

ELEMENS

DE

GEOMETRIE.



ELEMENS DE GEOMETRIE

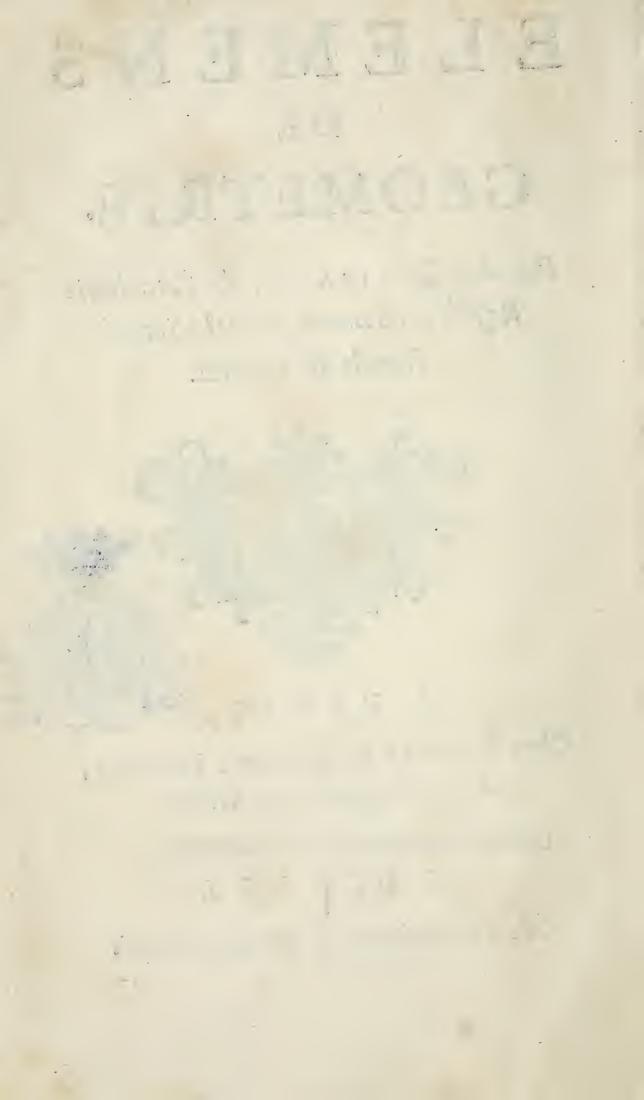
Par M. CLAIRAUT, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.

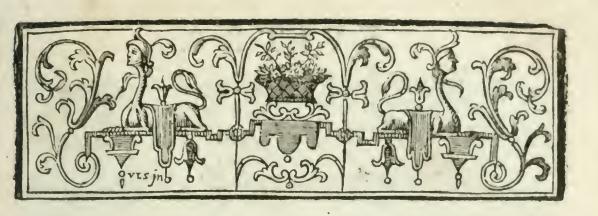


Chez Lambert & Durand, Libraires, ruë Saint-Jacques, au Grison.

M DCC XLI.

Avec Approbation & Privilége du Rois





A MONSEIGNEUR LE COMTE DE MAUREPAS, MINISTRE ET SECRETAIRE D'ETAT, COMMANDEUR DES ORDRES

DU ROY.



ONSEIGNEUR,

C'est peut-être oublier la supériorité de vos connoissances, que de vous

EPITRE:

présenter des Elémens de Géométrie; mais c'est connoître vos vuës que de vous offrir quelque chose d'utile.

Je ne dois donc point appréhender de mettre sous votre protection un Ouvrage qui contient les principes d'une Science dont vous partagez nécessairement les succès. Je vous supplie trèshumblement, MONSEIGNEUR, de l'accepter, comme un hommage de ma reconnoissance, & comme une preuve du profond respect avec lequel je suis,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur CLAIRAUT,



PREFACE.

foit par elle-même abserbendant que les dissicultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toûjours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, & de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec

au Lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne sixant point l'esprit sur des objets plus intéres-sans, & étant d'ailleurs dissiciles à concevoir, il arrive communément que les Commençans se fatiguent & se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on vouloit leur enseigner.

Il est vrai que pour sauver cette sécheresse, naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques Auteurs ont imaginé de mettre à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on en peut saire pour la pratique; mais par-là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque proposition venant

toûjours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles, qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites.

Quelques réflexions que j'aifaites sur l'origine de la Géométrie, m'ont fait espérer d'éviter ces inconvéniens, en réunissant les deux avantages d'intéresser & d'éclairer les Commençans. J'ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devoit s'être formée par dégrés; que c'étoit vraisemblablement quelque besoin qui avoit fait faire les premiers pas, & que ces premiers pas ne pouvoient pas être hors de la portée des Commençans, puisque c'étoient des Commençans qui les avoient faits.

Prévenu de cette idée, je me

suis proposé de remonter à ce qui pouvoit avoir donné naissance à la Géométrie; & j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers Inventeurs; observant seulement d'éviter toutes les faus-ses tentatives qu'ils ont nécessaiment dû faire.

La mesure des Terrains m'a paru ce qu'il y avoit de plus propre à faire naître les premieres propositions de Géométrie; & c'est, en esset, l'origine de cette Science, puisque Géométrie signisse mesure de Terrain. Quelques Auteurs prétendent que les Egyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs Hérita-

ges détruites par les débordemens du Nil, jettérent les premiers fondemens de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation de l'étenduë & de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporteroit pas à ces Auteurs, du moins ne sçauroit-on douter que dès les premiers temps, les hommes n'ayent cherché des méthodes pour mesurer & pour partager leurs Terres. Voulant dans la suite persectionner ces méthodes, les recherches particulieres les conduisirent, peu à peu, à des recherches générales; & s'étant enfin proposé de connoître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formérent une Science

d'un objet beaucoup plus vaste; que celui qu'ils avoient d'abord embrassé, & à laquelle ils conservérent cependant le nom qu'ils lui avoient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet Ouvrage une route semblable à celle des Inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux Commencans les principes dont peut dépendre la simple mesure des Terrains, & des distances accessibles ou inaccessibles, &c. De-là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premieres, que la curiosité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter; & justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce

que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

On ne sçauroit disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourroient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications; mais j'espére qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher & à découvrir; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorémes; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

> Si les premiers Auteurs de *iiij

Mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorèmes, ç'a été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avoient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes Lecteurs à résoudre des problêmes; c'est-à-dire, à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnuë, en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données, & des grandeurs inconnues qu'on se propose de trouver. En suivant cette voie, les Commençans apperçoivent, à chaque

pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'Inventeur, & par-là ils peuvent acquerir plus facilement l'esprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Elémens, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, & de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourroient me faire un pareil reproche, d'observer que je ne passe legérement, que sur des propositions dont la vérité se découvre pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte, surtout dans les commencemens, où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui

avoient de la disposition à la Géométrie, se plaisoient à exercer un peu leur esprit; & qu'au contraire, ils se rebutoient, lorsqu'on les accabloit de démonstrations, pour ainsi dire, inutiles.

Qu'Euclide se donne la peine de démontrer, que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre, a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé; on n'en sera pas surpris. Ce Géométre avoit à convaincre des Sophistes obstinés, qui se faisoient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il falloit donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le secours des raisonnemens en forme, pour sermer la bouche à la chicanne. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, & n'est propre qu'à obscurcir la vérité, & à dégoûter les Lecteurs.

Un autre reproche qu'on pourroit me faire, ce seroit d'avoir omis différentes propositions, qui trouvent leur place dans les Elémens ordinaires, & de me contenter, lorsque je traite des propositions, d'en donner seulement les principes sondamentaux.

A cela je réponds qu'on trouve dans ce Traité tout ce qui peut servir à remplir mon projet, que les propositions que je néglige sont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité par elles-mêmes, & qui d'ailleurs ne sçauroient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être instruit: Qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis doit suffire pour faire entendre les propositions élémentaires qui les supposent. C'est une matiére que je traiterai plus à fond dans les Elémens d'Algébre, que je donnerai dans la suite.

Enfin, comme j'ai choisi la mesure des Terrains pour intéresser les Commençans, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Elémens avec les Traités ordinaires d'Arpentage? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne consi-

PREFACE.

déreront pas que la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques. J'aurois pû de même, remonter à ces vérités, en faisant l'Histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de toute autre partie des Mathématiques que j'aurois voulu choisir; mais alors la multitude des idées étrangéres, dont il auroit fallu s'occuper, auroit comme étouffé les idées géométriques, ausquelles seules je devois fixer l'esprit du Lecteur.



Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences, du 31. Août 1740.

Essieurs de Reaumur, de Mairan, & Nicole, qui avoient été nommés pour examiner les Elémens de Géométrie de M. Clairaut, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet Ouvrage méritoit l'impression En soi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 14. Décembre 1740.

Signé FONTENELLE, Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROI.

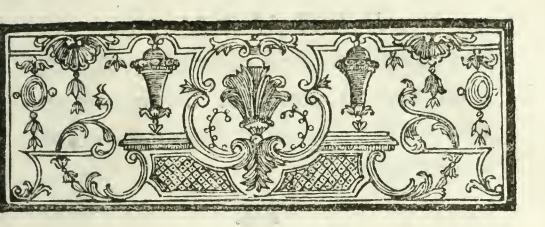
I OUIS, par la Grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amez & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Senéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, Salut. Notre Academie Royale des Sciences, Nous a très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plû lui donner, par un Réglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'est appliquée avec plus de soin, à cultiver les Sciences, qui font l'objet de ses exercices; ensorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnés au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en date du 6. Avril 1693, n'ayant point eu de terme limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat du 13 Août 1704, celles de 1713 & celles de 1716 étant aussi expirées : Et désirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent,

toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces presentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter par tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de notredite Académie Roiale des Sciences; comme aussi les Ouvrages, Mémoires, ou Truités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voud a faire paroure, après avoir fait examiner lesties Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression; & ce, pendant le remps & espace de quinze années consecutives, à compter du jour de la date desdites Presentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contresaire aucun desslits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout, ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque pretexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles mêmes séparées, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit de notredite Académie, ou de ceux qui auront droit d'elle, & ses ayans cause, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers au Dénonciareur, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelle; que l'impression desdits Ouvrages 'sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs; & que notredite Académie se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de

copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & certificats qui en auront été donnés, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin: le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Académie, ou ceux qui auront droit d'elle & ses ayans-cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie desdites Presentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'Original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande; & Lettres à ce contraires: car tel est notre plaisir. Donne' à Fontainebleau le douzième jour du mois de Novembre l'an de grace mil sept cens trente-quatre, & de notre Regne le vingtième.

Par le Roi en son Conseil. SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N. 792. Fol. 775. conformément au Réglement de 1723. qui fait désense, Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres, pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement, & à la charge de sournir les Exemplaires prescrits par l'Art. CVIII. du même Réglement. A Paris le 15. Novembre 1734.



ELEMENS DE GEOMETRIE

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.



E qu'il semble qu'on a dû mesurer d'abord, ce sont les longueurs & les distances.

I.

Pour mesurer une longueur quelconque, l'expédient que fournit une

A

sorte de Géometrie naturelle, c'est de comparer la longueur d'une mesure connuë à celle de la longueur qu'on veut connoître.

II.

te est la plus courte d'un point à un autre, & par conséquent la distance entre deux points.

premiere.

FIG. 1.

'A l'égard de la distance, on voit que pour mesurer celle qui est entre deux La ligne droi- points, il faut tirer une ligne droite de l'un à l'autre, & que c'est sur cette ligne qu'il faut porter la mesure connuë, mesure de la parce que toutes les autres faisant nécessairement un détour plus ou moins grand, sont plus longues que la ligne droite qui n'en fait aucun.

III.

OUTRE la nécessité de mesurer la distance d'un point à un autre, il arrive souvent qu'on est encore obligé de mesurer la distance d'un point à une Planche ligne. Un homme, par exemple, placé en D sur le bord d'une riviere, se propose de sçavoir combien il y a du lieu

où il est à l'autre bord AB. Il est clair que, dans ce cas, pour mesurer la distance cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites DA, DB, &c. qu'on peut tirer du point D à la droite AB. Or cette ligne, la plus courte dont on a besoin, il est aisé de voir que c'est la ligne DC, qu'on suppose ne pancher ni vers A, ni vers B. C'est donc sur cette ligne, à laquelle Une ligne on a donné le nom de perpendiculai-qui tombe re, qu'il faut porter la mesure connuë, tre, lans panpour avoir la distance DC, du point d'aucun cô-D, à la droite AB. Mais on voit aussi pendiculaire à cette ligne. que pour poser cette mesure sur la ligne DC, il faut que cette ligne soit préalablement tirée. Il étoit donc nécessaire qu'on eût une méthode pour

IV.

tracer des perpendiculaires.

On avoit encore besoin d'en tracer dans une infinité d'autres occasions. On sçait, par exemple, que la régu-

Fig 2.& 3. larité des figures telles que ABCD,

Le rectangle est une si posées de quatre côtés perpendiculaitre côtés perpendiculaires res les uns aux autres, engage à donles uns aux aux maisons, à leurs
dedans, aux jardins, aux chambres,
aux pans de murailles, &c.

Et le quarré est ur rectangle dont les quatre cétés sont égaux,

La première ABCD de ces figures, dont les quatre côtés sont égaux, s'appelle communément quarré. L'autre FGHI, qui n'a que ses côtés opposés égaux, retient le nom de rectangle.

V.

Dans les différentes opérations qui demandent qu'on méne des perpendiculaires, il s'agit, ou d'en abaisser sur une ligne, d'un point pris au-dehors, ou d'en élever d'un point placé sur la ligne même.

Maniere d'é. AB, on veuille élever la ligne CD, lever une per pendiculaire. perpendiculaire à AB; il faudra que cette ligne ne panche ni vers A, ni vers B.

Supposant donc d'abord que C soit à égale distance de A & de B, & que la droite CD ne panche d'aucun côté, il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A & de B; il ne s'agira donc plus que de trouver un point quelconque D, tel que sa distance au point A soit égale à sa distance au point B: car alors tirant par C, & par ce point une ligne droite CD, cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

Pour avoir le point D, on pourroit le chercher en tâtonnant; mais le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit, il veut une méthode qui l'éclaire. La voici.

Prenez une commune mesure, une corde, par exemple, ou un compas d'une ouverture déterminée, suivant que vous travaillerez, ou sur le terrain, ou sur le papier.

Cette mesure prise, vous sixerez au point A, ou l'extrémité de la corde,

Alij

ou la pointe du compas, &, faisant tourner l'autre pointe, ou l'autre extrémité de la corde, vous tracerez l'arc PDM. Puis, sans changer de mesure, vous opererez de même par rapport au point B, & vous décrirez l'arc QDN, qui, coupant le premier au point D, donnera le point cherché.

Car puisque le point D appartiendra également aux deux arcs PDM, QDN décrits par le moyen d'une mesure commune, sa distance au point A égalera sa distance au point B. Donc CD ne panchera, ni vers A, ni vers B. Donc cette ligne sera perpendiculaire sur AB.

distance de A & de B, il faut prendre deux autres points a & b, également éloignés de C, & s'en servir, à la place de A & de B, pour décrire les arcs PDM, QDN.

VI.

F1G. 4. SI une des traces, telle que PDM,

7

étoit continuée en O, en E, en R, Le cercle est &c. jusqu'à ce qu'elle revint au même re que décrit point P, la trace entiére s'appelleroit oile d'uncomcirconférence de cercle, ou simple-qu'elle tourment cercle.

Qu'on ne trace qu'une partie PDM de la circonférence, cette partie sera appellée arc de cercle.

Le point fixe A son centre, ou celui Le centre est du cercle.

Et l'intervalle AD, son rayon.

Toute ligne, comme DAE, qui pas-l'intervalle dont le comse par le centre A, & qui se termine à pas est ouvert.
la circonférence, est appellée diamétre; il est évident que cette ligne est tre est le double du rayon, ce qui fait que le
rayon est quelquesois nommé demi-diamétre.

VII.

La manière d'élever une perpendiculaire sur une ligne AB, sournit celle d'en abaisser une d'un point quelconque E, pris hors de cette ligne; car, plaçant en E, ou l'extrémité d'un sil,

A iiij

ou la pointe du compas, & d'un même intervalle E b, marquant deux points a & b sur la ligne AB, on cherchera, comme dans l'article précédent, un autre point D, dont la distance, au point a & au point b, soit la même, & par ce point & par E, on menera la droite DE, qui, ayant chacune de ses extrémités également éloignées de a & de b, & ne panchant pas plus vers l'un de ces points que vers l'autre, sera perpendiculaire sur AB.

VIII.

D E l'opération précédente suit la solution d'un nouveau Problême.

Couper une droite AB en deux parties égales; des ligne en deux points A & B, pris comme centres, & d'une ouverture de compas quelconque, on décrira les arcs REI, GEF, ensuite des mêmes centres, & de la même, ou de telle autre ouverture qu'on voudra, on décrira aussi les arcs

DE GEOMETRIE. 9
PDM, QDN, alors la ligne ED, qui
joindra les points d'intersections E &
D, coupera AB en deux parties égales
au point C.

IX.

La maniere de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'étoit plus aisé que de s'en servir pour faire ces figures qu'on appelle rectangles, & quarrés, dont on a parlé dans l'Article IV. On voit que pour faire un quarré Fig. 2.

ABCD, dont les côtés soient égaux à Faire un quarré ayant la ligne donnée K, il faut prendre sur son côté. la droite GE, un intervalle AB, égal à K, puis élever (Article V.) aux points A & B, les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, ensuite tirer DC.

X.

SI on vouloit tracer un rectangle FIG. 3.

FGHI, dont la longueur fut K, & la Faire un largeur L, on feroit FG égale à K, dont la lonensuite on éleveroit les perpendiculai-largeur sont données.

ELEMENS

res FI & GH, chacune égale à L, puis on tireroit HI.

XI.

DANS la construction des ouvrages, comme remparts, canaux, ruës, &c.

Les paral- on a besoin de mener des lignes paralleles sont des
lignes toûlignes toûjours également distan- position soit telle que leurs intervalles
tes les unes
des autres. ayent par-tout pour mesure des perpen-

diculaires de même longueur. Or pour mener ces paralleles, rien, ce semble, n'est plus naturel que de recourir à la méthode dont on se sert pour tracer

foit un des côtés ou de quelque canal, ou de quelque rempart, &c. auquel on voudra donner la largeur CA; ou pour

énoncer la question d'une manière plus géométrique & plus générale, suppo-

Mener une sons qu'on veuille mener par C, la paparallele à une ligne par rallele CD à AB, on prendra, à voun point donlonté, un point B dans la ligne AB,

& l'on opérera de la même façon que

si, ayant la base AB, on vouloit saire un rectangle ABCD, qui eût AC pour hauteur. Alors les lignes CD, AB, étant prolongées à l'insini, seroient toûjours paralleles, ou, ce qui revient au même, elles ne se rencontreroient jamais.

XII.

L a régularité des figures rectangulaires les faisant souvent employer, comme nous avons déja dit, il se trouve biendes cas où l'on a besoin de connoître leur étenduë. Il s'agira, par exemple, de déterminer combien il faut de tapisserie pour une chambre, ou combien un enclos de maison, ayant la forme d'un rectangle, doit contenir d'arpens, &c.

On sent que pour parvenir à ces sortes de déterminations, le moyen le plus simple & le plus naturel, est de se servir d'une mesure commune, qui, appliquée plusieurs sois sur la surface à mesurer, la couvre toute entiere. Méthode qui revient à celle dont on s'est déja servi pour déterminer la longueur des lignes.

Or il est évident que la mesure commune des surfaces, doit être elle même une surface, par exemple, celle d'une toise quarrée, d'un pied quarré, &c. Ainsi, mesurer un rectangle, c'est déterminer le nombre de toises quarrées, ou de pieds quarrés, &c. que contient sa surface.

F1G. 9.

Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. Supposons que le rectangle donné ABCD, ait 7 pieds de haut sur une base de 8 pieds, on pourra regarder cerectangle comme partagé en 7 bandes, a,b,c,d,e,f,g, qui contiendront chacune 8 pieds quarrés; la valeur du rectangle sera donc 7 sois 8 pieds quarrés, ou 56 pieds quarrés.

Maintenant si on se rappelle les premiers élémens du calcul arithmétique, & qu'on se souvienne que multiplier deux nombres, c'est prendre l'un autant de sois que l'unité est contenuë dans l'autre; on trouvera une parsaite analogie entre la multiplication ordinaire, & l'opération par laquelle on La mesure mesure le rectangle. On verra qu'en gle est le multipliant le nombre des toises, ou des hauteur par sa pieds, &c. que donne sa hauteur, par le nombre des toises ou des pieds, &c. que donne sa base, on déterminera la quantité de toises quarrées, ou de pieds, quarrés, &c. que contient sa supersisicie.

XIII.

Les figures qu'on a à mesurer, ne sont pas toujours régulieres, comme les rectangles; cependant on a souvent besoin d'avoir leur mesure, tantôt il s'agira de déterminer l'étendue d'un ouvrage construit sur un terrain qui manquera de régularité; tantôt on voudra sçavoir ce qu'une terre irrégulierement bornée contiendra d'arpens; il étoit donc nécessaire qu'à la méthode de

déterminer l'étenduë des rectangles; on ajoûtât celle de mesurer les figures qui ne sont pas rectangulaires.

Les figures rectilignes font celles que terminent des lignes droites.

FIG. 10.

FIG. 11.

On voit d'abord, que pour la pratique, la difficulté ne tombe que sur la mesure des figures rectilignes, telles que ABCDE, c'est-à-dire, des figures terminées par des lignes droites; car que, dans le contour d'un terrain, il se trouve quelques lignes courbes, comme dans la figure ABCDEFG, il est évident que ces lignes, partagées en autant de parties qu'il sera nécessaire pour éviter toute erreur sensible, pourront toûjours être prises pour un assemblage de lignes droites.

Cela posé, on voit que, malgré l'infinie variété des figures rectilignes, on peut les mesurer toutes de la même façon, en les partageant en figures de Le triangle trois côtés nommées communément terminee par triangles; ce qu'on fera de la manière la plus simple & la plus commode, si, d'un point quelconque A du contour

est une figure

trois lignes

droites.

DE GEOMETRIE. 15 de la figure ABCDE, on méne les lignes droites AC, AD, &c. aux points C, D, &c.

XIV.

IL ne s'agira donc plus que d'avoir la mesure des triangles qu'on aura formés. Or on sçait que pour trouver ce qu'on ignore, le moyen le plus sûr est de chercher si dans ce qu'on connoît, rien ne se rapporteroit à ce qu'on veut connoître; mais on a déja vû que tout rectangle ABCD, est égal au produit Fig. 12. de sa base AB par sa hauteur CB. D'ailleurs, il est aisé de s'appercevoir que cette figure coupée transversalement par la ligne AC, nommée diagonale, La Diagonole d'un reca se trouve partagée en deux triangles ingle est la égaux, & de-là on infére que chacun partage en ligne qui le de ces triangles égalera la moitié du gles égaux. produit de leur base AB ou DC, par leur hauteur CB ou DA.

Il est vrai qu'il n'arrive guéres que les triangles à mesurer, ayent deux de

Les trian-leurs côtés perpendiculaires l'un à l'augles rectangles sont ceux tre, comme les triangles ABC, ADC, qui ont deux de leurs cô- qu'on appelle triangles rectangles; mais tés perpenrien n'empêche qu'on ne les réduise diculaires I'un à l'autre. tous à des triangles de cette espéce.

Car que du point A, sommet d'un PL. 11. triangle quelconque ABC, on abaisse Fig. I. la perpendiculaire AD, sur la base BC, le triangle ABC se trouvera partagé en deux triangles rectangles ABD, ADC.

> Reprenant donc ce qui vient d'être dit, il est évident que comme les deux triangles ABD, ADC seront les moitiés

Un triangle des rectangles AEBD, ADCF, le trianest la moitié, qui a même me hauteur.

du rectangle gle proposé ABC, sera, de même, la base, & mê- moitié du rectangle EBCF, qui aura BC pour base, & AD pour hauteur: mais puisque la surface du rectangle EBCF égalera le produit de la hauteur

Donc sa mc- EB ou AD par la base BC, le triangle fure est la ABC aura pour mesure la moitié du moitié du produit de ja hauteur par produit de la base BC par la perpendisa base. culaire AD, hauteur du triangle.

On a donc la manière de mesurer

tous

DE GEOMETRIE.

tous les terrains terminés par des lignes droites, puisqu'il ne s'en trouve aucun qu'on ne puisse réduire à des triangles, & que des sommets de ces triangles, on sçait abaisser des perpendiculaires sur leurs bases.

XV.

DE ce que dans la méthode que nous venons de donner, pour mesurer l'aire, ou la superficie des triangles, on n'employe que leur base & leur hauteur, sans égard à la longueur de leurs côtés, on tire cette proposition, ou ce théorême, que tous les triangles, Fi e. 2. tels que ECB, ACB, qui ont une base Les triangles qui ont même commune CB, &t dont les hauteurs hauteur & même base, ont des superficies égales, superficie.

XVI.

Pour faciliter l'intelligence du principe qui donne la mesure des triangles, nous avons crû ne devoir

choisir pour base qu'un côté sur lequel pourroit tomber la perpendiculaire, abaissée du sommet opposé, ce qu'on a toûjours la liberté de faire, quand il. ne s'agit que de la mesure des terrains. Mais parce que dans la comparaison des triangles qui ont même base, les perpendiculaires àbaissées de leurs sommets peuvent tomber hors du triangle, comme dans la figure 3. il semble qu'il soit nécessaire de voir si les triangles, tels que BCG sont dans le cas des autres; c'est-à-dire, s'ils sont toûjours moitiés des rectangles ECBF, qui ont

F1G. 3.

la perpendiculaire GH pour hauteur. Mais c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que le triangle CGH, somme des deux triangles CGB, GBH, est la moitié du rectangle ECHG, somme des deux rectangles ECBF, FBHG, & qu'ainsi les deux triangles CGB, GBH, pris ensemble, valent la moitié du rectangle ECHG: or le triangle GBH, est la moitié du

DE GEOMETRIE.

19

rectangle FBHG; donc le triangle proposé BCG, est la moitié de de l'autre rectangle ECBF, qui a BC pour base, & GH pour hauteur.

XVII.

La proposition démontrée dans les trois articles précédens, peut encore s'énoncer généralement en ces termes: FIG. 4: les triangles EBC, ABC, GBC, sont Les trianégaux, lorsqu'ils ont une base commun gles qui ont même base, & qui sont ne BC, & qu'ils sont entre les mêmes renfermés entre les mêmes paralleles EAG, CBH; c'est-à-dire, paralleles, lorsque leurs sommets E, A, G, se sont égaux en superficie, trouvent dans une même ligne droite EAG, parallele à la droite CB. Car alors (Article XI.) leurs hauteurs, mésurées par les perpendiculaires EF, AD, GH, sont les mêmes.

XVIII.

Entre les différentes figures rectilignes qu'on sçait mesurer par la méthode précédente, il y en a qui approchent

de la regularité des rectangles,' ce sont des espaces tels que ABCD, terminés FIG. 5. par quatre côtés, dont chacun est parallele au côté qui lui est opposé. Ces

logrammes les deux opralleles.

Les Paralle-figures sont appellées Parallelogramsont des sigu mes; elles sont plus aisées à mesurer tre côtés, dont que les autres figures rectilignes, les posés sont pa-rectangles exceptés. Car qu'on partage le parallelogramme ABCD, en deux triangles ABC, ACD, ces deux triangles seront visiblement égaux: or comme chacun de ces triangles vaudroit la moitié du produit de la hauteur AF,

On les me-par la base BC, le parallelogramme sure en multipliant leur aura pour mesure le produit entier de hauteur par la base BC par la hauteur AF. leur base.

XIX.

DE-là il suit, que tous les parallelo-Fig. 6. ou 7. Les Paralle- grammes ABCD, EBCF, qui auront logrammes une base commune, & qui se trouvequi ont une base commuront entre les mêmes paralleles, seront ne, & qui font entre les égaux; ce qu'il est aisé de voir, même mêmes paralleles, sont indépendamment de ce qui précéde, perficie.

en remarquant que le parallelogramme ABCD deviendra le parallelogramme EBCF; si on lui ajoûte le triangle DCF, & que, de la figure entiere ABCF, on retranche le triangle ABE; qu'ainsi les deux triangles DCF, ABE, supposés égaux, il sera évident que le parallelogramme ABCD n'aura point changé d'étendue en devenant EBCF. Or, pour s'assurer de l'égalité de ces deux triangles, il sussira d'observer que AB & CD étant paralleles, aussi-bien que BE & CF, le triangle ABE ne sera autre chose que le triangle DCF, qui aura glissé sur sa base, de maniere que le point A sera arrivé en D, & E en F.

XX.

IL y a encore d'autres figures rectilignes qu'il est aisé de mesurer, & qu'on Les Poligonomme Poligones reguliers, figures sont des figuque terminent des côtés égaux, qui minent des ont tous la même inclinaison les uns & également inclinés les fur les autres. Telles sont les figures uns sur les autres. ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH *.

forme symétrique de ces sigures, aux bassins, aux fontaines, aux places publiques, &c. je crois qu'avant que d'apprendre à les mesurer, il saut voir de quelle manière on les trace.

