on pourroit tirer du centre E du cercle ABC à ces trois points, se termineroient toutes trois & à la circonférence du cercle ABC, & à celle du cercle BDC. Mais (n), si N. 357.
ces lignes se terminoient toutes trois à la circonférence du cercle ABC, elles seroient égales ; puisqu'elles seroient des

rayons de ce cercle. Donc, du point E ;
N. 230 (qui (n) n'est pas le centre du cercle BDC, puisqu'il est celui du cercle ABC) on pourroit tirer à la circonférence de ce cercle BDC trois lignes droites égales. Or
N. 232. (n), cela n'est point possible. Donc, la circonférence du cercle ABC ne peut point couper à plus de deux points celle du cercle BDC ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

236. *Si la circonférence d'un cercle touche intérieurement celle d'un autre cercle, le point auquel elle la touchera sera dans la même ligne droite que les centres de ces deux cercles.*

Fig. 24. LE point B * auquel la circonférence du cercle DBE touche intérieurement celle du cercle ABC, le centre H du cercle ABC, & le centre du cercle DBE, sont chacun dans une même ligne droite.

Const. Tirez du centre H du cercle ABC au point du contact B, une ligne droite HB. Du point I, pris à volonté dans

Digitized by Google

le cercle DBE, (mais cependant hors de la ligne HB) tirez au point B, une ligne droite IB. Enfin, tirez du point H par le point I, une ligne droite HIC.

Démonst. Dans le triangle HIB, la somme des côtés HI & IB est (n) plus N. 115.
grande que le côté HB. Mais (n), ce côté N. 35.
HB est égal à la ligne HC; & (n) cette N. 72.
ligne est plus grande que la ligne HE. Donc, la somme des côtés HI & IB est plus grande que la ligne HE; & par conséquent (n), si & de cette somme & de N. 66.
cette ligne on retranche la même ligne HI, le reste IB de cette somme sera plus grand que le reste IE de cette ligne. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point du cercle DBE que l'on prenne le point I, pourvu que ce soit hors de la ligne HB. Donc (n), aucun point du cer- N. 32.
cle DBE, pris hors de la ligne HB, ne peut être le centre de ce cercle; & par conséquent, ce centre est dans cette ligne. Mais [c], le point de contact B, & le centre H du cercle ABC sont aussi dans cette même ligne. Donc, le point de contact B, le centre H du cercle ABC, & le centre du cercle DBE sont chacun dans la ligne droite HB; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

237. *Si la circonférence d'un cercle touche extérieurement celle d'un autre cercle, le point auquel elle la touchera, sera dans la même ligne droite que les centres de ces deux cercles.*

Fig. 25. LE point C * auquel la circonférence du cercle X touche extérieurement celle du cercle Y, le centre A du cercle X, & le centre du cercle Y, sont chacun dans une même ligne droite.

Const. Tirez du centre A du cercle X par le point de contact C, une ligne droite indéfinie ACB. Du point D pris à volonté dans le cercle Y (mais cependant hors de la ligne ACB) tirez aux points A & C, des lignes droites DA & DC.

Démonst. Dans le triangle ACD, la
N. 115. somme des côtés AC & CD est (n) plus grande que le côté AD. Donc, si de la somme de ces côtés AC & CD on retranche le rayon AC, & du côté AD le rayon AE, le reste DC de cette somme

sera

Digitized by Google

ſera plus grand que le reſte DE de ce côté ; & par conſéquent, puiſque (n) le reſte DE eſt encore plus grand que la ligne DF, la ligne DC ſera plus grande que la ligne DF. Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point du cercle Y que l'on prenne le point D, pourvu que ce ſoit hors de la ligne ACB. Donc (n), aucun point du cercle Y, pris hors de la ligne ACB, ne peut être le centre de ce cercle ; & par conſéquent, ce centre eſt dans cette ligne. Mais [c], le point de contact C, & le centre A du cercle X, ſont auſſi dans cette même ligne. Donc, le point de contact C, le centre A du cercle X, & le centre du cercle Y, ſont chacun dans la ligne droite ACB ; & par conſéquent, C. Q. F. D.

N. 7e.

N. 38.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

238. *Si la circonférence d'un cercle touche celle d'un autre cercle intérieurement, ou extérieurement, elle ne la touchera qu'en un seul point.*

PREMIEREMENT.

Fig. 26. LA circonférence du cercle FDG *, qui touche celle du cercle EDB au point D, intérieurement, ne la touche qu'à ce seul point.

Const. Tirez du point de contact D par les centres C & A, une ligne droite
N. 236. DCA (n). Du point B, pris à volonté sur la circonférence du cercle EDB, tirez aux mêmes centres C & A, des lignes droites BC & BA.

Démonst. Dans le triangle ACB, la
N. 115. somme des côtés AC & CB est (n) plus
N. 35. grande que le côté AB. Mais (n), ce côté AB est égal à la ligne AD. Donc, la somme des côtés AC & CB est plus grande que la ligne AD; & par conséquent, si & de cette somme & de cette ligne on retranche la même ligne AC,

Digitized by Google

le reste CB de cette somme sera plus grand que le reste CD de cette ligne. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence du cercle EDB que l'on prenne le point B, pourvu que ce ne soit pas au point de contact D. Donc, la ligne CB sera toujours plus grande que le rayon CD du cercle FDG; & par conséquent, son extrémité B sera toujours hors de ce cercle. Mais, puisque le point B est toujours hors du cercle FDG (excepté seulement lorsqu'il est pris sur le point D) la circonférence de ce cercle ne peut toucher celle du cercle EDB qu'à ce seul point D; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

La circonférence du cercle Y *, qui touche celle du cercle X au point D, extérieurement, ne la touche qu'à ce seul point. Fig. 2.

Const. Tirez par le point de contact D & par les centres A & C, une ligne droite ADC (n). Du point B, pris à volonté sur la circonférence du cercle X, tirez aux mêmes centres A & C, des lignes droites BA & BC. N. 232.

Démonst. Dans le triangle ABC, la

N. 115. somme des côtés AB & BC est (n) plus grande que le côté ADC. Donc, si de la somme de ces côtés AB & BC, on retranche le rayon AB, & du côté ADC le rayon AD, le reste CB de cette somme sera plus grand que le reste CD de ce côté. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prenne le point B, pourvu que ce ne soit pas au point de contact D. Donc, la ligne CB sera toujours plus grande que le rayon CD du cercle Y; & par conséquent, son extrémité B sera toujours hors de ce cercle. Mais, puisque le point B est toujours hors du cercle Y (excepté seulement lorsqu'il est pris sur le point D) la circonférence de ce cercle ne peut toucher celle du cercle X qu'à ce seul point; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

239. *Dans le cercle, les cordes qui sont égales sont également éloignées du centre, & celles qui sont également éloignées du centre, sont égales.*

PREMIEREMENT.

SI dans le cercle X * les cordes AB & CD sont égales, elles seront également éloignées du centre E. Fig. 28.

Const. Du centre E, abaissez (n) une perpendiculaire EF à la corde AB, & une perpendiculaire EG à la corde CD. Du même centre E, tirez aux points A & C, des lignes droites EA & EC. N. 97.

Démonst. Les triangles AFE & CGE sont (n) rectangles, l'un en F & l'autre en G. Ainsi (n), les quarrés des côtés AF & FE sont égaux au quarré de l'hypoténuse AE; & ceux des côtés CG & GE le sont à celui de l'hypoténuse CE. Mais (n), ces hypoténuses sont égales. Donc (n), les quarrés des côtés AF & FE sont égaux à ceux des côtés CG & GE; & par conséquent, puisque [H] les côtés N. 21. N. 171. N. 35. N. 62.

Digitized by Google

N. 228. AF & CG, qui (n) ſont les moitiés des cordes AB & CD, ſont égaux, les côtés
N. 215. FE & GE le ſont auſſi. Mais (n), ces côtés FE & GE ſont les diſtances du centre E aux cordes AB & CD. Donc, ces cordes ſont également éloignées de ce centre; & par conſéquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 28. Si dans le cercle X *, les cordes AB & CD ſont également éloignées du centre E, elles ſeront égales.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. On démontre de la même maniere dont on vient de le faire, que dans les triangles AFE & CGE, les quarrés des côtés AF & FE ſont égaux à ceux des côtés CG & GE. Donc, puiſ-
N. 215. que [H] les côtés FE & GE, qui (n) ſont les diſtances du centre E aux cordes AB & CD, ſont égaux, les côtés AF
N. 228. & CG le ſont auſſi. Mais (n), ces côtés AF & CG ſont les moitiés des cordes AB & CD, chacun de chacune. Donc
N. 67. (n), ces cordes ſont égales; & par conſéquent, C. Q. F. 2°. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

240. *Dans le cercle, la corde qui passe par le centre est la plus grande, & les cordes qui sont plus près du centre, sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées.*

PREMIEREMENT.

DANS le cercle X *, la corde AB qui passe par le centre C, est la plus grande que l'on puisse tirer dans ce cercle. Fig. 29.

Const. Tirez une corde DE à volonté, mais qui ne passe point par le centre C. Du même centre C, tirez aux points D & E, des lignes droites CD & CE.

Démonst. Puisque (n) la corde AB est un diametre du cercle X, elle est (n) égale à la somme des côtés CD & CE du triangle DCE. Or (n), la somme de ces côtés est plus grande que le côté DE. Donc, la corde AB est aussi plus grande que ce côté; & par conséquent, puisque la même démonstration subsiste, par quelque endroit du cercle X que l'on tire la corde DE (pourvu que ce ne soit pas N. 33. N. 35. N. 11.

par le centre C) la corde AB qui [H] passe par ce centre, est la plus grande qu'il soit possible de tirer dans ce cercle. Donc, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 30. Dans le cercle X *, la corde AB, qui est plus près du centre C, est plus grande que la corde DE qui en est plus éloignée.

Const. Tirez du centre C aux points A, D, E & B, des lignes droites CA, CD, CE & CB.

Démonst. Dans les triangles ACB &
N. 72. DCE, l'angle ACB est (n) plus grand que l'angle DCE, le côté CA est égal
N. 35. au côté CD (n), & le côté CB au côté
N. 35. CE (n). Donc (n), le côté AB est plus
N. 221. grand que le côté DE; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

241. *Si de l'une des extrémités du diametre d'un cercle, on éleve une perpendiculaire à ce diametre, cette extrémité sera le seul point que cette perpendiculaire aura de commun avec ce cercle : & de cette même extrémité, on ne pourra tirer aucune ligne droite entre cette même perpendiculaire & ce même cercle.*

PREMIEREMENT.

SI de l'extrémité B * du diametre AB du cercle X, on éleve une perpendiculaire BC à ce diametre, le point B sera le seul point que cette perpendiculaire aura de commun avec ce cercle. Fig. 31

Const. Du point E, pris à volonté sur la perpendiculaire BC, (mais qui soit cependant différent du point B) tirez au centre D, une ligne droite ED.

Démonst. Dans le triangle DEB, l'angle B est droit [H]. Donc (n), il est plus grand que l'angle DEB; & par consé- N. 105.

Digitized by Google

N. 112. quent (n), le côté DE est plus grand que le côté DB. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la perpendiculaire BC que l'on prenne le point E; pourvu que ce ne soit pas au point B. Donc, le côté DE sera toujours plus grand que le rayon DB; & par conséquent, son extrémité E sera toujours hors du cercle X. Mais, puisque le point E est toujours hors de ce cercle (excepté seulement lorsqu'il est pris sur le point B) la perpendiculaire BC ne peut avoir que ce seul point B de commun avec ce même cercle; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 32. Du point B *, on ne peut tirer aucune ligne droite entre la perpendiculaire BC & le cercle X.

Const. Du point B, tirez entre le diametre AB & la perpendiculaire BC, une ligne droite quelconque BF. Du centre
N. 97. D, abaissez (n) une perpendiculaire DE à cette ligne.

N. 21. *Démonst.* Le triangle DEB est (n)
N. 105. rectangle en E. Donc (n), l'angle DEB est plus grand que l'angle DBE; & par
N. 112. conséquent (n), le côté DB est plus grand que le côté DE. Mais, puisque le

Digitized by Google

rayon DB est plus grand que le côté DE, l'extrémité E de ce côté est dans le cercle X ; & par conséquent, puisque la ligne BF passe par cette extrémité, elle passe dans ce cercle. Or, la même démonstration subsiste, quelque près de la perpendiculaire BC que l'on tire la ligne BF. Donc, on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette perpendiculaire & le cercle X ; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

242. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *si une ligne droite qui est tirée de l'une des extrémités du diametre d'un cercle, est perpendiculaire à ce même diametre, elle sera* (n) *une tangente à ce cercle.* N. 212.

COROLLAIRE II.

243. Il suit de ce corollaire, que *pour tirer une tangente à un cercle, d'un point donné sur la circonférence, il faut tirer un diametre qui se termine à ce point ; & de ce même point, élever* (n) *une perpendiculaire à ce diametre.* N. 94.

SCHOLIE.

244. *L'angle formé par une tangente*

Digitized by Google

Fig 33. *AB* * *& par un arc AC, s'appelle un angle de* contingence. *Il ne peut être di-*
N. 241. *visé par aucune ligne droite* (n) *; mais il peut l'être en une infinité de parties, par*
N. 238. *des arcs AD, AE, &c.* (n) *: & ces deux propriétés opposées, ont donné lieu à beaucoup de raisonnemens métaphysiques, dont aucun n'est satisfaisant.*

Celui de tous ces raisonnemens qui paroît avoir été le moins mal reçu, prétend que les arcs AD, AE, &c. ne divisent point l'angle CAB ; mais qu'ils touchent chacun la ligne AB à un point d'autant plus long, que les diametres des cercles dont ils sont des arcs, sont plus grands. Je demande si ces points plus longs les uns que les autres, sont bien géométriques? Et si l'on conçoit bien clairement,
N. 4. *qu'une chose qui* (n) *n'a aucune longueur, puisse être plus longue qu'une chose pareille, qui n'a de même aucune longueur?*

De ce qu'une ligne droite divise un angle rectiligne, & ne peut diviser un angle de contingence, on conclud que l'angle de contingence est plus petit qu'aucun angle rectiligne. Mais, cette conséquence est-elle juste, & celle-ci ne seroit-elle pas plus exacte? Donc, un angle de contingence & un angle rectiligne, ne sont point de même genre.

Digitized by Google

PROPOSITION XVII.

PROBLÊME.

245. *D'un point donné hors d'un cercle, tirer une tangente à ce cercle.*

IL faut tirer du point A * pris hors du cercle BD, une tangente à ce cercle. Fig. 34.

Conſt. Tirez du point A au centre C, une ligne droite AC. Du même centre C, & avec la ligne AC, priſe pour rayon, décrivez un cercle AE. Du point B auquel cette ligne AC coupe la circonférence du cercle BD, élevez (n) une perpendiculaire BE à cette même ligne AC. N. 96. Du point E auquel cette perpendiculaire rencontre la circonférence du cercle AE, tirez au centre C une ligne droite EC. Enfin, tirez du point A au point D, auquel cette ligne coupe la circonférence du cercle BD, une ligne droite AD. Cette derniere ligne ſera la tangente demandée.

Démonſt. Dans les triangles CDA & CBE, le côté CD eſt égal au côté CB (n), le côté CA au côté CE (n), & l'an- N. 35. N. 34.

Digitized by Google

N. 83. gle C est commun. Donc (n), l'angle CDA est égal à l'angle CBE; & par
N. 21. conséquent, puisque (n) le dernier est un angle droit, le premier en est aussi
N. 21. un. Mais (n), puisque l'angle CDA est un angle droit, la ligne AD est perpendiculaire au rayon CD. Or [c], cette perpendiculaire est tirée de l'extrémité
N. 242. D de ce rayon. Donc (n), elle est une tangente au cercle BD; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

246. *Si une ligne droite touche un cercle, la ligne droite qui sera tirée du centre au point de contact, sera perpendiculaire à cette tangente.*

Fig. 35. DANS le cercle X*, la ligne droite AB qui est tirée du centre A au point de contact B, est perpendiculaire à la tangente CD.

Const. Tirez du centre A à un point quelconque E de la ligne CD (mais qui soit cependant différent du point B) une ligne droite AE.

Digitized by Google

Démonst. Si quelque ligne droite tirée du centre A, mais différente de la ligne AB (par exemple la ligne AE) pouvoit être perpendiculaire à la tangente CD, le triangle BAE seroit rectangle en E (n). N. 21.
Ainsi (n), l'angle AEB seroit plus grand N. 105.
que l'angle ABE; & par conséquent (n), N. 112.
le côté AB seroit plus grand que le côté AE. Or (n), cela ne peut point être, N. 72.
puisque (n) ce même côté AB est égal N. 35.
à la partie AF du côté AE. Donc, aucune ligne droite tirée du centre A, mais différente de la ligne AB, ne peut être perpendiculaire à la tangente CD. Donc, la ligne AB est perpendiculaire à cette tangente; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

247. *Si une ligne droite touche un cercle, la perpendiculaire à cette tangente, qui sera tirée du point de contact, passera par le centre.*

Fig. 96. DANS le cercle X *, la perpendiculaire AB à la tangente CD, qui est tirée du point de contact A, passe par le centre.

Const. Du point E, pris à volonté (mais cependant hors de la perpendiculaire AB) tirez au point A, une ligne droite EA.

Démonst. Si le point E étoit le centre du cercle X, la ligne EA seroit perpen-
N. 246. diculaire à la tangente CD (n). Ainsi
N. 21. (n), l'angle EAD seroit un angle droit;
N. 62. & par conséquent (n), il seroit égal à
N. 72. l'angle BAD. Mais (n), cela ne peut point être. Donc, le point E n'est pas le centre du cercle X. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point hors de la perpendiculaire AB que l'on prenne le point E. Donc, le centre du cercle X est dans cette perpendiculaire; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION

Digitized by Google

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

248. *Dans le cercle, l'angle qui a son sommet au centre, est double de celui qui a le sien dans la circonférence, s'ils s'appuient tous les deux sur le même arc.*

DANS le cercle X *, l'angle AEC qui a son sommet au centre E, & qui s'appuie sur le même arc AC que l'angle ABC, qui a le sien dans la circonférence, est double de cet angle ABC. Fig. 37. & 38.

Const. Tirez du point B, par le centre E, une ligne droite BED.

Démonst. L'angle AED, qui est extérieur au triangle AEB, est (n) égal à la somme des angles intérieurs ABD & BAE qui lui sont opposés. Or (n), ces angles intérieurs sont égaux, puisque (n) les côtés EA & EB le sont. Donc, l'angle AED est double de l'angle ABD. Mais on démontre de la même maniere, que l'angle DEC est aussi double de l'angle DBC. Ainsi : N. 135. N. 86. N. 35.

Premierement (*fig.* 37.) chaque partie AED & DEC de l'angle AEC, est double

Digitized by Google

de chaque partie correſpondante ABD & DBC de l'angle ABC. Donc, l'angle AEC eſt auſſi double de l'angle ABC.

Secondement (*fig.* 38.) l'angle AED eſt double de l'angle ABD; & la partie DEC du premier, eſt double de la partie DBC du ſecond. Donc, l'autre partie AEC du même premier, eſt auſſi double de l'autre partie ABC du même ſecond.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

249. Il ſuit de ce théorême, que *dans le cercle, l'angle qui a ſon ſommet dans la circonférence, n'a pour meſure que la moitié de l'arc ſur lequel il s'appuie.*

Fig. 37. & 38. Dans le cercle X*, l'angle ABC qui a ſon ſommet B dans la circonférence, a pour meſure la moitié de l'arc AB ſur lequel il s'appuie.

Conſt. Tirez du centre E aux points A & C, des lignes droites EA & EC.

Démonſt. L'angle AEC a pour meſure
N. 17. tout l'arc AC (n). Or (n), l'angle ABC
N. 248. n'eſt que la moitié de l'angle AEC. Donc, il n'a pour meſure que la moitié de l'arc AC; & par conſéquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

250. *Dans le cercle, les angles qui sont dans le même segment* (n), *sont égaux.* N. 222.

DANS le cercle X *, les angles B & D, qui sont dans le même segment ABDC, sont égaux. Fig. 39.

Démonst. Les angles B & D ont chacun leur sommet dans la circonférence du cercle X, & s'appuient chacun sur le même arc AEC; ainsi (n), ils ont chacun pour mesure la moitié de cet arc. N. 49. Or (n), puisque ces angles ont chacun la même mesure, ils sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 17.

Digitized by Google

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

251. *Dans le cercle, la somme de deux angles opposés d'un quadrilatere inscrit* †, *est égale à celle de deux angles droits.*

Fig. 40. DANS le cercle X *, la somme des angles opposés (par exemple BAD & BCD) du quadrilatere inscrit ABCD, est égale à celle de deux angles droits.

Const. Tirez les diagonales AC & BD.

Démonst. Dans le triangle ABD, la somme des angles BAD, ABD & ADB
N. 136. est égale à celle de deux angles droits (n).
N. 250. Or (n), l'angle ACD est égal à l'angle ABD, puisque ces deux angles sont dans le même segment ABCD; & l'angle ACB est égal à l'angle ADB, puisque ces deux angles sont aussi dans le même
N. 61. segment BCDA. Donc (n), la somme des angles BAD, ACD & ACB, (c'est-

† On dit d'une figure, qu'elle est *inscrite* dans une autre, lorsque tous les angles ont leur sommet dans la circonférence de cette autre. *Voyez* les définitions du quatrieme Livre.

Digitized by Google

à-dire (n), la somme des angles BAD & BCD) est égale à celle de deux angles droits; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 72.

Autre Démonst. L'angle BAD a pour mesure la moitié de l'arc BCD (n); & l'angle BCD a pour mesure la moitié de l'arc BAD (n). Donc, la somme de ces deux angles a pour mesure la moitié de la circonférence du cercle X. Mais (n), la moitié de la circonférence d'un cercle est la mesure de la somme de deux angles droits. Donc, la somme des deux angles BAD & BCD & celle de deux angles droits, ont chacune la même mesure; & par conséquent, elles sont égales. Donc, C. Q. F. D. N. 24. N. 24. N. 38.

Digitized by Google

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

252. *Si des segmens de cercle qui ont la même corde, sont vers un même côté, ils ne seront point semblables.*

Fig. 41 LES segmens de cercle ABC * & ADC qui ont la même corde AC, & sont vers le même côté, ne seront point semblables.

Const. Du point B, pris à volonté sur l'arc du plus grand segment, tirez aux points A & C, des lignes droites BA & BC. Du point D auquel la ligne BC coupe l'arc du plus petit segment, tirez au point A une ligne droite DA.

Démonst. L'angle ADC, qui est extérieur au triangle ABD, est (n) plus grand que l'angle intérieur B qui lui est opposé. N. 103. N. 224. Or (n), puisque l'angle ADC, qui est inscrit dans le segment ADC, n'est point égal à l'angle B qui est inscrit dans le segment ABC, ces deux segmens ne sont point semblables; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

253. *Si des ſegmens de cercle qui ont des cordes égales, ſont ſemblables, ils ſeront égaux.*

LEs ſegmens de cercle ABC * & DEF qui ont des cordes égales AC & DF, & qui ſont ſemblables, ſont égaux. Fig. [illegible]

Conſt. Poſez par penſée le ſegment ABC ſur le ſegment DEF, de maniere que le point A étant ſur le point D, la corde AC ſoit ſur la corde DF.

Démonſt. Le point C tombera ſur le point F (n), puiſque [H] la corde AC eſt égale à la corde DF. Ainſi, la corde DF ſera commune aux ſegmens ABC & DEF; & par conſéquent, ſi l'arc ABC tomboit ou en-dedans, ou en-dehors, de l'arc DEF, deux ſegmens de cercle qui auroient la même corde DF, & ſeroient vers le même côté, pourroient être ſemblables. Or (n), cela n'eſt point poſſible. Donc, l'arc ABC tombera ſur l'arc DEF; & par conſéquent, les ſegmens N. 70. N. 252.

Digitized by Google

ABC & DEF se couvriront réciproque-
N. 69. ment. Mais (n), puisque ces segmens se couvrent réciproquement, ils sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

PROBLÊME.

254. Trouver le centre d'un arc de cercle donné.

Fig. 43. IL faut trouver le centre de l'arc de cercle CBD.

Const. Prenez sur l'arc CBD trois points à volonté; par exemple, les points C, B & D. Tirez du point B aux points C & D, des cordes BC & BD. Divisez
N. 94. (n) chacune de ces cordes en deux parties égales BE & EC, BF & FD. Enfin,
N. 96. du point E, élevez (n) une perpendiculaire EA à la corde BC; & du point F, une perpendiculaire FA à la corde BD. Le point A, auquel ces perpendiculaires se rencontreront, sera le centre demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point A aux points C, B & D, des lignes droites AC, AB & AD.

Démonst. Dans les triangles AEC & AEB,

Digitized by Google

AEB, qui (n) sont rectangles l'un & N. 21.
l'autre en E, le côté EC est égal au côté EB [c], & le côté EA est commun. Donc (n), le côté AC est égal au côté AB. N. 85.
Or, en comparant le triangle AFB au triangle AFD, on démontre de la même maniere, que le côté AB est égal au côté AD. Donc, on peut tirer du point A à l'arc CBD plus de deux lignes droites égales; & par conséquent (n), ce point N. 234.
est le centre de cet arc. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

255. *Dans les cercles égaux, si des angles qui ont leurs sommets dans les circonférences sont égaux, les arcs sur lesquels ces angles s'appuient le seront aussi.*

SI dans les cercles G * & H, qui sont Fig. 44.
égaux, les angles B & DEF sont égaux, les arcs AIC & DKF, sur lesquels ces angles s'appuient, le seront aussi.

Const. Tirez du point A au point C, une ligne droite AC; & du point D au point F, une ligne droite DF. Tirez aussi

Digitized by Google

du centre G aux points A & C, des lignes droites GA & GC; & du centre H aux points D & F, des lignes droites HD & HF.

Démonst. L'angle B a son sommet dans la circonférence [H], l'angle G a le sien au centre [C], & [C] ces deux angles s'appuient sur le même arc AIC;
N. 248. ainsi (n), l'angle G est double de l'angle B. Or, on démontre de la même maniere, que l'angle H est double de l'angle DEF. Donc, puisque [H] les angles B & DEF sont égaux, les angles G & H
N. 67. le sont aussi (n); & par conséquent, puisque dans les triangles AGC & DHF, le
N. 210. côté GA est (n) égal au côté HD, & le côté GC au côté HF, le côté AC est
N. 88. égal au côté DF (n).

Ainsi, les segmens ABC & DEF,
N. 224. qui sont semblables (n), puisque [H] les angles B & DEF sont égaux, ont des
N. 253. cordes égales AC & DF. Donc (n), ces segmens sont égaux; & par conséquent, si du cercle G on retranche le segment ABC, & du cercle H le segment DEF, les restes, qui seront les segmens AIC &
N. 64. DKF, seront aussi égaux (n). Mais, puisque ces derniers segmens sont égaux, & qu'ils ont des cordes égales AC & DF,
N. 253. ils ont aussi (n) des arcs égaux AIC &

Digitized by Google

DKF ; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

256. Il suit de ce théorême, que *dans les cercles égaux, si des angles qui ont leurs sommets aux centres sont égaux, les arcs sur lesquels ces angles s'appuient le seront aussi.*

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

257. *Dans les cercles égaux, si des angles qui ont leurs sommets dans les circonférences, s'appuient sur des arcs égaux, ces angles le seront aussi.*

SI dans les cercles G * & H, qui sont égaux, les arcs AIC & DKF sont égaux, les angles B & DEF, qui s'appuient sur ces arcs, le seront aussi. Fig. 44

Const. Tirez du point E aux points L & M, pris à volonté sur la circonférence du cercle H, l'un au-dessous du point F & l'autre au-dessus, des lignes droites EL & EM.

Démonst. Si l'angle B n'étoit point égal à l'angle DEF, il le seroit à quelque

Digitized by Google

angle DEL plus petit que cet angle, ou à quelque angle DEM, plus grand que ce même angle. Or :

Premierement, l'angle B n'eſt point égal à un angle DEL plus petit que l'angle DEF; puiſque s'il l'étoit, l'arc AIC
N. 255. ſeroit égal à l'arc DKL (n). Mais [H], le même arc AIC eſt auſſi égal à l'arc DKF.
N. 62. Donc (n), l'arc DKL ſeroit égal à l'arc
N. 72. DKF. Ce qui ne peut point être (n).

Secondement, l'angle B n'eſt point non plus égal à un angle DEM plus grand que l'angle DEF; puiſque s'il l'étoit,
N. 255. l'arc AIC ſeroit égal à l'arc DKM (n). Mais [H], le même arc AIC eſt auſſi égal
N. 62. à l'arc DKF. Donc (n), l'arc DKM ſeroit égal à l'arc DKF. Ce qui ne peut
N. 72. point encore être (n).

Donc, l'angle B eſt égal à l'angle DEF; & par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

258. Il ſuit de ce théorême, que *dans les cercles égaux, ſi des angles qui ont leurs ſommets aux centres, s'appuient ſur des arçs égaux, ces angles le ſeront auſſi.*

Digitized by Google

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

259. *Dans les cercles égaux, les cordes égales tendent des arcs égaux.*

DANS les cercles B * & E, qui sont égaux, si les cordes AC & DF sont égales, les arcs AGC & DHF seront égaux. Fig. 45.

Const. Tirez du centre B aux points A & C., des lignes droites BA & BC; & du centre E aux points D & F, des lignes droites ED & EF.

Démonst. Dans les triangles ABC & DEF, le côté BA est égal au côté ED (n), le côté BC au côté EF (n), & le côté AC au côté DF [H]. Donc (n), l'angle B est égal à l'angle E. Or, puisque les angles B & E, qui [c] ont leurs sommets aux centres des cercles égaux B & E, sont égaux, les arcs AGC & DHF, sur lesquels ces angles s'appuient [c], sont aussi égaux (n); & par conséquent, C. Q. F. D. N. 210. N. 210. N. 90. N. 256.

Digitized by Google

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

260. *Dans les cercles égaux, les arcs égaux sont tendus par des cordes égales.*

Fig. 45. DANS les cercles B * & E, si les arcs AGC & DHF sont égaux, les cordes AC & DF seront égales.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les angles B & E qui [c] ont leurs sommets aux centres des cercles égaux B & E, s'appuient sur des arcs AGC & DHF qui sont aussi égaux [H].
N. 258. Donc (n), ces angles sont égaux; & par conséquent, puisque dans les triangles ABC & DEF, le côté BA est égal au
N. 210. côté ED (n), & le côté BC au côté EF
N. 210. (n), le côté AC est égal au côté DF (n).
N. 83. Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XXX.

PROBLÊME.

261. *Diviser un arc de cercle en deux parties égales.*

IL faut diviser en deux parties égales, l'arc de cercle ABC *. Fig. 46.

Const. Tirez de l'extrémité A de l'arc ABC à son autre extrémité C, une ligne droite AC. Divisez (n) cette ligne en N. 94. deux parties égales DA & DC. Enfin (n), N. 96. élevez du point D une perpendiculaire DB à cette même ligne. Cette perpendiculaire divisera l'arc ABC en deux parties BEA & BFC, qui seront égales.

Pour la démonstration. Tirez du point B aux points A & C, des lignes droites BA & BC.

Démonst. Dans les triangles BDA & BDC, qui (n) sont rectangles l'un & N. 21. l'autre en D, le côté DA est égal au côté DC [c], & le côté DB commun. Donc (n), le côté BA est égal au côté BC. N. 83. Or (n), puisque les cordes BA & BC N. 259. sont égales, les arcs BEA & BFC sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. F.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

262. Il suit de ce problême, que *pour diviser un arc de cercle en quatre parties égales, il faut commencer par le diviser en deux parties égales; & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales, en deux autres qui le soient aussi. Et ainsi de suite, pour le diviser en 8, en 16, en 32, &c.*

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

263. *L'angle qui est inscrit dans un demi-cercle, est droit: celui qui est inscrit dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est aigu: enfin, celui qui est inscrit dans un segment plus petit qu'un demi-cercle, est obtus.*

PREMIEREMENT.

Fig. 47. L'ANGLE ABC * qui est inscrit dans le demi-cercle ATBC, est un angle droit.

Const. Prolongez le côté CB vers N, indéfiniment, & tirez du point B au centre O, une ligne droite BO.

Digitized by Google

Démonst. L'angle ABN, qui est extérieur au triangle ABC, est (n) égal à la somme des angles intérieurs C & A qui lui sont opposés. Mais (n), l'angle OBC est égal à l'angle C, puisque (n) les côtés OC & OB du triangle COB sont égaux: & l'angle OBA est égal à l'angle A, puisque (n) les côtés OA & OB du triangle AOB sont aussi égaux. Donc (n), l'angle ABN est égal à la somme des angles OBC & OBA; & par conséquent (n), à l'angle ABC. Or (n), puisque les angles ABN & ABC, sont égaux, la ligne AB est perpendiculaire à la ligne NBC. Donc (n), l'angle ABC est un angle droit; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

N. 155. N. 86. N. 35. N. 35. N. 61. N. 72. N. 19. N. 22.

SECONDEMENT.

L'angle EFG *, qui est inscrit dans le segment EQFG, plus grand qu'un demi-cercle, est un angle aigu. Fig. 47.

Const. Tirez du point G par le centre P, un diametre GQ; & du point F au point Q, une ligne droite FQ.

Démonst. L'angle EFG est (n) plus petit que l'angle QFG. Or [D], l'angle QFG est un angle droit, puisque [C] le segment QFG dans lequel il est inscrit, est un demi-cercle. Donc, l'angle EFG est plus petit qu'un angle droit; & par N. 72.

Digitized by Google

N. 23. conséquent (n), il est un angle aigu. Donc, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Fig. 47. Enfin, l'angle IKL * qui est inscrit dans le segment IVKL, plus petit qu'un demi-cercle, est un angle obtus.

Const. Tirez du point L par le centre R, un diametre LS; & du point K au point S, une ligne droite KS.

N. 72. *Démonst.* L'angle IKL est (n) plus grand que l'angle SKL. Or [D], l'angle SKL est un angle droit, puisque [C] le segment SVKL dans lequel il est inscrit, est un demi cercle. Donc, l'angle IKL est plus grand qu'un angle droit; & par

N. 22. conséquent (n), il est un angle obtus. Donc, C. Q. F. 3°. D.

SCHOLIE.

On démontre ordinairement ce théorême, de la maniere suivante.

Fig. 47. *Les angles ABC *, EFG & IKL ont*

N. 249. *pour mesure* (n), *l'un la moitié de l'arc ADC, l'autre, la moitié de l'arc EHG; & le dernier, la moitié de l'arc IML. Or* [H], *les moitiés de ces arcs sont, l'une, le quart de la circonférence d'un cercle, l'autre, moins que ce quart; & la derniere, plus que ce même quart. Donc*

Digitized by Google

(n), *les angles proposés sont ; l'un, un angle droit, l'autre, un angle aigu, & le dernier, un angle obtus ; & par conséquent, C. Q. F. D.* N. 38, 23 & 22.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

264. *Dans le cercle, les angles dans les segmens, & les angles des segmens, sont alternativement † égaux.*

DANS le cercle H *, qui est divisé par la corde CD en deux segmens CFD & CEGD, l'angle F qui est dans le segment CFD, est égal à l'angle DCB du segment CEGD ; & l'angle E qui est dans le segment CEGD, est égal à l'angle DCA du segment CFD. Fig. 48.

Const. Tirez du point de contact C par le centre H, un diametre CG ; & du point G au point D, une ligne droite GD.

Démonst. Premierement, la somme des angles DCA & DCG est (n) égale à l'angle ACG, qui (n) est un angle droit, N. 72. N. 246.

† On entend par *alternativement*, que l'angle dans le segment & l'angle du segment doivent être pris, l'un d'un côté de la ligne coupante, & l'autre, de l'autre côté de la même ligne.

Digitized by Google

puisque [c] la ligne CG est tirée du point
N. 156. de contact C par le centre H. Or (n), la somme des angles G & DCG est aussi
N. 263. égale à un angle droit; puisque (n) le triangle CDG est rectangle en D. Donc
N. 62. (n), la somme des angles DCA & DCG est égale à celle des angles G & DCG;
N. 64. & par conséquent (n), l'angle DCA est égal à l'angle G.

N. 251. Mais (n), la somme des angles opposés G & F du quadrilatere FDGC qui est inscrit dans le cercle H, est égale à celle
N. 98. de deux angles droits; & (n) celle des angles DCA & DCB l'est aussi. Donc
N. 62. (n), la somme des angles G & F est égale à celle des angles DCA & DCB; & par conséquent, puisque [D] les angles G & DCA sont égaux, les angles F & DCB le sont aussi.

Secondement, la somme des angles F & E du quadrilatere FDEC, qui est aussi
N. 251. inscrit dans le cercle H, est (n) égale à
N. 98. celle de deux angles droits. Or (n), celle des angles DCB & DCA l'est aussi. Donc
N. 62. (n), la somme des angles F & E est égale à celle des angles DCB & DCA; & par conséquent, puisque [D] les angles F & DCB sont égaux, les angles E & DCA le sont aussi.

Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

265. Il suit de ce théorême, que *dans le cercle, l'angle du segment a pour mesure la moitié de l'arc qui est tendu par la corde de ce segment.*

Dans le cercle H *, l'angle DCA a pour mesure la moitié de l'arc DFC; & l'angle DCB, la moitié de l'arc DGEC. Fig. 48.

Const. Des points F & E, pris à volonté, l'un dans l'arc DFC, & l'autre dans l'arc DGEC, tirez aux points D & C, des lignes droites FD & FC, ED & EC.

Démonst. L'angle DCA est égal à l'angle E (n). Or (n), l'angle E a pour mesure la moitié de l'arc DFC. Donc, l'angle DCA a aussi pour mesure la moitié du même arc. N. 264. N. 249.

Pareillement, l'angle DCB est égal à l'angle F (n). Or (n), l'angle F a pour mesure la moitié de l'arc DGEC. Donc, l'angle DCB a aussi pour mesure la moitié du même arc. N. 264. N. 249.

Par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXIII.

PROBLÊME.

166. Décrire sur une ligne droite donnée, un segment de cercle qui soit capable † d'un angle donné.

Fig. 49. IL faut décrire sur la ligne droite AB *, un segment de cercle, qui soit capable de l'angle C.

N. 120. *Const.* Décrivez sous la ligne AB (n), un angle BAD qui ait le point A pour sommet, & qui soit égal à l'angle C. Du
N. 96. même point A, élevez (n) une perpen-
N. 94. diculaire AE à la ligne AD. Divisez (n) la ligne AB en deux parties égales AF &
N. 96. FB. Du point F, élevez aussi (n) une perpendiculaire FE à cette même ligne AB. Enfin, du point E, auquel les deux perpendiculaires se rencontrent, pris pour centre, & avec la ligne EA, prise pour rayon, décrivez un arc AGB. Le segment AGB, que cet arc formera avec la ligne AB, sera le segment demandé.

† On dit d'un segment, qu'il est *capable* d'un certain angle, lorsque les angles que l'on peut inscrire dans ce segment sont égaux à ce certain angle.

Digitized by Google

Pour la démonstration. Achevez le cercle AGBH.

Démonst. La ligne AD est une tangente au cercle AGBH (n); puisque [c] elle est tirée de l'extrémité A du rayon EA auquel elle est perpendiculaire. Donc (n), l'angle BAD est l'angle du segment AHB; & par conséquent (n), il est égal à un angle quelconque inscrit dans le segment AGB. Mais [c], le même angle BAD est aussi égal à l'angle C. Donc (n), un angle quelconque inscrit dans le segment AGB sera égal à l'angle C; & par conséquent, C. Q. F. F. N. 242. N. 220. N. 264. N. 62.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLÊME.

267. Diviser un cercle en deux segmens, dont l'un soit capable d'un angle donné.

IL faut diviser le cercle X * en deux segmens, dont l'un soit capable de l'angle E. Fig. 50.

Const. Du point C, pris à volonté sur la circonférence, tirez (n) une tangente AB au cercle X. Décrivez sur cette tan- N. 244.

Digitized by Google

N. 120. gente (n), un angle DCB qui ait le même point précédent C pour sommet, & soit égal à l'angle E. Le côté DC divisera le cercle X, comme il est demandé.

Démonst. L'angle DCB est l'angle du
N. 210. segment CGD (n). Ainsi (n), il est égal
N. 264. à un angle quelconque inscrit dans le segment CFD. Mais [c], le même angle DCB est aussi égal à l'angle E. Donc
N. 62. (n), un angle quelconque inscrit dans le segment CFD, sera égal à l'angle E; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÊME.

268. *Dans le cercle, si deux cordes s'entrecoupent, le rectangle des parties de l'une sera égal au rectangle des parties de l'autre.*

Fig. 51, 52, 53, & 54. DANS le cercle X *, le rectangle des parties AF & FB de la corde AB, est égal au rectangle des parties CF & FD de la corde CD.

Les cordes AB & CD passent chacune par le centre du cercle; ou une seule y passe, & est perpendiculaire, ou oblique à celle

Digitized by Google

celle qui n'y passe point ; ou enfin, aucune n'y passe.

PREMIER CAS.

*Lorsque les cordes AB * & CD passent chacune par le centre F.* Fig. 51.

Démonst. Les parties AF, FB, CF & FD sont toutes égales (n). Ainsi, le rectangle des deux premieres est égal à celui des deux dernieres. N. 35.

SECOND CAS.

*Lorsqu'une seule des cordes AB * & CD (par exemple, la corde AB) passe par le centre E, & est perpendiculaire à l'autre corde CD qui n'y passe point.* Fig. 52.

Const. Tirez du point C, au centre E, une ligne droite CE.

Démonst. La ligne AB est divisée en deux parties AF & FB, & (n) le point E est son milieu. Ainsi (n), le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la ligne EF, est égal au quarré de la ligne EB ; & par conséquent, à celui de la ligne EC, puisque (n) ces lignes EB & EC sont égales. Mais (n), les quarrés des lignes CF & EF sont aussi égaux au quarré de la même ligne EC ; puisque [H] le N. 35. N. 187. N. 35. N. 171.

Digitized by Google

triangle CFE est rectangle en F. Donc
N. 62. (n), le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne EF, est égal aux quarrés des lignes CF & EF; & par conséquent (n), ce même rectangle est égal
N. 64. au quarré de la ligne CF. Or, le quarré de cette ligne CF est la même chose que le rectangle des parties CF & FD; puisque (n) ces parties sont égales. Donc, le
N. 228. rectangle des parties AF & FB est égal à celui des parties CF & FD.

