Sammelband ETH-BIB Rara

La géométrie

Descartes, René

A Paris, 1664

Persistenter Link: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4764

LA GEOMETRIE.

DE

RENÉ DESCARTES.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë ſaint Iacques,
au Lion d'or.

M. DC. LXIV.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des Problemes qu'on peut construire sans y employer que des Cercles & des Lignes droites.

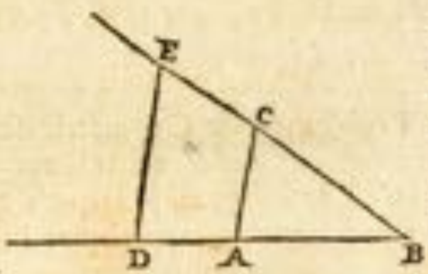
TOvs les Problemes de Geometrie se peuuent facilement reduire à tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision; Ainsi n'a-t-on autre chose a faire en Geometrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que de leur en ajoûter d'autres, ou en oster; Ou bien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriéme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; ou bien en trouuer vne quatriéme, qui soit a l'vne

Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

de ces deux, comme l'vnité eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion ; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne ; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, afin de me rendre plus intelligible.

La Multiplication.

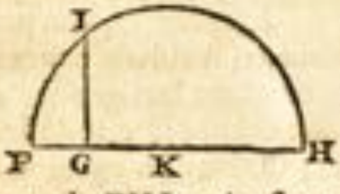


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE eſt le produit de cette Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a DE, & BC eſt le produit de cette diuiſion.

L'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties égales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy-aprés.

Comment on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces lignes sur le papier, & il suffit de les designer par quelques lettres, chacune par vne seule. Comme pour ajoûter la ligne BD a GH, ie nomme l'vne a & l'autre b, & escris $a+b$; Et $a-b$, pour soustraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par soy mesme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainsi a l'infini; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique d'a^3-b^3+abb, & ainsi des autres.

Vser de chiffre en Geometrie.

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms vsitez en l'Algebre, ie les nomme des quarrez ou des cubes, &c.

Il est aussi a remarquer que toutes les parties d'vne mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est point determinée en la question, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont se compose la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est determinée, a cause qu'elle peut estre sous-entenduë par tout où il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb-b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est diuisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme.

Au reſte afin de ne pas manquer a ſe ſouuenir des noms de ces lignes, il en faut toûjours faire vn regiſtre ſeparé, à meſure qu'on les poſe ou qu'on les change, eſcriuant par exemple.

A B $\propto$ 1, c'eſt à dire, A B eſgal à 1.
G H $\propto a$
B D $\propto b$, &c.

Comment il faut venir aux Equations qui ſeruent a reſoudre les problemes.

Ainſi voulant reſoudre quelque probleme, on doit d'abord le conſiderer comme deſia fait, & donner des noms à toutes les lignes, qui ſemblent neceſſaires pour le conſtruire, auſſi bien à celles qui ſont inconnuës, qu'aux autres. Puis ſans conſiderer aucune difference entre ces lignes connuës & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, ſelon l'ordre qui monſtre le plus naturellement de tous en qu'elle ſorte elles dépendent mutuellement les vnes des autres, iuſques a ce qu'on ait trouué moyen d'exprimer vne meſme quantité en deux façons: ce qui ſe nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces deux façons ſont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouuer autant de telles Equations, qu'on a ſuppoſé de lignes, qui eſtoient inconnuës. Ou bien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobſtant on n'obmette rien de ce qui eſt deſiré en la queſtion, cela témoigne qu'elle n'eſt pas entierement déterminée. Et lors on peut prendre a diſcretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës, auſquelles ne correſpond aucune Equation. Aprés cela s'il en reſte encore pluſieurs, il ſe faut ſeruir par ordre de chacune des Equations qui reſtent auſſi, ſoit en la conſiderant toute ſeule, ſoit en la comparant auec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnuës; & faire ainsi en les demeslant, qu'il n'en demeure qu'vne seule, égale a quelque autre, qui soit connuë, ou bien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le sursolide, ou le quarré de cube, &c. soit égal a ce, qui se produit par l'addition, ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantitez, dont l'vne soit connuë, & les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'escris en cete sorte.

$z \propto b$. ou

$z^2 \propto - az + bb$. ou

$z^3 \propto + az^2 + bbz - c^3$. ou

$z^4 \propto az^3 - c^3z + d^4$. &c.

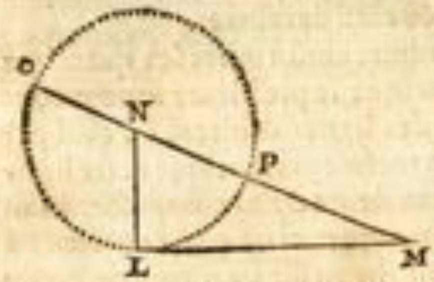
C'est à dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, est égale a b, ou le quarré de z est égal au quarré de b moins a multiplié par z, ou le cube de z est égal à a multiplié par le quarré de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainsi des autres.

Et on peut toûjours reduire ainsi toutes les quantitez inconnuës à vne seule, lorsque le probleme se peut construire par des cercles & des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou mesme par quelque autre ligne qui ne soit que d'vn ou deux degrez plus composée. Mais ie ne m'arreste point a expliquer cecy plus en détail, à cause que ie vous osterois le plaisir de l'apprendre de vous mesme, & l'vtilité de cultiuer vostre esprit en vous y exerçant, qui est a mon auis la principale, qu'on puisse tirer de cette ſcience. Auſſi que ie n'y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſez en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſe trouuer.

C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infailliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

Quels ſont les problemes plans. Et que ſi elle peut eſtre reſoluë par la Geometrie ordinaire, c'eſt à dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, égal a ce qui ſe produit de l'Addition, ou Souſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connuë, & de quelque autre quantité auſſi connuë.

Comment ils ſe reſoluent. Et lors cette racine, ou ligne inconnuë ſe trouue aiſement. Car ſi i'ay par exemple



$z^2 \propto az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt égal a b racine quarrée de la quantité connuë bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connuë, qui eſtoit multipliée par z, que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnuë. Puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit égale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte

$$z \propto \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Que si i'ay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M; & de sa baze M N i'oste N P égale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que i'ay $y \propto -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.

Enfin si i'ay $z^2 \propto az - bb$: ie fais N L égale à $\tfrac{1}{2}a$, & L M égale à b comme deuant; Puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N, & du centre N par L ayant décrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, ou bien M R; car en ce cas elle s'exprime en deux façons, à sçauoir $z \propto \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut asseurer que la construction du probleme proposé est impossible.

Au reste ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens ; & i'ay seulement voulu mettre ceux-cy, comme fort simples, afin de faire voir qu'on peut construire tous les problemes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. Car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

Exemple tiré de Pappus.

Et on le peut voir aussi fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de son septiéme liure ; où aprés s'estre arresté quelque temps à dénombrer tout ce qui auoit esté écrit en Geometrie par ceux qui l'auoient precedé, il parle enfin d'vne question, qu'il dit que ny Euclide, ny Apollonius, ny aucuns autres n'auoient sceu entierement resoudre, & voicy ses mots.

Ie cite plûtost la version latine que le texte grec, afin que chacun l'entende plus aisément.

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius ; sed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides scripsit per ea tantum conica, quæ vsque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, &c.

Et vn peu aprés il explique ainsi quelle est cette question.

At locus ad tres, & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè se iactat, & ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. Si positione datis tribus *rectis lineis ab vno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ, punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est vnam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit, similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Si quidem igitur ad duas tantum locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas, quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum vnam, neque primam, & quæ manifestissima videtur, composuerunt ostendentes vtilem esse. Propositiones autem ipsarum hæ sunt.*

Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio solidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, & data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, & data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur, rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cuiuspiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus.

Ou ie vous prie de remarquer en passant, que le scrupule, que faisoient les anciens d'vser des termes de l'Arithmetique en la Geometrie, qui ne pouuoit proceder, que de ce qu'ils ne voyoient pas assez clairement leur rapport, causoit beaucoup d'obscurité & d'embaras, en la façon dont ils s'expliquoient. Car Pappus poursuit en cette sorte.

Acquiescunt autem his, qui paulo ante talia interpretati sunt. Neque vnum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur. Licebit autem per coniunctas proportiones hæc, & dicere, & demonstrare vniuersè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio coniuncta ex ea, quam habet vna ductarum ad vnam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, si sint septem, si vero octo, & reliqua ad reliquam, punctum continget positione datas lineas. Et similiter quotcumque sint impares vel pares multitudine, cum hæc, vt dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita vt linea nota sit, &c.

La question donc qui auoit esté commencée a resoudre par Euclide, & poursuiuie par Apollonius, sans auoir esté acheuée par personne, estoit telle. Ayant trois ou quatre ou plus grand nombre de lignes droites données par position; premierement on demande vn point, duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, vne sur chacune des données, qui fassent auec elles des angles donnez, & que le rectangle contenu en deux de celles, qui seront ainsi tirées d'vn mesme point, ait la proportion donnée auec le quarré de la troisiéme, s'il n'y en a que trois; ou bien auec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre; ou bien, s'il y en a cinq, que le parallelepipede composé de trois ait la proportion donnée auec le parallelepipede composé des deux qui reſtent, & d'vne autre ligne donnée. Ou s'il y en a ſix, que le parallelepipede composé de trois ait la proportion donnée auec le parallelepipede des trois autres. Ou s'il y en a ſept, que ce qui ſe produit lors qu'on en multiplie quatre l'vne par l'autre, ait la raiſon donnée auec ce qui ſe produit par la multiplication des trois autres, & encore d'vne autre ligne donnée; Ou s'il y en a huit, que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée auec le produit des quatre autres. Et ainſi cette queſtion ſe peut eſtendre a tout autre nombre de lignes. Puis, à cauſe qu'il y a toûjours vne infinité de diuers poins qui peuuent ſatisfaire a ce qui eſt icy demandé, il eſt auſſi requis de connoiſtre, & de tracer la ligne, dans laquelle ils doiuent tous ſe trouuer. Et Pappus dit que lors qu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'eſt en vne des trois ſections coniques. Mais il n'entreprend point de la determiner, ny de la décrire. Non plus que d'expliquer celles où tous ces poins ſe doiuent trouuer, lorſque la queſtion eſt proposée en vn plus grand nombre de lignes. Seulement il ajoûte que les anciens en auoient imaginé vne qu'ils monſtroient y eſtre vtile, mais qui ſembloit la plus manifeſte, & qui n'eſtoit pas toutefois la premiere. Ce qui m'a donné occaſion d'eſſayer ſi par la methode dont ie me ſers on peut aller auſſi loin qu'ils ont eſté.

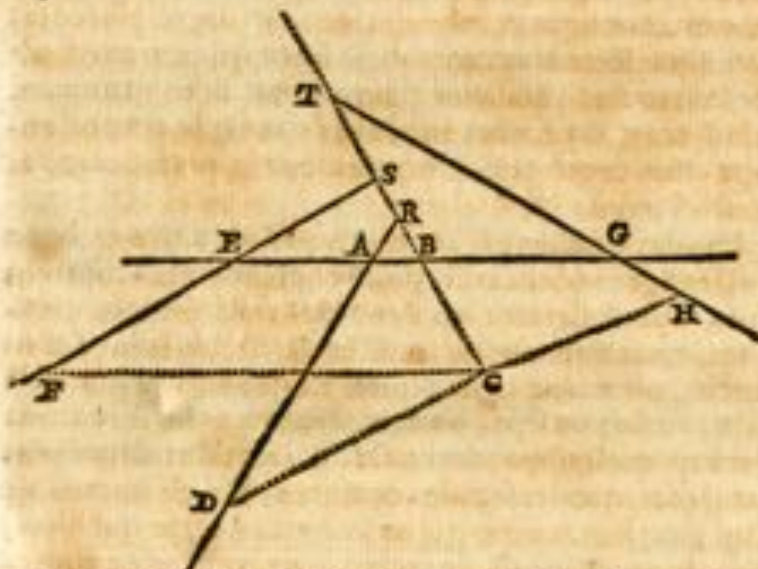
Et premierement i'ay connu que cette queſtion n'eſtant proposée qu'en trois, ou quatre, ou cinq lignes, on peut toûjours trouuer les poins cherchez par la Geometrie ſimple; c'eſt à dire en ne ſe ſeruant que de la regle & du

Réponſe à la queſtion de Pappus.

compas, & ne faisant autre chose, que ce qui a desia esté dit, excepté seulement lors qu'il y a cinq lignes données, si elles sont toutes paralleles. Auquel cas, comme aussi lors que la question est proposée en six, ou 7, ou 8, ou 9 lignes, on peut toûjours trouuer les poins cherchez par la Geometrie des solides; c'est à dire en y employant quelqu'vne des trois sections coniques. Excepté seulement lors qu'il y a neuf lignes données, si elles sont toutes paralleles. Auquel cas derechef, & encore en 10, 11, 12, ou 13 lignes on peut trouuer les poins cherchez par le moyen d'vne ligne courbe qui soit d'vn degré plus composée que les sections coniques. Excepté en treize si elles sont toutes paralleles, auquel cas, & en quatorze, 15, 16, & 17. il y faudra employer vne ligne courbe encore d'vn degré plus composée que la precedente, & ainsi a l'infini.

Puis i'ay trouué aussi, que lors qu'il n'y a que trois ou quatre lignes données, les poins cherchez se rencontrent tous, non seulement en l'vne des trois sections coniques, mais quelquefois aussi en la circonference d'vn cercle, ou en vne ligne droite. Et que lors qu'il y en a cinq, ou six, ou sept, ou huit, tous ces poins se rencontrent en quelqu'vne des lignes, qui sont d'vn degré plus composées que les sections coniques, & il est impossible d'en imaginer aucune qui ne soit vtile à cette question; mais ils peuuent aussi de rechef se rencontrer en vne section conique, ou en vn cercle, ou en vne ligne droite. Et s'il y en a neuf, ou 10, ou 11, ou 12, ces poins se rencontrent en vne ligne, qui ne peut estre que d'vn degré plus composée que les precedentes; mais toutes celles qui sont d'vn degré plus composées y peuuent seruir, & ainsi a l'infini.

Au reste la premiere, & la plus simple de toutes, aprés les sections coniques, est celle qu'on peut décrire par l'intersection d'vne Parabole, & d'vne ligne droite, en la façon qui sera tantost expliquée. En sorte que ie pense auoir entierement satisfait a ce que Pappus nous dit auoir esté cherché en cecy par les anciens. Et ie tascheray d'en mettre la demonstration en peu de mots. Car il m'ennuie déja d'en tant écrire.

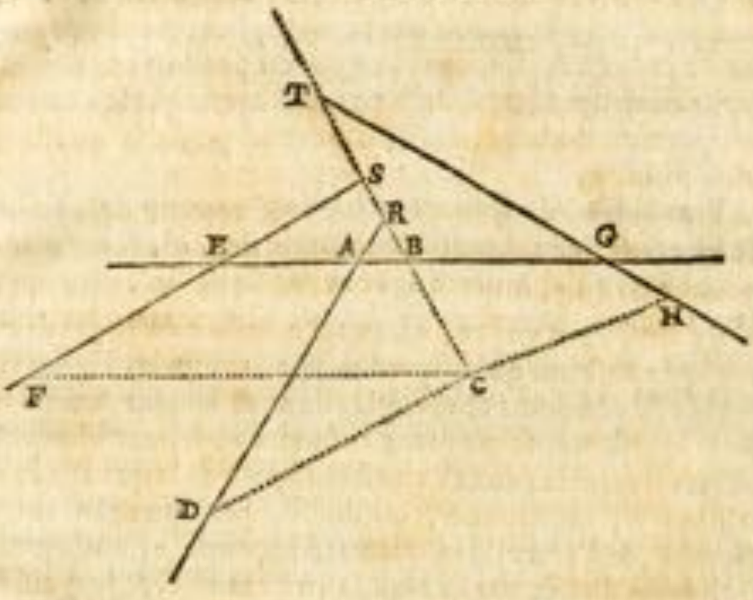


Soient AB, AD, EF, GH, &c. Plusieurs lignes données par position, & qu'il faille trouuer vn point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données, comme CB, CD, CF, & CH, en sorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, &c. soient donnez; & que ce qui est produit par la multiplication d'vne partie de ces lignes, soit égal a ce qui est produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils ayent quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la question plus difficile.

Comment on doit poser les termes pour venir à l'Equation en cet exemple.

Premierement ie suppose la chose comme déja faite, & pour me demesler de la confusion de toutes ces lignes, ie considere l'vne des données, & l'vne de celles qu'il faut trouuer, par exemple AB, & CB, comme les principales, & ausquelles ie tâche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne AB, qui est entre les poins A & B, soit nommé x, & que BC soit nommé y. & que toutes les autres lignes données soient prolongées, iusques a ce qu'elles coupent ces deux, aussi prolongées s'il est besoin, & si elles ne leur sont point paralleles; comme vous voyez icy qu'elles coupent la ligne AB, aux poins A, E, G. & BC aux poins R, S, T. Puis, à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnez, la proportion qui est entre les costez AB & BR est aussi donnée; & ie la pose comme de z à b; de façon qu'AB estant x, RB sera $\frac{bx}{z}$ & la toute CR sera $y + \frac{bx}{z}$, à cause que le point B tombe entre C & R; car si R tomboit entre C & B, CR seroit $y - \frac{bx}{z}$; & si C tomboit entre B & R, CR seroit $-y + \frac{bx}{z}$. Tout de mesme les trois angles du triangle DRC sont donnez, & par consequent aussi la proportion qui est entre les costez CR, & CD, que ie pose comme de z à c; de façon que CR estant $y + \frac{bx}{z}$,

CD



CD sera $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. Aprés cela pource que les lignes AB, AD, & EF sont données par position, la distance qui est entre les poins A & E est aussi donnée, & si on la nomme K, on aura EB égal a $k + x$; mais ce seroit $k - x$, si le point B tomboit entre E & A; & $-k + x$, si E tomboit entre A & B. Et pource que les angles du triangle ESB sont tous donnez, la proportion de BE a BS est aussi donnée, & ie la pose comme z à d, si bien que BS est $\frac{dk + dx}{z}$, & la toute CS est $\frac{zy + dk + dx}{z}$; mais ce seroit $\frac{zy - dk - dx}{z}$, si le point S tomboit entre B & C; & ce seroit $\frac{-zy + dk + dx}{z}$, si C tomboit entre B & S. De plus les trois angles du triangle FSC sont donnez, & en suite la

C

proportion de C S à C F, qui soit comme de z à e, & la toute C F sera $\frac{ezy \pm dek \pm dex}{zz}$. En mesme façon A G que ie nomme l est donnée, & B G est $l - - x$, & à cause du triangle B G T la proportion de B G a B T est aussi donnée, qui soit comme de z à f. & B T sera $\frac{fl - fx}{z}$, & C T ∞ $\frac{zy \pm fl - - fx}{z}$. Puis derechef la proportion de T C a C H est donnée, à cause du triangle T C H, & la posant comme de z à g, on aura C H ∞ $\frac{\pm gzy \pm fgl - fgx}{zz}$.

Et ainsi vous voyez, qu'en tel nombre de lignes données par position qu'on puisse auoir, toutes les lignes tirées dessus du point C a angles donnez suiuant la teneur de la question, se peuuent toûjours exprimer chacune par trois termes; dont l'vn est composé de la quantité inconnuë y, multipliée, ou diuisée par quelque autre connuë; & l'autre de la quantité inconnë x, aussi multipliée ou diuisée par quelque autre connuë, & le troisiéme d'vne quantité toute connuë. Excepté seulement si elles sont paralleles; ou bien à la ligne A B, auquel cas le terme composé de la quantité x sera nul; ou bien à la ligne C B, auquel cas celuy qui est composé de la quantité y sera nul; ainsi qu'il est trop manifeste pour que ie m'arreste à l'expliquer. Et pour les signes $+$, & $-$, qui se ioignent à ces termes, ils peuuent estre changez en toutes les façons imaginables.

Puis vous voyez aussi, que multipliant plusieurs de ces lignes l'vne par l'autre, les quantitez x & y, qui se trouuent dans le produit, n'y peuuent auoir que chacune autant de dimensions, qu'il y a eu de lignes à l'explication desquelles elles seruent, qui ont esté ainsi multipliées : en ſorte qu'elles n'auront iamais plus de deux dimenſions, en ce qui ne ſera produit que par la multiplication de deux lignes ; ny plus de trois, en ce qui ne ſera produit que par la multiplication de trois, & ainſi a l'infini.

Comment on trouue que ce probleme eſt plan, lors qu'il n'eſt pas propoſé en plus de cinq lignes.

De plus, à cauſe que pour determiner le point C, il n'y a qu'vne ſeule condition qui ſoit requiſe, à ſçauoir que ce qui eſt produit par la multiplication d'vn certain nombre de ces lignes ſoit égal, ou (ce qui n'eſt de rien plus malaiſé) ait la proportion donnée, à ce qui eſt produit par la multiplication des autres ; on peut prendre a diſcretion l'vne des deux quantitez inconnuës x ou y, & chercher l'autre par cette Equation. En laquelle il eſt éuident que lors que la queſtion n'eſt point propoſée en plus de cinq lignes, la quantité x qui ne ſert point à l'expreſſion de la premiere peut toûjours n'y auoir que deux dimenſions. De façon que prenant vne quantité connuë pour y, il ne reſtera que $xx \propto +$ ou $- ax +$ ou $- bb$. Et ainſi on pourra trouuer la quantité x auec la regle & le compas, en la façon tantoſt expliquée. Meſme prenant ſucceſſiuement infinies diuerſes grandeurs pour la ligne y, on en trouuera auſſi infinies pour la ligne x, & ainſi on aura vne infinité de diuers poins, tels que celuy qui eſt marqué C, par le moyen deſquels on décrira la ligne courbe demandée.

Il ſe peut faire auſſi, la queſtion eſtant propoſée en ſix, ou plus grand nombre de lignes ; s'il y en a entre les données qui ſoient paralleles a B A, ou B C, que l'vne des deux quantitez x ou y n'ait que deux dimenſions en l'Equation, & ainſi qu'on puiſſe trouuer le point C auec la regle & le compas. Mais au contraire si elles sont toutes paralleles, encore que la question ne soit proposée qu'en cinq lignes, ce point C ne pourra ainsi estre trouué, à cause que la quantité x ne se trouuant point en toute l'Equation, il ne sera plus permis de prendre vne quantité connuë pour celle qui est nommée y, mais ce sera elle qu'il faudra chercher. Et pource qu'elle aura trois dimensions, on ne la pourra trouuer qu'en tirant la racine d'vne Equation cubique. Ce qui ne se peut generalement faire sans qu'on y employe pour le moins vne section conique. Et encore qu'il y ait iusques a neuf lignes données, pourvû qu'elles ne soient point toutes paralleles, on peut toûjours faire que l'Equation ne monte que iusques au quarré de quarré. Au moyen dequoy on la peut aussi toûjours resoudre par les sections coniques, en la façon que i'expliqueray cy-aprés. Et encore qu'il y en ait iusques à treize, on peut toûjours faire qu'elle ne monte que iusques au quarré de cube. En suite de quoy on la peut resoudre par le moyen d'vne ligne, qui n'est que d'vn degré plus composée que les sections coniques, en la façon que i'expliqueray aussi cy-aprés. Et cecy est la premiere partie de ce que i'auois icy à demonstrer; mais auant que ie passe à la seconde, il est besoin que ie die quelque chose en general de la nature des lignes courbes.

LA
GEOMETRIE.
LIVRE SECOND.

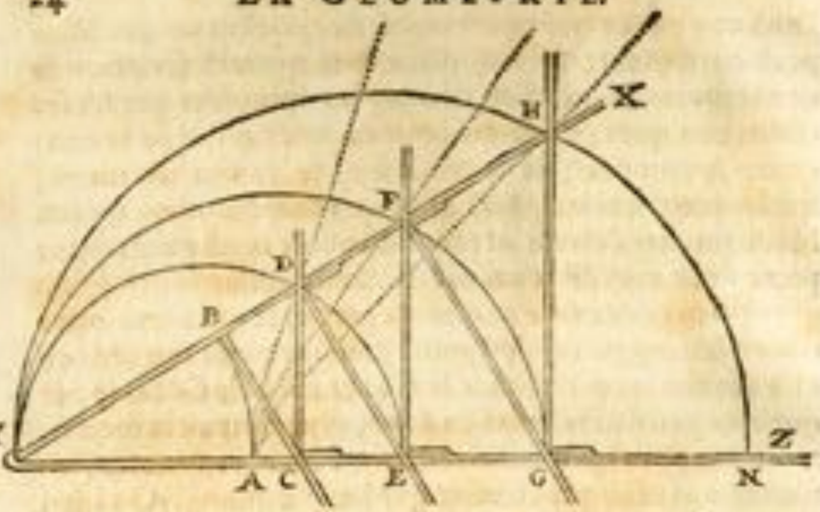
De la nature des lignes courbes.