XXI.

Maniere de Qu'on décrive une circonférence décrire un poligone d'un de cercle, qu'on la partage en autant nombre déterminé de de parties égales qu'on voudra donner de côtés. de côtés au poligone; qu'ensuite on méne les lignes AB, BD, DE, &c. par les points A,B,D,E, &c. qui partageront la circonférence, on aura le poligone cherché, qu'on nommera, ou

Le Penta-pentagone, ou exagone, ou eptagone, gone a 5. côtés, l'Exago. ou octogone, ou enneagone, ou déne 6, l'Eptagone 7, l'Oc- cagone, &c. suivant qu'il aura, ou togone 8,
l'Enneagone cinq, ou six, ou sept, ou huit, ou'
9, le Decagone 10, &c. neuf, ou dix, &c. côtés.

XXII.

Pour avoir la mesure d'un poligo- Mesure de ne regulier, on pourroit employer la d'un Poligométhode qu'on a déja donnée (Article XIII.) pour toutes les figures rectilignes; mais on s'apperçoit aisément que le plus court est de partager le polygone en triangles égaux, qui ayent tous le centre C pour sommet. Car prenant un Fig. 10. de ces triangles, CBD par exemple, & tirant sur la base BD, la perpendi- L'apothéme culaire CK, qui, pour lors sera nom-pendiculaire mée l'apothéme du polygone, comme abaissée du centre de la l'aire du triangle vaudra le produit de figure sur un de les côtés. la base BD, par la moitié de CK, ce produit, pris autant de fois que le polygone aura de côtés, donnera l'aire de la figure entiere.

XXI.

Q u'on ne partageât la circonférence du cercle qu'en trois parties égales, on formeroit un triangle nommé B iiij Le triangle communément Triangle équilateral; équilateralest qu'on partageât cette circonférence en trois côtés font égaux, quatre parties égales, on formeroit un quarré: mais ces deux figures, les plus

quarré; mais ces deux figures, les plus simples de tous les polygones, peuvent aisément se tracer, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la division du cercle; c'est ce qu'on a déja vû (Art. IX.) pour le quarré. A l'égard du triangle équilatéral, il est aisé de s'appercevoir.

Maniere de équilatéral, il est aisé de s'appercevoir que pour le décrire sur une base don-

comme centres, & d'une ouverture de compas égale à AB, on trace les arcs DCF & GCH, qu'ensuite des points A & B on méne les lignes AC, BC, au point C, section commune des deux arcs DCF, GCH, & sommet du triangle.

XXIV.

A la méthode de décrire géométriquement le triangle équilatéral & le quarré, les premiers de tous les polygones, je pourrois joindre celle de tracer géométriquement un pentagone, comme plusieurs Auteurs l'ont fait dans les Elémens qu'ils nous ont donnés; mais parce que les Commençans, pour qui seuls nous travaillons ici, n'appercevroient qu'avec peine la route qu'a dû suivre l'esprit, en cherchant la maniere de tracer cette sigure; route que l'Algébre nous met à portée de découvrir, nous nous croyons obligés de renvoyer la description du pentagone au Traité qui suivra celui-ci, & dans lequel on joindra cette description à celle de tous les autres polygones qui auront un plus grand nombre de côtés, & qui, sans le secours de l'Algébre, ne pourroient être décrits géométriquement.

Des polygones qui ont plus de cinq côtés, & que je dis ne pouvoir être décrits que par le moyen du calcul algébrique, il en faut excepter ceux de 6, de 12, de 24, de 48, &c. côtés, &ceux de 8, de 16, de 32, de 64, &c. côtés, qu'on peut aisément décrire par

les méthodes que fournit la Géométrie élémentaire, comme on le verra à la fin de cette premiere Partie.

XXV.

JE reviens à la mesure des Terrains, & je vois que ceux qu'on veut mesurer, sont souvent tels qu'ils se resusent aux opérations que prescrivent les méthodes précédentes.

re d'un champ, d'un enclos, & c. dont on voudra avoir la mesure. Suivant ce qu'on a vû, il saudroit partager ABCDE en triangles tels que ABC, ACD, ADE; ensuite mesurer ces triangles, après avoir abaissé les perpendiculaires EF, CH, BG: mais que dans l'espace ABCDE, il se trouve quelque obstacle, une élevation par exemple, un bois, un étang, & c. qui empêche qu'on ne méne les lignes dont on aura besoin, que saudra-t-il saire alors? quelle méthode saudra-t-il suivre

pour remédier à l'inconvénient du terrain? Celle qui se présente d'abord à l'esprit, c'est de choisir quelque terrain plat, sur lequel on puisse aisément opérer, & de décrire sur ce terrain des triangles égaux, & semblables aux triangles ABC, ACD, &c. Voyons comment on s'y prendra, pour sormer les nouveaux triangles.

XXVI.

Commençons par supposer que Pl. III. l'obstacle se trouve dans l'intérieur du Fig. 1. triangle ABC, dont les côtés seront Connoissant connus, & qu'on veuille tracer un tés d'un triangle égal & semblable sur le ter-un autre triangle égal & semblable sur le ter-un autre triangle qui soit égal, gne DE égale au côté AB, ensuite Fig. 1. & 2. prenant une corde de la longueur BC, & sixant une de ses extrémités en E, on décrira l'arc IFG, qui aura la corde pour rayon; & par le moyen d'une autre corde, prise égale à AC, & dont on attachera pareillement un des bouts

en D, on tracera l'arc KFH, qui coupera le premier au point F; alors menant les lignes DF & FE, on aura un triangle DEF, égal & semblable au triangle proposé ABC; ce qui est évident: car les côtés DF & EF, qui s'uniront au point F, étant respectivement égaux aux côtés AC & BC, unisau point C, & la base DE ayant été prise égale à AB, il ne seroit pas possible que la position des lignes DF & EF sur DE, sût dissérente de la position des lignes AC & BC sur AB. IT est vrai qu'on pourroit prendre les lignes Df, Ef, au dessous de DE; mais le triangle se retrouveroit encore le même, il seroit simplement renversé.

XXVII.

SI on ne pouvoit mesurer que deux Fig. 3. des trois côtés du triangle ABC, les deux côtés AB, BC, par exemple; il est clair qu'avec cela seul, on ne pourroit pas déterminer un second triangle égal & semblable à ABC. Car quoi-Fig.3. & 4. qu'on eût pris DE, égal à BC, & DF, égal à BA, on ne sçauroit quelle position donner à celle-ci, relativement à l'autre. Pour lever cette difficulté, la ressource qui se présente est simple : on fait pancher DF, de la même maniere sur DE, que AB panche sur BC; ou, pour s'exprimer un anison d'une les Géométres, on donne à mison d'une l'angle FDE la même ouverture qu'à autre. l'angle ABC.

XXVIII.

Pour faire cette opération, on Maniere de prend un instrument tel que a b c, com- faire un angle égal à un posé de deux régles qui puissent tourner autour de b, & l'on pose ces régles fur les côtés AB, & BC. Par-là elles sont entr'elles le même angle que les côtés AB & BC. Plaçant donc la régle b c sur la base DE, de maniere que le centre b réponde au point D, & que

l'ouverture de l'instrument reste toûjours la même, la régle ab donnera la position de la ligne DF, qui fera, avec la ligne DE, l'angle FDE, égal à l'angle ABC. Or la ligne DF aura été pris se de même longueur que BA. Donc il ne s'agira plus que de mener par F & par E la droite FE, pour avoir le triangle FED entiérement égal, & semblable au triangle ABC. Pratique simple, qui suppose ce principe éviveux côtés, dent, qu'un triangle est déterminé par la longueur de deux de ses côtés, & nés, le trian- par leur ouverture; ou, ce qui revient au même, qu'un triangle est égal à un autre, lorsque deux de leurs côtés sont respectivement égaux, & que l'angle compris entre ces côtés est également ouvert.

XXIX

On pourroit encore faire l'angle Fig. 5. FDE égal à l'angle ABC, de la ma-& 6. niere suivante.

& l'angle compris, érant dongles est déterminé.

Du centre B, & d'un intervalle quelconque Ba, décrivez un arc ahc; enniére de faire
un angle égal
fuite du centre D, & du même intervalle, tracez l'arc eif; alors vous n'aurez plus qu'à chercher un point f, qui
foit placé fur l'arc e i f de la même maniére que a, se trouvera placé sur l'arc
c ha. Or vous trouverez facilement le
point f, en vous servant de la droite cercle, est la
ac, qui, suivant la définition ordinaiterminent les
deux extrére, se nommera la corde de l'arc ahc. mités de

Car si, du centre e, & d'un intervalle égal à a c, vous décrivez l'arc lfk, l'intersection des deux arcs e if, lfk, vous donnera le point cherché f.

Tirez ensuite par D & par f, la ligne DfF, vous aurez l'angle FDE égal à l'angle ABC. Ce qui est évident (Article XXVI.) puisque les triangles Bac, Dfe, seront entierement égaux, & semblables dans toutes leurs parties.

XXX.

Lorsqu'on veut faire le triangle

Fig. 3. & 4. FDE égal au triangle ABC, s'il arrive qu'on ne puisse mesurer qu'un des cô-

& un côté déterminent le triangle.

Deux angles tés, BC par exemple, on a recours aux angles ABC & ACB. Ayant fait DE égal à BC, on place les lignes FD & FE, de manière qu'elles fassent, avec DE, les mêmes angles que AB & AC font avec BC: alors, par la rencontre de ces lignes, on a le triangle FDE égal & semblable au triangle ABC. Le principe que suppose cette opération, est de lui-même si simple, qu'il n'a pas besoin d'être démontré.

XXXI.

Fig. 7: Si des trois côtés du triangle ABC, on ne pouvoit mesurer que la base BC, Le triangle & qu'on sçût d'ailleurs que ce triangle isocéle est cefût isocéle; c'est-à-dire, que les deux lui qui a deux côtés côtés AB & AC, fussent égaux: il est égaux. évident qu'il suffiroit de mesurer un des deux angles ABC, ACB; car alors l'autre lui seroit égal.

On en voit aisément la raison, si on

se représente ce qui arriveroit, en supposant que les deux côtés AB, AC, du triangle ABC, fussent d'abord couchés sur BD, & sur CE, prolongemens de la base BC, & qu'ensuite on les relevât pour réunir leurs extrémités au point A; car alors l'égalité de ces deux côtés les empêcheroit de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pancheroient également sur la base BC. Donc l'angle ABC seroit égal à l'angle font avec la ACB.

XXXII.

Pour revenir à la mesure des Terrains, on verra que quels que soient les obstacles qu'on pourra rencontrer dans leur intérieur, il sera aisé, par la méthode précédente, de transporter sur un terrain libre, tous les triangles qui partageront l'espace qu'on voudra mefurer.

Supposons, par exemple, que vous voulussiez mesurer un bois, dont la figure für ABCDEFG.

Les angles

base, sont

égaux en-

tr'eux.

D'abord vous prendriez un triangle égal à ABC, ce que vous pourriez faire sans entrer dans l'interieur de ce triangle, en mesurant les deux côtés AB, BC, & l'angle compris CBA.

Ce triangle décrit donneroit l'angle

BCA, & la longueur de AC, & comme vous pourriez mesurer le côté extérieur DC, vous auriez dans le triangle CAD, les côtés DC, & CA. Quant à l'angle DCA, vous le trouveriez en Fig. 8. prenant d'abord l'angle IKL, égal à l'angle DCB, ensuite l'angle LKO, égal à l'angle BCA, ce qui vous donneroit l'angle restant IKO, égal à l'angle cherché DCA.

> Le triangle ADC, ainsi déterminé par les deux côtés DC & CA, & par l'angle compris DCA, vous connoîtriez de même le triangle DAG, & le reste de la sigure.

XXXIII.

La méthode qu'on vient de donner

pour mesurer les terrains, dans lesquels on ne sçauroit tirer de lignes, fait souvent naître de grandes difficultés dans la pratique. On trouve rarement un espace uni & libre, assez grand pour faire des triangles égaux à ceux du terrain dont on cherche la mesure. Et même quand on en trouveroit, la grande longueur des côtés des triangles, pourroit rendre les opérations très-difficiles: abaisser une perpendiculaire sur une ligne d'un point qui en est éloigné seulement de 500 toises, ce seroit un ouvrage extrêmement pénible, & peutêtre impraticable. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à ces grandes opérations.

Ce moyen s'offre comme de lui-mê- pr. IV. me. Il vient bientôt dans l'esprit de représenter la sigure à mesurer ABCDE, Fig. 1. par une sigure semblable abcde, mais & 2. plus petite, dans laquelle, par exemple, le côté ab soit de 100 pouces, si le côté AB est de 100 toises, le côté

bc de 45 pouces, si BC est de 45 toises, & de conclure ensuite que si l'étendue de la figure réduite abcde, est de 60000 pouces quarrés, celle de la figure ABCDE doit être de 60000 toises quarrées.

Mais, avant toutes choses, il faut scavoir en quoi consiste la ressemblance de deux figures.

XXXIV.

Fá quoi confifte la de deux figures.

Or pour peu qu'on y résléchisse; on reconnoîtra bientôt que deux figuressemblance res ABCDE, abcde, pour être semblables, doivent être telles que les angles A, B, C, D, E, de la grande, soient égaux aux angles a, b, c, d, e, de la petite, & que, de plus, les côtés ab, bc, cd, &c. de la petite, contiennent autant de parties p, que les côtés AB, BC, CD, &c. de la grande, contiennent de parties P.

Pour exprimer cette seconde condition, les Géométres disent, qu'il faut que les côtés AB, BC, CD, &c. soient proportionnels aux côtés ab, bc, cd, &c.; ou que le côté AB contienne ab, de la même maniere que BC contient be, &c.; ou que le côté AB soit aussi grand, par rapport à ab, que BC l'est par rapport à bc, &c.; ou encore, qu'il y ait même raison, ou même rapport entre AB & ab, qu'entre BC & bc, &c.; ou enfin, que AB soit à ab, comme BC à bc, &c. Toutes façons d'exprimer la même chose, mais qu'il faut se rendre familières, pour entendre le langage des Géométres.

XXXVI.

A P R E's avoir vû en quoi consiste la ressemblance de deux sigures, cherchons quelle voie la Nature nous indique pour tracer une sigure semblable à ble à une autre.

Octobre la P R E's avoir vû en quoi consiste

Maniére de faire une sigure semblable à ble à une autre.

Ciij

une autre. Pour cela, représentonsnous un Dessinateur, qui veut copier une figure en la réduisant.

D'abord prenant ab, pour representer la base AB de la sigure à copier ABCDE, il incline sur ab les côtés ae & bc, de la même façon que AE & BC sont inclinés sur AB, en observant que les longueurs de ae & de bc, soient à celle de ab, comme les longueurs de AE & de BC sont à celle de AB; c'est-à-dire, que si AE, par exemple, est la moitié de AB, il sait ae égal à la moitié de ab, & qu'il en use de même pour déterminer la longueur de bc, relativement à BC.

Ayant ainsi déterminé les points e & c, il trace deux lignes ed & cd, qu'il incline sur ea & sur cb, de la même manière que ED & CD sont inclinés sur EA & sur CB, & prolongeant ces lignes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en d, il acheve sa figure abcde.

XXXVII.

Q u'on réfléchisse présentement sur cette construction, on verra qu'elle n'est appuyée que sur l'égalité qui est entre les angles E, A, B, C, & e, a, b, c, & sur la proportionalité des côtés EA, AB, BC, & des côtés ea, ab, be; qu'ainsi la figure se trouve finie, sans qu'on ait pris l'angle d, égal à l'angle D, ni les côtés ed, cd, proportionnels aux côtés ED, CD; réflexion, qui d'abord pourroit faire craindre que l'angle d ne fût effectivement pas égal à l'angle D, ni les côtés ed, cd, proportionnels aux côtés ED, CD, & que, par conséquent, la figure abcde ne se trouvât pas entiérement semblable à la figure ABCDE; mais n'eût-on que l'expérience pour se rassurer, ce doute se dissiperoit bientôt; outre que pour peu d'attention qu'on y fasse, on sent que de l'égalité respective des quatre angles E, A, B, C, & e, a, b, c, & de la proportionalité des trois côtés EA, AB, BC, & ea, ab, bc, résulte nécessairement l'égalité des angles D, d, & la proportionnalité des côtés ED, CD, & ed, cd.

Cependant, pour écarter tout soupçon, saisons voir que toutes les conditions que demande la ressemblance de deux sigures, sont nécessairement dépendantes les unes des autres; ce qui nous sera aisé de faire, en examinant d'abord les triangles, qui sont les sigures les plus simples, & qui entrent nécessairement dans la composition de toutes les autres; examen qui nous conduira à toutes les propriétés & à tous les usages des sigures semblables.

XXXVIII.

Supposons que sur la base ab on si deux antrace le triangle abc, en ne prenant que triangle sont les angles cab, cba, égaux aux angles angles d'un autre triangle, le troirera premierement que le troisséme an-

DE GEOMETRIE. 41

gle ach égalera le troisséme angle ACB. sième angle Car soit posé le triangle abc sur le de l'un égame angle de triangle ABC, de manière que le point l'autre.

a se trouve sur le point A, ab sur AB, ac sur AC; il est clair que ch sera parallele à CB, & cela parce que le côté ch prolongé, ne pourroit rencontrer le côté CB, que les deux lignes ne penchassent inégalement sur AB, & que, par conséquent, les angles cha & CBA fussent inégaux; ce qui seroit contre la supposition.

Comme, de l'égalité des angles cha & CBA, il suivra que les lignes cb, CB, seront paralleles, du parallelisme de ces lignes, il fuivra aussi que les angles Acb, ACB, seront égaux; ce qu'il s'agissoit de prouver.

XXXIX.

MAINTENANT faisons voir que les côtés qui se répondent dans deux gles, dont les triangles ach & ACB, qui ont les mêmes angles, sont proportionnels.

Deux trianrespectivement égaux, ont leurs côtés proportionnels.

Pour fixer nos idées, supposons dabord que ab soit la moitié de AB; il faudra que nous prouvions que ac sera aussi la moitié de AC, & be la moitié de BC. Que acb, ainsi que dans l'Article précédent, ait encore la position Acb, si on méne cg, parallelle à AB, il est clair que cette ligne égalera bB, ou Ab, & que gB égalera de même cb. Or comme les angles cg C & Ccg, seront manisestement égaux aux angles chA, & Ab, le triangle Ccg, égalera le triangle (Ab, (Article XXX.) Donc on aura Ccégal à Ac, & Cgégal à cb, ou à gB. Donc Ac ou ac sera moitié de

Fig. 3. & 5. de AC, & cb moitié de CB.

Si ab étoit contenu trois, quatre, ou tel autre nombre de fois qu'on voudroit, dans AB, il seroit également aisé de démontrer que ac seroit contenu le même nombre de fois dans AC, & cb dans CB. Car des points de division b, f, de la base AB, menant bc, fh, &c. paralleles à BC, on pourroit

DE GEOMETRIE, 43 placer le long de AC, trois, quatre, &c. triangles Acb, chg, hCi, &c. égaux au triangle acb.

Mais que ab, au lieu d'être conte-Fig. 3. & 6. nu exactement un certain nombre de fois dans AB, n'y fût contenu qu'avec quelque fraction, deux fois & demie, par exemple, on prouveroit que ac seroit aussi contenu deux sois & demie dans AC, & bc deux fois & demie dans BC.

Car, quand par le moyen des paralleles bc, fh, on auroit placé le long de AC, les deux triangles Ach, chg, égaux à ach, il resteroit entre les deux paralleles hf & CB, de quoi placer un triangle Chi, dont les côtés seroient moitiés des côtés de cAh; ce qui est évident, puisque par la supposition, fB seroit la moitié de Ah, & que la base hi du triangle Chi égaleroit fB, à cause des paralleles hf, CB. Donc, en général, lorsque deux triangles ABC, abc, ont les mêmes angles, ces triangles, nommés triangles semblables, ont leurs

côtés proportionnels, ou, ce qui revient absolument au même, les côtés AB, BC, AC, de l'un de ces triangles ABC, contiennent le même nombre de parties P, que les côtés ab, bc, ac, de l'autre triangle abc, contiennent de parties p. P étant le pied, la toise, &c. ou, en général, l'échelle avec laquelle ABC, a été construit, & p celle dont on s'est servi en construisant abc.

XI.

D E la proposition que nous venons de démontrer, se tire naturellement la solution d'un problème souvent utile dans la pratique.

Divisor une de parties égales qu'on youdra.

On demande qu'une ligne soit divisée ligne en tant en un nombre donné de parties égales; ce qui se pourroit faire, à la vérité, en tâtonnant; mais jamais avec cette sûreté que donne l'exactitude géométrique.

Supposons, par exemple, qu'on ait à Fie. 5. diviser AB en trois parties égales, on

DE GEOMETRIE. 45 commence par tirer une ligne indéfinie AC, qui fasse un angle quelconque avec AB, ensuite on porte sur cette ligne trois parties égales Ac, ch, hC, d'une ouverture de compas prise à volonté, puis on tire CB, & l'on méne à cette droite les paralleles cb, hf; par-là, AB, coupée aux points b & f, se trouve partagée en trois parties égales; ce qui est clair par l'Article précédent.

XLI.

Si on vouloit diviser une ligne en un nombre fractionnaire de parties, qu'une ligi comme deux & demie, trois & un proportione de un nelle à trois quart, &c. ou bien, qu'on se proposât autres, & comment on en général, de diviser la ligne AB au la trouve. point b, en sorte que AB sût à Ab, comme la ligne NO à la ligne MQ; on voit encore, que la folution du problême dépendroit de l'Art. XXXIX; c'est-à-dire, qu'il faudroit tirer par A une droite quelconque, prendre sur cette droite Ac & AC, égales à MQ,

Ce que c'est qu'une ligne

FIG. 6.

ELEMENS.

& à NO, & ensuite mener cb, parallele à CB; alors le point b seroit le point cherché.

Les Géometres énoncent de cette autre maniere le problème que nous venons de résoudre. Trouver à trois lignes NO, MQ, AB, une quatriéme proportionnelle.

XLII.

Les hauteurs femblables ABC, abc, auront, nondes triangles feulement leurs côtés proportionnels,
font proportionnelles à leurs côtés.

mais que les perpendiculaires CF, cf,
qu'on abaissera des sommets C, c, sur
les bases AB, ab, suivront encore la
proportion des côtés: ce qui est si aisé
à démontrer par ce qui précéde, que
nous négligerons de nous y arrêter.

XLIII.

QUANT à l'aire des triangles semblables ABC, abc, on voit que celle du premier contiendra autant

DE GEOMETRIE. 47. de quarrés X faits sur la mesure P, que l'aire, du second, contiendra de quarrés x, faits sur la mesure p. Car comme CF & AB, auront, par l'Article précédent, autant de parties P, que cf & ab, auront de parties p; la moitié du produit de CF par AB, mesure de ABC; (Article XIV.) donnera le même nombre que celui qui résultera de la moitié du produit de cf par ab, mesure de abc; mais avec cette différence, que CF & AB, se comptant en parties P, leur produit se comptera en quarrés X, & que cf & ab, qui se compteront en parties p, donneront un produit qui se comptera en quarrés x.

XLIV.

CE que nous venons de dire sur la mesure des triangles semblables, sert de preuve à une proposition, qui, dans les Elemens de Géometrie, s'énonce ordinairement ainsi. Les triangles sem- Les aires blables ABC, abc, sont entr'eux semblables,

les comme les quarrés des côtés homologues.

comme les quarrés ABDE, abde, de leurs côtés homologues ou correspondans AB, ab.

La démonstration que renferme l'Article précédent, méne absolument à cette conséquence; car le quarré ABDE, contenant autant de X que abde contient de x, il est évident que les deux nombres de quarrés X, qui expriment le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, sont les mêmes que les nombres de quarrés x, qui donnent le rapport du triangle abc, au quarré abde; ou, ce qui revient au même, que le triangle ABC est au quarré ABDE, comme le triangle abc au quarré abde.

De-là il suit que si, par exemple, le côté AB étoit double dù côté ab, le triangle ACB seroit quadruple du triangle acb; que si AB étoit triple de ab, le triangle ACB seroit neuf fois plus grand que le triangle acb, &c; car AB ne peut être double de ab, que le quarré

ABDE

DE GEOMETRIE. 49 ABDE ne soit que quadruple du quarré abde, &c.

XLV.

Pour passer présentement des trian-fig. 1.& 2. même Plandelles aux autres figures, supposons qu'à che. chacun des triangles semblables ABD, Propriétés des figures femblables, abd, on joigne deux autres triangles semblables, tirées de celles des triangles premiers semblables aux deux autres; on verra que dans les figures totales ABCDE, abcde,

E, seront les mêmes que les angles a, b, c, d, e; ce qui est clair, puisque les uns & les autres seront, ou des angles correspondans de triangles semblables, ou des angles composés de ces angles correspondans.

2°. On verra que le rapport des côtés homologues ou correspondans DE, de, BC, bc, &c. des figures ABCDE, abcde, sera nécessairement le même, c'est-à-dire, que si P, par exemple, se trouve un certain nombre de sois dans

la base AB, & que p se trouve le même nombre de sois dans ab, P. & p seront aussi contenus un même nombre de sois dans deux côtés homologues quelconques DE & de; car à cause de la ressemblance des triangles ABD, abd, la quantité de P que rensermera AD, égalera la quantité de p rensermée dans ad; alors regardant ces côtés comme les bases des triangles semblables ADE, ade, le nombre de parties P contenues dans DE, sera le même que le nombre de parties p que contiendra le côté de.

3°. On verra encore que si dans les deux sigures on tiroit des lignes qui se répondissent, telles que CE, ce, ou les perpendiculaires DF, df, &c; ces lignes seroient toûjours entr'elles dans la même raison que les côtés homologues des deux sigures.

Donc les figures ABCDE, abcde, feront entiérement semblables dans toutes leurs parties.

XLVI.

La figure abcde ainsi décrite, parfaitement semblable à la figure ABC DE, il est évident que si on vouloit tracer de nouveau une figure entiérement égale à abcde, & par conséquent, encore semblable à ABCDE, il seroit inutile de mesurer tous les côtés & tous les angles de abcde ; qu'il suffiroit, par exemple, de prendre les trois côtés ab, ea, bc, & les quatre angles, c, a, b, c, & qu'avec cela seul on seroit sûr de retracer la même figure abcde, semblable à ABCDE; ce qui forme une démonstration complette de ce qu'on n'avoit fait que préfumer (Article XXXVII.). Mais on peut aller plus loin; car il est clair qu'on aura toûjours dissérentes façons de combiner la quantité d'angles & de lignes qu'on doit nécessairement mesurer dans une figure quelconque, pour en faire une autre qui lui soit propor-

ELEMENS

tionnelle; ce seroit fatiguer le Lecteur que d'entrer dans un plus grand détail.

XLVII.

Les aires des figures sementr'elles comme les quarrés des logues.

On démontreroit, par des raisonblables, sont nemens semblables à ceux de l'Article XLIII. que le nombre de quarrés X, côtés homo-que contient la figure ABCDE, est le même que celui des quarrés x renfermés dans la sigure abcde; & qu'ainsi, les aires des figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XLVIII.

Les figures femblables ne tiées que par les échelles fur lesquelles elles font construites.

Tout ce qui vient d'être dit sur sont différen-les figures semblables, peut se réduire à ce seul & unique principe, que les figures semblables ne sont différentiées que par les échelles sur lesquelles elles font construites.

XLIX.

MAINTENANT, pour mieux sen-

tir l'usage qu'on doit saire des triangles semblables & des réductions, pour avoir la mesure des terrains sur lesquels on ne pourroit pas commodément opérer, figurons-nous que ABCDEF re- PL. V. présente le contour d'un Parc, d'un Fig. 1. & 2, Etang, &c. dont on voudra déterminer l'étendue. D'abord on mesurera un des côtés de la figure, FE par exemple, & l'on verra combien ce côté aura de toises, de perches, &c. ensuite prenant telle échelle qu'on voudra, on tracera sur un carton, ou sur du papier, une ligne fe, égale à autant de parties de l'échelle, que FE contiendra de toises, de perches, &c. puis saisant les angles def, dfe, égaux aux angles DEF, DFE, on aura le triangle edf, dans lequel on abaissera eg, perpendiculaire sur df: cela fait, & les lignes df & eg, mésurées par le moyen de l'échelle, on conclura qu'autant que ces lignes contiendront de parties réduites, autant DF & EG contiendront de toises, de

perches, &c. Ainsi, en multipliant DF par la moitié de EG, on aura la valeur du triangle EDF, & mesurant de la même maniére chacun des autres triangles DCF, BCF, ABF, l'aire de la figure entiére se trouvera déterminée.

IL.

meiurer la

Maniére de IL arrive souvent que dans la pratidistance d'un que, il faut mesurer la distance du lieu sien inacces-F, où l'on est placé à un autre lieu, où quelque obstacle empêche qu'on ne se transporte; nouveau problême, mais dont la solution est déja donnée d'avance dans l'Article qui précéde celui-ci; car puisque pour mesurer DF, on n'a eu besoin que de la similitude des triangles def & DEF, il est clair que si on mesure une base quelconque EF, & que des points F&E, on puisse appercevoir le point D, le problême sera résolu; c'est-à-dire, qu'on aura la distance FD.