TROISIEME CAS.

Fig. 53. *Lorsqu'une seule des cordes AB * & CD (par exemple, la corde AB) passe par le centre F, & est oblique à l'autre corde CD qui n'y passe point.*

Const. Tirez du point D au centre E, une ligne droite DE; & du même centre
N. 97. E, abaissez (n) une perpendiculaire EG à la corde CD.

Démonst. La ligne CD est divisée en
N. 228. deux parties CF & FD, & (n) le point
N. 187. G est son milieu. Ainsi (n), le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la ligne GF, est égal au quarré de la ligne
N. 63. GD; & par conséquent (n), ce même rectangle, avec les quarrés des lignes GF & EG, est égal à ceux des lignes GD &

Digitized by Google

EG. Mais (n), les quarrés des lignes GF N. 171.
& EG sont égaux au quarré de la ligne EF; & ceux des lignes GD & EG le sont au quarré de la ligne ED, puisque [c] les triangles EGF & EGD sont rectangles, l'un & l'autre en G. Donc (n), N. 61.
le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne EF, est égal au quarré de la ligne ED.

Or, la ligne AB est aussi divisée en deux parties AF & FB, & (n) le point N. 35.
E est aussi son milieu. Donc (n), le rec- N. 187.
tangle de ces deux parties, avec le quarré de la ligne EF, est égal au quarré de la ligne EB; & par conséquent, à celui de la même ligne précédente ED, puisque (n) ces lignes EB & ED sont égales. N. 35.

Donc (n), le rectangle des parties AF N. 62.
& FB, avec le quarré de la ligne EF, est égal au rectangle des parties CF & FD, avec le quarré de la même ligne EF; & par conséquent (n), ce premier rectan- N. 64.
gle est égal au dernier.

QUATRIEME CAS.

Enfin, lorsqu'aucune des lignes AB * Fig. 54.
& CD ne passe par le centre E.

Const. Tirez par le centre E & par le point F, un diametre GH.

Démonst. Le rectangle des parties AF & FB est [D] égal à celui des parties GF & FH, puisque [C] la corde GH passe par le centre E. Or, par la même raison, le rectangle des parties CF & FD est aussi égal à celui des mêmes parties GF
N. 62. & FH. Donc (n), le rectangle des parties AF & FB est égal à celui des parties CF & FD.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÊME.

269. *Si de deux lignes droites qui sont tirées d'un même point, pris hors d'un cercle à la circonférence, l'une coupe ce cercle, & l'autre le touche; le rectangle fait de la sécante & de sa partie extérieure, sera égal au quarré de la tangente.*

Fig. 55. & 56. LE rectangle de la sécante AC * & de sa partie extérieure AD, est égal au quarré de la tangente AB.

La sécante AC passe par le centre du cercle, ou elle n'y passe point.

Digitized by Google

PREMIER CAS.

*Lorſque la ſécante AC * paſſe par le centre E.* Fig. 55.

Conſt. Tirez du centre E au point de contact B, une ligne droite EB.

Démonſt. La ligne AC eſt diviſée en deux parties AD & DC, & (n) le point E eſt le milieu de la partie DC. Donc (n), le rectangle des lignes AC & AD, avec le quarré de la ligne ED, eſt égal au quarré de la ligne EA. Mais (n), les quarrés des lignes AB & EB ſont auſſi égaux au quarré de la même ligne EA; puiſque (n) le triangle ABE eſt rectangle en B. Donc (n), le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne ED, eſt égal aux quarrés des lignes AB & EB; & par conſéquent (n), puiſque (n) les lignes ED & EB ſont égales, ce rectangle eſt égal au quarré de la ligne AB.

N. 35. N. 190. N. 171. N. 246. N. 62. N. 64. N. 35.

SECOND CAS.

*Lorſque la ſécante AC * ne paſſe point par le centre E.* Fig. 56.

Conſt. Tirez du centre E aux points A, D & B, des lignes droites EA, ED & EB. Du même centre E, abaiſſez (n) une perpendiculaire EF à la corde DC.

N. 97.

Digitized by Google

Démonst. La ligne AC est divisée en
N. 228. deux parties au point D, & (n) le point
F est le milieu de la partie DC. Donc
N. 190. (n), le rectangle des lignes AC & AD,
avec le quarré de la ligne DF, est égal
au quarré de la ligne AF; & par consé-
N 63. quent (n), ce même rectangle, avec les
quarrés des lignes DF & FE, est égal à
N. 171. ceux des lignes AF & FE. Mais (n), les
quarrés des lignes DF & FE sont égaux
au quarré de la ligne ED; & ceux des
lignes AF & FE le sont au quarré de la
ligne EA; puisque [c] les triangles DFE
& AFE sont rectangles l'un & l'autre en
N. 61 F. Donc (n), le rectangle précédent,
avec le quarré de la ligne ED, est égal
au quarré de la ligne EA.

N. 171. Or (n), les quarrés des lignes AB &
EB sont aussi égaux au quarré de la même
N. 246. ligne EA; puisque (n) le triangle ABE
N. 62. est rectangle en B. Donc (n), le même
rectangle précédent, avec le quarré de
la ligne ED, est égal aux quarrés des
N. 64. lignes AB & EB; & par conséquent (n),
N. 35. puisque (n) les lignes ED & EB sont
égales, ce rectangle est égal au quarré de
la ligne AB.

Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

270. Il suit de ce théorême, que *si plusieurs lignes droites qui sont tirées d'un même point, pris hors d'un cercle à la circonférence, coupent ce cercle, les rectangles faits de ces lignes & de leurs parties extérieures, chacun de chacune, seront égaux.*

Le rectangle de la sécante AB * & de sa partie extérieure AE, est égal au rectangle de la sécante AC & de sa partie extérieure AF. Fig. 57.

Const. Du point A, tirez (n) une tangente AD au cercle X. N. 248.

Démonst. Le rectangle de la sécante AB & de sa partie extérieure AE; & celui de la sécante AC & de sa partie extérieure AF, sont égaux l'un & l'autre au quarré de la même tangente AD (n). N. 269. Donc (n), ils le sont aussi entr'eux; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 62.

COROLLAIRE II.

271. Il suit aussi de ce même théorême, que *les tangentes à un cercle, qui sont tirées d'un même point, sont égales.*

Les tangentes AB * & AC sont égales. Fig. 58.

Digitized by Google

Conſt. Tirez du point A une ſécante quelconque AD.

Démonſt. Le quarré de la tangente AB
N. 269. & celui de la tangente AC ſont (n) égaux l'un & l'autre au rectangle de la ſécante AD & de ſa partie extérieure AE. Donc
N. 62. (n), ils ſont auſſi égaux entr'eux; & par conſéquent, ces tangentes ſont égales. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

272. Enfin, il ſuit de ce corollaire, que *du même point on ne peut tirer plus de deux tangentes au même cercle.*

Fig 58. Du point A *, on ne peut tirer plus de deux tangentes au cercle X.

Démonſt. S'il étoit poſſible de tirer du point A plus de deux tangentes au cercle X, on pourroit, d'un point pris hors d'un cercle, tirer à la circonférence plus
N. 271. de deux lignes droites égales; puiſque (n) les tangentes qui ſont tirées d'un même
N. 233. point ſont égales. Or (n), d'un point pris hors d'un cercle, on ne peut point tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales. Donc, il n'eſt point poſſible de tirer du point A plus de deux tangentes au cercle X; & par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

Digitized by Google

USAGE.

273. *On peut se servir de ce théorême, de la maniere suivante, pour mesurer le diametre d'un cercle X* dans lequel on ne peut point entrer.* Fig. 57.

On prend, hors du cercle proposé, un point à volonté; par exemple, le point A. De ce point, on tire (soit avec des cordes, soit autrement) deux tangentes AB & AC à ce même cercle. On divise ensuite (n) *en deux parties égales BAD & CAD, l'angle BAC formé par ces deux tangentes. Enfin, on mesure l'une de ces mêmes tangentes, par exemple la tangente AB; & l'on mesure aussi la ligne AD, qui, si elle étoit prolongée, passeroit par le centre* (n). *Cela posé:* N. 91. N. 233.

Le rectangle de la sécante AE & de sa partie extérieure AD est connu; puisque (n) *il est égal au quarré de la tangente AB que l'on vient de mesurer: & la partie AD est aussi connue, puisque l'on vient aussi de la mesurer. Ainsi, l'on divise par la valeur de cette partie, celle du quarré de cette tangente; & le quotient est la valeur de la sécante AE. Or, lorsque l'on a trouvé cette valeur, on en retranche celle de cette même partie AD; le reste est la valeur du diametre demandé DE. Donc, C. Q. F. F.* N. 269.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

274. *Si deux lignes droites, qui sont tirées d'un même point hors d'un cercle à la circonférence, sont telles que le rectangle fait de l'une & de sa partie extérieure soit égal au quarré de l'autre, cette autre sera une tangente à ce cercle.*

Fig. 60 SI le rectangle de la sécante AC * & de sa partie extérieure AD, est égal au quarré de la ligne AB, cette ligne AB sera tangente au cercle X.

N. 245. *Const.* Tirez du point A (n), une tangente AF au cercle X. Tirez aussi du même point A au centre E, une ligne droite AE.

Démonst. Le rectangle de la sécante AC & de sa partie extérieure AD, est N. 269. (n) égal au quarré de la tangente AF. Or [H], le même rectangle est aussi égal N. 62. au quarré de la ligne AB. Donc (n), le quarré de cette tangente & celui de cette ligne, sont égaux; & par conséquent, ces deux lignes sont égales. Ainsi, les triangles AEB & AEF ont le côté AB égal

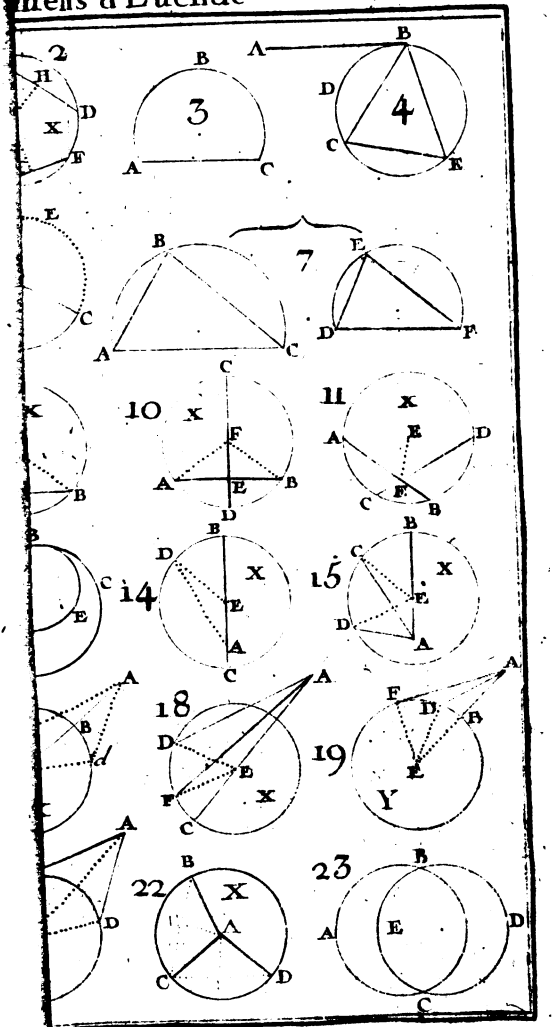
Digitized by Google

au côté AF [D], le côté EB au côté EF (n), & le côté AE commun. Donc (n), N. 35.
l'angle B est égal à l'angle F; & par con- N. 90.
séquent, puisque (n) le dernier est un N. 246.
angle droit, le premier en est aussi un.
Or (n), puisque l'angle B est un angle N. 21.
droit, la ligne AB est perpendiculaire au rayon EB. Donc, puisque [c] elle est tirée de l'extrémité B de ce rayon, elle est une tangente au cercle X (n); & par N. 242.
conséquent, C. Q. F. D.

Fin du troisieme Livre.

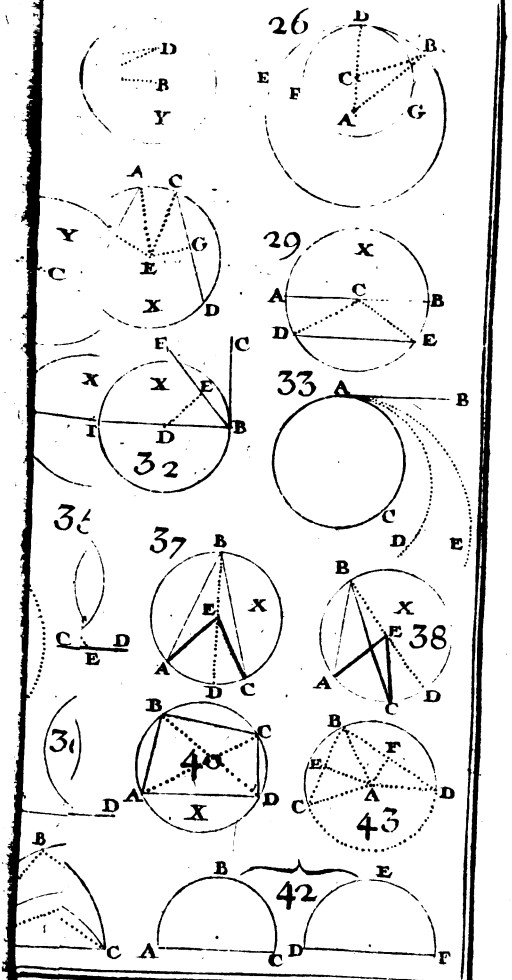
Digitized by Google

Digitized by Google



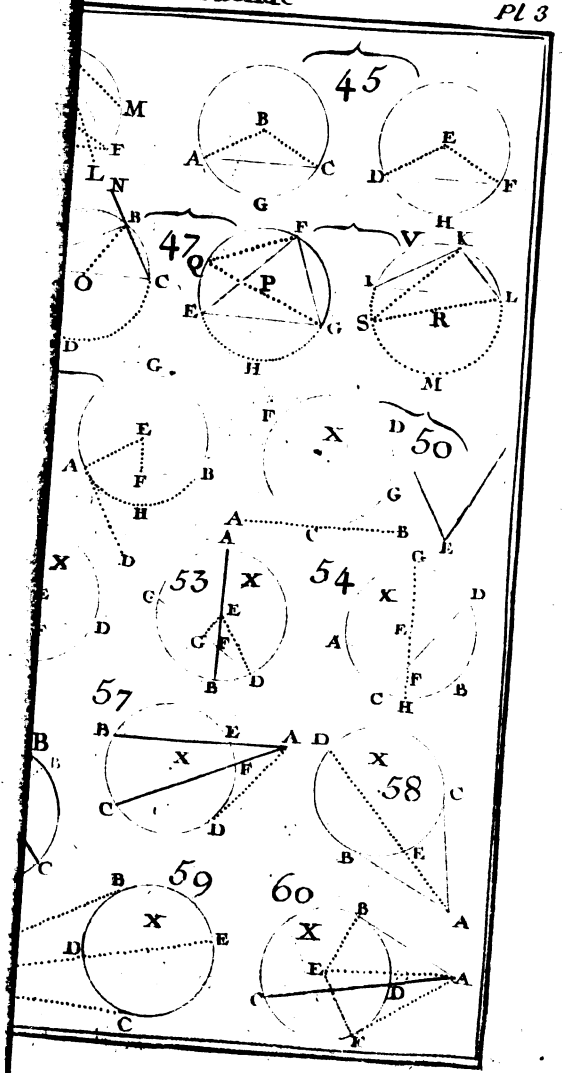
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE QUATRIEME.

EUCLIDE commence ce Livre par déterminer les conditions que des figures doivent avoir, afin que l'on puisse dire des unes qu'elles sont inscrites dans les autres; & des autres au contraire, qu'elles sont circonscrites aux premieres. Il donne ensuite la maniere d'inscrire dans le cercle, tous les polygones réguliers † primitifs, que l'on peut y inscrire géométriquement; & celle de circonscrire au cercle tous ceux de ces mêmes polygones qu'il est possible de lui circonscrire géométriquement. Enfin, il

† On dit d'une figure, qu'elle est *réguliere*, lorsque tous ses côtés sont égaux, & que tous ses angles le sont aussi.

Digitized by Google

enseigne ce que l'on doit faire, tant pour inscrire le cercle dans ces sortes de polygones, que pour le leur circonscrire.

Au reste, ce Livre est d'autant plus beau, qu'il contient moins de propositions; puisqu'il suffit pour faire voir la maniere dont il faut s'y prendre, soit pour inscrire dans une figure, soit pour lui circonscrire, toutes les figures qu'il est possible d'y inscrire, ou de lui circonscrire géométriquement.

DÉFINITIONS.

I.

275. ON dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *inscrite* dans une autre, lorsque chaque angle de cette figure a son sommet dans la circonférence de cette autre.

Fig. 1. *La figure ABCD * est* inscrite *dans la figure EFGH.*

II.

276. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *circonscrite* à une autre, lorsque chaque côté de cette figure touche chaque angle de cette autre.

Digitized by Google

La figure EFGH * *est* circonscrite *à la figure ABCD.* Fig. 1.

III.

277. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *inscrite* dans un cercle, lorsque chaque angle de cette figure a son sommet dans la circonférence de ce cercle.

La figure ABCD * *est* inscrite *dans le cercle X.* Fig. 2.

IV.

278. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *circonscrite* à un cercle, lorsque chaque coté de cette figure touche ce cercle.

La figure ABCD * *est* circonscrite *au cercle X.* Fig. 3.

V.

279. On dit d'un cercle, qu'il est *inscrit* dans une figure rectiligne, lorsqu'il touche chaque côté de cette figure.

Le cercle X * *est* inscrit *dans la figure ABCD.* Fig. 3.

VI.

280. On dit d'un cercle, qu'il est *circonscrit* à une figure rectiligne, lors-

Digitized by Google

que la circonférence de ce cercle touche chaque angle de cette figure.

Fig. 2. *Le cercle X * est* circonscrit *à la figure ABCD.*

VII.

281. Enfin, on dit d'une ligne droite, qu'elle est *inscrite* dans un cercle, lorsqu'elle se termine de part & d'autre, à la circonférence de ce cercle.

Fig. 2. *Les lignes droites AB *, BC, AD & DC, sont* inscrites *dans le cercle X.*

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

282. *Inscrire dans un cercle donné, une ligne droite qui soit égale à une ligne droite donnée, pourvu cependant que cette ligne donnée, ne soit pas plus*
N. 240. *grande que le diametre de ce cercle* (n).

Fig. 4. IL faut inscrire dans le cercle BECF *, une ligne droite qui soit égale à la ligne droite A.

Const. Prenez sur la circonférence du cercle proposé, un point B à volonté. De ce point, pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne A, décrivez un arc

Digitized by Google

de cercle FEG. Enfin, tirez du même point B au point E, une ligne droite BE, elle sera la ligne demandée.

Démonst. Le rayon du cercle FEG est [c] égal à la ligne A. Or [c], la ligne BE est un rayon de ce cercle. Donc (n), N. 35. elle est égale à la ligne A. D'ailleurs (n), N. 281. elle est inscrite dans le cercle BECF, puisque [c], elle se termine de part & d'autre, à la circonférence de ce cercle. Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

283. *On auroit pareillement résolu ce problême, en tirant une ligne droite du point B au point F.*

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

284. *Inscrire dans un cercle donné, un triangle qui soit équiangle † à un triangle donné.*

IL faut inscrire dans le cercle EGH *, Fig. 8. un triangle qui soit équiangle au triangle ABC.

† On appelle *triangles équiangles*, ceux qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun.

Digitized by Google

Conſt. Du point E, pris à volonté ſur
N 243. la circonférence, tirez (n) une tangente
DF au cercle propoſé. Décrivez ſur cette
N. 120. tangente (n), un angle DEG qui ait le
point de contact E pour ſommet, & ſoit
égal à l'angle A; & un angle FEH qui ait
le même point E pour ſommet, & ſoit
égal à l'angle C. Enfin, tirez du point G
au point H, une corde GH. Le triangle
GEH que cette corde formera avec les
cordes EG & EH, ſera le triangle de-
mandé.

Démonſt. L'angle H qui eſt dans le
N. 264. ſegment GHE, eſt (n) égal à l'angle
DEG du ſegment EKG. Or [c], l'angle
A eſt auſſi égal au même angle DEG.
N. 62. Donc (n), l'angle H eſt égal à l'angle A.

Pareillement, l'angle G qui eſt dans
N. 264. le ſegment EGH, eſt (n) égal à l'angle
FEH du ſegment EIH. Or [c], l'angle
C eſt auſſi égal au même angle FEH.
N. 62. Donc (n), l'angle G eſt égal à l'angle C.
N. 137. Ainſi (n), le triangle GEH eſt équian-
N. 177. gle au triangle ABC. D'ailleurs (n), il
eſt inſcrit dans le cercle EGH; puiſque
[c] tous ſes angles ont leurs ſommets
dans la circonférence de ce cercle. Par
conſéquent, C. Q. F. F.

Digitized by Google

SCHOLIE.

285. *On auroit pareillement résolu ce problême, en faisant l'angle DEG égal à l'angle C, ou à l'angle B; & l'angle FEH égal à l'angle A, ou à l'angle B.*

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

286. *Circonscrire à un cercle donné, un triangle qui soit équiangle à un triangle donné.*

IL faut circonscrire au cercle DEF *, un triangle qui soit équiangle au triangle ABC. Fig. 6

Const. Prolongez indéfiniment de part & d'autre, l'un des côtés du triangle ABC, par exemple, le côté AC. Tirez un rayon GF, à volonté. Décrivez sur ce rayon (n) un angle FGE qui ait le centre G pour sommet, & soit égal à l'angle BCM; & un angle FGD qui ait aussi le même centre G pour sommet, & soit égal à l'angle BAL. Enfin (n), élevez du point F, une perpendiculaire HK au rayon GF; du point E, une perpendiculaire IK au rayon GE; & du point D, une per- N. 120. N. 96.

Digitized by Google

pendiculaire IH au rayon GD. Ces perpendiculaires formeront un triangle HIK, qui sera le triangle demandé.

Démonst. Les angles GFK & GEK sont deux angles droits [c]. Ainsi, puis-
N. 140. que (n) la somme de tous les angles d'un quadrilatere est égale à celle de quatre angles droits, la somme des angles FGE & K est égale à celle de deux angles
N. 98. droits. Mais (n), la somme des angles BCM & BCA, est aussi égale à celle de
N. 62. deux angles droits. Donc (n), la somme des angles FGE & K est égale à celle des angles BCM & BCA; & par conséquent
N. 64. (n), puisque [c] les angles FGE & BCM sont égaux, les angles K & BCA le sont aussi.

Or, on démontre de la même maniere, que l'angle H est égal à l'angle BAC.
N. 137. Ainsi (n), le triangle HIK est équiangle
N. 278. au triangle ABC. D'ailleurs (n), il est
N. 242. circonscrit au cercle DEF; puisque (n) tous ses côtés touchent ce cercle. Par conséquent, C. Q. F. F.

Digitized by Google

PROPOSITION IV.

PROBLÊME.

187. *Inſcrire un cercle dans un triangle donné.*

IL faut inſcrire un cercle dans le triangle ABC *. Fig. 7.

Conſt. Diviſez (n) deux des angles du triangle propoſé (par exemple, les angles A & C) chacun en deux parties égales DAB & DAC, DCB & DCA. Du point D, auquel les lignes DA & DC ſe rencontrent, abaiſſez (n) une perpendiculaire DG au côté AC. Enfin, du même point D, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire priſe pour rayon, décrivez un cercle EGF, il ſera le cercle demandé. N. 91. N. 97.

Pour la démonſtration. Abaiſſez (n) du même point D., une perpendiculaire DE au côté AB; & une perpendiculaire DF au côté BC. N. 97.

Démonſt. Dans les triangles DAE & DAG, qui ſont rectangles l'un en E & l'autre en G, l'angle DAB eſt égal à l'angle DAC [c], & le côté DA eſt commun. Ainſi (n) le côté DE eſt égal au côté DG. N. 145.

Digitized by Google

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne DF est aussi égale au même
N. 35. côté DG. Donc (n), les lignes DG, DE & DF sont toutes trois, rayons du même cercle EGF. Mais [c], tous les côtés du triangle ABC passent par les extrémités G, E, & F de ces rayons, & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc
N. 242. (n), le cercle EGF touche tous les côtés
N. 279. de ce triangle; & par conséquent (n), il y est inscrit. Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION V.

PROBLÊME.

288. *Circonscrire un cercle, à un triangle donné.*

IL faut circonscrire un cercle, au trian-
Fig. 8. gle ABC *.

N. 94. *Const.* Divisez (n) deux des côtés du triangle proposé (par exemple, les côtés AB & AC) chacun en deux parties égales AD & DB, AE & EC. Du point
N. 96. D, élevez (n) une perpendiculaire DF au côté AB; & du point E, une perpendiculaire EF au côté AC. Du point F, auquel ces perpendiculaires se ren-

Digitized by Google

contrent, tirez au point A une ligne droite FA. Enfin, du même point F pris pour centre, & avec cette ligne FA prise pour rayon, décrivez un cercle AGC, il sera le cercle demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point F aux points B & C, des lignes droites FB & FC.

Démonst. Dans les triangles BDF & ADF, qui [c] sont rectangles l'un & l'autre en D, le côté DB est égal au côté DA [c], & le côté DF est commun. Ainsi (n), le côté FB est égal au côté N. 83.
FA.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne FC est aussi égale au même côté FA. Donc (n), les lignes FA, FB N. 35.
& FC, sont toutes trois, rayons du même cercle AGC. Mais [c], chaque angle A, B & C, du triangle ABC, a pour sommet l'extrémité de l'un de ces rayons. Donc (n), la circonférence du cercle AGC N. 34.
passe par les sommets de tous les angles de ce triangle; & par conséquent (n), ce N. 280.
cercle est circonscrit à ce triangle. Donc, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

289. *On propose quelquefois ce problême, de la maniere suivante:* Faire

passer la circonférence d'un cercle par
Fig. 8. trois points donnés A *, B & C, pourvu cependant que ces trois points ne soient pas dans une même ligne droite.

Pour le résoudre, on joint les trois points donnés, par des lignes droites AB, AC & BC; & l'on a un triangle ABC,
N. 288. *auquel on circonscrit un cercle* (n).

PROPOSITION VI.

PROBLÊME.

290. *Inscrire un quarré, dans un cercle donné.*

Fig. 9. IL faut inscrire un quarré, dans le cercle FGH *.

Const. Tirez un diametre AC, à vo-
N. 96. lonté. Elevez (n) un autre diametre BD perpendiculaire à ce diametre AC. Tirez du point A aux points B & D, des lignes droites AB & AD; & du point C aux mêmes points B & D, des lignes droites CB & CD. Le quadrilatere ABCD que ces lignes formeront, sera le quarré demandé.

Démonst. Les angles AEB, BEC, CED, &c. qui ont chacun leur sommet au

au centre E, sont égaux (n). Donc (n), N. 19.
les arcs AFB, BGC, CHD, &c. le sont N. 256.
aussi; & par conséquent (n), les cordes N. 260.
AB, BC, CD, &c. sont égales. De plus
(n), les angles A, B, C, &c. sont des N. 263.
angles droits; puisque [c] ils sont chacun
dans un demi-cercle. Donc, le quadrilatere ABCD a tous ses côtés égaux, & tous ses angles droits; & par conséquent (n), il est un quarré. N 50.

Or (n), ce quarré est inscrit dans le N. 277.
cercle FGH, puisque [c] tous ses angles ont leurs sommets dans la circonférence de ce cercle. Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

291. Il suit de ce problème : Premierement, que *pour inscrire dans le cercle un octogone régulier, il faut commencer par y inscrire un quarré : & diviser ensuite* (n) *en deux parties égales, chaque arc* N. 261.
*AFB *, BGC, &c. afin d'avoir des arcs* Fig. 9.
AF, FB, BG, &c. qui soient chacun la huitieme partie de la circonférence.

Secondement, que *pour inscrire dans le cercle un polygone régulier de 16 côtés, il faut commencer par y inscrire un octogone régulier : & diviser ensuite* (n) *cha-* N. 261.
que arc AF, FB, &c. en deux parties* Fig. 9.
égales, afin d'avoir des arcs qui soient

chacun la seizieme partie de la circonférence.

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 32 côtés, de 64 côtés, &c.

PROPOSITION VII.

PROBLÊME.

292. *Circonscrire un quarré, à un cercle donné.*

IL faut circonscrire un quarré au cercle ABCD *. Fig. 10.

Const. Tirez un diametre AC, à volonté. N. 96. Elevez (n) un autre diametre BD perpendiculaire à ce diametre AC. Elevez N. 96. aussi (n) des points A & C, des perpendiculaires EH & FG au même diametre AC; & des points B & D, des perpendiculaires EF & HG au diametre BD. Le quadrilatere HF que ces perpendiculaires formeront, sera le quarré demandé.

Démonst. Les lignes EH, BD & FG, N. 129. sont paralleles (n), puisque [c] elles sont perpendiculaires chacune à la même ligne AC: & les lignes EF, AC & HG, sont N. 119. aussi paralleles (n), puisque [c] elles sont

Digitized by Google

aussi perpendiculaires chacune à la même ligne BD. Ainsi :

Premierement, les quadrilateres HB & AF sont des parallélogrammes (n). N. 57. Donc (n), les côtés EH & BD sont N. 143. égaux, & les côtés EF & AC le sont aussi ; & par conséquent (n), puisque (n) N. 62. le côté BD est égal au côté AC, le côté N. 35. EH l'est au côté EF.

Secondement, le quadrilatere AB est aussi un parallélogramme (n). Donc, N. 57. puisque l'angle AIB est un angle droit (n), l'angle E en est aussi un (n). N. 21. N. 149.

Troisiemement, enfin, le quadrilatere HF est encore un parallélogramme (n). N. 57. Donc, puisque [D] il a deux côtés de suite égaux EH & EF, & un angle droit E, il est un quarré (n). N. 146.

Or (n), ce quarré est circonscrit au N. 278. cercle ABCD, puisque (n) tous ses côtés touchent ce cercle. N. 242. Par conséquent, C. Q. F. F.

Digitized by Google

PROPOSITION VIII.

PROBLÊME.

293. *Inscrire un cercle, dans un quarré donné.*

Fig. 10. IL faut inscrire un cercle, dans le quarré HF *.

Const. Tirez les diagonales EG & HF. Du point I, auquel ces diagonales se cou-
N. 97. pent, abaissez (n) une perpendiculaire ID au côté HG. Enfin, du même point I, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire prise pour rayon, décrivez un cercle DCBA, il sera le cercle demandé.

N. 97. *Pour la démonstration.* Abaissez (n) du même point I, les perpendiculaires IC, IB & IA aux côtés FG, EF & EH, chacune à chacun.

Démonst. Dans les triangles ICG & IDG, qui [c] sont rectangles l'un en C & l'autre en D, l'angle EGF est égal à
N. 138. l'angle EGH (n)*, puisque (n) les triangles
N. 50. EFG & EHG sont rectangles & isosceles,
N. 123. & le côté IG est commun. Ainsi (n), le côté IC est égal au côté ID.

Or, on démontre de la même maniere,

Digitized by Google

que la ligne IB est égale à la ligne IC, & la ligne IA à la ligne IB. Donc (n), les lignes ID, IC, IB & IA, sont toutes quatre rayons du même cercle DCBA. N. 35.
Mais [c], tous les côtés du quarré HF passent par les extrémités D, C, &c. de ces rayons, & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc (n), le cercle DCBA touche tous les côtés de ce quarré; & par conséquent (n), il y est inscrit. Donc, C. Q. F. F. N. 242. N. 279.

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

294. *Circonscrire un cercle à un quarré donné.*

IL faut circonscrire un cercle au quarré ABCD *. Fig. 9.

Const. Tirez les diagonales AC & BD. Du point E, auquel ces diagonales se coupent, pris pour centre, & avec la ligne EA, prise pour rayon, décrivez un cercle FGH, il sera le cercle demandé.

Démonst. Dans le triangle AEB, les angles CAB & DBA sont égaux (n), puisque (n) les triangles ABC & BAD N. 138. N. 50.

Digitized by Google

N. 88. ſont rectangles & iſoſceles. Ainſi (n), le côté EB eſt égal au côté EA.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne EC eſt égale à la ligne EB,
N. 35. & la ligne ED à la ligne EC. Donc (n), les lignes EA, EB, EC & ED, ſont toutes quatre rayons du même cercle FGH. Mais [c], chaque angle A, B, &c. du quarré ABCD, a pour ſommet l'extrémité de l'un de ces rayons. Donc
N. 34. (n), la circonférence du cercle FGH paſſe par les ſommets de tous les angles
N. 280 de ce quarré; & par conſéquent (n), ce cercle eſt circonſcrit à ce quarré. Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

295. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un triangle iſoſcele, qui ſoit tel que chacun de ſes angles égaux, ſoit double de ſon autre angle.*

Fig. 11. IL faut décrire ſur la ligne droite AB* un triangle iſoſcele, qui ſoit tel que chacun de ſes angles égaux ſoit double de ſon autre angle.

Digitized by Google

Const. Divisez (n) la ligne AB en deux parties AC & CB, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de sa plus petite partie CB, soit égal au quarré de sa plus grande partie AC. Du point A, pris pour centre, & avec la même ligne AB prise pour rayon, décrivez un arc de cercle BDG, indéfini. Du point B pris pour centre, & avec la partie AC prise pour rayon, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent à un point D. Enfin, tirez de ce point aux points A & B, des lignes droites DA & DB. Le triangle BAD, que ces lignes formeront avec la ligne AB, sera le triangle demandé. N. 205.

Pour la démonstration. Tirez du point C au point D, une ligne droite CD; & (n) circonscrivez un cercle ACDE au triangle ACD. N. 288.

Démonst. Le rectangle de la ligne AB & de la partie CB, est [c] égal au quarré de la partie AC; & par conséquent, à celui de la ligne BD; puisque [c] cette ligne & cette derniere partie sont égales. Ainsi (n), la ligne BD est une tangente au cercle ACDE. Donc (n), l'angle CDB est l'angle du segment CFD; & par conséquent (n), il est égal à l'angle A, dans le segment CED. N. 274. N. 220. N. 264.

Ainsi, puisque (n) l'angle DCB, qui est N. 135.

Digitized by Google

extérieur au triangle ACD, est égal à la
somme des angles intérieurs CDA & A
N. 61. qui lui sont opposés, il est aussi (n) égal à
celle des angles CDA & CDB; c'est-à-
dire, à l'angle BDA. Mais (n), l'angle
N. 86. B est aussi égal au même angle BDA,
N. 35. puisque (n) les côtés AD & AB du trian-
N. 62. gle BAD sont égaux. Donc (n), l'angle
DCB est égal à l'angle B; & par consé-
N. 88. quent (n), les côtés BD & CD du trian-
gle BDC sont égaux. Or, puisque le côté
BD qui [c] est égal au côté AC, l'est
aussi au côté CD, les côtés AC & CD
N. 62. du triangle ACD sont égaux (n); & par
N. 86. conséquent (n), l'angle CDA est aussi
égal à l'angle A.

Enfin, puisque les angles CDB & CDA sont égaux chacun au même angle A, l'angle BDA, qui est la somme de ces deux premiers angles, est double de l'angle A; & par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

296. Il suit de ce problême, que *si dans un triangle isoscele, l'angle formé par les côtés égaux, est la moitié de chacun des deux autres angles, il sera les deux cinquiemes d'un angle droit.*

Fig. 12. Si dans le triangle BAC *, l'angle A est la moitié de chacun des deux autres angles

angles ABC & ACB, il sera les deux cinquiemes d'un angle droit.

Const. Divisez (n) en deux parties égales, chaque angle ABC & ACB. N. 92.

Démonst. Les cinq angles A, ABD, CBD, ACE & BCE, sont égaux [c]. Ainsi, ils sont chacun la cinquieme partie de la somme des trois angles du triangle BAC. Mais (n), cette somme est égale à celle de deux angles droits. Donc, chaque angle A, ABD, &c. est la cinquieme partie de la somme de deux angles droits; & par conséquent, les deux cinquiemes d'un angle droit. Donc, C. Q. F. D. N. 136.

SCHOLIE.

297. *Si l'on vouloit que la ligne donnée AB * fût le côté adjacent aux angles égaux du triangle demandé, on commenceroit par décrire sur cette ligne le triangle BAD, de la même maniere dont nous venons de le faire. On décriroit ensuite* (n) *sur cette même ligne un angle qui fût égal à l'angle B, & qui eût le point A pour sommet. Enfin, on prolongeroit le côté de cet angle & le côté BD de l'angle B, jusqu'à ce qu'ils se rencontrassent à un point; & le triangle que ces côtés prolongés formeroient avec la ligne AB, seroit le triangle demandé.* Fig. 18. N. 120.

Digitized by Google

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

298. *Inscrire dans un cercle donné un pentagone régulier.*

Fig. 13. IL faut inscrire dans le cercle ABC * un pentagone régulier.

N. 295. *Const.* Décrivez (n) sur une ligne droite GF prise à volonté, un triangle isoscele FGH, dont chaque angle F & H, soit
N. 284. double de l'angle G. Inscrivez (n) dans le cercle ACE, un triangle EBD qui soit équiangle à ce triangle FGH. Divi-
N. 91. sez (n) chaque angle BED & BDE en deux parties égales BEC & CED, BDA & ADE. Enfin, tirez du point B aux points A & C, des lignes droites BA & BC; du point E aux points A & D, des lignes droites EA & ED; & du point C au point D, une ligne droite CD. Le polygone ABCDE que ces lignes formeront, sera le pentagone demandé.

Démonst. Tous les angles BEC, CED, EBD, ADE & BDA, sont égaux, puisque [c] chaque angle BED & BDE est
N. 255. double de l'angle EBD. Donc (n), tous

Digitized by Google

les arcs BC, CD, DE, EA & AB, sont aussi égaux; & par conséquent (n), toutes les cordes BC, CD, &c. sont égales. N. 260.

Mais, puisque tous les arcs BC, CD, &c. sont égaux, les arcs AEDC, BAED, CBAE, &c. sur lesquels les angles ABC, BCD, CDE, &c. s'appuient, le sont aussi; & par conséquent (n), tous ces angles sont égaux. N. 257.

Ainsi, tous les côtés du pentagone ABCDE sont égaux, & tous ses angles le sont aussi. Donc, ce pentagone est régulier. D'ailleurs (n) il est inscrit dans le cercle ACE, puisque [c] tous ses angles ont leurs sommets dans la circonférence de ce cercle. N. 277.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

299. Il suit de ce problême : Premierement, que *pour inscrire dans le cercle un décagone régulier, il faut commencer par y inscrire un pentagone régulier : & diviser ensuite* (n) *chaque arc AB* *, *BC, &c. en deux parties égales, afin d'avoir des arcs qui soient chacun la dixieme partie de la circonférence.* N. 261. Fig. 13.

Secondement, que *pour inscrire dans le cercle un polygone régulier de 20 côtés,*

Digitized by Google

il faut commencer par y inscrire un déca-
N. 261. *gone régulier : & diviser ensuite* (n) *en deux parties égales, chaque arc de ce décagone, afin d'avoir des arcs qui soient chacun la vingtieme partie de la circonférence.*

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 40 côtés, de 88 côtés, &c.

COROLLAIRE II.

300. Il suit aussi de la démonstration de ce même problême, que *chaque angle d'un pentagone régulier est les six cinquiemes d'un angle droit.*

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

301. *Circonscrire à un cercle donné un pentagone régulier.*

Fig. 14. IL faut circonscrire au cercle ACD*, un pentagone régulier.

N. 298. *Const.* Inscrivez (n) dans le cercle ACD, un pentagone régulier ABCDE. Tirez ensuite du centre L à chaque angle

Digitized by Google

A, B, C, &c. des rayons LA, LB, LC, &c. Enfin (n) élevez du point A, une perpendiculaire KF au rayon LA; du point B, une perpendiculaire FG au rayon LB; du point C, une perpendiculaire GH au rayon LC; & ainsi de suite. Ces perpendiculaires formeront un polygone FGHIK, qui sera le pentagone demandé. N. 96.

Pour la démonstration. Tirez du centre L à chaque angle F, G, H, &c. du polygone FGHIK, des lignes droites LF, LG, LH, &c.

Démonst. Premierement, les triangles LAF & LBF ont le côté AF égal au côté BF (n), puisque [c] ces côtés sont des tangentes qui sont tirées du même point F; le côté LA égal au côté LB (n), & le côté LF commun. Donc (n), l'angle ALF est égal à l'angle BLF; & par conséquent, l'angle ALB est double de l'angle BLF. Mais, on démontre de la même maniere, que l'angle CLB est aussi double de l'angle BLG. Donc, puisque les angles ALB & CLB, qui s'appuient sur des arcs égaux BA & BC, sont égaux (n), les angles BLF & BLG le sont aussi (n); & par conséquent, puisque les angles LBF & LBG sont aussi égaux [c], & que le côté LB est com- N. 272. N. 35. N. 90. N. 258. N. 68.

mun aux triangles LBF & LBG, le côté
N. 123. BF est égal au côté BG (n).

Or, on démontre que les côtés CG & BG sont égaux, de la même maniere dont on a démontré que les côtés AF & BF l'étoient; que les côtés CH & CG sont égaux, de la même maniere dont on a démontré que les côtés BF & BG l'étoient; & ainsi de suite. Donc, tous les côtés AF, BF, BG, CG, &c. sont égaux; & par conséquent, tous les côtés KF, FG, GH, &c. le sont aussi.

Secondement. Les angles LFA &
N. 90. LFB sont égaux (n), puisque [D] les triangles LAF & LBF ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun. Les an-
N. 137. gles LFB & LGB sont égaux (n), puisque les triangles LBF & LBG, qui [C] sont rectangles l'un & l'autre en B, ont [D] l'angle BLF égal à l'angle BLG. Les
N. 90. angles LGB & LGC sont égaux (n), puisque [D] les triangles LBG & LCG ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun: & ainsi de suite. Donc, tous les angles LFA, LFB, LGB, LGC, &c. sont égaux; & par conséquent, tous les angles KFG, FGH, GHI, &c. le sont aussi.