LES anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les problemes de Geometrie, les vns sont plans, les autres solides, & les autres lineaires, c'est à dire, que les vns peuuent estre construits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles ; au lieu que les autres ne le peuuent estre, qu'on n'y employe pour le moins quelque section conique ; ny enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée. Mais ie m'estonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué diuers degrez entre ces lignes plus composées, & ie ne sçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plûtost que Geometriques. Car de dire que ç'ait esté, à cause qu'il est besoin de se seruir de quelque machine pour les décrire, il faudroit reietter par mesme raison les cercles & les lignes droites ; vû qu'on ne les décrit sur le papier qu'auec vn compas & vne regle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus, à cause que les instrumens qui seruent à les tracer, estant plus composez que la regle & le compas, ne peuuent estre si iustes ; car il faudroit pour cette raison les reietter des Mechaniques, où

Quelles sont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

la iusteſſe des ouurages qui ſortent de la main eſt deſirée; plûtoſt que de la Geometrie, où c'eſt ſeulement la iusteſſe du raiſonnement qu'on recherche, & qui peut ſans doute eſtre auſſi parfaite touchant ces lignes, que touchant les autres. Ie ne diray pas auſſi, que ce ſoit à cauſe qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, & qu'ils ſe ſont contentez qu'on leur accordaſt, qu'ils peuſſent ioindre deux poins donnez par vne ligne droite, & décrire vn cercle d'vn centre donné, qui paſſaſt par vn point donné. Car ils n'ont point fait de ſcrupule de ſuppoſer outre cela, pour traiter des ſections coniques, qu'on pût coupper tout cone donné par vn plan donné. Et il n'eſt beſoin de rien ſuppoſer pour tracer toutes les lignes courbes, que ie prétens icy introduire; ſinon que deux ou pluſieurs lignes puiſſent eſtre meuës l'vne par l'autre, & que leurs interſections en marquent d'autres; ce qui ne me paroiſt en rien plus difficile. Il eſt vray qu'ils n'ont pas auſſi entierement receu les ſections coniques en leur Geometrie, & ie ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont eſté approuuez par l'vſage; mais il eſt, ce me ſemble, tres-clair, que prenant comme on fait pour Geometrique ce qui eſt precis & exact, & pour Mechanique ce qui ne l'eſt pas; & conſiderant la Geometrie comme vne ſcience, qui enſeigne generalement à connoiſtre les meſures de tous les corps, on n'en doit pas plûtoſt exclure les lignes les plus compoſées que les plus ſimples, pourvû qu'on les puiſſe imaginer eſtre décrites par vn mouuement continu, ou par pluſieurs qui s'entreſuiuent, & dont les derniers ſoient entierement reglez par ceux qui les precedent. Car par ce moyen on peut toûjours auoir vne connoissance exacte de leur mesure. Mais peut-estre que ce qui a empesché les anciens Geometres de receuoir celles qui estoient plus composées que les sections coniques, c'est que les premieres qu'ils ont considerées, ayant par hasard esté la Spirale, la Quadratrice & semblables, qui n'appartiennent veritablement qu'aux Mechaniques, & ne sont point du nombre de cellesque ie pense deuoir icy estre receuës, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouuemens separez, & qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement, bien qu'ils ayent aprés examiné la Conchoïde, la Cissoïde, & quelque peu d'autres qui en sont, toutefois à cause qu'ils n'ont peut-estre pas assez remarqué leurs proprietez, ils n'en ont pas fait plus d'estat que des premieres. Ou bien c'est que voyant, qu'ils ne connoissoient, encore que peu de choses touchant les sections coniques, & qu'il leur en restoit mesme beaucoup, touchant ce qui se peut faire auec la regle & le compas, qu'ils ignoroient, ils ont creu ne deuoir point entamer de matiere plus difficile. Mais pource que i'espere que d'orenauant ceux qui auront l'adresse de se seruir du calcul Geometrique icy proposé, ne trouueront pas assez dequoy s'arrester touchant les problemes plans ou solides; ie croy qu'il est a propos que ie les inuite a d'autres recherches, où ils ne manqueront iamais d'exercice.

Voyez les lignes AB, AD, AF, & semblables que ie suppose auoir esté décrites par l'aide de l'instrument YZ, qui est composé de plusieurs regles tellement iointes, que celle qui est marquée Y Z estant arrestée sur la ligne AN, on peut ouurir & fermer l'angle X Y Z; & que lors

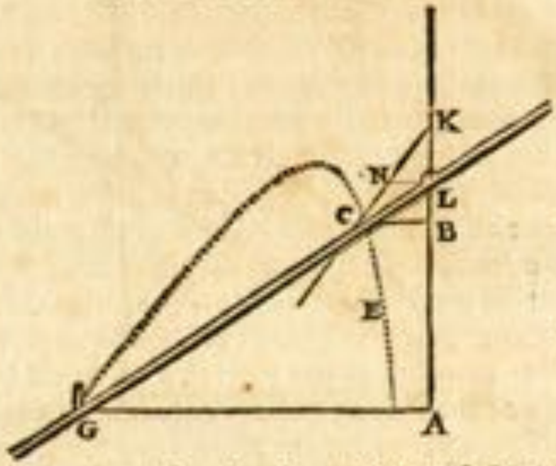


qu'il est tout fermé, les poins B, C, D, F, G, H sont tous assemblez au point A; mais qu'a mesure qu'on l'ouure, la regle B C, qui est iointe a angles droits auec X Y au point B, pousse vers Z la regle C D, qui coule sur Y Z en faisant toûjours des angles droits auec elle, & CD pousse DE, qui coule tout de mesme sur YX en demeurant parallele a BC, D E pousse EF, E F pousse F G, celle-cy pousse GH. Et on en peut conceuoir vne infinité d'autres, qui se poussent consecutiuement en mesme façon, & dont les vnes fassent toûjours les mesmes angles auec YX, & les autres auec YZ. Or pendant qu'on ouure ainsi l'angle XYZ, le point B décrit la ligne AB, qui est vn cercle, & les autres poins D, F, H, où se font les intersections des autres regles, décriuent d'autres lignes courbes AD, AF, AH, dont les dernieres sont par ordre plus composées que la premiere, & celle-cy plus que le cercle. Mais ie ne ie ne voy pas ce qui peut empefcher, qu'on ne conçoiue auffi nettement, & auffi diftinctement la defcription de cette premiere, que du cercle, ou du moins que des fections coniques; ny ce qui peut empefcher qu'on ne conçoiue la feconde, & la trofiéme, & toutes les autres, qu'on peut décrire, auffi bien que la premiere; ny par confequent qu'on ne les reçoiue toutes en mefme façon, pour feruir aux fpeculations de Geometrie.

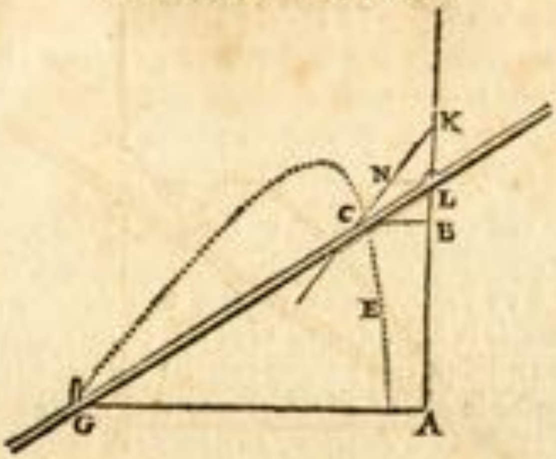
La façon de diftinguer toutes les lignes courbes en certains genres. Et de connoiftre le rapport qu'ont tous leurs poins à ceux des lignes droites.

Ie pourrois mettre icy plufieurs autres moyens pour tracer & conceuoir des lignes courbes, qui feroient de plus en plus compofées par degrez a l'infini. Mais pour comprendre enfemble toutes celles, qui font en la nature, & les diftinguer par ordre en certains genres, ie ne fçache rien de meilleur que de dire que tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eft à dire qui tombent fous quelque mefure precife & exacte, ont neceffairement quelque rapport à tous les poins d'vne ligne droite, qui peut eftre exprimé par quelque Equation, en tous par vne mefme. Et que lorfque cette Equation ne monte que iufques au rectangle de deux quantitez indeterminées, ou bien au quarré d'vne mefme, la ligne courbe eft du premier & plus fimple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole & l'ellipfe qui foient comprifes. Mais que lors que l'Equation monte iufques à la 3 ou 4 dimenfion des deux, ou de l'vne des deux quantitez indeterminées, car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn point à vn autre, elle eft du fecond: & que lors que l'Equation monte iufques à la 5 ou 6 dimenfion, elle eft du troifiéme; & ainfi des autres a l'infini.

Comme fi ie veux fçauoir de quel genre eft la ligne EC,



que ie m'imagine estre décrite par l'intersection de la regle GL, & du plan rectiligne CNKL, dont le costé KN est indefiniment prolongé vers C, & qui estant meu sur le plan de dessous en ligne droite, c'est à dire en telle sorte que son diametre KL se trouue toûjours appliqué sur quelque endroit de la ligne BA prolongée de part & d'autre, fait mouuoir circulairement cette regle GL autour du point G, à cause quelle luy est tellement iointe quelle passe toûjours par le point L. Ie choisis vne ligne droite, comme AB, pour rapporter à ses diuers poins tous ceux de cette ligne courbe EC, & en cette ligne AB ie choisis vn point, comme A, pour commencer par luy ce calcul. Ie dis que ie chosis & l'vn & l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut. Car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'Equation plus courte & plus aisée; toutefois en quelle façon qu'on les prene, on peut toûjours faire que la ligne paroisse



de mesme genre, ainsi qu'il est aisé à demonstrer. Aprés cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert à la décrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne CB parallele a GA, & pource que CB & BA sont deux quantitez indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. Mais afin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie considere aussi les quantitez connuës qui determinent la description de cette ligne courbe, comme GA que ie nomme a, KL que ie nomme b, & NL parallele a GA que ie nomme c. Puis ie dis, comme NL est à LK, ou c à b, ainsi CB, ou y, est à BK, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & BL est $\frac{b}{c}y - b$, & AL est $x + \frac{b}{c}y - b$. De plus comme CB est à LB, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a, ou GA, est à LA, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. De façon que multipliant la seconde par la troisiéme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui est égale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$, qui se produit en multipliant la premiere par la derniere ; & ainsi l'Equation qu'il falloit trouuer est

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$$

de laquelle on connoist que la ligne E C est du premier genre, comme en effet elle n'est autre qu'vne hyperbole.

Que si en l'instrument qui sert à la décrire, on fait qu'au lieu de la ligne droite C N K, ce soit cette hyperbole, ou quelqu'autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan CNKL ; l'intersection de cette ligne & de la regle G L décrira, au lieu de l'Hyperbole E C, vne autre ligne courbe, qui sera du second genre. Comme si C N K est vn cercle, dont L soit le centre, on décrira la premiere Conchoïde des anciens ; & si c'est vne Parabole, dont le diametre soit K B, on décrira la ligne courbe, que i'ay tantost dit estre la premiere, & la plus simple pour la question de Pappus, lors qu'il n'y a que 5 lignes droites données par position. Mais si au lieu d'vne de ces lignes courbes du premier genre, s'en est vne du second, qui termine le plan C N K L, on en décrira par son moyen vne du troisiéme, ou si c'en est vne du troisiéme, on en décrira vne du quatriéme, & ainsi a l'infini. Comme il est fort aisé a connoistre par le calcul. Et en quelque autre façon, qu'on imagine la description d'vne ligne courbe, pourvû qu'elle soit du nombre de celles que ie nomme Geometriques, on pourra toûjours trouuer vne Equation pour determiner tous ses poins en cette sorte.

Au reste ie mets les lignes courbes qui font monter cette Equation iusques au quarré de quarré, au mesme genre que celles qui ne la font monter que iusques au cube. Et celles dont l'Equation monte au quarré de cube, au mesme genre que celles dont elle ne monte qu'au sursolide, & ainsi des autres. Dont la raison est, qu'il y a regle generale pour reduire au cube toutes les difficultez qui vont au quarré de quarré, & au sursolide toutes celle qui vont au quarré de cube, de façon qu'on ne les doit point estimer plus composées.

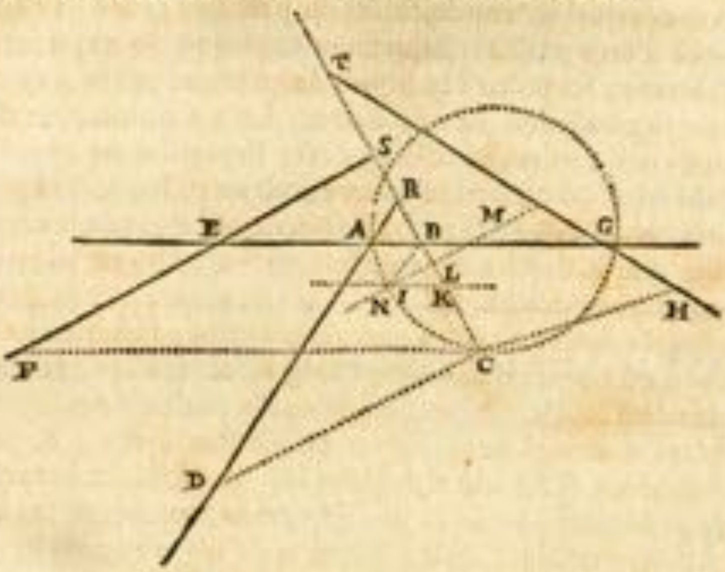
Mais il est à remarquer qu'entre les lignes de chaque genre, encore que la plus part soient également composées, en sorte qu'elles peuuent seruir à determiner les mesmes poins, & construire les mesmes problemes, il y en a toutefois aussi quelques vnes, qui sont plus simples, & qui n'ont pas tant d'estenduë en leur puissance. Comme entre celles du premier genre outre l'Ellipse, l'Hyperbole & la Parabole qui sont également composées, le cercle y est aussi compris, qui manifestement est plus simple. Et entre celles du second genre il y à la Conchoïde vulgaire, qui a son origine du cercle; & il y en a encore quelques autres, qui bien qu'elles n'ayent pas tant d'étenduë que la plus part de celles du mesme genre, ne peuuent toutefois estre mises dans le premier.

Or aprés auoir ainsi reduit toutes les lignes courbes a certains genres, il m'est aisé de poursuiure en la démonstration de la réponse, que i'ay tantost faite á la question de Pappus. Car premierement ayant fait voir cy-dessus, que lors qu'il n'y a que trois ou 4 lignes droites données, l'Equation qui sert à determiner les poins cher- Suite de l'explication de la question de Pappus mise au liure precedent.

chez, ne monte que iusques au quarré; il est éuident, que la ligne courbe ou se trouuent ces poins, est necessairement quelqu'vne de celles du premier genre: à cause que cette mesme Equation explique le rapport, qu'ont tous les poins des lignes du premier genre à ceux d'vne ligne droite. Et que lors qu'il n'y a point plus de huit lignes droites données, cette Equation ne monte que iusques au quarré de quarré tout au plus, & que par consequent la ligne cherchée ne peut estre que du second genre, ou au dessous. Et que lors qu'il n'y a point plus de douze lignes données, l'Equation ne monte que iusques au quarré de cube, & que par consequent la ligne cherchée n'est que du troisieme genre, ou au dessous, & ainsi des autres. Et mesme à cause que la position des lignes droites données peut varier en toutes sortes, & par consequent faire changer tant les quantitez connuës, que les signes + & -- de l'Equation, en toutes les façons imaginables; il est éuident qu'il n'y a aucune ligne courbe du premier genre, qui ne soit vtile à cette question, quand elle est proposée en quatre lignes droites; ny aucune du second qui n'y soit vtile, quand elle est proposée en huit; ny du troisiéme, quand elle est proposée en douze: & ainsi des autres. En sorte qu'il n'y a pas vne ligne courbe, qui tombe sous le calcul, & puisse estre receuë en Geometrie, qui n'y soit vtile pour quelque nombre de lignes.

Solution de cette question quand elle n'est proposée qu'en 3 ou quatre lignes.

Mais il faut icy plus particulierement que ie determine, & donne la façon de trouuer la ligne cherchée, qui sert en chaque cas, lors qu'il n'y a que 3 ou 4 lignes droites données; & on verra par mesme moyen que le premier genre des lignes courbes n'en contient aucunes autres, que les trois sections coniques, & le cercle.



Reprenons les 4 lignes AB, AD, EF, & GH données cy-dessus, & qu'il faille trouuer vne autre ligne, en laquelle il se rencontre vne infinité de poins tels que C, duquel ayant tiré les 4 lignes CB, CD, CF, & CH, a angles donnez, sur les données, CB multipliée par CF, produit vne somme égale a CD, multipliée par CH. C'est à dire ayant fait CB $\propto y$, CD $\propto \frac{czy + bcx}{zz}$, CF $\propto \frac{ezy + dek + dex}{zz}$ & CH $\propto \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$ l'Equation est

$$yy \propto \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{matrix}\right\}}{ezzz - cgzz}$$

au moins en ſuppoſant ez plus grand que cg. Car s'il eſtoit moindre, il faudroit changer tous les ſignes $+$ & $-$. Et ſi la quantité y ſe trouuoit nulle, ou moindre que rien en cette Equation, lors qu'on a ſuppoſé le point C en l'angle DAG, il faudroit le ſuppoſer auſſi en l'angle DAE, ou EAR, ou RAG, en changeant les ſignes $+$ & $-$ ſelon qu'il ſeroit requis a cet effect. Et ſi en toutes ces 4 poſitions la valeur d'y ſe trouuoit nulle, la queſtion ſeroit impoſſible au cas propoſé. Mais ſuppoſons la icy eſtre poſſible, & pour en abreger les termes, au lieu des quantitez $\frac{cflgz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ écriuons $2m$, & au lieu de $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ écriuons $\frac{2n}{z}$; & ainſi nous aurons

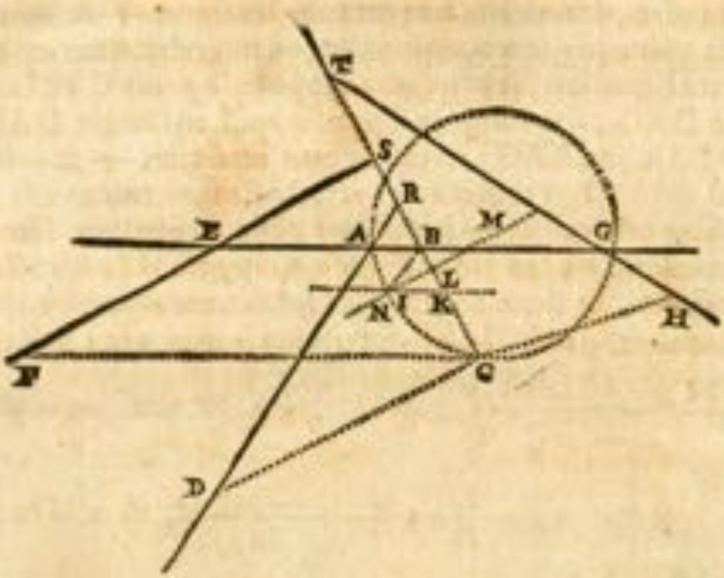
$$yy \infty 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz},$$ dont la racine eſt

$$y \infty m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$$

& derechef pour abreger, au lieu de $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$ écriuons o, & au lieu de $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ écriuons $\frac{p}{m}$. Car ces quantitez eſtant toutes données, nous les pouuons nommer comme il nous plaiſt. Et ainſi nous auons

$$y \infty m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx},$$ qui doit eſtre la longueur de la ligne B C, en laiſſant A B, ou x indeterminée. Et il eſt euident que la queſtion n'eſtant propoſée qu'en trois ou quatre lignes, on peut toûjours

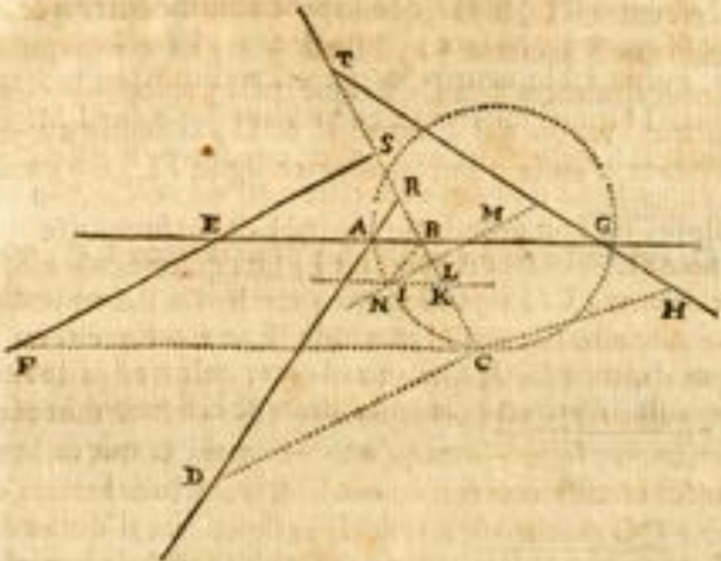
auoir



auoir de tels termes. Excepté que quelques vns d'eux peuuent estre nuls, & que les signes + & -- peuuent diuersement estre changez.

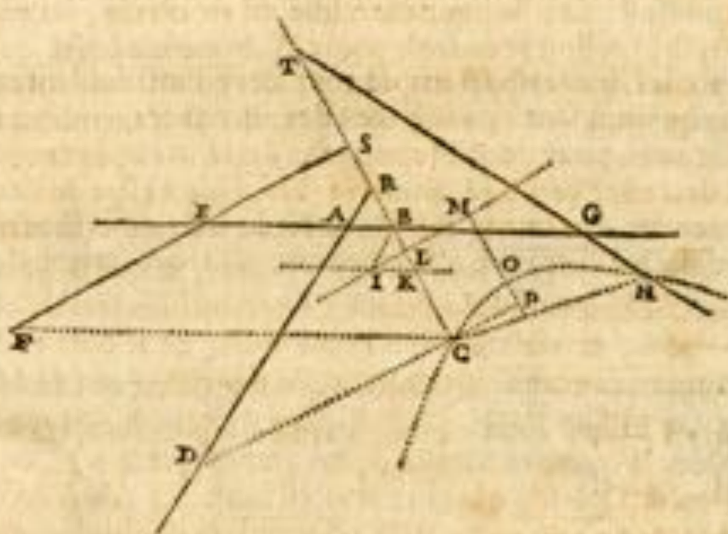
Aprés cela ie fais KI égale & parallele à BA, en sorte qu'elle couppe de BC la partie BK égale à m, à cause qu'il y a icy + m; & ie l'aurois ajoûtée en tirant cette ligne IK de l'autre costé, s'il y auoit eu -- m; & ie ne l'aurois point du tout tirée, si la quantité m eust esté nulle. Puis ie tire aussi IL, en sorte que la ligne IK est à KL, comme Z est à n. C'est à dire que IK estant x, KL est $\frac{n}{z}x$. Et par mesme moyen ie connois aussi la proportion qui est entre KL, & IL, que ie pose comme entre n & a: Si bien que KL estant $\frac{n}{z}x$, IL est $\frac{a}{z}x$; Et ie fais que le point K soit entre L & C, à cause qu'il y a icy $-\frac{n}{z}x$; au lieu que i'aurois mis L entre K & C, si i'eusse eu $+\frac{n}{z}x$; & ie n'eusse point tiré cette ligne IL, si $\frac{a}{z}x$ eust esté nulle.

Or cela fait il ne me reste plus pour la ligne LC, que ces termes, $LC \infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. D'où ie voy que s'ils estoient nuls, ce point C se trouueroit en la ligne droite IL; & que s'ils estoient tels que la racine s'en pust tirer, c'est à dire que mm & $\frac{p}{m}xx$ estant marquez d'vn mesme signe $+$ ou $-$, oo fust égal à $4pm$, ou bien que les termes mm & ox, ou ox & $\frac{p}{m}xx$ fussent nuls, ce point C se trouueroit en vne autre ligne droite qui ne seroit pas plus malaisée à trouuer qu'IL. Mais lors que cela n'est pas, ce point C est toûjours en l'vne des trois sections coniques, ou en vn cercle, dont l'vn des diametres est en la ligne IL, & la ligne LC est l'vne de celles qui s'appliquent par ordre à ce diamettre; ou au contraire LC est paralele au diametre, auquel celle qui est en la ligne IL est appliquée par ordre. A sçauoir si le terme $\frac{p}{m}xx$, est nul cette section conique est vne Parabole; & s'il est marqué du signe $+$, c'est vne Hyperbole; & enfin s'il est marqué du signe $-$ c'est vne Ellipse. Excepté seulement si la quantité aam est égale à pzz & que l'angle ILC soit droit: auquel cas on a vn cercle au lieu



d'vne Ellipse. Que si cette section est vne Parabole, son costé droit est égal à $\frac{oz}{a}$, & son diametre est toûjours en la ligne I L. Et pour trouuer le point N, qui en est le sommet, il faut faire I N égale à $\frac{amm}{oz}$; & que le point I soit entre L & N, si les termes sont $+ mm + ox$; ou bien que le point L soit entre I & N, s'ils sont $+ mm - ox$; ou bien il faudroit qu'N fust entre I & L, s'il y auoit $- mm + ox$. Mais il ne peut iamais y auoir $- mm$, en la façon que les termes ont icy esté posez. Et enfin le point N seroit le mesme que le point I si la quantité mm estoit nulle. Au moyen dequoy il est aisé de trouuer cette Parabole par le premier Probleme du premier liure d'Apollonius.