LI.

L'usage qu'on peut faire des instrumens particuliers, tels que BAC, Fig. 3. que j'ai dit (Article XXVIII.) composé de deux branches unies au point A, autour duquel elles ont la liberté de tourner, expose souvent à bien des mécomptes. Tantôt l'ouverture de l'angle s'altérera dans le transport; tantôt la forme qu'on est obligé de donner à l'instrument pour en faciliter l'usage, empêchera qu'on ne puisse l'appliquer sur le plan où devra se faire la réduction.

Ajoûtons à cela, que chaque nouvel angle BAC, qu'on prend de cette façon, demande qu'on transporte de nouveau, l'instrument sur le papier, & que la seule ressource qu'on ait pour comparer deux angles, c'est de les poser l'un sur l'autre, sans que, par ce moyen, on puisse avoir au juste ni leur rapport, ni leur grandeur absolue.

Diiij

LII.

Il étoit donc nécessaire de chercher une mesure fixe pour les angles, comme on en avoit déja pour les longueurs. Or cette mesure qu'il falloit avoir, il a été facile de la trouver. Car

Fig. 4. que Ab restant fixe, on lui applique d'abord le côté Ac, qu'ensuite on fasse tourner ce côté autour de A, il est clair que si ayant adapté à l'extrémité c de la branche mobile Ac, ou une plume, ou un crayon, qui donne moyen de rendre sensible la trace du point c,

pour mesure l'arc de cercle qu'interceptent ses côtés,

Un angle a cette trace, qui formera un arc de cercle, donnera exactement la mesure de l'angle, pour chaque ouverture particuliere des côtés Ab, Ac, c'est-à-dire, qu'à cause de l'unisormité de la courbure du cercle, il arrivera nécessairement qu'à une ouverture double, triple, quadruple de cAb, répondra un arc double, triple, quadruple de cb.

LIII.

Supposant donc que la circonférence bcdfg, décrite par la révolution entière du point c, soit divisée en un nombre quelconque de parties égales, le nombre des parties contenues dans l'arc qu'intercepteront les lignes Ac & Ab, mesurera exactement l'ouverture de ces lignes, ou l'angle cAb qu'elles formeront.

Les Géométres sont convenus de diviser le cercle en 360 parties, qu'on Le cercle appelle dégrés, chaque dégré en 60 en 360 dégrés; chaminutes, chaque minute en 60 seconque dégré en des, &c. Ainsi, un angle bAc, par &c. exemple, aura 70 dégrés 20 minutes, si l'arc bc, qui lui servira de mesure, a 70 des 360 parties du cercle, & de plus 20 soixantièmes parties d'un dégré.

LIV.

DE-là il suit qu'un angle CAB de Fic.5.

L'angle droita 90 dégrés, & ses côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

90 dégrés, nommé communément angle droit, est celui dont les côtés AC & AB interceptent le quart BC de la circonférence, & sont perpendiculaires l'un à l'autre.

LV.

On appelle angle aigu tout angle Un angle aigu est plus plus petit qu'un angle droit, ou qui a perit qu'un angle droit. moins de 90 dégrés. Tels sont les an-Fig. 6. gles CAB, FAG, EAG.

LVI.

A u contraire, on appelle angle ob-'Un angle obtus est plus tus, celui qui a plus de 90 dégrés, grand qu'un angle droit. comme FAB.

LVII.

IL est évident que tous les angles, La somme des angles, faits du mê- comme GAF, FAE, EAC, CAB, me côté sur qu'on peut faire du même côté sur une une ligne droite, & ligne droite GB, & qui ont le même qui ont le même somsommet A, sont égaux, pris ensemble met, vaut 180 dégrés. à 180 dégrés, ou à deux angles droits, mesurés par la demi-circonférence.

LVIII.

D' même la somme de tous les an-FIG. 7. gles EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, Tous les angles qu'on qu'on peut faire autour du point A, gles qu'on peut faire auqui leur sert de sommet commun, est font égaux, égale à 360 dégrés, ou à quatre angles pris entemble, à quatre droits mésurés par la circonférence en-droits. tiére BCDEF.

LIX.

Après avoir trouvé que les angles ont les parties du cercle pour mesure, voyons comment on s'y prend pour déterminer ce qu'un angle qu'on veut mesurer contient de dégrés.

On se sert d'un instrument I, qu'on Fig. 8. appelle demi-cercle: cet instrument est Usage de l'instrument composé de deux régles EAC, DAB, appellé demi cercle, pour d'égale longueur qui se croisent en A, prendre la grandeur & qui sont chargées de pinnules à leurs d'un angle. extrémités; l'une de ces régles EC, qu'on nomme alidade, est mobile autour de A, & l'autre DB est fixe, &

sert de diamétre à un demi cercle DCB divisé en 180 dégrés, &c.

Or veut-on connoître l'angle que forment deux lignes droites, tirées du lieu où l'on est, à deux objets quelconques F, G; on place d'abord la régle fixe DAB, de maniere que l'œil placé en D, apperçoive un des deux objets F, par les deux pinnules D & B: enfuite, sans remuer l'instrument, on tourne l'alidade, jusqu'à ce que l'œil placé en E, apperçoive l'autre objet G, par les pinnules E & C; & alors l'alidade marque sur le demi-cercle gradué, le nombre de dégrés, minutes, &c. que contient l'angle proposé GAF.

LX.

Vsage du sapporteur, pour faire un nombre déterminé de déangle d'un nombre déterminé de déangle d'un grés, on se sert d'un instrument K*, diterminé de dégrés.

* Fig. 9. porteur, ou transporteur, & posant le centre A sur la pointe de l'angle qu'on

veut tracer, & la ligne AB sur la ligne AG, qu'on prend pour un des côtés de l'angle, on marque le point C, qui répond au nombre de dégrés qu'on veut donner à l'angle proposé, puis par ce point, & par le centre A, tirant la ligne ACO, on a l'angle OAG, qui contient le nombre de dégrés demandé.

LXI.

Supposons maintenant qu'ayant pris une base FG sur le papier, on veuille saire sur cette base, un triangle FGH, semblable au triangle ABC, pris sur un terrain. On se servira du demi cercle pour sçavoir ce que chacun des angles CAB, CBA, contiendra de dégrés; ensuite, par le moyen du rapporteur, on sera les angles HFG & HGF, respectivement égaux aux angles CAB & CBA, & alors parce que le point H, auquel les côtés FH & GH se réuniront, sera nécessaire-

ment déterminé par l'opération, aussibien que l'angle FHG, on aura le triangle FGH, entiérement semblable au triangle ABC.

LXII.

Comme il importe dans la pratique, ainsi que nous l'avons déja dit, que les angles soient exactement mesurés, il ne faut pas se contenter de les prendre, même avec les instrumens les plus parfaits, il faut encore trouver le moyen de vérisier leurs mesures, pour en faire la correction, s'il étoit nécessaire. Or ce moyen est simple & facile. Reprenons le triangle ABC. On sent que la grandeur de l'angle C doit résulter de celle des angles A & B; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la position des lignes AC, BC, changeroit, & par conséquent, l'angle C, que ces lignes font entr'elles. Or si cet angle dépend de la grandeur des angles A & B, on doit préfumer que ce que les angles A & B renferment de dégrés doit déterminer le nombre de dégrés que doit renfermer l'angle C, & qu'ainsi il pourra servir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A & B, puisqu'on sera sûr qu'on aura bien mesuré les angles A & B, si, en mesurant ensuite l'angle C, on lui trouve le nombre de dégrés qui lui conviendra relativement à la grandeur des angles A & B.

Pour trouver comment de la grandeur des angles A & B, on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriveroit à cet angle, si les lignes AC, BC, venoient ou à s'approcher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Supposons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB, pour s'approcher de BE, il est clair que pendant que BC tourneroit, l'angle B s'ouvriroit continuellement; & qu'au contraire, l'angle C se resserreroit

F1G. 3.

de plus en plus ; ce qui d'abord pourroit faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égaleroit l'augmentation de l'angle B, & qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, seroit toûjours la même, quelle que fût l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE.

LXIII

O R cette induction présumée porte avec elle sa démonstration; car qu'on Fig. 4 méne ID, parallele à AC, on verra Les angles premiérement que les angles ACB & alternes font CBD, appellés angles alternes, seront les angles renversés que égaux, ce qui est évident, puisque les forme, de part & d'autre, une li-lignes AC & IB étant paralleles, elles gne, droite seront également inclinées sur CBO, qui tombe fur deux pa-& qu'ainsi l'angle IBO égalera l'angle ralleles. ACB. Mais l'angle IBO égalera aussi l'angle CBD, parce que la ligne ID ne sera pas plus inclinée sur CO d'un côté que de l'autre. Donc l'angle DBC

ces angles égal à l'angle IBO, égalera l'angle fort egaux, ACB, fon alterne.

LXIV.

LXIV.

On verra, en second lieu, que l'angle CAE sera égal à l'angle DBE, à cause des paralleles CA & DB. Donc les trois angles du triangle pourroient être mis à côté les uns des autres, & unis par leurs sommets aux points B, & alors on verroit que les trois angles DBE, CBD & CBA, qui égaleroient les trois angles CAB, ACB, CBA, seroient égaux à deux angles droits (Article LVII.) & comme tout ce que nous venons de dire pourra également s'appliquer à quelque triangle que ce soit, on sera assuré de cette propriété générale que la somme des trois angles La somme d'un triangle est constamment la mê-des trois antriangle est me, & qu'elle est égale à deux droits, triangle est deux angles droits. ou, ce qui revient au même, à 180 dégrés.

LXV.

Donc, pour conclure la valeur du

troisième angle d'un triangle, lorsqu'on en aura mesuré deux, il saudra retrancher de 180 dégrés le nombre de dégrés que les deux angles seront ensemble. Propriété qui donne une manière bien commode de vérisser la mesure des angles d'un triangle, & dont on verra une infinité d'autres utilités, à mesure qu'on avancera. Nous nous contenterons ici d'en tirer les conséquences les plus immédiates.

LXVI.

Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit; à plus forte raison ne peutil avoir plus d'un angle obtus.

LXVII.

Si l'un des trois angles d'un triangle est droit, la somme des deux autres angles est toûjours égale à un droit.

Ces deux propositions sont si claires, qu'elles n'ont pas besoin d'être démontrées.

DE GEOMETRIE. 67 LXVIII.

SI on prolonge un des côtés du triangle ABC, le côté AB, par exem- L'angie ex ple, l'angle extérieur CBE vaudra triangle, vaut seul les deux angles intérieurs opposés gles inté-BCA, CAB; car qu'à l'angle CBA, sés. on ajoûte, ou les deux angles BCA & CAB, ou l'angle CBE, la somme sera toûjours égale à 180 dégrés, ou à deux angles droits (Article LXIV.).

Un angle

LXIX.

CONNOISSANT un des angles FIG. 5. d'un triangle isocéle ABC, on connoît les deux autres.

Qu'on ait l'angle au sommet A; il est d'un triangle clair que si on retranche le nombre de d'un triangle dégrés que contiendra cet angle des les deux au-180 dégrés, mesure des trois angles du triangle, la moitié de la somme qui restera sera la mesure de chacun des angles B, C, pris sur la base.

Que ce fût un de ces angles B, C,

E ij

qu'on connût, le double de sa valeur retranché de 180 dégrés, donneroit l'angle au sommet A.

LXX.

Les angles d'un triangle équilatéral, font chacun de 60 dégrés.

Comme un triangle équilatéral n'est autre chose qu'un triangle isocéle auquel chacun de ses côtés peut également servir de base, il est clair que ses trois angles sont nécessairement égaux, & qu'ils valent chacun so dégrés, tiers de 180 dégrés.

LXXI.

DE-là se tire aisément la description de l'exagone de l'exagone de poligone de six côtés, que nous avions promise (Article XXIV.)

Car pour trouver une ligne qui partage la circonférence en six parties égales, il faudra que cette ligne soit la corde d'un arc de 60 dégrés, sixième partie de 360 dégrés, valeur de la circonférence entière. Supposant donc

que AB soit cette corde, & du centre Fig. 6, I menant aux extrémités A & B les rayons AI & IB, l'angle AIB vaudra 60 dégrés, & parce que les deux côtés AI & IB seront égaux, le triangle 'AIB sera isocéle. Donc l'angle au sommet étant de 60 dégrés, chacun des deux autres angles vaudra aussi 60 dégrés, moitié de 120. Donc (Article LXX.) le triangle AIB sera équilatéral. Donc AB égalera le rayon du cercle. D'où il suit, que pour décrire un exagone, il faudra ouvrir le compas d'un intervalle égal au rayon, & le porter six sois de suite sur la circonférence, & l'on aura les six côtés de l'exagone.

LXXII.

L'EXAGONE ABCDEF décrit, on décrira facilement le dodécagone, ou poligone de douze côtés.

Pour cela, on divisera l'arc AKB, La moitié de l'angle au. ou l'angle AIB, en deux parties égales, centre de l'exagone

E iij

ELEMENS 70

donne l'angle au centre du dodécagone.

& AK, corde de la moitié de l'arc AKB, sera un des côtés du dodécagone.

LXXIII.

Partager un également.

Or pour partager l'arc AKB, en angle en deux deux arcs égaux AK & KB, on fera la même opération que s'il s'agissoit de couper la corde AB en deux parties égales; c'est-à dire, que des points A & B, comme centres, & d'un intervalle quelconque, on décrira les arcs MLN, OLP, & par le point L, section des deux arcs, & par le centre I on ménera la ligne LI, qui divisera en deux & l'arc AKB, & la corde AB.

LXXIV.

Description des Poligones de 24, 48, &c. côrés.

Q u'on suive la méthode précédente, & qu'on partage l'arc AK en deux arcs égaux, la corde de l'un ou de l'autre de ces arcs, sera le côté du poligone de 24 côtés. On aura de même les poligones de 48, 96, 192, &c. côtés.

DE GEOMETRIE. 71

LXXV.

MAINTENANT pour décrire un octogone; c'est-à-dire, un poligone de Description 8 côtés, on commencera par tracer un ne.
quarré dans le cercle; ce qu'on sera, si, après avoir mené deux diamétres AIB & CIE, qui se coupent à angles F16.7.
droits: on joint leurs extrémités par les lignes AC, CB, BE, AE.

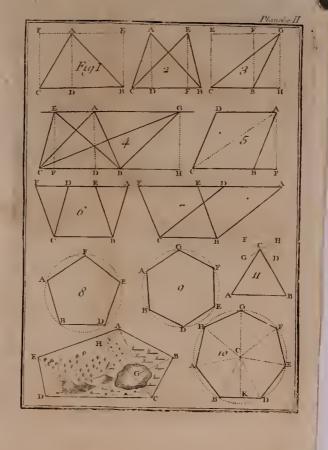
Car à cause de la régularité du cercle, & de l'égalité des quatre angles que forment les perpendiculaires AIB, CIE, les quatre côtés AC, CB, BE, EA, seront nécessairement égaux, & se trouveront également panchés les uns sur les autres; ce qui ne pourra convenir qu'au quarré.

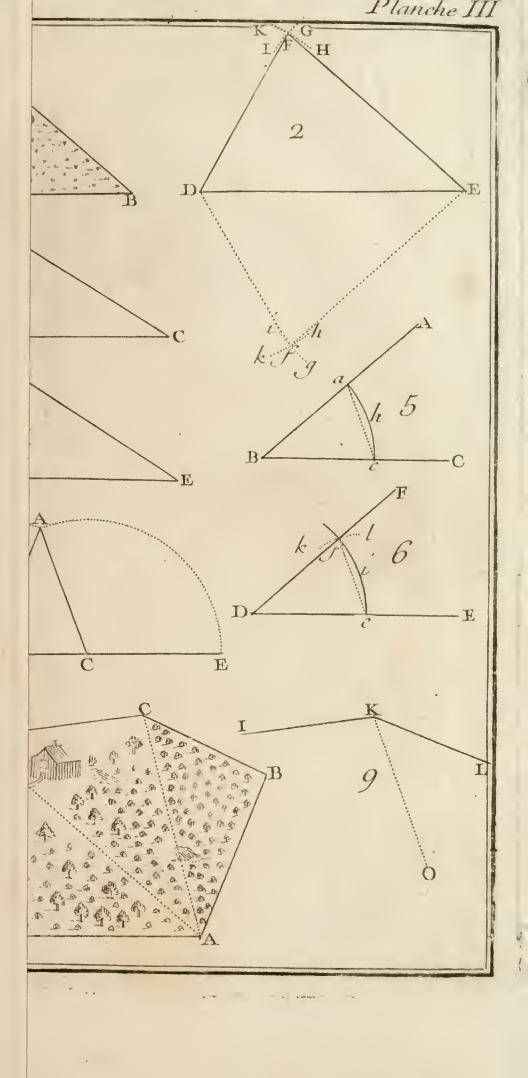
Le quarré ainsi décrit, on divisera, par la méthode précédente, chacun des arcs CKB, BLE, &c. en deux parties égales; ce qui donnera l'octogone CKBLEMAN.

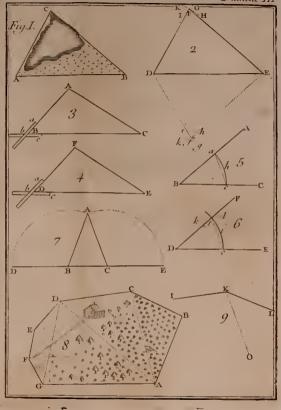
Qu'on partageât de même chacun E iiij

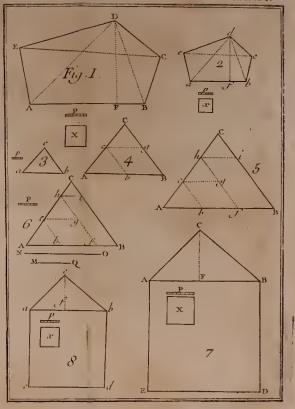
Et des poli- des arcs CK, KB, &c. en 2, en 4, gones de 16, en 8, &c. parties égales côtés. les poligones de 16, 32, 64, &c. côtés.



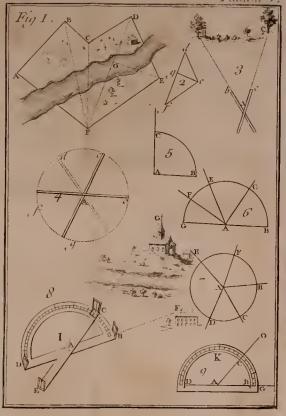


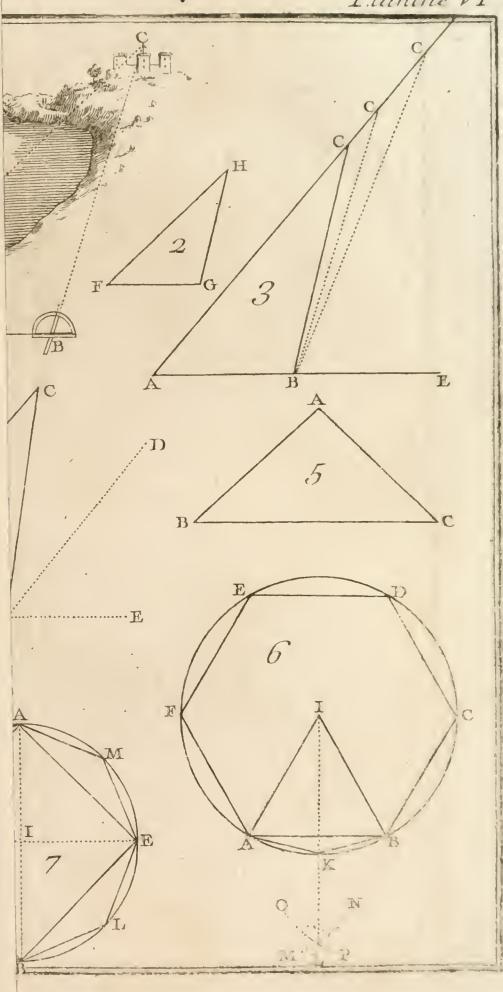






F



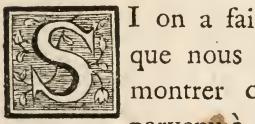




ELEMENS DE GEOMETRIE

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.



I on a fait attention à ce que nous avons dit, pour montrer comment on est parvenu à mesurer les Ter-

rains, on a dû reconnoître que les positions des lignes les unes à l'égard des autres, sournissoient des remarques

dignes d'attention par elles-mêmes, indépendamment de l'utilité dont elles pouvoient être dans la pratique; & il est à présumer que ces remarques ont engagé les premiers Géométres à pousser plus loin leurs découvertes, car ce ne sont pas seulement les besoins qui déterminent les hommes, la curiosité est souvent un aussi grand motif pour exciter leurs recherches.

Ce qui a dû contribuer encore au progrès de la Géométrie, c'est le goût qu'on a naturellement pour cette précision rigoureuse, sans laquelle l'esprit n'est jamais satisfait.

Aussi lorsqu'en mesurant les figures, on s'est apperçu que dans une infinité de cas, les échelles & les demi cercles ne donnoient que des valeurs approchées des lignes ou des angles, on a cherché des méthodes qui suppléasent au désaut de ces instrumens.

Ici nous reprendrons les figures rectilignes; mais dans les opérations que nous ferons pour découvrir leurs justes rapports, nous ne nous servirons que de la régle & du compas.

Il arrive souvent qu'on a besoin ou de rassembler dans une même sigure, plusieurs sigures qui lui soient semblables, ou de décomposer une sigure en d'autres sigures de même espéce; ce qu'on peut saire en opérant d'abord sur les rectangles, puisque toutes les sigures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, & que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même hauteur & même base.

I.

Pour comparer les rectangles, il faut sçavoir changer un rectangle quelconque en un autre qui ait la même superficie, mais dont la hauteur soit différente. Car lorsque deux rectangles seront changés en deux autres de même hauteur, ils ne différeront plus que par leurs bases; le plus grand sera celui qui aura la plus grande base, & il contiendra le plus petit de la même manière que sa base contiendra celle du plus petit rectangle; ce qu'on énonce ordinairement ainsi: Deux rectangles

Deux rec- ordinairement ainsi: Deux rectangles tangles qui ont même qui ont même hauteur, sont en même hauteur, sont en même rai- raison que leurs bases. son que leurs

bases.

II.

Pour ajoûter ces deux rectangles; il ne faudra que les poser l'un à côté de l'autre.

III.

IL ne sera pas plus difficile de retrancher le plus petit du plus grand.

IV.

Et pour partager un rectangle en un nombre déterminé de rectangles égaux, il faudra couper sa base en un pareil nombre de parties égales, ensuite élever des perpendiculaires sur les points de division.

V.

MAINTENANT soit proposé de changer le rectangle ABCD en un au- Pl. VII. tre BFEG, qui ait la même superficie, & dont la hauteur soit BF, on remarchanger un rectangle en un autre, qui duit de sa hauteur par sa base, il faudra teur donnée, que le rectangle cherché BFEG, dont la hauteur sera plus grande que BC, ait sa base plus petite que AB: c'est-àdire, que si BF, par exemple, est double de BC, il faudra que BG ne soit que la moitié de AB.

Si BF étoit le triple de BC, BG ne seroit que le tiers de AB.

On verroit de même que si BF, au lieu de contenir BC un nombre exact de fois, le contenoit avec fraction, comme deux sois & un tiers, le rectangle BFEG ne pourroit être égal au rectangle ABCD, que sa base BG ne sût aussi contenuë deux sois & un tiers dans la base AB. Et en général, il sera

aisé de voir qu'afin que deux rectangles ABCD, BFEG, soient égaux, il faudra que la base BG de l'un soit contenue dans la base AB de l'autre, comme la hauteur BC dans la hauteur BF.

Il ne s'agira donc plus que de diviser la ligne AB, de manière que AB soit à GB, comme BF à BC; ce qui se fera (I. Part. Art. XLI.) en menant la ligne FA, & du point donné C, la parallele CG.

VI.

Pour changer le rectangle ABCD

en un autre rectangle BFEG, qui ait

Seconde inaniére de changer un rectangle en un autre, dont la haunée.

FIG. 2.

une hauteur donnée BF, on peut emteur soit don- ployer une méthode moins naturelle que la précédente, mais plus commode. Ayant prolongé AD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en I la droite FEI, menée par le point F, parallelement à AB, on tirera la diagonale BI, & par le point O, où elle rencontrera le côté DC, on ménera GOE, parallele à FB,

DE GEOMETRIE.

& le rectangle BFEG sera égal au rec-

tangle ABCD.

Pour le prouver, il suffira de saire voir qu'en ôtant des rectangles ABCD, BFEG, la partie commune OCBG, le rectangle ADOG égalera le rectangle EOCF.

Or si on sait attention à l'égalité des deux triangles IBF, IBA, on verra qu'en retranchant de ces triangles des quantités égales, les restes seront égaux. Mais le triangle IAB deviendra le rectangle ADOG, si on en retranche les deux triangles IDO, OGB; de même le triangle IBF deviendra le rectangle EOCF, par le retranchement des triangles IEO, OBC, égaux aux deux premiers. Donc les deux rectangles ADOG, EOCF, restes des deux triangles, seront égaux entr'eux, aussi-bien que les rectangles ABCD, BFEG.

VII.

CETTE seconde manière de changer

tre rigoureudeux rectangaux, la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du fecond à la hauteur du premier.

On démon-un rectangle en un autre, confirme le sement que si principe que suppose la première, & gles sont é- qui auroit pû sembler n'être appuyé que fur une simple induction.

> De l'égalité des deux rectangles AB CD, BFEG, on avoit conclu qu'il falloit que AB fût à BG, comme BF à BC; c'est ce qu'on peut maintenant prouver par l'Article précédent.

> Car les triangles IAB & OGB, étant manisestement semblables, la base AB du grand sera à la base GB du petit, comme la hauteur IA à la hauteur OG, ou comme BF à BC leurs égales. Donc AB sera à GB comme BF à BC, conformément au principe de l'Article V.

VIII.

D E la manière qu'on vient de s'y prendre pour démontrer que de l'égalité des deux rectangles ABCD, BF, EG, il suit que la hauteur BF est à la hauteur BC, comme la base AB, à

la base BG, on démontreroit aussi que lorsque quatre lignes BF, BC, AB, gnes sont telle BG, seront telles que la premiere sera d'inseconde, à la seconde, comme la troisiéme à la troisiéme à la quatriéme; le rectangle qui auroit pour rectangle forhauteur & pour base la premiere & la premiere & quatriéme de ces lignes, seroit égal au triéme lera rectangle qui auroit pour hauteur & pour base la seconde & la troisiéme.

Si quatre lignes font telquatriéme, le par la quaégal à celui que forment la seconde & la troisiéme.

IX.

Lors Que quatre quantités, ainsi que les lignes précédentes BF, BC, AB, BG, sont telles que la premiere est la seconde, comme la troisiéme à miere est a la quatriéme, on dit que ces quatre quantités sont en proportion, ou qu'elles forment une proportion. Ainsi, 6, 9, 18, 27, sont en proportion, parce que 6 est contenu dans 9, de la même maniére que 18 est contenu dans 27. Il en est de même de 15, 25, 75, 125, &cc.

Quatro quantités, dont la precomme la troisiéme à la quatriéme, font dites former une propor-

X.

Des quatre termes d'une proportion, le premier & font nomanes extrêmes; on nomine moyens le fecond & le troisiéme.

La premiere & la quatriéme des quatre quantités d'une proportion, le quatriéme, s'appellent termes extrêmes, ou simplement extrêmes; la seconde & la troisiéme se nomment termes moyens, ou simplement, moyens.

> En se servant des définitions précédentes, il est clair que les propositions renfermées dans les Articles VII. & VIII. s'énonceront ainsi.

XI.

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Lors QUE quatre quantités sont en proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

XII.

S 1 quatre quantités sont telles que Si le produit des extrêmes est é-le produit des extrêmes soit égal au gal au proproduit des moyens, ces quatre quanduit des moyens les tités seront en proportion. quatre termes forment une proportion.

XIII.

It est à propos de faire beaucoup d'attention aux deux Articles précédens; ils sont d'un grand usage : on en déduit, entr'autres choses, la démonstration de la régle qu'on appelle en Arithmétique, Régle de trois. Pour De-là on donner une idée de cette régle, nous de trois, prendrons un exemple; c'est la manière la plus simple de se faire entendre.

Supposons que 24 Ouvriers ayent fait 30 toises d'ouvrages en un certain temps, on demande combien 64 Ouvriers en feront dans un temps égal.

Il est évident que pour résoudre la question, il faut trouver un nombre qui soit à 64, dans la même raison que 30 à 24. Or, suivant ce que nous avons vû, ce nombre sera tel que son produit par 24 égalera le produit de 30 par 64. Mais le produit de 30 par 64 est 1920. Donc le nombre cherché sera celui qui étant multiplié par 24 donnera 1920.

Or pour peu qu'on ait d'idée des opérations de l'Arithmétique, on doit aisément s'appercevoir qu'il faudra que ce nombre soit le quotient de la division de 1920 par 24, c'est-à-dire 80.

Ou la maniére de troudont les trois donnés.

En général, pour trouver le quatriéver le qua- me terme d'une proportion, dont les triéme d'une proportion, trois premiers seront donnés, il faudra premiers sont prendre le produit du second & du troisième, & diviser ce produit par le premier terme de la proportion.