Ainsi, tous les côtés du pentagone FGHIK sont égaux, & tous ses angles le

Digitized by Google

sont aussi. Donc, ce pentagone est régulier. D'ailleurs (n), il est circonscrit au cercle ACD, puisque (n) tous ses côtés touchent ce cercle. Par conséquent, C. Q. F. F. N. 278. N. 242.

COROLLAIRE.

302. Il suit de la construction de ce problême, que *pour circonscrire à un cercle un polygone régulier quelconque, il faut commencer par y en inscrire un semblable à celui que l'on veut circonscrire : tirer ensuite des rayons, du centre de ce cercle à chaque angle de ce polygone inscrit : & élever enfin des extrémités de ces rayons, des perpendiculaires à ces mêmes rayons, chacune à chacun.*

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

303. *Inscrire un cercle dans un pentagone régulier.*

IL faut inscrire un cercle dans le pentagone ABCDE *. Fig. 15.

Const. Divisez (n) deux des angles du pentagone proposé (par exemple les N. 91.

Digitized by Google

angles A & B, chacun en deux parties égales FAE & FAB, FBA & FBC. Du point F, auquel les lignes FA & FB se
N. 97. rencontrent, abaissez (n) une perpendiculaire FG au côté AB. Enfin, du même point F, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire prise pour rayon, décrivez un cercle GIL, il sera le cercle demandé.

N. 97. *Pour la démonstration.* Abaissez (n) du même point F, une perpendiculaire FH au côté BC; une perpendiculaire FI au côté CD; & ainsi de suite. Du même point F, tirez aux angles C, D & E, des lignes droites FC, FD & FE.

Démonst. Dans les triangles CBF & ABF, l'angle FBC est égal à l'angle FBA [c], le côté BC au côté BA [H],
N. 83. & le côté FB commun. Donc (n), l'angle FCB est égal à l'angle FAB; & par conséquent, puisque les angles BAE & BCD sont égaux [H], & que [c] l'angle FAB est la moitié de l'angle BAE, l'angle FCB est aussi la moitié de l'angle BCD. Or, on démontre de la même maniere, que les lignes FD & FE divisent aussi les angles D & E, chacun en deux parties égales †. Cela posé :

† Toute cette premiere partie est de plus dans notre démonstration que dans celles que l'on donne ordinaire-

Digitized by Google

Dans les triangles FHB & FGB, qui [c] sont rectangles, l'un en H & l'autre en G, l'angle FBC est égal à l'angle FBA [c], & le côté FB est commun. Donc, (n), le côté FH est égal au côté FG. N. 123.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne FI est égale à la ligne FH, la ligne FK à la ligne FI, & la ligne FL à la ligne FK. Donc (n), les lignes FG, N. 35. FH, FI, FK & FL, sont toutes cinq rayons du même cercle GIL. Mais [c], tous les côtés du pentagone ABCDE passent par les extrémités G, H, I, &c. de ces rayons, & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc (n), le cercle GIL N. 242. touche tous les côtés de ce pentagone; & par conséquent (n), il y est inscrit. N. 279. Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

304. Il suit de la construction de ce problême, que *pour inscrire un cercle dans un polygone régulier quelconque, il*

ment. Mais, nous avons cru devoir l'ajouter, parce que les démonstrations ordinaires supposent gratuitement que les lignes FC, FD & FE, divisent les angles C, D & E, en deux parties égales. Au surplus, nous faisons cette remarque, pour faire voir qu'un Auteur a quelquefois de bonnes raisons pour être un peu plus long qu'un autre; & qu'il est à propos de se tenir en garde, contre les *il est évident*, contre les *& cætera*, & contre les *ainsi de suite*.

Digitized by Google

faut faire précisément les mêmes choses que s'il s'agissoit d'en inscrire un dans un pentagone régulier.

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

305. *Circonscrire un cercle à un pentagone régulier.*

IL faut circonscrire un cercle au pen-
Fig. 16 tagone ABCDE *.

N. 91. *Const.* Divisez (n) deux des angles du pentagone proposé (par exemple, les angles A & B) chacun en deux parties égales FAE & FAB, FBA & FBC. Du point F, auquel les lignes FA & FB se rencontrent, pris pour centre, & avec la ligne FA, prise pour rayon, décrivez un cercle ACE, il sera le cercle demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point F aux points C, D & E, des lignes droites FC, FD & FE.

Démonst. Dans les triangles CBF & ABF, l'angle FBC est égal à l'angle FBA [c], le côté BC au côté BA [11],
N. 83. & le côté BF commun. Donc (n), l'an-

Digitized by Google

gle FCB est égal à l'angle FAB ; & par conséquent, puisque les angles BAE & BCD sont égaux [H], & que [c] l'angle FAB est la moitié de l'angle BAE, l'angle FCB est aussi la moitié de l'angle BCD. Or, on démontre de la même maniere, que les lignes FD & FE divisent aussi les angles D & E, chacun en deux parties égales †. Cela posé :

Dans le triangle AFB, les angles FAB & FBA sont égaux (n), puisque [c] ils N. 68.
sont les moitiés des angles BAE & ABC, qui sont égaux [H]. Donc (n), le côté N. 88.
FB est égal au côté FA.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne FC est égale à la ligne FB, la ligne FD à la ligne FC, & la ligne FE à la ligne FD. Donc (n), les lignes FA, N. 35.
FB, &c. sont toutes cinq rayons du même cercle ACE. Mais [c], chaque angle A, B, &c. du pentagone ABCDE a pour sommet l'extrémité de l'un de ces rayons. Donc (n), la circonférence du cercle N. 34.
ACE passe par les sommets de tous les angles de ce pentagone ; & par conséquent (n), ce cercle est circonscrit à ce N. 280.
pentagone. Donc, C. Q. F. F.

† Cette premiere partie est aussi ajoutée à la démonstration ordinaire, pour la même raison que l'on a dite à la remarque du problême précédent.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

306. Il suit de ce problême, que *pour circonscrire un cercle à un polygone régulier quelconque, il faut faire précisément les mêmes choses que s'il s'agissoit d'en circonscrire un à un pentagone régulier.*

PROPOSITION XV.

PROBLÊME.

307. *Inscrire dans un cercle donné un exagone régulier.*

Fig. 17. IL faut inscrire dans le cercle ACE *, un exagone régulier.

Const. Prenez sur la circonférence du cercle proposé, un point A à volonté. De ce point pris pour centre, & avec un rayon égal à celui de ce même cercle, décrivez deux arcs qui coupent la circonférence, l'un à un point B, & l'autre à un point F. Des points B, A & F, tirez par le centre G, des lignes droites BE, AD & FC. Enfin, tirez du point A aux points B & F, des lignes droites AB & AF; du point C aux points B & D, des lignes droites

Digitized by Google

CB & CD ; & du point E, aux points D & F, des lignes droites ED & EF. Le polygone ABCDEF que ces lignes formeront, sera l'exagone demandé.

Démonst. Le triangle AGB est équilatéral [c]. Ainsi (n), l'angle AGB est N. 139.
les deux tiers d'un angle droit ; & par la même raison, il en est de même de l'angle AGF. Donc, puisque (n) les trois angles N. 98.
AGB, AGF & FGE, valent ensemble deux angles droits, l'angle FGE est aussi les deux tiers d'un angle droit. Mais (n), N. 102.
l'angle DGE est égal à l'angle AGB ; l'angle DGC à l'angle AGF ; & l'angle BGC à l'angle FGE. Donc (n), tous les N. 62.
angles qui ont leurs sommets au centre G, sont égaux. Ainsi (n), tous les arcs N. 256.
AB, BC, CD, &c. le sont aussi ; & par conséquent (n), toutes les cordes AB, N. 260.
BC, CD, &c. sont égales.

Mais, puisque tous les arcs AB, BC, &c. sont égaux, les arcs AEC, BFD, CAE, &c. sur lesquels les angles ABC, BCD, CDE, &c. s'appuient, le sont aussi ; & par conséquent (n), tous ces N. 257.
angles sont égaux.

Ainsi, tous les côtés de l'exagone ABCDEF sont égaux, & tous ses angles le sont aussi. Donc, cet exagone est régulier. D'ailleurs (n), il est inscrit dans le N. 1[illegible]

cercle ACE; puisque tous ses angles ont leurs sommets dans la circonférence de ce cercle. Par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE I.

308. Il suit de ce problême : Premiement, que *pour inscrire dans le cercle un triangle équilatéral, il faut commencer par y inscrire un exagone régulier*
Fig. 17. *ABCDEF* * : *& tirer ensuite des lignes droites, du point A au point C, du point C au point E, & du point E au point A.*

Secondement, que *pour inscrire dans le cercle un dodécagone régulier, il faut commencer de même par y inscrire un*
N. 261. *exagone régulier : & diviser ensuite* (n)
Fig. 17. *chaque arc AB* *, *BC, &c. en deux parties égales, afin d'avoir des arcs qui soient chacun la douzieme partie de la circonférence.*

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 24 côtés, de 48 côtés, &c.

COROLLAIRE II.

309. Il suit de la démonstration de ce même problême, que *chaque angle d'un exagone régulier, est les quatre tiers d'un angle droit.*

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

310. Il suit encore de la démonstration de ce même problême, que *le côté de l'exagone régulier, est égal au rayon du cercle dans lequel cet exagone est inscrit.*

COROLLAIRE IV.

311. Enfin, il suit de ce corollaire, que *pour inscrire dans le cercle un exagone régulier, il n'y a qu'à prendre avec un compas, la grandeur du rayon, & la porter six fois sur la circonférence.*

Digitized by Google

PROPOSITION XVI.

PROBLÊME.

312. *Inſcrire dans un cercle donné un pentédécagone régulier.*

Fig. 18. IL faut inſcrire dans le cercle DEG *, un pentédécagone régulier.

Conſt. Inſcrivez dans le cercle propoſé, N. 308. un triangle équilatéral ABC (n); & un N. 298. pentagone régulier DBEFG (n). L'arc AG, qui ſe trouvera intercepté entre l'angle A du triangle équilatéral & l'angle G du pentagone, ſera la quinzieme partie de la circonférence.

Démonſt. L'arc BAD eſt [c] le tiers, ou les cinq quinziemes de la circonférence; & [c] l'arc BDAG en eſt les deux cinquiemes, ou les ſix quinziemes. Donc, l'arc AG en eſt le quinzieme; & par conſéquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

313. Il ſuit de ce problême, que *pour inſcrire dans le cercle un polygone régulier de 30 côtés, il faut commencer par*

y

Digitized by Google

y inſcrire un pentédécagone régulier : & diviſer enſuite (n) *l'arc AG, en deux parties égales, afin d'avoir des arcs qui ſoient chacun la trentieme partie de la circonférence.* N. 251.

Et ainſi de ſuite, pour inſcrire dans le cercle les polygones réguliers de 60 côtés, de 120 côtés, &c.

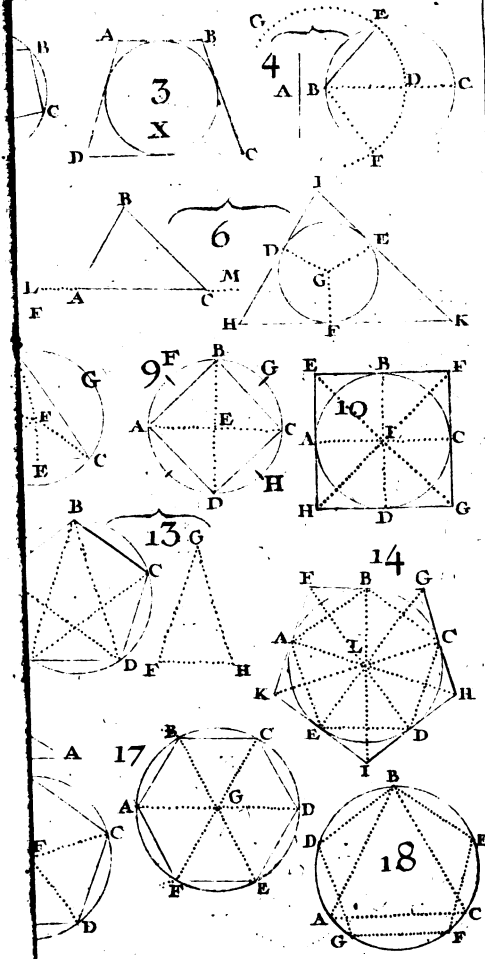
SCHOLIE.

314. *Il faut remarquer que l'on ne peut inſcrire géométriquement dans le cercle, aucun polygone régulier différent de ceux dont il eſt parlé dans ce Livre.*

Fin du quatrieme Livre.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE CINQUIEME.

JUSQU'ICI on n'a considéré les lignes & les surfaces qu'en elles-mêmes. Il s'agit à présent de comparer entr'elles les premieres ; de faire la même chose à l'égard des dernieres ; & de déterminer l'égalité, ou l'inégalité, des rapports qui résultent de ces comparaisons. Mais, il est nécessaire d'avoir auparavant une connoissance exacte des rapports en général ; & c'est à la donner, cette connoissance, qu'Euclide destine ce cinquieme Livre. Il le commence par les definitions des termes qui sont en usage dans les comparaisons. Il établit ensuite les principes des rapports ; compare ces rapports les uns aux autres ;

Digitized by Google

donne des regles pour connoître leur égalité, ou leurs différentes sortes d'inégalités, & démontre les propriétés de ceux qui sont égaux. Ce Livre renferme les regles d'une excellente logique, & la matiere qui y est traitée fait l'ame de la Géométrie. Mais il faut avouer qu'il est obscur dans son Auteur, si chargé de propositions inutiles, & en même tems si défectueux par le nombre de propositions nécessaires qui ne s'y trouvent point, que je n'ai pu m'empêcher d'y faire les changemens les plus considérables. Ainsi :

Premierement. *Je l'ai augmenté d'un nombre de propositions suffisant pour le rendre complet sur les rapports. Mais, pour ne point interrompre l'ordre d'Euclide, je ne présente ces propositions que sous les titres de corollaires ; & lorsque j'en substitue quelques-unes à celles que j'ai supprimées comme totalement inutiles, j'ai soin de le marquer par un *.*

Secondement. *Comme je ne traite ici des rapports qu'en général, je me sers des lettres de l'alphabet, pour représenter les quantités en général. Ainsi, ces lettres A, B, C, D, &c. signifient également des nombres, des lignes, des surfaces, des corps, des sons, des tems, des vîtesses, &c.*

Digitized by Google

Troisiemement. *Pour m'exprimer de la maniere la plus courte qu'il m'est possible, je me sers de ce signe* +, *pour représenter ce mot* plus; *de cet autre signe* —, *pour représenter ce mot*, moins; *enfin, de cet autre signe* ×, *pour représenter ces deux mots*, multiplié par. *Ainsi, A + B signifie la* somme *des quantités qui sont représentées par les lettres A & B; A — B signifie leur* différence; *& A × B signifie leur* produit.

Quatriemement. *Enfin, j'ai ajouté plusieurs questions, à la fin de ce Livre, afin de donner quelque idée de l'usage que l'on peut faire des proportions.*

A l'égard des figures, je me suis fait d'autant moins de difficulté d'en déranger l'ordre, que de la maniere dont je démontre ce Livre, elles sont assez inutiles.

DÉFINITIONS.

I.

315. ON nomme *rapport*, ou *raison*, ce qu'une quantité est à l'égard d'une autre.

Par exemple, le rapport *d'une ligne de* 12 *pieds à une de* 4 *pieds, est d'être*

Digitized by Google

grande *à l'égard de cette ligne de* 4 *pieds : & celui d'une ligne de* 12 *pieds à une de* 48 *pieds, est d'être* petite *à l'égard de cette ligne de* 48 *pieds.*

Mais, on ne juge cette ligne de 12 *pieds* grande *par rapport à celle de* 4 *pieds, que parce qu'on la considere, ou comme la* surpassant, *ou comme la* contenant *plus d'une fois. On ne juge pareillement cette même ligne de* 12 *pieds* petite *par rapport à celle de* 48 *pieds, que parce qu'on la considere, ou comme en* différant, *ou comme ne la* contenant *point une fois. Ainsi, une quantité est* grande *ou* petite *à l'égard d'une autre, ou* égale *à une autre, en deux manieres ; & par conséquent, il y a deux sortes de rapports.*

316. Lorsque l'on compare une quantité à une autre, en considérant la maniere † dont celle que l'on compare *differe* de celle à laquelle on la compare, le rapport qui est entre ces deux quantités, se nomme *rapport arithmetique.*

Par exemple, si l'on considere qu'une ligne de 18 *pieds est* plus grande *qu'une ligne de* 6 *pieds, parce qu'elle la* surpasse

† Je dis la *maniere*, &c. parce que la différence de 12 à 14, n'est point la même que celle de 12 à 10. On n'a pas fait attention que la premiere est *positive*, & que l'autre est *négative*.

Digitized by Google

de 12 *pieds ; qu'une ligne de* 25 *pieds est* égale *à une autre ligne aussi de* 25 *pieds, parce qu'elle n'en* differe *point ; enfin, qu'une ligne de* 9 *pieds est* plus petite *qu'une ligne de* 15 *pieds, parce qu'elle en* differe *de* 6 *pieds ; tous ces rapports seront* arithmétiques.

317. Lorsque l'on compare une quantité à une autre, en considérant la maniere dont celle que l'on compare *contient* celle à laquelle on la compare, le rapport qui est entre ces deux quantités se nomme *rapport géométrique*, ou seulement, *rapport* †.

Par exemple, si l'on considere qu'une ligne de 18 *pieds est* plus grande *qu'une ligne de* 6 *pieds, parce qu'elle la* contient 3 *fois ; qu'une ligne de* 25 *pieds est* égale *à une autre ligne aussi de* 25 *pieds, parce qu'elle la* contient *une fois précisément ; enfin, qu'une ligne de* 9 *pieds est* plus petite *qu'une ligne de* 15 *pieds, parce qu'elle n'en* contient *que les trois cinquiemes, (ou, ce qui est la même chose, parce qu'elle n'en est que les trois cinquiemes) ; tous ces rapports seront* géométriques.

318. On nomme *terme antécédent*, la quantité que l'on compare ; & *terme*

† C'est de ce dernier seul, dont nous traiterons ici.

conséquent, celle à laquelle on la compare.

*Par exemple, si l'on compare une ligne de 12 pieds à une de 8 pieds, cette ligne de 12 pieds sera l'*antécédent *du rapport qui est entre ces deux lignes; & celle de 8 pieds en sera le* conséquent.

319. On nomme *exposant*, ou *dénominateur*, d'un rapport, le quotient de l'antécédent de ce rapport, divisé par le conséquent.

*Par exemple, le quotient 4 de 12 divisé par 3, est l'*exposant *du rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 3 pieds, parce qu'il fait connoître que ce rapport est d'être* quadruple *de cette ligne de 3 pieds.*

Pareillement, le quotient $\frac{2}{3}$ *de 8 divisé par 12, est l'*exposant *du rapport d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds, parce qu'il fait connoître que ce rapport est d'être les* deux tiers *de cette ligne de 12 pieds.*

II.

320. ON nomme rapport d'*égalité*, celui dont l'antécédent est égal au conséquent.

*Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 pieds à une autre ligne aussi de 12 pieds, est un rapport d'*égalité.

321.

Digitized by Google

321. On nomme rapport d'*inégalité*, celui dont l'antécédent n'est point égal au conséquent.

*Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 8 pieds, est un rapport d'*inégalité.

*Pareillement, le rapport d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds, est aussi un rapport d'*inégalité.

322. On nomme rapport *multiple* †, ou d'*inégalité majeure*, celui dont l'antécédent est plus grand que le conséquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 8 pieds, est un rapport multiple.

323. On nomme rapport *sous-multiple*, ou d'*inégalité mineure*, celui dont l'antécédent est plus petit que le conséquent.

† On dit qu'une quantité est *multiple* d'une autre, lorsqu'on la considere comme étant le produit de cette autre multipliée par un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, mais cependant, plus grand que l'unité.

On dit, au contraire, qu'une quantité est *sous-multiple* d'une autre, lorsqu'on la considere comme étant le produit de cette autre multipliée par un nombre fractionnaire quelconque; mais cependant, plus petit que l'unité.

Enfin, on dit que des quantités sont *équi-multiples*, ou *multiples pareils* d'autres quantités, lorsqu'on les considere comme étant les produits de ces autres quantités multipliées chacune par un même nombre quelconque, entier ou fractionnaire, plus grand ou plus petit que l'unité.

Digitized by Google

Par exemple, le rapport d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds, est un rapport sous-multiple.

III.

324. ON dit que l'on *compose* un rapport, lorsque l'on ajoute le conséquent à l'antécédent, pour comparer la somme à ce même conséquent.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par composition †, *celui de 24 à 6.*

325. On dit que l'on *divise* un rapport, lorsque l'on retranche le conséquent de l'antécédent, pour comparer le reste à ce même conséquent.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par division ¶, *celui de 12 à 6.*

326. On dit que l'on *convertit* un rapport, lorsque l'on ajoute le conséquent à l'antécédent, pour comparer la somme à ce même antécédent.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par conversion §, *celui de 24 à 18.*

327. On dit que l'on *renverse* un rapport, lorsque l'on prend le conséquent de ce rapport, pour en faire l'antécédent d'un autre; & l'antécédent, pour en faire le conséquent.

† Componendo. ¶ Dividendo. § Convertendo.

Digitized by Google

Par exemple, du rapport de 18 *à* 6, *on forme par* inversion †, *celui de* 6 *à* 18; *& ces deux rapports de* 18 *à* 6, *& de* 6 *à* 18, *se nomment respectivement, rapports* inverses.

328. Enfin, on dit que l'on *échange* deux rapports, lorsque l'on prend l'antécédent du second, pour en faire le conséquent du premier; & le conséquent du premier, pour en faire l'antécédent du second.

Par exemple, des rapports de 18 *à* 6, *& de* 24 *à* 8, *on forme par* échange ¶, *ceux de* 18 *à* 24, *& de* 6 *à* 8; *& ces deux derniers rapports sont nommés* alternes, *à l'égard des deux premiers.*

IV.

329. ON dit qu'un rapport est *plus grand* qu'un autre, lorsque son exposant (n) est plus grand que celui de cet autre rapport. № 319.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 15 *pieds à une de* 5 *pieds, est* plus grand *que celui d'une ligne de* 18 *pieds à une de* 9 *pieds, parce que le quotient* 3 *de* 15 *divisé par* 5, *est plus grand que le quotient* 2 *de* 18 *divisé par* 9.

Pareillement, le rapport d'une ligne

† Invertendo. ¶ Permutando, *ou* Alternando.

Digitized by Google

de 16 pieds à une de 20 pieds, est plus grand *que celui d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds; parce que le quotient* $\frac{4}{5}$ *de 16 divisé par 20, est plus grand* † *que le quotient* $\frac{2}{3}$ *de 8 divisé par 12.*

330. On dit que des rapports sont *égaux*, ou sont *les mêmes*, lorsque leurs
N. 319. Exposans (n) sont égaux.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 24 pieds à une de 8 pieds, est égal *à celui d'une ligne de 18 pieds à une de 6 pieds; parce que le quotient 3 de 24 divisé par 8, est le même que celui de 18 divisé par 6.*

Pareillement, le rapport d'une ligne de 10 pieds à une de 15 pieds, est le même *que celui d'une ligne de 14 pieds à une de 21 pieds; parce que le quotient* $\frac{2}{3}$ *de 10 divisé par 15, est égal à celui de 14 divisé par 21.*

SCHOLIE.

331. *Pour marquer que des rapports sont égaux, tels que sont, par exemple, les rapports de 24 à 8, de 18 à 6, de*

† Pour connoître lequel de ces quotiens est le plus grand, lorsqu'ils sont des nombres fractionnaires de différente dénomination, on réduit les fractions à un même dénominateur.

Digitized by Google

21 à 7, &c. on les sépare les uns des autres par quatre points rangés en quarré, de cette maniere : 24. 8 :: 18. 6 :: 21. 7 :: *&c. Et pour exprimer cette égalité, on se sert de différentes expressions, dont les plus ordinaires sont les suivantes.*

Premierement, 24 sont à 8, ce que 18 sont à 6, ce que 21 sont à 7, &c.

Secondement, 24 contiennent 8, de la même maniere dont 18 contiennent 6, dont 21 contiennent 7, &c.

Troisiemement, 24 sont multiples de 8, de la même maniere dont 18 sont multiples de 6, dont 21 sont multiples de 7, &c.

Quatriemement. Enfin, 24, 18 & 21, sont équi-multiples de 8, 6 & 7.

332. On nomme *proportion*, l'égalité de plusieurs rapports.

Par exemple, l'égalité qui est entre le rapport de 24 à 8, & celui de 18 à 6, se nomme proportion.

COROLLAIRE.

333. *Il suit de cette définition, qu'*une proportion ne peut point avoir moins de trois termes.

Démonst. *Puisque la proportion consiste dans l'égalité des rapports, il faut*

Digitized by Google

au moins deux rapports pour former une proportion. Or, on ne peut point former deux rapports égaux, avec moins de trois quantités ; puisqu'après avoir formé un rapport en comparant une quantité à une autre, il faut nécessairement comparer l'une de ces deux quantités à une troisieme, pour former un second rapport qui soit égal au premier. Donc, il faut au moins trois quantités, pour former une proportion ; & par conséquent, C. Q. F. D.

334. On nomme *proportion continue*, ou *progression*, une proportion dont chaque conséquent sert d'antécédent au terme qui le suit immédiatement.

Par exemple, cette proportion, 3. 9 :: 9. 27 :: 27. 81 :: 81. *&c. s'appelle une* proportion continue, *ou une* progression.

SCHOLIE.

335. *Pour marquer que des quantités sont en* proportion continue, *telles que sont, par exemple celles-ci*, 3. 9. 27. 81. 243, *&c. on les fait précéder par une petite ligne entre quatre points, de cette maniere*, ∸ 3. 9. 27. 81. 243, *&c.*

On peut remarquer que cette propor-

Digitized by Google

tion est nommée continue, *parce que les rapports qui la forment sont liés les uns aux autres, par un terme commun : & que les autres proportions sont appellées* discretes, *parce que les rapports qui les forment sont séparés les uns des autres.*

336. Les quantités qui forment des rapports égaux, se nomment *quantités proportionnelles.*

Par exemple, 24, 8, 18 & 6, *sont des* quantités proportionnelles, *parce que* 24. 8 :: 18. 6.

337. Le premier & le dernier terme d'une proportion, se nomment les termes *extrêmes ;* & les autres s'appellent les termes *moyens.*

Par exemple, 24 & 6 *sont les* extrêmes *de cette proportion*, 24. 8 :: 18. 6 ; & 8 & 18 *en sont les* moyens.

338. On dit que deux rapports sont *réciproques*, lorsqu'ils sont tels qu'en renversant l'ordre des termes de l'un ou de l'autre, ils deviennent égaux.

Par exemple, le rapport de 8 *à* 24 *est* réciproque *à celui de* 18 *à* 6, *parce que si l'on renverse l'ordre de ses termes, on a cette proposition*, 24. 8 :: 18. 6 ; *& si l'on renverse au contraire l'ordre des termes du rapport de* 18 *à* 6, *on a cette*

Digitized by Google

autre proportion, 8. 24 :: 6. 18.

339. Les quantités qui forment des rapports réciproques, se nomment quantités *réciproquement* proportionnelles.

Par exemple, 8. 24, 18 & 6, *sont des quantités* réciproquement *proportionnelles*, *parce que* 24. 8 :: 18. 6.

340. Lorsque plusieurs quantités d'une part, & autant d'une autre, sont telles que celles de la premiere part étant comparées chacune à chacune, forment des rapports égaux chacun à chacun de ceux que forment celles de la seconde part, comparées aussi chacune à chacune; l'égalité de ces rapports se nomme *proportion d'égalité*.

Par exemple, $\begin{cases} 12. & 4. & 28. & 14. & \&c. \\ 18. & 6. & 42. & 21. & \&c. \end{cases}$

forment ce que l'on appelle une proportion d'égalité, *parce que* 12. 4 :: 18. 6; 4. 28 :: 6. 42; 28. 14 :: 42. 21, *&c.*

341. Lorsque les rapports qui forment une proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier du premier rang est égal au premier du second rang, le second du premier rang au second du second rang, le troisieme, &c. au troisieme, &c. & ainsi de suite; cette proportion se nomme proportion d'égalité *ordonnée*, ou *bien rangée*.

Digitized by Google

L'exemple précédent (n) *est une proportion d'égalité* ordonnée. N. 340.

342. Lorsque les rapports qui forment une proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier du premier rang est égal au dernier du second rang, le second du premier rang au pénultieme du second rang, le troisieme, &c. à l'antépénultieme, &c. & ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on vienne à comparer le dernier rapport du premier rang au premier du second rang; cette proportion se nomme proportion d'égalité *troublée*, ou *mal rangée*.

Par exemple, $\begin{cases} 20. & 12. & 4. & 28. \\ 15. & 105. & 35. & 21. \end{cases}$ *forment ce que l'on appelle une proportion d'égalité* troublée; *parce que* 20. 12 :: 35. 21; 12. 4 :: 105. 35; & 4. 28 :: 15. 105.

V.

343. ON dit qu'un rapport est *composé* d'autres rapports, lorsqu'on le considere comme étant formé de ces autres rapports multipliés les uns par les autres: *c'est-à-dire*, comme étant le rapport du produit des antécédens de ces autres rapports, au produit de leurs conséquens.

Digitized by Google

Par exemple, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 30 pieds à une de 5 pieds, est d'être sextuple *de cette ligne de 5 pieds, ce rapport sera* simple. *Mais, si l'on considere que cette ligne de 30 pieds n'est* sextuple *de celle de 5 pieds, que parce qu'elle est le* double *du* triple *de cette ligne de 5 pieds; alors, ce même rapport sera* composé *d'un rapport double, & d'un rapport triple.*

Pareillement, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 30 pieds à une de 72 pieds, est d'être les $\frac{5}{12}$ *de cette ligne de 72 pieds, ce rapport sera* simple. *Mais, si l'on considere que cette ligne de 30 pieds n'est les* $\frac{5}{12}$ *de celle de 72 pieds, que parce qu'elle est les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *des* $\frac{5}{6}$ *de cette ligne de 72 pieds; alors ce même rapport sera* composé *des rapports de 2 à 3, de 3 à 4, & de 5 à 6.*

COROLLAIRE.

344. *Il suit de cette définition, que* si l'on a plusieurs quantités entre lesquelles il puisse † y avoir rapport; celui de la

† Il faut que des quantités soient de même genre, afin qu'il puisse y avoir des rapports entr'elles. Il n'y a, par exemple, aucun rapport, d'une aulne à un louis d'or, d'une ligne à une surface, &c.

Digitized by Google

premiere à la derniere sera composé des rapports de la premiere à la seconde, de la seconde à la troisieme, de la troisieme à la quatrieme; & ainsi de suite.

Si l'on a les quantités suivantes; par exemple, une ligne de 3 pieds, une de 8 pieds, une de 4 pieds, & une de 12 pieds; le rapport de cette ligne de 3 pieds à celle de 12 pieds, sera composé du rapport de cette même ligne de 3 pieds à celle de 8 pieds, du rapport de cette ligne de 8 pieds à celle de 4 pieds, & du rapport de cette ligne de 4 pieds à celle de 12 pieds.

Démonst. *La ligne de 3 pieds est les* $\frac{3}{8}$ *de celle de 8 pieds; celle de 8 pieds est le double de celle de 4 pieds; & celle de 4 pieds est le tiers de celle de 12 pieds. Donc, cette ligne de 3 pieds est les* $\frac{3}{8}$ *du double du tiers de celle de 12 pieds; & par conséquent* (n), *son rapport à cette* N. 343. *ligne de 12 pieds est composé des rapports de 3 à 8, de 2 à 1, & de 1 à 3. Mais* [H], *ces rapports sont ceux de la premiere ligne à la seconde, de la seconde à la troisieme, & de la troisieme à la quatrieme. Donc, C. Q. F. D.*

345. On nomme rapports *composans*, ceux dont la multplication a produit un rapport composé.

Digitized by Google

Par exemple, les rapports de 2 à 3, de 3 à 4, & de 5 à 6, sont les rapports composans *du rapport de cette ligne de*
N. 345. *30 pieds* (n) *à celle de 72 pieds.*

346. On dit qu'un rapport est *doublé* † d'un autre, lorsqu'on le considere comme étant composé de cet autre répété deux fois.

Par exemple, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 36 pieds à une de 4 pieds, est d'être le triple *du* triple *de cette ligne de 4 pieds, ce rapport sera* doublé *d'un rapport triple.*

Pareillement, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 9 pieds à une de 16 pieds, est d'être les trois quarts *des* trois quarts *de cette ligne de 16 pieds, ce rapport sera* doublé *de celui de 3 à 4.*

347. Enfin, on dit qu'un rapport est *triple* d'un autre, lorsqu'on le considere comme étant composé de cet autre répété trois fois : qu'il est *quadruplé* d'un autre, lorsque, &c. & ainsi de suite.

Par exemple, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 56 pieds à une de 7 pieds, est d'être le double *du* double *du* double *de cette ligne de 7 pieds ; ce rapport sera* triplé *d'un rapport double.*

† Je pense que le vrai terme devroit être *redoublé*, de même que *retriplé*, dans la définition suivante, &c.

Digitized by Google

Pareillement, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 64 pieds à une de 125 pieds, est d'être les quatre cinquiemes *des* quatre cinquiemes *des* quatre cinquiemes *de cette ligne de 125 pieds, ce rapport sera* triplé *de celui de 4 à 5.*

COROLLAIRE I.

348. *Il suit du corollaire précédent* (n), *& des deux dernieres définitions,* N. 344. *que* dans une progression, le rapport du premier terme au troisieme est doublé de celui du premier au second : le rapport du premier terme au quatrieme, est triplé de celui du premier au second : le rapport du premier terme au cinquieme, est quadruplé de celui du premier au second ; & ainsi de suite.

Dans cette progression ∺ *A. B. C. D. E. F. G. &c. le rapport de A à C est doublé de celui de A à B : le rapport de A à D est triplé de celui de A à B : le rapport de A à E est quadruplé de celui de A à B ; & ainsi de suite.*

Démonst. *Si A est, par exemple, le triple de B, B sera* (n) *le triple de C ;* N. 344. *C sera le triple de D ; & ainsi de suite. Donc, premierement, le rapport de A à*

C, sera d'être le triple du triple de C; &
N. 346. *par conséquent* (n), *il sera doublé de celui de A à B; secondement, le rapport de A à D sera d'être le triple du triple du*
N. 347. *triple de D; & par conséquent* (n), *il sera triplé de celui de A à B. Et ainsi de suite.*

Pareillement, si A est, par exemple, les $\frac{2}{3}$ *de B, B sera les* $\frac{2}{3}$ *de C, C sera les* $\frac{2}{3}$ *de D; & ainsi de suite. Donc, premierement, le rapport de A à C sera d'être les* $\frac{2}{3}$
N. 346. *des* $\frac{2}{3}$ *de C; & par conséquent* (n), *il sera doublé de celui de A à B: Secondement, le rapport de A à D sera d'être les* $\frac{2}{3}$ *des*
N. 347. $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de D; & par conséquent* (n), *il sera triplé de celui de A à B. Et ainsi de suite.*

Or, la même démonstration subsiste, quel que soit l'exposant du rapport du premier terme A au second terme B. Donc, C. Q. F. D.

Autre Démonst. *Premierement, le rap-*
N 344. *port de A à C est* (n) *composé de celui de*
N. 332. *A à B, & de celui de B à C. Or* (n), *le rapport de B à C est le même que celui de A à B. Donc, le rapport de A à C est composé de celui de A à B répété deux*
N. 346. *fois; & par conséquent* (n), *il est doublé de ce dernier rapport.*

Digitized by Google

Secondement, le rapport de A à D est (n) *composé de celui de A à B, de celui de B à C, & de celui de C à D. Or* (n), *le rapport de B à C, & celui de C à D, sont chacun le même que celui de A à B. Donc, le rapport de A à D est composé de celui de A à B répété trois fois; & par conséquent* (n), *il est triplé de ce dernier rapport.* N. 344. N. 332. N. 347.

Troisiemement, enfin, on démontre par un raisonnement pareil, que le rapport de A à E est quadruplé de celui de A à B: que le rapport de A à F est quintuplé de celui de A à B; & ainsi de suite.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

349. *Il suit de ce corollaire, que* dans une progression, le second terme est le produit du premier multiplié par la premiere puissance de l'exposant du rapport du second terme au premier: le troisieme terme, est le produit du premier multiplié par la seconde puissance du même exposant: le quatrieme terme, est le produit du premier multiplié par la troisieme puissance de ce même exposant; & ainsi de suite.

Digitized by Google

Dans cette progression ∺ *A. B. C. D. E. F. G. &c. B est le produit de A multiplié par la premiere puissance de l'exposant du rapport de B à A : C est le produit de A multiplié par la seconde puissance du même exposant : D est le produit de A multiplié par la premiere puissance de ce même exposant ; & ainsi de suite.*

Démonst. *Si l'exposant du rapport de B à A est par exemple 3, B sera le triple de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par 3 : C sera le triple du triple de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par 9 : D sera le triple du triple du triple de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par 27 ; & ainsi de suite. Or, 3 est la premiere puissance de l'exposant 3 ; 9 est sa seconde puissance ; 27 est sa troisieme puissance ; & ainsi de suite.*

Pareillement, si l'exposant du rapport de B à A est, par exemple $\frac{2}{3}$, *B sera les* $\frac{2}{3}$ *de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par* $\frac{2}{3}$: *C sera les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de A ; & par conséquent, le produit de A multipliée par* $\frac{4}{9}$: *D sera les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par* $\frac{8}{27}$; *& ainsi de suite. Or,* $\frac{2}{3}$ *est la premiere puissance de l'exposant* $\frac{2}{3}$,

$\frac{4}{9}$

$\frac{4}{9}$ est sa seconde puissance ; $\frac{8}{27}$ est sa troisieme puissance ; & ainsi de suite.

Mais, la même démonstration subsiste ; quel que soit l'exposant du rapport du second terme B au premier terme A. Donc, C. Q. F. D.

AXIOMES.

I.

350. Les rapports qui sont égaux chacun à un même rapport, sont égaux entr'eux.

II.

351. Si de deux rapports égaux, l'un est plus grand qu'un troisieme, l'autre le sera aussi.

III.

352. Si une quantité est double, triple, quadruple, &c. d'une autre ; le quotient † de cette premiere quantité divisée par une troisieme, sera aussi double,

† Par ce mot *quotient*, nous entendons, ce qui exprime la *maniere* dont une quantité en contient une autre. Ainsi, lorsque nous disons, *le quotient de A divisé par C, est le même que celui de B divisé aussi par C* ; on doit entendre la même chose que si nous disions, *la maniere dont A contient C, est la même que celle dont B contient aussi C.* Nous faisons cette remarque, parce que plusieurs personnes ont une idée si peu juste de ce qu'on appelle un *quotient*, qu'elles s'imaginent que le dividende doit toujours être plus grand que le diviseur.

Digitized by Google

triple, quadruple, &c. de celui de cette autre quantité divisée par cette même troisieme. Et au contraire.

Par exemple, si A est double de B, le quotient de A divisé par C, sera double de celui de B divisé aussi par C. Si A est triple de B, le quotient de A divisé par C, sera triple de celui de B divisé aussi par C; & ainsi de suite.

Au contraire, si A est la moitié de B, le quotient de A divisé par C, sera la moitié de celui de B divisé aussi par C. Si A est le tiers de B, le quotient de A divisé par C, sera le tiers de celui de B divisé aussi par C. Et ainsi de suite.

IV.

353. Si une quantité est double, triple, quadruple, &c. d'une autre, le quotient d'une troisieme quantité divisée par cette premiere, sera la moitié, le tiers, le quart, &c. de celui de cette même troisieme quantité divisée par cette autre. Et au contraire.

Par exemple, si A est double de B, le quotient de C divisé par A, sera la moitié de celui de C divisé par B. Si A est triple de B, le quotient de C divisé par A, sera le tiers de celui de C divisé par B. Et ainsi de suite.

Digitized by Google

Au contraire, si A est la moitié de B, le quotient de C divisé par A, sera double de celui de C divisé par B. Si A est le tiers de B, le quotient de C divisé par A, sera triple de celui de C divisé par B. Et ainsi de suite.

PROPOSITION VII. †

THÉORÊME.

354. *Si deux quantités sont égales, elles auront chacune le même rapport à une troisieme quantité; & une troisieme quantité aura le même rapport à chacune d'elles.*

PREMIEREMENT.

SI A* est égal à B, le rapport de A à C sera le même que celui de B à C. Fig. 7.

Démonst. Puisque [H] A est égal à B, le quotient de A divisé par C, est le même que celui de B divisé aussi par C. Donc (n), le rapport de A à C est aussi le même que celui de B à C; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 330.

† Nous supprimons les six premieres propositions, parce qu'elles sont totalement inutiles.

Digitized by Google

SECONDEMENT.

Fig. 7. Si A * est égal à B, le rapport de C à A sera le même que celui de C à B.

Démonst. Puisque [H] A est égal à B, le quotient de C divisé par A, est le même
N. 330. que celui de C divisé par B. Donc (n), le rapport de C à A est aussi le même que celui de C à B; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

355. *Si deux quantités sont inégales, la plus grande aura un plus grand rapport à une troisieme quantité, que la plus petite; & une troisieme quantité aura un plus grand rapport à la plus petite qu'à la plus grande.*

PREMIEREMENT.

Fig. 8. SI A * est plus grand que B, le rapport de A à C sera plus grand que celui de B à C.

Démonst. Puisque [H] A est plus grand que B, le quotient de A divisé par C, est plus grand que celui de B divisé aussi par

Digitized by Google

C. Donc (n), le rapport de A à C est N. 325.
aussi plus grand que celui de B à C; &
par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si A * est plus grand que B, le rapport Fig. 20.
de C à B sera plus grand que celui de C à A.

Démonst. Puisque [H] A est plus grand que B, le quotient de C divisé par B, est plus grand que celui de C divisé par A. Donc (n), le rapport de C à B est aussi N. 325.
plus grand que celui de C à A; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

356. *Si deux quantités ont chacune le même rapport à une troisieme quantité, elles seront égales; & si une troisieme quantité a le même rapport à chacune d'elles, elles le seront aussi.*

PREMIEREMENT.