Que si la ligne demandée est vn cercle, ou vne ellipse, ou vne Hyperbole, il faut premierement chercher le point M, qui en est le centre, & qui est toûjours en la ligne droite I L, ou l'on trouue en prenant $\frac{aom}{2pz}$ pour I M. En sorte que si la quantité o est nulle, ce centre est iustement au point I. Et si la ligne cherchée est vn cercle, ou vne Ellipse; on doit prendre le point M du mesme costé que le point L, au respect du point I, lors qu'on a $+ox$; & lors qu'on à $-ox$, on le doit prendre de l'autre. Mais tout au contraire en l'Hyperbole, si on à $-ox$, ce centre M doit estre vers L, & si on a $+ox$, il doit estre de l'autre costé. Aprés cela le costé droit de la figure doit estre $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ lors qu'on à $+mm$, & que la ligne cherchée est vn cercle, ou vne Ellipse; ou bien lors qu'on à $-mm$, & que c'est vne Hyperbole. Et il doit estre $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ si la ligne cherchée estant vn cercle, ou vne Ellipse, on à $-mm$; ou bien si estant vne Hyperbole & la quantité oo estant plus grande que $4mp$, on à $+mm$. Que si la quantité mm est nulle, ce costé droit est $\frac{oz}{a}$, & si ox est nulle, il est $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Puis pour le costé trauersant, il faut trouuer vne ligne, qui soit a ce costé droit, comme aam est à pzz, à sçauoir si ce costé droit est $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ le trauersant est $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$. Et en tous ces cas le diametre de la section est en la ligne I M, & L C est l'vne de celles qui luy est appliquée par ordre. Si bien que faisant MN égale à la moitié du costé trauersant & le prenant du mesme costé du point M, qu'est le point L, on a le point N pour le sommet de ce diametre. En suite de quoy il est aisé de trouuer la section par le second & le troisiéme Probleme du premier liure d'Apollonius.



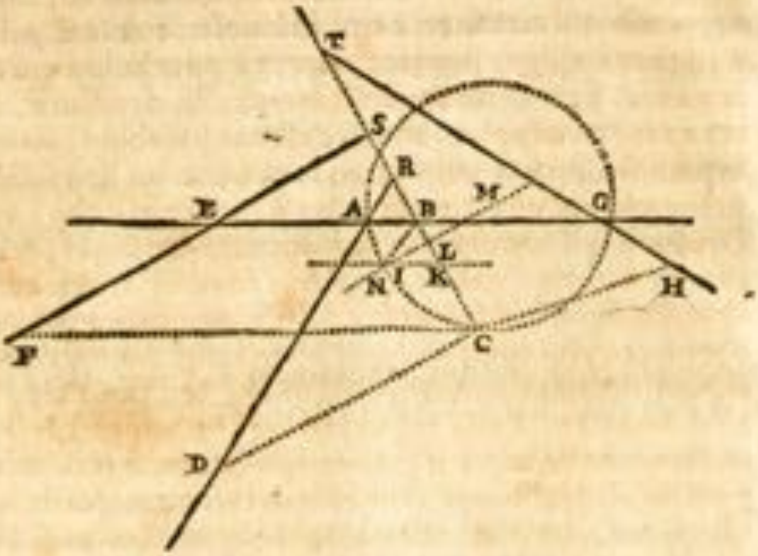
Mais quand cette section estant vne Hyperbole, on a $+mm$; & que la quantité oo est nulle ou plus petite que $4pm$, on doit tirer du centre M la ligne MOP parallele à LC, & CP parallele à LM. Et faire MO égale à $\sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$; ou bien la faire égale à m si la quantité ox est nulle. Puis considerer le point O, comme le sommet de cette Hyperbole; dont le diametre est OP, & CP la ligne qui luy est appliquée par ordre, & son costé droit est $\sqrt{\frac{4a^4mm}{ppz^4} - \frac{a^4oomm}{p^3z^4}}$ & son costé trauersant est $\sqrt{4mm - \frac{oomm}{pp}}$ Excepté quand ox est nulle. Car alors le costé droit est $\frac{2aam}{pzz}$, & le trauersant est $2m$. Et ainsi il est aisé de la trouuer par le troisiéme Probleme du premier liure d'Apollonius.

Demonstration de tout ce qui vient d'estre expliqué.

Et les demonstrations de tout cecy sont éuidentes : Car composant vn espace des quantitez que i'ay assignées pour le costé droit, & le trauersant, & pour le segment du diametre NL, ou OP, suiuant la teneur de l'onze, du douze & du treiziéme theoreme du premier liure d'Apollonius, on trouuera tous les mesmes termes dont est composé le quarré de la ligne CP, ou CL, qui est appliquée par ordre à ce diametre. Comme en cet exemple ostant IM qui est $\frac{aom}{2pz}$ de NM, qui est $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$, i'ay IN, à laquelle ajoûtant IL qui est $\frac{a}{z}x$, i'ay NL, qui est $\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$, & cecy estant multiplié par $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, qui est le costé droit de la figure, il vient $x\sqrt{oo+4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + \frac{moo}{2p} + 2mm$: pour le rectangle. Duquel il faut oster vn espace qui soit au quarré de NL comme le costé droit est au trauersant. Et ce quarré de NL est $\frac{aa}{zz}xx - \frac{aaom}{pzz}x + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo+4mp} + \frac{aaoomm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo+4mp}$ qu'il faut diuiser par aam &

multiplier par pzz, à cause que ces termes expliquent la proportion qui est entre le costé trauersant & le droit, & il vient $\frac{p}{m}xx - ox + x\sqrt{oo+4mp} + \frac{oom}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + mm$, ce qu'il faut oster du rectangle précedent, & on trouue $mm + ox - \frac{p}{m}xx$ pour le quarré de C L, qui par consequent est vne ligne appliquée par ordre dans vne Ellipse, ou dans vn cercle, au segment du diametre N L.

Et si on veut expliquer toutes les quantitez données par nombres, en faisant par exemple E A ∞ 3, A G ∞ 5, A B ∞ B R, B S ∞ $\frac{1}{2}$ B E, G B ∞ B T, C D ∞ $\frac{1}{2}$ C R, C F ∞ 2 C S, C H ∞ $\frac{1}{6}$ C T, & que l'angle A B R soit de soixante degrez; & enfin que le rectangle des deux C B, & C F, soit égal au rectangle des deux autres C D & C H; car il faut auoir toutes ces choses afin que la question soit entierement determinée. Et auec cela supposant A B ∞ x, & C B ∞ y, on trouue par la façon cy-dessus expliquée $yy \infty 2y - xy + 5x - xx$ & $y \infty 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$: si bien que BK doit estre 1, & KL doit estre la moitié de KI, & pource que l'angle IKL ou A B R est de 60 degrez, & KI L qui est la moitié de KI B, ou KI KL, de trente, I L K est droit. Et pource que IK ou A B est nommé x, KL est $\frac{1}{2}x$, & I L est $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, & la quantité qui estoit tantost nommée z est 1, celle qui estoit a est $\sqrt{\frac{3}{4}}$, celle qui estoit m est 1, celle qui estoit o est 4, & celle qui estoit p est $\frac{3}{4}$, de façon qu'on à $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour



I M, & $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ pour N M, & pource que aam qui eſt $\frac{1}{4}$ eſt icy égal à pzz & que l'angle I L C eſt droit, on trouue que la ligne courbe N C eſt vn cercle. Et on peut facilement examiner tous les autres cas en meſme ſorte.

Quels ſont les lieux plans, & ſolides: & la façon de les trouuer

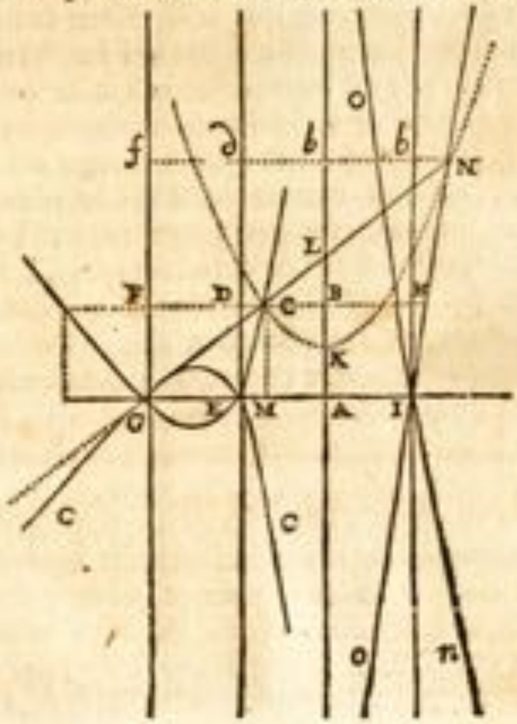
Au reſte à cauſe que les Equations, qui ne montent que iuſques au quarré, ſont toutes compriſes en ce que ie viens d'expliquer; non ſeulement le probleme des anciens en 3 & 4. lignes eſt icy entierement acheué; mais auſſi tout ce qui appartient à ce qu'ils nommoient la compoſition des lieux ſolides, & par conſequent auſſi a celle des lieux plans, à cauſe qu'ils ſont compris dans les ſolides. Car ces lieux ne ſont autre choſe, ſinon que lors qu'il eſt queſtion de trouuer quelque point auquel il manque

manque vne condition pour estre entierement determiné, ainsi qu'il arriue en cette exemple, tous les poins d'vne mesme ligne peuuent estre pris pour celuy qui est demandé. Et si cette ligne est droite, ou circulaire, on la nomme vn lieu plan. Mais si c'est vne parabole, ou vne hyperbole, ou vne ellipse, on la nomme vn lieu solide. Et toutefois & quantes que cela est, on peut venir à vne Equation qui contient deux quantitez inconnuës, & est pareille a quelqu'vne de celles que ie viens de resoudre. Que si la ligne qui determine ainsi le point cherché, est d'vn degré plus composée que les sections coniques, on la peut nommer en mesme façon vn lieu sursolide, & ainsi des autres. Et s'il manque deux conditions à la determination de ce point, le lieu où il se trouue est vne superficie, laquelle peut estre tout de mesme ou plate, ou spherique, ou plus composée. Mais le plus haut but qu'ayent eu les anciens en cette matiere, a esté de paruenir à la composition des lieux solides; Et il semble que tout ce qu'Apollonius a écrit des sections coniques n'a esté qu'à dessein de la chercher.

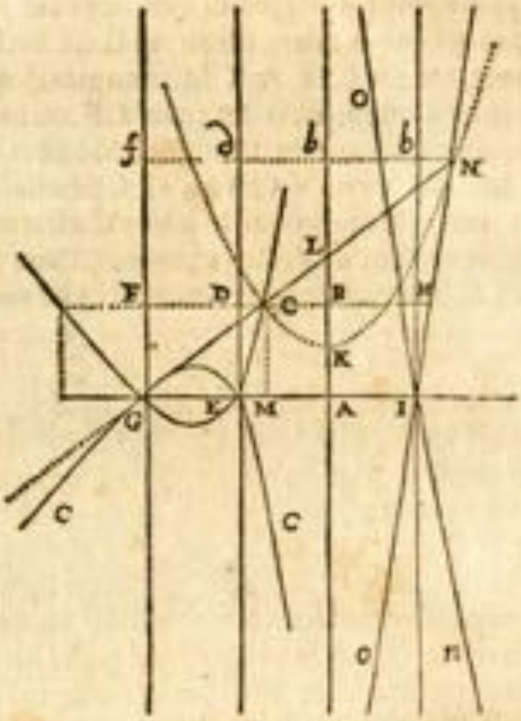
Quelle est la premiere & la plus simple de toutes les lignes courbes qui seruent en la question des anciens quand elle est proposée en cinq lignes.

De plus on voit icy que ce que i'ay pris pour le premier genre des lignes courbes, n'en peut comprendre aucunes autres que le cercle, l'hyperbole, & l'ellipse, qui est tout ce que i'auois entrepris de prouuer.

Que si la question des anciens est proposée en cinq lignes, qui soient toutes paralleles, il est éuident que le point cherché sera toûjours en vne ligne droite; Mais si elle est proposée en cinq lignes, dont il y en ait quatre qui soient paralleles, & que la cinquiéme les couppe a angles droits, & mesme que toutes les lignes tirées du point cherché les rencontrent aussi a angles droits, & enfin que le parallelepipede composé de trois des lignes ainsi tirées sur trois de celles qui sont paralleles, soit égal au parallelepipede composé des deux lignes tirées l'vne sur la quatriéme de celles qui sont paralleles & l'autre sur celle qui les couppe a angles droits, & d'vne troisiéme ligne donnée. Ce qui est ce semble le plus simple cas qu'on puisse imaginer aprés le precedent; le point cherché sera en la ligne courbe, qui est décrite par le mouuement d'vne parabole en la façon cy-dessus expliquée.



Soient par exemple les lignes cherchées AB, IH, ED, GF, & GA. Et qu'on demande le point C, en sorte que tirant CB, CF, CD, CH, & CM, a angles droits sur les données, le parallelepipede des trois CF, CD, & CH soit égal à celuy des 2 autres CB, & CM, & d'vne troisiéme qui soit AI. Ie pose CB ∞y. CM ∞x. AI, ou AE, ou GE ∞a, de façon que le point C estant entre les lignes AB, & DE, i'ay CF $\infty 2a - y$, CD $\infty a - y$. Et CH $\infty y + a$. Et multipliant ces trois l'vne par l'autre, i'ay $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ égal au produit des trois autres qui est axy. Aprés cela ie considere la ligne courbe CEG, que i'imagine estre décrite par l'intersection, de la Parabole CKN, qu'on fait mouuoir en telle sorte que son diametre KL est toûjours sur la ligne droite AB, & de la regle GL qui tourne cependant autour du point G en telle sorte qu'elle passe toûjours dans le plan de cette Parabole par le point L. Et ie fais KL ∞a, & le costé droit principal, c'est à dire celuy qui se rapporte a l'aissieu de cette Parabole, aussi égal à a, & GA $\infty 2a$, & CB ou MA ∞y, & CM ou AB ∞x. Puis à cause des triangles semblables GMC & CBL, GM qui est $2a-y$, est à MC qui est x, comme CB qui est y, est à BL qui est par consequent $\frac{xy}{2a-y}$. Et pource que LK est a, BK est $a - \frac{xy}{2a-y}$, ou bien $\frac{2aa - ay - xy}{2a-y}$. Et enfin pource que ce mesme BK estant vn segment du diametre de la Parabole, est à BC qui luy est appliquée par ordre, comme celle-cy est au costé droit qui est a, le calcul monstre que $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, est égal à axy. Et par conse-



quent que le point C est celuy qui estoit demandé. Et il peut estre pris en tel endroit de la ligne CEG qu'on veüille choisir, ou aussi en son adiointe *c*EG*c* qui se décrit en mesme façon, excepté que le sommet de la Parabole est tourné vers l'autre costé, ou enfin en leurs contreposées NI*o*, *n*IO, qui sont décrites par l'intersection que fait la ligne GL en l'autre costé de la Parabole KN.

Or encore que les paralleles données AB, IH, ED, & GF ne fussent point égalemens distantes, & que GA ne les couppast point a angles droits, ny aussi les lignes tirées du point C vers elles, ce point C ne laisseroit pas de se trouuer toûjours en vne ligne courbe, qui seroit de cette mesme nature. Et il s'y peut aussi trouuer quelquefois, encore qu'aucune des lignes données ne soient paralleles. Mais si lors qu'il y en a 4 ainsi paralleles, & vne cinquiéme qui les trauerse: & que le parallelepipede de trois des lignes tirées du point cherché, l'vne sur cette cinquiéme, & les 2 autres sur 2 de celles qui sont paralleles; soit égal à celuy, des deux tirées sur les deux autres paralleles, & d'vne autre ligne donnée. Ce point cherché est en vne ligne courbe d'vne autre nature, à sçauoir en vne qui est telle, que toutes les lignes droites appliquées par ordre à son diametre estant égales à celles d'vne section conique, les segmens de ce diamettre, qui sont entre le sommet & ces lignes, ont mesme proportion à vne certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux segmens du diametre de la section conique, ausquels les pareilles lignes sont appliquées par ordre. Et ie ne sçaurois veritablement dire que cette ligne soit moins simple que la precedente, laquelle i'ay creu toutefois deuoir prendre pour la premiere, à cause que la description, & le calcul en sont en quelque façon plus faciles.

Pour les lignes qui seruent aux autres cas, ie ne m'arresteray point à les distinguer par especes. Car ie n'ay pas entrepris de dire tout; & ayant expliqué la façon de trouuer vne infinité de poins par ou elles passent, ie pense auoir assez donné le moyen de les décrire.

Mesme il est à propos de remarquer, qu'il y a grande difference entre cette façon de trouuer plusieurs poins

Quelles sont les lignes courbes qu'on décrit en trouuant plusieurs de leurs poins, qui peuuent estre receuës en Geometrie.

pour tracer vne ligne courbe, & celle dont on se sert pour la spirale, & ses semblables. Car par cette derniere on ne trouue pas indifferemment tous les poins de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuuent estre determinez par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, & ainsi à proprement parler on ne trouue pas vn de ses poins. c'est à dire pas vn de ceux qui luy sont tellement propres, qu'ils ne puissent estre trouués que par elle: Au lieu qu'il ny a aucun point dans les lignes qui seruent a la question proposée, qui ne se puisse rencontrer entre ceux qui se determinent par la façon tantost expliquée. Et pourceque cete façon de tracer vne ligne courbe, en trouuant indifferemment plusieurs de ses poins, ne s'estend qu'a celles qui peuuent aussi estre descrites par vn mouuement regulier & continu, on ne la doit pas entierement reietter de la Geometrie.

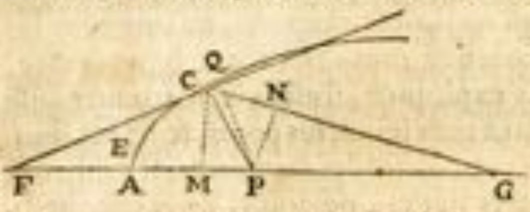
Quelles sont aussi celles qu'on décrit auec vne corde, qui peuuent y estre receuës.

Et on n'en doit pas reietter non plus, celle ou on se sert d'vn fil, ou d'vne corde repliée, pour determiner l'egalité ou la difference de deux ou plusieurs lignes droites qui peuuent estre tirées de chasque point de la courbe qu'on cherche, à certains autres poins, ou sur certaines autres lignes à certains angles. Ainsi que nous auons fait en la Dioptrique pour expliquer l'Ellipse & l'Hyperbole. Car encore qu'on n'y puisse reçeuoir aucunes lignes qui semblent à des cordes, c'est à dire qui deuiennent tantost droites & tantost courbes, à cause que la proportion, qui est entre les droites & les courbes, n'estant pas connuë, & mesme ie croy ne le pouuant estre par les hommes, on ne pourroit rien conclure de la qui fust exact & assuré. Toutefois à cause qu'on ne se sert de cordes en ces constructions, que pour determiner des lignes droites, dont on connoist parfaitement la longeur, cela ne doit point faire qu'on les reiette.

Que pour trouuer toutes les proprietez des lignes courbes, il suffit de sçauoir le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites, & la façon de tirer d'autres lignes qui les couppent en tous ces poins a angles droits.

Or de cela seul qu'on sçait le rapport, qu'ont tous les poins d'vne ligne courbe à tous ceux d'vne ligne droite, en la façon que i'ay expliquée; il est aysé de trouuer aussi le rapport qu'ils ont à tous les autres poins, & lignes données: & ensuite de connoistre les diametres, les aissieux, les centres, & autres lignes, ou poins, à qui chaque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus simple, qu'aux autres: & ainsi d'imaginer diuers moyens pour les décrire, & d'en choisir les plus faciles. Et mesme on peut aussi par cela seul trouuer quasi tout ce qui peut estre determiné touchant la grandeur de l'espace qu'elles comprennent, sans qu'il soit besoin que i'en donne plus d'ouuerture. Et enfin pour ce qui est de toutes les autres proprietez qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que de la grandeur des angles qu'elles font auec quelques autres lignes. Mais lors qu'on peut tirer des lignes droites qui les couppent a angles droits, au poins ou elles sont rencontrées par celles auec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que ie prens icy pour le mesme, qui couppent leurs contingentes; la grandeur de ces angles n'est pas plus malaisée à trouuer, que s'ils estoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoy ie croiray auoir mis icy tout ce qui est requis pour les elemens des lignes courbes, lors que i'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent a angles droits sur tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le probleme le plus vtile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

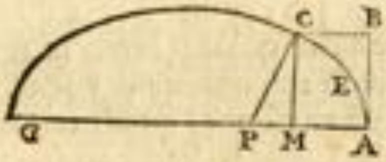
Façon generale pour trouuer des lignes droites, qui couppent les courbes données, ou leurs contingentes, à angles droits.



Soit CE la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui fasse auec elle des angles droits. Ie suppose la chose déja faite, & que la ligne cherchée est CP, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite GA, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne CE: en sorte que faisant MA ou CB $\propto y$, & CM, ou BA $\propto x$ i'ay quelque Equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais PC $\propto s$, & PA $\propto v$ ou PM $\propto v - y$, & à cause du triangle rectangle PMC i'ay ss, qui est le quarré de la baze égal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrez des deux costez. C'est à dire i'ay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, ou bien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cette Equation, i'oste de l'autre Equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe CE à ceux de la droite GA, l'vne des deux quantitez indeterminées x ou y. Ce qui est aisé a faire en mettant par tout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cette somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veüille oster; ou bien

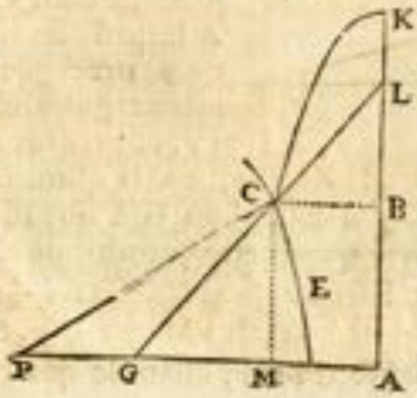
bien si c'est y, en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. De cette somme, au lieu d'yy, ou y^3, &c. De façon qu'il reste toûjours aprés cela vne Equation, en laquelle il n'y a plus qu'vne seule quantité indeterminée, x, ou y.

Comme si CE est vne Ellipse, & que MA soit le segment de son diametre, auquel CM soit appliquée par ordre, & qui ait r pour son costé droit, & q pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1. liu. d'Apollonius.



$xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, d'où ostant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$. ou bien,

$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ égal à rien. Car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme que d'en faire vne partie égale à l'autre.



Tout de mesme si CE est la ligne courbe décrite par le mouuement d'vne Parabole en la façon cy-dessus expliquée, & qu'on ait posé b pour GA, c pour KL, & d pour le costé droit du diametre KL en la parabole : l'Equation qui explique le rapport qui

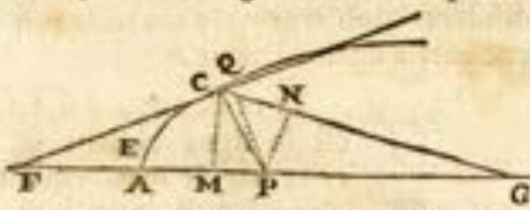
qui est entre x & y, est $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \infty 0$.

D'où ostant x, on a $y^3 - byy - cdy + bcd + dy \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. Et remettant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \infty 0.$$

Et ainsi des autres.

Mesme encore que les poins de la ligne courbe ne se rapportassent pas en la façon que i'ay dite à ceux d'vne ligne droite, mais en toute autre qu'on sçauroit imaginer, on ne laisse pas de pouuoir toûjours auoir vne telle Equation. Comme si CE est vne ligne, qui ait tel rapport aux trois poins F, G, & A, que les lignes droites tirées de chacun de ses poins comme C, iusques au point F, surpassent la ligne FA d'vne quantité qui ait certaine proportion donnée à vne autre quantité dont GA surpasse les lignes tirées des mesmes poins iusques à G.



Faisons $GA \infty b$, $AF \infty c$, & prenant à discretion le point C dans la courbe, que la quantité dont CF surpasse FA, soit à celle dont GA surpasse GC, comme d à e, en sorte que si cette quantité qui est indeterminée se nomme z, FC est $c + z$, & GC est $b - \frac{e}{d}z$. Puis posant $MA \infty y$, GM est $b - y$, & FM est $c + y$, & à cause du triangle rectangle CMG, ostant le quarré de GM du quarré de GC, on a le quarré de CM, qui est $\frac{cc}{dd}zz - \frac{2bc}{d}z + 2by - yy$. Puis ostant le quarré de FM du quarré de FC, on a encore le quarré de CM en d'autres termes, à sçauoir $zz + 2ez - 2ey - yy$, & ces termes estant égaux aux precedens, ils font connoistre y, ou MA, qui est $\frac{ddzz + 2ddez - cczz + 2bcdz}{2bdd + 2edd}$, & substituant cette somme au lieu d'y dans le quarré de CM, on trouue qu'il s'exprime en ces termes.

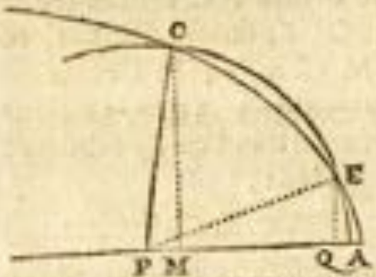
$$\frac{bddzz + ceczz + 2bcddz - 2bcdzz}{bdd + edd} - yy.$$

Puis supposant que la ligne droite PC rencontre la courbe a angles droits au point C, & faisant $PC = s$, & $PA = v$ comme deuant, PM est $v - y$; & à cause du triangle rectangle PCM, on a $ss - vv + 2vy - yy$ pour le quarré de CM; ou derechef ayant au lieu d'y substitué la somme qui luy est égale, il vient,

$$zz + \frac{2bcddz - 2bcdvz - 2cddvz - 2bddvz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cce + eve - ddv} = 0$$ pour l'Equation que nous cherchions.