XIV.

Un exemple aussi simple que celui que nous venons de choisir, ne fait peut-être pas assez sentir la nécessité de la méthode précédente. Le bon sens seul feroit trouver le nombre demandé. On voit que 30 surpasse 24 d'un quart, & qu'ainsi il faut que le nombre cherché surpasse 64 d'un quart; ce qui donne 80. Mais il y a des cas où l'on pourroit chercher plus longtemps le rapport des deux premiers nombres de la proportion.

DE GEOMETRIE. 85

Par exemple, on veut un quatriéme terme proportionnel aux trois nombres 259, 407, 483.

Pour le trouver par la méthode précédente, il faut multiplier 483 par 407, & diviser 196581, qui en est le produit par 259; ce qui donne 759 pour le quatriéme terme cherché.

Si on s'y étoit pris autrement pour trouver ce terme, ce n'auroit pû être qu'en tâtonnant. On auroit bien pû découvrir, par exemple, que 148, excès de 407 sur 259, contient quatre des septiémes parties de 259; qu'ainsi il falloit ajoûter de même à 483, le nombre 276, qui contient quatre de ses septiémes parties. Mais la généralité & la sûreté de la méthode précédente, nous sauve toûjours de l'embarras des tâtonnemens, qui même deviendroient inutiles dans bien des cas.

XV.

Lorsqu'on aura deux quarrés à Fiii

ajoûter, leur addition se fera de la même manière que celle de deux rectangles, puisque les quarrés sont des rectangles dont la hauteur & la base sont égales. On changera donc un des quarrés; le plus petit, par exemple, en un rectangle qui aura le côté du grand pour hauteur, & les deux quarrés ne feront plus qu'un rectangle. On pourroit donner de même la hauteur du petit quarré à tous les deux, ou une autre hauteur à volonté; mais ce qu'on ne pouvoit guéres manquer de se proposer, lorsqu'on a voulu réduire ainsi deux quarrés en une seule figure, c'étoit de faire un quarré égal à deux autres. Problême dont il étoit aisé de trouver la solution suivante.

XVI.

Supposons d'abord que les deux Fig. 3. quarrés ABCD, CBFE, dont on se faire un propose de faire un seul quarré, soient ble d'un au-égaux entr'eux; il est aisé de remarquer tre.

DE GEOMETRIE. 87 que si on tire les diagonales AC & CF, les triangles ABC & CBF, feront ensemble la valeur d'un quarré. Donc en transportant au-dessous de AF les deux autres triangles DCA & CEF, on fera le quarré ACFG, dont le côté AC sera la diagonale du quarré ABCD, & dont la superficie égalera celle des deux quarrés proposés; ce qui n'a pas besoin d'être démontré.

XVII.

SUPPOSONS présentement qu'on veuille faire un quarré égal à la somme des deux quarrés inégaux ADCd, Fig. 4. CFEf, ou, ce qui revient au même, Faire un qu'on se propose de changer la figure à deux au-ADFEfd en un quarré.

tres pris cnfemble.

En suivant l'esprit de la méthode précédente, on cherchera s'il n'est point possible, de trouver dans la ligne DF, quelque point H, tel,

1°. Que tirant les lignes AH & HE, & faisant tourner les triangles ADH, Fiiij . EFH, autour des points A & E, jusqu'à ce qu'ils ayent les positions Adh, Esh; ces deux triangles se joignent en h.

2°. Que les quatre côtés AH, HE, Eh, hA, soient égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or ce point H se trouvera en saisant DH égal au côté CF ou EF. Car de l'égalité supposée entre DH & CF, il suit premierement que si on sait tourner ADH autour de son angle A, en sorte qu'on lui donne la position Adh, le point Harrivé en h sera distant du point C d'un intervalle égal à DF.

De la même égalité supposée entre DH & CF, il suit encore que HF égalera DC, & qu'ainsi le triangle EFH tournant autour de E pour prendre la position Efh, le point H arrivera au même point h, distant de C d'un intervalle égal à DF.

Donc la figure ADFEfd sera changée en une figure à quatre côtés AHEh.

DE GEOMETRIE. 89

Il ne s'agit donc plus que de voir si ses quatre côtés seront égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or l'égalité de ces quatre côtés est évidente, puisque Ah & hE seront les mêmes que AH & HE, & que l'égalité de ces deux derniers se tirera de ce que DH étant égale à CF ou à FE, les deux triangles ADH, HEF, seront égaux & semblables.

Il ne reste donc plus qu'à voir si les côtés de la figure AHEh sormeront des angles droits; c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que pendant que HAD tournera autour de A, pour arriver en hAd, il faudra que le côté AH sasse le même mouvement que le côté AD. Or le côté AD sera un angle droit DAd, en devenant Ad. Donc le côté AH sera aussi un angle droit HAh en devenant Ah.

Quant aux autres angles H, E, h, il est visible qu'ils seront nécessairement droits. Car il ne seroit pas possible

qu'une figure terminée par quatre côtés égaux eût un angle droit, sans que les trois autres fussent pareillement droits.

XVIII.

SI on remarque que les deux quarrés ADCd, CFEf sont faits, l'un sur AD, moyen côté du triangle ADH, l'autre sur EF, égal à DH, petit côté du même triangle ADH; & que le quarré AHEh, égal aux deux autres, est décrit sur le grand côté AH, qu'on nomme communément l'hypoténuse du triangle rectangle; on découvrira bien-tôt cette sameuse propriété des triangles rectangles, que le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés saits sur les deux autres côtés.

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est son grand côté.

Et le quarré de ce côté est égal à la fomme des quarrés faits sur les deux autres.

XIX.

FIG. 5. & 6.

D'où se tire une maniére simple de réduire deux quarrés en un seul.

Donc lorsque de deux quarrés HDKL, ABCD, on n'en voudra faire qu'un seul, il sera inutile de les mettre à côté l'un de l'autre, & de les décomme

DE GEOMETRIE. 91

poser, comme on a fait dans l'Article XVII. Il suffira de placer leurs côtés AD, DH, de façon qu'ils fassent un F 1 G . 7 angle droit, & de tirer ensuite la ligne AH, puisqu'alors cette ligne sera le côté du quarré cherché AHIE.

XX.

S 1 on avoit deux figures semblables DAFGM, DHPON, & qu'on se pro-Fig. 8. & 92 posât d'en faire une troisiéme, égale en superficie aux deux autres prises ensemble, il ne faudroit que poser les bases AD, HD de ces sigures, sur les deux côtés d'un angle droit ADH, & l'hypoténuse AH du triangle ADH seroit la base de la figure demandée.

Pour en voir la raison qu'on imagine les quarrés ABCD, DHKL, AHIE, faits sur les bases des trois sigures semblables, on verra d'abord par ble. l'Article XVIII. que le quarré AHIE vaudra lui seul les deux autres quarrés ABCD, DHKL. Or les figures

FIG. 10;

Si les côtés d'un triangle rectangle fervent de bases à trois figures semblables, la figure faite sur l'hypoténuse égalera les deux autres

semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, (I. Part. Art. XLVII.). Donc les trois quarrés ABCD, DHKL, AHIE, se trouveront les mêmes parties des figures DAFGM, DHPON, AHQRS.

D'où il sera aisé de conclure que la sigure AHQRS vaudra les deux autres. Supposons, par exemple, que chacun de ces quarrés sût la moitié de la sigure dans laquelle il seroit rensermé, personne ne douteroit que la sigure AHQRS ne sût égale aux deux autres, puisque sa moitié vaudroit seule les moitiés des deux sigures DHP, ON, DAFGM. Il en seroit de même si les quarrés ABCD, DHKL, AHIE, étoient les deux tiers, les trois quarts, &c. des sigures DAFGM, DHPON, AHQRS.

XXI.

S 1 on se proposoit d'ajoûter trois

quatre, &c. figures semblables, ou, ce qui revient au même, trois, quatre, gures sem-&c. quarrés, la méthode seroit toûjours feule. la même. Qu'on voulût, par exemple, en ajoûter trois, on feroit d'abord un quarré égal aux deux premiers; ensuite à ce nouveau quarré on ajoûteroit le troisiéme, & par-là on auroit un quarré égal aux trois quarrés proposés.

Réduire plusieurs si-

XXII.

DE-là il suit que si on se proposoit de faire un quarré, cinq, six, &c. fois plus grand qu'un autre, il suffiroit de suivre la méthode précédente pour résoudre ce problème, & même son inverse; c'est-à-dire, pour faire un quarré qui ne seroit que la cinquiéme, la sixième, &c. partie d'un quarré proposé; ce qui demanderoit simplement qu'on se rappellât la manière de trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données. Mais dans la

troisiéme Partie de cet Ouvrage, nous donnerons une méthode plus directe & plus commode pour résoudre ces sortes de problèmes.

XXIII.

L'ADDITION des figures semblables fournit une preuve décisive de la nécessité d'abandonner les échelles, quand on veut faire les opérations d'une manière qui puisse se démontrer rigoureusement.

Supposons, par exemple, qu'on eût à faire un quarré double d'un autre, ceux qui ne sçauroient par la méthode donnée dans l'Article XVI. s'y prendroient vraisemblablement de la manière suivante.

Ils diviseroient le côté du quarré donné dans un grand nombre de parties, en 100 parties par exemple; ensuite multipliant 100 par 100, ils trouveroient 10000 pour la valeur du quar-

95

té; ce qui donneroit 20000 pour celle du quarré demandé.

Mais de la valeur de celui-ci, ils ne tireroient pas la manière de le décrire; il faudroit qu'ils eussent son côté exprimé par un nombre, & que ce nombre fût tel qu'en le multipliant par luimême; c'est-à-dire, en le quarrant, le produit donnât 20000.

Or le nombre dont ils auroient besoin, ce seroit en vain qu'ils le chercheroient sur une échelle dont les parties seroient des centiémes du côté du
premier quarré; car 141, multiplié par
lui-même, donneroit 19881, & 142
donneroit 20164; ce qui s'écarteroit
de part & d'autre du nombre qu'ils devroient trouver.

Peut-être pourroient-ils croire qu'en partageant le côté du quarré donné en plus de 100 parties, ils trouve-roient un nombre déterminé de ces parties pour le côté du quarré double du premier; mais quelques essais qu'ils

Le produit qui resulte de la multiplication d'un nombre par lui-même est le quarré le ce nombre,

pûssent faire, ils trouveroient toûjours que ce seroit en vain qu'ils chercheroient deux nombres, dont l'un exprimeroit le côté; ou, suivant le langage ordinaire, la racine d'un quarré, & bre qui, mul-tiplié par lui- l'autre, le côté, ou la racine du quarré double.

La racine d'un quarré, est le nommême, donne le quarré.

XXIV.

Un nombre est multiple d'un autre, loriqu'il le contient plusieurs fois exactement;

En effet, on démontre en Arithmétique, que si deux nombres ne sont pas multiples l'un de l'autre; c'est-àdire, si l'un ne contient pas l'autre un nombre exact de fois, le quarré du plus grand ne sera pas, non plus, multiple du quarré du plus petit. Ainsi 5, par exemple, ne pouvant pas se diviser exactement par 4, son quarré 25 ne pourra pas, non plus, se diviser par 16 quarré de 4.

Donc si on quarre deux nombres, dont l'un soit plus grand que l'autre, & en soit cependant moins quele double, il viendra, par cette opération,

deux

97

mensurables.

deux autres nombres, dont l'un sera moindre que le quadruple de l'autre, mais sans en pouvoir être ni le double, ni le triple. Donc, qu'on divise le côté d'un quarré en tel nombre de parties qu'on voudra, le côté du quarré double, qui, suivant ce qui est démontré dans l'Article XVI. sera la diagonale de ce quarré, ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties; ce qu'on exprimeroit dans le langage des Géométres, en disant, que le côté du quarré & sa diagonale sont Le côté d'un quarré & sa incommensurables. diagonale, font incom-

XXV.

On peut encore remarquer qu'il y Autres lia quantité d'autres lignes qui n'ont au- gnes incomcune commune mesure.

Car, qu'on écrive les deux suites,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.

dont la premiere exprime les nombres naturels, & l'autre leurs quarrés; on verra que comme les nombres qui seront entre 4 & 9, entre 9 & 16, entre 16 & 25, &c. n'auront aucune racine, les côtés de deux quarrés, dont l'un sera ou triple, ou quintuple, ou sextuple, &c. seront incommensurables entr'eux.

XXVI.

Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourroit-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionalité des sigures semblables. On a vû qu'en comparant ces sigures (I. Part. Art. XXXIV. & s.), nous avons toûjours supposé, qu'elles avoient une échelle qui pouvoit également servir à mesurer toutes leurs parties: Supposition qui maintenant paroîtroit devoir être limitée, à cause de ce qui vient d'être dit; il faut donc que nous reve-

nions sur nos pas, & que nous examinions si nos propositions, pour être vrayes, n'auroient pas elles-mêmes befoin de quelques modifications.

XX VII.

REPRENONS d'abord ce qui est dit dans l'Article XXXIX. de la premiere Partie; & voyons s'il est exactement vrai que les triangles tels que abc, ABC, dont les angles sont les Fig. 11. mêmes, ayent leurs côtés proportionnels. Supposons, par exemple, que la base du premier étant ab, celle du second soit une droite AB, égale à la diagonale d'un quarré dont ab seroit le côté; & cherchons si, dans cette supposition, le rapport de AC à ac, sera le même que celui de AB à ab.

Quoique, suivant ce que nous avons vû, quelque grand que pût être le nombre des parties qu'on supposeroit arbitrairement dans ab, AB ne pourroit jamais contenir un nombre exact de ces parties, il est cependant aisé de s'appercevoir que plus ce nombre sera grand, plus AB approchera d'être mésuré exactement avec les parties de ab. Supposons ab divisé en 100 parties; ce que AB contiendra de ces parties se trouvera entre 141 & 142 (Article XXIII.). Contentons-nous de 141, & négligeons le petit reste. Il est clair (I. Part. Art. XXXIX.) que AC contiendra aussi 141 des parties de ac.

Supposons ensuite ab divisé en 1000 parties; ce que AB contiendra des parties de ab, sera entre 1414 & 1415; ne prenons que 1414, & négligeons encore le reste, on trouvera de même que AC contiendra 1414 des milliémes parties de ac, & qu'en général AC contiendra toûjours autant de parties de ac, avec un reste, que AB contiendra de parties de ab, avec un reste.

De plus, ces restes comme nous venons de l'observer, seront de part & d'autre, d'autant plus petits, que

DE GEOMETRIE.

le nombre des parties de ab sera grand. Donc il sera permis de les négliger, si on imagine la division de ab poussée jusqu'à l'infini. Donc on pourra dire alors que le nombre des parties de ac que contiendra AC égalera le nombre des parties de ab que contiendra AB, & qu'ainsi AC sera à ac, comme AB à ab.

Donc nous avons rigoureusement démontré que lorsque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs gles & les côtés proportionnels, soit que leurs blables, ont côtés ayent une commune mesure, ou qu'ils n'en ayent pas.

La proposition (I. Part. Art. XLV.) d'où se tire la proportionnalité des lignes qui se répondent dans les figures semblables, se justifieroit de la même

facon.

XXVIII.

On verra, par de pareils raisonnemens, que les propositions expli-Giij

Les trianfigures semleurs côtés proportionnels, lors même que ccs côtés font incommensurables.

quées dans les Articles XLIV. & XLVII. de la premiere Partie, où l'on a fait voir que les aires des trian-Et ces figu- gles & des figures semblables, ont enjours entr'el- tr'elles la même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues, sont toûjours vraies en général, même lorsque les côtés de ces figures sont incommensurables.

res sont toules comme les quarrés de leurs côtés homologues.

> Prenons pour exemple les triangles semblables ABC, abc, dont nous supposerons les hauteurs incommensurables, avec leurs bases; dans ce cas, il n'y aura aucun quarré, quelque petit qu'il soit, qui puisse servir de commune mesure à ces triangles, & aux quarrés faits sur leurs bases; c'est-à-dire, que les aires abc & abde seront incommensurables entr'elles, ainsi que les aires ABC & ABDE; mais il n'en sera pas moins vrai que le triangle ABC sera au quarré ABDE, comme le triangle abc au quarré abde.

C'est de quoi on s'assurera, en obser-

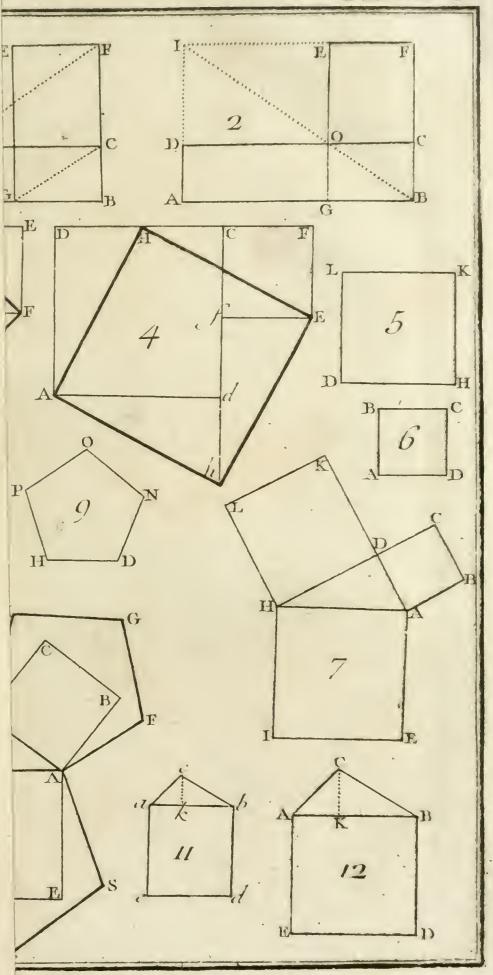
DE GEOMETRIE. 103 vant que plus les parties de l'échelle, dont on se servira pour mesurer AB & CK seront supposées petites, plus on approchera d'avoir les nombres qui exprimeront le rapport de ABC à ABDE. Donc divisant toûjours l'échelle du triangle abc dans le même nombre de parties, & négligeant les restes, on verra que les mêmes nombres serviroient toûjours à exprimer le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, & celui du triangle abc au quarré abde. Qu'on pousse, par la pensée, la division des échelles jusqu'à l'insini, les restes deviendront absolument nuls; & l'on pourra dire, que les nombres qui exprimeroient le rapport du triangle abc au quarré abde, exprimeroient aussi le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, & qu'ainsi le triangle abc sera au quarré abde, comme le

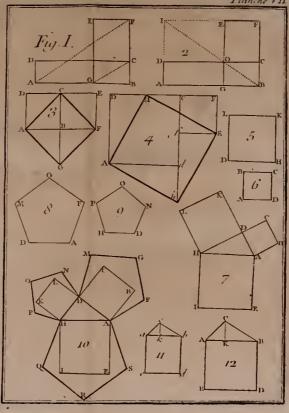
triangle ABC au quarré ABDE.

ELEMENS, &c.

Il en seroit de même de toutes les figures semblables.









E LEMENS DE GEOMETRIE

TROISIEME PARTIE.

De la mesure des figures circulaires, O de leurs propriétés.



Pre's être parvenu à mesurer toutes sortes de sigures rectilignes, on a voulu avoir la

manière de déterminer celles que bornent des lignes courbes. Les Terrains, & en général, les espaces dont il s'agit de chercher la mesure, ne sont pas toûjours terminés par des lignes droites.

Souvent les figures curvilignes, & les figures mixtes, c'est-à-dire, celles qui sont bornées par des lignes droites, & par des lignes! courbes, peuvent se réduire à des figures entiérement rectilignes, comme nous l'avons déja dit ; car qu'on eût à me-PL.VIII. surer une figure telle que ABCDEFG, Fig. 1. on pourroit prendre le côté AD pour un assemblage de deux, de trois, &c. lignes droites, substituant en suite la droite FD à la courbe FED, on auroit la figure rectiligne ABCDFG, qui différeroit si peu de la figure mixte, que l'une pourroit être prise pour l'autre, sans erreur sensible.

> On opéreroit donc sur ces sigures, en suivant les méthodes précédentes: mais les Géométres ne s'accommoderoient guéres de ces sortes d'opérations; ils n'en veulent que de rigoureuses: d'ailleurs, il y a tel cas, où

la transformation d'une figure curviligne, ou mixte, en une figure entiérement rectiligne, demanderoit qu'on partageât son contour en un si grand nombre de parties, qu'alors la méthode commune deviendroit impraticable; aussi ne seroit-on pas tenté de la suivre, si on avoit à mesurer un espace tel que Z (Fig. 7.), ou le cercle entier X (Fig. 3.), il faudroit prendre une autre voie pour trouver la mesure de ces sortes d'espaces. Ici nous ne nous attacherons qu'à ceux dont les contours renferment des arcs de cercle.

I.

Supposons d'abord qu'on ait Fig. 3. l'aire du cercle X à mesurer. On observera qu'en lui inscrivant un poligone régulier BCDE &c. plus ce poligone aura de côtés, plus il approchera d'être égal au cercle. Or on a vû que l'aire de cette figure (I. Part.

'Art. XXII.) est égale à autant de fois le produit du côté BC par la moitié de l'apothéme AH, que le poligone a de côtés; ou, ce qui revient au même, que cette aire a pour mesure le produit du contour entier BCDE &c. par la moitié de l'apothéme. Donc puisqu'en poussant jusqu'à l'infini le nombre des côtés du poligone, son aire, son contour, son apothême; égaleront l'aire, le contour & le rayon du cercle; la La mesure mesure du cercle sera le produit de est le produit sa circonférence par la moitié de son

du cercle, de sa circonférence par la l'ayon. moitié de lon rayon.

F1G. 4.

L'aire du cercle est

égale à un triangle dont

le rayon, & la base une

droite égale à la circonfé-

II.

IL suit de-là que la superficie d'un cercle BCD, est égale à celle d'un triangle ABL, dont la hauteur seroit le rayon AB, & la base une droite BL la hauteur est égale à la circonférence.

III.

IL ne s'agit donc que d'avoir le

DE GEOMETRIE. 109 rayon & la circonférence. A l'égard du rayon, il est aisé de le mesurer; il n'en est pas de même de la circonférence: cependant, pour avoir sa mesure, on peut envelopper le cercle, d'un fil; ce qui dans beaucoup d'occasions suffit pour la pratique.

Mais, jusqu'à présent, on n'a pu parvenir à mésurer géométriquement la circonférence du cercle; c'est-à-dire, à déterminer exactement le rapport qu'elle a avec le rayon. On trouve ce rapport à des cent-milliémes, à des millioniémes près, & même on en approche tant qu'on veut, sans que pour cela, on puisse le déterminer rigoureusement.

IV.

L'APPROXIMATION la plus simple qu'on ait trouvée, est celle qu'on tient d'Archiméde. Le diamétre ayant 7 parties, ce que la circonfé- Le diamétre rence contient de ces parties est entre d'un cercle ayant 7 par-

ties, la cir- 21 & 22; & l'on sçait qu'elle approconférence en a près de che beaucoup plus de 22 que de 21.

V.

Au reste, il est clair que si on sçavoit exactement le rapport d'une seule circonférence à son rayon, on sçauroit celui de toutes les autres circonférences à leurs rayons ; ce rapport devant cercles, sont être le même dans tous les cercles: proposition qui paroît si simple, qu'elle n'a pas besoin d'être démontrée, puisqu'on sent que quelles que fussent les opérations qu'on auroit faites pour mésurer une circonférence, en se servant des parties de son rayon, il faudroit qu'on sit les mêmes opérations, pour mesurer toute autre circonférence; qu'ainsi, on lui trouveroit le même nombre de parties de son rayon.

Les circonférences des entr'elles, comme leurs rayons.

VI.

IL est évident que les cercles ont encore la propriété générale de tou-

DE GEOMETRIE. 111 tes les figures semblables (I. Part. Art. XLVII.); je veux dire, que leurs surfaces sont en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues: mais comme, pour appliquer cette pro-

position aux cercles, on ne pourra prendre leurs côtés, il faudra se servir des

rayons; alors on verra que les cercles auront leurs aires proportionnelles aux sont propor-

quarrés de leurs rayons.

S'il ne paroissoit pas d'abord que cette proposition dût suivre de ce qui est dit dans l'Article XLVII. de la premiere Partie, & qu'on voulût en avoir une démonstration particuliere, on feroit attention qu'il reviendroit absolument au même, de comparer les aires de deux cercles BCD, EFG, ou celles Fig.4. & 5. des triangles ABL, AEM, qui leur seroient égaux (Article II.) en supposant que leurs bases BL & EM, sussent les développemens des circonférences BCD & EFG, & que leurs hauteurs fussent les rayons AB & AE.

tionnellesaux quarrés de leurs rayons.

Or par l'Article précédent, ces triangles seroient semblables; donc leurs aires seroient en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues AB, AE, rayons des cercles BCD & EFG. Donc, &c.

VII.

Les cercles, à cause de leur similitude, auront aussi, de même que les sigures semblables, cette propriété, que si, en prenant les trois côtés d'un triangle rectangle pour rayons, on décrit trois cercles, celui dont le rayon sera l'hypoténuse, égalera les deux autres pris ensemble.

Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypotenuse vaut les deux autres pris enfemble.

Ainsi, on pourra toûjours trouver un cercle égal à deux cercles donnés, & cela sans prendre la peine de mesurer chacun de ces cercles. Qu'on veuille, par exemple, faire un bassin qui contienne autant d'eau que deux autres, la prosondeur étant la même; qu'on veuille trouver l'ouverture d'un tuyau

DE GEOMETRIE. 113

tuyau de fontaine, par lequel il s'écoule autant d'eau que par deux tuyaux don, nés; on y réussira sans peine, en prenant la voie que nous venons d'indiquer.

VIII.

Si on avoit à mesurer la superficie d'une couronne V, figure enfermée entre deux cercles concentriques EFG, BCD; c'est-à-dire, pace ensermé entre deux cercles, qui auroient un cercles concentre commun ; ce qui se présenteroit d'abord, ce seroit de mesurer séparément les superficies des deux cercles, & de retrancher la plus petite de la plus grande. Mais il est aisé de s'appercevoir que le problème peut se réfoudre d'une manière plus commode pour la pratique.

Imaginons un triangle ABL, qui ait le rayon AB pour hauteur, & dont la base soit une droite BL, égale à la circonférence BCD. Si on méne par le

F1G. 6:

Une couronne est l'esentre deux centriques.

H

point E, la droite EM parallele à BL, cette droite sera égale à la circonférence EFG; car à cause de la similitude des triangles AEM, ABL, il y aura même proportion entre AB & BL, qu'entre AE & EM. Or par la supposition, BL égalera la circonférence dont AB sera le rayon. Donc EM égalera aussi la circonférence qui aura pour rayon la ligne AE, partie de AB. Il en seroit de même de toute autre ligne KI, parallele à BL; elle seroit toûjours égale à la circonférence dont AK seroit le rayon.

De l'égalité supposée entre la circonférence EFG, & la droite EM, suit nécessairement l'égalité du triangle AEM au cercle EFG; donc il saut que l'espace rectiligne EBLM, soit égal à la couronne proposée V. Or cet espace EBLM, se peut aisément changer en un rectangle EBPH, en coupant ML en deux parties égales MI & IL, & en menant à BL par le point I

la perpendiculaire HIP, qui donnera le triangle ajoûté MHI, égal au trian-

gle retranché PLI.

Donc si par le point I on méne à BL la paralléle IK, qui coupera EB en deux parties égales, la couronne proposée, égale à l'espace EBLM ou à EBPH, aura pour mesure le produit de EB par KI, circonférence dont AK sera le rayon.

Donc pour mesurer une couronne V, il faut multiplier sa largeur EB par la circonférence KOQ, dite moyenne entre les circonférences BCD & EFG, moyenne. parce qu'elle surpasse la petite circonférence EFG, ou la droite EM, d'une quantité MH, égale à PL, quantité dont elle est surpassée par la grande circonference BCD, ou par la droite BL.

IX.

Lors Qu'il s'agira de mesurer une figure Y, composée d'arcs de cercles F16.28 Hij

Pour mefuronne, il faut multiplier sa largeur par la circonfé, ence

différens, & de lignes droites, ou

Fig. 7. une figure Z, uniquement composée d'arcs de cercles; toute la difficulté

Le segment se réduira à mesurer des segmens de de cercle est cercle; c'est-à-dire, des espaces tels un espace terminé par un que ABCE*, terminés par un arc ABC

& par la corde AC. Car les figures

entierement composées d'arcs de cer-

cles, ou d'arcs & de lignes droites;

peuvent toutes être considérées com-

me des figures rectilignes, augmentées

ou diminuées de certains segmens.

X.

La mesure d'un segment quelconque ABCE est facile à trouver, lorsqu'on sçait celle du cercle; car qu'on tire les lignes AT, CT, au centre T. de l'arc, on formera une figure ABCT, appellée secteur, dont l'aire sera au cercle, comme l'arc ABC à la circonsérence entière, & qui, par conséquent, aura pour mesure le produit de la moitié du rayon AT par l'arc ABC:

arc & par sa corde.

* Fig. 8.

La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment,

Le secteur est une portion de cercle, terminée par deux rayons, & par l'arc qu'ils comprennent.