SI le rapport de A * à C est le même Fig. 21
que celui de B à C, A sera égal à B.

Démonst. Puisque [H] le rapport de A à C, est le même que celui de B à C, le

Digitized by Google

N. 330. quotient de A divisé par C, est (n) le même que celui de B divisé aussi par C. Donc, A est égal à B; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 7. Si le rapport de C * à A est le même que celui de C à B, A sera encore égal à B.

Démonst. Puisque [H] le rapport de C à A est le même que celui de C à B, le

N. 330. quotient de C divisé par A, est (n) le même que celui de C divisé par B. Donc, A est égal à B; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

Digitized by Google

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

357. *Si de deux quantités, l'une a un plus grand rapport que l'autre à une troisieme quantité; celle qui aura le plus grand rapport, sera la plus grande. Et si une troisieme quantité a un plus grand rapport à l'une de ces deux quantités qu'à l'autre, celle à laquelle elle aura le plus grand rapport, sera la plus petite.*

PREMIEREMENT.

SI le rapport de A * à C est plus grand que celui de B à C, A sera plus grand que B. Fig. 8.

Démonst. Puisque [H] le rapport de A à C est plus grand que celui de B à C, le quotient de A divisé par C, est (n) plus grand que celui de B divisé aussi par C. Donc (n), A est plus grand que B; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 329. N. 352.

SECONDEMENT.

Si le rapport de C * à B est plus grand que celui de C à A, B sera plus petit que A. Fig. 8.

Digitized by Google

Démonst. Puisque [H] le rapport de C à B est plus grand que celui de C à A, le
N. 329. quotient de C divisé par B est (n) plus grand que celui de C divisé par A. Donc
N. 353. (n), B est plus petit que A; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

SCHOLIE.

358. *Ces quatre premieres propositions ne sont que des axiomes, que l'on auroit pu énoncer de cette maniere:*

Fig. 7. Si A * & B sont égaux, ils seront également grands à l'égard de C; & C sera aussi grand à l'égard de A, qu'à l'égard de B.

Fig. 8. Si A * est plus grand que B, il sera plus grand à l'égard de C, que B ne l'est à l'égard aussi de C: & C sera plus grand à l'égard de B, qu'à l'égard de A.

Fig. 7. Si A * & B sont également grands à l'égard de C, ils seront égaux: & si C est aussi grand à l'égard de A, qu'à l'égard de B; A & B seront encore égaux.

Fig. 8. Enfin, si A * est plus grand à l'égard de C, que B ne l'est à l'égard aussi de C; A sera plus grand que B: & si C est plus grand à l'égard de B, qu'à l'égard de A, B sera plus petit que A.

PROPOSITION

Digitized by Google

PROPOSITION XI. ¶

THÉORÊME.

359. *Les quantités qui sont équimultiples d'autres quantités, ont entr'elles le même rapport que ces dernieres.* †

SI l'on multiplie A & B chacun par un même nombre quelconque, le rapport des produits sera le même que celui de A à B.

Le nombre par lequel on multiplie A & B, est ou entier, ou fractionnaire.

PREMIER CAS.

Lorsque le nombre par lequel on multiplie A & B, est un nombre entier.

Il faut démontrer, par exemple, que 7A. 7B :: A. B.

¶ La onzieme d'Euclide est le premier axiome de ce Livre, n. 350.

† On peut aussi énoncer ce théorême, des deux manieres suivantes :

1°. *On ne change point un rapport, en multipliant, ou en divisant, par un même nombre, chacun de ses termes.*

2°. *Les quantités qui sont doubles, triples, quadruples, &c. d'autres quantités, ont entr'elles le même rapport que ces dernieres. Et il en est de même, de celles qui en sont les moitiés, les tiers, les quarts, &c.*

Digitized by Google

Démonst. Le quotient de A divisé par
N. 352. B, est (n) la septieme partie de celui de 7A divisé aussi par B, puisque A est la
N. 353. septieme partie de 7A. Mais (n), le quotient de 7A divisé par 7B, est aussi la septieme partie de celui de 7A divisé par B, puisque 7B est septuple de B.
N. 68. Donc (n), les quotiens de A divisé par B, & de 7A divisé par 7B, sont égaux;
N. 330. & par conséquent (n), 7A. 7B :: A. B.

SECOND CAS.

Lorsque le nombre par lequel on multiplie A & B est un nombre fractionnaire.

Il faut démontrer, par exemple, que $\frac{2}{3}$ A. $\frac{2}{3}$ B :: A. B.

Démonst. Le quotient de A divisé par
N. 352. B, est (n) une fois & demie celui de $\frac{2}{3}$ A divisé aussi par B, puisque A est une fois
N. 353. & demie $\frac{2}{3}$ A. Mais (n), le quotient de $\frac{2}{3}$ A divisé par $\frac{2}{3}$ B, est aussi une fois & demie celui de $\frac{2}{3}$ A divisé par B, puisque B
N. 67. est une fois & demie $\frac{2}{3}$ B. Donc (n), les quotiens de A divisé par B, & de $\frac{2}{3}$ A divisé par $\frac{2}{3}$ B, sont égaux; & par con-
N. 330. séquent (n), $\frac{2}{3}$ A. $\frac{2}{3}$ B :: A. B.

Or, dans l'un comme dans l'autre cas, la démonstration reste pareille, quel que

Digitized by Google

ſoit le nombre par lequel on multiplie A & B. Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

360. Il ſuit de ce théorême, que *le produit de deux quantités quelconques, eſt moyen proportionnel entre les quarrés de ces deux mêmes quantités.* †

Le produit de A multiplié par B, eſt moyen proportionnel entre le quarré de A & celui de B.

Démonſt. Si l'on multiplie A & B, chacun par A, on aura (n), A × A. A × B :: N. 359.
A. B : & ſi l'on multiplie A & B chacun auſſi par B, on aura (n), A × B. B × B :: N. 359.
A. B. Donc, les rapports de A × A à A × B, & de A × B à B × B, ſont égaux chacun au même rapport de A à B : & par conſéquent (n), A × A. A × B :: N. 359.
A × B. B × B. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

361. Il ſuit auſſi de ce même théorême, que *ſi quatre quantités ſont proportionnelles, le produit des moyennes,*

† Ce corollaire ſe trouve ſouvent énoncé de cette maniere : *Le produit des racines de deux quarrés, eſt moyen proportionnel entre ces deux mêmes quarrés.*

(ou celui des extrêmes) sera moyen proportionnel entre le produit des antécédentes & celui des conséquentes.

Dans cette proportion, A. B :: C. D, le produit de B multiplié par C, (ou celui de A multiplié par D) est moyen proportionnel entre le produit de A multiplié par C, & celui de B multiplié par D.

Démonst. Si l'on multiplie A & B chacun par C, on aura (n), A × C. B × C :: A. B : & si l'on multiplie aussi C & D chacun par B, on aura (n), B × C. B × D :: C. D. Or [H], les rapports de A à B, & de C à D, sont égaux. Donc (n), ceux de A × C à B × C, & de B × C à B × D, le sont aussi; & par conséquent, ∺ A × C. B × C. B × D.

N. 359.
N. 359.
N. 350.

Mais, si l'on transpose les deux rapports proposés, en les écrivant ainsi, C. D :: A. B, on démontrera que ∺ A × C. A × D. B × D, de la même maniere dont nous venons de démontrer la proportion précédente. Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

362. Il suit enfin de ce même théorême, que *si quatre quantités sont propor-*

tionnelles, le quarré d'une antécédente sera au produit de cette antécédente multipliée par sa conséquente, comme le quarré de l'autre antécédente, est au produit de cette autre antécédente multipliée aussi par sa conséquente.

Si A. B :: C. D, le quarré de A sera au produit de A multiplié par B, comme le quarré de C est au produit de C multiplié par D.

Démonst. Si l'on multiplie A & B chacun par A, on aura (n), A × A. A × B :: A. B : & si l'on multiplie aussi C & D chacun par C, on aura (n), C × C. C × D :: C. D. Or [H], les rapports de A à B, & de C à D, sont égaux. Donc (n), ceux de A × A à A × B, & de C × C à C × D, le sont aussi; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 359. N. 359. N. 350.

*PROPOSITION XII. †

THÉORÊME.

363. *Si quatre quantités sont proportionnelles, le produit des extrêmes sera égal à celui des moyennes.*

SI A. B :: C. D, le produit de A multiplié par D, sera égal à celui de B multiplié par C.

Démonst. Si l'on multiplie A & B chacun par D, on aura (n), A × D. B × D :: A. B : & si l'on multiplie aussi C & D chacun par B, on aura (n), B × C. B × D :: C. D. Or [H], les rapports de A à B, & de C à D, sont égaux. Donc (n), ceux de A × D à B × D, & de B × C à B × D, le sont aussi; & par conséquent (n), A × D est égal à B × C. Donc, C. Q. F. D.

N. 359. N. 359. N. 350. N. 356.

COROLLAIRE.

364. Il suit de ce théorême, que *si trois quantités sont en progression, le*

† La douzieme d'Euclide, est le second corollaire de la dix-huitieme de ce Livre, n°. 389.

Digitized by Google

produit des extrêmes sera égal au quarré de la moyenne.

---

*PROPOSITION XIII. †

PROBLÊME. ¶

365. *Trouver le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers termes sont donnés.*

IL faut trouver le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers termes sont 28, 32 & 49.

Solution. Multipliez l'un par l'autre, les moyens 32 & 49. Divisez par le premier terme 28, le produit 1568. Le quotient 56, sera le terme demandé.

Démonst. Puisque dans une proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens (n), 28 fois le terme demandé doit produire autant que 32 fois 49. Or, 32 fois 49 produisent 1568. Donc, 28 fois le terme demandé produit aussi 1568; & par conséquent, ce terme N. 363.

† La treizieme d'Euclide, est le second axiome de ce Livre, n°. 351.

¶ On donne ordinairement à ce problême, les noms de *regle de Proportion*, *regle de Trois*, *regle d'Or*, &c.

Digitized by Google

est le quotient 56 de 1568, divisés par 28. Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

366. Il suit de la solution de ce problême, que *pour trouver le troisieme terme d'une progression dont les deux premiers termes sont donnés, il faut multiplier le second terme par lui-même, & diviser ensuite le produit, par le premier terme.*

---

*PROPOSITION XIV. †

THÉORÊME.

367. *Si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyennes, elles seront proportionnelles.*

SI les quantités A, B, C & D, sont telles que le produit de A multiplié par D, soit égal à celui de B multiplié par C; le rapport de A à B sera le même que celui de C à D.

† La quatorzieme d'Euclide, est la quinzieme de ce Livre, n°. 369.

Digitized by Google

Démonst. Si l'on compare chaque produit A × D, & B × C, à celui des conséquentes B & D; on aura (n), A × D. B × D :: A. B : & B × C. B × D :: C. D. Or (n), les rapports de A × D à B × D, & de B × C à B × D, sont égaux; puisque [H] les produits A × D, & B × C, le sont. Donc (n), les rapports de A à B, & de C à D, sont aussi égaux; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 353. N. 354. N. 350.

COROLLAIRE.

368. Il suit de ce théorême, que *si trois quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au quarré de la moyenne, elles seront en progression.*

Digitized by Google

PROPOSITION XV. †

THÉORÊME.

369. *Si le premier terme d'une proportion est plus petit, aussi grand, ou plus grand que le troisieme, le second sera aussi plus petit, aussi grand, ou plus grand que le quatrieme.*

PREMIÉREMENT.

Fig. 10. DAns la proportion * A. B :: C. D, si A est plus petit que C, B sera aussi plus petit que D.

Démonst. Puisque [H] A est plus petit
N. 355. que C, le rapport de A à B est (n) plus petit que celui de C à B. Mais [H], le rapport de C à D est égal à celui de A à B.
N. 351. Donc (n), il est aussi plus petit que celui
N. 357. de C à B; & par conséquent (n), B est plus petit que D. Donc, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 11. Dans la proportion * A. B :: C. D, si A est égal à C, B le sera à D.

Démonst. Puisque [H] A est égal à C,
N. 354. le rapport de A à B est (n) égal à celui

† La quinzieme d'Euclide, la onzieme de ce Livre, n°. 359.

Digitized by Google

de C à B. Mais [H], le rapport de A à B est aussi égal à celui de C à D. Donc (n), N. 350.
les rapports de C à B, & de C à D, sont égaux ; & par conséquent (n), B est égal N. 356.
à D. Donc, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Dans la proportion * A. B :: C. D, si Fig. 12.
A est plus grand que C, B sera aussi plus grand que D.

Démonst. Puisque [H] A est plus grand que C, le rapport de A à B est (n) plus N. 355.
grand que celui de C à B. Mais [H], le rapport de C à D est égal à celui de A à B. Donc (n), il est aussi plus grand que N. 351.
celui de C à B ; & par conséquent (n), N. 357.
B est plus grand que D. Donc, C. Q. F. 3°. D.

USAGE.

370. *On se sert de cette proposition, pour examiner si les termes d'une proportion sont rangés dans l'ordre qu'ils doivent l'être ; & par conséquent, pour connoître si une regle de Trois est* directe *ou* inverse.

Digitized by Google

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

371. *Si quatre quantités de même genre † sont proportionnelles, elles le seront aussi étant échangées.*

Fig. 16. SI le rapport de A * à B est égal à celui de C à D, le rapport de A à C sera aussi égal à celui de B à D.

Démonst. Puisque [H] A. B :: C. D, A contient B de la même maniere dont
N. 330 C contient D (n). Donc A & C sont équimultiples de B & de D; & par con-
N. 359. séquent (n), A. C :: B. D. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

372. Il suit de ce théorême, que *si quatre quantités sont proportionnelles, elles le seront aussi étant renversées.*

Si le rapport de A à B est égal à celui de C à D, le rapport de B à A sera aussi égal à celui de D à C.

† On ne peut faire d'échange, que lorsque tous les termes d'une proportion sont de même genre. Puisque, si A étant, par exemple, une ligne, C étoit une surface, il n'y auroit aucun rapport de A à C.

Digitized by Google

Démonst. A. B :: C. D [H]. Donc N. 371.
(n), en échangeant, A. C :: B. D. Mais,
puisque A. C :: B. D, B. D :: A. C.
Donc (n), en échangeant encore, B. A :: N. 371.
D. C; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

373. Il suit aussi de ce même théorême, que *si quatre quantités sont proportionnelles, le quarré d'une antécédente sera à celui de sa conséquente, comme le produit des antécédentes est à celui des conséquentes.*

Si A. B :: C. D, le quarré de A sera à celui de B, comme le produit de A multiplié par C, est à celui de B multiplié par D.

Démonst. A. B :: C. D. [H]. Donc
(n), en échangeant, A. C :: B. D. Mais N. 371.
(n), A × A. A × C :: B × B. B × D. N. 361.
Donc (n), en échangeant encore, A × A. N. 371.
B × B :: A × C. B × D; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

374. *Si quatre quantités sont proportionnelles, elles le seront aussi étant divisées.*

Fig. 17. SI le rapport de A * à B est égal à celui de C à D, le rapport de A—B à B, sera aussi égal à celui de C—D à D.

Démonst. Le quotient de A—B divisé par B, est plus petit d'une unité que celui de A divisé par B : & le quotient de C—D divisé par D, est aussi plus petit d'une unité que celui de C divisé par D.

N. 380. Mais (n), les quotiens de A divisé par B, & de C divisé par D, sont égaux, puis-

N. 64. que [H] A. B :: C. D. Donc (n), ceux de A—B divisé par B, & de C—D divisé par D, le sont aussi ; & par consé-

N. 330. quent (n), A—B. B :: C—D. D. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

375. Il suit de ce théorême, que l'*on ne change point un rapport, en retranchant de chacun de ses termes, pourvu que ce que l'on retranche du premier terme*

Digitized by Google

soit à ce que l'on retranche du second, comme ce premier terme est au second.

Si le rapport de A à B est égal à celui de C à D, la différence des antécédentes A & C, sera à celle des conséquentes B & D, ce que A est à B.

Démonst. A. B :: C. D [H]. Donc (n), en échangeant, A. C :: B. D. Mais (n), en divisant, A—C. C :: B—D. D. Donc (n), en échangeant encore, A—C. B—D :: C. D, & par conséquent, ce que A est à B. Donc, C. Q. F. D. N. 372. N. 374. N. 371.

COROLLAIRE II. †

376. Il suit de ce corollaire, que *si deux quantités qui sont divisées chacune en deux parties, sont telles, que ces deux quantités, & leurs premieres parties soient proportionnelles; ces deux mêmes quantités, & leurs secondes parties le seront aussi.*

Si le rapport de A*+B à C+D est égal à celui de A à C, il le sera aussi à celui de B à D. Fig. 5.

Démonst. Puisque [H] A+B. C+D :: A. C; si l'on retranche A de A+B, & C de C+D, les restes B & D seront entr'eux (n) ce que A+B est à C+D; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 375.

† Ce corollaire est la cinquieme d'Euclide.

COROLLAIRE III. †

377. Il suit de ce second corollaire, que *si deux quantités, qui sont proportionnelles à deux autres, sont divisées chacune en deux parties, dont les deux premieres soient proportionnelles à ces deux autres quantités, les deux dernieres le seront aussi.*

Fig. 6. Si les rapports de A* + B à C + D, & de A à C, sont égaux chacun à celui de G à H; le rapport de B à D lui sera aussi égal.

Démonst. Puisque [H] les rapports de A + B à C + D, & de A C, sont égaux chacun à celui de G à H, A + B. C + D :: A. C (n). Donc (n), B. D :: A. C; & par conséquent (n), B. D :: G. H. Donc, C. Q. F. D.

N. 350.
N. 376.
N. 350.

† Ce corollaire est la sixieme d'Euclide.

PROPOSITION

Digitized by Google

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

378. *Si quatre quantités sont proportionnelles, elles le seront aussi étant composées.*

SI le rapport de A * à B est égal à celui de C à D; le rapport de A+B à B, sera aussi égal à celui de C+D à D. Fig. 17.

Démonst. Le quotient de A+B divisé par B, est plus grand d'une unité que celui de A divisé par B: & le quotient de C+D divisé par D, est aussi plus grand d'une unité que celui de C divisé par D. Mais (n), les quotiens de A divisé par B, & de C divisé par D, sont égaux; puisque [H], A. B :: C. D. Donc (n), ceux de A+B divisé par B, & de C+D divisé par D, le sont aussi; & par conséquent (n), A+B. B :: C+D. D. Donc, C. Q. F. D. N. 330. N. 64. N. 330.

COROLLAIRE I.

379. Il suit de cê théorême, que *si quatre quantités sont proportionnelles, elles le seront aussi étant converties.*

Digitized by Google

Si le rapport de A à B est égal à celui de C à D, le rapport de A+B à A, sera aussi égal à celui de C+D à C.

N. 372. *Demonst.* A. B :: C. D [H]. Donc (n), en renversant, B. A :: D. C ; & par con-
N. 378. séquent (n), en composant, A+B. A :: C+D. C. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II. †

380. Il suit aussi de ce même théorême, que *l'on ne change point un rapport, en ajoutant à chacun de ses termes, pourvu que ce que l'on ajoute au premier terme soit à ce que l'on ajoute au second, comme ce premier terme est au second.*

Fig. 1. Si le rapport de A * à B est égal à celui de C à D, la somme des antécédentes A & C, sera à celle des conséquentes B & D, ce que A est à B.

N. 371. *Démonst.* A. B :: C. D [H]. Donc (n),
N. 378. en échangeant, A. C :: B. D. Mais (n), en composant, A+C. C :: B+D. D.
N. 371. Donc (n), en échangeant encore, A+C. B+D :: C. D, & par conséquent, ce que A est à B. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

381. Il suit de ce second corollaire,

† Ce Corollaire est la premiere & la douzieme d'Euclide.

que *dans une progression, un conséquent quelconque, moins son antécédent, est à cet antécédent, ce que le dernier terme, moins le premier, est à la somme de tous les termes qui précedent le dernier.*

Dans cette progression, ∺ A. B. C. D. E. F. G; B — A. A :: G — A. A + B + C + D + E + F.

Démonst. Puisque [H] A, B, C, D, E, F. & G, sont en progression, A. B :: B. C :: C. D :: D. E :: E. F :: F. G, (n). N. 334.
Donc (n), A est à B, comme la somme des antécédens A, B, C, D, E & F, est à celle des conséquens B, C, D, E, F & G; & par conséquent (n), en renversant, B. A :: B + C + D + E + F + G. A + B + C + D + E + F. N. 380. N. 372.
Mais (n), en divisant, B — A. A :: B + C + D + E + F + G — A — B — C — D — E — F. A + B + C + D + E + F. N. 374.
Donc, puisque le troisieme terme B + C + &c. ne vaut que G — A, B — A. A :: G — A. A + B + C + D + E + F; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

382. Enfin, il suit de ce dernier corollaire, que *dans une progression, si le second terme est double du premier; le*

dernier, moins le premier, sera égal à la somme de tous les termes qui précedent le dernier : si le second terme est triple du premier ; le dernier, moins le premier, sera double de cette somme : si le second terme est quadruple du premier ; le dernier, moins le premier, sera triple de cette même somme : & ainsi de suite.

Dans cette progression, ∺ A. B. C. &c. Dont Z représente le dernier terme ; & S, la somme de tous les termes qui précedent Z : si B est double de A, Z—A sera égal à S : si B est triple de A, Z—A sera double de S : si B est quadruple de A, Z—A sera triple de S : & ainsi de suite.

N. 381. *Démonst.* B—A. A :: Z—A. S, (n). Donc.

Premierement, si B est double de A, B—A sera égal à A ; & par conséquent, Z—A le sera aussi à S.

Secondement, si B est triple de A, B—A sera double de A ; & par conséquent, Z—A le sera aussi de S.

Troisiemement, si B est quadruple de A, B—A sera triple de A ; & par conséquent, Z—A le sera aussi de S. Et ainsi de suite.

Digitized by Google

*PROPOSITION XIX. ¶

PROBLÊME.

383. *Diviser une quantité donnée, proportionnellement aux parties aussi données d'une autre quantité.* †

IL faut diviser 225 en parties, qui soient proportionnelles aux parties 36, 48 & 66, de 150.

Solution. Cherchez (n) les quatriemes termes 54, 72 & 99 de ces trois proportions, 150. 225 :: 36. * :: 48. * :: 66. *; ils seront les parties demandées. N. 365.

Démonst. Suivant ce qui est proposé, il faut que 36 soit à la premiere partie demandée, ce que 48 est à la seconde, ce que 66 est à la troisieme. Ainsi, les trois parties données sont les antécédens d'une proportion, dont les trois parties demandées sont les conséquens. Mais (n), dans une proportion, la somme des antécédens est à celle des conséquens, N. 380.

¶ La dix-neuvieme d'Euclide, est le premier corollaire de la dix-septieme de ce Livre, n°. 375.

† On donne ordinairement à ce problême, le nom de *regle de Compagnie*.

Digitized by Google

ce que un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent. Donc, la ſomme 150 des trois parties données, eſt à la ſomme 225 des trois parties demandées; ce que la premiere partie donnée 36, eſt à la premiere partie demandée; ce que la ſeconde partie donnée 48, eſt à la ſeconde partie demandée, ce que, &c; & par conſéquent, pour trouver ces trois
N. 365. parties demandées, il faut (n) faire les trois regles de proportion, qui ſont ordonnées par la ſolution. Donc, C. Q. F. F.

Digitized by Google

* PROPOSITION XX. †

THÉORÊME.

384. *Si l'on multiplie, ou si l'on divise, par ordre les termes de deux proportions; les produits, ou les quotiens, seront proportionnels.* ¶

PREMIEREMENT.

SI l'on multiplie les termes de cette proportion, A. B :: C. D, par ceux de cette autre proportion, E. F : G. H, chacun par chacun; les produits A × E, B × F, C × G & D × H, seront proportionnels.

Démonst. A. B :: C. D, [H] : & (n) en échangeant, A. C :: B. D. Donc, si l'on multiplie les deux premiers termes chacun par E, & les deux derniers, chacun par F, on aura (n), A × E, C × E :: B × F. D × F; & par conséquent (n), en échangeant encore, A × E. B × F :: C × E. D × F. N. 371. N. 359. N. 371.

Pareillement, E. F :: G. H, [H] : & (n) N. 371.

† La vingtieme d'Euclide, est le corollaire de la vingt-deuxieme de ce Livre, n°. 390.

¶. On énonce quelquefois ainsi ce théorême : *Les rapports qui sont composés de rapports égaux, sont aussi égaux.*

Digitized by Google

en échangeant, E. G :: F. H. Donc, si l'on multiplie aussi les deux premiers termes chacun par C, & les deux derniers,
N. 359. chacun par D; on aura (n), $C \times E$. $C \times G$ ::
N. 371. $D \times F$. $D \times H$; & par conséquent (n), en échangeant encore, $C \times E$. $D \times F$ :: $G \times G$. $D \times H$.

Ainsi, les rapports de $A \times E$ à $B \times F$, & de $C \times G$ à $D \times H$, sont égaux chacun au même rapport de $C \times E$ à $D \times F$.
N. 350. Donc (n), $A \times E$. $B \times F$ :: $C \times G$. $D \times H$; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si l'on divise les termes de cette proportion, A. B :: C. D, par ceux de cette autre proportion, E. F :: G. H, chacun par chacun; les quotiens $\frac{A}{E}$ †, $\frac{B}{F}$, $\frac{C}{G}$ & $\frac{D}{H}$ seront aussi proportionnels.

Démonst. Si l'on multiplie $\frac{A}{E}$ & $\frac{B}{F}$ chacun par le même produit $E \times F$, on

† Pour représenter le quotient d'une quantité divisée par une autre, on écrit le dividende sur une petite ligne, & le diviseur au dessous. C'est ainsi que dans l'Arithmétique, on écrit, par exemple $\frac{13}{4}$, pour représenter le quotient de 13 divisé par 4.

aura

aura (n), $\frac{A}{E} \cdot \frac{B}{F} :: A \times F. B \times E$: & si N. 359.
l'on multiplie aussi $\frac{C}{G}$ & $\frac{D}{H}$ chacun par
le même produit $G \times H$, on aura (n), $\frac{C}{G} \cdot$ N. 359.
$\frac{D}{H} :: C \times H. D \times G$. Mais [D], les rapports de $A \times F$ à $B \times E$, & de $C \times H$ à $D \times G$, sont égaux; puisqu'ils sont les produits des termes de ces deux proportions A. B :: C. D, & F. E :: H G, multipliés par ordre. Donc (n), les rapports N. 359.
de $\frac{A}{E}$ à $\frac{B}{F}$, & de $\frac{C}{G}$ à $\frac{D}{H}$, sont aussi égaux ; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

385. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *les puissances pareilles des termes d'une proportion, sont proportionnelles* : & de la seconde partie, que *les racines pareilles des termes d'une proportion, sont aussi proportionnelles.*

Digitized by Google

*PROPOSITION XXI.†

THÉORÊME.

386. *Les quarrés sont entr'eux en rapports doublés de ceux de leurs racines : les cubes, en rapports triplés : les quatriemes puissances, en rapports quadruplés : & ainsi de suite.*

LE rapport du quarré de A au quarré de B, est doublé de celui de A à B : celui du cube de A au cube de B, en est triplé : celui de la quatrieme puissance de A à la quatrieme puissance de B, en est quadruplé : & ainsi de suite.

Démonst. Si A étant, par exemple, les $\frac{5}{6}$ de B, on multiplioit A & B, chacun par B ; le produit $A \times B$ seroit aussi
N. 359. (n), les $\frac{5}{6}$ du produit $B \times B$. Mais, au lieu de multiplier A par B, on le multiplie par A, qui [H] est les $\frac{5}{6}$ de B. Donc, le produit $A \times A$ est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit $B \times B$. Or, puisque $A \times A$ est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ de $B \times B$, le rapport de $A \times A$ à $B \times B$ est celui de 5 à 6, ré-

† La vingt-unieme d'Euclide est le corollaire de la vingt-troisieme de ce Livre, n°. 392.

pété deux fois. Donc (n), il est doublé N. 346.
de ce dernier rapport; & par conséquent, de celui de A à B, qui est le même [H].

Pareillement, si l'on multiplioit A × A & B × B, chacun par B, le produit A × A × B seroit encore (n) les $\frac{1}{6}$ des $\frac{1}{6}$ N. 359.
du produit B × B × B. Mais, au lieu de multiplier A × A par B, on le multiplie par A, qui [H] est les $\frac{1}{6}$ de B. Donc, le produit A × A × A est les $\frac{1}{6}$ des $\frac{1}{6}$ des $\frac{1}{6}$ du produit B × B × B. Or, puisque A × A × A est les $\frac{1}{6}$ des $\frac{1}{6}$ des $\frac{1}{6}$ de B × B × B, le rapport de A × A × A à B × B × B est celui de 5 à 6 répété trois fois. Donc (n), il est triplé de ce der- N. 347.
nier rapport; & par conséquent, de celui de A à B, qui est le même [H]. Et ainsi de suite.

Or, la démonstration reste pareille, quel que soit l'exposant du rapport de A à B. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

387. Il suit de ce théorême, que *dans une progression, le quarré du premier terme est au quarré du second, ce que le premier terme est au troisieme: le cube du premier terme est au cube du se-*

cond, ce que le premier terme est au quatrieme : la quatrieme puissance du premier terme est à la quatrieme puissance du second, ce que le premier terme est au cinquieme : & ainsi de suite.

Dans cette progression ∺ A. B. C. D. E. F. &c, le quarré de A est à celui de B, ce que A est à C : le cube de A est au cube de B, ce que A est à D : la quatrieme puissance de A est à la quatrieme puissance de B, ce que A est à E : & ainsi de suite.

Démonst. Le rapport du quarré de A au quarré de B, & celui de A à C,
N. 386. sont doublés, l'un (n) & l'autre (n), du
N. 348. même rapport de A à B. Donc, ils sont égaux.

Pareillement, le rapport du cube de A au cube de B, & celui de A à D,
N. 386. sont triplés, l'un (n) & l'autre (n), du
N. 348. même rapport de A à B. Donc, ils sont aussi égaux. Et ainsi de suite.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

388. Il suit de ce corollaire : Premierement, *que pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux quantités quel-*
N. 365. *conques A & B, il faut chercher* (n) *la*

Digitized by Google

*quatrieme terme de cette proportion, A. B :: A × A. *; & extraire ensuite la racine quarrée de ce quatrieme terme.*

Secondement, que *pour trouver la premiere de deux moyennes proportionnelles entre deux quantités quelconques A & B, il faut chercher* (n) *le quatrieme terme de* N. 365. *cette proportion, A. B :: A × A × A. *; & extraire ensuite la racine cube de ce quatrieme terme.*

Troisiemement, que *pour trouver la premiere de trois moyennes proportionnelles entre deux quantités quelconques A & B, il faut chercher* (n) *le quatrieme* N. 365. *terme de cette proportion A. B :: A × A × A × A. *; & extraire ensuite la racine quatrieme de ce quatrieme terme.*

Et ainsi de suite.

Digitized by Google

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

389. *Dans une proportion d'égalité ordonnée, le premier & le dernier terme du premier rang, & le premier & le dernier terme du second rang, sont proportionnels.*

Fig. 18. SI les quantités A * B & C, D, E & F, forment une proportion d'égalité ordonnée : le rapport de A à C sera le même que celui de D à F.

N. 341. *Démonst.* (n) A. B :: D. E; & B. C.
N. 371. :: E. F. Donc (n), en échangeant, A. D :: B. E, & B. E :: C. F.

Ainsi, les rapports de A à D, & de C à F, sont égaux chacun au même rap-
N. 350. port de B à E. Donc (n), A. D ::
N. 371. C. F; & par conséquent (n), en échangeant, A. C :: D. F. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

390. Il suit de ce théorême, & du n°. 369, que *dans une proportion d'éga-*

Digitized by Google

lité ordonnée, si le premier terme du premier rang est plus petit, aussi grand, ou plus grand, que le dernier; le premier terme du second rang sera aussi plus petit, aussi grand, ou plus grand, que le dernier.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

391. *Dans une proportion d'égalité troublée, le premier & le dernier terme du premier rang, & le premier & le dernier terme du second rang, sont proportionnels.*

SI les quantités A *, B & C, D, E & F, forment une proportion d'égalité troublée; le rapport de A à C sera le même que celui de D à F. Fig. 19.

Démonst. (n) A. B :: E. F; & B. C :: D. E. Donc, si l'on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, on aura (n) A × B. B × C :: E × D. F × E. Mais, si l'on divise les deux premiers termes chacun par B, & les deux derniers, chacun par E; on aura (n) A. C :: D. F. Par conséquent, C. Q. F. D. N. 342. N. 384. N. 359.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

392. Il suit de ce théorême, & du n°. 369, que *dans une proportion d'égalité troublée, si le premier terme du premier rang est plus petit, aussi grand, ou plus grand, que le dernier; le premier terme du second rang sera aussi plus petit, aussi grand, ou plus grand, que le dernier.*

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

393. *Si six quantités sont telles, que les quatre premieres soient proportionnelles; & que la cinquieme, la seconde, la sixieme, & la quatrieme, le soient aussi: la somme de la premiere & de la cinquieme sera à la seconde, ce que la somme de la troisieme & de la sixieme est à la quatrieme.*

Fig. 2. SI les six quantités AB *, G, DE, H, BC & EF, sont telles que AB. G :: DE. H, & que BC. G :: EF. H; le rapport de AB+BC à G, sera le même que celui de DE+EF à H.

Digitized by Google

Démonst. [H] AB. G :: DE. H ; & BC. G :: EF. H. Donc (n), en échangeant, AB. DE :: G. H, & BC. EF :: G. H ; & par conséquent (n), AB. DE :: BC. EF. N. 371. N. 350.

Mais (n), en échangeant encore, AB. BC :: DE. EF. Donc (n), en composant, AB+BC. BC :: DE+EF. EF ; & par conséquent, en échangeant une troisieme fois, AB+BC. DE+EF :: BC. EF. N. 371. N. 378.

Or [D], G. H :: BC. EF. Donc (n), AB+BC. DE+EF :: G. H ; & par conséquent, en échangeant pour la quatrieme fois, AB+BC. G :: DE+EF. H. Donc, C. Q. F. D. N. 350.

Digitized by Google

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

394. *Si quatre quantités sont proportionnelles, la somme de la plus grande & de la plus petite, sera plus grande que celle des deux autres.*

Fig. 20. SI les quatre quantités AC *, DF, *ab* & *de* (dont AC est la plus grande, & *de* la plus petite) sont proportionnelles; la somme de AC & de *de* sera plus grande que celle de DF & de *ab*.

N. 81. *Const.* Prenez (n) sur la ligne AC, une partie AB égale à la ligne *ab*; & sur la ligne DF, une partie DE égale à la ligne *de*.

Démonst. AC. DF :: *ab*. *de*, [H].
N 375. Ainsi (n), AC — *ab*. DF — *de* :: AC.
N. 369. DF; & par conséquent (n), puisque [H] AC est plus grande que DF, AC — *ab* (c'est-à-dire BC) est aussi plus grande que DF — *de* (c'est-à-dire EF).

Mais [c], AB + *de* est égale à DE
N. 65. + *ab*. Donc (n), puisque [D] BC est

plus grande que EF, AB + *de* + BC, (c'est-à-dire, AC + *de*) sera aussi plus grande que DE + *ab* + EF (c'est-à-dire, DF + *ab*). Par conséquent, C. Q. F. D.

USAGES

des Progressions.

QUESTION PREMIERE.

395. *On suppose qu'un pere de famille a eu deux enfans; que chacun de ces deux enfans en a eu deux autres; & ainsi de suite: & l'on demande de combien de personnes a dû être sa quinzieme génération.*

SOLUTION. Le nombre de personnes demandé est le quinzieme terme d'une progression, dont le premier terme est 2, & dont l'exposant du rapport du second terme au premier, est aussi 2. Or (n), dans une progression, le quinzieme N. 349.
terme est le produit du premier, multiplié par la quatorzieme puissance de l'exposant du rapport du second terme au premier. Donc, si l'on éleve l'exposant 2 à sa quatorzieme puissance, que l'on trouvera de 16384; & si l'on multiplie

Digitized by Google

le premier terme (lequel est aussi 2) par cette quatorzieme puissance, le produit 32768 sera le nombre demandé.

Autre Question.

Un tuteur doit à son pupile 12000 l. de capital, avec les intérêts des intérêts au denier 20, pendant 8 années. On demande combien il doit payer à la fin de cette huitieme année.

SOLUTION. Ce capital, avec les intérêts des intérêts, pendant 8 années, est le huitieme terme d'une progression, dont le premier est 12000; & dont l'exposant du rapport du second au premier, est $\frac{21}{20}$. Ainsi (n), si l'on multiplie 12000 par la septieme puissance de $\frac{21}{20}$, le produit 16885 liv. 4. s. 1 den. *p. p.* sera la dette demandée.

N. 349.

QUESTION II.

396. Un particulier a 20 diamans d'une très-grande beauté. Il propose de les vendre, à condition qu'on lui payera 6 den. du premier, 18 du second, 54 du troisieme; & ainsi de suite. On demande le prix de ces 20 diamans.

Digitized by Google

SOLUTION Le prix demandé eſt la ſomme de tous les termes d'une progreſſion qui en a 20, dont le premier eſt 6; & dont l'expoſant du rapport du ſecond au premier, eſt 3. Or (n), dans une N. 384. progreſſion de 20 termes, dont l'expoſant du rapport du ſecond au premier eſt 3; la ſomme des 19 premiers termes eſt la moitié de la différence du premier terme au vingtieme. Ainſi, l'on commencera par chercher le vingtieme terme que (n) l'on trouvera de 6973568802. N. 395. De ce vingtieme terme, on retranchera le premier (lequel eſt 6) & il reſtera 6973568796. On prendra la moitié de ce reſte, afin d'avoir la ſomme 3486784398 des 19 premiers termes. Enfin, à cette ſomme on ajoutera le vingtieme terme; & la ſomme 10460353200 deniers, ou 43584895 liv. ſera le prix demandé.

QUESTION III.

397. *Un particulier a mis 70 louis d'or ſur un vaiſſeau, pour commercer dans les Pays étrangers. Au bout d'un an, ce vaiſſeau a rapporté les 70 louis, avec un certain profit. On a remis le tout ſur un autre vaiſſeau, qui au bout d'un*

an, a rapporté le même profit que le premier, à proportion. Ayant ainsi continué à faire la même chose chaque année, le vaisseau qui est revenu à la fin de la dixieme, a rapporté 35840 louis, tant pour capital que pour gain. On demande en quelle proportion ce capital a augmenté chaque année.

SOLUTION. Il s'agit de trouver l'exposant du rapport qui regne dans une progression de 10 termes, dont le premier est 70, & le dernier 35840. Or
N. 349. (n), dans une progression, le dixieme terme est le produit du premier multiplié par la neuvieme puissance de l'exposant du rapport du second au premier. Donc, si l'on divise 35840 par 70, le quotient 512 sera cette neuvieme puissance; & par conséquent, si l'on extrait la racine neuvieme de ce quotient, le nombre 2 que l'on trouvera pour cette racine, sera cet exposant. Ainsi, la seconde mise a été double de la premiere; la troisieme, double de la seconde; & ainsi de suite.

QUESTION IV.

398. *Un particulier a de très-beaux chevaux. Il consent de les vendre tous à la même personne, si elle veut lui payer*

Digitized by Google

4 deniers du premier, 12 du second, 36 du troisieme, & ainsi de suite; de maniere que le dernier reviendroit à 708588 deniers. On demande combien ce particulier a de chevaux à vendre.

SOLUTION. Il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression, dont on connoît le premier terme 4, le dernier, 708588; & l'exposant 3 du rapport du second au premier. Or (n), N. 349. puisque 708588 est le dernier terme d'une progression, il est le produit du premier terme 4, multiplié par une certaine puissance de l'exposant 3, plus petite d'une unité que le nombre des termes que l'on cherche. Ainsi, si on le divise par 4, le quotient 177147 sera cette certaine puissance; & par conséquent, pour connoître ce nombre des termes, il faut chercher le degré de cette puissance. Or, pour le trouver, on élevera l'exposant 3 de puissance en puissance, jusqu'à ce que l'on parvienne à former ce même nombre 177147. Et comme ce ne sera qu'en élevant à la onzieme puissance que l'on y parviendra, on en conclura que la progression dont il s'agit a 12 termes; & que par conséquent, le nombre des chevaux demandé est 12.

Digitized by Google

QUESTION V.

399. *Un particulier a* 10 *tableaux. Le dernier lui revient à* 137781 *livres; le pénultieme ne lui coûte que le tiers du dernier; l'antépénultieme, le tiers du pénultieme; & ainsi de suite. On demande combien il a acheté le premier.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le premier terme d'une progression, qui en a 10, & dont on connoît le dernier 137781, avec l'exposant 3 du rapport
N. 349. du second au premier. Or (n), ce dernier terme est le produit du premier, multiplié par la neuvieme puissance de cet exposant. Donc, si l'on éleve 3 à sa neuvieme puissance (que l'on trouvera de 19683) & si l'on divise ensuite 137781 par cette neuvieme puissance, le quotient 7 sera le premier terme; & par conséquent, le prix demandé du premier tableau.

QUESTION VI.

400. *Une personne a dépensé* 9450 *liv. en six ans, de maniere que la dépense de la seconde année a été double de celle de la premiere; la dépense de la troisieme année,*

Digitized by Google

année, double de celle de la seconde; & ainsi de suite. On demande combien cette personne a dépensé chaque année.

SOLUTION. Il s'agit de trouver tous les termes d'une progression, qui en a 6, dont la somme de tous ces termes est 9450, & dont l'exposant du rapport du second au premier est 2. Or (n), ces N. 332.
termes sont proportionnels à ceux de telle autre proportion que l'on veuille prendre, pourvu qu'elle soit semblable à celle dont il s'agit, c'est-à-dire, pourvu qu'elle ait le même exposant. Donc (n), N. 380.
si l'on prend cette progression, par exemple, ∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32, la somme 63 de tous ses termes sera à son premier terme, ce que la somme 9450 de la progression demandée, est aussi à son premier terme; & par conséquent, si l'on cherche (n) le quatrieme terme
150 de cette proportion, 63. 1 :: 9450. N. 363.
*, ce quatrieme terme sera le premier de la progression demandée. Or, lorsque l'on connoîtra ce premier terme, on trouvera facilement les cinq autres; & par conséquent, ce que la personne proposée a dépensé chaque année.