Or aprés qu'on a trouué vne telle Equation, au lieu de s'en seruir pour connoistre les quantitez x, ou y, ou z, qui sont déja données, puis que le point C est donné, on la doit employer à trouuer v, ou s, qui determinent le point P, qui est demandé. Et a cet effect il faut considerer, que si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe CE, sans la coupper: mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus esloigné du point

A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non seulement au point C, mais aussi necessairement en quelque autre. Puis il faut aussi considerer, que lors que ce cercle couppe la ligne courbe CE, l'Equation par laquelle on cherche la quantité x, ou y, ou quelque autre semblable, en supposant PA & PC estre connuës, contient necessairement deux racines, qui sont inégales. Car par exemple si ce cercle couppe la courbe aux poins C & E, ayant tiré EQ parallele a CM, les noms des quantitez indeterminées x & y, conuiendront aussi bien aux lignes EQ, & QA, qu'à CM, & MA; puis PE est égale à PC, à cause du cercle, si bien que cherchant les lignes

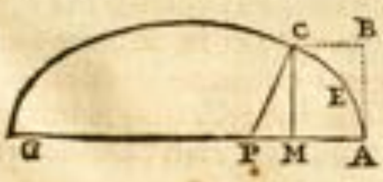


EQ & QA, par PE & PA qu'on suppose comme données, on aura la mesme Equation, que si on cherchoit CM & MA par PC, PA. D'où il suit éuidemment, que la valeur d'x, ou d'y, ou de telle autre quantité qu'on aura supposée, sera double en cette Equation, c'est à dire qu'il y aura deux racines inégales entre elles; & dont l'vne sera CM, l'autre EQ, si c'est x qu'on cherche; ou bien l'vne sera MA, & l'autre QA, si c'est y: & ainsi des autres. Il est vray que si le point E ne se trouue pas du mesme costé de la courbe que le point C, il n'y aura que l'vne de ces deux racines qui soit vraye, & l'autre sera renuersée, ou moindre que rien: mais plus ces deux poins, C, & E, sont proches l'vn de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines ; & enfin elles sont entierement égales, s'ils sont tous deux ioins en vn ; c'est à dire si le cercle, qui passe par C, y touche la courbe CE sans la coupper.

De plus il faut considerer que lors qu'il y a deux racines égales en vne Equation elle a necessairement la mesme forme, que si on multiplie par soy mesme la quantité qu'on y suppose estre inconnuë moins la quantité connuë qui luy est égale, & qu'aprés cela si cette deniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par vne autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque ; afin qu'il puisse y auoir separement Equation entre chacun des termes de l'vne, & chacun des termes de l'autre.

Comme par exemple ie dis que la premiere Equation trouuée cy-dessus, à sçauoir

$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ doit auoir là mesme forme que celle qui se produit en faisant e égal à y, & multipliant $y - e$ par soy mesme, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en sorte qu'on peut comparer separement chacun de leurs termes, & dire que puisque le premier qui est yy est tout le mesme en l'vne qu'en l'autre, le second qui est en l'vne $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$ est égal au second de l'autre qui est $- 2ey$, d'où cherchant la quantité v qui est la ligne PA, on à



$v \infty e - \frac{r}{q} e + \frac{1}{2} r$, ou bien à cause que nous auons supposé e égal a y, on a $v \infty y - \frac{r}{q} y + \frac{1}{2} r$. Et ainsi on pourroit trouuer ;

par le troisiéme terme $ee \propto \frac{qvv - qss}{q - r}$. mais pour ce que la quantité v determine assez le point P, qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre.

Tout de mesme la seconde Equation trouuée cy-dessus; à sçauoir,

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd.$$

doit auoir mesme forme, que la somme qui se produit lors qu'on multiplie $yy - 2ey + ee$ par

$$y^4 + fy^3 + gg\,yy + h^3y + k^4,$$ qui est

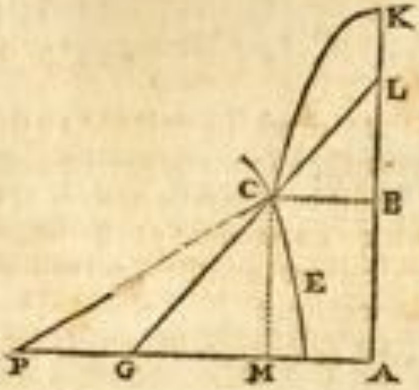
$$y^6 \left.\begin{matrix} +f \\ -2e \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4.$$

de façon que de ces deux Equations i'en tire six autres, qui seruent à connoistre les six quantitez f, g, h, k, v, & s. D'où il est fort aisé à entendre, que de quelque genre que puisse estre la ligne courbe proposée, il vient toûjours par cette façon de proceder autant d'Equations, qu'on est obligé de supposer de quantitez, qui sont inconnuës. Mais pour demesler par ordre ces Equations, & trouuer enfin la quantité v, qui est la seule dont on a besoin, & à l'occasion de laquelle on cherche les autres: Il faut premierement par le second terme chercher f, la premiere des quantitez inconnuës de la derniere somme, & on trouue $f \propto 2e - 2b$.

Puis par le dernier il faut chercher K, la derniere des quantitez inconnuës de la mesme somme, & on trouue $k^4 \propto \frac{bbccdd}{ee}$.

Puis par le troisiéme terme il faut chercher g la seconde quantité, & on a $gg \infty 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$. Puis par le penultiéme il faut chercher h la penultiéme quantité, qui est $h^2 \infty \frac{bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Et ainsi il faudroit continuer suiuant ce mesme ordre iusques à la derniere, s'il y en auoit dauantage en cette somme ; car c'est chose qu'on peut toûjours faire en mesme façon.

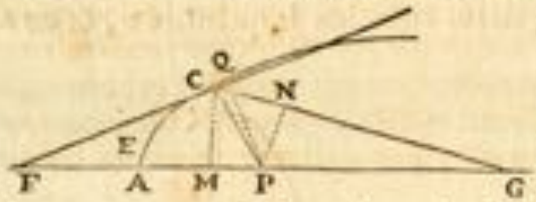
Puis par le terme qui suit en ce mesme ordre, qui est icy le quatriéme, il faut chercher la quantité v, & on a



$v \infty \frac{be^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}$
ou mettant y au lieu d'e qui luy est égal on a
$v \infty \frac{by^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}$
pour la ligne A P.

Et ainsi la troisiéme Equation, qui est

$zz \frac{+ 2bcddz - 3bcdez - 2cddvz - 3bdevz - bddzz + bddvv}{bdd + cee + eev} \frac{- cddzz + cddvv}{- ddv}$ à la mesme forme que $zz - 2fz + ff$, en supposant f égal a z, si bien que il y a derechef Equation entre $-2f$, ou $-2z$, & $\frac{+ 2bcdd - 3bcde - 2cddv - 3bdev}{bdd + cee + eev - ddv}$. D'où on connoist que la quantité v est $\frac{bcdd - bcde + bddv + ceev}{cdd + bde - eev + ddv}$.



C'est pourquoy composant la ligne AP, de cette somme égale à v, dont toutes les quantitez sont connuës, & tirant du point P ainsi trouvé, vne ligne droite vers C, elle y couppe la courbe CE a angles droits; qui est ce qu'il falloit faire. Et ie ne voy rien qui empesche qu'on estende ce Probleme en mesme façon à toutes les lignes courbes, qui tombent sous quelque cacul Geometrique.

Mesme il est à remarquer touchant la derniere somme, qu'on prent à discretion, pour remplir le nombre des dimensions de l'autre somme, lors qu'il y en manque, comme nous auons pris tantost $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$; que les signes $+$ & $-$ y peuuent estre supposez tels, qu'on veut, sans que la ligne v, ou AP, se trouue diuerse pour cela, comme vous pourrez aisement voir par experience. Car s'il falloit que ie m'arretasse à demonstrer tous les theoresmes dont ie

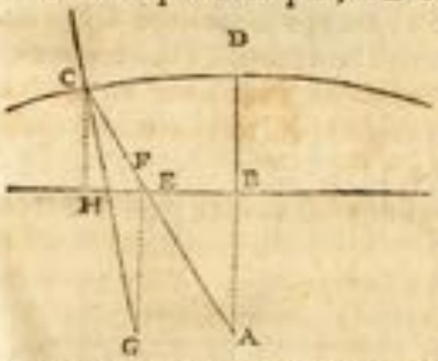
fais

fais quelque mention, ie serois contraint d'écrire vn volume beaucoup plus gros que ie ne desire. Mais ie veux bien en passant vous auertir que l'inuention de supposer deux Equations de mesme forme, pour comparer separement tous les termes de l'vne à ceux de l'autre, & ainsi en faire naistre plusieurs d'vne seule, dont vous auez veu icy vn exemple, peut seruir à vne infinité d'autres Problemes, & n'est pas l'vne des moindres de la methode dont ie me sers.

Ie n'ajoûte point les constructions, par lesquelles on peut décrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, en suite du calcul que ie viens d'expliquer, à cause qu'il est toûjours aisé de les trouuer : Bien que souuent on ait besoin d'vn peu d'adresse, pour les rendre courtes & simples.

Exemple de la construction de ce probleme, en la conchoide.

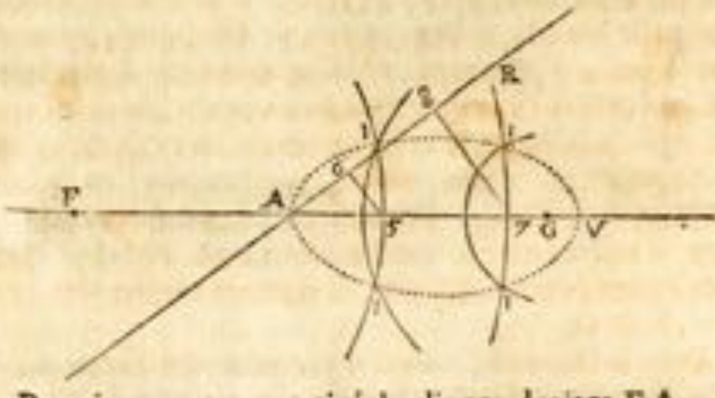
Comme par exemple, si DC est la premiere conchoïde des anciens, dont A soit le pole, & BH la regle : en sorte que toutes les lignes droites qui regardent vers A, & sont comprises entre la courbe CD, & la droite BH, comme DB & CE, soient égales : Et qu'on veüille trouuer la ligne CG qui la couppe au point C à angles droits. On pourroit en cherchant, dans la ligne BH, le point par où cette ligne CG, doit passer, selon la methode icy expliquée, s'engager dans vn



calcul autant ou plus long qu'aucun des precedens : Et toutefois la construction, qui deuroit aprés en estre deduite, est fort simple. Car il ne faut que prendre CF en la ligne droite CA, & la faire égale à CH qui est perpendiculaire sur HB : puis du point F tirer FG, parallele à BA & égale à EA : au moyen de quoy on a le point G, par lequel doit passer CG la ligne cherchée.

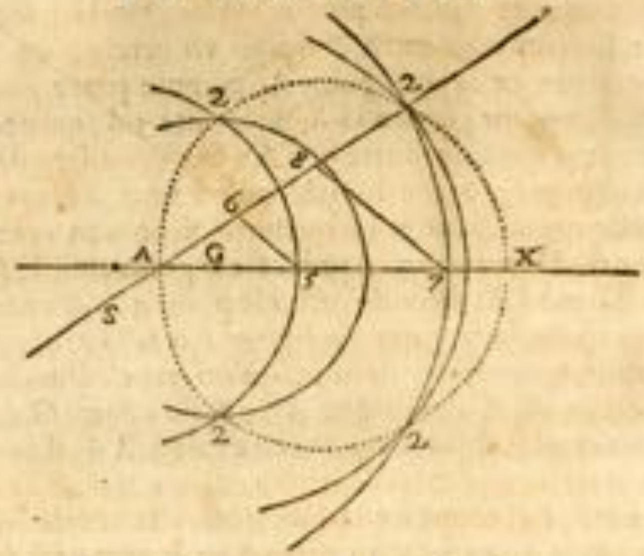
Explication de 4. nouueaux genres d'Ouales, qui seruent à l'Optique.

Au reste afin que vous sçachiées que la consideration des lignes courbes icy proposée n'est pas sans vsage, & qu'elles ont diuerses proprietez, qui ne cedent en rien a celles des sections coniques, ie veux encore ajoûter icy l'explication de certaines Ouales, que vous verrez estre tres-vtiles pour la Theorie de la Catoptrique, & de la Dioptrique. Voicy la façon dont ie les décris.



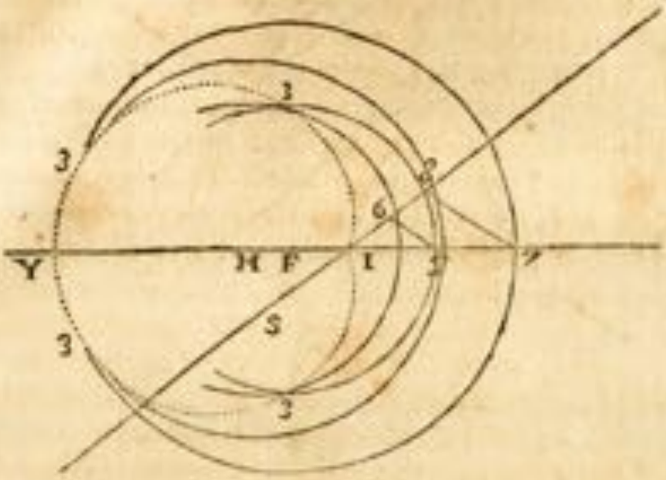
Premierement ayant tiré les lignes droites FA, & AR, qui s'entrecouppent au point A, sans qu'il importe à quels angles, ie prens en l'vne le point F à discretion, c'est à dire plus ou moins esloigné du point A selon que ie veux faire ces Ouales plus ou moins grandes, & de ce point F, comme centre ie décris vn cercle, qui paſſe quelque peu au delà du point A, comme par le point 5, puis de ce point 5 ie tire la ligne droite 5 6, qui couppe l'autre au point 6, en ſorte que A 6 ſoit moindre que A 5, ſelon telle proportion donnée qu'on veut, à ſçauoir ſelon celle qui meſure les refractions, ſi on s'en veut ſeruir pour la Dioptrique. Aprés cela ie prens auſſi le point G en la ligne FA, du coſté où eſt le point 5, a diſcretion, c'eſt à dire en faiſant que les lignes AF & GA ont entre elles telle proportion donnée qu'on veut. Puis ie fais R A égale à G A en la ligne A 6, & du centre G décriuant vn cercle, dont le rayon ſoit égale à R 6, il couppe l'autre cercle de part & d'autre au point 1, qui eſt l'vn de ceux par où doit paſſer la premiere des Ouales cherchées. Puis derechef du centre F ie décris vn cercle, qui paſſe vn peu au deçà, ou au delà du point 5, comme par le point 7, & ayant tiré la ligne droite 7 8 parallele a 5 6, du centre G ie décris vn autre cercle, dont le rayon eſt égal à la ligne R 8. Et ce cercle couppe celuy qui paſſe par le point 7 au point 1, qui eſt encore l'vn de ceux de la meſme Ouale. Et ainſi on en peut trouuer autant d'autres qu'on voudra, en tirant derechef d'autres lignes paralleles à 7 8, & d'autres cercles des centres F & G.

Pour la ſeconde Ouale il n'y a point de difference, ſinon qu'au lieu d'A R il faut de l'autre coſté du point A prendre A S égal à A G, & que le rayon du cercle décrit du centre G, pour coupper celuy qui eſt décrit du centre F & qui paſſe par le point 5, ſoit égal à la

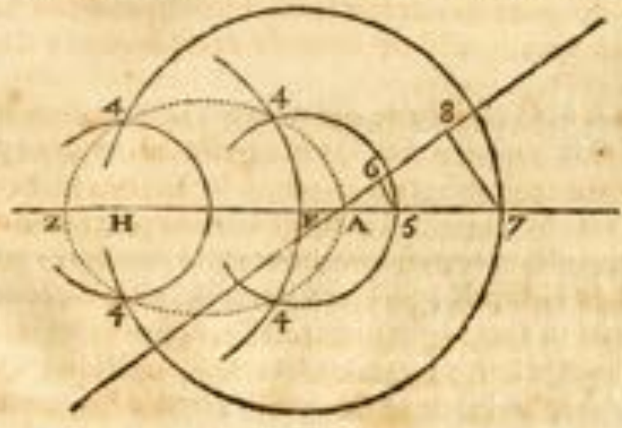


ligne S 6 ; ou qu'il ſoit égal à S 8, ſi c'eſt pour coupper celuy qui paſſe par le point 7, & ainſi des autres. Au moyen de quoy ces cercles s'entrecouppent aux poins marquez 2, 2, qui ſont ceux de cette ſeconde Ouale A 2 X.

Pour la troiſiéme & la quatriéme, au lieu de la ligne A G il faut prendre AH de l'autre coſté du point A, à ſçauoir du meſme qu'eſt le point F. Et il y a icy de plus à obſeruer que cette ligne AH doit eſtre plus grande que A F : laquelle peut meſme eſtre nulle, en ſorte que le point F ſe rencontre où eſt le point A, en la deſcription de toutes ces Ouales. Aprés cela les lignes A R, & A S eſtant égales à A H, pour décrire la troiſiéme Ouale A 3 Y, ie fais vn cercle du centre H, dont le rayon eſt

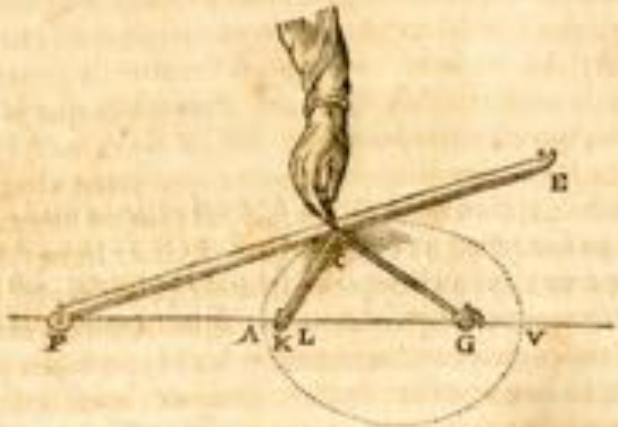


égal à S 6, qui couppe au point 3 celuy du centre F, qui passe par le point 5; & vn autre dont le rayon est égal à S 8, qui couppe celuy qui passe par le point 7, au point aussi marqué 3; & ainsi des autres. Enfin pour la derniere



ouale ie fais des cercles du centre H, dont les rayons sont égaux aux lignes R 6, R 8, & semblables, qui couppent les autres cercles aux poins marquez 4.

On pourroit encore trouuer vne infinité d'autres moyens pour décrire ces mesmes ouales. Comme par exemple, on peut tracer la premiere AV, lors qu'on suppose les lignes FA & AG estre égales, si on diuise la toute FG au point L, en sorte que FL soit à LG, com-

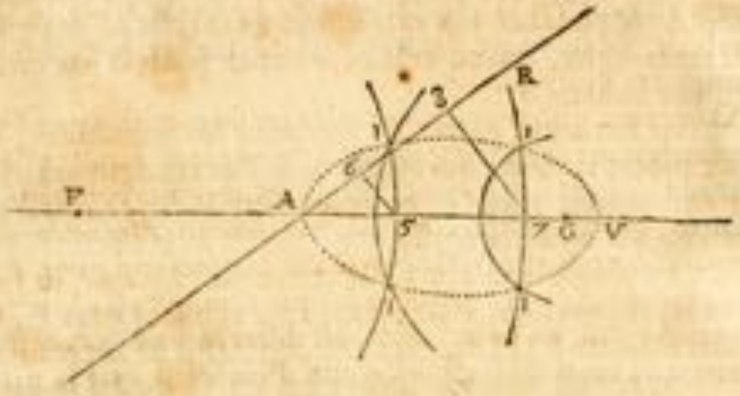


me A 5 à A 6. C'est à dire qu'elles ayent la proportion, qui mesure les refractions. Puis ayant diuisé AL en deux parties égales au point K, qu'on fasse tourner vne regle comme FE, autour du point F, en pressant du doigt C, la corde EC, qui estant attachée au bout de cette regle vers E, se replie de C vers K, puis de K derechef vers C, & de C vers G, où son autre bout soit attaché, en sorte que la longueur de cette corde soit composée de celle des lignes GA plus AL plus FE moins AF. Et ce sera le mouuement du point C, qui décrira cette ouale, à l'imitation de ce qui a esté dit en la Dioptrique de l'Ellipse & de l'Hyperbole. Mais ie ne veux point m'arrester plus longtemps sur ce suiet.

Or encore que toutes ces ouales semblent estre quasi de mesme nature, elles sont neantmoins de 4 diuers genres, chacun desquels contient sous soy vne infinité d'autres genres, qui derechef contiennent chacun autant de diuerses especes, que fait le genre des Ellipses, ou celuy des Hyperboles. Car selon que la proportion qui est entre les lignes A5, A6, ou semblables, est differente; le genre subalterne de ces ouales est different. Puis selon que la proportion, qui est entre les lignes AF, & AG, ou AH, est changée, les ouales de chaque genre subalterne changent d'espece. Et selon qu'AG, ou AH est plus ou moins grãde, elles sont diuerses en grandeur. Et si les lignes A 5 & A 6 sont égales, au lieu des ouales du premier genre ou du troisiéme, on ne décrit que des lignes droites; mais au lieu de celles du second on à toutes les Hyperboles possibles; & au lieu de celles du dernier toutes les Ellipses.

Les proprietez de ces ouales touchant les reflexions, & les refractions.

Outre cela en chacune de ces ouales il faut considerer deux parties, qui ont diuerses proprietez; à sçauoir en la premiere, la partie qui est vers A, fait que les rayons, qui estant dans l'air viennent du point F, se retournent tous vers le point G, lors qu'ils rencontrent la superficie conuexe d'vn verre, dont la superficie est 1 A 1, & dans lequel les refractions se font telles, que suiuant ce qui a esté dit en la Dioptrique, elles peuuent toutes estre mesurées par la proportion, qui est entre les lignes A 5 & A 6, ou semblables, par l'aide desquelles on a décrit cette ouale.



Mais la partie, qui eſt vers V, fait que les rayons qui viennent du point G ſe refleſchiroient tous vers F, s'ils y rencontroient la ſuperficie concaue d'vn miroir, dont la figure fuſt 1 V 1, & qui fuſt de telle matiere qu'il diminuaſt la force de ces rayons, ſelon la proportion qui eſt entre les lignes A 5 & A 6: Car de ce qui a eſté demonſtré en la Dioptrique, il eſt éuident que cela poſé, les angles de la reflection ſeroient inégaux, auſſi bien que ſont ceux de la refraction, & pourroient eſtre meſurez en meſme ſorte.

En la ſeconde ouale la partie 2 A 2 ſert encore pour les reflexions dont on ſuppoſe les angles eſtre inégaux. Car eſtant en la ſuperficie d'vn miroir compoſé de meſme matiere que le precedent, elle feroit tellement refleſchir tous les rayons, qui viendroient du point G, qu'ils ſembleroient aprés eſtre refleſchis venir du point F. Et il eſt à remarquer, qu'ayant fait la ligne A G beaucoup plus

plus grande que AF, ce miroir feroit conuexe au milieu, vers A, & concaue aux extrémitez : car telle eſt la figure de cette ligne, qui en cela repreſente plûtoſt vn cœur qu'vne ouale.

Mais ſon autre partie X 2 ſert pour les refractions, & fait que les rayons, qui eſtant dans l'air tendent vers F, ſe detournent vers G, en trauerſant la ſuperficie d'vn verre, qui en ait la figure.

La troiſiéme ouale ſert toute aux refractions, & fait que les rayons, qui eſtant dans l'air tendent vers F, ſe vont rendre vers H dans le verre, aprés qu'ils ont trauerſé ſa ſuperficie, dont la figure eſt A 3 Y 3, qui eſt conuexe par tout, excepté vers A où elle eſt vn peu concaue, en ſorte qu'elle à la figure d'vn cœur auſſi bien que la precedente. Et la difference qui eſt entre les deux parties de cette ouale, conſiſte en ce que le point F eſt plus proche de l'vne, que n'eſt le point H; & qu'il eſt plus eſloigné de l'autre, que ce meſme point H.

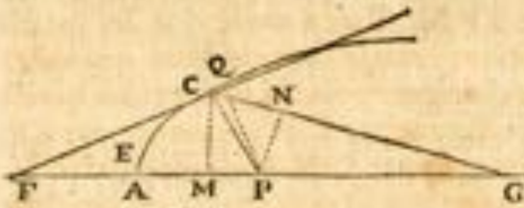
En meſme façon la derniere ouale ſert toute aux reflexions, & fait que ſi les rayons, qui viennent du point H, rencontroient la ſuperficie concaue d'vn miroir de meſme matiere que les precedens, & dont la figure fuſt A 4 Z 4, ils ſe refleſchiroient tous vers F.