Sa mesure, & celle du legment,

DE GEOMETRIE. 117

or le secteur étant déterminé, il ne saudra plus qu'en retrancher le triangle ACT, pour avoir le segment ABCE.

XI.

Comme il arrive assez souvent que lorsqu'on se propose de mesurer une figure telle que Y, on n'a pas le centre de l'arc HIK, & que cependant, sans ce centre, on ne sçauroit mesurer la sigure, puisque la méthode précédente exige la connoissance du rayon, il faut que nous cherchions le centre d'un arc de cercle quelconque.

Soit ABC * l'arc de cercle proposé, si on prend à volonté deux points A & B sur cet arc, & que de ces points, comme centres, on décrive les quatre arcs goi, foh; lpk, mpn, les deux premiers, d'un rayon quelconque, & les deux autres, ou de ce même rayon, ou de tel autre rayon qu'on voudra; il est clair que le centre cherché de l'arc ABC, sera sur la ligne op, qui join-

F16. 2.

Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque.

* FIG. 9.

Hiij

dra les points d'intersections o, p.

Choisissant ensuite un troisième point C, sur l'arc ABC, & se servant de B & de C, de la même maniere qu'on s'est servi de A & de B, on aura une droite qr, sur laquelle devra encore se trouver le centre demandé. Donc ce centre sera le point de rencontre T, des lignes op, qr,

XII.

AINSI, quelqu'arrangement qu'on donne à trois points, pourvû qu'on ne les place pas en ligne droite, on pourra toûjours les lier par un arc de cercle, ou, ce qui revient au même, quelle que soit la proportion des côtés base, on pourra toûjours circonscrire un cercle à ce triangle.

XIII.

La méthode que nous venons de donner, pour circonscrire un cercle à

un triangle, étant appliquée successivement à différens triangles ACB, AEB, Fig. 11. AGB, plus ou moins élevés à l'égard de leur base AB, on s'apperçoit qu'en passant d'un triangle ACB, dont l'angle au sommet est fort aigu, à d'autres triangles AEB, AGB, dont l'angle au sommet est plus ouvert; le centre du cercle circonscrit s'approche continuellement de AB, & que ce centre passe ensuite au dessous de AB, lorsque l'angle au sommet AGB a atteint une certaine ouverture. Or voyant passer ce centre au dessous de AB, après l'avoir vu au dessus, il doit venir dans l'esprit, ce me semble, de chercher de quelle espece est le triangle AFB, lors- Fig. 12. que le cercle circonscrit a son centre fur AB même.

Pour connoître ce triangle AFB, on commencera par remarquer que dans ce cas particulier, la portion du cercle circonscrite au triangle doit être exactement un demi-cercle: en effet,

H iiij

le centre du cercle devant se trouver sur la base AB, dont les deux extrémités sont, par la supposition, dans la circonférence, le centre M ne pourra pas manquer d'être situé précisément au milieu de AB, de sorte que AB sera nécessairement un diamétre.

Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi-cercle, on tire deux droites aux extrémités du diamétre, on aura un angle droit.

On verra ensuite que de quelque point F du demi-cercle, qu'on tire les lignes FA, FB, l'angle AFB sera droit, Car menant FM, les deux triangles AFM, MFB, seront isocéles; donc les deux angles AFM, MFB, seront respectivement égaux aux angles FAM, FBM, ou, ce qui revient au même, l'angle total AFB égalera la somme des deux angles FAM, FBM; mais les trois angles AFB, FAM, FBM, pris ensemble, valent deux droits. Donc l'angle AFB sera droit.

Ainsi, si on décrit sur la base AB, un triangle rectangle quelconque, ce triangle aurà la propriété demandée, d'être inscrit dans un cercle dont le centre est sur la base.

XIV.

CETTE propriété du cercle, que l'angle, qui a son sommet dans la demicirconférence, & qui est appuyé sur le diamétre, est toûjours droit, porte à chercher si les autres parties du cercle n'auroient pas quelque propriété analogue; si, par exemple, les angles ACB, AEB, AFB, pris dans un segment ACEFB, ne seroient pas tous égaux entr'eux, ainsi que le sont ceux du demi-cercle.

PL. IX.

Pour nous en assurer, nous commencerons par chercher la valeur d'un de ces angles, & nous verrons ensuite si les autres ont la même valeur. Nous prendrons par exemple, l'angle AEB, dont le sommet E est placé au milieu de l'arc AEB. Comme la ligne EDG, qui passe par le centre D, coupe cet angle en deux parties égales, il sussir de mesurer l'angle AEG sa moitié, ou, ce qui revient au même, il sussir de

FIG. 2.

de sçavoir quelle partie l'angle AEG est d'un angle déja mesuré, tel que ADG; je dis que l'angle ADG est déja mesuré, parce que nous sçavons que l'arc AG est sa mesure (I. Part. Art. LII.).

Si on fait attention que le triangle AED est isocéle, on verra facilement que l'angle AEG est la moitié de l'angle ADG; car les angles AED, EAD (I. Part. Art. XXXI.) sont égaux : mais (I. Part. Art. LXVIII.) ces deux angles, pris ensemble, valent l'angle extérieur ADG. Donc l'angle AED ou AEG, est la moitié de l'angle ADG.

Par la même raison, l'angle DEB sera la moitié de l'angle GDB. Donc l'angle total AEB égalera la moitié de l'angle ADB. Donc sa mesure sera la moitié de l'arc AGB.

XV.

L'ANGLE AEB étant mesuré, pour sçavoir s'il est égal à chacun des

1

Frg. 3.

autres angles qui ont leur sommet dans le même segment, il faut examiner si un de ces angles pris à volonté, AFB par exemple, est aussi la moitié de l'angle au centre ADB. On s'en assurera facilement, en tirant la droite FDG par le centre. Car alors on verra que l'angle AFB sera composé de deux autres AFD, DFB, qui seront, par l'Article précédent, les moitiés des angles ADG, GDB, d'où l'on conclura que l'angle total AFB sera la moitié de l'angle ADB; & en appliquant le même raisonnement à tous les angles ACB, AEB, AFB, qui ont leurs sommets à la circonférence, & qui s'appuient sur le même arc AGB, on pourra conclure que ces angles sont égaux entr'eux, ainsi que nous l'avions soupçonné dans l'Article précédent.

Tous les angles dont le
fommet est à
la circonsérence, & jui
s'appuient sur
le même arc,
sont égaux,
& ont, pour
commune
mesure, la
moitié de
l'arc sur lequel ils s'appuient.

Fig. 1:

XVI.

PARMI les différens angles qui ont leur sommet dans l'arc ACEFB, il y en a qui pourroient d'abord ne pas paroître compris dans la démonstration précédente; ce sont des angles AFB, tels, que la droite FDG tirée par le centre, passe hors de l'angle ADB. Cependant, en remarquant toûjours que l'angle DFA est la moitié de l'angle GDA, & l'angle DFB, la moitié de l'angle GDB, on verra que l'angle AFB, excès de l'angle DFB sur l'angle DFA, sera, dans ce cas, la moitié de l'angle ADB, excès de l'angle GDB sur GDA.

XVII.

Par les figures dont nous nous fommes servis, il sembleroit aussi que la démonstration précédente ne conviendroit qu'aux segmens plus grands qu'un demi-cercle; mais il est aisé de voir qu'un angle quelconque, tel que fec. 5. AFB, qui auroit son sommet dans un segment plus petit qu'un demi-cercle, seroit toûjours composé de deux autres

DE GEOMETRIE. 125 DFB, DFA, moitiés des angles BDG, ADG, & par conséquent, que cet angle AFB auroit pour mesure la moitié des deux arcs BG, AG, c'est-à-dire, la moitié de l'arc AGB.

XVIII.

APRE's avoir vu que dans un même segment, les angles AEB, AFB, Fic. 6 AHB, supposés à la circonférence, sont tous égaux, on est tenté de chercher ce que devient l'angle AQB, lorfque son sommet se confond avec le point B, extrémité de la base AB. Cet angle s'évanoüiroit-il alors? Mais il ne paroît pas possible que sans s'être resserré par dégrés, il vienne tout-à-coup à s'anéantir. On ne voit pas quel seroit le point au-delà duquel cet angle cesseroit d'exister: comment donc parviendra-t-on à en trouver la mesure? c'est une difficulté qu'on ne peut résoudre, sans recourir à la Géometrie de l'infini, dont tous les hommes ont,

au moins, une idée imparfaite, qu'il ne

s'agit que de développer.

Observons d'abord, que quand le point E s'approche de B, en devenant F, H, Q, &c., la droite EB s'accourcit continuellement, & que l'angle EBA qu'elle fait avec la droite AB, s'ouvre de plus en plus. Mais quelque courte que devienne la ligne QB, l'angle QBA n'en sera pas moins un angle, puisque pour le rendre sensible, il ne faudroit que prolonger la ligne accourcie QB vers R; en doit-il être de même, lorsque la ligne QB, à force de diminuer, s'est réduite enfin à zero? qu'est devenuë alors sa position? qu'est devenu son prolongement?

Il est évident qu'il n'est autre chose que la droite BS, qui touche le cercle en un seul point B, sans le rencontrer en aucun autre endroit, & que, pour cette raison, on appelle tangente.

La tangente au cercle, est la ligne qui

De plus, il est clair que pendant que la ligne EB diminue continuellement

jusqu'à s'anéantir à la fin, la droite AE, ne le touche qui devient successivement AF, AH, qu'en un point. AQ,&c. s'approche toûjours de AB, & qu'elle se confond ensin avec elle. Donc l'angle à la circonférence AEB, après être devenu AFB, AHB, AQB, devient en dernier lieu l'angle ABS, fait celui qui est par la corde AB, & par la tangente corde & par BS, & cet angle, qu'on appelle angle au segment, doit toûjours conserver la propriété d'avoir pour mesure la moitié de l'arc AGB.

L'angle au segment est fait par la la tangente,

Sa mesure est la moitié de l'arc du fegment.

Quoique cette démonstration soit peut-être un peu abstraite pour les Commençans, j'ai cru à propos de la donner, parce qu'il sera très-utile à ceux qui voudront pousser leurs études jusqu'à la Géométrie de l'infini, de s'être accoutumé de bonne heure à de pareilles considérations.

Si cependant les Commençans trouvoient cette démonstration au-dessus de leurs forces, il est aisé de les mettre à portée d'en découvrir une autre, en leur expliquant la principale propriété des tangentes.

XIX.

La tangente eft perpendiculaire au diamétre qui passe par le point d'attouchement,

F16.7. CETTE propriété est qu'une tangente au cercle dans un point quelconque B, doit être perpendiculaire au diamétre IDB, qui passe par ce point. Car comme la courbure du cercle est si uniforme qu'un diamétre quelconque IDB, le partage en deux demi-cercles IAB, IOB, égaux & également situés à l'égard de ce diamétre, il faut que les deux parties BS, BH, de la tangente commune à ces deux demi-cercles, soient aussi également situées à l'égard de ce diamétre: or cela ne sçauroit être sans que IDB ne soit perpendiculaire à la tangente HBS.

XX.

De la on verra facilement pourquoi l'angle au segment ABS, a pour mesure la moitié de l'arc AGB.

Car

DE GEOMETRIE. 129

Car l'angle ADB, joint avec les deux angles égaux DAB, DBA, fait (I. Part. Art. LXIV.) deux droits. Donc la moitié de l'angle ADB, joint avec l'angle DBA fait un droit. Mais l'angle DBA, ajoûté avec l'angle ABS, donne aussi un droit. Donc l'angle ABS est égal à la moitié de l'angle ADB. Donc la mesure de ABS sera la moitié de l'arc AGB.

XXI.

L a seconde démonstration que nous venons de donner de cette propriété du cercle, que l'angle ABS a pour me-sure la moitié de l'arc AGB, fournit la solution du problème suivant.

Décrire sur AB un segment de cercle capable de l'angle donné L; c'està-dire, un segment AFB, dans lequel tous les angles AFB à la circonférence, soient égaux à l'angle L.

Pour résoudre ce problème, il faudra faire en A & en B, les angles BAS

Ce que c'est qu'un segment capable d'un angle donné.

Manière de faire un segment capable d'un angle donné. & ABS, chacun égal à l'angle L, & élever sur AS & sur BS, les deux perpendiculaires AD & BD; leur rencontre D sera le centre de l'arc cherché AFB.

Car par l'Article XIX. les droites BS & AS seront les tangentes du cercle dont le centre est D, & le rayon AD ou BD, puisque BD ou AD sont perpendiculaires à BS & à AS. De plus, par l'Article précédent, l'angle ABS a pour mesure la moitié de AGB, & par l'Article XV. les angles tels que AFB, sont aussi mesurés par la moitié de AGB. Donc ces angles AFB seront égaux à ABS; c'est-à-dire, à l'angle L, ainsi qu'on le demandoit.

XXII.

La découverte des propriétés des segmens de cercle, que nous venons d'expliquer, est due vraisemblablement à la simple curiosité des Géométres; mais il en a été de cette découverte,

comme il en est tous les jours de beaucoup d'autres, ce qu'on ne croyoit pas d'abord utile, le devient par la suite; on a fait dans la pratique, des applications fort heureuses des propriétés du cercle, que nous venons de démontrer. Je ne donnerai qu'une seule de ces applications; on la trouvera dans la solution du problème suivant, qui est souvent nécessaire dans la Geographie.

A, B, C, font trois lieux dont on connoît les distances respectives AB, BC, AC; il s'agit de sçavoir à quelle lieu à trois distance de ces lieux, est un point D, d'où l'on peut les voir tous les trois; mais d'où l'on ne peut sortir pour opérer sur le terrain.

Trouver la distance d'un autres dont les positions

font connues.

F1G. 10.

On commencera par tracer sur le papier trois points a, b, c, qui soient situés entr'eux de la même manière que les trois points A, B, C, c'est-à-dire en langage géométrique, qu'on fera le triangle abc semblable au triangle ABC.

FIG. 10.

Ayant observé ensuite avec le demicercle la grandeur des angles ADB, BDC, on fera sur ab, le segment de cercle bda, capable de l'angle ADB, & sur la droite bc, le segment de cercle bdc, capable de l'angle BDC, la rencontre d de ces deux segmens désignera sur le papier la position du lieu D, c'est-à-dire, que les lignes da, db, de, seront en même proportion à l'égard de ab, bc, ac; que les distances cherchées DA, DB, DC, à l'égard des distances données AB, BC, AC: ce qui n'a pas besoin de démonstration, après ce qu'on a vû sur les figures semblables.

XXIII.

On pourroit facilement faire voir que la pratique a tiré bien d'autres se-cours des propriétés du cercle, qu'on vient de démontrer; mais il est plus à propos de passer à d'autres propriétés du cercle, qui ont été tirées des pré-

DE GEOMETRIE. cédentes, & qui ont eu aussi leur utilité.

Pour procéder par ordre à la découverte de ces propriétés, nous commencerons par remarquer que deux angles quelconques EDC, EBC, qui PL. X. s'appuient sur le même arc EC, étant égaux, il s'ensuit que les triangles DAE, BAC, ont les mêmes angles; c'est-à-dire, (I. Part. Art. XXXIX.) que ces triangles sont semblables.

FIG. I.

Car par la même raison que l'angle EDC est égal à l'angle EBC, l'angle DEB sera égal à l'angle DCB; & quant aux angles DAE, BAC, ils seront visiblement égaux; soit parce qu'ils sont faits des mêmes lignes, soit parce que deux triangles, dont l'un a deux angles respectivement égaux, à deux angles de l'autre, ont aussi nécessairement le 3 me. angle égal (I.Part. Art. XXXVIII.)

Pour reconnoître plus facilement ensuite dans les triangles ADE, ABC, les propriétés générales des triangles

semblables, nous appliquerons le trian-Fig.1.&2. gle DAE sur le triangle BAC, en pofant AD fur AB, & AE fur AC, afin que DE soit paralléle à BC. Nous nous rappellerons alors,

> 1°. Que si deux triangles ADE, ABC, sont semblables, les quatre côtés AC, 'AE, AB, AD, sont en proportion;

(I. Part. Art. XXXIX.)

2°. Que dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens (II. Part. Art. VIII.) & nous conclurons de-là, que le rectangle ou le produit de AC par AD, est égal au rectangle de AE par AB; propriété du cercle, très remarquable, & qu'on peut énoncer ainsi : Si dans un Deux cor- cercle on tire à volonté deux droites pant dans un qui se coupent, le produit des deux parties de la premiere est égal au prol'une est égal duit des deux parties de l'autre.

des se coucercle, le rectangle des parties de au rectangle des parties de l'autre.

XXIV.

S 1 les deux droites BE, DC, se F16. 3.

coupoient perpendiculairement, & que l'une de ces deux droites fût un diamétre DC, il est clair que les deux parties AB, AE, de l'autre droite BE, seroient égales entr'elles; de sorte que la propriété précédente s'énonceroit ainsi dans ce cas particulier. Si sur le diamétre DC d'un cercle, on éleve une perpendiculaire quelconque AB, le quarré de cette perpendiculaire sera égal au rectangle de AD par AC.

Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diamétre d'un cercle, est égal au rectangle des deux parties du diamétre.

XXV.

IL arrive souvent qu'on a besoin de changer un rectangle en un quarré, l'Article précédent en fournit un moyen un quarré. facile: soit ACFE le rectangle proposé, on prolongera AC en D, de sorte que AD soit égal à AE, & l'on décrira le demi-cercle DBC, dont le diamétre soit DC. Prolongeant ensuite le côté EA jusqu'à ce qu'il rencontre le demicercle, on aura AB pour le côté

Changer un rectangle en

FIG. 4.

du quarré cherché ABGH, égal au rectangle donné AFCE.

XXVI.

On propose souvent un problème qui n'est que celui que nous venons de résoudre, présenté autrement. C'est de trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données; on entend alors par la moyenne proportionnelle, la ligne qui est aussi grande, par rapport à la plus petite des deux lignes données, qu'elle est petite par rapport à la plus grande ; c'està-dire, que si AB, par exemple, est moyenne proportionnelle entre AD & AC, on pourra dire que AD est à AB, comme AB est à AC. Or il est bien aisé de voir que ce problême est le même que le précédent, puisque (II. Part. Art. VIII.) le produit de AD par AC, c'est-à-dire, le rectangle de ces deux lignes, sera égal au produit

Ce que c'est qu'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites.

DE GEOMETRIE. 137 de AB par AB, c'est-à-dire, au quarré de AB.

Donc lorsqu'on voudra trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, on changera le rectangle de ces deux lignes en un quarré dont le côté sera la ligne cherchée.

Maniére de

XXVII.

On peut encore trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes, d'une autre manière qui suit de la proprieté du cercle expliquée dans l'Article XIII. Supposons que AC soit la plus grande des deux lignes données, & AD la plus petite, on élevera DB perpendiculairement sur AC, & le point B, où elle rencontrera le demicercle ABC, tracé sur le diamétre AC, donnera la ligne AB, moyenne proportionnelle entre AD & AC. Car en tirant BC, il est clair que le triangle ABC sera rectangle en B. Donc (I. Part. Art. XXXVIII.) ce triangle sera semblable

Autre ma-

Fig. 5.

au triangle ABD, puisque ces deux triangles ont d'ailleurs l'angle A de commun; mais si les triangles ADB & ABC sont semblables, ils ont leurs côtés proportionnels. Donc AD est à AB, comme AB à AC. Donc AB est moyenne proportionnelle entre AD & AC.

XXVIII.

Lhanger une figure rectiligne en un quarré, S 1 on vouloit changer une figure rectiligne quelconque en un quarré, il ne faudroit, pour ramener ce problème à l'Article XXV. que faire de cette figure un rectangle; ce qui seroit fort facile, à cause que les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même base & même hauteur, & que tous les rectangles provenus des triangles, ne seront plus qu'un seul rectangle, en leur donnant à tous une hauteur commune (II. Part. Art. VI.)

XXIX.

Les figures dont les contours renfermeront des arcs de cercle, pourront aussi être changées en quarrés, lorsqu'on aura mesuré par pratique la longueur des arcs dont elles seront composées; car on pourra alors changer ces figures, ainsi que les rectilignes, en rectangles; on aura recours pour cela aux Articles IX. & X. où l'on a appris à mesurer toutes sortes de figures circulaires.

XXX.

On tire encore de la propriété du cercle, expliquée dans l'Article XXIV. foit à un une méthode bien facile pour faire un fon donnée. quarré qui soit à un quarré donné, en raison donnée, problème que nous avions promis dans l'Article XXII. de la seconde Partie.

Supposons, par exemple, qu'on se propose de faire un quarré qui soit au

Faire un autre en rai-

140 ELEMENS

la ligne N; on divisera (I. Part. Art. XLI.) le côté CB au point E, de manière que CB soit à BE comme la ligne N à la ligne M; menant ensuite la paralelle EF à AB, le rectangle ABEF, aura la même superficie que le quarré demandé; donc il ne s'agira plus que de changer ce rectangle en un quarré.

XXXI.

F 1 G. 7. & 8.

Faire un poligone qui soit en raison donnée avec un poligone semblable. LM, qui foit à un poligone femblable ABCDE, dans la raison de la ligne X à la ligne Y, on commencera par faire sur le côté AB du poligone donné ABCDE, le quarré ABGF, ensuite on cherchera un autre quarré HIOQ, qui soit au quarré ABGF, comme la ligne X à la ligne Y. Et alors décrivant sur le côté HI de ce quarré un poligone HIKLM, semblable au premier ABCDE, ce nouveau poli-

DE GEOMETRIE. 141

gone sera celui qu'on demande. La raison en est bien facile à trouver, si on se rappelle (I. Part. Art. XLVIII.) que les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XXXII.

SI on vouloit faire un cercle dont l'aire fût à celle d'un cercle donné, soit à un aucomme X à Y, il faudroit construire raison donun quarré, qui fût au quarré du rayon de ce premier cercle, comme X à Y, & le côté de ce nouveau quarré seroit le rayon du cercle demandé.

Faire un cercle, qui

XXXIII.

Voici encore une propriété du cercle tirée de celle qui a fourni les problèmes précédens.

Si d'un point A, pris hors d'un Fig. 9. cercle, on méne à volonté deux droi- si d'un tes ABC, ADE, qui coupent, cha- hors d'un cune, la circonférence en deux points, tire deux

cercle, on

traversent . les rectangles de ces deux droites par leurs parties extérieures serons égaux.

lignes qui le & qu'on méne les droites CD, BE, les triangles ACD, AEB, seront semblables, puisque l'angle A est commun aux deux triangles, & qu'ils ont d'ailleurs les angles à la circonférence C & E, égaux. Or de ce que les triangles CAD, EAB, sont semblables, il s'ensuit que les quatre lignes AB, AD, AE, AC, sont en proportion, & par conséquent, que le rectangle des deux droites AB, AC, est égal au rectangle des deux droites AD, AE, ce qui peut s'exprimer ainsi. Si d'un point quelconque A, pris hors d'un cercle, on tire à volonté deux lignes droites AC, AE, qui traversent ce cercle, le rectangle de la droite AC par sa partie extérieure AB, sera égal au rectangle de la droite AE par sa partie extérieure AD.

XXXIV.

Lorsque la droite qui part du point A, au lieu de couper le cercle, ne fait simplement que le toucher,

ainsi que AF, la propriété précédente se change en celle-ci:le quarré d'une tangente AF, est égal au rectangle produit par la secante quelconque AE, & par sa partie extérieure AD. Ce qui est bien aisé à démontrer. Car regar-térieure. dant la droite AF qui touche le cercle, comme une ligne qui le couperoit en deux points infiniment proches, les lignes AB, AC, ne sont alors qu'une même ligne AF, & au lieu du rectangle de AB, par AC, on a le quarré de AF.

Le quarré de la tangente est égal au rectangle de la secante par fa partie ex-

XXXV.

La proposition démontrée dans l'Article précédent, en nous apprenant la valeur du quarré de la tangente AF, ne nous apprend pas à tirer cette tangente du point donné A. Pour la tirer, on se ressouviendra, (Art. XIX.) que le rayon FG est perpendiculaire à la tangente FA. Ainsi il une tangente. ne s'agit que de trouver, sur le cercle donné, le point F, tel que l'angle AFG

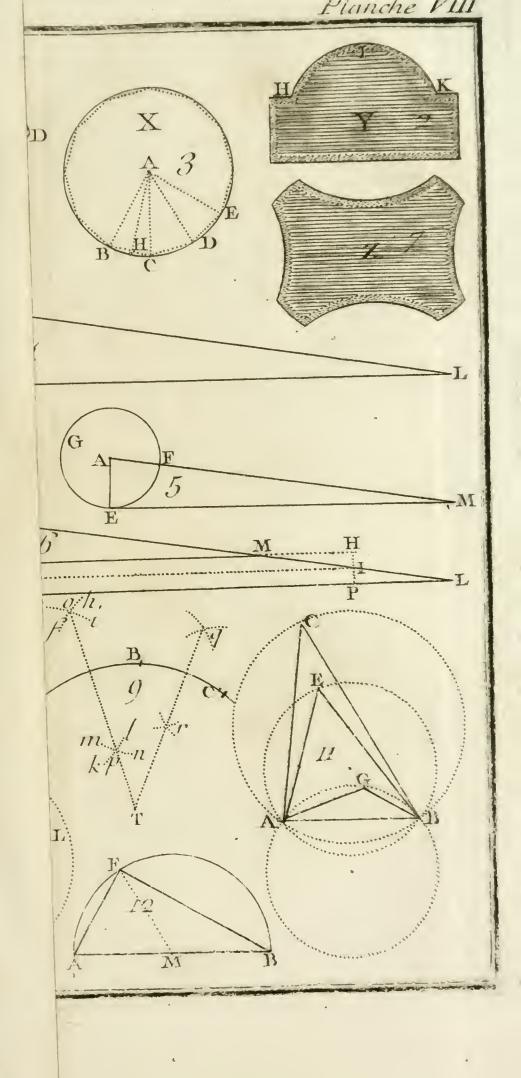
FIG. 10.

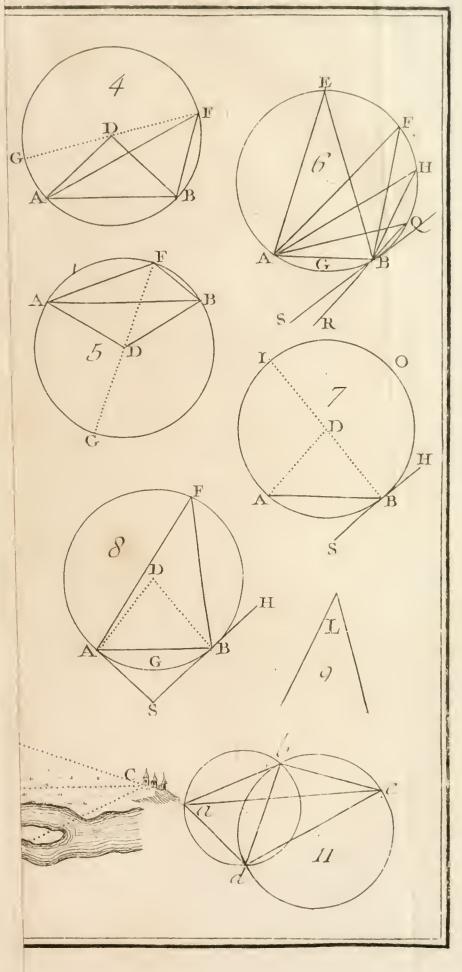
D'un point donné hors d'un cercle,

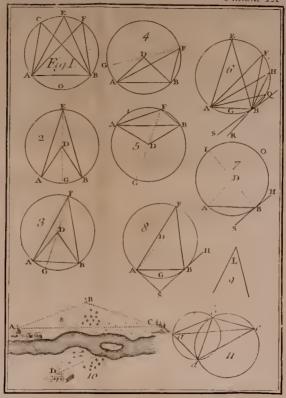
144 ELEMENS, &c.

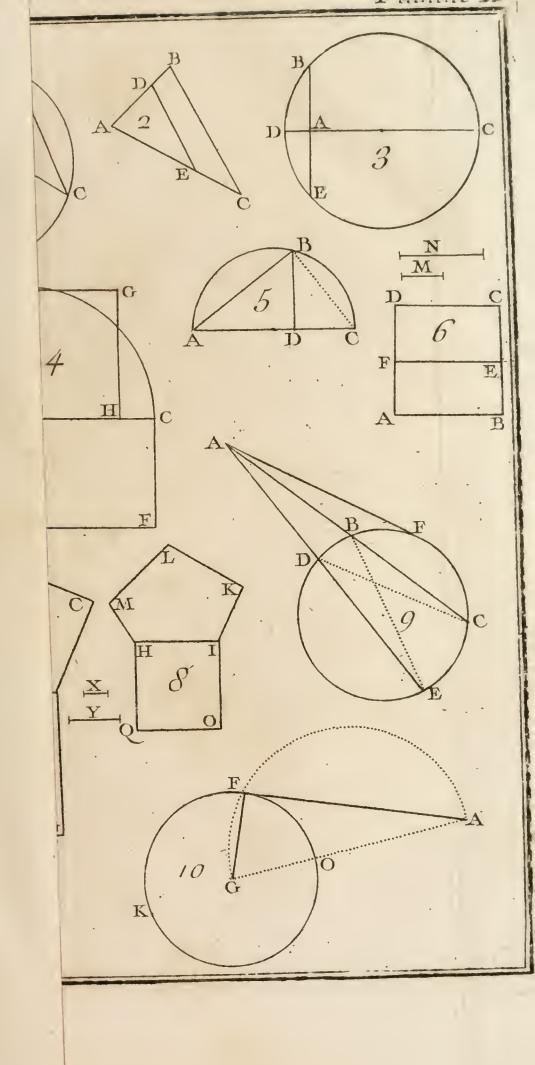
soit droit. Donc, en décrivant sur AG un demi cercle, le point où il coupera le cercle FKO sera (Article XIII.) le point cherché F.