Digitized by Google

QUESTION VII.

401. *Un particulier dit que si l'on vouloit lui acheter son cheval, à condition de lui payer 3 deniers du premier clou de ses fers, 6 du second, 12 du troisieme, & ainsi de suite; il le vendroit* 13107 *l.* 3 *sols* 9 *den. On demande combien ce cheval a de clous à ses fers.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression, dont on connoît le premier terme 3; la somme de tous les termes, 3145725 deniers; & l'exposant 2 du rapport du
N. 382. second terme au premier. Or (n), dans une progression dont le second terme est double du premier; le dernier terme, moins le premier, est égal à la somme de tous ceux qui le précedent. Donc, la somme 3145725 de tous les termes de la progression dont il est ici question, est composée de deux fois le dernier terme, moins une fois le premier; & par conséquent, si l'on ajoute à cette somme le premier terme, lequel est 3, on aura une somme 3145728, qui sera double de ce dernier terme. Mais, puisque 3145728 est le double du dernier terme, sa moitié 1572864 sera ce dernier ter-

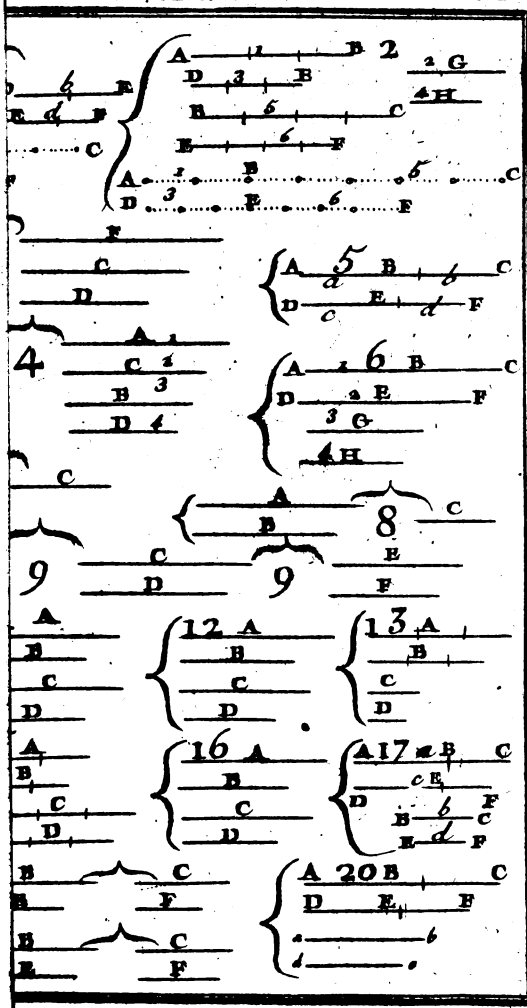
Digitized by Google

me. Ainſi, il ne s'agira plus que de trouver le nombre des termes d'une progreſſion, dont on connoîtra le premier terme 3, le dernier 1572864, avec l'expoſant 2 du rapport du ſecond au premier; ce qui fait une queſtion toute ſemblable à la quatrieme.

Fin du cinquieme Livre.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SIXIEME.

APRÈS avoir enseigné la doctrine des rapports en général, dans le Livre précédent, il s'agit d'appliquer dans celui-ci cette doctrine, aux lignes droites, aux surfaces planes & aux angles. Ainsi, Euclide le commence par démontrer ce que les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, doivent être les uns à l'égard des autres; & du rapport que ces figures ont entr'elles, il conclut celui qui doit se trouver entre les triangles, lorsqu'ils sont dans le même cas. Il examine ensuite les conditions que les triangles doivent avoir, pour être semblables; & donne la maniere de se servir de ceux qui le sont, non-seu-

Digitized by Google

lement pour résoudre tous les problêmes qui concernent les lignes proportionnelles, mais aussi pour tracer une figure qui soit semblable à telle figure rectiligne que l'on voudra proposer. Il considere ensuite les figures réciproques, & en déduit une des propriétés les plus considérables des lignes proportionnelles. Enfin, il compare entr'elles les figures semblables, pour en déterminer les rapports; & après avoir rendu générale la quarante-septieme du premier Livre, en faisant voir que ce qu'il y a démontré des quarrés, est également vrai de toutes les figures semblables qui sont décrites sur les côtés d'un triangle rectangle, il termine ce Livre par enseigner la maniere de connoître aussi les rapports que les Secteurs ont entr'eux.

DÉFINITIONS.

I.

402. ON nomme figures *semblables*, celles dont les angles sont égaux, chacun à chacun, & dont les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels.

Fig. 1. *Les figures ABC* & DEF sont semblables, si l'angle A étant égal à l'angle*

Digitized by Google

D, l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; AB est à DE, ce que AC est à DF, ce que BC est à EF.

II.

403. On dit de deux figures, qu'elles sont *réciproques*, lorsque les dimensions de l'une sont les extrêmes d'une proportion, dont les dimensions de l'autre sont les moyens.

Les figures AC & EG sont* réciproques, *si AB. EF :: EH. AD.* Fig. 2.

III.

404. On dit d'une ligne droite, qu'elle est divisée en *moyenne & extrême raison*, lorsqu'étant divisée en deux parties, toute cette ligne est à la plus grande de ces deux parties, ce que cette plus grande partie est à la plus petite.

*La ligne AB * est divisée en* moyenne & extrême raison *au point C, si AB. AC :: AC. CB.* † Fig. 34

IV.

405. On appelle *hauteur* d'une figure, la perpendiculaire abaissée du sommet

† On donne ce nom à cette maniere de diviser une ligne, parce que l'on prend sur cette même ligne, & les extrêmes, & le moyen de la proportion.

de cette figure à sa base, prolongée s'il est nécessaire.

Fig. 4. *La perpendiculaire FE * est la* hauteur *de la figure AC.*

AXIOME.

406. Les figures qui sont semblables chacune à une même figure, sont aussi semblables entr'elles.

Fig. 28. *Si les figures A * & B sont semblables chacune à la figure C, la figure A est semblable à la figure B.*

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

407. *Les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases.*

Fig. 5. SI les hauteurs des parallélogrammes AC * & EG sont égales, le parallélogramme AC sera au parallélogramme EG, ce que AB est à EF.

N. 95. *Const.* Divisez (n) la plus petite AB des deux bases AB & EF, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira; par exemple,

exemple, en quatre parties égales AI, IL, &c. Prenez sur la base EF, une partie EP égale à la partie AI. Enfin (n), N. 138.
tirez par chaque point de division I, L, &c. des paralleles IK, LM, &c. au côté AD; & par le point P, une parallele PQ au côté EH.

Démonst. Premierement, les parallélogrammes AK, IM, LO, NC & EQ, sont égaux (n); puisqu'ils ont des bases N. 153.
égales [c], & des hauteurs égales [H]. Ainsi, le parallélogramme AC est 4 fois le parallélogramme EQ, de même que la base AB est 4 fois la partie EP; & par conséquent (n), AC. EQ :: AB. EP. N. 334.

Secondement. La base EF contient exactement la partie EP, ou elle ne la contient qu'avec un reste.

Or, si la base EF contient exactement la partie EP, par exemple, 6 fois; cette partie sera le $\frac{1}{6}$ de cette base. Donc, si l'on divise cette même base en 6 parties égales EP, PR, &c. & si par chaque point de division P, R, &c. on tire des (n) paralleles PQ, RS, &c. au côté N. 133.
EH; cette partie EP sera l'une de ces 6 parties égales, de même que le parallélogramme EQ sera l'un des 6 parallélogrammes égaux (n) EQ, PS, &c. en N. 153.

lesquels ces paralleles diviseront le paral-
N. 332. lélogramme EG ; & par conséquent (n) on aura EQ. EG :: EP. EF.

Mais, si la base EF ne contient la partie EP qu'avec un reste, c'est-à-dire, si elle la contient, par exemple, 6 fois, avec un reste qui en soit, par exemple, les $\frac{2}{3}$; alors cette partie sera les $\frac{3}{20}$ de cette base. Donc, si l'on divise cette même base en 20 parties égales, & si
N. 133. par chaque point de division on tire (n) des paralleles au côté EH ; cette partie EP contiendra 3 de ces 20 parties égales, de même que le parallélogramme EQ contiendra 3 des 20 parallélogrammes
N. 153. égaux (n), en lesquels ces paralleles diviseront le parallélogramme EG ; & par
N. 332. conséquent (n) on aura encore, de même que dans le cas précédent, EQ. EG :: EP. EF.

Ainsi [D], AC. EQ :: AB. EP ; &
N. 389. EQ. EG :: EP. EF. Donc (n), AC. EG :: AB. EF ; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

408. Il suit de ce théorême, que *les triangles qui ont des hauteurs égales sont entr'eux comme leurs bases.*

Digitized by Google

Si les hauteurs des triangles ABC * Fig. 6.
& DEF sont égales, le triangle ABC sera au triangle DEF, ce que AC est à DF.

Const. Tirez (n) du point A, une parallele AG au côté CB; du point B, une parallele BG au côté AC; du point F, une parallele FH au côté DE; & du point E, une parallele EH au côté DF. N. 133.

Démonst. Les parallélogrammes GC & DH sont entr'eux (n), ce que AC est à DF; puisque [H] ils ont des hauteurs égales. Or (n), les triangles ABC & DEF sont les moitiés de ces parallélogrammes. Donc (n), ils sont aussi entr'eux, ce que AC est à DF; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 407. N. 143. N. 359.

COROLLAIRE II.

409. Il suit de ce corollaire, que *la surface d'un polygone régulier quelconque, est égale à celle d'un triangle dont la hauteur est égale à une perpendiculaire tirée du centre de ce polygone à l'un de ses côtés, & la base, à la circonférence de ce même polygone.*

La surface, par exemple, du pentagone régulier ACE *, sera égale à celle du triangle FGH, si la hauteur GL étant Fig. 7.

égale à la perpendiculaire IK, la base FH l'est à la circonférence ABCDE.

Const. Tirez du centre I à chaque angle A, B, C, &c. des lignes droites IA, IB, IC, &c.

Démonst. Le polygone ACE est quin-
N. 90. tuple du triangle EID; puisque (n) les triangles EID, DIC, CIB, BIA & AIE,
N. 408. sont égaux. Mais (n), le triangle FGH est aussi quintuple du même triangle EID; puisque les hauteurs GL & IK sont égales [H], & que la base FH est aussi égale à la circonférence ABCDE, qui, dans cet exemple, est quintuple de
N. 67. la base ED. Donc (n), le polygone ACE est égal au triangle FGH. Or, la même démonstration subsiste, quel que soit le nombre des côtés de ce polygone. Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

410. Il suit de ce second corollaire, que *la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon de ce cercle, & la base, à la circonférence de ce même cercle.*

Démonst. Plus un polygone régulier a de côtés, moins il differe du cercle dans lequel il est inscrit; & quelque grand que

Digitized by Google

l'on imagine le nombre de ces côtés, on peut encore concevoir un autre polygone qui en ait un plus grand nombre, & qui differe par conséquent encore moins de ce cercle, sans que l'imagination puisse jamais épuiser, ni la multitude de ces côtés, ni cette approximation au cercle. Or, si sans déterminer la multitude des côtés d'un polygone régulier, on en imagine un qui en ait un si grand nombre, que sa différence au cercle dans lequel il sera inscrit, devienne absolument insensible; ce polygone se confondra avec ce cercle, de maniere que l'on pourra, même en rigueur, prendre indifféremment le polygone pour le cercle, & le cercle pour le polygone. Mais (n), la N. 409.
surface de ce polygone, quel qu'il soit, sera égale à celle d'un triangle dont la hauteur seroit égale à une perpendiculaire abaissée du centre de ce polygone à l'un de ses côtés; & la base, à la circonférence de ce même polygone. Donc, puisque cette surface, cette perpendiculaire, & cette circonférence, pourront être prises pour la surface, le rayon, & la circonférence du cercle dans lequel ce même polygone sera inscrit; on peut en conclure que la surface de ce cercle sera

aussi égale à celle d'un triangle dont la hauteur seroit égale au rayon de ce cercle; & la base, à la circonférence de ce même cercle. Par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

411. *Si nous disons, dans le corollaire précédent, que* le cercle & le polygone inscrit seront confondus ensemble, de maniere que l'on pourra prendre indifféremment l'un pour l'autre; *nous ne prétendons point faire entendre par-là, que ce cercle soit lui-même ce polygone; puisque, quoi que l'on en dise, cela ne peut jamais être.*

En effet, si les cercles étoient, comme on le dit ordinairement, des polygones d'une infinité de côtés; un cercle ne seroit plus grand qu'un autre, que parce qu'il seroit, ou un polygone d'un plus grand nombre de côtés, ou un polygone dont les côtés seroient plus grands.

Or, premierement, si un cercle est plus grand qu'un autre, ce n'est point parce qu'il est un polygone d'un plus grand nombre de côtés; puisque si cela étoit, les cercles ne seroient point des figures semblables.

Secondement, si un cercle est plus

Digitized by Google

*grand qu'un autre, ce n'est point non plus parce qu'il est un polygone dont les côtés sont plus grands; puisque si cela étoit, un cercle ne seroit, par exemple, 10000 fois plus grand qu'un autre, que parce que ce cercle & cet autre seroient deux polygones, dont chaque côté du grand seroit centuple de chaque côté du petit. Or, ce côté centuple auroit un milieu: & ce milieu, par exemple K *, ne* Fig. 7. *se confondroit point avec les extrémités E & D; puisqu'il en seroit réellement éloigné de part & d'autre, de 50 parties, égales chacune au côté du petit polygone. Ainsi* (n), *la ligne droite IE, qui seroit* N. 114. *tirée du centre I à l'extrémité E, seroit rigoureusement plus grande que la perpendiculaire IK, abaissée du même centre I au milieu K du côté ED; & par conséquent, toutes les lignes droites qui seroient tirées du centre à la circonférence, ne seroient point rigoureusement égales.*

Et si l'on objecte que ce polygone ayant une infinité † *de côtés, ces 50 parties*

† Que le nom d'*infini* ne fasse point illusion. Ce n'est qu'un terme que les Géometres emploient assez ordinairement pour résoudre de certaines questions difficiles, de la même maniere, à-peu-près, dont les Philosophes se servent de celui d'*instinct*, pour expliquer la nature de l'ame des bêtes.

Digitized by Google

égales sont absolument insensibles ; nous prendrons un polygone dix millions de fois plus grand, cent millions de fois plus grand ; si grand enfin, que l'on sera forcé d'avouer que toutes les lignes droites qui seront tirées de son centre à sa circonférence, ne seront plus rigoureusement égales †. *Or, une figure dans laquelle toutes les lignes droites que l'on pourra tirer du centre à la circonférence, ne seront point rigoureusement égales, ne sera point un cercle.*

Donc, il n'y a point de milieu : ou les cercles ne sont point des figures semblables, ou il y a des cercles dont les rayons ne sont point rigoureusement égaux ; ou enfin, les cercles ne sont point des polygones. Or, premierement, c'est une des vérités les plus incontestables de la Géométrie, que les cercles sont des figures semblables : secondement, par la définition du cercle (n), *on ne peut admettre*

N. 28.

† Il ne faut pas dire que l'excès du rayon I E sur le rayon I K, étant insensible dans un petit cercle, il le sera de même dans un grand ; parce que son accroissement sera toujours proportionnel à celui des rayons. Il est vrai que cet accroissement sera proportionnel : mais, il est vrai aussi, en Géométrie comme en Physique, que ce qui est insensible dans le petit, devient très-considérable dans le grand. La millieme partie d'un pouce est absolument insensible : la millieme partie d'une lieue, est de 13 pieds 8 pouces, & plus.

Digitized by Google

pour cercle, qu'une figure plane dans laquelle toutes les lignes droites tirées du centre à la circonférence, seront rigoureusement égales. Donc, les cercles ne sont point des polygones; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

412. *Si dans un triangle, une ligne droite est parallele à l'un des côtés, elle coupera les deux autres proportionnellement: & si elle coupe deux côtés proportionnellement, elle sera parallele au troisieme.*

PREMIEREMENT.

SI dans le triangle ABC *, la ligne DE est parallele au côté AC; BD sera à DA, ce que BE est à EC. Fig. 8.

Const. Tirez du point A au point E, une ligne droite AE; & du point D au point C, une ligne droite DC.

Démonst. Les triangles DAE & DCE sont égaux (n), puisqu'ils sont [c] sur une même base DE, & [H] entre mêmes N. 154

N. 354. paralleles DE & AC. Ainsi (n), le rapport du triangle BDE au triangle DAE, est égal à celui du même triangle BDE
N. 408. au triangle DCE. Mais (n), le rapport du triangle BDE au triangle DAE est le même que celui de BD à DA; puisque
N. 405. (n) ces triangles ont chacun pour hauteur une perpendiculaire abaissée du point E à la ligne droite AB: & le rapport du triangle BDE au triangle DCE est le même que celui de BE à EC; puisque
N. 405. (n) ces triangles ont aussi chacun pour hauteur une perpendiculaire abaissée du
N. 350. point D à la ligne droite CB. Donc (n), le rapport de BD à DA, est le même que celui de BE à EC; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 8. Si dans le triangle ABC *, BD est à DA, ce que BE est à EC; la ligne DE sera parallele au côté AC.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Par les mêmes raisons que dans la démonstration précédente, le rapport du triangle BDE au triangle DAE, est le même que celui de BD à DA: & le rapport du triangle BDE au triangle DCE, est le même que celui

Digitized by Google

de BE à EC. Or [H], le rapport de BD à DA, est égal à celui de BE à EC. Donc (n), le rapport du triangle BDE au triangle DAE, est aussi égal à celui du même triangle BDE au triangle DCE; & par conséquent (n), les triangles DAE & DCE sont égaux. Mais (n), puisque les triangles DAE & DCE qui sont sur une même base DE, sont égaux, les lignes DE & AC sont paralleles; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

N. 30.

N. 356.

N. 157.

Digitized by Google

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

413. *Si dans un triangle, une ligne droite qui est tirée de l'un des angles à l'un des côtés, divise cet angle en deux parties égales, elle divisera ce côté en deux parties qui seront proportionnelles aux deux autres côtés : & si elle divise ce côté en deux parties qui soient proportionnelles aux deux autres côtés, elle divisera cet angle en deux parties égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 9. SI dans le triangle ABC *, la ligne BD divise l'angle B en deux parties égales ABD & CBD ; AD sera à DC, ce que AB est à BC.

Const. Prolongez le côté AB vers E, jusqu'à ce que le prolongement BE soit égal au côté BC. Tirez du point E au point C, une ligne droite EC.

Démonst. L'angle ABC, qui est extérieur au triangle CBE, est (n) égal à la
N. 155. somme des angles intérieurs BCE & E

qui lui sont opposés. Mais (n), ces angles N. 86.
intérieurs sont égaux; puisque [c] le côté BE est égal au côté BC. Donc, l'angle ABC est double de chacun de ces mêmes angles; & par conséquent, l'angle CBD, qui [H] est la moitié de cet angle ABC, est égal à l'angle BCE. Or (n), puisque N. 126.
les angles CBD & BCE, qui sont alternes, sont égaux, les lignes BD & EC sont paralleles. Donc (n), dans le triangle N. 412.
AEC, AD. DC :: AB. BE; & par conséquent, puisque [c] BE est égal à BC, AD. DC :: AB. BC. Donc, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si dans le triangle ABC *, AD est à Fig. 2.
DC, ce que AB est à BC; la ligne BD divisera l'angle B en deux parties égales ABD & CBD.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Dans le triangle AEC, la ligne BD est parallele au côté EC (n); N. 412.
puisque [H] AD. DC :: AB. BC, & que [c] BE est égal à BC. Ainsi (n), N. 130.
l'angle extérieur ABD est égal à l'intérieur E qui lui est opposé; & l'angle CBD, à l'angle BCE, qui lui est alterne. Mais (n), les angles E & BCE sont N. 86.
égaux, puisque [e] les côtés BC & BE

Digitized by Google

N. 62. le sont. Donc (n), les angles ABD & CBD le sont aussi; & par conséquent, C. Q. F. 2°, D.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

414. *Si des triangles sont équiangles, leurs côtés pareils † seront proportionnels.*

Fig. 10. SI dans les triangles ABC * & CDE, l'angle A est égal à l'angle DCE, l'angle B à l'angle D, & l'angle BCA à l'angle E; le côté AC sera au côté CE, ce que le côté AB est au côté CD, & le côté BC au côté DE.

Const. Posez les triangles ABC & CDE sur une même ligne droite AE, de maniere que les angles égaux DCE & A étant opposés, les angles égaux BCA & E le soient aussi. Prolongez ensuite les côtés AB & ED, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point F.

Démonst. Les lignes BC & FE sont
N. 128 paralleles (n); puisque [H] l'angle exté-

† Dans les figures semblables, on appelle côtés *homologues*, ou côtés *pareils*, ceux qui sont opposés aux angles égaux.

Digitized by Google

rieur BCA est égal à l'intérieur E qui lui est opposé ; & il en est de même des lignes CD & AF ; puisque [H] l'angle extérieur DCE est aussi égal à l'intérieur A, qui lui est aussi opposé. Ainsi (n), le quadrilatere BD est un parallélogramme ; & par conséquent (n), les côtés CD & BF sont égaux, de même que les côtés BC & FD. Cela posé :

N. 57.

N. 143.

Premierement, dans le triangle AFE, la ligne BC est parallele au côté FE [D]. Donc (n), AC. CE :: AB. BF ; & par conséquent, puisque [D] CD est égal à BF, AC. CE :: AB. CD.

N. 412.

Secondement, dans le triangle AEF, la ligne CD est aussi parallele au côté AF [D]. Donc (n), AC. CE :: FD. DE ; & par conséquent, puisque [D] BC est égal à FD, AC. CE :: BC. DE.

N. 412.

Donc, C. Q. F. D.

USAGE.

415. *Lorsqu'un triangle dans lequel on ne connoîtra qu'un côté, sera équiangle à quelque autre dont les trois côtés seront connus, il sera facile de trouver chacun des deux côtés inconnus ; puisque les côtés des triangles qui sont équiangles étant proportionnels* (n), *ces côtés inconnus seront les quatriemes termes de deux*

N. 414.

proportions, dont les autres termes seront les côtés connus de ces mêmes triangles.

Ainsi, si l'on sait que dans le triangle
Fig. 11. *ABC * le côté AC est, par exemple, de 9 parties égales, le côté AB de 6, & le côté BC de 5; & si dans le triangle DEF qui est équiangle au triangle ABC, on connoît que le côté DF est, par exemple,*
N. 365. *de 27 toises : on trouvera* (n) *que le côté DE est de 18 toises, & le côté EF de*
N. 414. *15; puisque* (n) *AC,* (9). *DF,* (27) :: *AB,* (6). *DE,* (18) :: *BC,* (5). *EF,* (15).

Au reste, il faut remarquer que cette proposition est de toutes les propositions de la Géométrie, celle qui est la plus considérable, & dont on fait le plus fréquemment usage. C'est sur elle que toute la trigonométrie est fondée; & particulierement le Traité que j'en ai donné, & qui se trouve à Paris, chez HERISSANT *Fils, rue Notre-Dame.*

PROPOSITION

Digitized by Google

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

416. *Si des triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles.*

SI dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC est au côté DF, ce que le côté AB est au côté DE, & le côté BC au côté EF; l'angle A sera égal à l'angle EDF, l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle EFD. Fig. 12.

Const. Décrivez sous la ligne DF (n), deux angles GDF & GFD, dont le premier ait le point D pour sommet, & soit égal à l'angle A, & dont le dernier ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle C. N. 120.

Démonst. Le rapport de AB à DG est (n) égal à celui de AC à DF; puisque [c] les triangles ABC & DGF sont équiangles. Mais [H], le rapport de AB à DE est aussi égal à celui de AC à DF. Donc (n), le rapport de AB à DG est le même que celui de AB à DE; & par conséquent (n), DG est égal à DE. N. 414. N. 350. N. 356.

Pareillement, le rapport de BC à GF

N. 414. est (n) égal à celui de AC à DF; puisque [c] les triangles ABC & DGF sont équiangles. Mais [H], le rapport de BC à EF est aussi égal à celui de AC à DF.

N. 350. Donc (n), le rapport de BC à GF est le même que celui de BC à EF; & par

N. 356. conséquent (n), GF est égal à EF.

Ainsi, les triangles DEF & DGF ont les côtés égaux aux côtés, chacun à cha-

N. 90. cun. Donc (n), ils ont aussi les angles égaux aux angles, chacun à chacun. Mais [c], les angles du triangle ABC sont aussi égaux à ceux du triangle DGF,

N. 62. chacun à chacun. Donc (n), les angles du triangle ABC, & ceux du triangle DEF sont égaux, chacun à chacun; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

417. *Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle, proportionnels à ceux qui forment ce second angle, ils seront équiangles.*

SI dans les triangles ABC * & DEF, l'angle A est égal à l'angle EDF, & si le côté AC est au côté DF, ce que le côté AB est au côté DE; l'angle B sera égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle EFD. Fig. 12.

Const. La même que celle de la proposition précédente.

Démonst. Dans les triangles DEF & DGF, l'angle EDF est (n) égal à l'angle GDF; puisque l'un [H], & l'autre [C], sont égaux au même angle A: le côté DE est égal au côté DG, par une démonstration toute pareille à celle de la proposition précédente; & le côté DF est commun. Donc (n), l'angle EFD est égal à l'angle GFD, & l'angle E à l'angle G; & par conséquent, ces deux triangles N. 62. N. 83.

Digitized by Google

ont les angles égaux aux angles, chacun à chacun. Mais [c], les angles du triangle ABC sont aussi égaux à ceux du triangle DGF, chacun à chacun. Donc (n), les angles du triangle ABC & ceux du triangle DEF sont égaux, chacun à chacun; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 62.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

418. *Si deux triangles ont un angle égal à un angle, les côtés qui forment l'un quelconque des autres angles du premier, proportionnels aux côtés qui forment l'un quelconque des autres angles du second; & le troisieme angle du premier, de même espece que le troisieme angle du second: ces deux triangles seront équiangles.*

Fig. 13. SI dans les triangles ABC * & DEF, l'angle B est égal à l'angle E; si le côté AB est au côté DE, ce que le côté AC est au côté DF; & si enfin les angles C & EFD sont de même espece; ces deux triangles seront équiangles.

Digitized by Google

Const. Prolongez le côté EF vers G, à volonté. Tirez du point D aux points G & H, pris à volonté, l'un au-dessous du point F, & l'autre au-dessus, des lignes droites DG & DH.

Démonst. Si l'angle A est égal à l'angle EDF, les triangles ABC & DEF seront équiangles; puisque (n), l'angle B étant N. 137.
égal à l'angle E [H], & l'angle A à l'angle EDF, les angles C & EFD seront aussi égaux. Ainsi, il s'agit de démontrer que l'angle A est effectivement égal à l'angle EDF. Or :

Premierement, l'angle A n'est point égal à un angle EDG, plus grand que l'angle EDF; puisque s'il l'étoit, les triangles ABC & DEG, qui [H] ont l'angle B égal à l'angle E, & qui auroient aussi [S] l'angle A égal à l'angle EDG, auroient encore (n) l'angle C N. 137.
égal à l'angle G. Donc, le rapport de AB à DE, qui [H] est égal à celui de AC à DF, le seroit aussi (n) à celui de N. 414.
AC à DG; & par conséquent (n), DF N. 356.
seroit égal à DG. Mais, si DF étoit égal à DG, le triangle FDG seroit isoscele. Donc (n), l'angle EFD seroit obtus, N. 98.
puisque (n) les angles DFG & G seroient N. 106.
nécessairement aigus; & par conséquent, puisque [D] l'angle C seroit égal à l'an-

gle G, les angles C & EFD ne seroient point de même espece.

Secondement, l'angle A n'est point non plus égal à un angle EDH, plus petit que l'angle EDF; puisque s'il l'étoit, les triangles ABC & DEH, qui [H] ont l'angle B égal à l'angle E, & qui auroient aussi [S] l'angle A égal à l'angle
N. 137. EDH, auroient encore (n) l'angle C égal à l'angle EHD. Donc, le rapport de AB à DE, qui [H] est égal à celui de
N. 414. AC à DF, le seroit aussi (n) à celui de
N. 356. AC à DH; & par conséquent (n), DF seroit égal à DH. Mais, si DF étoit égal à DH, le triangle FDH seroit isoscele.
N. 98. Donc (n), l'angle EHD seroit obtus;
N. 106. puisque (n) les angles DHF & EFD seroient nécessairement aigus; & par conséquent, puisque [D] l'angle C seroit égal à l'angle EHD, les angles C & EFD ne seroient point encore de même espece.

Or [H], ces angles doivent être de même espece. Donc, l'angle A n'est égal, ni à un angle EDG, plus grand que l'angle EDF, ni à un angle EDH, plus petit que ce même angle; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

419. Il suit du n°. 402, & des n°. 414, 416, 417 & 418, *que dans tous les cas auxquels les triangles sont équiangles, ils sont semblables.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

420. *La perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté opposé, divise ce triangle en deux autres qui lui sont semblables.*

LA perpendiculaire BD * divise le triangle rectangle ABC en deux triangles ABD & BDC, qui sont semblables au triangle ABC. Fig. 14

Démonst. Dans les triangles ABC & ADB, qui [H] sont rectangles, l'un en B & l'autre en D, l'angle A est commun. Donc (n), l'angle C est égal à l'angle ABD. N. 137

Pareillement, dans les triangles ABC & BDC, qui [H] sont aussi rectangles, l'un en B & l'autre en D, l'angle C

N. 137. est commun. Donc (n), l'angle A est égal à l'angle CBD.

N. 419. Or (n), puisque les triangles ABC, ADB & BDC sont équiangles, ils sont semblables; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

421. Il suit de ce théorême, que *la perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté opposé, est moyenne proportionnelle entre les segmens* ¶ *de ce côté.*

Fig. 14. Dans le triangle ABC * qui est rectangle en B. AD. DB :: DB. DC.

N. 420. *Démonst.* Puisque (n) les triangles
N. 414. ADB & BDC sont équiangles; (n) AD, (*qui est opposé à l'angle ABD du premier* †) est à DB, (*qui est opposé à l'angle C du second*), ce que DB, (*qui est opposé à l'angle A du premier*), est à DC, (*qui est opposé à l'angle CBD du second*). Par conséquent, C. Q. F. D.

¶ On se sert assez ordinairement en Géométrie, du terme de *segment*, au lieu de celui de *partie*; parce qu'il n'est point équivoque.

† Nous indiquons ici les angles opposés, afin de faire voir aux commençans qu'ils n'auront aucune difficulté à ranger proportionnellement les côtés de deux triangles semblables, si pour former chaque rapport, ils prennent toujours un côté du premier triangle, & un côté du second, qui soient opposés à des angles égaux.

PROPOSITION

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

422. *Couper telle partie que l'on voudra d'une ligne droite donnée.*

IL faut couper, par exemple, les trois cinquiemes de la ligne droite AB *. Fig. 152

Const. Tirez du point A, une ligne droite indéfinie AH, qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque HAB. Ensuite, (puisque l'on demande des cinquiemes) prenez à volonté sur la ligne AH, 5 parties égales AC, CD, &c; & du point G, auquel la cinquieme partie se termine, tirez au point B, une ligne droite GB. Enfin, (puisque l'on demande 3 parties) tirez (n) de l'extrémité E de la troisieme partie, une parallele EI à la ligne GB; & la partie AI sera les $\frac{3}{5}$ demandés. N. 135.

Démonst. L'angle extérieur AIE est (n) égal à son opposé intérieur ABG; N. 130. puisque [c] les lignes EI & GB sont paralleles. Ainsi (n), les triangles AEI & N. 137. AGB, qui ont l'angle A commun, sont équiangles; & par conséquent (n), AE. N. 414.

Digitized by Google

AG :: AI. AB. Or [c], la partie AE
M. 330. est les $\frac{3}{5}$ de la ligne AG. Donc (n), la partie AI est aussi les $\frac{3}{5}$ de la ligne AB; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

423 *Diviser une ligne droite, de la même maniere dont une autre ligne droite est divisée.*

Fig. 16. IL faut diviser la ligne droite AB *, de la même maniere dont la ligne droite CD est divisée.

Const. Tirez du point A, une ligne droite indéfinie AI, qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque BAI. Prenez sur cette ligne AI, une partie AG égale à la partie CK, une partie AH égale à la partie CL, & une partie AI égale à la ligne CD. Tirez du point I au
M. 131. point B, une ligne droite IB. Enfin (n), tirez des points G & H, des paralleles GE & HF à la ligne IB. Les parties AE & AF, seront les parties demandées.

Démonst. L'angle extérieur AGE est
M. 130. (n) égal à son opposé intérieur AIB;

puisque [c] les lignes GE & IB sont parralleles. Ainsi (n), les triangles AEG & ABI, qui ont l'angle A commun, sont équiangles; & par conséquent (n), AE. AB :: AG. AI. N. 137. N. 414.

Pareillement, l'angle extérieur AHF est (n) égal à son opposé intérieur AIB; puisque [c] les lignes HF & IB sont parralleles. Ainsi (n), les triangles AFH & ABI, qui ont l'angle A commun, sont équiangles; & par conséquent (n), AF. AB :: AH. AI. N. 130. N. 137. N. 414.

Mais [c], les parties CK & CL, & la ligne CD, sont égales aux parties AG, AH & AI, chacune à chacune. Donc (n), AE. AB :: CK. CD; & AF. AB :: CL. CD. Par conséquent, C. Q. F. F. N. 61.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

Trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes droites données.

Fig. 17. IL faut trouver une troisieme proportionnelle aux deux lignes droites A * & B.

Const. Tirez deux lignes droites indéfinies DE & DC, qui forment un angle quelconque CDE. Prenez sur la ligne DE, une partie DF égale à la ligne A, & une partie FG égale à la ligne B. Prenez aussi sur la ligne DC, une partie DH égale à la même ligne B. Tirez du point F au point
N. 133. H, une ligne droite FH. Enfin (n), tirez du point G, une parallele GI à la ligne FH; & la partie HI sera la troisieme proportionnelle demandée.

Démonst. Dans le triangle DIG, la ligne FH est [c] parallele au côté GI.
N. 412. Donc (n), DF. FG :: DH. HI; & par
N. 61. conséquent (n), puisque [c] la ligne A est égale à la partie DF, & la ligne B à la partie FG & à la partie DA, A. B :: B. HI. Donc, C. Q. F. F.

Digitized by Google

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

425. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes droites données.*

IL faut trouver une quatrieme proportionnelle aux trois lignes droites A *, B & C. Fig. 181

Const. Tirez deux lignes droites indéfinies EF & ED, qui forment un angle quelconque DEF. Prenez sur la ligne EF, une partie EG égale à la ligne A, & une partie GH égale à la ligne B. Prenez aussi sur la ligne ED, une partie EI égale à la ligne C. Tirez du point G au point I, une ligne droite GI. Enfin (n), tirez du N. 133.
point H, une parallele HK à la ligne GI; & la partie IK sera la quatrieme proportionnelle demandée.

Démonst. Dans le triangle EKH, la ligne GI est [c] parallele au côté HK. Donc (n), EG. GH :: EI. IK; & par N. 472.
conséquent (n), puisque [c] la ligne A est N. 61.
égale à la partie EG, la ligne B à la partie GH, & la ligne C à la partie EI, A. B :: C. IK. Donc, C. Q. F. F.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

426. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données.

Fig. 19. IL faut trouver une moyenne proportionnelle entre les lignes droites A * & B.

Const. Tirez une ligne droite indéfinie CD. Prenez sur cette ligne, une partie CE égale à la ligne A, & une partie EF
N. 94. égale à la ligne B. Divisez (n) la partie CF en deux parties égales CG & GF. Du point G, pris pour centre, & avec l'une de ces parties égales, prise pour rayon,
N. 96. décrivez un demi-cercle CIF. Enfin (n), du point E, élevez dans ce même demi-cercle, une perpendiculaire EH à la ligne CD; & cette perpendiculaire sera la moyenne demandée.

Pour la démonstration. Tirez du point H aux points C & F, des lignes droites HC & HF.

Démonst. L'angle CHF est un angle
N. 263. droit (n), puisque [c] il est inscrit dans le demi-cercle CIF. Ainsi [c], la ligne EH

Digitized by Google

est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit du triangle rectangle CHF au côté opposé CF ; & par conséquent (n), CE. EH :: EH. EF. Mais [c], la ligne A est égale à la partie CE, & la ligne B à la partie EF. Donc (n), A. EH :: EH. B; & par conséquent, C. Q. F. F. N 421. N. 61.

SCHOLIE.

427. *Il est quelquefois nécessaire de trouver plus d'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données : mais, il est démontré qu'il n'est point possible de le faire par la Géométrie élémentaire. Cependant, plusieurs personnes, qui en toute autre chose ne manquent point de bon sens, le cherchent toujours avec ardeur, de même que la* trisection *de l'angle, la* quadrature *du cercle, &c. Il est bon que les jeunes gens sachent, qu'indépendamment de la présomption ridicule qu'il y a à faire ces sortes de recherches, il y a mille contre un à parier, que quiconque se flate de faire de pareilles découvertes, ne sait pas les premiers élémens de la Géométrie.*

La proposition dans laquelle il ne s'agit de trouver que deux moyennes proportionnelles, est connue sous le nom de problême de la duplication du cube.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

428. *Dans les parallélogrammes équiangles, si les surfaces sont égales, les côtés seront réciproquement proportionnels : & si les côtés sont réciproquement proportionnels, les surfaces seront égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 20. SI les parallélogrammes AC * & FC, qui sont équiangles, sont égaux, le côté DC sera au côté CE, ce que le côté GC est au côté CB.

Const. Disposez les parallélogrammes AC & FC, de maniere que les côtés CE & CG de l'un, deviennent les prolongemens des côtés DC & BC de l'autre. Prolongez ensuite les côtés AB & FE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point H.

Démonst. Puisque [H] les parallélogrammes AC & FC sont égaux, ils ont
N. 354. chacun (n) le même rapport au parallélo-
N. 407. gramme BE. Or (n), le rapport du côté DC au côté CE, est égal à celui du pa-

Digitized by Google

rallélogramme AC au parallélogramme BE : & le rapport du côté GC au côté CB, l'est à celui du parallélogramme FC au même parallélogramme BE. Donc (n), N. 350.
le rapport du côté DC au côté CE, est aussi le même que celui du côté GC au côté CB ; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si dans les parallélogrammes AC * & Fig. 20.
FC, qui sont équiangles, le côté DC est au côté CE, ce que le côté GC est au côté CB, ces parallélogrammes seront égaux.

Const. La même que la précédente.

Démonst. [H] le rapport du côté DC au côté CE, est le même que celui du côté GC au côté CB. Or (n), le rapport N. 407.
du parallélogramme AC au parallélogramme BE, est égal à celui du côté DC au côté CE : & le rapport du parallélogramme FC au même parallélogramme BE, l'est à celui du côté GC au côté CB. Donc (n), les parallélogrammes AC & N. 350.
FC, ont chacun le même rapport au parallélogramme BE ; & par conséquent (n), ces deux parallélogrammes sont N. 350.
égaux. Donc, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

419. *Dans les triangles qui ont un angle égal à un angle, si les surfaces sont égales, les côtés qui forment ces angles égaux seront réciproquement proportionnels : & si les côtés qui forment ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, les surfaces seront égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 21. SI les triangles ABC * & EDC, qui ont l'angle ACB égal à l'angle ECD, sont égaux, le côté AC sera au côté CD, ce que le côté EC est au côté CB.

Const. Disposez les triangles ABC & EDC, de maniere que les côtés CD & CE de l'un, deviennent les prolongemens des côtés AC & BC de l'autre. Tirez ensuite du point B au point D, une ligne droite BD.

Démonst. Puisque [H] les triangles ABC & EDC sont égaux, ils ont cha-
H. 354 cun (n) le même rapport au triangle
N. 408. CBD. Or (n), le rapport du côté AC

au côté CD, est égal à celui du triangle ABC au triangle CBD : & le rapport du côté EC au côté CB, l'est à celui du triangle EDC au même triangle CBD. Donc (n), le rapport du côté AC au côté CD, est aussi le même que celui du côté EC au côté CB ; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 350.

SECONDEMENT.

Si dans les triangles ABC * & EDC, qui ont l'angle ACB égal à l'angle ECD, le côté AC est au côté CD, ce que le côté EC est au côté CB, ces triangles seront égaux. Fig. 22.

Const. La même que la précédente.

Démonst. [H]Le rapport du côté AC au côté CD, est le même que celui du côté EC au côté CB. Or (n), le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du côté AC au côté CD : & le rapport du triangle EDC au même triangle CBD, l'est à celui du côté EC au côté CB. Donc (n), les triangles ABC & EDC, ont chacun le même rapport au triangle CBD ; & par conséquent (n), ces deux triangles sont égaux. Donc, C. Q. F. 2°. D. N. 40. N. 350. N. 34.

Digitized by Google

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

430. *Si quatre lignes droites sont proportionnelles, le rectangle des extrêmes sera égal à celui des moyennes: & si quatre lignes droites sont telles, que le rectangle des extrêmes soit égal à celui des moyennes, elles seront proportionnelles.*

PREMIEREMENT.

Fig. 22. SI AB *. EF :: EH. AD, le rectangle des extrêmes AB & AD, sera égal à celui des moyennes EF & EH.

Const. Faites un rectangle AC, dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD, l'autre. Faites aussi un rectangle EG, dont la ligne EF soit l'un des côtés, & la ligne EH, l'autre.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisque [G] ils sont rectangles: & leurs côtés sont réciproquement proportionnels, puisque [H]
N. 428. AB. EF :: EH. AD. Donc (n), ces parallélogrammes sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

Digitized by Google

SECONDEMENT.

Si les quatre lignes droites AB *, EF, EH & AD, sont telles que le rectangle des extrêmes AB & AD, soit égal à celui des moyennes EF & EH; la premiere sera à la seconde, ce que la troisieme est à la quatrieme. Fig. 22.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisque [c] ils sont rectangles: & [H] leurs surfaces sont égales. Donc (n), leurs côtés sont réciproquement proportionnels; & par conséquent, AB. EF :: EH. AD. Donc, C. Q. F. 2°. D. N. 428.