De façon qu'on peut nommer les poins F, & G, ou H les poins bruſlans de ces ouales, à l'exemple de ceux des Ellipſes, & des Hyperboles, qui ont eſté ainſi nommez en la Dioptrique.

I'omets quantité d'autres refractions & reflexions, qui ſont reglées par ces meſmes ouales : car n'eſtant que les conuerſes, ou les contraires de celles-cy, elles en

Demonstration des proprietez de ces ouales touchant les reflexions & refractions.

peuuent facilement estre deduites. Mais il ne faut pas que i'omette la demonstration de ce que i'ay dit. Et à cet effect, prenons par exemple le point C à discretion en la premiere partie de la premiere de ces ouales ; puis tirons



la ligne droite CP, qui couppe la courbe au point C à angles droits, ce qui est facile par le Probleme precedent ; Car prenant b pour AG, c pour AF, $c + z$ pour FC ; & supposant que la proportion qui est entre d & e, que ie prendray icy toûjours pour celle qui mesure les refractions du verre proposé, designe aussi celle qui est entre les lignes A 5, & A 6, ou semblables, qui ont serui pour décrire cette ouale, ce qui donne $b - \frac{e}{d}z$ pour GC : on trouue que la ligne AP est $\frac{bcdd - bcde + bddz + cdez}{bde + cdd + ddz - eez}$ ainsi qu'il a esté monstré cy dessus. De plus du point P ayant tiré PQ à angles droits sur la droite FC, & PN aussi à angles droits sur GC, considerons que si PQ est à PN, comme d est à e, c'est à dire, comme les lignes qui mesurent les refractions du verre conuexe AC, le rayon qui vient du point F au point C, doit tellement s'y courber en entrant dans ce verre, qu'il s'aille rendre aprés vers G : ainsi qu'il est tres éuident de ce qui a esté dit en la Dioptrique. Puis enfin voyons par le calcul, s'il est vray, que PQ soit à PN ; comme d est à e. Les triangles rectangles PQF, & CMF sont semblables; d'où il suit que CF est à CM, comme FP est à PQ; & par consequent que FP, estant multipliée par CM, & diuisée par CF, est égale à PQ. Tout de mesme les triangles rectangles PNG, & *CMG* sont sembla-bles; d'où il suit que *GP*, multipliée par CM, & diuisée par *CG*, est égale à PN. Puis à cause que les multi-plications, ou diuisions, qui se font de deux quantitez par vne mesme, ne changent point la proportion qui est entre elles; si FP multipliée par CM; & diuisée par CF, est à *GP* multipliée aussi par CM & diuisée par *CG*; comme *d* est à *e*, en diuisant l'vne & l'autre de ces deux sommes par CM, puis les multipliant toutes deux par CF, & derechef par *CG*, il reste FP multipliée par *CG*, qui doit estre à *GP* multipliée par CF, comme *d* est à *e*.

Or par la construction *FP* est $c + \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$

ou bien $FP \propto \frac{bcdd + ccdd + bddz + cddz}{bde + cdd + ddz - eez}$. Et *CG* est

$b - \frac{1}{2}z$. Si bien que multipliant *FP* par *CG* il vient

$$\frac{bbcdd + bccdd + bbddz + bcddz - \frac{1}{2}bcddz - \frac{1}{2}ccddz - \frac{1}{2}bddzz - \frac{1}{2}cddzz}{bde + cdd + ddz - eez}$$

Puis *GP* est $b \frac{- bcdd + bcde - bddz - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$ ou bien

$GP \propto \frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$ & *CF* est $c + z$;

si bien que multipliant *GP* par *CF*, il vient

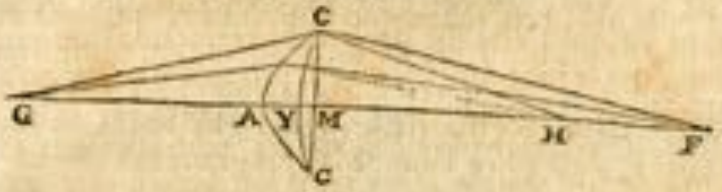
$$\frac{bbcde + bccde - bceez - cceez + bbdez + bcdez - beezz - ceezz}{bde + cdd + ddz - eez}$$

Et pource que la premiere de ces sommes diuisée par *d*, est la mesme que la seconde diuisée par *e*, il est manifeste, que *FP* multipliée par *CG* est à *GP* multipliée par *CF*;

c'eſt à dire que PQ eſt à PN, comme *d* eſt à *e*, qui eſt tout ce qu'il falloit demonſtrer.

Et ſçachez, que cette meſme demonſtration s'étend à tout ce qui a eſté dit des autres refractions ou reflexions, qui ſe font dans les oualles propoſées; ſans qu'il y faille changer aucune choſe, que les ſignes + & -- du calcul. C'eſt pourquoy chacun les peut aiſement examiner de ſoy meſme, ſans qu'il ſoit beſoin que ie m'y arreſte.

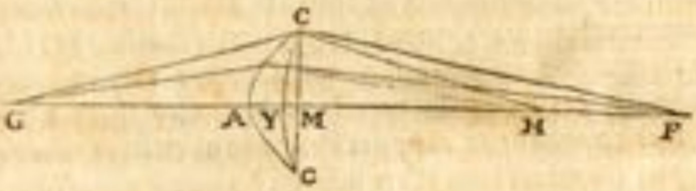
Mais il faut maintenant, que ie ſatisfaſſe a ce que i'ay omis en la Dioptrique, lors qu'aprés auoir remarqué, qu'il peut y auoir des verres de pluſieurs diuerſes figures, qui faſſent auſſi bien l'vn que l'autre, que les rayons venans d'vn meſme point de l'obiet, s'aſſemblent tous en vn autre point aprés les auoir trauerſez. Et qu'entre ces verres, ceux qui ſont fort conuexe d'vn coſté, & concaues de l'autre, ont plus de force pour bruſler, que ceux qui ſont également conuexes des deux coſtez. Au lieu que tout au contraire ces derniers ſont les meilleurs pour les lunetes. Ie me ſuis contenté d'expliquer ceux que i'ay crû eſtre les meilleurs pour la pratique, en ſuppoſant la difficulté que les artiſans peuuent auoir à les tailler. C'eſt pourquoy, afin qu'il ne reſte rien à ſouhaiter touchant la theorie de cette ſcience, ie dois expliquer encore icy la figure des verres, qui ayant l'vne de leurs ſuperficies autant conuexe, ou concaue, qu'on voudra, ne laiſſent pas de faire que tous les rayons, qui viennent vers eux d'vn meſme point, ou paralleles, s'aſſemblent aprés en vn meſme point; & celles des verres qui font le ſemblable, eſtant également conuexe des deux coſtez, ou bien la conuexité de l'vne de leurs ſuperficies ayant la proportion donnée à celle de l'autre.



Poſons pour le premier cas, que les poins G, Y, C, & F eſtant donnez, les rayons qui viennent du point G, ou bien qui ſont paralleles à G A ſe doiuent aſſembler au point F, aprés auoir trauerſé vn verre ſi concaue, qu'Y eſtant le milieu de ſa ſuperficie interieure, l'extremité en ſoit au point C, en ſorte que la corde CMC, & la fleche YM de l'arc CYC, ſont données. La queſtion va là, que premierement il faut conſiderer, de laquelle des oûales expliquées, la ſuperficie du verre YC, doit auoir la figure, pour faire que tous les rayons, qui eſtant dedans tendent vers vn meſme point, comme vers H, qui n'eſt pas encore connu, s'aillent rendre vers vn autre, à ſçauoir vers F, aprés en eſtre ſortis. Car il n'y a aucun effect touchant le rapport des rayons changé par reflexion, ou refraction d'vn point à vn autre, qui ne puiſſe eſtre cauſé par quelqu'vne de ces oûales. Et on voit aiſement que cettuy-cy le peut eſtre par la partie de la troiſiéme oûale, qui a tantoſt eſté marquée 3 A 3, ou par celle de la meſme, qui a eſté marquée 3 Y 3, ou enfin par la partie de la ſeconde qui a eſté marquée 2 X 2. Et pource que ces trois tombent icy ſous meſme calcul, on doit tant pour l'vne que pour l'autre prendre Y pour

Comment on peut faire vn verre autant conuexe ou concaue, en l'vne de ſes ſuperficies, qu'on voudra, qui raſſemble à vn point donné, tous les rayons qui viennent d'vn autre point donné.

leur ſommet, C pour l'vn des poins de leur circonference, & F pour l'vn de leurs poins bruſlans; aprés quoy il ne reſte plus à chercher que le point H, qui doit eſtre l'autre point bruſlant. Et on le trouue en conſiderant, que la difference, qui eſt entre les lignes FY & FC, doit eſtre a celle, qui eſt entre les lignes HY & HC, comme *d* eſt à *e*, c'eſt à dire, comme la plus grande des lignes qui meſurent les refractions du verre propoſé eſt à la moindre; ainſi qu'on peut voir manifeſtement de la deſcription de ces ouales. Et pource que les lignes FY & FC ſont données, leur difference l'eſt auſſi, & en ſuite celle qui eſt entre HY & HC; pource que la proportion qui eſt entre ces deux differences eſt donnée. Et de plus à cauſe que YM eſt donnée, la difference qui eſt entre MH, & HC, l'eſt auſſi; & enfin pource que CM eſt donnée, il ne reſte plus qu'à trouuer MH le coſté du triangle



rectangle CMH, dont on à l'autre coſté CM, & on a auſſi la difference qui eſt entre CH la baze, & MH le coſté demandé. D'où il eſt aiſé de le trouuer. Car ſi on prend k pour l'excez de CH ſur MH, & *n* pour la longueur de la ligne CM, on aura $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pour MH. Et aprés auoir ainſi le point H, s'il ſe trouue plus loin du point Y, que n'en eſt le point F, la ligne CY doit eſtre la premiere partie de l'ouale du troiſiéme genre, qui a tantoſt eſté nommée 3 A 3: Mais ſi HY eſt moindre que FY, ou bien elle ſurpaſſe HF de tant, que leur difference eſt plus grande à raiſon de la toute FY, que n'eſt e la moindre des lignes qui meſurent les refractions comparée auec d la plus grande, c'eſt à dire que faiſant HF ∞ c, & HY ∞ $c + h$, dh eſt plus grande que $2ce + eh$, & lors CY doit eſtre la ſeconde partie de la meſme ouale du troiſiéme genre, qui a tantoſt eſté nommée 3 Y 3; Ou bien dh eſt égale, ou moindre que $2ce + eh$: & lors CY doit eſtre la ſeconde partie de l'ouale du ſecond genre qui a cy-deſſus eſté nommée 2 X 2. Et enfin ſi le point H eſt le meſme que le point F, ce qui n'arriue que lors que FY & FC ſont égales, cette ligne YC eſt vn cercle.

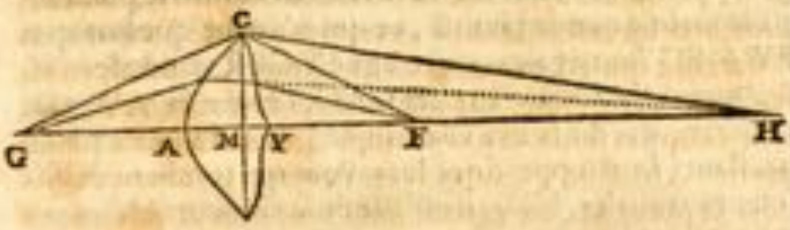
Aprés cela il faut chercher CAC, l'autre ſuperficie de ce verre, qui doit eſtre vne Ellipſe, dont H ſoit le point bruſlant, ſi on ſuppoſe que les rayons qui tombent deſſus ſoient paralleles; & lors il eſt aiſé de la trouuer. Mais ſi on ſuppoſe qu'ils viennent du point G, ce doit eſtre la premiere partie d'vne ouale du premier genre, dont les deux poins bruſlans ſoient G & H, & qui paſſe par le point C: d'où on trouue le point A pour le ſommet de cette ouale, en conſiderant, que GC doit eſtre plus grande que GA, d'vne quantité, qui ſoit à celle dont HA ſurpaſſe HC, comme d à e. Car ayant pris k pour la difference, qui eſt entre CH, & HM, ſi on ſuppoſe x pour AM, on aura $x - k$ pour la difference qui eſt entre AH, & CH; puis ſi on prend g pour celle qui eſt entre GC, & GM, qui ſont données, on aura $g + x$ pour celle qui eſt entre

Comment on peut faire vn verre, qui ait le mesme effect que le precedent, & que la conuexité de l'vne de ses superficies ait la proportion donnée auec celle de l'autre.

GC, & GA; & pource que cette derniere $g + x$ est à l'autre $x - k$, comme d est à e, on à $ge + ex \propto dx - dk$, ou bien $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour la ligne x, ou AM, par laquelle on determine le point A qui estoit cherché.

Posons maintenant pour l'autre cas, qu'on ne donne que les poins GC, & F, auec la proportion qui est entre les lignes AM, & YM, & qu'il faille trouuer la figure du verre ACY, qui fasse que tous les rayons, qui viennent du point G s'assemblent au point F.

On peut derechef icy se seruir de deux ouales dont l'vne, AC, ait G & H pour ses poins brustans; & l'autre,



CY, ait F & H pour les siens. Et pour les trouuer, premierement supposant le point H qui est commun à toutes deux estre connu, ie cherche AM par les trois poins G, C, H, en la façon tout maintenant expliquée; à sçauoir prenant k pour la difference, qui est entre CH, & HM; & g pour celle qui est entre GC, & GM: & AC estant la premiere partie de l'Ouale du premier genre, i'ay $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour AM: puis ie cherche aussi MY par les trois poins F, C, H, en sorte que CY soit la premiere partie d'vne ouale du troisiéme genre; & prenant y pour MY,

&

& f pour la difference, qui eſt entre CF, & FM; i'ay $f + y$, pour celle qui eſt entre CF, & *FY*: puis ayant déja k pour celle qui eſt entre CH, & HM, i'ay k $+ y$ pour celle qui eſt entre CH, & *HY*, que ie ſçay deuoir eſtre à $f + y$ comme e eſt à d, à cauſe de l'Ouale du troiſiéme genre, d'où ie trouue que y ou *MY* eſt $\frac{fe - dk}{d - e}$, puis ioignant enſemble les deux quantitez trouuées pour AM, & MY, ie trouue $\frac{ek \pm fe}{d - e}$ pour la toute AY; D'où il ſuit que de quelque coſté que ſoit ſuppoſé le point H, cette ligne AY eſt toûjours composée d'vne quantité, qui eſt à celle dont les deux enſemble GC, & CF ſurpaſſent la toute GF, Comme e, la moindre des deux lignes qui ſeruent à meſurer les refractions du verre propoſé, eſt à $d - e$, la difference qui eſt entre ces deux lignes. Ce qui eſt vn aſſez beau theoreſme. Or ayant ainſi la toute AY, il la faut coupper ſelon la proportion que doiuent auoir ſes parties AM & MY; au moyen dequoy pource qu'on a déja le point M, on trouue auſſi les poins A & Y; & en ſuite le point H, par le Probleſme precedent. Mais auparauant il faut regarder, ſi la ligne AM ainſi trouuée eſt plus grande que $\frac{ge}{d-e}$ ou plus petite, ou égale. Car ſi elle eſt plus grande, on apprent de là que la courbe AC doit eſtre la premiere partie d'vne ouale du premier genre; & CY la premiere d'vne du troiſiéme, ainſi qu'elles ont eſté icy ſuppoſées: au lieu que ſi elle eſt plus petite, cela monſtre que c'eſt CY, qui doit eſtre la premiere partie d'vne ouale du premier genre; & que AC doit eſtre la premiere d'vne du troiſiéme: Enfin ſi AM eſt égale à

K

$\frac{de}{d+e}$ les deux courbes AC & CY doiuent estre deux hyperboles.

On pourroit estendre ces deux problesmes à vne infinité d'autres cas, que ie ne m'arreste pas a deduire, à cause qu'ils n'ont eu aucun vsage en la Dioptrique.

On pourroit aussi passer outre, & dire, lors que l'vne des superficies du verre est donnée, pourvû qu'elle ne soit que toute plate, ou composée de sections coniques, ou de cercles; comment on doit faire son autre superficie, afin qu'il transmette tous les rayons d'vn point donné, à vn autre point aussi donné. Car ce n'est rien de plus difficile que ce que ie viens d'expliquer; ou plûtost c'est chose beaucoup plus facile, à cause que le chemin en est ouuert. Mais i'ayme mieux, que d'autres le cherchent, afin que s'ils ont encore vn peu de peine à le trouuer, cela leur fasse d'autant plus estimer l'inuention des choses qui sont icy demonstrées.

Comment on peut appliquer ce qui a esté dit icy des lignes courbes décrites sur vne superficie plate, à celles qui se décriuēt dans vn espace qui a trois dimensions.

Au reste ie n'ay parlé en tout cecy, que des lignes courbes, qu'on peut décrire sur vne superficie plate; mais il est aisé de rapporter ce que i'en ay dit, à toutes celles qu'on sçauroit imaginer estre formées, par le mouuement regulier des poins de quelque corps, dans vn espace qui a trois dimensions. A sçauoir en tirant deux perpendiculaires, de chacun des poins de la ligne courbe qu'on veut considerer, sur deux plans qui s'entrecouppent à angles droits, l'vne sur l'vn, & l'autre sur l'autre. Car les extremitez de ces perpendiculaires décriuent deux autres lignes courbes, vne sur chacun de ces plans, desquelles on peut, en la façon cy-dessus expliquée, déterminer tous les poins, & les rapporter à ceux de la ligne droite, qui est commune à ces deux plans, au moyen dequoy ceux de la courbe, qui à trois dimensions, sont entierement determinez. Mesme si on veut tirer vne ligne droite, qui couppe cette courbe au point donné à angles droits: il faut seulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, vne en chacun, qui couppent à angles droits les deux lignes courbes, qui y sont, aux deux poins, où tombent les perpendiculaires qui viennent de ce point donné. Car ayant éleué deux autres plans, vn sur chacune de ces lignes droites, qui couppe à angles droits le plan où elle est, on aura l'intersection de ces deux plans pour la ligne droite cherchée. Et ainsi ie pense n'auoir rien obmis des elemens qui sont necessaires pour la connoissance des lignes courbes.

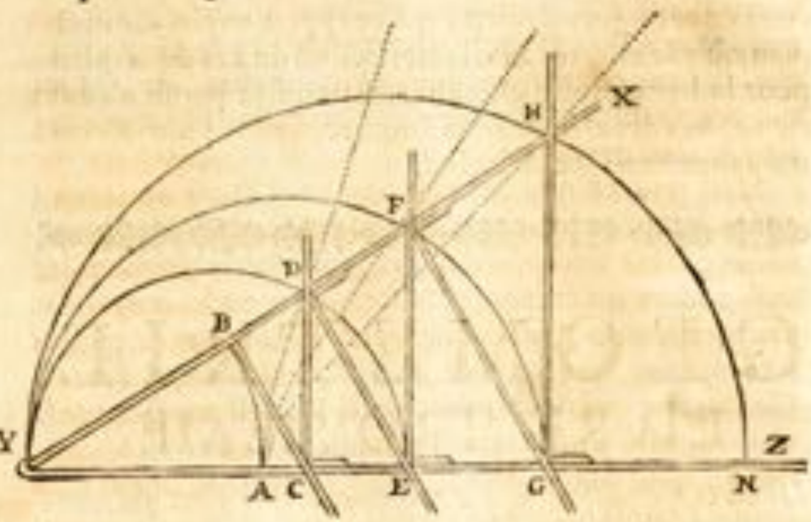
LA GEOMETRIE.

LIVRE TROISIEME.

De la construction des Problemes, qui sont solides, ou plus que solides.

De quelles lignes courbes on peut se seruir, en la cõstructiõ de chaque probleme.

ENCORE que toutes les lignes courbes qui peuuent estre décrites par quelque mouuement regulier, doiuent estre receuës en la Geometrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se seruir indifferemment de la premiere qui se rencontre, pour la construction de chaque Probleme : mais il faut auoir soin de choisir toûjours la plus simple, par laquelle il soit possible de le resoudre. Et mesme il est à remarquer, que par les plus simples on ne doit pas seulement entendre celles, qui peuuent le plus aisement estre décrites, ny celle qui rendent la construction ou la demonstration du Probleme proposé plus facile, mais principalement celles, qui sont du plus simple genre, qui puisse seruir à determiner la quantité qui est cherchée.



Exemple touchant l'inuention de plusieurs moyennes proportionelles.

Comme par exemple ie ne croy pas, qu'il y ait aucune façon plus facile, pour trouuer autant de moyennes proportionnelles, qu'on veut, ny dont la demonstration soit plus éuidente, que d'y employer les lignes courbes, qui se décriuent par l'instrument XYZ cy-dessus expliqué. Car voulant trouuer deux moyennes proportionnelles entre YA & YE, il ne faut que décrire vn cercle, dont le diametre soit YE; & pource que ce cercle couppe la courbe AD au point D, YD est l'vne des moyennes proportionnelles cherchées. Dont la demonstration se voit à l'œil par la seule application de cet instrument sur la ligne YD. Car comme YA, ou YB, qui luy est égale est à YC, ainsi YC est à YD; & YD à YE.

Tout de mesme pour trouuer quatre moyennes proportionnelles entre YA & *YG*; ou pour en trouuer six entre *YA* & *YN*, il ne faut que tracer le cercle *YFG*, qui couppant AF au point F, determine la ligne droite *YF*, qui est l'vne de ces quatre proportionnelles; ou *YHN*, qui couppant AH au point H, determine *Y*H l'vne des six, & ainsi des autres.

Mais pource que la ligne courbe AD est du second genre, & qu'on peut trouuer deux moyennes proportionnelles par les sections coniques, qui sont du premier; & aussi pource qu'on peut trouuer quatre ou six moyennes proportionelles, par des lignes qui ne sont pas de genres si composez, que sont AF, & AH, ce seroit vne faute en Geometrie que de les y employer. Et c'est vne faute aussi d'autre costé de se trauailler inutilement à vouloir construire quelque probleme par vn genre de lignes plus simple, que sa nature ne permet.

Or afin que ie puisse icy donner quelques regles, pour éuiter l'vne & l'autre de ces deux fautes, il faut que ie die quelque chose en general de la nature des Equations; c'est à dire des sommes composées de plusieurs termes partie connus, & partie inconnus, dont les vns sont égaux aux autres, ou plûtost qui considerez tous ensem- De la nature des Equations.

ble sont égaux à rien. Car ce sera souuent le meilleur de les considerer en cette sorte.

Combien il peut y auoir de racines en chaque Equation.

Scachez donc qu'en chaque Equation, autant que la quantité inconnuë à de dimensions, autant peut il y auoir de diuerses racines, c'est à dire de valeurs de cette quantité. Car par exemple si on suppose x égale à 2; ou bien $x - 2$ égal à rien; & derechef $x \infty 3$; ou bien $x - 3 \infty 0$; en multipliant ces deux Equations $x - 2 \infty 0$, & $x - 3 \infty 0$, l'vne par l'autre, on aura $xx - 5x + 6 \infty 0$, ou bien $xx \infty 5x - 6$, qui est vne Equation en laquelle la quantité x vaut 2 & tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait $x - 4 \infty 0$, & qu'on multiplie cette somme par $xx - 5x + 6 \infty 0$, on aura $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$, qui est vne autre Equation en laquelle x ayant trois dimensions a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3, & 4.

Quelles sont les fausses racines.

Mais souuent il arriue, que quelques vnes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. Comme si on suppose que x designe aussi le defaut d'vne quantité, qui soit 5, on à $x + 5 \infty 0$, qui estant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$ fait

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$$

pour vne Equation en laquelle il y a quatre racines, à sçauoir trois vrayes qui sont 2, 3, 4, & vne fausse qui est 5.

Comment on peut diminuer le nombre des dimensions d'vne Equation lors qu'on connoist quelqu'vne de ses racines.

Et on voit euidemment de cecy, que la somme d'vne Equation, qui contient plusieurs racines, peut toûjours estre diuisée par vn binóme composé de la quantité inconnuë moins la valeur de l'vne des vrayes racines, laquelle que ce soit; ou plus la valeur de l'vne des faussez. Au moyen dequoy on diminuë d'autant ses dimensions.

Et reciproquement que si la somme d'vne Equation ne peut estre diuisée par vn binóme composé de la quantité inconnuë + ou -- quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cette derniere

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$$

peut bien estre diuisée, par $x - 2$, & par $x - 3$, & par $x - 4$, & par $x + 5$; mais non point par x + ou -- aucune autre quantité. Ce qui monstre qu'elle ne peut auoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5.

Comment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'vne racine.

On connoist aussi de cecy combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fausses en chaque Equation. A sçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que les signes + & -- s'y trouuent de fois estre changez; & autant de fausses qu'il s'y trouue de fois deux signes +, ou deux signes -- qui s'entresuiuent. Comme en la derniere, à cause qu'aprés $+ x^4$ il y a $- 4x^3$, qui est vn changement du signe + en --, & aprés $- 19xx$ il y a $+ 106x$, & aprés $+ 106x$ il y a $- 120$ qui sont encore deux autres changemens, on connoist qu'il y a trois vrayes racines; & vne fausse, à cause que les deux signes --, de $4x^3$, & $19xx$, s'entresuiuent.

Combien il peut y auoir de vrayes racines en chaque Equation.