ELEMENS

GEOMETRIE:

QUATRIEME PARTIE.

De la manière de mesurer les solides, Et leurs surfaces.

Es Principes que nous avons établis dans les trois premieres Parties de cet Ouvrage, pourroient nous suffire pour

résoudre des problèmes beaucoup plus difficiles que ceux que nous allons nous proposer; mais il est plus dans l'ordre que nous avons suivi précédemment; de passer maintenant à la mesure des solides; c'est-à-dire, des étendues terminées, qui ont à la fois trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur.

Cette recherche a été, sans doute, un des premiers objets qui ait pû fixer l'attention des 'Géométres. On aura voulu sçavoir, par exemple, combien il y avoit de pierres de taille

PL. XI. dans un mur dont la hauteur AD, la

largeur AB, & la profondeur ou épais-F16. 1. seur BG étoient connuës. On se sera proposé de déterminer la quantité d'eau que contenoit un fossé, ou un réservoir

ABCD; on aura voulu trouver la foli-FIG. 2. dité d'une Tour, d'une obélisque, d'une maison, d'un clocher, &c.

> Pour traiter les figures qui ont les trois dimensions, de la même manière que nous avons traité de celles qui n'en ont que deux, nous commencerons par examiner les solides qui sont terminés par des plans.

DE GEOMETRIE. 147

Nous n'aurons pas besoin de parler de la manière de mesurer les surfaces de ces corps, elles ne peuvent être que des assemblages de figures rectilignes; & par conséquent, leur mesure dépend de ce qui a été dit dans la premiere Partie.

I.

Pour mesurer la solidité des corps, il est naturel de les rapporter tous au solide le plus simple, ainsi que pour mesurer les surfaces, on les a toutes rapportées au quarré. Or le solide le plus simple, c'est le cube, qui est en lide terminée esset, en solide, ce que le quarré est en rés. C'est la superficie; c'est-à-dire que c'est un es-mesure compace tel que abcdefgh, dont la longueur, la largeur & la profondeur sont égales, ou, ce qui revient au même, c'est une figure terminée par six saces égales qui sont des quarrés.

On appelle côté du cube le côté des quarrés qui lui servent de faces.

Le cube est par fix quarlides.

FIG. 3.

Par un pied cube, on entend un cube, dont le côté est d'un pied; de même un pouce cube, est un cube dont le côté est d'un pouce, &c.

II.

Les solides qu'on a le plus communément à mesurer, sont des figures ABCDEFGH terminées par six faces FIG. I. rectangles ABCD, CBGF, CFED,

Le parallelipipéde, est un solide terminé par fix reclangles.

Les plans paralléles, conservent toûjours entr'eux la mê-

DEHA, GFEH, ABGH. On appelle ces solides des Parallelipipédes, parce que leurs faces opposées conservant dans tous leurs points la même distance l'une de l'autre, sont dites paralléiont ceux qui les, de même que les lignes ont aussi été nommées paralléles, lorsqu'elles me distance. conservoient par tout la même distance.

III.

O R si on se propose de mesurer des solides de cette espéce, l'analogie de ce problême avec celui où il s'est agi de la mesure des surfaces rectangles,

DE GEOMETRIE. donnera un moyen facile de le résou-

dre.

On commencera par mésurer sépa- Mesure du parallelipirément la longueur AD, la largeur AB pede. & la profondeur BG de la figure proposée, soit en pieds, soit en pouces, &c. on multipliera ensuite l'un par l'autre les trois nombres qu'on aura trouvés, & le produit qui viendra de cette

multiplication exprimera combien le

parallelipipéde contiendra de pieds cu-

bes, ou de pouces cubes, &c. suivant

que les dimensions auront été mesurées

en pieds, ou en pouces, &c. Pour mieux

montrer comment se fait cette opéra-

tion, nous allons en donner un exemple.

Supposons que la longueur AD soit de 6 pieds, la largeur AB de 5, & la profondeur BG de 4, le rectangle ABCD (I. Part. Art. XI.) aura 6 fois 5 ou 30 pieds quarrés. Si on imagine ensuite que les lignes BG, CF, DE, AH, qui mesurent toutes également la

K iij

profondeur du solide, soient partagées chacune en quatre parties égales, & que par les points de division correspondans, on fasse passer autant de plans paralléles les uns aux autres, ces plans diviseront le parallelipipéde proposé, en quatre autres parallélipipédes, qui auront chacun un pied de profondeur, & qui seront tous égaux & semblables. Or l'inspection seule de la figure fait voir que le premier de ces parallelipipédes contient 30 pieds cubes, puisque sa face extérieure ABCD contient 30 pieds quarrés. Donc le solide total ABCDEFGH contiendra 4 fois 30 ou 120 pieds cubes.

IV.

Nous ne nous arrêterons point à expliquer les différents moyens qu'on peut employer dans la pratique pour construire des parallelipipédes, parce que ces moyens sont, pour la plûpart, si aisés à trouver, qu'il n'y a personne

DE GEOMETRIE. 151 qui ne les puisse imaginer. Mais nous donnerons la formation suivante du parallelipéde, qui est plus utile à considérer que toutes les autres.

On conçoit qu'un quarré ou un rectangle ABGH se meuve parallélement à produits par lui-même, ensorte que ses quatre angles A, B, G, H, parcourent chacun une des quatre lignes AD, BC, GF, HE, perpendiculaires au plan du rectangle ABGH.

Les parallelipipédes sont un rectangle qui se meut parallélement à lui-même.

V.

IL est presque inutile d'avertir que par une ligne perpendiculaire à un plan, nous entendons une ligne qui ne panche d'aucun côté sur ce plan, & de même qu'un plan qui ne panche pas plus d'un côté que d'un autre sur un second plan, est dit perpendiculaire à ce second plan; ces deux définitions plan perpensont analogues à celle que nous avons donnée d'une ligne perpendiculaire à une autre ligne.

La ligne perpendiculaire à un plan, est celle qui ne panche d'aucun côté fur ce plan.

Il en est de même du diculaire à un autre plan,

K iiij

VI.

Fig. 4. Or il suit de-là que la ligne AB, qui est perpendiculaire au plan X doit être perpendiculaire à toutes les lignes La ligne qui est perpendi-AC, AD, AE, &c. qui partent du culaire à un plan, est perpied A de cette ligne, & qui sont dans pendiculaire à toutes les ce plan. Car il est évident que si elle lignes de ce plan, qui parpanchoit sur une de ces lignes, elle setent du point où elle tomroit inclinée vers quelque côté du plan. be.

Donc elle ne lui seroit pas perpendiculaire.

VII.

Pour se représenter d'une façon bien sensible, comment la ligne AB peut être perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son extrémité A, on n'aura qu'à faire une figure en relief de la manière suivante.

On construira de quelque matiere unie & facile à plier comme du cartie. 5. ton, un rectangle FGDE, partagé en deux parties égales par la droite AB,

DE GEOMETRIE. 153

perpendiculaire aux côtés ED, FG; on pliera ensuite ce rectangle, en sorte que le pli soit le long de la ligne AB, & on le portera tout plié sur le plan X. Fig. 6. Il est évident que quelle que soit l'ouverture qu'on donne aux deux parties FBAE, GBAD du rectangle plié EAD GBF, ces deux parties resteront toûjours appliquées sur le plan X, sans que la ligne AB change de position par rapport à ce plan, cette droite AB sera donc perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son pied, & qui seront dans le plan X, puisque les côtés AE, AD du rectangle plié s'appliqueront successivement sur chacune de

VIII.

ces lignes par le mouvement que nous

venons de décrire.

On tire de la construction précédente une pratique bien commode, pour élever d'un point donné sur un plan, une ligne perpendiculaire à ce

154 ELEMENS

plan, ou pour abbaisser d'un point pris hors d'un plan, une ligne qui soit perpendiculaire à ce plan. Car que le point proposé soit dans le plan, en A par exemple, ou qu'il soit hors du plan, comme en H, on pourra toûjours faire avancer le rectangle EFBGDA sur le plan X, jufqu'à ce que le pli AB touche le point donné, & AB deviendra, dans les deux cas, la perpendiculaire demandée.

Pratique

F1G. 7.

ser des lignes perpendiculaires à des plans.

IX.

I L suit aussi de-là qu'une ligne AB sera perpendiculaire à un plan X, toutes les fois qu'elle sera perpendiculaire à deux lignes AE & AD de ce plan. Car alors AB pourra être regardée comme le pli d'un rectangle dont l'un des côtés pliés s'appliqueroit sur AE, & l'autre sur AD. Or ce pli ne pourroit manquer d'être perpendiculaire au plan X.

X.

SI on veut élever sur une ligne

simple pour élever, ou pour abhais-

Une ligne fera perpendiculaire à un pian, si elle eft perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

DE GEOMETRIE. 155

quelconque KL, un plan perpendiculaire au plan X dans lequel est cette ligne, on pourra se servir encore, pour cela, du rectangle plié GBFEAD. Car il ne faudra que poser sur la ligne KL le côté AD d'une des parties ADGB de ce rectangle plié, & le plan de cette partie ADGB, sera celui qu'on demande.

Maniére plan perpen-

XI.

On verra facilement que si on posoit un troisiéme plan Y sur les deux côtés FB & BG du même rectangle plié, ce plan Y seroit encore perpendiculaire à la ligne AB, & par conséquent, paralléle au plan X.

F16. 8.

Donc si à un plan X on éleve trois perpendiculaires EF, AB, DG, d'é- à un autre. gale longueur, le plan Y, qui passera par les trois points F, B, G, sera paralléle au plan X.

XII.

Lors Que deux plans ne seront

pas paralléles, il sera facile de connoî-

fervant encore de notre rectangle plié.

Pour en venir à bout, nous appliqueFig. 9. rons l'une des deux parties ABGD de
ce rectangle, sur le plan X; il est évident que l'angle EAD, ou son égal
FBG, mesurera l'inclinaison du plan
EABF sur le plan DABG. Or si on
remarque que AB est la commune section de ces plans, & que EA & AD
sont chacune perpendiculaires à AB,
on en tirera sans peine la régle sui-

Mesurer l'inclinaison d'un plan sur un autre. vante.

Deux plans qui ne sont pas paralléles étant donnés, il faut commencer par trouver la ligne droite, qui est leur commune section; ensuite d'un point quelconque de cette ligne, on lui menera deux perpendiculaires, qui soient chacune dans un de ces plans, & l'angle que seront entr'elles ces deux perpendiculaires, mesurera l'angle que les deux plans donnés sont entr'eux.

DE GEOMETRIE. 157

XIII.

Comme on s'apperçoit, sans peine, que pendant le mouvement de ABFE, autour du pli AB, la droite AE, dont l'extrêmité E décrit un arc de cercle ED, ne sort jamais d'un plan EAHD, perpendiculaire au plan X, Mesurer l'in-& que l'inclinaison de la droite EA sur clinaison d'ule plan X n'est autre chose que l'angle EAD, on découvre encore très-facilement que l'inclinaison d'une droite quelconque EA sur le plan X, est mésurée par l'angle EAH fait entre cette ligne & la ligne AD, qui passe par A & par le point H du plan X, où tombe la perpendiculaire EH, abbaissée sur ce plan, d'un point quelconque E de la droite AE.

XIV.

L'INSPECTION seule de la figure dont on vient de se servir dans l'Article précédent, fournit un nouveau

un plan.

158 ELEMENS

moyen d'abbaisser d'un point E, hors d'un plan X, une ligne EH, perpendiculaire à ce plan.

Nouvelle maniére d'abbaider une ligne perpendiculaire à un plan donné. Ayant tiré une ligne quelconque BAS, dans le plan X, on abbaissera du point donné E la perpendiculaire EA à cette ligne. Cela fait, du point A, où cette perpendiculaire tombe, on élevera dans le plan X la perpendiculaire AD à AB; & abbaissant ensuite du point donné E, à la droite AD, la perpendiculaire EH, cette ligne sera la perpendiculaire au plan X.

XV.

Seconde maniére d'élever une ligne perpendiculaire à un plan donné. On tire de-là une seconde saçon d'élever à un plan X, une perpendiculaire MN, d'un point M donné sur ce plan.

Ayant abbaissé d'un point quelconque E pris hors du plan X, la perpendiculaire EH à ce plan, on ménera par le point donné M la droite MN

DE GEOMETRIE. qui soit parallele à HE, & elle sera la perpendiculaire au plan X.

XVI.

APRE's le parallelipipéde, le solide le plus simple est le prisme droit. C'est une figure ABCDEFGHIKLM dont les deux bases opposées & paralléles sont deux poligones égaux & tellement placés que les côtés GF, FE, &c. de l'un soient paralléles aux côtés BC, CD, &c. de l'autre, & dont les autres faces sont des rectangles ABGH, BGFC, &c.)

F 1 G. 19.

Le prisme droit est une figure solide, dont les deux bases opposées sont deux poligones égaux, & les autres faces des rectangles.

XVII.

Les Géométres supposent ces sigures, formées ainsi que les paralléli- Formation pédes, par une base ABCDLM, qui des prismes droits. se meut parallélement à elle-même, de façon que ses angles A, B, &c. suivent des lignes perpendiculaires au plan de la base.

XVIII.

Pour distinguer les dissérentes espéces de prismes droits, on ajoûte le nom du poligone qui leur sert de base. Le prisme exagonal, par exemple, est celui dont la base est un exagone.

XIX.

Deux prifmes qui ont des bases égales, sont en même raison que leurs hauteurs.

25

Pour trouver la manière de mefurer toutes sortes de prismes droits, on observera d'abord que de deux prismes droits, dont les bases seroient égales, celui qui auroit une plus grande hauteur seroit plus grand en solidité dans la même raison que sa hauteur seroit plus grande.

XX.

On remarquera ensuite que deux prise prismes droits, qui auroient la même mes, qui ont la même hauteur, mais dont l'un auroit une base teur, sont en même raison qui contiendroit un certain nombre de que leurs base ses. sois la base de l'autre, seroient entr'eux

dans

dans la même raison que leurs bases. La vérité de cette proposition s'apperçoit facilement en faisant attention à la formation des prismes expliquée dans l'Article XVII.

Que abcdefghiklm, & ABCDEFGH F10. 16, IKLM soient les deux prismes qui ont la même hauteur, & que la base abcdlm du plus petit, soit, par exemple, le quart de la base ABCDLM. Puisque les deux prismes sont produits par les mouvemens de ces deux bases, il s'enfuit qu'un plan quelconque, qui sera paralléle au plan où sont les deux bases, coupera dans les deux prismes, deux poligones, dont chacun sera égal à la base du prisme où il sera coupé. C'est-à-dire, que la section du grand prisme sera toûjours quadruple de celle du petit. Donc le prisme ABCDEFG HIKLM pourra être regardé comme composé de tranches toutes quadruples de celle du prisme abcdefghiklm,& par conséquent, la solidité du premier

T.

prisme sera quadruple de celle du second.

XXI.

APRE's ces deux remarques, il ne sera pas difficile de former la régle suivante pour mesurer tous les prismes droits.

La mesure. du prisme droit est le produit de sa base par fa hauteur.

On mesurera d'abord en pieds quarrés, ou en pouces quarrés, &c. l'aire de la base du prisme proposé, ensuite on multipliera le nombre qu'on aura trouvé, par le nombre des pieds, ou des pouces, &c. que contiendra la hauteur du prisme, & le produit donnera le nombre de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c. contenus dans le prisme proposé, & sera, par conséquent, sa mesure.

XXII.

Les prismes obliques difsérent des prismes drois faces qui sont des rectan-

LE nom de prisme se donne encore aux solides (Fig. 13.) qui ont deux en ce que les bases poligones égales, ainsi que les précédens, mais dont les autres faces sont des parallélogrammes, au lieu gles dans d'être des rectangles. Pour distinguer des paralléces nouveaux prismes de ceux dont dans ceux là. nous venons de parler, on les appelle des prismes obliques, par opposition aux autres qu'on avoit nommés des prismes droits.

XXIII.

On conçoit les prismes obliques des prismes formés par une base abcki, qui se meut parallélement à elle-même, & de telle façon que ses angles suivent des lignes paralléles ag, bh, cd, &c. qui s'élevent hors du plan de la base, & qui ne lui sont point perpendiculaires.

Formation. obliques.

FIG. 13.

XXIV.

L'ANALOGIE qu'il y a entre cette formation & la formation des prismes droits dont nous avons parlé (Article XVII.) donne facilement la mesure de la solidité des prismes obliques; car si on imagine à côté d'un prisme & 13.

Fig. 12. oblique abcdefghik, un prisme droit ABCDEFGHIK, qui ait la même base, & que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans paralléles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

Car, si par un point quelconque P de la hauteur, on fait passer un plan paralléle à la base, les sections NOPQR, nopqr, que ce plan formera dans chacun des deux prismes, pourront être regardées comme les bases égales AB CKI, abcki, arrivées en NOPQR, nopgr, par le mouvement qui forme ces deux prismes; & ainsi ces deux sections seront des poligones égaux.

Or si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par de mêmes plans coupans, sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire, les prismes, soient égaux aussi.

Les prismes obliques sont égaux aux

On énonce ordinairement ainsi cette proposition: Les prismes obliques sont

égaux aux prismes droits, lorsqu'ils ont primes droits même base & même hauteur. On ap- loriqu'ils o pelle la hauteur du prisme la perpendi- hauteur. culaire abbaissée du plan supérieur sur l'inférieur, ou sur son prolongement.

XXV.

ET comme les parallélipipédes doivent être mis au nombre des prismes, on étendra ce que nous venons de dire des prismes aux parallélipipédes obliques; c'est-à-dire, aux figures abcdefgh*, produites en faisant mouvoir un quarré, un rectangle, ou même un parallélogramme, de manière que ses quatre angles suivent des lignes paralléles, qui s'élevent obliquement de la base. Ainsi, le parallélipipéde oblique abcdefgh, sera égal au parallélipipéde droit ABCDE FGH, si la base abgh est la même, ou a la même superficie que la base AB GH, & si la perpendiculaire abbaissée du plan defe sur le plan abgh est égale à la perpendiculaire abbaissée du

Il en est de même des parallélipipédes obliques à l'égard des parallélipipédes droits.: *PL.XII. Fig. 1.& 2.

L iij

plan DCFE sur le plan ABGH.

XXVI.

AYANT vû ce qui concerne les

parallélipipédes & les prismes, examinons maintenant les pyramides; c'està-dire, les corps tels que ABCDEFG, rensermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même sommet A, & qui se terminent à une base poligone quelconque BCDEFG. Il est nécessaire de considérer ces sortes de solides, non-seulement parce qu'on en rencontre dans les bâtimens & dans les autres ouvrages à construire, mais parce que tous les solides terminés par des plans, sont des assemblages de pyramides, ainsi que les figures rectilignes sont des assemblages de triangles.

Il ne faut, pour s'en assurer, que tirer

d'un point pris où l'on voudra dans

l'intérieur du corps proposé, des lignes

à tous les angles de ce corps.

F1G. 3.

XXVII.

On distingue les pyramides les unes des autres, ainsi que les prismes, par le nom de la figure qui leur sert de base.

XXVIII.

Lorsque la pyramide a pour base une figure réguliere, & que son sommet répond perpendiculairement au centre H de sa base, ainsi que dans la Fig. 3. la pyramide est alors appellée pyramide droite; elle est nommée, au contraire, pyramide oblique, lorsque le sommet n'est pas perpendiculairement au-dessus du centre, ainsi que dans la Fig. 5.

XXIX.

Pour découvrir la manière de mesurer toutes sortes de pyramides, tant droites qu'obliques, nous commencerons par faire sur ces figures, quelques

Liiij

réfléxions générales, auxquelles on est conduit par la connoissance des pro-

priétés des prismes.

Lorsqu'on fait attention à l'égalité des prismes qui ont même base & même hauteur, il est naturel qu'on se rappelle que les parallélogrammes sont aussi égaux entr'eux, lorsqu'ils ont ces mêmes conditions, & qu'il en est encore de même des triangles. Ces trois vérités se présentant à la sois à l'esprit, l'analogie doit porter à croire que les propriétés qui sont communes aux paralellogrammes & aux triangles, peuvent l'être aussi aux prismes & aux pyramides; on doit donc soupçonner que les pyramides qui ont même base & même hauteur, ont la même solidité.

XXX.

Les réfléxions suivantes consirmeront ce soupçon.

Fig. 4.&5. Soient ABCDE, abcde, deux pyramides, dont les hauteurs AH, ah,

soient les mêmes, & dont les bases soient deux figures égales, par exemple, deux quarrés égaux BCDE, bcde; si on conçoit que ces deux pyramides soient coupées par une infinité de plans paralléles à leurs bases, on imaginera, sans peine, que ces coupes de pyramide donneront des quarrés égaux IKLM, iklm, & par conséquent, que les deux pyramides peuvent être regardées comme des assemblages d'un même nombre de tranches, qui dans ces deux pyramides seront égales chacune à sa correspondante. Donc, conclura-t-on, la somme des tranches est la même, de part & d'autre : c'est-à-dire, que les deux pyramides ont la même solidité.

Si les bases des deux pyramides étoient d'autres poligones réguliers ou Fig.6.&7: irréguliers BCDEF, bcdef, égaux entr'eux, il n'y a personne qui ne pensât encore, que toutes les tranches IKLMN, iklmn, de l'une & de l'autre de ces deux pyramides devroient

être égales entr'elles; & qui n'en conclut, par conséquent, que les pyramides seroient toûjours les mêmes, lorsquelles auroient même base & même hauteur.

XXXI.

Tout cela est aisé à imaginer après la démonstration que nous avons donnée, de l'égalité des prismes qui ont même hauteur; cependant la similitude entre la tranche quelconque IKLMN d'une pyramide & la base BCDEF, & l'égalité des tranches IKLMN & iklmn, sont de ces propositions, qui, quoique sensibles pour tout le monde, ont, à la rigueur, besoin d'une démonstration; or pour trouver cette démonstration, on est obligé d'entrer dans plusieurs considérations sur la similitude des figures solides.

XXXII.

REPRENONS la pyramide ABC DEF, & supposons-la coupée par un

DE GEOMETRIE. 171 plan IKLMN, paralléle à la base, nous allons démontrer que la section, ou la coupe formée par ce plan dans la pyramide, est un poligone parfaitement semblable au poligone BCDEF; & que la pyramide AIKLMN est ellemême entiérement semblable à la pyramide ABCDEF, c'est-à-dire, que les angles que forment toutes les lignes de militude de

En quoi consiste la sideux pyramices deux figures sont respectivement des.

XXXIII.

égaux, & que tous les côtés de la pe-

tite pyramide auront le même rapport

entr'eux que ceux de la grande.

Commençons par observer que si deux plans X & Y sont paralléles, & que deux lignes quelconques ALD, AME, partant d'un même point A, traversent ces deux plans, les droites LM, DE, qui joindront les points L, M; D, E, seront paralléles. La raison en est, que si ces deux lignes n'étoient pas paralléles, elles se

F1G. 8:

rencontreroient quelque part, étant prolongées; mais si elles se rencontroient, les plans dans lesquels elles sont, & dont elles ne peuvent pas sortir, en les prolongeant autant qu'il seroit nécessaire, se rencontreroient donc aussi. Donc ils ne seroient pas paralléles, ainsi qu'on le suppose.

XXXIV.

S 1 on suppose donc que le plan F16.6. IKLMN soit paralléle au plan BCD EF, il s'ensuivra que toutes les lignes ML, LK, KI, IN, NM, seront paralléles aux lignes ED, DC, CB, BF, FE, & par conséquent, que les triangles ALM, AKL, AIK, &c. seront semblables aux triangles ADE, ACD, ABC, &c. Si on prendl'un des côtés de ces triangles, AM par exemple, pour commune mesure, ou pour échelle de tous les côtés de la petite pyramide, pendant que le côté correspondant AE servira d'échelle aux côtés de la grande,

DE GEOMETRIE. 173
on verra, sans peine, que les côtés ML,
LK, KI, &c. du poligone IKLMN
seront proportionnels aux côtés ED',
DC,CB, &c. du poligone BCDEFG.

On verra aussi facilement que tous les angles IKL, KLM, &c. seront respectivement égaux aux angles BCD, CDE, puisque les premiers seront formés par des lignes paralléles aux côtés des seconds. Donc les deux poligones IKLMN, BCDEF, seront semblables.

XXXV.

OR les côtés AM, AL, AK, &c. étant proportionnels aux côtés AE, AD, AC, &c. & les angles ALM, ALK, &c. respectivement égaux aux angles ADE, ADC, &c. à cause de la ressemblance des triangles ALM, ADE; ALK, ADC, &c. les deux pyramides AIKLMN, ABCDEF, seront entiérement semblables.

XXXVI.

ENFIN, si on méne du point A, AH, perpendiculaire au plan sur lequel est construit le poligone BCDEF, & que Q soit le point où cette perpendiculaire rencontre le plan du poligone IKLMN, il est clair que les droites AQ, AH, hauteurs des deux pyramides AIKLMN, ABCDEF, seront entr'elles dans la même raison que les côtés homologues AM, AE; AL, AD, &c. ou, ce qui revient au même, que si on prend les hauteurs AQ, AH, pour les échelles des deux pyramides, les côtés AM, AL, &c. contiendront autant des parties de AQ, que les côtés AE, AD, &c. contiendront des parties de AH.

XXXVII.

Qu'on revienne maintenant à con-Fig. 6. & 7. sidérer les deux pyramides ABCDEF, abcdef, à la fois, on verra que les deux

DE GEOMETRIE. 175 tranches IKLMN, iklmn, étant semblables aux bases BCDEF, bcdef, qui sont les mêmes, elles seront semblables entr'elles. On verra, de plus, que ces deux tranches seront égales entr'elles, puisque les échelles de ces deux sigures sont les droites égales AQ, aq, hauteurs des pyramides AIKLMN, aiklmn.

Donc, sans connoître quelle est la solidité des pyramides, on sçait déja, avec certitude, que si elles ont même hauteur & même base, elles sont égales, ainsi que nous l'avions soupçonné (Article XXIX.)

Les pyramides qui ont même base & même hauteur, sont égales.

XXXVIII.

Si les bases des deux pyramides, au lieu d'être les mêmes, étoient seu- encore également égales en superficie, les pyramides seroient encore égales en solidité; car soit abcdef*, & arst, deux gones sempyramides qui ont la même hauteur égales en suah, si on coupe ces deux pyramides par *Fig.7.&9.

Deux pyramides font les, si ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des polyblables, font

un plan quelconque paralléle à la base, il est évident qu'il y aura même rapport de l'aire iklmn à l'aire bcdef, que de l'aire uxy à l'aire rst; puisque iklmn, bcdef, étant (Article XXXIV.) des sigures semblables, elles ne dissérent (I. Part. Art. XLVIII.) que par leurs échelles aq, ah, &c. & que les sigures ne dissérent, non plus, que par leurs échelles, qui sont encore les lignes aq, ah.

Mais si les bases rst, bedef, sont égales en superficie, leurs parties proportionnelles uxy, iklmn, seront donc égales. Donc toutes les tranches des deux pyramides arst, abedef, auront la même étenduë. Donc leurs assemblages; c'est-à-dire, les pyramides mêmes, seront égales en solidité.

XXXIX.

Les pyramides qui ont même hau
S I la base bedef de la premiere pyramide contenoit un certain nombre de fois

DE GEOMETRIE. 177

fois la base rst, la solidité de la premie-teur, sont re pyramide abcdef, contiendroit le comme leurs même nombre de fois la folidité de la seconde arst.

bases.

Car, en ce cas, la base bedef étant divisée en plusieurs parties, dont chacune sût égale à la base rst, on pourroit concevoir la pyramide abcdef, comme composée de plusieurs autres pyramides, qui auroient pour bases les parties de bcdef. Or chacune de ces nouvelles pyramides seroit égale à la seconde pyramide arst, selon que nous l'avons prouvé dans l'Article précédent. Donc, &c.

Que si la base rst n'étoit pas contenuë exactement dans la base bedef; mais que ces deux bases eussent une mesure commune X, on diviseroit chacune des deux bases bedef, rst, en des parties égales à X, & on verroit que les deux pyramides abcdef, arst, seroient composées d'autant de pyramides nouvelles, toutes égales entr'elles,

que les deux bases contiendroient de parties X. Donc les pyramides abcdef, arst, seroient entr'elles comme leurs bases.

Et si les bases étoient incommensurables, on feroit toûjours voir, malgré cela, que les pyramides seroient entr'elles en même raison que leurs bases, en se servant d'une induction semblable à celle qu'on a employée dans un pareil cas (II. Part. Art. XXVIII.) lorsqu'il s'agissoit de comparer les figures dont les côtés étoient incommensurables; c'est-à-dire, qu'on diminueroit à l'infini la mesure X, de façon qu'elle pût être censée mesure commune, tant de la base rst, que de la base bcdef.