COROLLAIRE I.

431. Il suit de la seconde partie de ce théorême, que *dans le cercle, si deux cordes s'entrecoupent, leurs parties seront réciproquement proportionnelles.*

Dans le cercle X (*Liv.* 3, *Fig.* 51, 52, 53 & 54.) la partie AF de la corde AB, est à la partie CF de la corde CD, ce que la partie FD de la même corde CD, est à la partie FB de la corde AB.

Démonst. Le rectangle des parties AF & FB, est (n) égal à celui des parties N. 16

N. 430. CF & FD. Donc (n), AF. CF :: FD. FB; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

432. Il suit encore de la même seconde partie, que *si d'un même point pris hors d'un cercle, on tire deux sécantes, ces deux sécantes, & leurs parties extérieures, seront réciproquement proportionnelles.*

Au cercle X (*Liv.* 3, *Fig.* 57.) la sécante AB est à la sécante AC, ce que la partie AF est à la partie AE.

Démonst. Le rectangle de la sécante
N. 270. AB & de la partie AE, est (n) égal à celui de la sécante AC & de la partie AF.
N. 430. Donc (n), AB. AC :: AF. AE; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

433. *Si trois lignes droites sont en proportion continue, le rectangle des extrêmes sera égal au quarré de la moyenne : & si trois lignes droites sont telles, que le rectangle des extrêmes soit égal au quarré de la moyenne, elles seront en proportion continue.*

PREMIEREMENT.

SI ∺ AB *. EF. AD, le rectangle des extrêmes AB & AD, sera égal au quarré de la moyenne EF. Fig. 232.

Const. Faites un rectangle AC, dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD, l'autre. Décrivez ensuite (n) un quarré EG, sur la ligne EF. N. 170.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisque [c] ils sont rectangles ; & leurs côtés sont réciproquement proportionnels ; puisque [H], AB. EF :: EF. AD, & que (n) EH est égal à EF. Donc (n), ces paral- N. 50. N. 428.

lélogrammes sont égaux ; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

fig. 23. Si les trois lignes droites AB *, EF & AD, sont telles que le rectangle des extrêmes AB & AD, soit égal au quarré de la moyenne EF ; la premiere sera à la seconde, ce que la seconde est à la troisieme.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisque [c] ils sont rectangles : & [H] leurs surfaces sont
N. 428. égales. Donc (n), leurs côtés sont réciproquement proportionnels ; & par con-
N. 50. séquent, AB. EF :: EH. AD. Mais (n),
N. 61. EF est égal à EH. Donc (n), AB, EF :: EF. AD ; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

434. Il suit de la seconde partie de ce théorême, que *si d'un même point pris hors d'un cercle, on tire une tangente & une sécante, cette tangente sera moyenne proportionnelle entre cette sécante & sa partie extérieure.*

Au

Digitized by Google

Au cercle X (*Livre 3, Fig.* 55 & 56.) la sécante AC est à la tangente AB, ce que cette même tangente AB est à la partie AD.

Démonst. Le rectangle de la sécante AC & de sa partie AD, est (n) égal au quarré de la tangente AB. Donc (n), AC. AB :: AB. AD; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 269. N. 433.

Digitized by Google

PROPOSITION XVIII.

PROBLÊME.

435. *Décrire sur une ligne droite donnée, une figure rectiligne qui soit semblable à une autre figure rectiligne aussi donnée.*

Fig. 24. IL faut décrire sur la ligne droite EF *, une figure rectiligne qui soit semblable à la figure rectiligne DB.

Const. Divisez en triangles, par exemple ACB & ADC, la figure proposée DB. Décrivez ensuite sur la ligne EF
N. 120. (n), un angle GEF qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle CAB; & un angle F qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle B. Décri-
N. 120. vez aussi sur la ligne EG (n), un angle GEH qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle CAD; & un angle EGH qui ait le point G pour sommet, & soit égal à l'angle ACD. La figure rectiligne HF, que les côtés de ces angles formeront sur la ligne EF, sera la figure demandée.

Démonst. Premierement, l'angle HEF

Digitized by Google

est égal à l'angle DAB ; puisque [c] les angles GEF & GEH, CAB & CAD, sont égaux, chacun à chacun : l'angle F est égal à l'angle B [c] : l'angle FGH est égal à l'angle BCD ; puisque les angles EGF & ACB sont égaux (n), & que [c] les angles EGH & ACD le sont aussi : enfin, l'angle H est égal à l'angle D (n). N. 137. N. 137.

Secondement, EF. AB :: FG. BC (n), puisque [c] les triangles EGF & ACB sont équiangles. Pareillement, EH. AD :: HG. DC (n), puisque [c] les triangles EHG & ADC sont aussi équiangles. Enfin (n), EF. AB :: EH. AD ; puisque (n) les triangles équiangles EGF & ACB, donnent EF. AB :: EG. AC, & que les triangles équiangles EHG & ADC, donnent aussi EH. AD :: EG. AC. N. 414. N. 414. N. 350. N. 414.

Ainsi, dans les figures rectilignes HF & DB, les angles sont égaux aux angles, chacun à chacun ; & les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels. Donc (n), ces figures sont semblables ; & par conséquent, C. Q. F. F. N. 402.

SCHOLIE.

436. Si la figure proposée avoit un

plus grand nombre de côtés, elle se diviseroit en un plus grand nombre de triangles, que l'on rapporteroit l'un après l'autre sur les côtés des triangles de la figure HF; de la même maniere dont nous venons de rapporter le triangle ADC sur le côté EG.

USAGE.

437. *On se sert de cette proposition, pour lever le plan d'un bâtiment, d'une ville, d'un champ, d'une forêt, &c, & même celui d'un pays; parce que lever un plan, c'est décrire sur une ligne droite donnée, une figure semblable à celle de la chose dont on veut lever le plan.*

Digitized by Google

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

438. *Les triangles semblables sont entre eux en rapports doublés de ceux de leurs côtés pareils.*

SI les triangles ABC * & DEF sont semblables, le rapport du premier au second, sera doublé de celui du côté AC au côté DF. Fig. 25.

Const. Cherchez (n) une troisieme proportionnelle aux côtés AC & DF. Prenez sur le côté AC, une partie AG égale à cette troisieme proportionnelle. Tirez ensuite du point B au point G, une ligne droite BG. N. 424.

Démonst. Puisque [H] les triangles ABC & DEF sont semblables, AB. DE :: AC. DF (n). Mais [c], AC. DE :: DF. AG. Donc (n), AB. DE :: DF. AG; & par conséquent, puisque [H] l'angle A est égal à l'angle D, les triangles ABG & DEF sont égaux (n). Or (n), puisque ces triangles sont égaux, le triangle ABC a le même rapport au premier qu'au dernier. Ainsi, puisque (n), son rapport au N. 414. N. 356. N. 429. N. 354. N. 408.

Digitized by Google

premier, est le même que celui du côté AC au côté AG; son rapport au der-
N. 348. nier, est aussi le même. Mais (n), le rapport qui est entre ces deux côtés, est doublé de celui du côté AC au côté DF. Donc, le rapport du triangle ABC au triangle DEF, en est aussi doublé; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

439. *Les polygones semblables peuvent être divisés en un pareil nombre de triangles, semblables chacun à chacun; ils sont proportionnels à ceux de ces triangles qui se correspondent: enfin, ils sont entr'eux en rapports doublés de ceux de leurs côtés pareils.*

PREMIEREMENT.

Fig. 26. SI les polygones EB * & KG sont semblables, on pourra les diviser l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles, qui seront semblables, chacun à chacun.

Const. Du sommet de l'un quelconque des angles du polygone EB (par exem-

ple, du point A) tirez aux points C & D, des lignes droites AC & AD. Du point F, qui correspond au point A, tirez aux points H & I, des lignes droites FH & FI.

Démonst. Puisque [H] les polygones EB & KG sont semblables, il y a dans le premier autant d'angles opposés à l'angle A, qu'il y en a dans le second d'opposés à l'angle F. Or [C], on a divisé le premier polygone, par des lignes droites tirées de l'angle A à chaque angle opposé à l'angle A; & le second, par des lignes droites tirées de l'angle F à chaque angle opposé à l'angle F. Donc, on a divisé chacun de ces polygones, par un pareil nombre de lignes droites; & par conséquent, on les a divisés l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles.

Or, ces triangles sont semblables. Car premierement, les triangles ABC & FGH le sont (n); puisque (n) les angles B & G sont égaux, & que AB. FG :: BC. GH. Secondement, les triangles AED & FKI le sont (n); puisque (n) les angles E & K sont égaux, & que AE. FK :: ED. KI. Troisiemement, enfin, les triangles ACD & FHI le sont aussi (n). Car 1°. l'angle ACD est égal à N. 417. N. 402. N. 417. N. 402. N. 417.

N. 64. l'angle FHI (n), puisque les angles BCD
N. 402. & GHI sont égaux (n), & que les angles BCA & GHF le sont aussi [D]:
N. 350. 2°. CD. HI :: CA. HF (n); puisque (n)
N. 402. CD. HI :: CB. HG, & que (n) les
N. 414. triangles semblables ABC & FGH donnent aussi, CA. HF :: CB. HG.

Par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 26. Si les polygones EB * & KG qui sont semblables, sont pareillement divisés chacun en un égal nombre de triangles, par exemple, AED, ACD & ABC, FKI, FHI & FGH; le polygone EB sera au polygone KG, ce que l'un quelconque des triangles du premier, par exemple, le triangle AED, est au triangle correspondant FKI.

Démonst. Le rapport du triangle AED au triangle FKI, est doublé de celui du
N. 438. côté ED au côté KI (n): le rapport du triangle ACD au triangle FHI, est aussi
N. 438. doublé du même rapport; puisque (n) il est doublé du rapport du côté CD au
N. 402. côté HI, qui (n) est le même que celui de ED à KI: enfin, le rapport du triangle ABC au triangle FGH, est encore dou-
N. 438. blé du même rapport; puisque (n) il est doublé du rapport du côté AB au côté

FG,

FG, qui (n) est aussi le même que celui N. 402.
de ED à KI. Donc (n), le triangle AED N. 350.
est au triangle FKI, ce que le triangle ACD est au triangle FHI, ce que le triangle ABC est au triangle FGH; & par conséquent (n), le polygone EB, N. 380.
(qui est la somme des triangles antécédens AED, ACD & ABC) est au polygone KG (qui est celle des triangles conséquens FKI, FHI & FGH) ce que le triangle antécédent AED est à son triangle conséquent FKI.

Donc, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Enfin, si les polygones EB * & KG Fig. 26.
sont semblables, ils seront entr'eux en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté ED au côté KI.

Démonst. Le rapport du polygone EB au polygone KG, est le même que celui du triangle AED au triangle FKI [D]. Or (n), le rapport qui est entre ces deux N. 438.
triangles, est doublé de celui du côté ED au côté KI. Donc, le rapport qui est entre ces deux polygones, en est aussi doublé; & par conséquent, C. Q. F. 3°. D.

COROLLAIRE.

440. Il suit de la derniere partie de ce théorême, que *si trois lignes droites sont en proportion continue, un polygone quelconque décrit sur la premiere, sera à un polygone semblable, & semblablement décrit sur la seconde, ce que cette premiere ligne est à la troisieme.*

Fig. 27. Si les trois lignes droites A *, B & C, sont en proportion continue, un polygone quelconque décrit sur la ligne A, sera à un polygone semblable, & semblablement décrit sur la ligne B, ce que la ligne A est à la ligne C.

Démonst. Le rapport d'un polygone décrit sur la ligne A, à un polygone
N. 439. semblable décrit sur la ligne B, est (n) doublé du rapport qui est entre ces deux
N. 348. lignes. Or (n), le rapport de la ligne A à la ligne C, est aussi doublé de ce même
N. 350. rapport. Donc (n), le rapport d'un polygone décrit sur la ligne A, à un polygone semblable décrit sur la ligne B, est le même que celui de la ligne A à la ligne C; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

USAGE.

441. *On se sert de ce corollaire, pour résoudre les deux problêmes suivans.*

PREMIER. Connoître le rapport d'un polygone quelconque EB * à un polygone semblable KG. Fig. 261

Solution. *Cherchez* (n) *une troisieme proportionnelle à deux quelconques des côtés pareils des polygones EB & KG; par exemple, aux côtés ED & KI. Le polygone EB sera* (n) *au polygone KG, ce que le côté ED sera à cette troisieme proportionnelle.* N. 424 N. 440

SECOND. Décrire un polygone, qui soit semblable, par exemple, au polygone EB *, & qui en soit, par exemple, les deux tiers. Fig. 262

Solution. *Cherchez* (n) *une moyenne proportionnelle entre l'un quelconque des côtés du polygone EB, & les deux tiers de ce côté; par exemple, une moyenne proportionnelle KI, entre le côté ED & ses deux tiers. Décrivez ensuite sur cette moyenne* (n), *un polygone KG, semblable au polygone proposé EB; & ce polygone sera les deux tiers du polygone EB. Car* (n), *puisque* [c] *les trois lignes ED,* N. 426 N. 435 N. 440

Digitized by Google

K I & les deux tiers de E D, sont en proportion continue, le polygone E B, décrit sur la premiere, est au polygone semblable K G, décrit sur la seconde, ce que la premiere est à la troisieme, qui [c] *est les deux tiers de cette premiere.*

Digitized by Google

PROPOSITION XXII. †

THÉORÊME.

442. *Si quatre lignes droites sont proportionnelles, les polygones semblables, & semblablement posés sur les deux premieres, seront proportionnels aux polygones semblables, & semblablement posés sur les deux dernieres: & si deux polygones semblables sont proportionnels à deux autres polygones aussi semblables, les côtés pareils des premiers seront proportionnels aux côtés pareils des derniers.*

PREMIÉREMENT.

SI AB *. CD :: EF. GH, les polygones AIB & CKD, qui sont semblables, & semblablement posés sur les deux premieres, seront proportionnels aux polygones EM & GO, qui sont aussi semblables, & semblablement posés sur les deux dernieres. Fig. 29.

Démonst. Le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est (n) doublé N. 438

† La vingt-unieme proposition est un axiome, que nous avons mis à la suite des définitions, n°. 406.

de celui du côté AB au côté CD, puisque [H] ces polygones sont semblables: & le rapport du polygone EM au poly-
N. 435. gone GO, est (n) doublé de celui du côté EF au côté GH, puisque [H] ces polygones sont aussi semblables. Or [H], le rapport du côté AB au côté CD, est le même que celui du côté EF au côté GH. Donc, le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est aussi le même que celui du polygone EM au polygone GO; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 29. Si les polygones AIB * & CKD, qui sont semblables, sont proportionnels aux polygones EM & GO, qui sont aussi semblables; les côtés, par exemple AB & CD des deux premiers, seront proportionnels aux côtés EF & GH des deux derniers.

Démonst. Si les quatre lignes droites AB, CD, EF & GH n'étoient point proportionnelles; une quatrieme proportionnelle aux trois premieres, seroit ou plus grande, ou plus petite, que la ligne
N. 435. GH. Ainsi, si (n) l'on décrivoit sur cette quatrieme, un polygone qui fût semblable au polygone GO, & semblablement

posé ; il seroit aussi (n) plus grand, ou N. 439.
plus petit, que le polygone GO ; & par conséquent, il ne seroit point proportionnel aux polygones AIB, CKD & EM. Mais [D], lorsque quatre lignes droites sont proportionnelles, les polygones semblables, qui sont semblablement posés sur elles, sont aussi proportionnels. Donc, puisque les polygones semblables AIB, CKD, &c. qui seroient semblablement posés sur les lignes AB, CD, EF, & une quatrieme plus grande ou plus petite que GH, ne seroient point proportionnels, ces lignes ne sont point proportionnelles ; & par conséquent, les lignes AB, CD, EF & GH, le sont. Donc, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

443. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *si trois lignes droites sont en proportion continue, les polygones semblables, & semblablement posés sur ces trois lignes, seront aussi en proportion continue :* & de la seconde partie, que *si trois polygones semblables sont en proportion continue, leurs côtés pareils seront aussi en proportion continue.*

Digitized by Google

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

444. *Les parallélogrammes équiangles sont entr'eux en rapport composé de ceux de leurs côtés.*

Fig. 30. SI les parallélogrammes AC * & GE sont équiangles, ils seront entr'eux en rapport composé de celui du côté AB au côté BE, & de celui du côté BC au
N. 243. côté BG; c'est-à-dire (n) ce que le produit de AB multiplié par BC, est à celui de BE multiplié par BG.

Const. Disposez les parallélogrammes AC & GE, de maniere que les côtés, par exemple BE & BG, deviennent les prolongemens des côtés AB & CB. Décrivez ensuite sur le côté AB, un rectangle AI, dont le côté IB soit égal au côté CB, & sur le côté BE, un rectangle BL, dont le côté BM soit égal au côté BG. Enfin, prolongez les côtés DC & FE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point H; & les côtés KI & LE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point N.

Démonst. Le parallélogramme AC est

Digitized by Google

(n) au parrallélogramme BH, ce que le rectangle AI est au rectangle BN, puisque (n) ces parallélogrammes, de même que ces rectangles, sont entr'eux, ce que AB est à BE. Mais (n), le parallélogramme BH est au parallélogramme GE, ce que le rectangle BN est au rectangle BL; puisque (n) ces parallélogrammes sont entr'eux, ce que CB est à BG, que ces rectangles sont entr'eux, ce que IB est à BM, & que [c] CB est à BG, ce que IB est à BM. Donc (n), le parallélogramme AC est au parallélogramme GE, ce que le rectangle AI est au rectangle BL. Mais (n), le rectangle AI est le produit de AB multiplié par IB, & le rectangle BL est celui de BE multiplié par BM. Donc, le parallélogramme AC est au parallélogramme GE, ce que le produit de AB, multiplié par IB, est à celui de BE multiplié par BM; & par conséquent (n), ce que le produit de AB multiplié par BC, est à celui de BE multiplié par BG, puisque [c] BC est égal à IB, & BG à BM. Donc, C. Q. F. D.

N. 350. N. 407. N. 350. N. 407. N. 389. N. 143. N. 62.

COROLLAIRE.

445. Il suit de ce théorême, que *les triangles qui ont un angle égal à un*

angle, sont entr'eux en rapport composé de ceux des côtés qui forment ces angles égaux.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

446. *Les parallélogrammes qui ont un angle commun, & leurs diagonales sur une même ligne droite, sont semblables.*

Fig. 31. LES parallélogrammes GE * & DB, qui ont l'angle A commun, & dont les diagonales AF & AC sont sur la même ligne droite AC, sont semblables.

Démonst. Premierement, l'angle ex-
N. 130. térieur AEF est (n) égal à son opposé in-térieur B, puisque les lignes EF & BC, qui sont paralleles chacune à la même
N. 132. ligne AD, le sont aussi entr'elles (n).
N. 62. L'angle AGF est (n) égal à l'angle D, puisque les angles AEF & B, qui [D]
N. 143. sont égaux entr'eux, le sont aussi (n), l'un à l'angle AGF, & l'autre à l'angle D.
N. 62. Enfin (n), l'angle GFE est égal à l'angle
N. 143. DCB, puisque (n) le même angle DAB est égal & à l'un & à l'autre.

Secondement, AE. AB :: EF. BC

Digitized by Google

(h), puisque (n) les triangles AFE & ACB, qui ont l'angle CAB commun, & l'angle AEF égal à l'angle B [D], sont équiangles. Pareillement, AG. AD :: GF. DC; puisque (n) ces dernieres lignes sont égales aux précédentes, chacune à chacune; savoir, GF à AE, DC à AB, AG à &c. N. 414. N. 137. N. 143.

Ainsi, dans les parallélogrammes GE & DB; les angles sont égaux aux angles, chacun à chacun; & les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels. Donc (n), ces parallélogrammes sont semblables; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 402.

PROPOSITION XXV.

PROBLÊME.

447. *Décrire un polygone, qui soit semblable à un autre polygone donné, & égal à un troisieme aussi donné.*

IL faut décrire un polygone, qui soit semblable au polygone BCD *, & égal au polygone A. Fig. 32.

Const. Décrivez (n) sur l'un des côtés du polygone BCD, par exemple, sur le N. 167.

Digitized by Google

côté BD, un rectangle BE, qui soit égal à ce polygone ; & sur l'un des côtés de ce rectangle, par exemple, sur le côté DE, un rectangle DH, qui soit égal au po-
N. 426. lygone A. Cherchez ensuite (n) une moyenne proportionnelle DI, entre les
N. 435. côtés BD & DG. Enfin (n), décrivez sur cette moyenne, un polygone DKI, qui soit semblable au polygone BCD, & il sera le polygone demandé.

Démonst. Les polygones BCD & DKI
N. 440. sont entr'eux (n), ce que BD est à DG ; puisque ces polygones sont semblables [c], & que [c] ∺ BD. DI. DG. Mais
N. 407. (n), les rectangles BE & DH sont aussi
N. 350. entr'eux, ce que BD est à DG. Donc (n), le polygone BCD est au polygone DKI, ce que le rectangle BE est au rectangle
N. 369. DH ; & par conséquent (n), puisque [c] le premier polygone & le premier rectangle sont égaux, le dernier polygone & le dernier rectangle le sont aussi. Mais [c], ce dernier rectangle est égal au po-
N. 62. lygone A. Donc (n), le dernier polygone lui est aussi égal. D'ailleurs [c], ce même dernier polygone est semblable au polygone BCD. Par conséquent, C. Q. F. F.

Digitized by Google

PROPOSITION XXX. ¶

PROBLÊME.

448. *Diviser en moyenne & extrême raison une ligne droite donnée.*

IL faut diviser la ligne droite AB *, en moyenne & extrême raison. Fig. 33.

Const. Divisez (n) la ligne AB en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite partie CB, soit égal au quarré de la plus grande AC, & elle sera divisée, comme il est demandé. N. 203.

Démonst. Le rectangle des lignes AB & CB est égal au quarré de la ligne AC [c]. Donc (n), ∺ AB. AC. CB; & par conséquent (n), la ligne AB est divisée, comme il est demandé. Donc, C. Q. F. F. N. 438. N. 404.

† Nous supprimons les propositions 26, 27, 28 & 29, parce qu'elles sont inutiles.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

449. *Dans un triangle rectangle, le polygone quelconque décrit sur l'hypoténuse, est égal à la somme des deux autres polygones semblables, & semblablement posés sur les autres côtés.*

Fig. 34. SI les polygones X *, Y & Z, qui sont décrits sur les côtés AC, AB & BC du triangle rectangle ABC, sont semblables, & semblablement posés sur ces côtés; le polygone X, qui est sur l'hypoténuse AC, sera égal aux polygones Y & Z qui sont sur les autres côtés.

N. 97. *Const.* Du point B, abaissez (n) une perpendiculaire BD à l'hypoténuse AC.

Démonst. Puisque [H] les polygones
N. 414. X & Y sont semblables, & que (n) les
N. 420. triangles ABC & ADB qui (n) le sont aussi, donnent ∺ AC. AB. AD, le
N. 440. polygone X est au polygone Y (n), ce
N. 372. que AC est à AD; & par conséquent (n), en renversant, le polygone Y est au polygone X, ce que AD est à AC.

Pareillement, puisque [H], les poly-

Digitized by Google

gones X & Z ſont ſemblables, & que
(n) les triangles ABC & BDC, qui (n) N. 414
le ſont auſſi, donnent ∺ AC. BC. DC, N. 420.
le polygone X eſt au polygone Z (n), ce N. 440.
que AC eſt à DC; & par conſéquent (n), N. 372.
en renverſant, le polygone Z eſt au polygone X, ce que DC eſt à AC.

Ainſi, les ſix quantités Y, X, AD, AC, Z & DC, ſont telles que les quatre premieres ſont proportionnelles, & que la cinquieme, la ſeconde, la ſixieme & la quatrieme, le ſont auſſi. Donc (n), N. 393.
la ſomme Y+Z de la premiere & de la cinquieme, eſt à la ſeconde X, ce que la ſomme AD+DC de la troiſieme & de la ſixieme, eſt à la quatrieme AC; & par conſéquent, puiſque cette derniere ſomme AD+DC, eſt égale à AC, la premiere Y+Z eſt égale à X. Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

450. *Dans les cercles égaux, les secteurs sont entr'eux, comme les arcs qui les terminent.*

Fig. 35. SI les cercles B * & E sont égaux, le secteur ABC sera au secteur DEF, ce que l'arc AHC est à l'arc DMF.

N. 262. *Const.* Divisez (n) le plus petit AC des deux arcs AC & DF, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira; par exemple, en quatre parties égales AG, GH, &c. Prenez sur l'arc DF, une partie DK égale à la partie AG. Enfin, tirez du centre B aux points G, H, &c. des rayons BG, BH, &c; & du centre E au point K, un rayon EK.

Démonst. Les secteurs ABG, GBH,
N. 7. HBI, IBC & DEK, sont égaux (n). Ainsi, l'on démontrera que le secteur ABC est au secteur DEF, ce que l'arc AHC est à l'arc DMF, par un raisonnement tout

† Nous supprimons la proposition 32, parce qu'elle est inutile.

pareil

pareil à celui dont on s'est servi au n°. 407, pour démontrer que les parallélogrammes dont les hauteurs sont égales, sont entr'eux comme leurs bases. Par conséquent, C. Q. F. D.

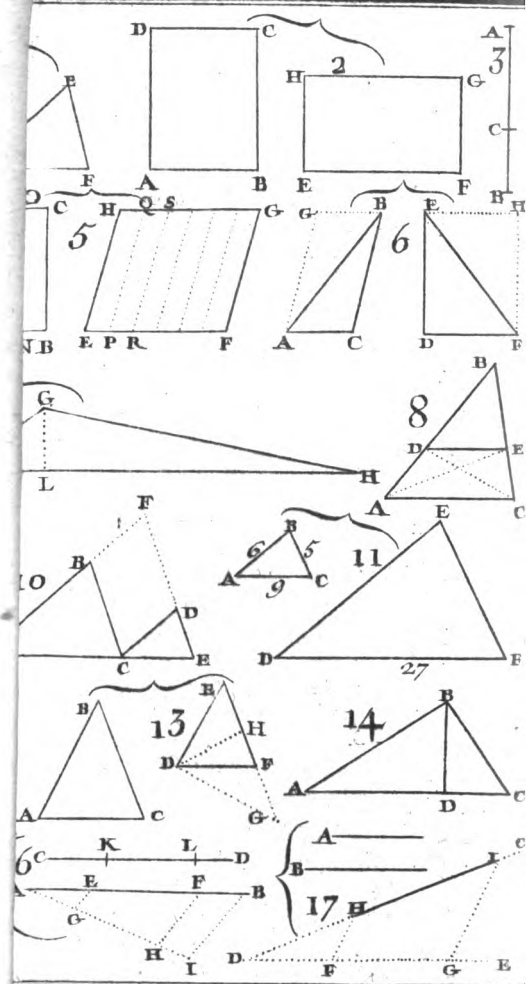
COROLLAIRE.

451. Il suit de ce théorême, que *dans le cercle, le secteur est au cercle, ce que l'arc du secteur est à la circonférence du cercle.*

Fin du sixieme Livre.

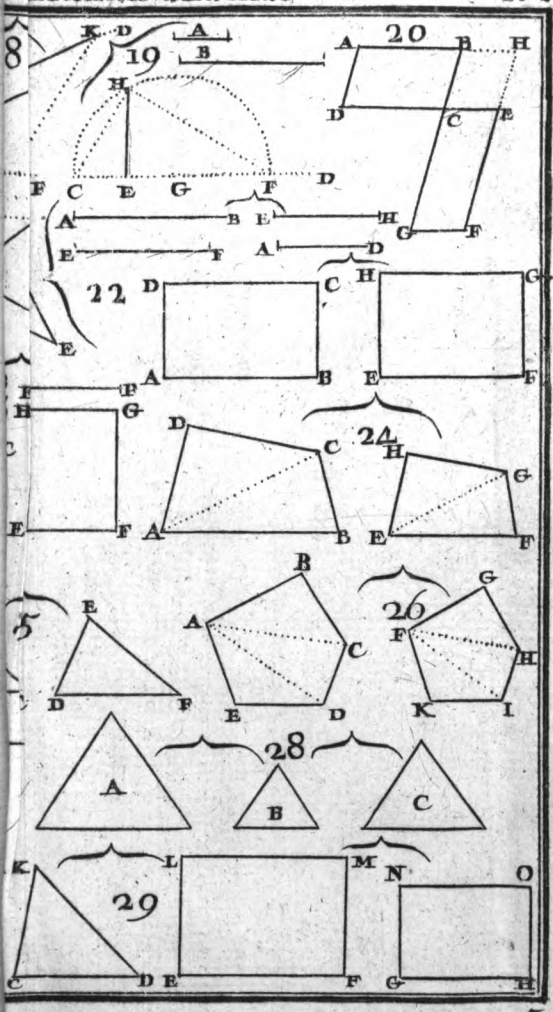
Digitized by Google

Digitized by Google



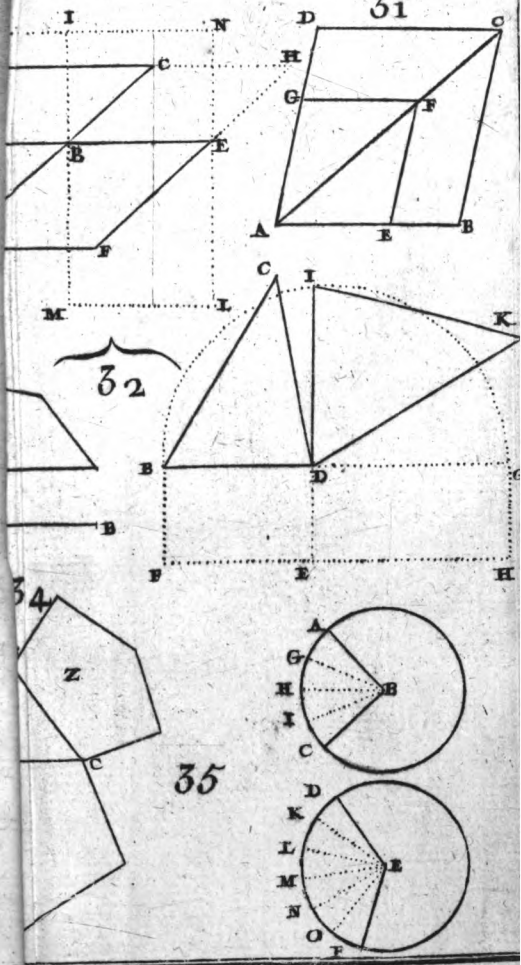
Digitized by Google

Digitized by Google



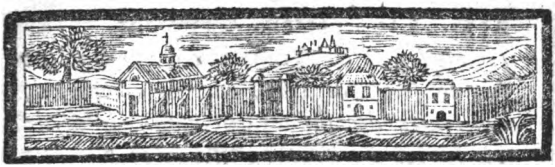
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE ONZIÉME. ¶

LEs principes des lignes & des surfaces ont été établies dans les Livres précédens ; ainsi, il ne reste plus à parler que de ceux des solides. Mais, il est nécessaire de considérer auparavant, les différentes positions que les lignes droites & les plans peuvent avoir à l'égard d'autres plans : & cet objet seroit celui du onzieme Livre d'Euclide, si les personnes qui ont ras-

¶ Nous supprimons le septieme Livre, le huitieme & le neuvieme, parce que ces trois Livres ne traitent que de certaines propriétés des nombres : & nous faisons la même chose à l'égard du dixieme, parce qu'il ne considere les quantités, que pour déterminer celles qui sont *incommensurables* ; c'est-à dire, celles, qui relativement à d'autres, ne peuvent point être exprimées par des nombres.

Digitized by Google

semblé les écrits de ce Géomètre, n'avoient pas confondu ce Livre avec le douzieme, qui traite des solides, de maniere que de 14 Livres d'Elémens, elles n'en ont fait que 13. Cette faute est irréparable, à cause du grand nombre d'Auteurs qui citent cet ouvrage. Ainsi, tout ce que nous avons pu faire, a été de ne point interrompre l'ordre des propositions : mais de diviser ce onzieme Livre en deux parties, dont la premiere comprend le onzieme d'Euclide, & la seconde, ce qui auroit dû faire le douzieme.

Au reste, cette premiere partie est absolument nécessaire, pour la Trigonométrie sphérique, la Gnomonique, l'Astronomie, les Sections coniques, la Coupe des pierres, &c, & la derniere, pour le Mesurage des solides.

Digitized by Google

DÉFINITIONS.

I.

452. ON nomme *corps*, ou *solide*, ce qui est étendu en trois sens.

COROLLAIRE.

453. *Il suit de cette définition, que* les extrémités d'un corps sont des surfaces.

Démonst. *Les extrémités d'un corps ne sont point étendues en trois sens, puisque si elles l'étoient, elles seroient des corps* (n). *Or, si les extrémités d'un corps étoient des corps, elles auroient d'autres corps pour extrémités; & par conséquent, elles ne seroient point celles de ce premier corps; mais, ce seroit ces autres corps qui le seroient.* N. 452.

Elles ne sont point non plus étendues seulement en un sens. Car, puisque (n) *les corps sont étendus en trois sens, il faut nécessairement que ce qui termine les corps, termine deux de ces sens. Or, ce qui n'est étendu qu'en un sens, ne peut point en terminer deux.* N. 452.

Cependant, les extrémités d'un corps sont étendues. Donc, elles ne le sont qu'en

Digitized by Google

N. 9. *deux sens ; & par conséquent* (n), *elles sont des surfaces. Donc, C. Q. F. D.*

II.

454. On dit d'une ligne droite, qu'elle *est dans un plan*, lorsque toutes ses parties sont dans ce plan, prolongé s'il est nécessaire.

Fig. 1. *Les lignes droites CD * & EF*, sont dans le plan X.

455. On dit de deux lignes droites, qu'elles *sont dans le même plan*, lorsque l'on peut concevoir un plan, dans lequel ces deux lignes seroient en même tems.

456. On dit de deux plans, qu'ils *sont dans le même plan*, lorsqu'étant prolongés, ils se rencontreroient de maniere qu'ils ne formeroient plus qu'un seul plan.

457. Enfin, on nomme *commune section* de deux plans, une ligne qui est commune à ces deux plans.

Fig. 2. *La ligne AB *, qui est en même tems dans le plan X & dans le plan V, est la* commune section *de ces deux plans.*

III.

458. On dit d'une ligne droite, qu'elle est *perpendiculaire* à un plan, lorsqu'elle l'est à toutes les lignes de ce

Digitized by Google

plan, avec lesquelles elle peut avoir un point commun.

*La ligne AB * sera* perpendiculaire *au plan X ; si elle l'est aux lignes CD, EF, &c. qui sont dans ce plan, & avec lesquelles elle a le point B commun.* Fig. 1.

IV.

459. On dit d'une ligne droite, qu'elle est *inclinée* à un plan, lorsqu'elle formeroit un angle aigu, avec une autre ligne droite qui seroit tirée du point auquel cette premiere ligne rencontre ce plan, au point auquel une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette même premiere ligne à ce même plan, le rencontreroit.

*La ligne droite AB * sera* inclinée *au plan X, si elle forme un angle aigu ABC†, avec la ligne BC qui est tirée du point B au point C, auquel la perpendiculaire AC rencontre ce plan.* Fig. 3.

V.

460. On dit d'un plan, qu'il est *perpendiculaire* à un autre, lorsque les lignes droites qui sont tirées dans l'un de ces plans, perpendiculairement à leur commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

† L'angle aigu ABC * s'appelle *l'inclinaison* de la ligne AB au plan X. Fig. 3.

Digitized by Google

Fig. 2. *Le plan Y * sera* perpendiculaire *au plan X, si les lignes droites CD, EF, &c. qui sont tirées dans le plan Y perpendiculairement à la commune section AB, sont aussi perpendiculaires au plan X.*

VI.

461. On dit d'un plan, qu'il est *incliné* à un autre, lorsque les lignes droites qui seroient tirées chacune dans chacun de ces plans, d'un même point de leur commune section, & perpendiculairement à leur commune section, formeroient des angles aigus.

Fig. 3. *Le plan Y* sera* incliné *au plan X, si les lignes droites BA & BC qui sont tirées, l'une dans le plan Y, & l'autre dans le plan X, perpendiculairement à la commune section ED, forment un angle aigu ABC* †.

VII.

462. On dit que des plans sont *également*, ou *semblablement*, inclinés à d'autres plans, chacun à chacun, lorsque leurs inclinaisons sont égales.

VIII.

463. On dit que des plans sont *parallèles*, lorsque tous les points des uns sont

Fig. 3. †. L'angle aigu ABC * s'appelle l'*inclinaison* du plan Y au plan X.

également

également éloignés de tous les points correſpondans des autres.

COROLLAIRE.

464. *Il ſuit de cette définition, que* des plans paralleles ne ſe rencontrent point.

IX.

465. On dit que des ſolides ſont *ſemblables*, lorſqu'ils ſont terminés par un pareil nombre de ſurfaces, ſemblables chacune à chacune.

466. On dit que des ſolides ſont *ſemblables & égaux*, lorſqu'ils ſont terminés par un pareil nombre de ſurfaces, ſemblables & égales, chacune à chacune.

467. Enfin, on dit que des ſolides ſont *égaux*, lorſqu'ils contiennent des eſpaces égaux.

X.

468. On nomme *angle ſolide*, un angle formé par plus de deux angles plans, qui ont chacun le même point pour ſommet, & ne ſont point dans le même plan.

*L'angle A * qui eſt formé par les angles plans EAD, DAC, &c. qui ont chacun le même point A pour ſommet, & ne ſont point dans le même plan, eſt un* angle ſolide. Fig. 1

Digitized by Google

XI.

469. On nomme *pyramide*, un solide terminé par plus de deux plans triangulaires, qui ont chacun le même point pour sommet, & dont les côtés qui sont opposés à ce sommet, sont chacun dans le même plan.

Fig. 6. *Le solide ABCD * qui est formé par les triangles ABD, DBC & ABC, qui ont chacun le même point B pour sommet, & dont les côtés AD, DC & AC, sont chacun dans le même plan ADC †, est une* pyramide.

470. On nomme *pyramides triangulaires*, celles dont les bases sont des triangles : *pyramides quadrilatérales*, celles dont les bases sont des quadrilateres : *pyramides pentagones*, celles dont les bases sont des pentagones, & ainsi de suite.

XII.

471. On nomme *prisme*, un solide qui est terminé de deux côtés par deux plans quelconques, égaux, semblables & paralleles ; & de chaque autre côté, par un parallélogramme.

Fig. 7. *Le solide X * qui est terminé de deux côtés par les exagones CF & LI ¶, égaux,*

† Ce plan s'appelle la *base* de la pyramide.
¶ Ces deux plans s'appellent les *bases* du prisme.

Digitized by Google

semblables & paralleles ; & de chaque autre côté, par les parallélogrammes AG, HF, IE, &c. est un prisme.

472. On nomme *prismes triangulaires*, ceux dont les bases sont des triangles : *prismes quadrilatéraux*, ceux dont les bases sont des quadrilateres : *prismes pentagones*, ceux dont les bases sont des pentagones ; & ainsi de suite.

XIII.

473. On nomme *sphere*, un solide qui est terminé par une seule surface, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de ce solide.

*Le solide X * est une* sphere. Fig. 8.

XIV.

474. On nomme *centre* d'une sphere, le point qui est également éloigné de tous les points de la surface de cette sphere.

*Le point C * est le* centre *de la sphere X.* Fig. 8.

XV.

475. On nomme *diametre* d'une sphere, une ligne droite quelconque qui passe par le centre de cette sphere, & est terminée de part & d'autre à sa surface.

*La ligne AB * est un* diametre *de la sphere X.* Fig. 8.

476. On nomme *rayon* d'une sphere,

Digitized by Google

une ligne droite quelconque qui est tirée du centre de cette sphere à sa surface.

Fig. 8. *La ligne CB* est un* rayon *de la sphere X.*

XVI.

477. On nomme *axe* d'une sphere, un diametre fixe de cette sphere, sur lequel elle tourne.

Fig. 8. *Le diametre AB* sera l'*axe *de la sphere X, si ce diametre étant immobile à l'égard de cette sphere, elle tourne sur lui.*

XVII.

478. On nomme *cône*, une espece de pyramide, dont la base est un cercle.

Fig. 9. *Le solide ABCD * est un* cône.

XVIII.

479. On nomme *axe* d'un cône, une ligne droite qui est tirée du sommet de ce cône, au centre de sa base

Fig. 9. *La ligne BE* est l'*axe *du cône ABCD.*

XIX.

480. On nomme *cône droit*, celui dont l'axe est perpendiculaire à la base; & *cône incliné*, celui dont l'axe est incliné à la base.

XX.

481. On nomme *cylindre*, une es-

Digitized by Google

pece de prisme, dont les bases sont des cercles égaux & paralleles.

*Le solide X * est un* cylindre. Fig. 101

XXI.

482. On nomme *axe* d'un cylindre, une ligne droite qui est tirée du centre de la base supérieure de ce cylindre, au centre de sa base inférieure.

*La ligne GH * est l'*axe *du cylindre X.* Fig. 101

XXII.

483. On nomme *cylindre droit*, celui dont l'axe est perpendiculaire à la base; & *cylindre incliné*, celui dont l'axe est incliné à la base.

XXIII.

484. On dit que des cônes sont *semblables*, lorsque leurs axes sont proportionnels aux diametres de leurs bases; & il en est de même des cylindres.

XXIV.

485. On nomme *exaëdre*, ou *cube*, un prisme qui est terminé par six quarrés.

XXV.

486. On nomme *tétraëdre*, une pyramide qui est terminée par quatre triangles équilatéraux & égaux.

XXVI.

487. On nomme *octaëdre*, un solide

Digitized by Google

qui est terminé par huit triangles équilatéraux & égaux.

XXVII.

488. On nomme *dodécaëdre*, un solide qui est terminé par douze pentagones réguliers & égaux.

XXVIII.

489. On nomme *icosaëdre*, un solide qui est terminé par vingt triangles équilatéraux & égaux †.

XXIX.

490. Enfin, on nomme *parallelepipede*, un solide qui est terminé par six plans paralleles.

XXX.

491. On dit d'un solide, qu'il est *inscrit* dans un autre, lorsqu'il a tous ses angles dans la surface de cet autre.

XXXI.