De plus il est aisé de faire en vne mesme Equation, que toutes les racines qui estoient fausses deuiennent vrayes, & par mesme moyens que toutes celles qui estoient vrayes deuiennent fausses: à sçauoir en changeant tous les signes + ou -- qui sont en la seconde, en la quatriéme, en la sixiéme, ou autres places qui se designent par les nombres pairs, sans changer ceux de la premiere, de la troisiéme, de la cinquiéme & semblables qui se designent par les nombres impairs.

Comment on fait que les fausses racines d'vne Equation deuiennẽt vrayes, & les vrayes fausses.

Comme ſi au lieu de

$$+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$$

on écrit

$$+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$$

on a vne Equation en laquelle il n'y a qu'vne vraye racine qui eſt 5, & trois fauſſes qui ſont 2, 3, & 4.

Comment on peu augmenter ou diminuer les racines d'vne Equation, ſans les connoiſtre

Que ſi ſans connoiſtre la valeur des racines d'vne Equation, on la veut augmenter, ou diminuer de quelque quantité connuë, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en ſuppoſer vn autre, qui ſoit plus ou moins grand de cette meſme quantité, & le ſubſtituer par tout en la place du premier.

Comme ſi on veut augmenter de 3 la racine de cette Equation

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$$

il faut prendre y au lieu d'x, & penſer que cette quantité y eſt plus grande qu'x de 3, en ſorte que $y - 3$ eſt égal a x, & au lieu d'xx, il faut mettre le quarré d'$y - 3$ qui eſt $yy - 6y + 9$ & au lieu d'x^3 il faut mettre ſon cube qui eſt $y^3 - 9yy + 27y - 27$, & enfin au lieu d'x^4 il faut mettre ſon quarré de quarré qui eſt $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$. Et ainſi décriuant la ſomme precedente en ſubſtituant par tout y au lieu d'x on a

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 \\
 & - 19yy & + 114y & - 171 \\
 & & - 106y & + 318 \\
 & & & - 120 \\
\hline
y^4 - 8y^3 & - 1yy & + 8y & \propto 0
\end{array}$$

ou bien

ou bien $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$.
où la vraye racine qui estoit 5 est maintenant 8, à cause du nombre trois qui luy est ajoûté.

Que si on veut au contraire diminuer de trois la racine de cette mesme Equation, il faut faire $y + 3 \propto x$ & $yy + 6y + 9 \propto xx$. Et ainsi des autres, de façon qu'au lieu de

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$$

on met

$$\begin{array}{rrrrr} y^4 + 12y^3 & + 54yy & + 108y & + 81 \\ + 4y^3 & + 36yy & + 108y & + 108 \\ & - 19yy & - 114y & - 171 \\ & & - 106y & - 318 \\ & & & - 120 \\ \hline \end{array}$$

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0.$$

Et il est à remarquer qu'en augmentant les vrayes racines d'vne Equation, on diminuë les fausses de la mesme quantité; ou au contraire en diminuant les vrayes, on augmente les fausses. Et que si on diminuë soit les vnes soit les autres, d'vne quantité qui leur soit égale, elles deuiennent nulles, & que si c'est d'vne quantité qui les surpasse, de vrayes elles deuiennent fausses, ou de fausses vrayes. Comme icy en augmentant de 3 la vraye racine qui estoit 5, on a diminué de 3 chacune des fausses, en sorte que celle qui estoit 4 n'est plus qu'1, & celle qui estoit 3 est nulle, & celle qui estoit 2 est deuenuë vraye & est 1, à cause que $-2 + 3$ fait $+1$. C'est pourquoy en cette Equation $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$ il n'y a plus que 3 racines, entre lesquelles il y en a deux qui sont vrayes,

Qu'en augmentant les vrayes racines on diminuë les fausses, & au contraire.

1, & 8, & vne fausse qui est aussi 1. Et en cette autre

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0$$

il n'y en a qu'vne vraye qui est 2, à cause que $+5 - 3$ fait $+2$, & trois fausses qui sont 5, 6, & 7.

Comment on peut oster le second terme d'vne Equation.

Or par cette façon de changer la valeur des racines sans les connoistre, on peut faire deux choses, qui auront cy aprés quelque vsage: la premiere est qu'on peut toûjours oster le second terme de l'Equation qu'on examine, à sçauoir en diminuant les vrayes racines, de la quantité connuë de ce second terme diuisée par le nombre des dimensions du premier, si l'vn de ces deux termes estant marqué du signe $+$, l'autre est marqué du signe $-$; ou bien en l'augmentant de la mesme quantité, s'ils ont tous deux le signe $+$, ou tous deux le signe $-$. Comme pour oster le second terme de la derniere Equatiō qui est

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0$$

ayant diuisé 16 par 4, à cause des 4 dimensions du terme y^4, il vient derechef 4, c'est pourquoy ie fais $z - 4 \propto y$, & i'écris

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 - 16z^3 & + 96zz & - 256z & + 256 \\
+ 16z^3 & - 192zz & + 768z & - 1024 \\
 & + 71zz & - 568z & + 1136 \\
 & & - 4z & + 16 \\
 & & & - 420 \\
\hline
z^4 \quad * & - 25zz & - 60z & - 36 \propto 0.
\end{array}$$

ou la vraye racine qui estoit 2, est 6, à cause qu'elle est augmentée de 4; & les fausses qui estoient 5, 6, & 7, ne sont plus que 1, 2, & 3, à cause qu'elles sont diminuées, chacune de 4.

Tout de mesme si on veut oster le second terme de

$$x^4 - 2ax^3 + \begin{matrix} 2aa \\ -cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0,$$

pource que diuisant $2a$ par 4 il vient $\frac{1}{2}a$; il faut faire $z + \frac{1}{2}a \infty x$ & écrire

$$\begin{array}{llllll}
z^4 & + 2az^3 & + \frac{3}{2}aazz & + \frac{1}{2}a^3z & + \frac{1}{16}a^4 & \\
 & - 2az^3 & - 3aazz & - \frac{3}{2}a^3z & - \frac{1}{4}a^4 & \\
 & & + 2aazz & + 2a^3 & + \frac{1}{2}a^4 & \\
 & & - cc & - acc & - \frac{1}{4}aacc & \\
 & & & - 2a^3 & - a^4 & \\
 & & & & + a^4 & \\
\hline
z^4 & * & + \frac{1}{2}aazz & - a^3z & + \frac{5}{16}a^4 & \infty 0 \\
 & & - cc & - acc & - \frac{1}{4}aacc &
\end{array}$$

& si on trouue aprés la valeur de z, en luy ajoûtant $\frac{1}{2}a$ on aura celle de x.

La seconde chose, qui aura cy-aprés quelque vsage, est, qu'on peut toûjours en augmentant la valeur des vrayes racines, d'vne quantité qui soit plus grande que n'est celle d'aucune des fausses, faire qu'elles deuiennent toutes vrayes, en sorte qu'il n'y ait point deux signes +, ou deux signes − qui s'entresuiuent, & outre cela que la quantité connuë du troisiéme terme soit plus grande, que le quarré de la moitié de celle du second. Car encore que cela se fasse, lors que ces fausses racines sont inconnuës, il est aisé neanmoins de iuger à peu prés de leur grandeur, & de prendre vne quantité, qui les surpasse d'autant, ou de plus, qu'il n'est requis à cet effet. Comme si on a

Comment on peut faire que toutes les fausses racines d'vne Equation deuiennẽt vrayes, sans que les vrayes deuiennent fausses.

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 \infty 0.$$

en faisant $y - 6n \infty x$, on trouuera

$$\begin{array}{llllll}
y^6 - 36n \\ + n \end{array}\Big\} y^5 \begin{array}{l} + 540nn \\ - 30nn \\ - 6nn \end{array}\Big\} y^4 \begin{array}{l} - 4320n^3 \\ + 360n^3 \\ + 144n^3 \\ + 36n^3 \end{array}\Big\} y^3 \begin{array}{l} + 19440n^4 \\ - 2160n^4 \\ - 1296n^4 \\ - 648n^4 \\ - 216n^4 \end{array}\Big\} yy \begin{array}{l} - 46656n^5 \\ + 6480n^5 \\ + 5184n^5 \\ + 3888n^5 \\ + 2592n^5 \\ + 1296n^5 \end{array}\Big\} y \begin{array}{l} + 46656n^6 \\ - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \end{array}$$

$$y^6 - 35ny^5 + 504nn\,y^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4y^2 - 27216n^5y \ast \infty 0.$$

Où il est manifeste, que $504\,nn$, qui est la quantité connuë du troisiéme terme est plus grande, que le quarré de $\frac{35}{2}\,n$, qui est la moitié de celle du second. Et il n'y a point de cas, pour lequel la quantité, dont on augmente les vrayes racines, ait besoin à cet effect, d'estre plus grande, à proportion de celles qui sont données, que pour cettuy-cy.

Comment on fait que toutes les places d'vne Equation soient remplies.

Mais à cause que le dernier terme s'y trouue nul, si on ne desire pas que cela soit, il faut encore augmenter tant soit peu la valeur des racines; & ce ne sçauroit estre de si peu, que ce ne soit assez pour cet effect. Non plus que lors qu'on veut accroistre le nombre des dimensions de quelque Equation, & faire que toutes les places de ses termes soient remplies. Comme si au lieu de $x^5 \ast\ast\ast\ast - b \infty 0$, on veut auoir vne Equation, en laquelle la quantité inconnuë ait six dimensions, & dont aucun des termes ne soit nul, il faut premierement pour

$x^5 \ast\ast\ast\ast - b \infty 0$ écrire

$x^6 \ast\ast\ast\ast - bx \ast \infty 0$

puis ayant fait $y - a \infty x$, on aura

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{array}{l} - 6a^5y + a^6 \\ - by + ab \end{array} \infty 0$$

Où il est manifeste que tant petite que la quantité a soit supposée toutes les places de l'Equation ne laissent pas d'estre remplies.

Comment on peut multiplier ou diuiser les racines sans les cõnoistre.

De plus on peut sans connoistre la valeur des vrayes racines d'vne Equation, les multiplier, ou diuiser toutes, par telle quantité connuë qu'on veut. Ce qui se fait en supposant que la quantité inconnuë estant multipliée, ou diuisée, par celle qui doit multiplier, ou diuiser les racines, est égale à quelque autre. Puis multipliant, ou diuisant la quantité connuë du second terme, par cette mesme qui doit multiplier, ou diuiser les racines; & par son quarré, celle du troisiéme; & par son cube, celle du quatriéme; & ainsi iusques au dernier. Ce qui peut seruir pour reduire à des nombres entiers & rationaux, les fractions, ou souuent aussi les nombres sours, qui se trouuent dans les termes des Equations. Comme si on a

Comment on reduist les nombres rompus d'vne Equation a des entiers.

$$x^3 - \sqrt{3}\,xx + \tfrac{26}{27}x - \tfrac{8}{27\sqrt{3}} \propto 0,$$

& qu'on veüille en auoir vne autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux; il faut supposer $y \propto x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité connuë du second terme, qui est aussi $\sqrt{3}$, & par son quarré qui est 3 celle du troisiéme qui est $\frac{26}{27}$, & par son cube qui est $3\sqrt{3}$ celle du dernier, qui est $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, ce qui fait

$$y^3 - 3yy + \tfrac{26}{9}y - \tfrac{8}{9} \propto 0$$

Puis si on en veut auoir encore vne autre en la place de celle-cy, dont les quantitez connuës ne s'expriment que par des nombres entiers; il faut supposer $z \propto 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27 on trouue

$z^3 - 9zz + 26z - 24 \propto 0$, où les racines estant 2, 3 & 4, on connoist de là que celles de l'autre d'auparauant estoient $\frac{2}{3}$ 1, & $\frac{4}{3}$, & que celles de la premiere estoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{9}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Comment on rend la quantité connuë de l'vn des termes d'vne Equation égale à telle autre qu'ō veut.

Cette operation peut aussi seruir pour rendre la quantité connuë de quelqu'vn des termes de l'Equation égale à quelque autre donnée, comme si ayant

$$x^3 * - bbx + c^3 \propto 0$$

On veut auoir en sa place vne autre Equation, en laquelle la quantité connuë, du terme qui occupe la troisiéme place, à sçauoir celle qui est icy bb, soit $3aa$, il faut supposer $y \propto x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$; puis écrire $y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \propto 0$.

Que les racines, tant vrayes que fausses peuuent estre reelles ou imaginaires.

Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toûjours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est à dire qu'on peut bien toûjours en imaginer autant que i'ay dit en chaque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine. Comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-cy, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$, il n'y en a toutefois qu'vne reelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminuë, ou multiplie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

La reduction des Equations cubiques lors que le probleme est plan.

Or quand pour trouuer la construction de quelque probleme, on vient à vne Equation, en laquelle la quantité inconnuë à trois dimensions; premierement si les quantitez connuës, qui y sont, contiennent quelques nombres rompus, il les faut reduire à d'autres entiers, par la multiplication tantost expliquée: Et s'ils en contiennent de sours, il faut aussi les reduire à d'autres rationaux, autant qu'il sera possible, tant par cette mesme multiplication, que par diuers autres moyens, qui sont assez faciles à trouuer. Puis examinant par ordre toutes les quantitez, qui peuuent diuiser sans fraction le dernier terme, il faut voir, si quelqu'vne d'elles, iointe auec la quantité inconnuë par le signe + ou --, peut composer vn binóme, qui diuise toute la somme; & si cela est le Probleme est plan, c'est à dire, il peut estre construit auec la regle & le compas; Car ou bien la quantité connuë de ce binóme est la racine cherchée; ou bien l'Equation estant diuisée par luy, se reduit a deux dimensions, en sorte qu'on en peut trouuer aprés la racine, par ce qui a esté dit au premier liure.

Par exemple si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 \infty o.$$

le dernier terme, qui est 64, peut estre diuisé sans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64; C'est pourquoy il faut examiner par ordre si cette Equation ne peut point estre diuisée par quelqu'vn des binómes, $yy - 1$ ou $yy + 1$, $yy - 2$ ou $yy + 2$, $yy - 4$, &c. Et on trouue quelle peut l'estre par $yy - 16$, en cette sorte.

$$\begin{array}{llll} +y^6 & -8y^4 & -124yy & -64 \infty o \\ -1y^6 & \underline{-8y^4} & \underline{-4yy} & - \quad -16 \\ o - & \dfrac{16y^4}{16} & -\dfrac{128yy}{16} & \end{array}$$

$$+y^4 + 8yy + 4 \infty o.$$

Ie commence par le dernier terme, & diuise -64 par -16, ce qui fait $+4$, que i'écris dans le quotient, puis ie multiplie $+4$ par $+yy$, ce qui fait $+4yy$; c'est pourquoy i'écris $-4yy$ en la somme, qu'il faut diuiser. Car

La façon de diuiser vne Equation par vn binóme qui contient sa racine.

il y faut toûjours écrire le signe + ou − tout contraire à celuy que produist la multiplication. Et ioignant $-124\,yy$ auec $-4\,yy$, i'ay $-128\,yy$, que ie diuise derechef par -16, & i'ay $+8\,yy$ pour mettre dans le quotient & en le multipliant par yy, i'ay $-8\,y^4$, pour ioindre auec le terme qu'il faut diuiser, qui est aussi $-8\,y^4$, & ces deux ensemble font $-16\,y^4$, que ie diuise par -16, ce qui fait $+1\,y^4$ pour le quotient, & $-1\,y^6$, pour ioindre auec $+1\,y^6$ ce qui fait o, & monstre que la diuision est acheuée. Mais s'il estoit resté quelque quantité, ou bien qu'on n'eust pû diuiser sans fraction quelqu'vn des termes precedens, on eust par là reconnu, qu'elle ne pouuoit estre faite.

Tout de mesme si on a $y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty\ o$. le dernier terme se peut diuiser sans fraction par a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, & semblables. Mais il n'y en a que deux qu'on ait besoin de considerer, à sçauoir aa & $aa+cc$; car les autres donnant plus ou moins de dimensions dans le quotient, qu'il n'y en a en la quantité connuë du penultiéme terme, empescheroient que la diuision ne s'y pûst faire. Et notez, que ie ne conte icy les dimensions d'y^6, que pour trois, à cause qu'il n'y a point d'y^5, ny d'y^3, ny d'y en toute la somme. Or en examinant le binóme $yy-aa-cc\ \infty\ o$, on trouue que la diuision se peut faire par luy en cette sorte.

$$+y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty\ o$$

$$\frac{-y^6}{o}\ \frac{\begin{smallmatrix}-2aa\\+cc\end{smallmatrix}}{-aacc}\ \frac{\begin{smallmatrix}-a^4\\-aacc\end{smallmatrix}}{-aa-cc}\ \overline{-aa-cc}$$

$$+y^4 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}+a^4\\+aacc\end{smallmatrix} \quad \infty\ o.$$

Ce

Ce qui monstre que la racine cherchée est $aa + cc$. Et la preuue en est aisée à faire par la multiplication.

Quels problemes sont solides, lors que l'Equation est cubique.

Mais lors qu'on ne trouue aucun binóme, qui puisse ainsi diuiser toute la somme de l'Equation proposée, il est certain que le Probleme qui en dépend est solide. Et ce n'est pas vne moindre faute aprés cela, de tâcher à le construire sans y employer que des cercles & des lignes droites, que ce seroit d'employer des sections coniques à construire ceux ausquels on n'a besoin que de cercles. Car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

La reduction des Equations qui ont quatre dimensions, lors que le probleme est plan. Et quels sont ceux qui sont solides.

Que si on a vne Equation dont la quantité inconnuë ait quatre dimensions, il faut en mesme façon, aprés en auoir osté les nombres sours, & rompus, s'il y en a, voir si on pourra trouuer quelque binóme, qui diuise toute la somme, en le composant de l'vne des quantitez, qui diuisent sans fraction le dernier terme. Et si on en trouue vn, ou bien la quantité connuë de ce binóme est la racine cherchée; ou du moins aprés cette diuision, il ne reste en l'Equation, que trois dimensions, en suite dequoy il faut derechef l'examiner en la mesme sorte. Mais lors qu'il ne se trouue point de tel binóme, il faut en augmentant, ou diminuant la valeur de la racine, oster le second terme de la somme, en la façon tantost expliquée. Et aprés la reduire en vne autre, qui ne contienne que trois dimensions. Ce qui se fait en cette sorte.

Au lieu de $+ x^4 * . pxx . qx . r \propto 0$,

il faut écrire $+ y^6 . 2py^4 \genfrac{}{}{0pt}{}{+pp}{.4r} yy - - qq \propto 0$.

Et pour les signes $+$ ou $--$, que i'ay omis, s'il y a eu $+p$ en la precedente Equation, il faut mettre en celle-cy $+2p$, où s'il y a eu $-p$, il faut mettre $-2p$. Et au contraire s'il y a eu $+r$, il faut mettre $-4r$, ou s'il y a eu $-r$, il faut mettre $+4r$. Et soit qu'il y ait eu $+q$, ou $-q$, il faut toûjours mettre $-qq$, & $+pp$. Au moins si on suppose que x^4, & y^6 sont marquez du signe $+$, car ce seroit tout le contraire si on y supposoit le signe $-$.

Par exemple si on a $+x^4 * -4xx -8x +35 \propto 0$ il faut écrire en son lieu $y^6 -8y^4 -124yy -64 \propto 0$. Car la quantité que i'ay nommée p estant -4, il faut mettre $-8y^4$ pour $2py^4$. Et celle, que i'ay nommée r estant 35, il faut mettre $\begin{smallmatrix}+16\\-140\end{smallmatrix} yy$, c'est à dire $-124yy$, au lieu de $\begin{smallmatrix}+pp\\-4r\end{smallmatrix} yy$. Et enfin q estant 8, il faut mettre -64, pour $-qq$. Tout de mesme au lieu de $+x^4 * -17xx -20x -6 \propto 0$, il faut écrire $+y^6 -34y^4 +313yy -400 \propto 0$. Car 34 est double de 17, & 313 en est le quarré ioint au quadruple de 6, & 400 est le quarré de 20.

Tout de mesme aussi au lieu de

$$+z^4 * \begin{smallmatrix}+\frac{1}{2}aa\\ -cc\end{smallmatrix} zz \begin{smallmatrix}-a^3\\ -acc\end{smallmatrix} z \begin{smallmatrix}+\frac{1}{16}a^4\\ -\frac{1}{4}aacc\end{smallmatrix} \propto 0.$$

Il faut écrire

$$y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\ -2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\ +c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\ -2a^4cc\\ -aac^4\end{smallmatrix} \propto 0.$$

Car p est $+\frac{1}{2}aa - cc$, & pp, est $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$, & $4r$ est $-\frac{1}{4}a^4 + aacc$, & enfin $-qq$ est $-a^6 - 2a^4cc - aac^4$.

Aprés que l'Equation est ainsi reduite à trois dimensions, il faut chercher la valeur d'yy par la methode déja expliquée; Et si elle ne peut estre trouuée, on n'a point besoin de passer outre ; Car il suit de là infailliblement, que le Probleme est solide. Mais si on la trouue, on peut diuiser par son moyen la precedente Equation en deux autres, en chacune desquelles la quantité inconnuë n'aura que deux dimensions, & dont les racines seront les mesmes que les siennes. A sçauoir, au lieu de

$$+ x^4 * . pxx . qx . r \propto o,$$

il faut écrire ces deux autres

$$+ xx - yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \tfrac{q}{2y} \propto o, \text{ \&}$$

$$+ xx + yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \tfrac{q}{2y} \propto o.$$

Et pour les signes $+$ & $-$ que i'ay omis, s'il y a $+p$ en l'Equation precedente, il faut mettre $+\frac{1}{2}p$ en chacune de celles-cy ; & $-\frac{1}{2}p$, s'il y a en l'autre $-p$. Mais il faut mettre $+\frac{q}{2y}$, en celle où il y a $-yx$; & $-\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+yx$, lors qu'il y a $+q$ en la premiere. Et au contraire s'il y a $-q$, il faut mettre $-\frac{q}{2y}$, en celle où il y a $-yx$; & $+\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+yx$. En suite dequoy il est aisé de connoistre toutes les racines de l'Equation proposée, & par consequent de construire le probleme, dont elle contient la solution, sans y employer que des cercles & des lignes droites.

Par exemple à cause que faisant

$y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \propto o$, pour

$x^4 * - 17xx - 20x - 6 \propto o$, on trouue que yy est 16, on doit au lieu de cette Equation.

$+ x^4 * - 17xx - 20x - 6 \propto o$, écrire ces deux autres $+xx-4x-3 \propto 0$. Et $+xx+4x+2 \propto 0$. Car y est 4, $\frac{1}{2}yy$ est 8, p est 17, & q est 20, de façon que $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}$ fait -3, & $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}$ fait $+2$. Et tirant les racines de ces deux Equations, on trouue toutes les mesmes, que si on les tiroit de celle où est x^4, à sçauoir on en trouue vne vraye, qui est $\sqrt{7}+2$, & trois fausses, qui sont $\sqrt{7}-2$, $2+\sqrt{2}$, & $2-\sqrt{2}$. Ainsi ayant $x^4-4xx-8x+35 \propto 0$, pource que la racine de $y^6-8y^4-124yy+64 \propto 0$, est derechef 16, il faut écrire

$$xx-4x+5 \propto 0, \ \& \ xx+4x+7 \propto 0.$$

Car icy $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}$ fait 5, & $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}$ fait 7. Et pource qu'on ne trouue aucune racine, ny vraye, ny fausse, en ces deux dernieres Equations, on connoist de là que les quatre de l'Equation dont elles procedent sont imaginaires; & que le Probleme, pour lequel on l'a trouuée, est plan de sa nature; mais qu'il ne sçauroit en aucune façon estre construit, à cause que les quantitez données ne peuuent se ioindre.

Tout de mesme ayant

$$z^4 * \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{array}\right\} zz \left.\begin{array}{l} -a^3 \\ -acc \end{array}\right\} z \begin{array}{l} +\frac{1}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{array} \propto 0,$$

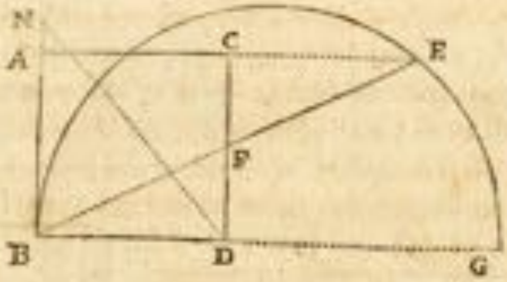
pource qu'on trouue $aa+cc$ pour yy, il faut écrire

$$zz-\sqrt{aa+cc}\,z+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0, \&$$

$$zz+\sqrt{aa+cc}\,z+\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0.$$

Car y est $\sqrt{aa+cc}$, & $+\frac{1}{2}yy+\frac{1}{2}p$ est $\frac{1}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$, est $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. D'où on connoist que la valeur de z

eſt $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, ou bien $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Et pource que nous auions fait cy-deſſus $z+\frac{1}{2}a \infty x$, nous apprenons que la quantité x, pour la connoiſſance de laquelle nous auons fait toutes ces operations, eſt $+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.



Mais afin qu'on puiſſe mieux connoiſtre l'vtilité de cette regle, il faut que ie l'applique à quelque Probleme. Exemple de l'vſage de ces reductions.