XL.

Ayant découvert que les pyramides qui ont même hauteur sont en même raison que leurs bases, on doit sentir que la mesure de leur solidité

DE GEOMETRIE. 179 ne renserme plus que très-peu de dissis culté.

Car il ne s'agit plus que de sçavoir mesurer une seule pyramide, pour mesurer toutes les autres. Supposons, par exemple, que nous sçachions mesurer la pyramide ABCDE, & qu'on nous demande la mesure de la pyramide AS & 11. TVXY, qui n'a ni la même base, ni la même hauteur que la premiere: nous commencerons par faire une pyramide semblable à la pyramide ABCDE, & qui ait la hauteur de la pyramide ASTVXY, ce qui sera bien aisé; car il suffira (Article XXXV.) de prolonger les côtés AB, AC, AD, AE, & de les couper par le plan LMNO, dont la distance AG au sommet A, soit égale à la hauteur AQ.

Cela fait, puisque par la supposition nous sçavons mesurer la pyramide AB CDE, il est évident que nous sçaurons mesurer aussi la pyramide ALMNO, qui lui est semblable; car quelles que Mij

F16. 10:

foient les opérations par lesquelles on mesure la pyramide ABCDE, on pour ra toûjours faire les mêmes opérations pour mesurer la pyramide semblable ALMNO, à cela près qu'on emploiera dans celle-ci une échelle dissérente.

Supposons donc que la pyramide ALMNO soit mesurée, sa mesure déterminera aussi celle de la pyramide proposée ASTVXY, car par l'Article précédent, ces deux pyramides sont entr'elles comme leurs bases LMNO, STVXY, & nous avons d'ailleurs enseigné dans la seconde Partie à trouver le rapport de ces deux bases.

XLI.

Puis Qu'il ne s'agit donc que de mesurer une seule pyramide, pour sçavoir mesurer toutes les autres pyramides imaginables, proposons-nous-en une extrêmement simple, qu'on peut former en tirant des quatre angles A, B, C, H, d'une des faces d'un cube

DE GEOMETRIE. 181'
ABCDEFGH, quatre lignes au point
O, centre de ce cube; c'est-à-dire, le
point également distant de A, D, B, E,
&c.

On voit, sans peine, que cette pyramide est la sixiéme partie du cube, puisqu'on peut décomposer le cube en six pyramides pareilles, en prenant chaque face pour base. Or la valeur du cube est le produit de la hauteur AF par la base ABCH. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partagerle produit de AF par ABCH, en six parties égales, ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier la sixiéme partie de la hauteur AF par la base AB CH, & comme la sixiéme partie de la hauteur AF est le tiers de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puisque sa hauteur OL est la moitié du côté du cube, il s'ensuit que la mesure de la pyramide OABCH est le produit du tiers de sa hauteur par sa base.

XLII.

F1G.13.

SUPPosons présentement qu'on ait à mesurer une pyramide quelconque OKMNSTV, on imaginera un cube dont le côté AB ou AF soit double de la hauteur OL de la pyramide proposée, & on concevra dans ce cube, une pyramide OABCH, dont la pointe soit au centre, & qui ait pour base une des faces ABCH du cube. Cette nouvelle pyramide aura même hauteur que la premiere; & par conséquent, (Article XXXIX.) la solidité de OABCH sera à celle de OKMNSTV, comme la base ABCH à la base KMNSTV; or par l'Article précédent, le produit du tiers de la hauteur commune OL par la base ABCH, est la valeur de la pyramide OA BCH; donc le produit du tiers de la même hauteur commune OL par la base KMNSTV, sera la valeur de la pyramide proposée OKMNSTV.

La solidité d'une pyramide quel-

Et par-là, on découvre ce théorême

général, qu'une pyramide a pour me- conque, est sure le produit de sa base par le tiers de sa base par le fa hauteur.

le produit de tiers de sa hauteur.

XLIII.

Comme nous avons vû (Article XXI.) que la solidité d'un prisme, est le produit de la base par la hauteur, il est clair, par l'Article précédent, que les pyramides seront toûjours le tiers des prismes qui auront même base & même hauteur.

La pyramide est le tiers du prisme qui a même base & même haureur.

XLIV.

Apre's avoir mesuré tous les solides terminés par des plans, nous allons chercher le chemin qu'on peut avoir suivi pour mesurer les solides dont les furfaces sont courbes. Et comme nous n'avons traité dans la troisiéme Partie que des figures, dont les contours ne renserment d'autres courbes que le cercle, nous n'examinerons que les corps dont les courbures sont circulaires.

Miii

Dans l'examen de ces corps, nous aurons deux objets, la mesure de leurs surfaces & celle de leurs solidités; car ces surfaces étant, ou entiérement courbes, ou en partie planes & en partie courbes, nous ne pourrons renvoyer leur mesure à la premiere Partie, ainsi que nous l'avons fait des corps terminés par des plans.

XLV.

PL.XIII. Fig. 1. & 2.

Le cylindre est un solide terminé par deux bases opposées & paralléles, qui sont des cercleségaux, & par un plan plié autour de leurs circonsérences.

Fig. 1.

On le distingue en cylindre droit, & en cylindre oblique.

Le plus simple de tous les solides courbes, est le cylindre; c'est un corps comme ABCDEF, dont les deux bases ABC, DEF, sont deux cercles égaux joints par une surface courbe qu'on peut imaginer sormée par un plan plié autour de leurs circonférences.

Lorsque les deux cercles sont placés de façon que le centre G du premier réponde perpendiculairement au-des-sus du centre H du second, le cylindre se nomme droit.

Le cylindre se nomme au contraire

DE GEOMETRIE. 185 oblique, lorsque la ligne tirée par les deux centres G& H, est oblique à l'égard des plans ABC, DEF.

XLVI.

La formation géométrique de ces folides, analogue à celles des prismes & des parallélipipédes, dont il a été parlé (Article XVII.) consiste à faire mouvoir un cercle parallélement à luimême, en sorte que tous ses points décrivent des lignes droites paralléles qui s'élévent hors du plan de ce cercle.

XLVII.

On parviendra, de la manière suivante, à mesurer la surface d'un cylindre droit; ce qui est souvent nécessaire dans la pratique.

Les deux circonférences ABC, DEF, Fig. 1. étant partagées chacune en un même nombre de parties égales, les points de division répondant les uns au-dessus des

Formation du cylindre.

joignent les angles correspondans des deux poligones réguliers que donne cette opération. Il est clair qu'on aura alors un prisme dont la superficie sera composée d'autant de rectangles rensermés dans la surface du cylindre, qu'il y a de côtés rensermés dans chacune des circonférences ABC, DEF. Or tous ces rectangles ayant chacun leur hauteur égale à AD, leur mesure totale sera le produit de la hauteur AD par la somme de toutes les bases, c'est-à-dire, par le contour du poligone rensermé ou inscrit dans le cercle DEF ou ABC.

Mais comme à mesure que le nombre des côtés de ce poligone sera grand, le contour du poligone approchera, de plus en plus, d'être égal à la circonférence, & la surface du prisme d'être égale à celle du cylindre; il s'ensuit que si on imagine que le nombre des côtés de ce poligone devienne insini, le prisme ne

La surface courbe d'un cylindre

DE GEOMETRIE.

différera pas du cylindre. La surface courbe du cylindre droit est donc égale à un rectangle dont la hauteur seroit AD, & la base une ligne droite égale à le à un rectangle qui a la même hau

Cette proposition peut servir à troula base est ver, par exemple, ce qu'il faudroit d'étosse pour envelopper un pilier cylindrique, ou pour tapisser le dedans d'une Tour ronde.

droit est égale à un rectangle qui a la même hauteur. & dont la base est égale à sa circonsérence.

XLVIII.

QUANT à la furface du cylindre oblique, on ne peut pas la mesurer de la même manière, parce qu'au lieu de rectangles, on auroit des parallélogrammes de hauteurs dissérentes. Ce n'est que par des méthodes très compliquées & très-difficiles, qu'on est parvenu à connoître seulement la valeur approchée de cette surface; & les problèmes de ce genre ne sont pas du ressort des élémens.

XLIX.

A l'égard de la solidité des cylindres, soit droits, soit obliques, rien ne sera plus aisé que de la trouver. Car il est évident que tout ce que nous avons dit des prismes, conviendra aux cylindres, si on regarde les cylindres comme les derniers des prismes qu'on peut leur inscrire.

Les cylindres qui ont même base & même hauteur, sont égaux en solidité. Ainsi les cylindres qui auront même base & même hauteur, seront égaux en solidité.

L.

La mesure d'un cylindre quelconque est le produit de sa base par sa hauteur. ET la mesure d'un cylindre quelconque consistera dans le produit de sa base par sa hauteur.

LI.

LE cone est le solide courbe le plus simple après le cylindre; c'est une si-E16.3. & 4. gure comme ABCDE, dont la base est un cercle, & dont la surface est com-

DE GEOMETRIE.

posée d'une infinité de lignes droites, qui aboutissent toutes du sommet A à la circonférence BCDE de ce cercle. On peut regarder ce solide comme une pyramide dont la base seroit un cercle.

Le cone est une espéce de pyramide, dont la base est un cercle.

LII.

S1, comme dans la figure 3, la pointe ou sommet A du cone répond perpendiculairement au-dessus du centre O de la base, le cone est nommé cone droit; & il est nommé oblique, si le sommet répond à un point dissérent du centre de la base, ainsi que dans la sigure 4.

On le distingue en conte droit & en cone oblique.

LIII.

Pour mesurer la surface d'un cone droit ABCDE, on le regardera comme la derniere des pyramides qu'on peut lui inscrire; c'est-à-dire, qu'on divisera la circonférence de sa base BC DE, ainsi qu'on a fait de la circonférence du cylindre, en une infinité de pesits côtés, & tirant des lignes de tous

F16. 3.

les angles au sommet du cone A; on trouvera que la superficie conique est un assemblage d'une infinité de petits triangles isocéles, dont la hauteur est égale au côté AB du cone, & dont toutes les bases ajoûtées ensemble, sont égales à la circonférence BCDE; d'où il est aisé de voir que la mesure de cette surface se trouvera en multipliant la moitié de AB par la circonférence BCDE.

La surface d'un cone droit se mesure en multipliant la moitié de son côté par la circonférence de sa base.

LIV.

Ston se rappelle maintenant que la surface d'un secteur de ce cercle est égale (III. Part. Art. X.) est égale au produit de l'arc de ce secteur par la moitié du rayon, on verra que pour envelopper le cone droit ABCDE d'une surface pliante comme du carton, &c. il faudroit prendre un secteur de cercle, dont le rayon sût égal à AB, & dont l'arc sût égal à la circonsérence BCDE.

Le développement d'un cone est un secteurde cercle.

LV.

Lors QUE le cone est oblique, la mesure de sa surface, ainsi que celle du cylindre oblique, est fort difficile à connoître même d'une manière approchée, & c'est encore un problème au-dessus des Elémens.

LVI.

QUANT à la folidité des cones, soit droits, soit obliques, on les regardera comme les dernieres des pyramides qu'on pourroit leur inscrire, & on pourra leur appliquer en conséquence ce qu'on a dit des pyramides en général.

Ainsi les cones qui auront même base & même hauteur, seront égaux.

Les cones qui ont même base & même hauteur sont égaux.

LVII.

Et la solidité d'un cone quelconque sera le produit de la base par le tiers de sa hauteur.

Leur mesure est le produic de la base par le tiers de la hauteur.

LVIII.

un corps comme BCDEFGH, qu'on appelle cone tronqué; c'est la partie qui reste d'un cone AFGH, lorsqu'on en a retranché un autre cone plus petit AB CDE, par une section paralléle à la base FGH. Il est évident que la mesure de ce solide sera la dissérence entre les solidités des deux cones ABCDE, AF, GH.

LIX.

Quant à la surface d'un cone tronqué, s'il a été formé par la section d'un cone droit, on peut trouver quelque chose de plus simple que de mesurer séparément les surfaces des deux cones, & de retrancher l'une de l'autre, on emploiera pour cela la méthode suivante, qui est aisée à imaginer, après ce que nous avons dit, (Article LIV.)

Fig. 6.& 7. Supposons que ALR soit le secteur qu'il

faudroit construire pour pouvoir envelopper le cone AFGH; en décrivant du centre A & de l'intervalle AM égal à AB, un arc MP, il est clair que l'espace MPRL seroit une portion de couronne propre à envelopper la surface cherchée du cone tronqué. Or si on imagine que les deux circonférences, dont MP & LR sont des arcs semblables, soient achevées, on aura une couronne entiére, dont la mesure (III. Part. Art. VIII.) sera le produit de ML, égal à BF par la circonférence dont AN est le rayon, N étant le milieu de ML. Donc la portion de couronne MPRL, ou la surface du cone tronqué BCDE surface d'un FGH qui lui est égale, se mesurera en multipliant ML par l'arc NQ; ou, ce qui revient au même, en multipliant BF par la circonférence IKL, que donne la section du solide proposé par un plan paralléle à la base, & qui passe par le milieu I du côté BF.

Maniére de cone tronqué.

LX.

La sphére est le corps dont la surface a cous ses points également éloignés du centre. Le dernier des corps solides que nous traiterons, se nomme sphére ou globe; c'est celui dont la surface a tous ses points également éloignés d'un même point qui en est le centre. On a souvent besoin de mesurer cette surface; on voudra sçavoir, par exemple, ce qu'il faudroit de dorure pour une boule, combien on devroit prendre de lames de plomb pour couvrir un dôme, &c.

LXI.

mesurer la superficie, il est évident qu'on peut concevoir ce solide comme produit par la révolution d'un demicercle AMB, autour de son diamétre AB.

Supposons d'abord qu'au lieu de la demi-circonférence, nous ayons un poligone régulier d'un nombre infini

DE GEOMETRIE. 195

de petits côtés, ou, si on veut, d'un très-grand nombre de côtés; & proposons-nous seulement de mesurer la surface Z, produite par la révolution de ce poligone. Il sera facile de passer ensuite de la mesure de cette surface à la mesure de la surface de la sphére, ainsi que nous avons passé de la mesure des sigures rectilignes à celle du cercle.

F1G. 9.

LXII.

Pour mesurer la surface du solide Z, examinons la petite partie de cette surface, que produit un seul côté quelconque Mm du poligone inscrit, pendant qu'il tourne autour du diamétre AB. Il est évident que ce côté Mm décrit dans ce mouvement une surface de cone tronqué V. Car en prolongeant la PL. XIV. droite mM jusqu'à ce qu'elle rencontre en T le diamétre ou axe de révolution AB, si cette ligne TMm tourne en même tems que le demi-cercle AMB, elle

Nij

décrira visiblement un cone droit ; dont le sommet sera T, & la base, le cercle décrit par le point m; en sorte que la surface V, produite par le mouvement de Mm, sera une tranche de ce cone, enfermée entre les plans dece rcles que les points M & m décrivent en tournant. Mais selon que nous l'avons vû (Article LIX.), la surface V. est égale à un rectangle dont Mm est la hauteur, & la base, une ligne égale à la circonférence KLO, décrite par le point K, milieu de Mm. Donc la surface produite par la révolution du poligone est égale à la somme d'autant de rectangles de cette nature, qu'il y a de côtés dans ce poligone, tels que Mm.

Or comme tous les côtés Mm, hauteurs de ces rectangles, sont supposés égaux, on pourroit regarder la surface cherchée comme un rectangle total qui auroit la hauteur Mm, avec une base égale à la somme de toutes les circon-

DE GEOMETRIE. 197 férences telles que KL, c'est-à-dire, décrites par le point de milieu de chaque petit côté.

Mais le poligone inscrit dans le demi cercle AMB, ayant un très-grand nombre de côtés, la petitesse de la hauteur Mm, & la grandeur excessive de la base, rendent ce rectangle inconstructible.

Pour remédier à cet inconvénient, il est bien aisé d'imaginer de changer tous ces petits rectangles en d'autres qui auroient toûjours une même hauteur, non pas imperceptible comme Mm, mais assez grande pour que chacune des bases devînt sort petite; moyennant cela, l'addition de toutes ces petites bases ne sera plus qu'une longueur comparable à la hauteur.

LXIII.

Point changer de cette sorte nos petits rectangles. Supposons d'abord, pour Niij

simplifier le problème, que nos rectangles, au lieu d'avoir pour bases des lignes égales aux circonférences KL, n'ayent pour bases que les rayons KI de ces circonférences. Il ne nous sera pas difficile ensuite d'appliquer ce que nous aurons trouvé pour ces derniers rectangles, à ceux dont nous avons affaire.

Il s'agit donc de trouver un rectangle qui ait pour mesure le produit de Mm par KI, & qui ait pour hauteur quelque ligne incomparablement plus grande que Mm, & qui soit la même en quelque endroit que soit placé ce petit côté Mm. Choisissons, par exemple, la droite CK, qui est l'apothéme du poligone dont Mm est le côté, & qui, par conséquent, est toûjours la même, à quelque côté du poligone qu'elle appartienne. Nous devons donc chercher une ligne dont le produit par CK soit égal au produit de KI par Mm; c'est-à-dire (II. Part. Art. VII.) qu'il saut

trouver une quatriéme proportionnelle aux trois lignes KC, KI, Mm. Or nous sçavons que c'est par le moyen des triangles semblables, qu'on découvre des lignes proportionnelles dans les sigures, il saut donc sormer des triangles semblables, dont les côtés homologues soient les lignes en question; c'est ce qu'on sera en abbaissant MR, perpendiculaire à mp. On aura alors les triangles MmR, KIC, qui seront semblables; car ils seront chacun rectangle, l'un en R, l'autre en I, & de plus, ils auront les angles mMR, IKC

De-là on peut conclure facilement que KC est à KI, comme Mm à MR; c'est-à-dire, que MR est la quatriéme proportionnelle cherchée; ou, ce qui revient au même, que le restangle de KC par MR ou par Pp, est égal Niiij

égaux entr'eux, à cause que le premier

fait un angle droit avec l'angle MmR,

égal à l'angle MKI, & que l'autre IKC

fait aussi un droit avec MKI.

au rectangle de Mm par KI.

Mais comme le rectangle que nous nous étions d'abord proposés de changer, n'étoit pas celui de Mm par KI, que c'étoit celui de Mm par la circonférence dont KI est le rayon; nous nous rappellerons ici que les circonférences sont entr'elles comme les rayons; ce qui fait que l'égalité qui est entre le rectangle de Mm par KI, & celui de Pp par CK, entraîne nécessairement l'égalité du rectangle de Mm par la circonférence de KI, au restangle de Pp, par la circonférence de CK. Car on sent facilement que si deux rectangles sont égaux, & que conservant leurs hauteurs, on augmente proportionnellement leurs bases, ces rectangles demeureront encore égaux.

LXIV.

AYANT découvert dans les deux Articles précédens que toutes les petites surfaces coniques tronquées, telle

DE GEOMETRIE. 201 que V (Fig. 1.) sont égales à autant de rectangles qui auroient tous pour hauteur une même droite égale à la circonférence, dont KC seroit le rayon, & dont chacun auroit pour base une petite droite Pp, correspondant à chaque côté Mm; on en déduira qu'une somme quelconque de ces petites sursaces, prise depuis A jusqu'en p, par exemple, sera égale à un rectangle qui auroit pour hauteur une droite égale à la circonférence de CK, & pour base la somme de toutes les lignes telles que Pp, prises depuis A jusqu'en p, c'est-à-dire, la droite Ap.

Donc pour avoir la surface totale produite par la révolution du poligone entier, il faudra faire un rectangle dont la base soit égale à la circonférence décrite du rayon CK, & qui ait une hauteur égale au diamétre AB.

LXV.

IL est bien aisé maintenant de mefurer la surface de la sphére. Car il est clair que plus il y aura de côtés dans le poligone, plus le solide produit par sa révolution approchera d'être égal à la sphére, & plus aussi l'apothème CK approchera d'être égal au rayon, en sorte que si on peut imaginer que le poligone soit devenu un cercle, l'apothème CK sera le rayon même, & la surface de la sphére aura la même étenduë qu'un rectangle dont la hauteur & la base seroient, l'une le diamétre, & l'autre une ligne égale à la circonsérence du cercle qui l'aproduite, & qu'on appelle ordinairement le grand cercle de la sphére.

La surface de la sphére a pour mesure le produit de son diamétre par la circonsérence de son grand cercle.

LXVI.

Ce que c'est qu'un segment de sphere.

* F1G. 3.

Comment on meture fa furface. QUANT à la surface courbe d'un segment de sphére AMLNO*; c'est-àdire, de la partie de la sphére qu'on en retranche, lorsqu'on la coupe par un plan MLNO, perpendiculaire au diamétre; elle a pour mesure le produit de son épaisseur ou sièche AP par la circonsérence du grand cercle AM

DE GEOMETRIE.

20

BN. La raison en est la même que celle par laquelle on a prouvé (Article LXIV.) que la somme des surfaces de tous les petits cones tronqués, compris depuis A jusqu'en m, est égale au rectangle dont la hauteur est Ap, & la base une ligne égale à la circonsérence dont CK est le rayon.

FIG. 2.

LXVII.

La mesure précédente de la surface de la sphére, apprend que si on fait tourner le rectangle ABDE en mêmetems que le demi cercle AMNB autour de AB, la surface courbe du cylindre droit EFGIKDH produit par la révolution de ce rectangle, sera égale à celle de la sphére décrite par le demi-cercle; ce qu'on exprime ordinairement ainsi; la surface de la sphére est égale à celle du cylindre circonscrit.

F16. 4:

La furface de la fphére est égaie à celle du cylindre cir-

conscrit.

LXVIII.

ET si on coupe, tant le cylindre, que la sphére, par deux plans quelconques Les tranches du cylindre & de la sphére ont la même supersicie.

perpendiculaires au diamétre AB, en P & en Q, les tranches de la sphére & du cylindre qui seront produites par le mouvement de la droite OS, & de l'arc MN, seront égales en superficie.

LXIX.

La surfree de la sphére est égale à quatre sois celle de son grand cercle. On voit encore, par ce qui précéde, que la surface de la sphére est égale à quatre sois l'aire de son grand cercle; car la surface de ce grand cercle a pour mesure le produit de la moitié du rayon ou du quart du diamétre par la circonsérence, & la superficie de la sphére est égale au produit du diamétre entier par la même circonférence.

LXX.

La mesure de la surface de la sphére étant trouvée, il est bien aisé de mesurer sa solidité; car on peut considérer la sphére comme l'assemblage d'une infinité de petites pyramides, dont les sommets sont à son centre, & dont toutes les bases couvrent sa surface entière. Or

DE GEOMETRIE. 209

chacune de ces pyramides ayant pour mesure le produit du tiers de sa hauteur c'est-à-dire, du rayon, par sa base, leur somme totale ou la solidité de la sphére se mesurera en multipliant le tiers du rayon par sa surface, c'est-à-dire, par quatre fois l'aire du grand cercle.

La solidité de la sphére est le produic du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle

LXXL

Comme le produit du tiers du rayon par quatre fois le grand cercle, est la même chose que le produit de quatre fois le tiers du rayon, c'est-à-dire, des deux tiers du diamétre par le grand cercle, & que la solidité du cylindre EF GIKDH a pour mesure le produit du diamétre par le même grand cercle qui lui sert de base ; il s'ensuit que la solidité de la sphére est les deux tiers de est les deux celle du cylindre circonscrit.

La 'solidité de la sphére t'ers de celle du cylindre circonscrit.

LXXII.

Si on se proposoit de mesurer la

solidité d'un segment de iphére.

*FIG. 3.

Mesure de la solidité d'un segment de sphére AML NO*, il est évident qu'il faudroit d'abord mesurer la portion de sphére produite par la révolution du secteur CA M; ce qui se feroit en multipliant le tiers du rayon par la surface du segment de sphére proposé AMLNO: ensuite on retrancheroit de cette mesure celle du cone produit par la révolution du triangle CPM, c'est-à-dire, le cone dont la base est le cercle MLNO, & CP la hauteur, & le reste seroit la valeur demandée du segment.

LXXIII.

No us finirons ces Elémens par quelques Propositions sur la solidité & sur la superficie des corps semblables. Ces Propositions se présentent fort naturellement, lorsqu'on résléchit sur ce qui constitue la similitude de deux corps. On peut dire même qu'on ne peut guéres manquer de les décou-

DE GEOMETRIE.

vrir par analogie, si on se rappelle ce que nous avons dit (I. Part. Art. XXXIV. & suiv.) de la similitude des figures planes; c'est-à-dire, de celles qui sont décrites sur des plans.

Nous avons déterminé (Art.XXXII.) en quoi consiste la similitude de deux pyramides; la définition que nous avons donnée alors des pyramides semblables, peut s'étendre à tous les corps terminés par des plans : c'est-à-dire, que deux corps de cette nature seront appellés semblables, si tous les angles formés par les côtés du premier sont les mêmes militude de que les angles formés par les côtés du terminés par second, & si les côtés d'un de ces corps sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre.

En quoi confifte la fidenx corps des plans.

LXXIV.

QUANT aux corps qui ne sont pas terminés de tous les côtés par des plans, les cylindres & les cones, par exemple, il est aussi facile de déterminer les conditions nécessaires pour les rendre semblables.

Conditions qui déterminent la fimilitude de deux cylindres droits. Deux cylindres droits seront semblables, si leurs hauteurs sont en même raison que les rayons de leurs bases.

LXXV.

Celle de deux cylindres obliques.

S 1 les cylindres sont obliques, il faudra, de plus, que les lignes qui joignent les centres des deux cercles, dans chacun de ces cylindres, fassent les mêmes angles sur les plans de leurs bases.

LXXVI.

Celle de deux cones,

Les mêmes définitions peuvent s'appliquer aux cones, en mettant au lieu de la ligne qui passe par les centres des deux bases du cylindre, celle qui va du sommet du cone au centre du cercle qui lui sert de base.

LXXVII.

Pour que deux cones tronqués soient semblables, il faut, en premier lieu, que les cones dont ils sont portions

DE GEOMETRIE. 200

tions soient semblables l'un à l'autre; & en second lieu, que leurs hauteurs tronqués. soient entr'elles comme les rayons de leurs bases.

LXXVIII.

A l'égard des sphéres, on voit bien qu'elles sont toutes semblables les unes aux autres, ainsi que toutes les figures; toutes les fisoit solides, soit planes, qui n'ont besoin que d'une seule ligne pour être déterminées, comme le cercle, le font toutes femblables. quarré, le triangle équilatéral, le cube, le cylindre circonscrit à la sphére, &c.

Les sphéres, les cubes, & gures qui ne dépendent que d'une seule ligne

LXXIX.

En général on pourra dire des figures solides semblables, comme on l'a dit des figures planes, qu'elles ne différent que par les échelles sur lesquelles elles ont été construites.

Cet exposé seul bien considéré, conduit à deux propositions sondamentales

En général les solides semblables ne différent que par les échele les sur lesquelles ils iont conitruits,

sur la superficie & sur la folidité des corps semblables.

LXXX.

Les furfaces des solides (carblables font entirelles comme ler quarrés de leurs côlés homologues.

F. 6. 5. & 6.

La premiere Proposition apprend que les surfaces de deux solides semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; qu'il y a, par exemple, même rapport entre les surfaces des deux pyramides semblables z & Z, qu'entre les quarrés abed, ABCD, faits sur les côtés ab, AB, qui se répondent dans ces deux pyramides.

Pour découvrir cette Proposition, on n'a besoin que des raisonnemens qu'on a employés (I. Part. Art. XLIII. & XLIV.), c'est-à-dire, qu'il faut seulement considérer que si P est l'échelle de la pyramide Z, & p l'échelle de la pyramide semblable z, les lignes qu'il faudra employer pour mesurer la surface de Z, & celle du quarré ABCD, auront le même nombre de P, qu'il y

DE GEOMETRIE. 211

aura de parties p dans celles qu'il faut employer pour mesurer la surface de z,

& celle du quarré abcd.

Car de-là il suit que le produit des lignes qui entrent dans la mesure de Z
& de ABCD, donnera le même nombre de quarrés X saits sur P, que le produit des lignes employées à mesurer z
& abcd donnera de quarrés x saits sur p.
C'est-à-dire, que les nombres qui exprimeront le rapport de la surface de la
pyramide Z au quarré ABCD, seront
les mêmes que ceux qui exprimeront le
rapport de la surface z au quarré abcd.

On feroit le même raisonnement dans la comparaison de tous les autres corps semblables, soit que ces corps sussent terminés par des plans, soit qu'ils sussent terminés par des surfaces courbes; car les lignes employées à mesurer les superficies de tous ces corps, auront toûjours le même nombre des parties de leurs échelles, & par conséquent, les produits de ces lignes contiendront un

même nombre de fois les quarrés de

ces mêmes parties.

Et si les lignes nécessaires pour mesurer la superficie des corps semblables, étoient incommensurables, il est clair que la démonstration subsisteroit toûjours, pourvu qu'on employât ici les principes dont on s'est servi (II. Part. Art.XXVIII.) pour comparer les figures semblables, dont les côtés étoient incommensurables.

LXXXI.

Les surfaces des sphéres comme les quarrés de leurs rayons.