492. Enfin, on dit d'un solide, qu'il est *circonscrit* à un autre, lorsque sa surface touche tous les angles de cet autre.

† Ces cinq derniers solides; savoir, l'*exaëdre*, le *tétraëdre*, &c. s'appellent les *cinq corps réguliers*.

Digitized by Google

PREMIERE PARTIE.

DES PLANS.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

493. *Toutes les parties d'une ligne droite sont dans le même plan.*

UNE ligne droite AB * dans le plan X, & une ligne droite BC hors de ce plan, ne sont point une seule ligne droite. Fig. 11.

Const. Dans le plan X, élevez du point B (n), une perpendiculaire BE à la ligne AB, & une perpendiculaire BD à la ligne BE. N. 96.

Démonst. La somme des angles EBA, & EBD est (n) égale à celle de deux angles droits. Ainsi (n), les lignes BA & BD, qui [c] sont tirées du même point B de la ligne droite BE, ne sont qu'une seule ligne droite ABD ; & par conséquent, les lignes AB & BC, ne sont point une seule ligne droite. Donc, C. Q. F. D. N. 21. N. 101.

Digitized by Google

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

494. *Deux lignes droites qui ont un point commun, sont dans le même plan.*

Fig. 12. LES lignes droites AB * & CD qui ont le point E commun, sont dans le même plan.

Const. Tirez d'un point quelconque A, de la ligne AB à un point quelconque D de la ligne CD, une ligne droite AD.

Démonst. La partie AE est dans le plan du triangle AED, puisqu'elle est l'un des côtés de ce triangle : & par une raison pareille, la partie DE y est aussi. Ainsi, les lignes AB & CD ont chacune une partie dans un même plan ; & par
N. 493. conséquent (n), elles y sont aussi. Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

495. *La commune section de deux plans, est une ligne droite.*

LA commune section AB * des plans CD & EF, est une ligne droite. Fig. 154

Démonst. Si la ligne AB n'alloit pas directement du point A au point B, elle ne seroit point (n) la commune section des plans CD & EF; puisque si elle se courboit, ou vers E, ou vers F, elle ne seroit point dans le plan CD; si elle se courboit, ou vers C, ou vers D, elle ne seroit point dans le plan EF; & si elle se courboit vers tout autre côté, elle ne seroit ni dans le plan CD, ni dans le plan EF. Or [H], cette ligne est la commune section de ces plans. Donc, elle va directement du point A au point B; & par conséquent (n), elle est une ligne droite. Donc, C. Q. F. D. N. 457. N. 7.

Digitized by Google

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

496. *Si de trois lignes droites qui ont un point commun, l'une est perpendiculaire aux deux autres, elle le sera aussi à leur plan.*

Fig. 14. SI la ligne droite AB * est perpendiculaire aux lignes droites CD & EF, avec lesquelles elle a le point B commun, elle le sera aussi à leur plan X.

Const. Du point B, pris pour centre, & avec tel rayon qu'il vous plaira, prenez sur les lignes CD & EF, des parties égales BC, BE, BD & BF. Tirez du point C au point E, une ligne droite CE, & du point F au point D, une ligne droite FD. Par le point B, tirez dans le plan X, une ligne droite quelconque GH, qui rencontre les précédentes CE & FD, à deux points quelconques G & H. Enfin, tirez du point A aux points C, G, E, D, H & F, des lignes droites AC, AG, AE, AD, AH & AF.

Démonst. Premierement, dans les triangles ABC, ABE, ABD & ABF,

Digitized by Google

qui [H] ſont tous rectangles en B, les côtés BC, BE, BD & BF, ſont égaux [C], & le côté AB eſt commun. Ainſi (n), N. 83.
les côtés AC, AE, AD & AF, ſont auſſi égaux.

Secondement, dans les triangles EBC & DBF, l'angle EBC eſt (n) égal à l'an- N. 102.
gle DBF qui lui eſt oppoſé au ſommet, & [C] les côtés BC & BE ſont égaux aux côtés BD & BF, chacun à chacun. Ainſi (n), le côté CE eſt égal au côté N. 83.
FD, & l'angle BCE à l'angle BDF.

Troiſiemement, dans les triangles GBC & HBD, le côté BC eſt égal au côté BD [C], l'angle BCE à l'angle BDF [D], & (n), l'angle CBG à l'angle N. 101.
DBH qui lui eſt oppoſé au ſommet. Ainſi (n), le côté CG eſt égal au côté N 123.
DH, & le côté BG au côté BH.

Quatriemement, dans les triangles ACE & ADF, le côté AC eſt égal au côté AD [D], le côté AE au côté AF [D], & le côté CE au côté FD [D]. Ainſi (n), l'angle ACE eſt égal à l'angle N. 90.
ADF.

Cinquiemement, dans les triangles ACG & ADH, l'angle ACE eſt égal à l'angle ADF [D], le côté AC au côté AD [D], & le côté CG au côté DH [D].

Digitized by Google

N. 83. Ainsi (n), le côté AG est égal au côté AH.

Sixiemement, enfin, dans les triangles ABG & ABH, le côté AG est égal au côté AH [D], le côté BG au côté BH [D], & le côté AB est commun.

N. 90. Ainsi (n) l'angle ABG est égal à l'angle
N. 19. ABH; & par conséquent (n), la ligne AB est perpendiculaire à la ligne GH.

Or, la même démonstration subsiste, en quelque endroit du plan X que l'on tire la ligne GH, pourvu qu'elle passe par le point B. Donc, la ligne AB est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, avec lesquelles elle peut avoir un
N. 458. point commun; & par conséquent (n), elle l'est aussi à ce même plan. Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

497. *Si de quatre lignes droites qui ont un point commun, l'une est perpendiculaire aux trois autres, ces trois dernieres seront chacune dans le même plan.*

SI la ligne droite AB * est perpendiculaire aux lignes droites BC, BD, & BE, avec lesquelles elle a le point B commun, ces trois dernieres lignes seront chacune dans le même plan. Fig. 15.

Démonst. Puisque [H] les lignes BC & BD ont le point B commun, elles sont dans un même plan X (n). Ainsi, si la ligne BE est la commune section de ce plan & d'un autre plan quelconque, les lignes BC, BD & BE, seront chacune dans un même plan, puisqu'alors (n), cette ligne BE sera aussi dans le plan X. N. 494. N. 457.

Or, la ligne BE est la commune section de ce dernier plan & du plan Y, qui est celui des lignes AB & BE. Car, puisque [H] la ligne AB est perpendicu-

Digitized by Google

laire aux lignes BC & BD, elle l'eſt
N. 496. auſſi (n) au plan X de ces lignes; & par
N. 458. conſéquent (n), à toutes les lignes de ce plan, avec leſquelles elle peut avoir un point commun. Or, elle a néceſſairement le point B commun avec la commune ſection de ce même plan & du plan Y. Donc, elle eſt perpendiculaire à cette commune ſection. Mais, de toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point B, dans le plan Y, la ligne BE eſt la ſeule à laquelle cette ligne AB puiſſe être perpendiculaire; puiſque [H] elle l'eſt à cette derniere ligne, & que du même point on ne peut élever dans un même plan, qu'une ſeule perpendiculaire à une même ligne droite. Donc, cette ligne BE eſt la commune ſection du plan X & du plan Y; & par conſéquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

498. *Si deux lignes droites sont perpendiculaires chacune au même plan, elles seront paralleles.*

SI les lignes droites AB * & CD sont perpendiculaires chacune au plan X, elles seront paralleles. Fig. 16.

Const. Tirez du point B au point D, une ligne droite BD. Du point D, élevez dans le plan X (n), une perpendiculaire DE à cette ligne BD. Faites cette perpendiculaire égale à la ligne AB. Enfin, tirez du point B au point E, une ligne droite BE; & du point A aux points E & D, des lignes droites AE & AD. N. 96.

Démonst. Les lignes AB & CD sont (n) perpendiculaires chacune à la ligne BD, puisque [H] elles le sont chacune au plan X. Ainsi (n), si elles sont chacune dans le même plan, elles seront paralleles. N. 458. N. 129.

Or, ces lignes sont chacune dans le même plan. Car, puisque les triangles

ABD & BDE, qui ont le côté BD commun, & le côté AB égal au côté DE
N. 458. [c], sont rectangles, l'un en B (n), & l'autre en D [c], le côté AD est égal au
N. 83. côté BE (n). Ainsi, les triangles ADE & ABE, qui ont le côté AE commun, & le côté AB égal [c] au côté DE, ont encore le côté AD égal au côté BE; &
N. 90. par conséquent (n), l'angle ADE est
N. 458. égal à l'angle ABE. Mais (n), ce dernier angle est droit. Donc, l'angle ADE
N. 21. l'est aussi. Ainsi (n), la ligne DE est perpendiculaire à la ligne AD; & par conséquent, puisqu'elle l'est aussi & à la
N. 458. ligne BD [c], & à la ligne CD (n), cette ligne CD est dans le même plan
N. 497. que les lignes AD & BD (n). Or, la ligne AB y est aussi; puisqu'elle est l'un des côtés du triangle ADB, dont ces lignes AD & BD sont les autres côtés. Donc, les lignes AB & CD sont chacune dans le même plan; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

499. Il suit de la démonstration de ce théorême, que *si deux lignes droites sont paralleles, elles seront chacune dans le même plan.*

PROPOSITION

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

500. *Si une ligne droite en rencontre deux autres qui sont paralleles, elle sera dans le même plan que ces dernieres.*

SI les lignes droites AB * & CD sont paralleles, la ligne droite EF qui les rencontre aux points E & F, sera dans le même plan qu'elles. Fig. 170.

Démonst. Si l'on suppose que le plan des paralleles AB & CD soit coupé par un autre plan quelconque qui passe par les points E & F, la commune section de ces deux plans y passera aussi. Ainsi, ces deux points seront communs, & à cette commune section, & à la ligne droite EF. Mais (n), cette même commune section sera aussi une ligne droite. Donc (n), la ligne droite EF sera cette commune section. Or, puisque la ligne EF est la commune section du plan des paralleles AB & CD & d'un certain autre plan, elle est (n) dans le même plan que N. 455. N. 74. N. 457.

Digitized by Google

ces paralleles ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

501. *Si de deux lignes droites qui sont paralleles, l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre le sera aussi au même plan.*

Fig. 16. SI la ligne droite AB *, qui est parallele à la ligne CD, est perpendiculaire au plan X, la ligne CD le sera aussi.

Const. La même que celle du n°. 498.

Démonst. Les lignes AD & BD rencontrent [c] les lignes AB & CD, qui
N. 500. sont paralleles [H]. Ainsi (n), ces quatre lignes sont chacune dans le même plan.
N. 496. Or (n), la ligne DE est perpendiculaire à ce plan ; puisqu'elle l'est & à la ligne BD [c], & à la ligne AD, par une démonstration pareille à celle du n°. 498.
N. 458. Donc (n), elle est aussi perpendiculaire à
N. 131. la ligne CD. Mais (n), la ligne BD est aussi perpendiculaire à cette même ligne

Digitized by Google

CD. Donc (n), cette ligne CD est perpendiculaire au plan X; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 496.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

501. Si deux lignes droites sont paralleles chacune à une même ligne, elles le seront aussi entr'elles, quand même elles ne seroient point dans le même plan que cette derniere.

SI les lignes droites AB * & CD, qui ne sont point dans le même plan que la ligne EF †, sont paralleles chacune à cette derniere ligne, elles le seront aussi entr'elles. Fig. 18.

Const. Du point G, pris à volonté sur la ligne EF, abaissez (n) une perpendiculaire GH à la ligne AB, & une perpendiculaire GI à la ligne CD. N. 97.

Démonst. La ligne EF est (n) perpendiculaire & à la ligne GH, & à la ligne N. 131.

† Nous supposons ici que les trois lignes proposées ne sont point dans le même plan; puisque si elles y étoient, cette proposition seroit la même que la troisieme du premier Livre, n°. 134.

N. 496. GI. Ainsi (n), elle l'est aussi au plan de ces lignes. Mais [H], les lignes AB & CD sont paralleles chacune à cette ligne
N. 501. EF. Donc (n), elles sont aussi perpendiculaires chacune à ce même plan ; & par
N. 498. conséquent (n), elles sont aussi paralleles entr'elles. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

503. *Si deux angles dont les sommets regardent le même côté, ont leurs côtés paralleles, chacun à chacun, ils seront égaux, quand même ils ne seroient point dans le même plan.*

Fig. 19. SI les côtés BA * & BC sont paralleles aux côtés ED & EF, chacun à chacun, les angles ABC & DEF seront égaux, quand même ils seroient dans des plans différens.

Const. Prenez à volonté sur les côtés des angles proposés, des parties égales BA & ED, BC & EF. Tirez ensuite, des points A, B & C, aux points D, E & F, des lignes droites AD, BE & CF, & des points A & D aux points

Digitized by Google

C & F, des lignes droites AC & DF.

Démonst. Puisque dans le quadrilatere AE, les côtés BA & ED sont égaux [c] & paralleles [H], le côté AD est (n) égal N. 142. & parallele au côté BE. Mais (n), le côté N. 142. CF est aussi égal & parallele au même côté BE; puisque dans le quadrilatere CE, les côtés BC & EF sont aussi égaux [c] & paralleles [H]. Donc (n), les côtés AD & CF du quadrilatere CD sont N. 622. & 142. égaux & paralleles; & par conséquent (n), le côté AC est égal au côté DF. N. 142.

Ainsi, dans les triangles ABC & DEF, le côté BA est égal au côté ED [c], le côté BC au côté EF [c], & le côté AC au côté DF [D]. Donc (n), l'angle ABC N. 90. est égal à l'angle DEF; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

504. *D'un point donné hors d'un plan, abaisser une perpendiculaire à ce plan.*

Fig. 20. IL faut abaisser du point A *, une perpendiculaire au plan X.

Const. Tirez à volonté dans le plan X, une ligne droite BC. Abaissez du point
N. 97. A (n), une perpendiculaire AD à cette ligne. Du point D, élevez dans le même
N. 96. plan (n), une perpendiculaire DE à cette
N. 97. même ligne. Enfin (n), abaissez du point A, une perpendiculaire AE à la ligne DE; & elle sera la perpendiculaire demandée.

Pour la démonstration. Tirez par le
N. 133. point E (n), une parallele FG à la ligne BC.

Démonst. La ligne BC est perpendi-
N. 496. culaire au plan du triangle ADE (n), puisque [c] elle l'est & à la ligne AD, & à la ligne DE. Ainsi, puisque [c] la ligne FG est parallele à cette ligne BC,
N. 501. elle est aussi (n) perpendiculaire au même
N. 458. plan; & par conséquent (n), la ligne AE

Digitized by Google

est perpendiculaire à cette ligne FG. Mais [c], la même ligne AE est aussi perpendiculaire à la ligne DE. Donc (n), N. 496. elle l'est au plan X; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

505. *D'un point donné dans un plan, élever une perpendiculaire à ce plan.*

IL faut élever du point A *, une perpendiculaire au plan X. Fig. 211.

Const. Du point B, pris à volonté hors du plan X, abaissez (n) une perpendiculaire BC à ce plan. N. 504. Tirez ensuite par le point A (n), une parallele AD à cette ligne BC, & elle sera la perpendiculaire demandée. N. 133.

Démonst. La ligne BC est perpendiculaire au plan X [c]. Ainsi, puisque [c] la ligne AD est parallele à cette ligne BC; elle est aussi (n) perpendiculaire au même plan; & par conséquent, C. Q. F. E. N. 501.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

506. *D'un même point, on ne peut ni élever, ni abaisser, plus d'une perpendiculaire au même plan.*

Fig. 22. ON ne peut du point A *, élever plus d'une perpendiculaire au plan X, ni du point B, lui en abaisser plus d'une.

Démonst. Les lignes droites qui sont perpendiculaires chacune au même plan, N. 498. sont paralleles (n). Ainsi (n), elles n'ont N. 56. aucun point commun; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

507. Il suit de ce théorême, que *si deux plans sont perpendiculaires, toute ligne droite qui sera tirée d'un point quelconque de l'un de ces plans, perpendiculairement à l'autre, passera par leur commune section.*

Fig. 23. Si le plan Y * est perpendiculaire au plan X, toute perpendiculaire à ce der-

nier

nier plan, qui sera tirée d'un point quelconque A du premier, passera par leur commune section CD.

Const. Abaissez du point A (n), une perpendiculaire AB à la commune section CD. N. 373

Démonst. La ligne AB est dans le plan Y, puisque [c] ses points A & B y sont. Ainsi, puisque [c] elle est perpendiculaire à la commune section CD, elle l'est aussi au plan X (n). Or, cette ligne, qui (n) est la seule perpendiculaire à ce plan, que l'on puisse tirer du point A, passe par la commune section CD. Donc, toute ligne droite qui étant tirée du même point ne passera pas par cette commune section, ne sera point perpendiculaire à ce plan; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 466 N. 506

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

508. *Si une même ligne droite est perpendiculaire à deux plans, ces plans seront paralleles.*

SI la ligne droite AB * est perpendiculaire & au plan AD, & au plan BC, ces plans seront paralleles. Fig. 26

Digitized by Google

Conſt. Du point D, pris à volonté dans
N. 133. le plan AD, tirez (n) une parallele DC à la ligne AB. Tirez enſuite, des points A & B aux points D & C, des lignes droites AD & BC.

Démonſt. Les lignes AD & BC ſont
N. 500. chacune dans le même plan (n); puiſque [c] elles rencontrent les lignes AB & DC qui ſont paralleles [c]. Ainſi, puiſ-
N. 458. que (n) elles ſont perpendiculaires chacune à la même ligne AB, elles ſont auſſi
N. 129. paralleles (n). Donc, le quadrilatere AC eſt un parallélogramme; & par con-
N. 143. ſéquent (n), le point D eſt auſſi éloigné du point C, que le point A l'eſt du point B. Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point du plan AD que l'on prenne le point D. Donc, tous les points de ce plan ſont également éloignés de tous les points correſpondans
N. 463. du plan BC; & par conſéquent (n), ces deux plans ſont paralleles. Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

509. *Si deux angles qui sont dans des plans différens, ont leurs côtés paralleles, chacun à chacun, ces plans seront aussi paralleles.*

SI les côtés BA * & BC, ED & EF des angles ABC & DEF, qui sont l'un dans le plan X & l'autre dans le plan Y, sont paralleles chacun à chacun, ces plans seront aussi paralleles. Fig. 251

Const. Abaissez du point B (n), une perpendiculaire BG au plan Y. Tirez ensuite (n), du point G auquel cette perpendieulaire rencontre ce plan, une parallele GI au côté EF; & une parallele GH au côté ED. N. 504. N. 133.

Démonst. Les lignes BC & GI sont paralleles entr'elles (n); puisqu'elles le sont l'une [H] & l'autre [C] à la même ligne EF: & par une raison pareille, les lignes BA & GH sont aussi paralleles. Ainsi (n), la ligne BG est perpendiculaire à la ligne BC, puisque (n) elle l'est à la ligne GI; & à la ligne BA, puisque N. 502. N. 138. N. 458.

N. 458. (n) elle l'est à la ligne GH ; & par conséquent (n), elle est aussi perpendiculaire au plan X. Or, puisque la ligne BG, qui [c] est perpendiculaire au plan Y, l'est aussi au plan X [D], ces deux plans sont paralleles (n) ; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 496.

N. 508.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

510. *Si deux plans qui sont coupés par un troisieme, sont paralleles, leurs communes sections seront aussi paralleles.*

Fig. 26. SI les plans X * & Y, qui sont coupés par le plan Z, sont paralleles, leurs communes sections AB & CD seront aussi paralleles.

Démonst. Lorsque des lignes droites qui sont chacune dans le même plan, ne sont point paralleles, elles se rencontrent, si on les prolonge autant qu'il est nécessaire. Or, les communes sections AB & CD sont des lignes droites (n), qui sont chacune dans le plan Z (n) : mais étant prolongées autant qu'on le voudra, elles ne se rencontreront point ; puisque

N. 495.

N. 457.

Digitized by Google

(n) elles sont aussi l'une dans le plan X, N. 457.
& l'autre dans le plan Y, qui (n) ne se N. 464.
rencontrent point. Donc, elles sont paralleles; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

511. *Si des plans qui coupent plusieurs lignes droites, sont paralleles, ces lignes seront coupées proportionnellement.*

SI les plans X *, Y & Z, qui coupent les lignes droites AB & CD, Fig 27.
sont paralleles, AE sera à EB, ce que CF est à FD.

Const. Tirez du point A au point D, une ligne droite CD.

Démonst. Dans le triangle BAD, la ligne EG est parallele au côté BD (n); N. 510.
puisque cette ligne & ce côté sont les communes sections des plans Y & Z, qui sont paralleles [H], & du plan BAD. Ainsi (n), AE. EB :: AC. GD. Or, on N. 412.
démontre par des raisons pareilles, que dans le triangle ADC, CF. FD :: AG. GD. Donc (n), AE. EB :: CF. FD; & N. 350.
par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

512. *Si une ligne droite est perpendiculaire à un plan, tous les plans dans lesquels cette perpendiculaire se trouvera, seront aussi perpendiculaires à ce même plan.*

Fig. 28. SI la ligne droite AB * qui est dans le plan Y, est perpendiculaire au plan X; le plan Y sera aussi perpendiculaire au plan X.

Const. Du point F, pris à volonté dans
N. 133. la commune section CD, tirez (n) une parallele EF à la ligne AB.

Démonst. Puisque [H] la ligne AB est perpendiculaire au plan X, la ligne EF qui lui est parallele [c], est aussi perpen-
N. 501. diculaire au même plan (n); & par con-
N. 458. séquent (n) à la commune section CD. Or, il en est de même de toutes les paralleles à la ligne AB que l'on peut tirer
N. 460. dans le plan Y. Donc (n), ce plan est perpendiculaire au plan X; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

513. *Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires chacun à un troisieme, leur commune section lui sera aussi perpendiculaire.*

SI les plans Y * & Z sont perpendiculaires chacun au plan X, leur commune section AB lui sera aussi perpendiculaire. Fig. 29.

Démonst. La commune section AB doit être en même tems dans le plan Y & dans le plan Z (n). Or, si elle inclinoit vers C, ou vers D, elle ne seroit point dans le plan Z; si elle inclinoit vers E, ou vers F, elle ne seroit point dans le plan Y; & si elle inclinoit vers tout autre côté, elle ne seroit dans aucun de ces plans. Donc, elle n'incline vers aucun côté; & par conséquent, elle est perpendiculaire. Donc, C. Q. F. D. N. 457.

Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

DES SOLIDES.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

514. *Si trois angles plans forment un angle solide, chacun de ces angles sera plus petit que la somme des deux autres.*

Fig. 30. LA somme de deux quelconques des trois angles plans BAC *, CAD & BAD, qui forment l'angle solide A (par exemple, celle des angles BAC & CAD) est plus grande que l'angle BAD.

Const. Sur le côté AB du plus grand
N. 120. des angles proposés, décrivez (n) un angle BAE qui ait le point A pour sommet, & soit égal à l'angle BAC. Prenez à volonté sur les côtés AC & AE, des parties égales AC & AE. Du point B, pris à volonté sur le côté AB, tirez au point C une ligne droite BC; & par

Digitized by Google

le point E, une ligne droite BED. Enfin, tirez aussi du point C au point D, une ligne droite CD.

Démonst. Les triangles BAC & BAE ont [c] l'angle BAC égal à l'angle BAE, le côté AC au côté AE, & le côté AB commun. Donc (n), le côté BC est égal au côté BE; & par conséquent, puisque (n) dans le triangle BCD, la somme des côtés BC & CD est plus grande que le côté BED, si de cette somme on retranche le côté BC, & de ce côté le côté BE, le reste CD de cette somme sera plus grand que le reste ED de ce côté. Ainsi, dans les triangles CAD & EAD, le côté AC est égal au côté AE [c], & le côté AD est commun; mais le côté CD est plus grand que le côté ED. Donc (n), l'angle CAD est aussi plus grand que l'angle EAD; & par conséquent, puisque les angles BAC & BAE sont égaux [c], la somme des angles BAC & CAD est plus grande que l'angle BAD, qui est celle des angles BAE & EAD. Donc, C. Q. F. D.

N. 84.

N. 115.

N. 122.

Digitized by Google

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

515. *La somme de tous les angles plans qui forment un angle solide, est plus petite que celle de quatre angles droits.*

Fig. 31. LA somme des angles plans BAC *, CAD & BAD, qui forment l'angle solide A, est plus petite que celle de quatre angles droits.

Démonst. Dans le triangle BCD, la somme des angles BCD, CDB & CBD, est égale à celle de deux angles droits
N. 132. (n). Or (n), les angles ACB & ACD
N. 514. valent plus que l'angle BCD, puisque l'angle C est un angle solide : & par une raison pareille, les angles ADC & ADB valent plus que l'angle CDB ; & les angles ABC & ABD, plus que l'angle CBD. Donc, les six angles ACB, ACD, ADC, ADB, ABC & ABD, valent plus de deux angles droits. Mais
N. 132. (n), ces six mêmes angles ne valent que six angles droits, avec les angles BAC, CAD & BAD ; puisqu'avec ces trois

Digitized by Google

derniers, ils sont tous les angles des triangles BAC, CAD & BAD. Donc, ces trois derniers angles ne valent point quatre angles droits; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

516. Il suit de ce théorême, que *les seules figures régulieres dont les angles puissent former des angles solides, ne sont que les triangles équilatéraux, les quarrés & les pentagones.*

PROPOSITION XXIV. †

THÉORÊME.

517. *Si tous les plans qui terminent un solide sont paralleles, chacun à chacun, ils seront des parallélogrammes, dont les opposés seront égaux & semblables.*

SI tous les plans AC *, EG, ED, &c. qui terminent le solide X, sont paralleles, chacun à chacun, ils seront des Fig. 32.

† Nous supprimons les propositions 22 & 23, parce qu'elles sont inutiles.

Digitized by Google

parallélogrammes, dont les opposés AC & EG, ED & FC, &c. seront égaux & semblables.

Démonst. Les côtés AD & BC sont
N. 510. paralleles (n), puisqu'ils sont les communes sections des plans paralleles [H] AH & BG & du plan AC : & par une raison pareille, les côtés AB & DC sont aussi paralleles. Or, on démontre de la même maniere le parallélisme des côtés, dans les quadrilateres EG, ED,
N. 57. FC, &c. Ainsi (n), tous ces quadrilateres sont des parallélogrammes. Mais
N. 143. (n), puisque tous ces quadrilateres sont des parallélogrammes, 1°. les côtés AB & EF du quadrilatere EB sont égaux, & les côtés AD & EH du quadrilatere ED le sont aussi : d'ailleurs, les angles
N. 503. DAB & HEF sont égaux (n); puisque
N. 143. (n) leurs côtés AD & AB, EH & EF, sont paralleles chacun à chacun. Ainsi, les parallélogrammes AC & EG sont égaux & semblables. 2°. Par des raisons pareilles, les parallélogrammes ED & FC, EB & HC, sont aussi égaux & semblables. Par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XXVIII. †

THÉORÊME.

518. *Si un plan coupe diagonalement deux des plans opposés d'un parallelepipede, il divisera ce solide en deux parties, qui seront égales & semblables.*

DANS le parallelepipede X *, le planAG, qui coupe diagonalement les deux parallélogrammes opposés ED & FC, divise ce solide en deux parties égales & semblables EGA & DBH. Fig. 351

Démonst. Le plan EB est égal & semblable au plan HC, & le plan EG au plan AC; puisque dans les parallelepipedes, les plans opposés sont égaux & semblables (n). Or, le plan EAH est N. 517. aussi égal & semblable au plan DHA, & le plan FBG au plan CGB; puisque (n) les parallélogrammes sont divisés par N. 143. leurs diagonales, en deux parties égales & semblables. Donc (n), les solides N. 466. EGA & DBH, qui sont terminés par

† Nous supprimons les propositions 25, 26 & 27, parce qu'elles sont inutiles.

Digitized by Google

ces plans & par un plan commun AG, sont égaux & semblables ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

519. *Les parallelepipedes qui sont sur une même base, & entre mêmes plans paralleles, sont égaux.*

Fig. 34. & 35. LES parallelepipedes X * & Y, qui sont sur la même base BD, & entre les mêmes plans paralleles AC & EOL, sont égaux.

Les côtés EF & IK sont chacun dans la même ligne droite ; ou ils n'y sont point.

PREMIER CAS.

Fig. 34. *Lorsque les côtés EF * & IK sont chacun dans la même ligne droite EK.*

Démonst. Le plan AH est égal & semblable au plan DG, & le plan AM au plan DL ; puisque dans les parallelepipedes, les plans opposés sont égaux & sem-
N. 517. blables (n). Le plan HI est aussi égal &

ſemblable au plan GK ; puiſque (n) les N. 517.
plans EG & IL ſont égaux & ſemblables l'un & l'autre au plan BD. Enfin, par une démonſtration pareille à celle du n°. 147, le plan AEI eſt égal & ſemblable au plan DFK ; & le plan BHM au plan CGL. Donc (n), les ſolides AME N. 466.
& DLF qui ſont terminés par ces plans, ſont égaux ; & par conſéquent, ſi l'on retranche de chacun le même ſolide NMF qui leur eſt commun, les reſtes, qui ſeront les ſolides AOE & DOK, ſeront auſſi égaux (n). Mais, puiſque ces ſoli- N. 64.
des ſont égaux, ſi l'on ajoute à chacun le même ſolide DBN, les ſommes ſeront égales (n). Or, ces ſommes ſeront les N. 63.
parallelepipedes X & Y. Donc, ces parallelepipedes ſont égaux.

SECOND CAS.

*Lorſque les côtés AF * & IK ne ſont* Fig. 35.
point chacun dans la même ligne droite.

Conſt. Prolongez les côtés EF, HG, MI & LK, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent à des points N, O, P & Q. Tirez enſuite, des points A, B, C & D, aux points N, O, P & Q, des lignes droites AN, BO, CP & DQ.

Démonſt. Le plan QO eſt [c] égal

ſemblable, & parallele au plan DB;
N. 490. ainſi (n), le ſolide DBOQ eſt un parallelepipede. Or, ce parallelepipede & le parallelepipede X ſont égaux [D]; puiſque [C] ils ſont ſur la même baſe BD & entre les mêmes plans paralleles AC & EOL, & qu'ils ont leurs côtés NO & EF dans la même ligne droite EO: & ce même parallelepipede & le parallelepipede Y ſont auſſi égaux [D]; puiſque [C] ils ſont auſſi ſur la même baſe BD & entre les mêmes plans paralleles AC & EOL, & que leurs côtés NQ & IM ſont auſſi dans la même ligne
N. 62. droite NM. Donc (n), les parallelepipedes X & Y ſont égaux.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

520. Il ſuit de ce théorême, que *les parallelepipedes qui ſont ſur des baſes égales, & entre mêmes plans paralleles, ſont égaux.*

SCHOLIE.

521. *Comme le meſurage des ſolides dépend primitivement de celui des parallelepipedes rectangles, nous allons enſeigner*

Digitized by Google

enseigner la maniere de mesurer ces figures, conformément à ce que nous avons promis au n°. 149.

Mesurer un solide, c'est (n) *considérer* N. 148.
combien de fois il contient un certain cube que l'on prend pour mesure. Ainsi, pour savoir mesurer un parallelepipede rectangle, il s'agit de savoir déterminer la maniere dont il contient le cube que l'on veut prendre pour mesure.

Or, il est évident que si le parallélogramme AC, qui est l'une des faces* Fig. 36.
d'un parallelepipede rectangle quelconque DL que l'on se propose de mesurer, contient, par exemple, 4 quarrés AF, HG, &c. égaux chacun à la base st *du cube M (que nous supposons être la mesure dont on veut se servir) ce parallelepipede pourroit être divisé en quatre autres EK, FL, &c. qui auroient chacun une base AF, HG, FD, &c. égale à cette base* st. *Et si la hauteur AI contient, par exemple, 3 fois la hauteur* su *de cette mesure M, il est encore évident que chacun des parallelepipedes EK, FL, &c. pourroit être subdivisé en trois autres, qui auroient aussi la même hauteur que cette même mesure M. Ainsi, tout le parallelepipede rectangle DL pourroit être divisé*

Digitized by Google

en 4 fois 3, ou 12 solides égaux chacun à la mesure M, & contient par conséquent 12 parties égales chacune à cette mesure.

D'où l'on conclut cette regle générale du mesurage des parallelepipedes rectangles.

522. La solidité † d'un parallelepipede rectangle est égale au produit du nombre des mesures quarrées qui sont contenues dans sa base, multiplié par le nombre des mesures courantes qui se trouvent dans sa hauteur : *ou, pour nous servir de l'expression ordinaire*, un parallelepipede rectangle est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur.

Et cette regle convient également à un
Fig. 37. *parallelepipede incliné quelconque X* *.
N. 519. *Car, puisque* (n) *ce parallelepipede incliné est égal à un parallelepipede rectangle Y qui seroit sur une même base AB que lui, & entre mêmes plans paralleles AB & GH, on aura également la solidité du parallelepipede incliné X, comme celle du parallelepipede rectangle Y, en multipliant la base AB par la hauteur EF. Or, c'est la même chose de multiplier cette base par la hauteur EF, ou de la multiplier par la hauteur CD, puisque*

† La solidité se nomme aussi le *volume*,

Digitized by Google

les plans AB & GH étant paralleles, ces hauteurs sont égales.

PROPOSITION XXXII. ¶

THÉORÊME.

523. *Les parallelepipedes dont les hauteurs sont égales, sont entr'eux comme leurs bases.*

SI les hauteurs des parallelepipedes AL * & MX sont égales, le parallelepipede AL sera au parallelepipede MX, ce que le parallélogramme AC est au parallélogramme MO. Fig. 38.

Const. Divisez la plus petite AC des deux bases AG & MO, en tel nombre de parallélogrammes égaux qu'il vous plaira; par exemple, en trois parallélogrammes égaux AF, EH & GC. Décrivez ensuite sur le côté MR (n), un parallélogramme MS qui soit égal au parallélogramme AF, & qui ait l'angle RMN pour l'un de ses angles. Enfin, N. 165.

¶ Nous supprimons les propositions 30 & 31, parce qu'elles sont inutiles.

Digitized by Google

faites passer par chaque ligne de division EF & GH, des plans EI & GK paralleles au plan BL; & par la ligne PS, un plan PT parallele au plan NX.

Démonst. Les parallelepipedes AI, EK, GL & MT, sont égaux (n); puisqu'ils ont des bases égales [c], & des hauteurs égales [H]. Ainsi, l'on démontrera que le parallelepipede AL est au parallelepipede MX, ce que la base AC est à la base MO, par un raisonnement tout pareil à celui dont on s'est servi au n°. 407, pour démontrer que les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, sont aussi entr'eux comme leurs bases. Par conséquent, C. Q. F. D.

N. 520.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

524. *Les parallelepipedes semblables sont entr'eux en rapport triplé de ceux de leurs côtés pareils.*

SI les parallelepipedes AD * & BM sont semblables, le rapport du premier au second, sera triplé de celui du côté AB au côté BC. Fig. 38.

Const. Disposez les parallelepipedes AD & BM, de maniere que les côtés BC & BG du plan supérieur BO, deviennent les prolongemens des côtés AB & FB du plan inférieur AF. Prolongez ensuite le parallelepipede AD, jusqu'à ce que les plans MC & CK soient un même plan MQN; & le parallelepipede BM, jusqu'à ce que les plans LH & HK soient aussi un même plan LHK.

Démonst. Le parallelepipede AD est au parallelepipede BK (n), ce que la base AF est à la base BN : la base AF est à la base BN (n), ce que le côté AB est au côté BC : le côté AB est au côté BC N. 523. N. 407.

N. 465. (n), ce que le côté FB est au côté BG †:
N. 407. le côté FB est au côté BG (n), ce que la base FC est à la base BO: enfin, la base
N. 523. FC est à la base BO (n), ce que le parallelepipede BK est au parallelepipede
N. 350. BL. Donc (n), le parallelepipede AD est au parallelepipede BK, ce que le même parallelepipede BK est au parallepipede
N. 334. BL; & par conséquent (n), ces trois parallelepipedes sont en proportion continue.

Pareillement, le parallelepipede BK
N. 523. est au parallelepipede BL (n), ce que la base FC est à la base BO: la base FC est
N. 407. à la base BO (n), ce que le côté FB est au côté BG: le côté FB est au côté BG
N. 465. (n), ce que le côté HB est au côté BI: le
N. 407. côté HB est au côté BI (n), ce que la base HC est à la base BP: enfin, la base
N. 523. HC est à la base BP (n), ce que le parallelepipede BL est au parallelepipede BM.
N. 350. Donc (n), le parallelepipede BK est au parallelepipede BL, ce que le même parallelepipede BL est au parallelepipede
N. 334. BM; & par conséquent (n), ces trois derniers parallelepipedes sont aussi en proportion continue.

† Les côtés pareils des solides semblables sont proportionnels, puisque les solides ne sont semblables, que parce que les plans qui les terminent le sont aussi.

Digitized by Google

Ainsi, les quatre parallelepipedes AD, BK, BL & BM, sont en proportion continue ; & par conséquent (n), le rapport du premier au dernier est triplé de celui du premier au second. Mais (n), le rapport du premier au second est le même que celui de la base AF à la base BN ; & par conséquent (n), le même que celui du côté AB au côté BC. Donc (n), le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede BM, est triplé de celui du côté AB au côté BC ; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 348.
N. 523.
N. 407.
N. 62.

COROLLAIRE.

525. Il suit de ce théorême, & du n°. 348, que *si quatre lignes droites sont en proportion continue, un parallelepipede quelconque décrit sur la premiere, sera à un parallelepipede semblable, & semblablement posé sur la seconde, ce que cette premiere ligne est à la quatrieme.*

Digitized by Google

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÊME.

526. *Dans les parallelepipedes, si les solidités sont égales, les bases & les hauteurs seront réciproquement proportionnelles: & si les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, les solidités seront égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 40. SI les parallelepipedes Y * & X sont égaux, la base CD sera à la base AB, ce que la hauteur AE est à la hauteur CG.

Const. Prenez sur la hauteur CG, une partie CF égale à la hauteur AE. Faites ensuite passer par le point F, un plan FH parallele à la base CD.

Démonst. La base CD est à la base AB
N. 523. (n), ce que le solide CH est au solide X, ou [H] Y: le solide CH est au solide Y
N. 523. (n), ce que la base CI est à la base CK:
N. 407. enfin (n), la base CI est à la base CK, ce que la hauteur CF, ou [c] AE, est
N. 350. à la hauteur CG. Donc (n), la base CD est à la base AB, ce que la hau-

teur

teur AE est à la hauteur CG; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si dans les parallelepipedes Y * & X, la base CD est à la base AB, ce que la hauteur AE est à la hauteur CG, ces parallelepipedes seront égaux. Fig. 461

Const. La même que la précédente.

Démonst. Le solide CH est au solide X (n), ce que la base CD est à la base AB : la base CD est à la base AB [H], ce que la hauteur AE, ou [C] CF, est à la hauteur CG : la hauteur CF est à la hauteur CG (n), ce que la base CI est à la base CK : enfin (n), la base CI est à la base CK, ce que le solide CH est au solide Y. Donc (n), le solide CH est au solide X, ce que le même solide CH est au solide Y; & par conséquent (n), les solides Y & X sont égaux. Donc, C. Q. F. 2°. D. N. 525. N. 407. N. 523. N. 350. N. 356.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXVI. †

THÉORÊME.

527. *Si trois lignes droites sont en proportion continue, deux parallelepipedes équiangles qui seront décrits, l'un avec ces trois lignes, & l'autre avec la moyenne, seront égaux.*

Fig. 41. SI dans les parallelepipedes X * & Y qui sont équiangles, le côté AC est moyen proportionnel entre les côtés AB & AD, & si les côtés EG, EF & EH, sont égaux chacun au côté AC, ces parallelepipedes seront égaux.

N. 97. *Const.* Abaissez du point C (n), une perpendiculaire CI au côté AB; & du point G, une perpendiculaire GK au côté EF.

Démonst. Puisque [H] les parallélogrammes BD & FH sont équiangles, le
N. 444. premier est au second (n), ce que le produit du côté AB, multiplié par le côté AD, est à celui du côté EF multiplié

† Nous supprimons la proposition 35, parce qu'elle est inutile.

par le côté EH. Or (n), ces produits N. 363.
sont égaux; puisque [H], AB. EF :: EH. AD. Donc, ces parallélogrammes le sont aussi. Mais (n), les perpendiculaires CI N. 125.
& GK sont aussi égales; puisque dans les triangles ACI & EGK, qui [C] sont rectangles l'un en I, & l'autre en K, le côté AC est égal au côté EG [H], & l'angle CAB à l'angle GEF [H]. Donc, les solides X & Y ont des bases égales, & des hauteurs égales; & par conséquent (n), ils sont égaux. Donc, C. Q. N. 520.
F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

528. *Si quatre lignes droites sont proportionnelles, les parallelepipedes semblables, & semblablement posés sur les deux premieres, seront proportionnels aux parallelepipedes semblables, & semblablement posés sur les deux dernieres : & si deux parallelepipedes semblables sont proportionnels à deux autres parallelepipedes aussi semblables, les côtés pareils des premiers seront proportionnels aux côtés pareils des derniers.*

PREMIEREMENT.

Fig. 42. SI AB *. CD :: EF. GH, les parallelepipedes V & X, qui sont semblables, & semblablement posés sur les deux premieres, seront proportionnels aux parallelepipedes Y & Z, qui sont aussi semblables, & semblablement posés sur les deux dernieres.

Démonst. La même que celle de la premiere partie du n°. 442, en y subs-

Digitized by Google

tituant les noms de *parallelepipede* & de *rapport triplé*, à ceux de *polygone* & de *rapport doublé*.

SECONDEMENT.

Si les parallelepipedes V * & X qui sont semblables, sont proportionnels aux parallelepipedes Y & Z qui sont aussi semblables, les côtés, par exemple, AB & CD des deux premiers, seront proportionnels aux côtés EF & GH des deux derniers. Fig. 42.

Démonst. La même que celle de la seconde partie du n°. 442, en y substituant le nom de *parallelepipede*, à celui de *polygone*.

SCHOLIE.