Si le quarré AD, & la ligne BN eſtant donnez, il faut prolonger le coſté AC iuſques a E, en ſorte qu'EF, tirée d'E vers B, ſoit égale à NB. On apprent de Pappus, qu'ayant premierement prolongé BD iuſques à G, en ſorte que DG ſoit égale à DN, & ayant décrit vn cercle dont le diamettre ſoit BG, ſi on prolonge la ligne droite AC, elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E, qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne ſçauroient point cette conſtruction elle ſeroit aſſez difficile à rencontrer, & en la cherchant par la methode icy propoſée, ils ne s'auiſeroient iamais de prendre DG pour la quãtité inconnuë, mais plûtost CF, ou FD, à cause que ce sont elles qui conduisent le plus aisement à l'Equation: & lors ils en trouueroient vne qui ne seroit pas facile à demêler, sans la regle que ie viens d'expliquer. Car posant a pour BD ou CD, & c pour EF, & x pour DF, on à CF $\propto a-x$, & comme CF ou $a-x$, est à FE ou c, ainsi FD ou x, est à BF, qui par consequent est $\frac{cx}{a-x}$. Puis à cause du triangle rectangle BDF, dont les costez sont l'vn x & l'autre a, leurs quarrez, qui sont $xx+aa$, sont égaux à celuy de la baze, qui est $\frac{ccxx}{xx-2ax+aa}$, de façon que multipliant le tout par $xx-2ax+aa$, on trouue que l'Equation est $x^4-2ax^3+2aaxx-2a^3x+a^4 \propto ccxx$, ou bien $x^4-2ax^3 \, {*}\begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} \, xx-2a^3x+a^4 \propto 0$. Et on connoist par les regles precedentes, que sa racine, qui est la longueur de la ligne DF, est $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Que si on posoit BF, ou CE, ou BE pour la quantité inconnuë, on viendroit derechef à vne Equation, en laquelle il y auroit 4 dimensions, mais qui seroit plus aisée a demêler, & on y viendroit assez aisement; au lieu que si c'estoit DG qu'on supposast, on viendroit beaucoup plus difficilement à l'Equation, mais aussi elle seroit tres simple. Ce que ie mets icy pour vous auertir, que lors que le Probleme proposé n'est point solide, si en le cherchant par vn chemin on vient à vne Equation fort composée, on peut ordinairement venir à vne plus simple, en le cherchant par vn autre.

Ie pourrois encore ajoûter diuerses regles pour demêler les Equations, qui vont au Cube, ou au Quarré de quarré, mais elles feroient fuperfluës; car lors que les Problemes font plans, on en peut toûjours trouuer la conftruction par celles-cy.

Ie pourrois auffi en ajoûter d'autres pour les Equations qui montent iufques au furfolide, ou au quarré de cube, ou au delà, mais i'ayme mieux les comprendre toutes en vne, & dire en general, que lors qu'on a tâché de les reduire à mefme forme, que celles d'autant de dimenfions, qui viennent de la multiplication de deux autres qui en ont moins, & qu'ayant dénombré tous les moyens, par lequels cette multiplication eft poffible, la chofe n'a pû fucceder par aucun, on doit s'affeurer qu'elles ne fçauroient eftre reduites à de plus fimples. En forte que fi la quantité inconnuë à 3 ou 4 dimenfions, le Probleme pour lequel on la cherche eft folide; & fi elle en a 5, ou 6, il eft d'vn degré plus compofé; & ainfi des autres.

Regle generale pour reduire les Equations qui paffent le quarré de quarré.

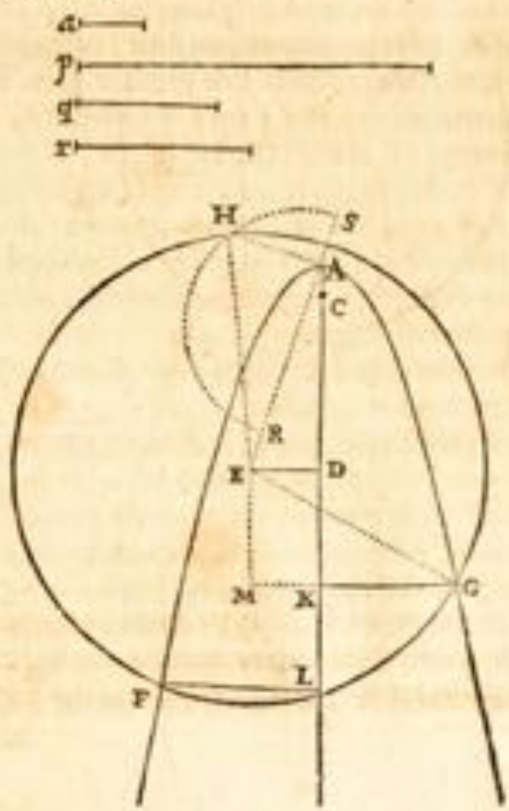
Au refte i'ay omis icy les demonftrations de la plufpart de ce que i'ay dit, à caufe qu'elles m'ont femblé fi faciles, que pourvû que vous preniez la peine d'examiner methodiquement fi i'ay failly, elles fe prefenteront à vous d'elles mefmes: & il fera plus vtile de les apprendre en cette façon, qu'en les lifant.

Or quand on eft affeuré que le Probleme propofé eft folide, foit que l'Equation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, foit qu'elle ne monte que iufques au cube, on peut toûjours en trouuer la racine par l'vne des trois fections coniques, laquelle que ce foit, ou mefme par quelque partie de l'vne d'elles, tant petite qu'elle puiffe eftre, en ne fe feruant au refte que de lignes droites, & de cercles. Mais ie me contenteray icy de

Façon generale pour conftruire tous les Problemes folides, reduits à vne Equation de trois ou quatre dimenfions.

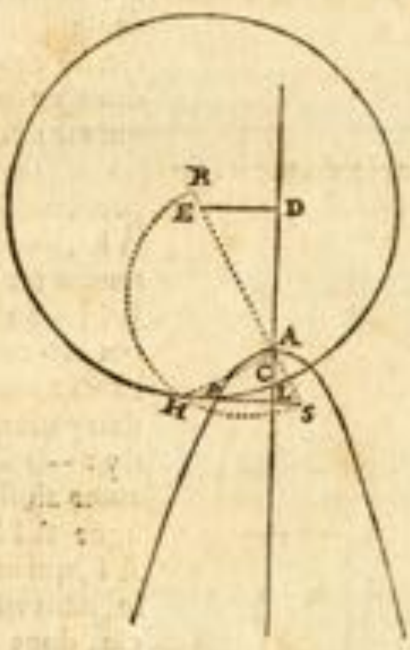
donner vne regle generale pour les trouuer toutes par le moyen d'vne Parabole, à cause qu'elle est en quelque façon la plus simple.

Premierement il faut oster le second terme de l'Equation proposée, s'il n'est déja nul, & ainsi la reduire à telle forme, $z^3 \infty * . apz . aaq$, si la quantité inconnuë n'a que trois dimensions; ou bien à telle, $z^4 \infty * . apzz . aaqz . a^3r$, si elle en a quatre; ou bien en prenant a pour l'vnité, à telle, $z^3 \infty * . pz . q$, & à telle
$z^4 \infty * . pzz . qz . r$.

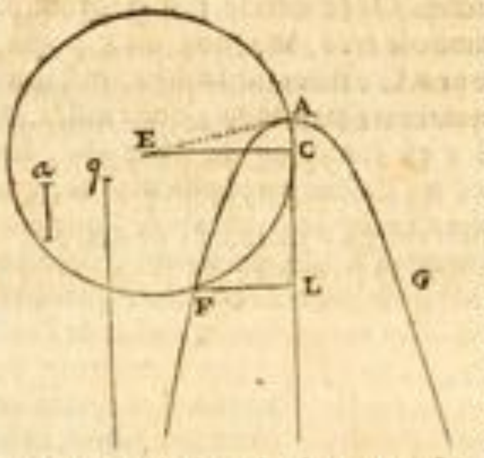


Aprés

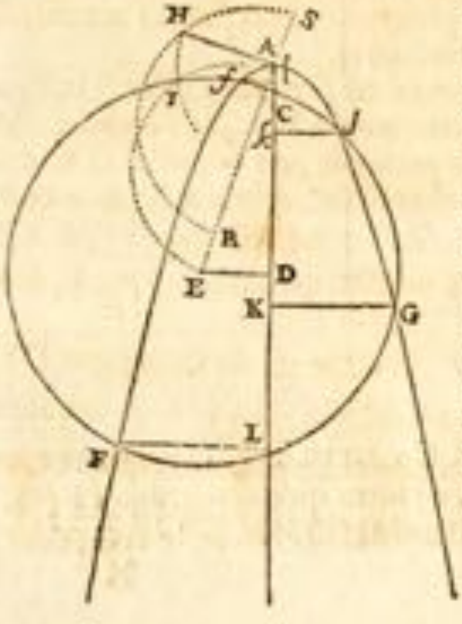
Aprés cela supposant que la Parabole F A G est déja décrite, & que son aissieu est A C D K L, & que son costé droit est a, ou 1, dont AC est la moitié, & enfin que le point C est au dedans de cette Parabole, & que A en est le sommet; Il faut faire CD $\infty \frac{1}{2} p$, & la prendre du mesme costé, qu'est le point A au regard du point C, s'il y a $+ p$ en l'Equation; mais s'il y a $- p$ il faut la prendre de l'autre costé. Et du point D, ou bien, si la quantité



p estoit nulle, du point C il faut éleuer vne ligne a angles droits iusques a E, en sorte qu'elle soit égale à $\frac{1}{2} q$. Et enfin du centre E il faut décrire le cercle F G, dont



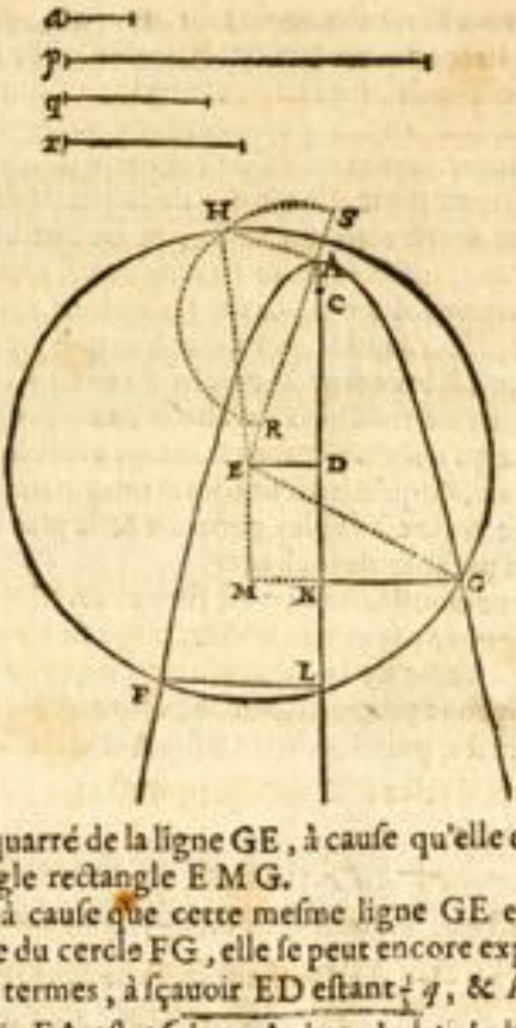
le demi diametre ſoit AE, ſi l'Equation n'eſt que cubique, en ſorte que la quantité r ſoit nulle. Mais quand il y a $+ r$ il faut dans cette ligne AE prolongée, prendre d'vn coſté AR égale à r, & de l'autre AS égale au coſté droit de la Parabole qui eſt 1, & ayant décrit vn cercle dont le diametre ſoit RS, il faut faire AH perpendiculaire ſur AE, laquelle AH rencontre ce cercle RHS au point H, qui eſt celuy par où l'autre cercle FHG doit paſſer. Et quand il y a $-- r$ il faut aprés auoir ainſi trouué la ligne AH, inſcrire AI, qui luy ſoit égale, dans vn autre cercle, dont AE ſoit le diametre, & lors c'eſt par le point I, que doit paſſer FIG



le premier cercle cherché. Or ce cercle FG peut coupper, ou toucher la Parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 poins, desquels tirant des perpendiculaires sur laissieu, on à toutes les racines de l'Equation tant vrayes, que fausses. A sçauoir si la quantité q est marquée du signe $+$, les vrayes racines seront celles de ces perpendiculaires, qui se trouueront du mesme costé de la parabole, que E le centre du cercle, comme FL; & les autres, comme GK, seront fausses: Mais au contraire si cette quantité q est marquée du signe $-$ les vrayes seront celles de l'autre costé; & les fausses, ou moindres que rien seront du costé où est E le centre du cercle. Et enfin si ce cercle ne couppe, ny ne touche la Parabole en aucun point, cela témoigne qu'il n'y a aucune racine ny vraye ny fausse en l'Equation, & qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cette regle est la plus generale & la plus accomplie qu'il soit possible de souhaiter.

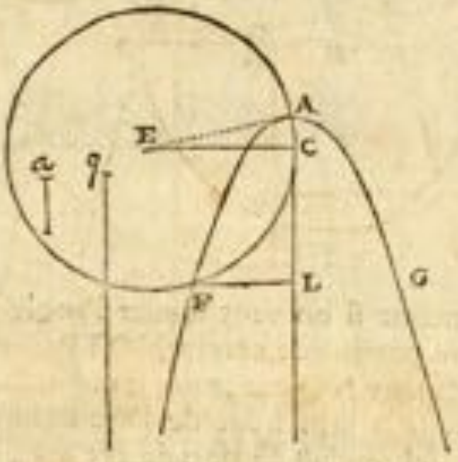
Et la demonstration en est fort aisée. Car si la ligne GK, trouuée par cette construction, se nomme z, AK sera zz, à cause de la parabole, en laquelle GK doit estre moyenne proportionnelle, entre AK, & le costé droit qui est 1. puis si de AK i'oste AC qui est $\frac{1}{2}$, & CD qui est $\frac{1}{2}p$, il reste DK, ou EM, qui est $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, dont le quarré est

$z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et à cause que DE, ou KM est $\frac{1}{2}q$, la toute GM est $z + \frac{1}{2}q$, dont le quarré est $zz + qz + \frac{1}{4}qq$, & assemblant ces deux quarrez, on a $z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$,



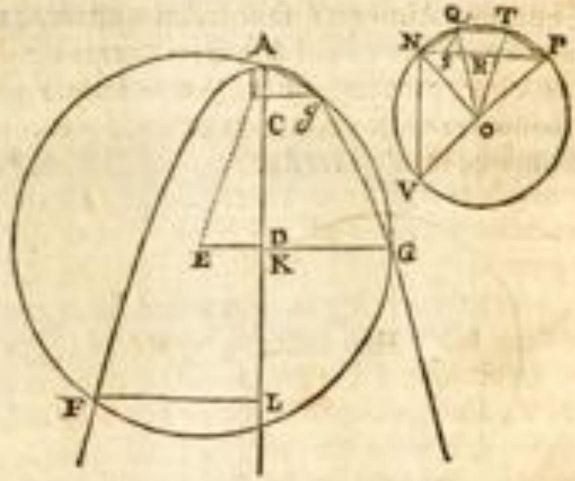
pour le quarré de la ligne GE, à cause qu'elle est la baze du triangle rectangle EMG.

Mais à cause que cette mesme ligne GE est le demi diametre du cercle FG, elle se peut encore expliquer en d'autres termes, à sçauoir ED estant $\frac{1}{2}q$, & AD estant $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, EA est $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$ à cause de l'angle droit ADE, puis HA estant moyenne proportionelle entre AS qui est 1 & AR qui est r, elle est $\sqrt{r}$. Et à cause de l'angle droit EAH, le quarré de HE, ou EG est $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$: Si bien qu'il y a Equation entre cette somme & la precedente. Ce qui est le mesme que $z^4 \propto * \, pzz - qz + r$. Et par consequent la ligne trouuée GK qui a esté nommée z est la racine de cette Equation. Ainsi qu'il falloit demonstrer. Et si vous appliquez ce mesme calcul à tous les autres cas de cette regle, en changeant les signes $+$ & $-$ selon l'occasion, vous y trouuerez vostre conte en mesme sorte, sans qu'il soit besoin que ie m'y arreste.



Si on veut donc suiuant cette regle trouuer deux moyennes proportionelles entre les lignes a & q, chacun sçait que posant z pour l'vne, comme a est à z, ainsi z à $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y a Equation entre q & $\frac{z^3}{aa}$. L'inuention de 2 moyennes proportionelles.

c'est à dire, $z^3 \propto * * aaq$. Et la Parabole FAG estant décrite auec la partie de son aissieu AC, qui est $\frac{1}{2}a$ la moitié du costé droit ; il faut du point C éleuer la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2}q$, & du centre E, par A, décriuant le cercle AF, on trouue FL, & LA, pour les deux moyennes cherchées.



La façon de diuiser vn angle en trois.

Tout de mesme si on veut diuiser l'angle NOP, ou bien l'arc, ou portion de cercle NQTP, en trois parties égales ; faisant NO $\propto 1$, pour le rayon du cercle, & NP $\propto q$, pour la subtenduë de l'arc donné, & NQ $\propto z$, pour la subtenduë du tiers de cet arc ; l'Equation vient,

$z^3 \propto * 3z - q$. Car ayant tiré les lignes NQ, OQ, OT ; & faisant QS parallele à TO, on voit que comme NO est à NQ, ainsi NQ à QR, & QR à RS ; en sorte que NO estant 1, & NQ estant z, QR est zz, & RS est z^3: Et à cause qu'il s'en faut seulement RS, ou z^3, que la ligne NP, qui est q, ne soit triple de NQ, qui est z, on à $q \infty 3z - - z^3$, ou bien,

$$z^3 \infty * 3z - - q.$$

Puis la Parabole FAG estant décrite, & CA la moitié de son costé droit principal estant $\frac{1}{2}$, si on prent CD $\infty \frac{3}{2}$, & la perpendiculaire DE $\infty \frac{1}{2}q$, & que du centre E, par A, on décriue le cercle FAgG, il couppe cette Parabole aux trois poins F, g, & G, sans conter le point A qui en est le sommet. Ce qui monstre qu'il y a trois racines en cette Equation, à sçauoir les deux GK, & gk, qui sont vrayes; & la troisiéme qui est fausse, à sçauoir FL. Et de ces deux vrayes c'est gk la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne NQ qui estoit cherchée. Car l'autre GK, est égale à NV, la subtenduë de la troisiéme partie de l'arc NVP, qui auec l'autre arc NQP acheue le cercle. Et la fausse FL est égale à ces deux ensemble QN & NV, ainsi qu'il est aisé à voir par le calcul.

Il seroit superflus que ie m'arrestasse à donner icy d'autres exemples; car tous les Problemes qui ne sont que solides se peuuent reduire à tel point, qu'on n'a aucun besoin de cette regle pour les construire, sinon entant qu'elle sert à trouuer deux moyennes proportionelles, ou bien à diuiser vn angle en trois parties égales. Ainsi que vous connoistrez en considerant, que leurs difficultez peuuent toûjours estre comprises en des Equations, qui ne montent que iusqu'au quarré de quarré, ou au cube: Et que toutes celles qui montent au quarré de quarré, se reduisent au quarré, par le moyen de quelques autres, qui ne

Que tous les problemes solides se peuuent reduire à ces deux constructions.

montent que iusques au cube : Et enfin qu'on peut oster le second terme de celles-cy. En sorte qu'il n'y en a point qui ne se puisse reduire à quelqu'vne de ces trois formes.

$$z^3 \propto * - pz + q.$$
$$z^3 \propto * + pz + q.$$
$$z^3 \propto * + pz - q.$$

Or si on a $z^3 \propto * - pz + q$, la regle dont Cardan attribuë l'inuention à vn nommé Scipio Ferreus, nous apprent que la racine est

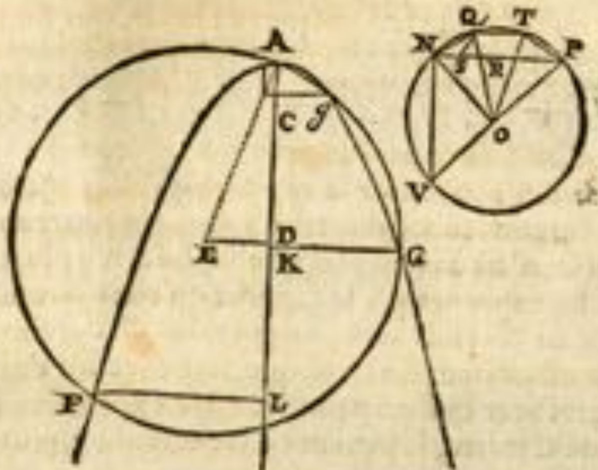
$$\sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}\;-\;\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Comme aussi lors qu'on a $z^3 \propto * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme est plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme, vne pareille regle nous apprent que la racine est,

$$\sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}\;+\;\sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

D'où il paroist qu'on peut construire tous les Problemes, dont les difficultez se reduisent à l'vne de ces deux formes, sans auoir besoin des sections coniques pour autre chose, que pour tirer les racines cubiques de quelques quantitez données, c'est à dire, pour trouuer deux moyennes proportionelles entre ces quantitez & l'vnité.

Puis si on a $z^3 \propto * + pz + q$, & que le quarré de la moitie du dernier terme ne soit point plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme, en supposant le cercle NQPV, dont le demi diametre NO soit $\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, c'est à dire la moyenne proportionelle entre le tiers de la quãtité donnée p & l'vnité; & supposant aussi la ligne NP inscrite dans ce cercle qui soit $\frac{3q}{p}$, c'est à dire qui



qui soit à l'autre quantité donnée q comme l'vnité est au tiers de p ; il ne faut que diuiser chacun des deux arcs NQP & NVP en trois parties égales, & on aura NQ, la subtenduë du tiers de l'vn, & NV la subtenduë du tiers de l'autre, qui iointes ensemble composeront la racine cherchée.

Enfin si on a $z^3 \infty * pz -- q$, en supposant derechef le cercle NQPV, dont le rayon NO soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & l'inscrite NP soit $\frac{3q}{p}$, NQ la subtenduë tiers de l'arc NQP sera l'vne des racines cherchées, & NV la subtenduë du tiers de l'autre arc sera l'autre. Au moins si le quarré de la moitié du dernier terme, n'est point plus grand, que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme. Car s'il estoit plus grand, la ligne NP ne pourroit estre inscrite dans le cercle, à cause qu'elle seroit plus longue que son diametre : Ce qui seroit cause que les deux vrayes racines de cette Equation ne seroient qu'imaginaires, & qu'il n'y en auroit de reelles que la fausse, qui suiuant la regle de Cardan seroit,

$$\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

La façon d'exprimer la valeur de toutes les racines des Equations cubiques: & en suite de toutes celles qui ne montent que iusques au quarré de quarré.

Au reste il est à remarquer que cette façon d'exprimer la valeur des racines par le rapport qu'elles ont aux costez de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connoisse, n'est en rien plus intelligibile, n'y plus simple, que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux subtenduës de certains arcs, ou portions de cercles, dont le triple est donné. En sorte que toutes celles des Equations cubiques qui ne peuuent estre exprimées par les regles de Cardan, le peuuent estre autant ou plus clairement par la façon icy proposée.

Car si par exemple, on pense connoistre la racine de cette Equation, $z^3 \infty * - qz + p$, à cause qu'on sçait qu'elle est composée de deux lignes, dont l'vne est le costé d'vn cube, duquel le contenu est $\frac{1}{2}q$, ajoûté au costé d'vn quarré, duquel derechef le contenu est $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; Et l'autre est le costé d'vn autre cube, dont le contenu est la difference, qui est entre $\frac{1}{2}q$, & le costé de ce quarré dont le contenu est $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, qui est tout ce qu'on en apprent par la regle de Cardan. Il n'y a point de doute qu'on ne connoisse autant ou plus distinctement la racine de celle-cy, $z^3 \infty * + q - p$, en la considerant inscrite dans vn cercle, dont le demi diametre est $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & sçachant qu'elle y est la subtenduë d'vn arc dont le triple à pour sa subtenduë $\frac{3q}{p}$. Mesmes ces termes sont beaucoup moins embarassez que les autres, & ils se trouueront beaucoup plus cours si on veut vser de quelque chiffre particulier pour exprimer ces subtenduës, ainsi qu'on fait du chiffre $\surd$ C. pour exprimer le costé des cubes.

Et on peut aussi en suite de cecy exprimer les racines de toutes les Equations qui montent iusques au quarré de quarré, par les regles cy-dessus expliquées. En sorte que ie ne sçache rien de plus à desirer en cette matiere. Car enfin la nature de ces racines ne permet pas qu'on les exprime en termes plus simples, ny qu'on les determine par aucune construction qui soit ensemble plus generale & plus facile.