- Si -

On prouveroit de la même façon, sont entr'elles que les surfaces des sphéres sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons. Mais, pour le voir encore plus clairement d'une autre maniere, il suffira de se rappeller que les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons (III. Part. Art. VI.), & que les surfaces des sphéres sont quadruples de leurs grands cercles (Art. LXIX.)

LXXXII.

L'a proportionnalité entre les surfaces des corps semblables & les quarrés de leurs côtés homologues, est si générale qu'elle s'applique autant aux corps qu'on ne sçait pas mesurer, qu'à ceux dont on connoît la mesure.

Sans sçavoir mesurer, par exemple, la surface d'un cylindre oblique, on peut affirmer que les surfaces de deux cylindres obliques semblables sont entr'elles comme les quarrés des diamétres des bases de ces cylindres. Car en inscrivant dans ces deux cylindres deux prismes semblables de tant de saces qu'a on voudra, on verra, par ce qui précéde, que les surfaces de ces prismes seront entr'elles comme les quarrés des diamétres des bases. Donc les cylindres mêmes, considérés comme les derniers des prismes inscrits auront leurs surfaces dans le même rapport.

LXXXIII.

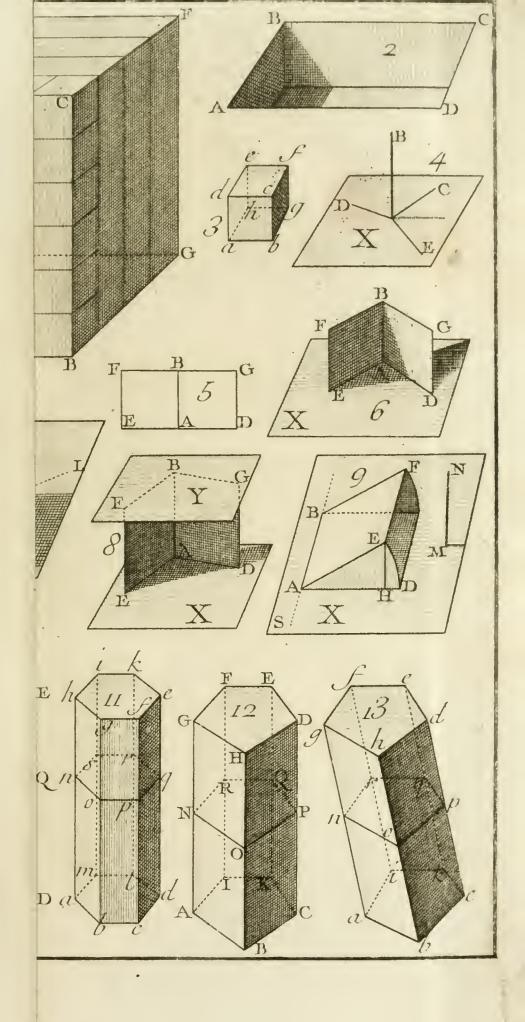
Les solides femblables font entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues. La Proposition fondamentale pour la comparaison de la solidité des corps semblables est celle-ci.

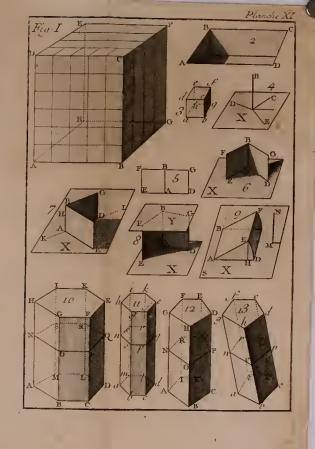
Les solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homo-logues.

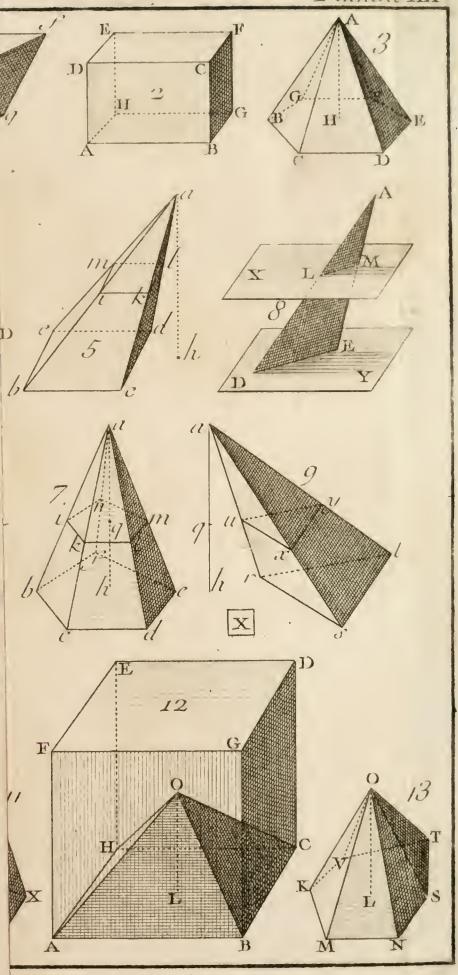
Cette Proposition se peut démontrer comme la précédente, en considérant que les figures semblables ne différent que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.

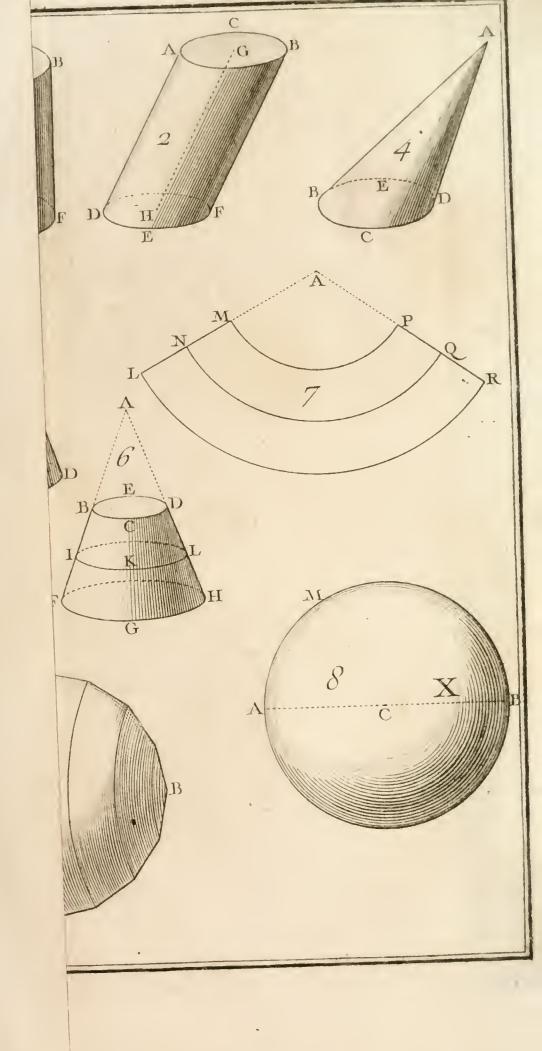
Pour le faire voir le plus simplement qu'il nous sera possible, nous nous servirons, par exemple, des deux prismes semblables Z & z, & des deux cubes X & x, dont les côtés sont égaux à AB, ab, lignes analogues dans ces deux prismes; & nous prendrons de plus deux échelles AB, ab, divisées en un assez grand nombre de parties, pour pouvoir mesurer les dimensions de ces solides : or cela posé, il est clair qu'il se trou-

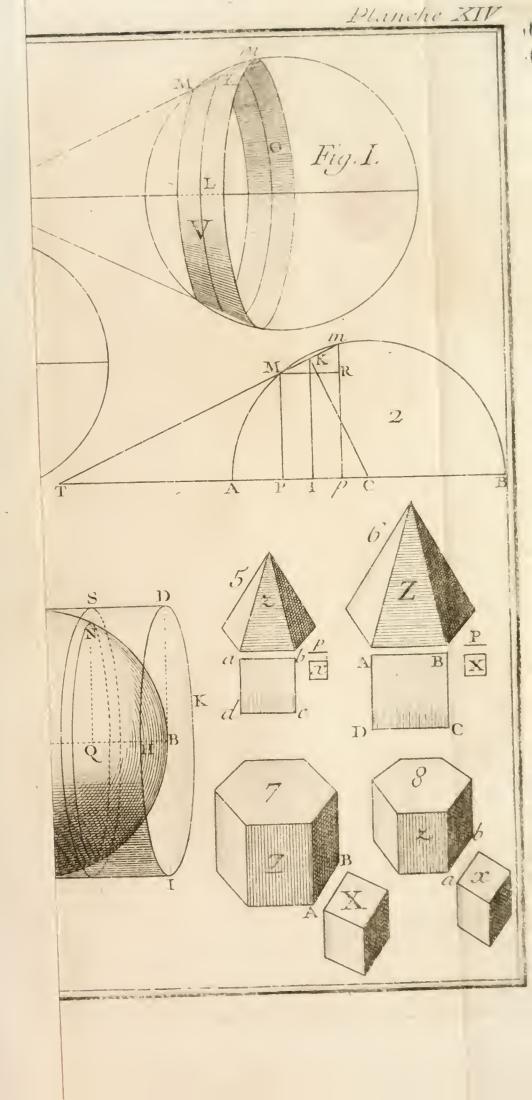
Fre. 7.

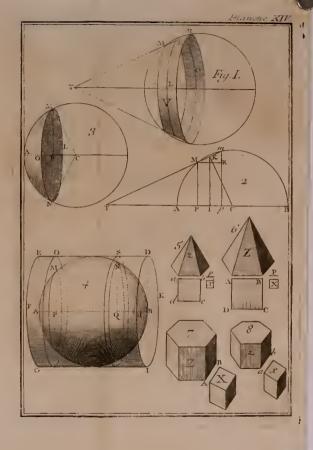












DE GEOMETRIE.

vera précisément autant de cubes faits sur les parties de ab, dans le prisme z, & dans le cube x, que de cubes faits sur les parties de AB dans le prisme Z & dans le cube X.

On feroit le même raisonnement pour tous les autres solides; & ceux qui pourroient avoir des dimensions incommensurables, seroient aussi dans la même raison que les cubes de leurs côtés homologues.

LXXXIV.

Les solidités des sphéres, par exemple, sont évidemment entr'elles, com- comme les me les cubes de leurs rayons.

Les spheres leurs tavons.

FIN.

Fautes à corriger.

PAge 8, ligne 9, éloignées, lisez éloignées P. 23, Art. XXI. lisez XXIII.

P. 40, l. 10, ce qui, lisez ee qu'il.

P. 55, 1.2, BAC, lifez bAc.

P. 81, 1. 13, est la seconde, lisez est à la seconde.

P. 84, 1. 4 de l'apostille, après quatriéme, ajoûtez

P. 94, l. 13, par, lisez pas.

P. 108, dern. ligne de la séconde apostille, au lieu de circonfé, lisez circonférence.

P. 133, 1.9, mêmes angles, lisez angles égaux.

P. 151, l. 16, de même qu'un plan, lisez de même; qu'un plan.

P. 155, l. 18, après d'égale longueur, ajoûtez & qui

ne soient pas posées en ligne droite.

P. 170, l. 3, seroient soujours les mêmes, lisez auroient toûjours la même solidité.

P. 184, l. 13, après égaux, ajoûtez & paralléles.

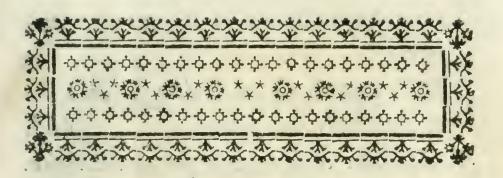


TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

II. I A ligne droite est la plus courte d'un point à un autre, & par conséquent, la mesure de la distance entre deux points. page 2

III. Une ligne qui tombe sur une autre, sans pancher sur elle d'aucun côté, est perpendiculaire à cette ligne:

IV. Le rectangle est une figure de quatre

côtés perpendiculaires les uns	aux au-
tres.	4
Et le quarré est un rectangle	dont les
quatre côtés sont égaux.	ibid.
V. Manière d'élever une perpen	
	ibid.
VI. Le cercle est la trace entière	que décrit
la pointe mobile d'un compas	, pendant
qu'elle tourne autour de l'autr	e pointe. 7
Le centre est le lieu de la pe	
	ibid.
Le rayon est l'intervalle dont	le compas
est ouvert.	_
Le diamètre est le double du ra	
VII. Maniere d'abaisser une p	
laire.	ibid.
VIII. Couper une ligne en des	ux parties
égales.	•
IX. Faire un quarré, ayant son	
X. Faire un rectangle, dont la le	
la largeur sont données.	
XI. Les paralléles sont des lign	
également distantes les unes	

DES MATIERES. iij
Mener une paralléle à une ligne par un
point donné. ibid.
XII. La mesure d'un rectangle est le pro-
duit de sa hauteur par sa base. 13'
XIII. Les figures rectilignes sont celles que
terminent des lignes droites. 14
Le triangle est une figure terminée par
trois lignes droites. ibid.
XIV. La diagonale d'un rectangle est la
ligne qui le partage en deux triangles
égaux.
Les triangles rectangles sont ceux qui
ont deux de leurs côtés perpendiculaires
l'un à l'autre.
Un triangle est la moitié du rectangle
qui a même base & même hauteur. ibid.
Donc sa mesure est la moitié du produit
de sa hauteur par sa base. ibid.
XV. Les triangles qui ont même hauteur
& même base, ont des superficies éga-
les.
XVII. Les triangles qui ont même base,
o qui sont renfermés entre les mêmes
paralléles, sont égaux en superficie. 19
aij

X	VIII. Les parallélogrammes	Son	t des
	figures de quatre côtés, dont	les	deux
	opposés sont paralléles.	٠	20
	On les mesure en multipliant	leur	hau-
	teur par leur base.		ibid.

XIX. Les parallélogrammes qui ont une base commune, & qui sont entre les mêmes paralléles, sont égaux en superficie.

XX. Les poligones réguliers sont des figures que terminent des côtés égaux, & également inclinés les uns sur les autres.

21

XXI. Manière de décrire un poligone d'un nombre déterminé de côtés. 22

Le pentagone a cinq côtés, l'exagone six, l'eptagone sept, l'octogone huit, l'enneagone neuf, le décagone dix, & c. ibid.

XXII. Mesure de la surface d'un poligone régulier. 23 L'apothème est la perpendiculaire abaissée du centre de la figure sur un de ses eôtés. ibid.

DES MATIERES.	V
XXIII. Le triangle équilatéral est	
dont les trois côtés sont égaux.	
	ibid.
XXVI. Connoissant les trois côtés	d'un
triangle, faire un autre triangle qu	ui lui
soit égal.	27
XXVII. Un angle est l'inclinaison e	d'une
ligne sur une autre.	29
XXVIII. Maniére de faire un angle	égal
	ibid.
Deux côtés & l'angle comprisétant	don-
nés, le triangle est déterminé.	30
XXIX. Seconde manière de faire un	a an-
gle égal à un autre.	3 I
La corde d'un arc de cercle, est la a	troite
que terminent les deux extrémit	és de
l'arc.	ibid.
XXX. Deux angles & un côté déte	rmi-
nent le triangle.	3 2
XXXI. Le triangle isocéle, est celui	quia
deux côtés égaux.	bid.
Les angles que ces côtés font ave	ec la
base, sont égaux entr'eux.	33
XXXIV. En quoi consiste la res	Tem-
ajiij	

proportionnelle à trois autres, & comment on la trouve.

XLII. Les hauteurs des triangles semblables, sont proportionnelles à leurs côtés.

XLIV. Les aires des triangles semblables, sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues. 47

XLV. Propriétés des figures semblables, tirées de celles des triangles.

DES MATIERES	S. vij
XLVII. Les aires des figures ser	
sont entr'elles comme les quarré.	
homologues.	
XLVIII. Les figures semblable	
différenciées que par les échell	es sur les-
quelles elles sont construites.	lbid.
L. Manière de mesurer la distance	d'un lieu
inaccessible.	54
LII. Un angle a pour mesure l'ai	rc de cer-
cle qu'interceptent ses côtés.	56
LIII. Le cercle est partagé en 36	o dégrés;
chaque dégré en 60 minutes, &	•
LIV. L'angle droit a 90 dégrés,	
tés sont perpendiculaires l'un	à l'autre.
	58
LV. Un angle aigu est plus petit q	_
gle droit.	ibid.
LVI. Un angle obtus est plus gra	44 4 4
	ibid.
LVII. La somme des angles, fa	
me côté sur une ligne droite,	
le même sommet, vaut 180 dég	
LVIII. Tous les angles qu'on p	_
autour d'un même point, son	
	a iiij

viij TABLE
pris ensemble, à quatre droits. 59
LIX. Usage de l'instrument appellé demi-
cercle, pour prendre la grandeur d'un
angle. ibid.
LX. Usage du rapporteur, pour faire un
angle d'un nombre déterminé de dégrés.
60.
LXIII. Les angles alternes sont les angles
renversés que forme, de part & d'autre,
une ligne droite qui tombe sur deux pa-
ralléles. 64
Ces angles sont égaux. ibid.
LXIV. La somme des trois angles d'un
triangle, est égale à deux droits. 65
LXVIII. L'angle extérieur d'un triangle,
vaut les deux angles intérieurs opposés:
67
LXIX. Un angle d'un triangle isocéle
donne les deux autres. ibid.
LXX. Les angles d'un triangle équila-
téral, sont chacun de soixante dégrés.
68
LXXI. Description de l'exagone. ibid.
LXXII. La moitié de l'angle au centre de

>

DES MATIERES. l'exagone, donne l'angle au centre du dodécagone. LXXIII. Partager un angle en deux également. 70 LXXIV. Description des poligones de 24, 48, &c. côtés. ibid. LXXV. Description de l'octogone. Et des poligones de 16, 32, &c. côtés. 72

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

Eux rectangles qui ont même hauteur, sont en même raison que leurs bases. 76 V. Manière de changer un rectangle en un autre, qui ait une hauteur donnée. 77 VI. Seconde manière de changer un rectangle en un autre, dont la hauteur soit donnée.

78

VII. On démontre rigoureusement que si deux rectangles sont égaux, la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second à la hauteur du premier.

VIII. Si quatre lignes sont telles, que la premiere soit à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme; le restangle formé par la premiere & par la quatriéme sera égal à celui que forment la seconde & la troisiéme.

IX. Quatre quantités, dont la premiere est à la seconde, comme la troisième à la quatrième, sont dites former une proportion.

X. Des quatre termes d'une proportion, le premier & le quatriéme sont nommés extrêmes; on nomme moyens le second & le troisième.

XI. Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. ibid.

XII. Si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre termes

DES MATIERES.	Хj
forment une proportion.	
XIII. De-là on tire la régle de trois	
Ou la manière de trouver le qua	triéme
terme d'une proportion, dont les	s trois
premiers sont donnés.	
XVI. Faire un quarré double d'un	
	86
XVII. Faire un quarré égal à deux	autres
pris ensemble.	
XVIII. L'hypothénuse d'un triang	
tangle est son grand côté.	90
Et le quarré de ce côté est égal à l	
me des quarrés faits sur les deux	autres.
CONTRACTOR OF THE PARTY OF THE	ibid.
XIX. D'où se tire une manière sin	nple de
réduire deux quarrés en un seul.	ibid.
XX. Si les côtés d'un triangle re	Etangle
servent de bases à trois figures s	embla-
bles, la figure faite sur l'hypo	thénuse
égalera les deux autres prises en	semble.
	91
XXI. Réduire plusieurs figures sem	ablables
à une seule.	93
XXIII. Le produit qui résulte de	la mul-

tiplication d'un nombre par lui-même; est le quarré de ce nombre. 95 La racine d'un quarré, est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne le quarré.

96

XXIV. Un nombre est multiple d'un autre, lorsqu'il le contient plusieurs fois exactement. ibid.

Le côté d'un quarré & sa diagonale sont incommensurables.

XXV. Autres lignes incommensurables. ibid.

XXVII. Les triangles & les figures semblables, ont leurs côtés proportionnels, lors même que ces côtés sont incommensurables.

XXVIII. Et ces figures sont toûjours entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.



TROISIE'ME PARTIE.

De la mesure des figures circulaires, & de leurs propriétés.

I. La mesure du cercle est le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.

II. L'aire du cercle est égale à un triangle dont la hauteur est le rayon, & la base une droite égale à la circonférence. ibid.

IV. Le diamétre d'un cercle ayant 7 parties, la circonférence en a près de 22.

109

V. Les circonférences des cercles, sont entr'elles comme leurs rayons. 110

VI. Les aires des cercles sont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons. 111

VII. Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypothénuse vaut les deux autres pris ensemble.

VIII. Une couronne est l'espace enfermé

XIV	TABL	E	
entre deu	ix cercles con	icentriques.	113
Pour mes	surer une cou	ronne, ilfai	ut mul-
tiplier sa	a largeur pa	r la circon	férenc e
moyenne	e P		115
IX. Le seg.	ment de cerci	le est un espa	ace ter-
miné par	r un arc & p	ar sa corde.	116
La mesi	ire de toutes i	les figures ca	irculai-
res se ré	duit à celle a	lu segment.	ibid.
X. Le secte	eur est une po	rtion de cerc	ele, ter-
minée p	par deux ra	yons, & pa	ir l'arc
2 . 7	•	-	•1 • 3

qu'ils comprennent. 1b1d. Sa mesure & celle du segment. ibid.

XI. Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque.

XIII. Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi cercle, on tire deux droites aux extrémités du diamétre, on aura un angle droit. 120

XV. Tous les angles dont le sommet est à la circonférence, & qui s'appuient sur le même arc, sont égaux, & ont, pour commune mesure, la moitié de l'arc sur lequel ils s'appuient.

XVIII. La tangente au cercle, est la li-

DES MATIE	RES. XV
gne qui ne le touche qu'en	
L'angle au segment est ce	elui qui est fait
par la corde & par la tar	ngente. 127
Sa mesure est la moitié de	e l'arc du seg-
ment.	ibid.
IX. La tangente est perp	endiculaire au
diametre qui passe par le	point d'attou-
chement.	
XXI. Ce que c'est qu'un se	
d'un angle donné.	
Manière de faire un se	
d'un angle donné.	
XXII. Trouver la distance	
autres dont les positions	Jont connues.
VVIII Di.C	131
XXIII. Deux cordes se d	
cercle, le rectangle des	
est égal au rectangle des	
Tre. YYIV Le quarré d'une	134
XXIV. Le quarré d'une	
quelconque au diamétre égal au rectangle des	
diamétre.	_
XXV. Changer unrectar	
·	ibid.
	A

xvj TABLE	
XXVI. Ce que c'est qu'une moyenn	e pro-
portionnelle entre deux lignes di	roites.
	136
Manière de la trouver.	137
XXVII. Autre manière.	ibid.
XXVIII. Changer une figure rectilis	
un quarré.	
XXX. Faire un quarré qui soit à un	autre
en raison donnée.	
XXXI. Faire un poligone qui soit e	
son donnée avec un poligone semb	
YYYII Faire un carele qui Coit à :	140
XXXII. Faire un cercle qui soit à u tre cercle en raison donnée.	
XXXIII. Si d'un point pris hors d'u	
cle on tire deux lignes qui le trave	
les rectangles de ces deux droite	
leurs parties extérieures, seront é	
	ibid.
XXXIV. Le quarré de la tanger	
égal au rectangle de la secante p	
partie extérieure:	
XXXV. D'un point donné hors d'u	
cle, lui mener une tangente.	ibid.
QUATRIE	ME

QUATRIEME PARTIE.

De la manière de mesurer les solides & leurs surfaces.

I. T E cube est une sigure solide	terminée
par six quarrés. C'est la	mesure
commune des solides.	147
II. Le parallélipipéde est un solide	terminé
par six rectangles.	148
Les plans paralléles sont ceux	
servent toûjours entr'eux la m	ême dif-
tance.	ibid.
III. Mesure du parallélipipéde.	149
IV. Les parallélipipédes sont prod	luits par
un rectangle qui se meut parallé	~
lui-même.	
V. La ligne perpendiculaire à un	plan, est
celle qui ne panche d'aucun côi	
plan.	ibid.
Il en est de même du plan per	pendicu-
laire à un autre plan.	ibid.
VI. La ligne qui est perpendicula	

b

xviij TABLE
plan est perpendiculaire à toutes les li-
gnes de ce plan, qui partent du point où
elle tombe. 152
VIII. Pratique simple pour élever, ou pour
abaisser des lignes perpendiculaires à des
plans.
IX. Une ligne sera perpendiculaire à un
plan, si elle est perpendiculaire à deux
lignes de ce plan, qui partent du point où
elle tombe. ibid
X. Maniére d'élever un plan perpendicu-
laire à un autre.
XI. Mener un plan parallèle à un autre
ibid
XII. Mesurer l'inclinaison d'un plan sur
un autre.
XIII. Mesurer l'inclinaison d'une ligne sur
un plan.
XIV. Nouvelle manière d'abaisser une li
gne perpendiculaire à un plan donné
158
XV. Seconde manière d'élever une lign
perpendiculaire à un plan donné. ibid

XVI. Le prisme droit est une figure solide,

DEC MATTEDEO .
DES MATIERES. xix
dont les deux bases opposées sont deux
poligones égaux, & les autres faces des
rectangles.
XVII. Formation des prismes droits.
ibid
XIX. Deux prismes, qui ont des bases
égales, sont en même raison que leurs
hauteurs. 160
XX. Deux prismes qui ont la même hau-
teur, sont en même raison que leurs ba-
ses. ibid.
XXI. La mesure du prisme droit est le pro-
duit de sa base par sa hauteur. 162
XXII. Les prismes obliques différent des
prismes droits, en ce que les faces qui
sont des rectangles dans ceux-ci, sont
des parallélogrammes dans ceux-là.
ibid.
XXIII. Formation des prismes obliques.
163
XXIV. Les prismes obliques sont égaux
aux prismes droits, lorsqu'ils ont même
base & même hauteur. 164
XXV. Il en est de même des parallélipipé-
bij

des	obliques	,	à	l'égard	des	parallél	lipi-
	droits.				-		65

XXXII. En quoi consiste la similitude de deux pyramides.

XXXVII. Les pyramides qui ont même base & même hauteur, sont égales. 175

XXXVIII. Deux pyramides sont encore égales, si, ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des poligones semblables, sont égales en superficie. ibid.

XXXIX. Les pyramides qui ont même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases.

XLII. La solidité d'une pyramide quelconque, est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur. 182

XLIII. La pyramide est le tiers du prisme qui a même base & même hauteur.

183

XLV. Le cylindre est un solide terminé par deux bases opposées & paralléles, qui sont des cercles égaux, & par un plan plié autour de leurs circonférences.

184

DES MATIERES.	XXJ.
On le distingue en cylindre droit	, & en
cylindre oblique.	
XLVI. Formation du cylindre.	
XLVII. La surface courbe d'un c	
droit, est égale à un rectangle qu	
même hauteur, & dont la base e	- 1
à sa circonférence.	_
XLIX. Les cylindres, qui ont mê	
& même hauteur, sont égaux en	_
	0.0
L. La mesure d'un cylindre quelco	
le produit de sa base par sa haute	1
LI. Le cone est une espéce de pyr	
dont la base est un cercle.	
LII. On le distingue en cone droi	
cone oblique.	
LIII. La surface d'un cone droit se	mesure
en multipliant la moitié de son	_
la circonférence de sa base.	190
LIV. Le développement d'un cor	_
secteur de cercle.	ibid.
LVI. Les cones qui ont même basé	o me-
me hauteur, sont égaux.	191
LVII. Leur mesure est le produ	

xxij TABL	E
base par le tiers de la h	auteur. ibid.
LIX. Manière de mesur	
cone tronqué.	193
LX. La sphére est le corp	
a tous ses points égals	
centre.	194
LXV. La surface de la	
sure le produit de son	
circonférence de son gra	
LXVI. Ce que c'est que	
sphére.	ibid.
Comment on mesure so	
LXVII. La surface de	
à celle du cylindre circ	
LXVIII. Les tranches	du cylindre & de
Sphére ont la même sup	verficie. ibid.
LXIX. La surface de la	sphére est égale
à quatre fois celle de	son grand cercle.
	204

LXX. La solidité de la sphére est le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle. 205

LXXI. La solidité de la sphére est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit. ibid.

DES MATIERES. xxii;
LXXII. Mesure de la solidité d'un seg-
ment de sphére. 206
LXXIII. En quoi consiste la similitude
de deux corps terminés par des plans.
207
LXXIV. Conditions qui déterminent la
similitude de deux cylindres droits.
208
LXXV. Celle de deux cylindres obliques.
ibid.
LXXVI. Celle des cones. ibid.
LXXVII. Celle de deux cones trônqués.
209
LXXVIII. Les sphéres, les cubes, &
toutes les figures qui ne dépendent que
d'une seule ligne, sont toutes sembla-
bles. ibid.
LXXIX. En général, les solides sembla-
bles ne différent que par les échelles sur
lesquelles ils sont construits. ibid.
LXXX. Les surfaces des solides sembla-
bles sont entr'elles comme les quarrés de
leurs côtés homologues. 210

xxiv TABLE DES MATIERES.

LXXXI. Les surfaces des sphéres sont entr'elles, comme les quarrés de leurs rayons.

LXXXIII. Les solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues. 214

LXXXIV. Les sphéres sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons. 215

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de Gissey.