529. *Tout ce que nous démontrons des parallelepipedes, depuis la proposition 519 inclusivement, convient pareillement aux prismes triangulaires; parce qu'un prisme triangulaire quelconque FDA *, peut toujours être considéré comme étant la moitié d'un parallelepipede EN, coupé diagonalement par un plan CF. Or, puisque ce que nous disons des parallelepipedes convient pareillement à tous les* Fig. 43.

Digitized by Google

prismes triangulaires, il convient aussi à tous les prismes en général; puisqu'il n'y a point de prisme, quel qu'il soit, qui ne puisse être divisé en prismes triangulaires; par la même raison qu'il n'y a point de polygone qui ne puisse être divisé en triangles.

PROPOSITION XL. †

THÉORÊME.

530. *Si deux prismes triangulaires qui ont pour bases, l'un un triangle, & l'autre un parallélogramme double de ce triangle, ont des hauteurs égales, ils seront égaux.*

Fig. 43. DANS les prismes triangulaires FDA* & MKG, dont les hauteurs sont égales, si le triangle EDF, qui est la base du premier, n'est que la moitié du parallélogramme LI qui est celle du second, ces prismes seront égaux.

Démonst. Les prismes FDA & MKG
N. 518. sont (n) les moitiés, l'un du parallele-

† Nous avons fait de la trente-huitieme proposition, un corollaire de la treizieme, n°. 507: & nous supprimons la trente-neuvieme, parce qu'elle est inutile.

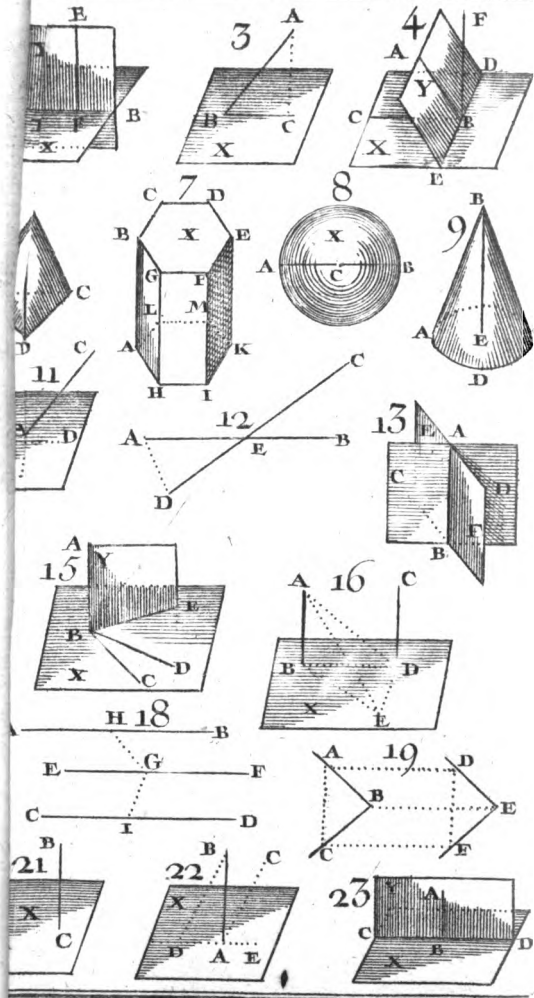
Digitized by Google

pipede EN, & l'autre du parallelepipede L O. Or (n), ces parallelepipedes ſont égaux, puiſqu'ils ont des hauteurs égales [H]; & que le triangle EDF n'étant [H] que la moitié du parallélogramme LI, les baſes EP & LI ſont auſſi égales. Donc (n), les priſmes FDA & MKG ſont égaux; & par conſéquent, C. Q. F. D. N. 520. N. 68.

Fin du onzieme Livre.

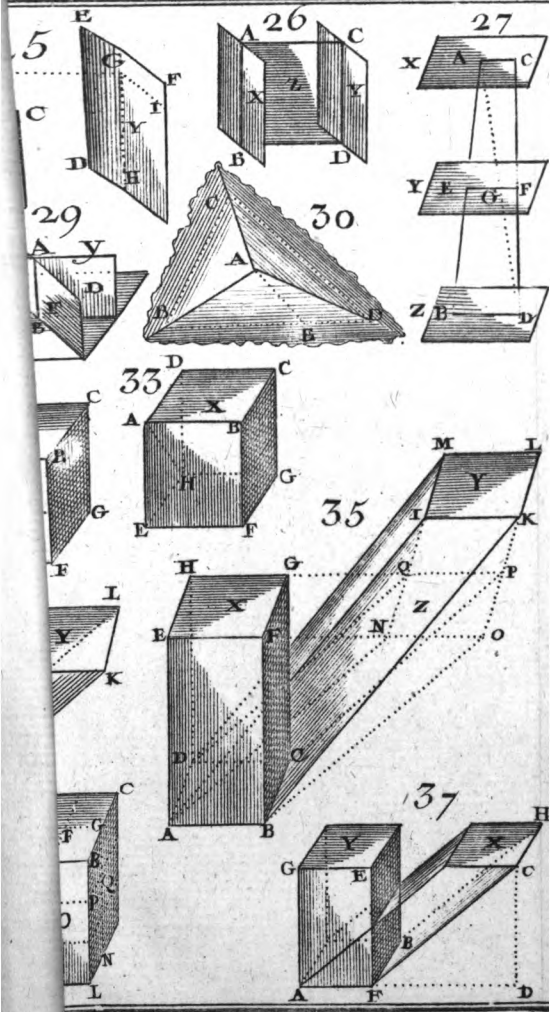
Digitized by Google

Digitized by Google



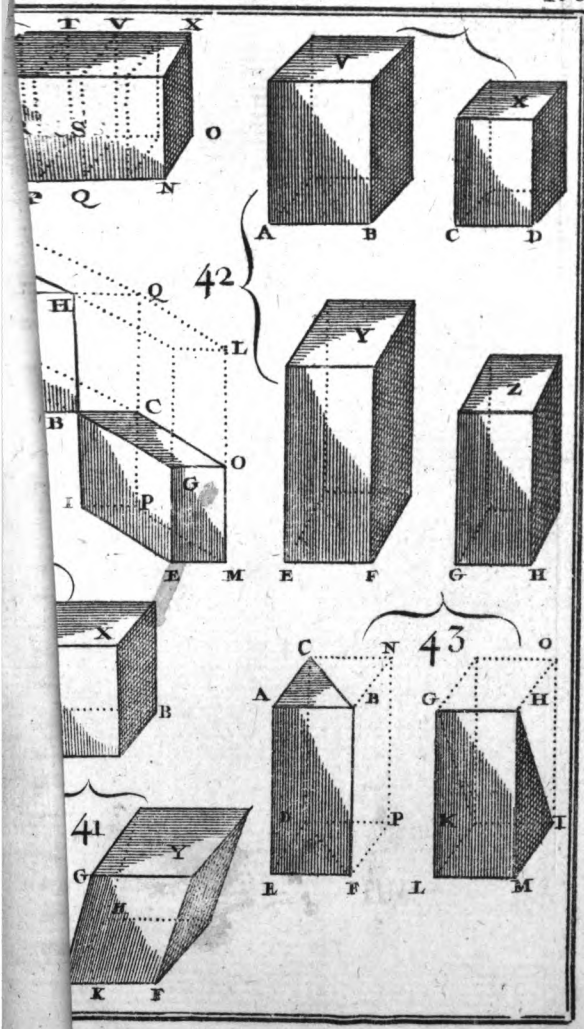
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE DOUZIEME.

CE Livre eſt le dernier de ceux des Elémens d'Euclide qui ſont néceſſaires. Les deux premieres propoſitions ſuivent ſi naturellement la vingt-deuxieme du ſixieme Livre, qu'il eſt ſurprenant qu'on ait pu les tranſporter ici. La troiſieme & la quatrieme deviennent inutiles, parce qu'elles ne ſervent qu'à démontrer la cinquieme; & nous le faiſons d'une maniere différente de celle d'Euclide. Ainſi, nous les ſupprimons, & nous mettons à leur place les deux ſeules du treizieme Livre qui ſoient utiles. Toutes les propoſitions qui ſuivent, depuis la cinquieme juſqu'à la quinzieme incluſivement,

Digitized by Google

considerent les pyramides, les cylindres & les cônes. Nous supprimons aussi la seizieme & la dix-septieme, qui ne sont d'aucun usage. Mais, comme Euclide ne parle, ni de la solidité de la sphere, ni de sa surface, nous substituons à ces deux propositions, notre démonstration de cette solidité, & celle des démonstrations ordinaires de cette surface, qui nous paroît la plus simple. Enfin, la dix-huitieme proposition, qui est la derniere de ce Livre, détermine les rapports que les spheres ont entr'elles.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

531. *Si des polygones qui sont inscrits dans des cercles, sont semblables, ils seront entr'eux comme les quarrés des diametres de ces cercles.*

Fig. 1. SI les polygones ACE * & FHK, qui sont inscrits, l'un dans le cercle X, & l'autre dans le cercle Y, sont semblables, ils seront entr'eux ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM.

Digitized by Google

Conſt. Tirez des points B & L aux points D & C, des lignes droites BD & LC; & des points G & M aux points I & H, des lignes droites GI & MH.

Démonſt. Puiſque [H] les polygones ACE & FHK ſont ſemblables, l'angle BCD eſt égal à l'angle GHI (n), & les côtés BC & CD ſont proportionnels aux côtés GH & HI (n). Ainſi (n), les triangles BCD & GHI ſont équiangles; & par conſéquent, l'angle BDC eſt égal à l'angle GIH. Mais, puiſque ces deux angles ſont égaux, l'angle BLC qui (n) eſt égal au premier, & l'angle GMH qui (n) l'eſt au ſecond, ſont auſſi égaux (n). Donc, puiſque (n) les triangles BCL & GHM ſont rectangles, l'un en C, & l'autre en H, ils ſont auſſi équiangles (n); & par conſéquent (n), les quatre lignes BC, GH, BL & GM, ſont proportionnelles. Or [H], les polygones ACE & GHK ſont des figures ſemblables, & ſemblablement poſées ſur les deux premieres; & (n) les quarrés des diametres BL & GM ſont auſſi des figures ſemblables, & ſemblablement poſées ſur les deux dernieres. Donc (n), ces deux polygones ſont entr'eux comme ces deux quarrés; & par conſéquent, C. Q. F. D.

N. 402. N. 402. N. 417. N. 250. N. 250. N. 62. N. 263. N. 137. N. 414. N. 402. N. 440.

Digitized by Google

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

532. *Les cercles sont entr'eux, comme les quarrés de leurs diametres.*

Fig. 1. LE cercle X * est au cercle Y, ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM.

N. 410. *Démonst.* On peut (n) supposer dans le cercle X, un polygone régulier, d'un si grand nombre de côtés, que sa différence à ce cercle soit absolument insensible, & s'en imaginer aussi un pareil dans le cercle Y. Or, puisque [s] ces polygones seront semblables, ils seront
N. 531. entr'eux (n) ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM. Donc, puisque [s] les cercles X & Y ne different point de ces mêmes polygones, ils sont aussi entr'eux, ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM; & par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

533. Il suit de ce théorême, que *les cercles sont entr'eux comme les polygones semblables qui y sont inscrits.*

---

*PROPOSITION III.

THÉORÊME.

534. *Si une ligne droite est composée des côtés d'un exagone & d'un décagone, réguliers l'un & l'autre, & inscrits chacun dans le même cercle, elle sera divisée en moyenne & extrême raison.*

SI les parties EF * & DE de la ligne droite DF sont les côtés d'un exagone & d'un décagone, réguliers l'un & l'autre, & inscrits chacun dans le même cercle, cette ligne sera divisée en moyenne & extrême raison au point E. Fig. 1.

Const. Des points D & E, pris pour centres, & avec un rayon égal à la partie EF, décrivez deux arcs qui se coupent à un point G. De ce point, pris pour

Digitized by Google

centre, & avec le même rayon, décrivez un cercle EDC. Enfin, tirez du même centre G aux points D, E & F, des lignes droites GD, GE & GF.

Démonst. L'angle EGD est de 36
N. 37. degrés, puisque (n) il a pour mesure l'arc DE, qui [H] est la dixieme partie
N. 86. de la circonférence. Ainsi (n), puisque [c] le triangle DGE est isoscele, l'an-
N. 135. gle GED est de 72 degrés. Mais (n), cet angle qui est extérieur au triangle GEF, est double de l'angle F; puisque [c] ce triangle est aussi isoscele. Donc, l'angle F est aussi de 36 degrés; & par conséquent, puisque l'angle D est commun aux triangles GFD & DGE, ces
N. 137. deux triangles sont équiangles (n). Or
N. 414. (n), puisque ces deux triangles sont équiangles, DF. DG :: DG. DE. Donc
N. 61. (n) puisque [c] EF est égal à DG; DF.
N. 404. EF :: EF. DE; & par conséquent (n), C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

535. Il suit de ce théorême, que *si une ligne droite est divisée en moyenne & extrême raison, les deux segmens seront les côtés d'un exagone & d'un déca-*

Digitized by Google

gone, réguliers l'un & l'autre, & inscrits chacun dans le même cercle.

---

*PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

536. *Le quarré du côté du pentagone régulier qui est inscrit dans un cercle, est égal à la somme des quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient aussi inscrits chacun dans le même cercle.*

LE quarré du côté AB * du pentagone régulier ACE, qui est inscrit dans le cercle G, est égal aux quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient aussi inscrits chacun dans le même cercle. Fig. 1 N.

Const. Divisez (n) l'arc AFB, en deux parties égales AF & FB; & l'arc FHB, aussi en deux parties égales FH & HB. Tirez ensuite, du centre G aux points A, F, H & B, des lignes droites GA, GF, GH & GB; & du point F aux points A, I & B, des lignes droites FA, FI & FB. N. 261.

Digitized by Google

Démonst. L'angle AGB est de 72 de-
N. 37. grés, puisque (n) il a pour mesure l'arc AFB, qui [H] est la cinquieme partie de
N. 86. la circonférence. Ainsi (n), puisque [c] le triangle AGB est isoscele, l'angle GBA est de 54 degrés. Or, l'angle AGH est aussi
N. 37. de 54 degrés, puisque (n) il a aussi pour mesure l'arc AFH, qui [c] est les trois quarts de l'arc AFB. Donc, puisque l'angle GAB est commun aux triangles AGB & AIG, ces deux triangles sont équian-
N. 137. gles (n). Ainsi (n), AB. AG :: AG. AI;
N. 414. & par conséquent (n), le rectangle de
N. 433. AB & de AI est égal au quarré de AG.

Mais (n), l'angle GHF † est égal à
N. 83. l'angle GHB, & le côté HF au côté HB; puisque les arcs FH & HB étant égaux [c], les triangles HGF & HGB qui ont le côté GF égal au côté GB, & le côté GH commun, ont aussi (n) l'angle FGH égal à l'angle BGH.
N. 37. Ainsi, puisque le côté HI est commun aux triangles FHI & BHI, le côté FI est égal au côté BI (n); & par conséquent,
N. 83. le triangle FIB est isoscele. Or, le triangle AFB l'est aussi, puisque les côtés AF

† Le peu d'espace de la figure nous a obligés d'indiquer par une seule lettre H, & le milieu de l'arc FHB, & le point auquel le rayon GH coupe la corde FB.

&

Digitized by Google

& FB ſont égaux (n). Donc, puiſque N. 260.
l'angle ABF eſt commun à ces deux
triangles, ils ſont équiangles (n). Ainſi N. 137.
(n), AB. FB :: FB. IB; & par conſé- N 414.
quent (n), le rectangle de AB & de IB N. 433.
eſt égal au quarré de FB.

Donc, la ſomme des rectangles faits, l'un du côté AB & de la partie AI, & l'autre du même côté AB & de la partie IB, eſt égale à celle des quarrés des lignes AG & FB. Mais (n), cette premiere N. 182.
ſomme eſt la même choſe que le quarré du côté AB, puiſque les lignes AI & IB ſont toutes les parties de ce côté; & les lignes AG & FB ſont les côtés, l'une (n) de l'exagone régulier, & l'autre [c] N. 310.
du décagone régulier, qui ſeroient inſcrits chacun dans le cercle G. Donc, le quarré du côté AB eſt égal aux quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui ſeroient inſcrits chacun dans le cercle G; & par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

537. *On déduit de cette propoſition, & du corollaire qui la précede, une ſolution du problême ſuivant, qui eſt beaucoup plus ſimple que celle que nous en avons donnée au n°. 298.*

Digitized by Google

Inſcrire un pentagone régulier, dans
Fig 11. un cercle donné CFI. *

CONST. *Tirez un diametre CD, à vo-*
N. 96. *lonté. Elevez du centre E* (n), *une perpendiculaire EF à ce diametre. Diviſez*
N. 94. (n) *le rayon CE, en deux parties égales CG & GE. Tirez du point G au point F, une ligne droite GF. Prenez ſur le diametre CD, une partie GH égale à cette ligne GF. Enfin, tirez du point F au point H, une ligne droite FH; & cette ligne ſera égale au côté du pentagone demandé.*

DÉMONST. *La ligne CH eſt diviſée en deux parties CE & EH, &* [c] *le point*
N. 190. *G eſt le milieu de la partie CE. Ainſi* (n), *le rectangle des lignes CH & EH, avec le quarré de la partie GE, eſt égal au quarré de la ligne GH; & par conſéquent, à celui de la ligne GF; puiſque* [c] *les*
N. 171. *lignes GH & GF ſont égales. Mais* (n), *les quarrés des lignes GE & EF ſont auſſi égaux au quarré de la même ligne*
N. 62. *GF. Donc* (n), *le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne GE, eſt égal aux quarrés des lignes GE & EF; & par*
N. 64. *conſéquent* (n), *ce même rectangle eſt égal au quarré de la ligne EF; ou, ce*
N. 35. *qui eſt la même choſe* (n), *à celui de la ligne CE.*

Digitized by Google

Ainsi (n), *CH. CE* :: *CE. EH. Donc* N. 433.
(n), *la ligne CH est divisée en moyenne* N. 404.
& extrême raison au point E ; & par conséquent, puisque (n), *la partie CE est le* N. 310.
côté de l'exagone régulier inscrit dans le cercle CFI, la partie EH est (n) *celui du* N. 535.
décagone régulier inscrit dans le même cercle. Mais (n), *la ligne EF est aussi le* N. 310.
côté de ce même exagone. Donc, puisque (n) *le quarré de la ligne FH est égal aux* N. 171.
quarrés des lignes EF & EH, il est égal à ceux des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, inscrits chacun dans le cercle CFI ; & par conséquent (n), N. 536.
cette ligne est égale au côté du pentagone régulier inscrit aussi dans le même cercle. Donc, C. Q. F. F.

Digitized by Google

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

538. *Si deux pyramides qui ont le même point pour sommet, ont chacune pour base l'une des deux parties d'un même parallélogramme divisé par sa diagonale, elles seront égales.*

Fig. 3. LES pyramides AECB & AECD, qui ont le même point A pour sommet, & les parties ECB & ECD du même parallélogramme BD pour bases, sont égales.

Const. Prenez sur la ligne AB un point F, à volonté; & faites passer par ce point, un plan FH parallele à la base BD.

Démonst. Les plans FH & BD sont
N. 510. paralleles [c]. Ainsi (n), les lignes FG & BC qui sont les communes sections de ces plans & du plan BAC, sont paralleles; de même que les lignes IH & ED, qui sont aussi les communes sections de ces mêmes plans & du plan EAD. Mais, les lignes BC & ED sont encore paralleles; puisque [H] le quadrilatere BD est

Digitized by Google

un parallélogramme. Donc (n), les lignes FG & IH sont paralleles. N. 502

Or, on démontrera de la même maniere, que les lignes FI & GH sont aussi paralleles. Donc, le quadrilatere FH est aussi un parallélogramme; & par conséquent (n), les triangles IGF & IGH, qui sont les coupes des pyramides proposées, sont égaux. N. 143.

Mais, la même démonstration subsiste, par quelque endroit du solide ABD que l'on fasse passer le plan FH. Donc, à quelque endroit que l'on coupe les pyramides AECB & AECD par un plan parallele à leurs bases, les sections sont égales; & par conséquent, ces pyramides le sont aussi. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION VII. †

THÉORÊME.

539. *Tout prisme triangulaire peut être divisé en trois pyramides égales.*

LE prisme triangulaires ACE * peut être divisé en trois pyramides égales. Fig. 4

† Nous supprimons la sixieme proposition, pour en faire le quatrieme corollaire de la septieme, n°. 543.

Digitized by Google

Const. Faites passer par les points A, F & D, un plan AFD; & par les points B, F & D, un plan BFD.

Démonst. Les pyramides FABD & FAED ont le même point A pour sommet, & leurs bases sont les parties ABD & AED du même parallélogramme EB;
N. 538. ainsi, elles sont égales (n). Or, les pyramides FABD & FBCD sont aussi éga-
N. 538. les (n); puisqu'elles ont le même point D pour sommet, & que leurs bases sont les parties BAF & BCF du même parallélo-
N. 62. gramme AC. Donc (n), les trois pyramides FABD, FAED & FBCD, sont égales; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

540. Il suit de ce théorême, qu'*une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.*

Fig. 5. La pyramide ABCD * est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.

Const. Supposez sur la base BCD, un prisme BM, qui soit de même hauteur que la pyramide proposée.

Démonst. La pyramide ABCD est une des trois pyramides égales en lesquelles

Digitized by Google

on pourroit (n) diviser le prisme BM. N. 539.
Donc, elle est le tiers de ce prisme; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

541. Il suit de ce corollaire, qu'*une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.*

La pyramide, par exemple, EFHK *, Fig. 52
est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.

Const. Supposez sur la base FHK, un prisme FN qui soit de même hauteur que la pyramide proposée. Faites ensuite passer par les points G, L & Q, un plan LQ; par les points G, K & Q, un plan KQ; & par les points G, I & Q, un plan IQ. Faites aussi passer par les points E, G & L, un plan GEL; par les points E, G & K, un plan GEK; enfin, par les points E, G & I, un plan GEI.

Démonst. Les pyramides triangulaires ELGF, EKGL, EIGK & EIHG sont (n) les tiers des prismes triangulaires N. 540.
OLGF, RKGL, NIGK & QIHG, chacune de chacun. Donc, la pyramide EFHK, qui est la somme de toutes ces pyramides triangulaires, est aussi le tiers

du prisme FN, qui est la somme de tous ces prismes triangulaires; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

542. Il suit de ce second corollaire, & des n°. 521 & 529, que *la solidité d'une pyramide quelconque, est égale au produit de la base de cette pyramide, multipliée par le tiers de sa hauteur.*

COROLLAIRE IV.

543 Il suit encore de ce second corollaire, que *les pyramides qui ont des hauteurs égales, sont entr'elles comme leurs bases.*

Fig. 5. Si les hauteurs des pyramides ABCD* & EFHK sont égales, ces pyramides seront entr'elles ce que la base BCD est à la base FHK.

Const. Supposez sur les bases BCD & FHK, des prismes BM & FN qui soient de même hauteur que les pyramides proposées.

Démonst. Puisque [c] les prismes BM & FN ont des hauteurs égales, ils sont
N. 529. entr'eux (n) ce que la base BCD est à
N. 541. la base FHK. Or (n), les pyramides ABCD

ABCD & EFHK sont les tiers, l'une du prisme BM, & l'autre du prisme FN. Donc (n), elles sont aussi entr'elles ce que la base BCD est à la base FHK; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 352.

COROLLAIRE V.

544. Enfin, il suit de ce quatrieme corollaire, que *les pyramides qui ont des hauteurs égales, & des bases égales, sont aussi égales.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

545. *Les pyramides semblables sont entre elles en rapports triplés de ceux de leurs côtés pareils.*

SI les pyramides ABCD * & EFGH sont semblables, le rapport de la premiere à la seconde, sera triplé de celui du côté BC au côté FG. Fig. 6.

Const. Supposez sur la base BCD, un prisme quelconque BI, qui soit de même hauteur que la pyramide ABCD. Sup-

Digitized by Google

posez aussi sur la base FGH, un prisme FK semblable au prisme BI.

Démonst. Le côté BC est au côté FG
N. 402. (n), ce que la hauteur du prisme BI est à celle du prisme FK; puisque [c] ces
N. 402. prismes sont semblables. Mais (n), le côté BC est aussi au côté FG, ce que la hauteur de la pyramide ABCD est à celle de la pyramide EFGH; puisque [H] ces pyramides sont aussi semblables.
N. 350. Donc (n), la hauteur du prisme BI est à celle du prisme FK, ce que la hauteur de la pyramide ABCD est à celle de la pyramide EFGH; & par conséquent, puisque [c] la hauteur du prisme BI est la même que celle de la pyramide ABCD,
N. 369. la hauteur du prisme FK est aussi (n) la même que celle de la pyramide EFGH. Cela posé:

Puisque [c] les prismes BI & FK sont semblables, le rapport du premier au second, est triplé de celui du côté BC
N. 524. au côté FG (n). Or (n), le rapport de la
N. 359. pyramide ABCD à la pyramide EFGH, est le même que celui de ce premier
N. 541 prisme au second; puisque (n) ces pyramides sont les tiers de ces prismes, chacune de chacun. Donc, le rapport de la pyramide ABCD à la pyramide EFGH,

Digitized by Google

est aussi triplé de celui du côté BC au côté FG ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

546. *Dans les pyramides, si les solidités sont égales, les bases & les hauteurs seront réciproquement proportionnelles : & si les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, les solidités seront égales.*

PREMIEREMENT.

SI les pyramides ABCD * & EFGH sont égales, la base BCD de la premiere sera à la base FGH de la seconde, ce que la hauteur de la seconde est à celle de la premiere. Fig. 71

Const. Supposez sur les bases BCD & FGH, des prismes BI & FK qui aient les mêmes hauteurs que les pyramides proposées.

Démonst. Les prismes BI & FK sont triples (n), l'un de la pyramide ABCD, & l'autre de la pyramide EFGH. Donc, N. 542.

N. 67. ils sont égaux (n), puisque [H] ces pyramides sont égales; & par conséquent
N. 526. (n), la base BCD du premier est à la base FGH du second, ce que la hauteur du second est à celle du premier. Mais [c], ces bases & ces hauteurs sont les mêmes que celles des pyramides ABCD & EFGH. Donc, la base BCD de la pyramide ABCD est à la base FGH de la pyramide EFGH, ce que la hauteur de cette derniere pyramide est à celle de la premiere; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 7. Si dans les pyramides ABCD * & EFGH, la base BCD de la premiere est à la base FGH de la seconde, ce que la hauteur de la seconde est à celle de la premiere, ces pyramides seront égales.

Const. La même que la précédente.

Démonst. La base BCD du prisme BI est à la base FGH du prisme FK, ce que la hauteur de ce dernier prisme est à celle du premier; puisque [c] ces bases & ces hauteurs sont les mêmes que celles des pyramides ABCD & EFGH, qui

Digitized by Google

[H] sont réciproquement proportionnelles. Donc, ces prismes sont égaux (n); N. 526.
& par conséquent, puisque (n) les pyramides ABCD & EFGH sont les tiers de ces mêmes prismes, elles sont aussi égales (n). Donc, C. Q. F. D. N. 541. N. 68.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

547. *Un cône est le tiers d'un cylindre de même hauteur que lui, & de même base.*

LE cône ABC * est le tiers du cylindre AE, de même hauteur que lui & de même base. Fig. 8.

Démonst. Une pyramide est terminée par autant de triangles, & un prisme est terminé par autant de parallélogrammes; que le polygone qui sert de base à l'une ou à l'autre, a de côtés. Ainsi, si conformément à ce que nous avons dit au n°. 410, on considere le cercle AC comme étant un polygone d'un si grand nombre de côtés, que, même en rigueur, ce polygone ne differe point de ce cercle; alors, le cône ABC & le cylindre AE

Digitized by Google

deviendront, l'un une pyramide & l'autre un prisme, qui ayant l'une & l'autre autant de faces que ce même polygone auroit de côtés, ne différeront point non plus, l'une de ce même cône, ni l'au-
N. 541 tre de ce même cylindre. Mais (n) une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base. Donc, puisque [H] le cône ABC & le cylindre AE ont chacun & la même hauteur, & la même base, ce cône est aussi le tiers de ce cylindre; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

548. Il suit de ce théorême & de sa démonstration, que *la solidité d'un cylindre est égale au produit de la base de ce cylindre, multipliée par sa hauteur*; & par conséquent, que *la solidité d'un cône est égale au produit de la base de ce cône, multipliée par le tiers de sa hauteur.*

Digitized by Google

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

549. *Les cylindres qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases : & il en est de même des cônes, lorsqu'ils sont dans le même cas.*

DÉMONSTRATION.

SUIVANT ce que nous avons démontré dans la proposition précédente, les cylindres peuvent être pris pour de certains prismes, & les cônes, pour de certaines pyramides. Or (n), tous les prismes qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases ; & (n) toutes les pyramides qui ont des hauteurs égales, sont aussi de même entr'elles. Donc, lorsque les cylindres, ou les cônes, ont des hauteurs égales, ils sont aussi entr'eux comme leurs bases ; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 523.

N. 543.

Digitized by Google

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

550. *Les cylindres semblables sont entr'eux en rapports triplés de ceux de leurs côtés pareils*, (par exemple, *de ceux des diametres de leurs bases*) : *& il en est de même des cônes semblables.*

DÉMONSTRATION.

SUIVANT ce que nous avons dit dans la démonstration du n°. 547, les cylindres peuvent être pris pour de certains prismes, & les cônes, pour de
N. 524. certaines pyramides. Or (n), tous les prismes semblables sont entr'eux en rapports triplés de ceux de leurs côtés pa-
N. 545. reils; & (n) toutes les pyramides semblables le sont de même entr'elles. Donc, lorsque les cylindres, ou les cônes, sont semblables, ils sont aussi entr'eux en rapports triplés de ceux de leurs côtés pareils; & par conséquent, de ceux des diametres de leurs bases, puisque ces diametres sont des côtés pareils de ces solides. Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

551. *Si un cylindre est coupé par un plan parallele à sa base, les segmens du cylindre seront entr'eux comme les segmens de l'axe.*

SI le plan EF *, qui coupe le cylindre AC, est parallele à la base DC, les segmens AF & EC du cylindre, seront entr'eux comme les segmens HI & IG de l'axe HG. Fig. *

Const. Divisez le plus petit HI des deux segmens HI & IG, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira; par exemple, en deux parties égales HM & MI. Prenez ensuite sur le segment IG, une partie GK égale à la partie HM. Enfin, faites passer par les points M & K, des plans NO & PQ paralleles chacun à la base DC.

Démonst. Les segmens AO, NF & PC, sont égaux (n); puisque [c] ils ont des hauteurs égales HM, MI & GK, & des bases égales NO, EF & DC. Ainsi, l'on démontrera cette proposition, N. 549.

Digitized by Google

de la même maniere dont on a démontré la premiere du sixieme Livre, n°. 407. Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

552. *Les cylindres qui ont des bases égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs : & il en est de même des cônes, lorsqu'ils sont dans le même cas.*

PREMIEREMENT.

Fig. 10. SI les bases NO * & HG des cylindres NB & HF sont égales, ces cylindres seront entr'eux, ce que la hauteur KP du premier est à la hauteur ML du dernier.

Const. Prolongez le cylindre NB, jusqu'à ce que la hauteur PI, du prolongement NC, soit égale à la hauteur ML du cylindre HF.

Démonst. Les cylindres HF & NC
N. 549. sont égaux (n); puisque [c] ils ont des hauteurs égales ML & PI, & des bases
N. 551. égales HG & DC. Or (n), les cylindres NB & NC sont entr'eux ce que la hau-

Digitized by Google

teur KP est à la hauteur PI; puisque [c] ces cylindres sont les segmens du cylindre AC. Donc (n), les cylindres NB & HF sont aussi entr'eux, ce que la hauteur KP est à la hauteur PI, ou ML; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 51.

SECONDEMENT.

Si les bases NO * & HG des cônes NKO & HMG sont égales, ces cônes seront entr'eux, ce que la hauteur KP du premier est à la hauteur ML du dernier. Fig 10.

Const. Supposez sur les bases NO & HG, des cylindres NB & HF, qui aient les mêmes hauteurs que les cônes proposés.

Démonst. Les cylindres NB & HF sont entr'eux [D], ce que la hauteur KP est à la hauteur ML; puisque [H] les bases NO & HG sont égales. Or (n), les cônes NKO & HMG sont les tiers de ces cylindres, chacun de chacun. Donc (n), ils sont aussi entr'eux comme ces mêmes hauteurs; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D. N. 547. N. 359.

Digitized by Google

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

553. *Dans les cylindres, & de même dans les cônes, si les solidités sont égales, les bases & les hauteurs seront réciproquement proportionnelles : & si les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, les solidités seront égales.*

DÉMONSTRATION.

SUIVANT ce que nous avons dit dans la démonstration du n°. 547, les cylindres peuvent être pris pour de certains prismes ; & les cônes, pour de certaines pyramides. Ainsi, ce que nous avons démontré des prismes au n°. 526, & des pyramides au n°. 546, convient pareillement, l'un aux cylindres, & l'autre aux cônes. Par conséquent, C. Q. F. D.

Digitized by Google

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

§ 54. *Une demi-sphere est les deux tiers du cylindre dans lequel elle est inscrite.*

LA demi-sphere ALB * est les deux tiers du cylindre AK dans lequel elle est inscrite. Fig. 71.

Const. Faites passer par l'axe HL, un plan quelconque AIKB. Prenez ensuite sur ce même axe un point *n*, à volonté; & faites aussi passer par ce point, un plan Q*s*M parallele à la base IRK. Enfin, tirez du centre H, au point *o* auquel la commune section QM de ces plans rencontre la surface de la demi-sphere, & aux extrémités I & K de la commune section du plan AIKB & de la base IRK, des lignes droites H*o*, HI & HK.

Démonst. Le triangle *on*H est rectangle en *n* (n). Ainsi (n), le cercle qui auroit pour rayon la ligne H*o*, seroit égal aux cercles dont les lignes *no* & *n*H seroient les rayons. Mais (n), les N. 246. & 130. N. 449. N. 624

lignes *n*M & *Ho* sont égales ; puisque
N. 143. la même ligne HB est égale à l'une (n)
N. 474. & à l'autre (n) : & (n) les lignes *np* &
N. 414.
N. 137. *n*H sont aussi égales ; puisque (n) le triangle H*np* est équiangle au triangle
N. 61. isoscele HLK. Donc (n), le cercle qui a pour rayon la ligne *n*M, est égal aux cercles dont les lignes *no* & *np* sont les rayons ; & par conséquent, puisque ces trois cercles sont les coupes, l'un du cylindre AK, l'autre de la demi-sphere ALB, & le dernier, du cône IHK, la coupe de ce cylindre est égale à celles de cette demi-sphere & de ce cône.

Or, la même démonstration subsiste, par quelque endroit du cylindre AK que l'on fasse passer le plan Q*s*M. Donc, à quelque endroit que l'on coupe ce cylindre par un plan parallele à sa base, sa coupe est égale à celle de la demi-sphere ALB & du cône IHK. Ainsi, cette demi-sphere & ce cône valent ensemble ce cylindre ; & par conséquent,
N 537. puisque (n) ce même cône est le tiers de ce même cylindre, cette demi-sphere en est les deux tiers. Donc, C. Q. F. D.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

555. Il suit de ce théorême, qu'*une sphere est les deux tiers du cylindre dans lequel elle est inscrite.*

COROLLAIRE II.

556. Il suit de ce corollaire, que *la solidité d'une sphere, est égale au produit de l'un quelconque de ses grands cercles* †, *multiplié par les deux tiers de son diametre.*

† Dans la sphere, on nomme *grands cercles*, ceux qui passent par le centre.

Digitized by Google

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

557. *Chaque grand cercle d'une sphere, est égal au quart de la surface de cette même sphere.*

DÉMONSTRATION.

ON peut considérer une sphere comme étant divisée en un grand nombre de petits solides, qui auront chacun leur sommet au centre de cette sphere, & leur base dans sa surface. Or, si l'on suppose dans une même sphere un si grand nombre de ces solides, que la convexité de la base de chacun devienne absolument insensible, ils seront autant de petites pyramides qui auront chacune le rayon de cette sphere pour
N. 542. hauteur. Ainsi (n), pour avoir la solidité de chacun en particulier, il faudra multiplier sa base par le tiers de ce rayon; & par conséquent, pour avoir la solidité de tous ensemble, qui sera celle de la sphere même, il faudra multiplier par le

Digitized by Google

le tiers de ce même rayon, la somme de toutes les bases; c'est-à-dire, la surface même de la sphere.

Mais, puisque [D] l'on a la solidité d'une sphere, en multipliant sa surface par le tiers de son rayon, on aura aussi la même solidité, en multipliant le quart de cette même surface par le quadruple du tiers de ce même rayon; c'est-à-dire, par les deux tiers du diametre. Or (n), N. 556. on a encore la même solidité, en multipliant aussi l'un des grands cercles de cette même sphere par les deux tiers du même diametre. Donc, ce grand cercle, & le quart de la surface de la sphere, sont deux surfaces égales; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

558. Il suit de ce théorême, que *la surface d'une sphere, est quadruple de celle de l'un quelconque des grands cercles de cette même sphere.*

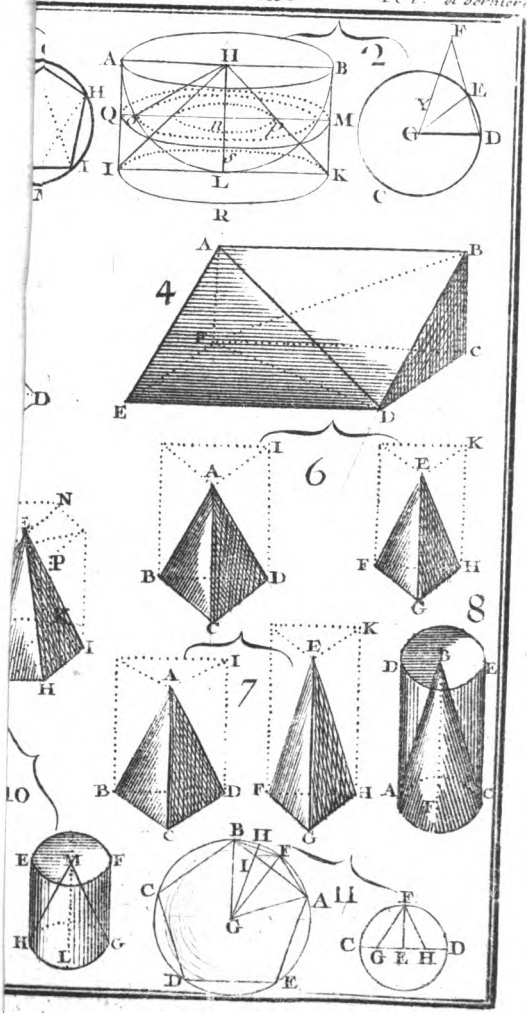
COROLLAIRE II.

559. Il suit de ce corollaire, que *la surface d'une sphere, est égale à celle du cylindre dans lequel cette même sphere est inscrite.*

Digitized by Google

Démonst. La surface d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de sa base, multipliée par sa hauteur.
N. 61. Ainsi, puisque (n) le cylindre dans lequel une sphere est inscrite, a l'un des grands cercles de cette sphere pour base, & le diametre de ce cercle pour hauteur; sa surface est égale au produit de la circonférence de l'un de ces grands cercles, multipliée par son diametre.
N. 410. Mais (n), la surface de ce grand cercle est égale au produit de cette même circonférence multipliée seulement par le quart de ce même diametre. Donc, la surface de ce cylindre est quadruple de celle de ce grand cercle; & par conséquent, puisque (n), la surface de la
N. 538. sphere en est aussi quadruple, la surface de ce cylindre & celle de cette sphere
N. 67. sont égales (n). DONC, C. Q. F. D.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

560. *Les spheres sont entr'elles en rapports triplés de ceux de leurs diametres.*

DÉMONSTRATION.

LEs spheres sont (n) les deux tiers des cylindres dans lesquels elles sont inscrites; ainsi (n), elles ont entr'elles les mêmes rapports que ces cylindres. Or (n), ces cylindres sont semblables; & par conséquent (n), ils sont entr'eux en rapports triplés de ceux de leurs axes. Donc, les spheres sont aussi entr'elles en rapports triplés de ceux des axes des cylindres dans lesquels elles sont inscrites; & par conséquent, puisque ces axes sont les diametres de ces mêmes spheres, elles sont entr'elles en rapports triplés de ceux de leurs diametres. Donc, C. Q. F. D.

N. 555. N. 359. N. 484. N. 550.

Fin des Elémens d'Euclide.

Digitized by Google

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, les Œuvres de M. Ozanam, contenant *le Dictionnaire, le Cours & les Récréations Mathématiques, un Traité d'Arpentage, la Géométrie-Pratique, l'Usage du Compas de proportion, la Méthode pour lever les Plans, & les Elémens d'Euclide.*

Les Ouvrages de M. Ozanam ayant servi jusqu'ici d'école à presque tous ceux qui se sont appliqués aux Mathématiques depuis qu'elles ont été regardées en Europe comme la base de toutes les Sciences; il y a apparence que cette nouvelle édition de ses Œuvres sera aussi bien reçue du Public que l'ont été les précédentes. A Paris, le 24 Février 1746.

BELIDOR.

Digitized by Google

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire à Paris, & ordinaire pour notre Artillerie & pour le Génie, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire réimprimer & donner au Public, des Livres qui ont pour titre : *Œuvres de Mathématique de feu M. Ozanam, de l'Académie des Sciences, Secrets des Arts & Métiers, le Teinturier parfait, l'Art de la Verrerie, l'Art de tourner, du Pere Plumier*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer lesdits Ouvrages en un ou plusieurs Volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *neuf* années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes : Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Livres, ni d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement ou autres, sans la permission

Digitized by Google

expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles, que la réimpression desdits Livres sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; qu'avant de les exposer en vente les Manuscrits & imprimés qui auront servi de copie à la réimpression desdits Livres, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier, le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement, ou à la fin desdits

Digitized by Google

Livres, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires: CAR tel est notre plaisir. Donné à Paris le vingt-deuxieme jour du mois d'Avril, l'an de grace mil sept cens quarante-six, & de notre regne le trente-unieme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 615, fol. 543. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1733. A Paris, le 5 Mai 1746.

VINCENT, *Syndic.*

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google