Pourquoy les Problemes solides ne peuuent estre construits sans les sections coniques, ny ceux qui sont plus composez sans quelques autres lignes plus composées

Il est vray que ie n'ay pas encore dit sur quelles raisons ie me fonde, pour oser ainsi asseurer, si vne chose est possible ou ne l'est pas. Mais si on prend garde comment, par la methode dont ie me sers, tout ce qui tombe sous la consideration des Geometres, se reduit à vn mesme genre de Problemes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation; on iugera bien qu'il n'est pas malaisé de faire vn dénombrement de toutes les voyes par lesquelles on les peut trouuer, qui soit suffisant pour démonstrer qu'on a choisi la plus generale, & la plus simple. Et particulierement pour ce qui est des Problemes solides, que i'ay dit ne pouuoir estre construits, sans qu'on y employe quelque ligne plus composée que la circulaire, c'est chose qu'on peut assez trouuer, de ce qu'ils se reduisent tous à deux constructions; en l'vne desquelles il faut auoir tout ensemble les deux poins, qui déterminent deux moyennes proportionelles entre deux lignes données; & en l'autre les deux poins, qui diuisent en trois parties égales vn arc donné: Car d'autant que la courbure du cercle ne dépend, que d'vn simple rapport de toutes ses parties, au point qui en est le centre; on ne peut aussi s'en seruir qu'à determiner vn seul point entre deux extremes, comme à trouuer vne moyenne proportionelle entre deux lignes droites données, ou diuiser en deux vn arc donné: Au lieu que la courbure des sections coniques, dépendant toûjours de deux diuerses choses, peut aussi seruir à determiner deux poins differens.

Mais pour cette mesme raison il est impossible, qu'aucun des Problemes qui sont d'vn dégré plus composez que les solides, & qui présupposent l'inuention de quatre moyennes proportionelles, ou la diuision d'vn angle en cinq parties égales, puissent estre construits par aucune des sections coniques. C'est pourquoy ie croiray faire en cecy tout le mieux qui se puisse, si ie donne vne regle generale pour les construire, en y employant la ligne courbe qui se décrit par l'intersection d'vne Parabole & d'vne ligne droite en la façon cy-dessus expliquée. Car i'ose asseurer qu'il n'y en a point de plus simple en la nature, qui puisse seruir à ce mesme effect; & vous auez vû comme elle suit immediatement les sections coniques, en cette question tant cherchée par les anciens, dont la solution enseigne par ordre toutes les lignes courbes, qui doiuent estre receuës en Geometrie.

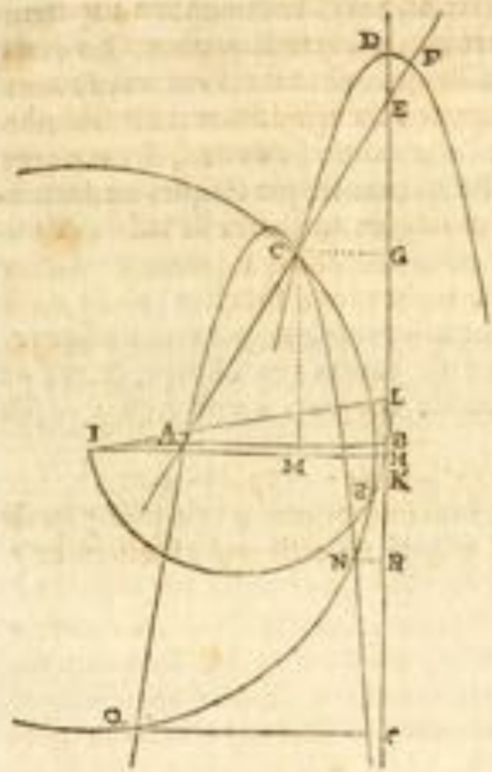
Façon generale pour construire tous les Problemes reduits a

Vous sçauez déja comment, lors qu'on cherche les quantitez qui sont requises pour la construction de ces Problemes, on les peut toûjours reduire à quelque Equation, qui ne monte que iusques au quarré de cube, ou au ſurſolide. Puis vous ſçauez auſſi comment en augmentant la valeur des racines de cette Equation, on peut toûjours faire qu'elles deuiennent toutes vrayes; & auec cela que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de celle du ſecond: Et enfin comment, ſi elle ne monte que iuſques au ſurſolide, on la peut hauſſer iuſques au quarré de cube; & faire que la place d'aucun de ſes termes ne manque d'eſtre remplie. Or afin que toutes les difficultez, dont il eſt icy queſtion, puiſſent eſtre reſoluës par vne meſme regle, ie deſire qu'on faſſe toutes ces choſes, & par ce moyen qu'on les reduiſe toûjours à vne Equation de telle forme,

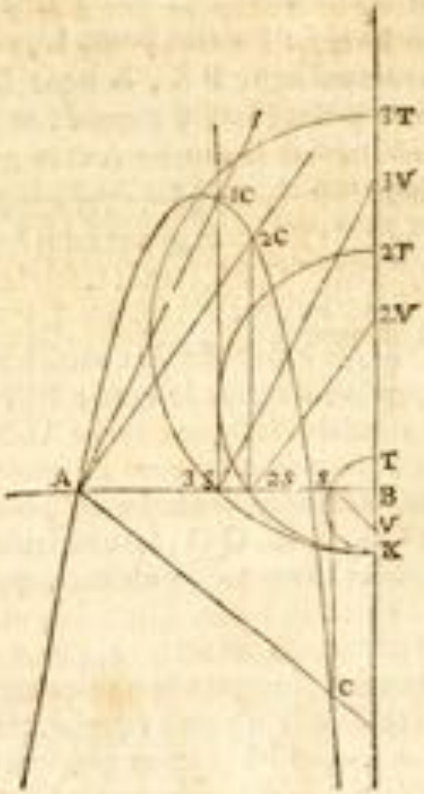
Vne Equation qui n'a point plus de ſix dimenſiõs.

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \infty 0.$$

& en laquelle la quantité nommée q ſoit plus grande que le quarré de la moitié de celle qui eſt nommée p.



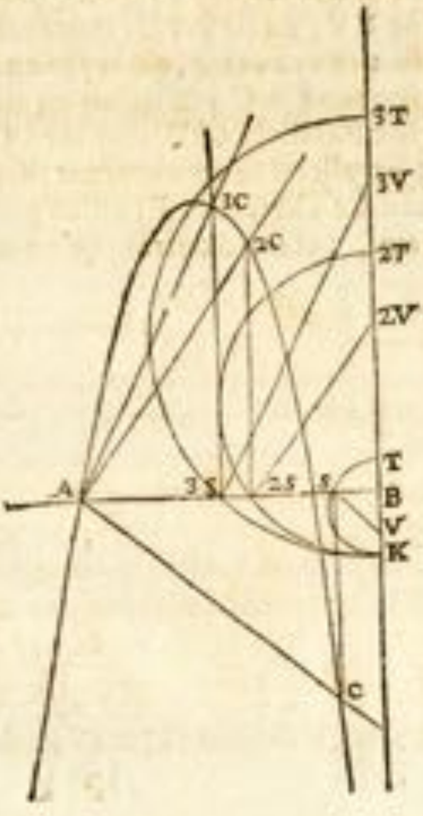
Puis ayant fait la ligne B K indefiniement longue des deux costez; & du point B ayant tiré la perpendiculaire AB, dont la longueur soit $\frac{1}{2}p$; il faut dans vn plan separé décrire vne Parabole, comme CDF dont le costé droit principal soit $\sqrt{\frac{r}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$, que ie nommeray n pour abreger. Aprés cela il faut poser le plan dans lequel est cette Parabole sur celuy ou sont les lignes AB & BK, en sorte que son aissieu DE se rencontre iustement au dessus de la ligne droite BK: Et ayant pris la partie de cet aissieu, qui est entre les poins E & D, égale à $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, il faut appliquer sur ce point E vne longue regle, en telle façon qu'estant aussi appliquée sur le point A du plan de dessous, elle demeure toûjours iointe à ces deux poins, pendant qu'on haussera ou baissera la Parabole tout le long de la ligne BK, sur laquelle son aissieu est appliqué. Au moyen dequoy l'intersection de cette Parabole, & de cette regle, qui se fera au point C, décrira la ligne courbe ACN, qui est celle dont nous auons besoin de nous seruir pour la construction du Probleme proposé. Car aprés qu'elle est ainsi décrite, si on prent le point L en la ligne BK, du costé vers lequel est tourné le sommet de la Parabole, & qu'on fasse BL égale à DE, c'est à dire à $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$: Puis du point L, vers B, qu'on prenne en la mesme ligne BK, la ligne LH, égale à $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & que du point H ainsi trouué, on tire à angles droits, du costé qu'est la courbe ACN, la ligne HI, dont la longueur soit $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$ qui pour abreger sera nommée $\frac{m}{nn}$: Et aprés, ayant ioint les poins L & I, qu'on décriue le cercle LPI, dont IL soit le diametre ; & qu'on inscriue en ce cercle la ligne LP dont la longueur soit $\sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{nn}}$: Puis enfin du centre I, par le point P ainsi trouué, qu'on décriue le cercle PCN. Ce cercle couppera ou touchera la ligne courbe ACN, en autant de poins qu'il y aura de racines en l'Equation : En sorte que les perpendiculaires tirées de ces poins sur la ligne *BK*, comme CG, NR, QO, & semblables, seront les racines cherchées. Sans qu'il y ait aucune exception ny aucun défaut en cette regle. Car si la quantité s estoit si grande, à proportion des autres p, q, r, t, & v, que la ligne LP se trouuast plus grande que le diametre du cercle IL en sorte qu'elle n'y pust estre inscrite, il n'y auroit aucune racine en l'Equation proposée qui ne fust imaginaire : Non plus que si le cercle IP estoit si petit, qu'il ne coupast la courbe ACN en aucun point. Et il la peut couper en six differens, ainsi qu'il peut y auoir six diuerses racines en l'Equation. Mais lors qu'il l'a coupe en moins, cela témoigne qu'il y a quelques-vnes de ces racines qui sont égales entre elles, ou bien qui ne sont qu'imaginaires.



Que

Que si la façon de tracer la ligne ACN par le mouuement d'vne Parabole vous semble incommode, il est aisé de trouuer plusieurs autres moyens pour la décrire. Comme si ayant les mesmes quantitez que deuant pour AB & BL; & la mesme pour BK, qu'on auoit posée pour le costé droit principal de la Parabole; on décrit le demi-cercle KST dont le centre soit pris à discretion dans la ligne BK, en sorte qu'il couppe quelque part la ligne AB, comme au point S, & que du point T, où il finit, on prenne vers K la ligne TV, égale à BL; Puis ayant tiré la ligne SV, qu'on en tire vne autre, qui luy soit parallele, par le point A, comme AC; & qu'on en tire aussi vne autre par S, qui soit Parallele à BK, comme SC; le point C, où ces deux paralleles se rencontrent, sera l'vn de ceux de la ligne courbe cherchée. Et on en peut trouuer, en mesme sorte, autant d'autres qu'on en desire.

Or la demonstration de tout cecy est assez facile. Car appliquant la regle AE auec la Parabole FD sur le point C; comme il est certain qu'elles peuuent y estre appliquées ensemble, puisque ce point C est en la courbe ACN, qui est décrite par leur intersection; si CG se nomme y, GD sera $\frac{yy}{n}$, à cause que le costé droit, qui est n, est à CG, comme CG à GD. Et ostant DE, qui est $\frac{2Vy}{pn}$, de GD, on a $\frac{yy}{n} -- \frac{2Vy}{pn}$, pour GE. Puis à cause que



AB est à BE, comme CG est à GE; AB estant $\frac{1}{2}p$, BE est $\frac{py}{2n} -- \frac{Vy}{ny}$.

Et tout de mesme en supposant que le point C de la courbe à esté trouué par l'intersection des lignes droites, SC parallele à BK, & AC parallele à SV. SB qui est égale à CG, est y: & BK estant égale au costé droit de la Parabole, que i'ay nommé n, BT est $\frac{yy}{n}$. Car comme KB est à BS, ainsi BS est à BT. Et TV estant la mesme que B L, c'est à dire $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, B V est $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$: & comme SB est à BV, ainsi AB est à BE, qui est par consequent $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$ comme deuant, d'où on voit que c'est vne mesme ligne courbe qui se décrit en ces deux façons.

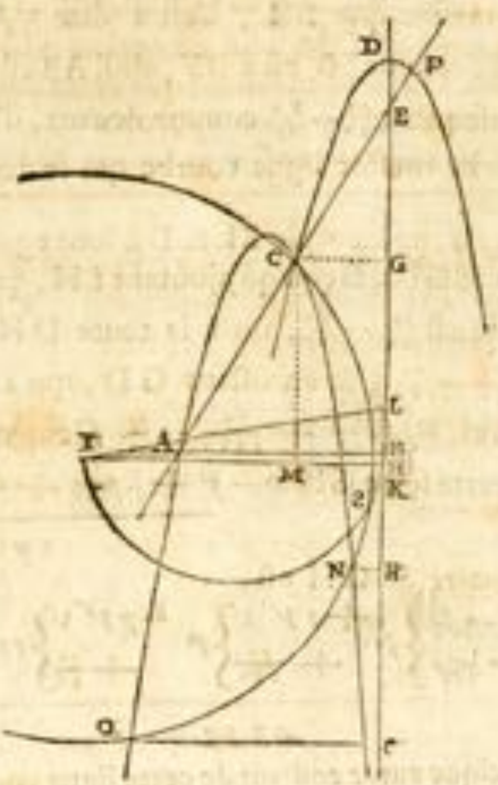
Aprés cela, pource que BL & DE sont égales, DL & BE le sont aussi; de façon qu'ajoûtant LH, qui est $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, à D L, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, on à la toute D H, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & en ostant G D, qui est $\frac{yy}{n}$, on à G H, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Ce que i'écris par ordre en cette sorte GH $\propto \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}.}{ny}$

Et le quarré de G H est,

$$\frac{y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v}{nn\,yy}$$

Et en quelque autre endroit de cette ligne courbe qu'on veuille imaginer le point C, comme vers N, ou vers Q, on trouvera toûjours que le quarré de la ligne droite, qui est entre le point H & celuy où tombe la perpendiculaire du point C sur BH, peut estre exprimée en ces mesmes termes, & auec les mesmes signes + & --.

De plus I H estant $\frac{m}{n}$, & LH estant $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, I L est $\sqrt{\frac{mm}{nn} + \frac{tt}{4nnv}}$, à cause de l'angle droit IHL; & LP estant



$\sqrt{\frac{s}{zz}+\frac{t\sqrt{v}}{zz}}$, IP ou IC est,
$\sqrt{\frac{mm}{z^4}+\frac{tt}{4zzv}-\frac{s}{zz}-\frac{t\sqrt{v}}{zz}}$, à cause aussi de l'angle droit IPL. Puis ayant fait CM perpendiculaire sur IH, IM est la difference qui est entre IH, & HM ou CG, c'est à dire entre $\frac{m}{zz}$, & y, en sorte que son quarré est toûjours $\frac{mm}{z^4}-\frac{2my}{zz}+yy$, qui estant osté du quarré

de I C, il reste $\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$. pour le quarré de CM, qui est égal au quarré de G H déja trouué. Ou bien en faisant que cette somme soit diuisée comme l'autre par $nn\,yy$, on a

$$\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}\,yy - syy + \frac{tt}{4v}yy}{nnyy}.$$

Puis remettant $\frac{t}{\sqrt{v}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$, pour nny^4; & $ry^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3$, pour $2my^3$: & multipliant l'vne & l'autre somme par $nn\,yy$, on a

$$y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v$$

égal à

$$\left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ -q \\ +\frac{1}{2}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +r \\ +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ -s \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy$$

C'est à dire qu'on a,

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \propto 0.$$

D'où il paroist que les lignes CG, NR, QO, & semblables sont les racines de cette Equation, qui est ce qu'il falloit demonstrer.

Ainsi donc si on veut trouuer quatre moyennes proportionelles entre les lignes a & b, ayant posé x pour la premiere, l'Equation est x^5 **** $- a^4b \propto 0$ ou bien x^6 **** $- a^4bx$ * $\propto 0$. Et faisant $y - a \propto x$ il vient $y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5 \\ -a^4b \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +a^6 \\ +a^5b \end{matrix}\right\} \propto 0$. C'est pourquoy il faut prendre $3a$ pour la ligne A B, & $\sqrt{\frac{6a^3+aab}{\sqrt{aa+ab}} + 6aa}$ pour BK, ou le costé droit de la Parabole que i'ay nommé *n*. Et $\frac{2a}{2n}\sqrt{aa+ab}$ pour DE ou BL. Et aprés auoir décrit la ligne courbe ACN sur la mesure de ces trois, il faut faire LH, ∞ $\frac{4a^3+3aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$ Et HI ∞ $\frac{10a^3}{nn}+\frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab}+\frac{18a^4+3a^3b}{2n^3\sqrt{aa+ab}}$ Et LP ∞ $\sqrt{\frac{16a^4+6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}$ Car le cercle qui ayant son centre au point I passera par le point P ainsi trouué, couppera la courbe aux deux poins C & N; desquels ayant tiré les perpendiculaires NR & CG, si la moindre, NR, est ostée de la plus grande, CG, le reste sera, *x*, la premiere des quatre moyennes proportionnelles cherchées.

Il est aisé en mesme façon de diuiser vn angle en cinq parties égales, & d'inscrire vne figure d'onze ou treize costez égaux dans vn cercle, & de trouuer vne infinité d'autres exemples de cette regle.

Toutefois il est à remarquer, qu'en plusieurs de ces exemples, il peut arriuer que le cercle couppe si obliquement la parabole du second genre, que le point de leur intersection soit difficile à reconnoistre: & ainsi que cette construction ne soit pas commode pour la pratique. A quoy il seroit aisé de remedier en composant d'autres regles, à l'imitation de celle-cy, comme on en peut composer de mille sortes.

Mais mon dessein n'est pas de faire vn gros liure, & ie tasche plûtost de comprendre beaucoup en peu de mots: comme on iugera peut-estre que i'ay fait, si on considere, qu'ayant reduit à vne mesme construction tous les Problemes d'vn mesme genre, i'ay tout ensemble donné la façon de les reduire à vne infinité d'autres diuerses, & ainsi de resoudre chacun d'eux en vne infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant construit tous ceux qui sont plans, en coupant d'vn cercle vne ligne droite; & tous ceux qui sont solides, en coupant aussi d'vn cercle vne Parabole; & enfin tous ceux qui sont d'vn degré plus composez, en coupant tout de mesme d'vn cercle vne ligne qui n'est que d'vn degré plus composée que la Parabole; il ne faut que suivre la mesme voye pour construire tous ceux qui sont plus composez à l'infini. Car en matiere de progressions Mathematiques, lors qu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaisé de trouuer les autres. Et i'espere que nos neueux me sçauront gré, non seulement des choses que i'ay icy expliquées; mais aussi de celles que i'ay omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inuenter.

FIN.

TABLE DES MATIERES DE LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

DES PROBLEMES QV'ON PEVT construire ſans y employer que des Cercles & des Lignes droites.

DISCOVRS

LIVRE SECOND.

DE LA NATVRE DES LIGNES Courbes.

Q

LIVRE TROISIESME.

DE LA CONSTRVCTION DES PROBLEMES solides ou plus que solides.

FIN.

FAVTES PRINCIPALES SVRVENVES en l'impression.

P*Age* 5. *ligne* 9. $-b$ *lisez* $-b^3$

Page 24. *l.* 1. *lisez* B, C, D, E, F, *&c.*

Page 32. *l.* 14. *mettez ainsi* $+\frac{nnxx}{zz}$

Page 36. *l.* 4. *lisez* où on le trouue. Et *ligne* 16. *mettez* $-$ *au lieu de* $+$

Page 39. *l.* 22. *lisez* ou IKL. *Et l.* 24. *lisez* $\sqrt{\frac{1}{4}}$

Pag. 41. *l.* 23. *lisez* le cercle, la parabole, *&c.*

P. 54. *l.* 10. *lisez* $y^6 + fy^5$. *Et l.* 11 *au lieu de* k^3 *mettez* h.

Page 60. *dans la figure, mettez vn* F *auprés du point qui est contre l'*A

P. 61. *dans la* 1. *fig. mettez vn* A *au point où les* 2. *lignes droites s'entre coupent. Et dans la* 2. *figure aprés le* 8 *mettez vn* R *sur le milieu de la ligne droite qui est hors le cercle.*

Page 79. *l.* 5. *lisez* $+ 106.\, x$

Page 83. *lignes* 11. *&* 12. *mettez ainsi.*

$$z^4 \; * \; \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} \, zz \, \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} \, z \, \begin{matrix} +\frac{1}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \propto 0$$

Page 86. *ligne* 2. $\frac{1}{2}$ *lisez* $\frac{1}{4}$

Page 88. *l.* 13. *mettez* $-2cc$

Page 90. *l.* 23. *mettez ainsi* $\frac{-2a^3cc}{-2ac^4}$

Page 102. *dans la fig. au lieu du trait qui monte vers* A *au dela des petits points, mettez vn* K, *& finissez la ligne* g C *où elle touche la ligne* CA, *& de mesme par tout où est la mesme fig.*

Page 105. *l.* 9. *lisez* du tiers.

Page 110. *dans la fig. au lieu de l'*S *renuersée qui est entre le* K *& l'*M, *mettez vn* P; *& de mesme, page* 116.

PRIVILEGE DV ROY.

LOVIS PAR LA GRACE DE DIEV, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amez & feaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlemens, Maistres des Requestes ordinaires de nostre Hostel, Baillifs, Seneschaux, Preuosts, leurs Lieutenans & tous autres nos Iusticiers & Officiers qu'il appartiendra: Salut. Nostre Amé CHARLES ANGOT Marchand Libraire en nostre bonne Ville de Paris, Nous a fait remonstrer, qu'ayant cy-deuant en vertu de nostre permission imprimé *Les Lettres Françoises du Sieur Descartes* en deux volumes, dont le temps accordé pour le premier Tome estant expiré & pour le deuxiéme estant prest à expirer: Il desireroit de nouueau r'imprimer lesdits deux Volumes desdites *Lettres Françoises*, *ensemble les Ouurages François du mesme Autheur*, en diuers Volumes, de telle grandeur qu'il auisera bon estre, mais il craint que d'autres ne voulussent faire le semblable par concurrence, ce qui l'empescheroit de retirer les frais qu'il auroit faits, & luy causeroit vne perte tres-considerable s'il n'auoit nos Lettres sur ce necessaires, humblement requerant icelles. A CES CAVSES, voulant fauorablement traiter l'Exposant : Nous luy auons permis & permettons par ces presentes, de r'imprimer ou faire r'imprimer, vendre & debiter en tous les lieux de noſtre obeïſſance, les Ouurages du Sieur Deſcartes, contenant, *Ses Lettres, où ſont traittées plusieurs belles queſtions touchant la Moralle, Phyſique, Medecine, les Mathematiques, & plusieurs difficultez touchant ſes Ouurages; Le Diſcours de la Methode pour bien conduire ſa raiſon & chercher la verité dans les ſciences, plus la Dioptrique & les Metheores; La Geometrie; Les Meditations Metaphyſiques touchant la premiere Philoſophie; Les Paſſions de l'Ame; & autres Traittez François du meſme Autheur*, durant le temps & eſpace de dix années, à commencer du iour que chacun Volume ſera acheué d'eſtre r'imprimé, en tels Volumes, marges & caracteres qu'il auiſera bon eſtre; faiſant defenſes pẽdant ledit temps à tous Marchands Libraires, Imprimeurs, & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'imprimer ou faire imprimer leſdits liures cy-deſſus, ny iceux vendre & debiter en quelque ſorte & maniere que ce ſoit, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, deux mil liures d'amende applicable, vn tiers à Nous, vn tiers à l'Hoſpital General, & l'autre tiers à l'Expoſant, & de tous ſes depens, dommages & intereſts: à la charge de mettre deux exemplaires en noſtre Biblioteque publique, vn en noſtre Biblioteque ſeruant à nôtre perſonne, ſciſe au Chaſteau du Louure, & vn autre en celle de noſtre cher & feal Cheualier Chancelier de France, le ſieur Seguier. Comme auſſi de faire Regiſtrer ces preſentes és Regiſtres du Sindic des Libraires auant que de l'expoſer en vente, dont il ſera tenu de prendre vn receu de noſtre Bibliotequaire, & iceluy mettre és mains de noſtre amé & feal Conſeiller en nos

Conſeils, grand Audiancier de France en quartier, & à faute d'y ſatisfaire, nous auons dés à preſent déclaré ces preſentes nulles, enioignons audit Syndic deſdits Libraires de faire ſaiſir tous leſdits exemplaires qui en auront eſté imprimez, faute d'auoir ſatisfait aux clauſes portées par ces preſentes, du contenu deſquelles Nous vous mandons faire joüir & vſer l'Expoſant plainement & paiſiblement: Voulant qu'en mettant au commencement ou à la fin dudit liure vn extraict d'icelles, elles ſoient tenuées pour bien & deuëment ſignifiées. Commandons au premier noſtre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, faire pour l'execution des preſentes, tous Exploits, Significations & autres actes de Iuſtice requis & neceſſaires, ſans pour ce demander autre permiſſion. CAR tel eſt noſtre plaiſir, nonobſtant Clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraire. DONNE' à Paris le 18. iour d'Avril l'an de grace 1664. & de noſtre Regne le vingt-vniéme. Signé, Par le ROY en ſon Conſeil.

MABOVLE.

Regiſtré ſur le liure de la Communauté des Marchands Libraires & Imprimeurs de cette Ville, ſuiuant & conformément à l'Arreſt de la Cour de Parlement, du 8. Avril 1653. aux charges & conditions portées par le preſent Privilege. A Paris le 14. May 1664.

Signé, E. MARTIN.

Acheué d'imptimer le 4. Decembre 1664.

[illegible]

[illegible] plaisir, nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraire. Donné à Paris le [illegible] l'an de grace 17[illegible] [illegible]

[illegible] Signé, [illegible]

[illegible]

[illegible]