Bulletin des sciences mathématiques

tuellement claires, élégantes, et ne comportent pas de longs développements : elles sont plutôt destinées à fournir aux candidats des modèles de composition qu'à augmenter leurs connaissances théoriques, et à éveiller leur curiosité. On peut regretter, de temps en temps, surtout dans un Livre destiné à des élèves, un abus du style elliptique : pourquoi, par exemple, écrire : « Trouver par les imaginaires la valeur d'une intégrale »? Cela pourrait passer dans la conversation, entre gens qui ne se piquent pas de « parler comme des Livres ». Que les Livres, au moins, ne donnent pas le mauvais exemple aux candidats à la licence, qui sont de futurs professeurs. J. T.

MÉLANGES.

NOTE SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ANALYSE;

PAR M. CH. CELLÉRIER [1].

1. *Préliminaires.* — Parmi les principes ordinairement considérés comme évidents, relatifs à la continuité des fonctions, en particulier des séries, à leur intégration, à leur différentiation, etc., il en est qui sont en effet rigoureusement exacts, d'autres ne le sont pas sans exception; nous verrons, par exemple, que les termes d'une série peuvent être fonctions continues d'une variable, la série ellé-même convergente pour toutes les valeurs de la variable comprise entre deux limites, tandis que la somme de la série est discontinue entre ces limites; nous verrons aussi des exemples de fonctions explicites, déterminées et continues pour toutes les va-

[1] Ce Mémoire a été trouvé dans les papiers de M. Cellérier, professeur à Genève, mort l'année dernière.

Il est entièrement écrit de sa main sur un papier jauni par le temps; l'auteur a mis sur la feuille qui le renfermait la suscription que voici : « Très important, et, je crois, nouveau. — Rédaction correcte. Peut être publié tel quel. » Malheureusement, le Mémoire ne porte aucune date, et il sera sans doute impossible de savoir si les résultats essentiels qu'il contient ont été, ou non, obtenus avant ceux leurs de la variable, et qui n'ont jamais de dérivées, ou qui en ont, de sorte que les dérivées de tous les ordres soient elles-mêmes des fonctions continues, mais telles en même temps que, quelle que soit la valeur de la variable, un accroissement de la fonction ne peut être exprimé en fonction de celui de la variable, quelque petit qu'il soit, par la série de Taylor; cette singularité avait déjà été remarquée pour certaines fonctions, mais seulement pour des valeurs particulières de la variable. D'autres fonctions continues se trouvent ne pouvoir être constamment croissantes ou décroissantes pendant que la variable est comprise entre deux valeurs quelconques, quelque peu différentes qu'elles soient. Il est clair que l'examen de ces cas singuliers n'a pas d'autre but que de discerner les principes essentiels à toute fonction de ceux qui ne le sont pas, car pour ces derniers le moyen le plus simple de prouver qu'ils ne sont pas généraux est d'en produire une exception. Mais pour ceux-là il est utile, en outre, de savoir reconnaître par certains caractères, quand

---

que l'on doit à MM. Weierstrass, Schwarz, du Bois-Reymond, Darboux, Dini, etc. Quoi qu'il en soit, ils ont été obtenus indépendamment des travaux que nous venons de rappeler, comme le prouvera la lecture du Mémoire, et en particulier la phrase suivante que l'auteur n'aurait sûrement pas écrite s'il avait eu connaissance des recherches dont les fondements de l'Analyse ont été l'objet depuis une vingtaine d'années : « On pourrait par un raisonnement analogue... démontrer quelques autres propriétés essentielles de toutes les fonctions continues, celles de ne pouvoir passer d'une valeur à une autre sans devenir exactement égale à tout nombre intermédiaire, d'être susceptible d'une valeur maxima et minima qu'elle atteint pour une valeur au moins de la variable, etc. *Ces questions offrent peu d'intérêt...* » Ce passage suffirait, s'il en était besoin, à mettre hors de doute la bonne foi de Cellérier. Comme l'indique la suscription de son Mémoire, celui-ci ne s'était pas trompé sur l'importance des matières qu'il contient, et le lecteur pourra se convaincre que Cellérier avait vu et très bien vu tout ce qu'il y a d'essentiel dans le sujet : notion précise de la continuité, notion de l'unformité dans la continuité des fonctions, dans la convergence des séries, existence du maximum effectivement atteint, existence de l'intégrale pour les fonctions continues, existence de fonctions continues qui n'admettent point de dérivées, et qui ne sont ni croissantes ni décroissantes, tout se trouve dans les quelques pages que nous publions. Les raisonnements sont rigoureux et les exemples simples : aujourd'hui encore, malgré tous les travaux dont la matière a été l'objet, le Mémoire de Cellérier, en changeant quelques termes, et en ajoutant quelques indications que nous avons cru inutile de signaler, constituerait tout au moins une excellente *leçon* sur les principes de l'Analyse.

Nous nous bornerons à remarquer que l'exemple donné par l'auteur d'une fonction continue qui n'admet point de dérivée, exemple qui se prête à une déon les emploie, qu'on ne tombe point dans un cas d'exception. C'est ce que nous avons pu faire pour les séries, comme on le verra, par une règle simple en pratique, celle de la convergence commune.

Une règle analogue, relative à la propriété d'avoir une dérivée, serait difficile à trouver.

Il nous arrivera plusieurs fois de considérer un nombre comme limite d'autres nombres g_1, g_2, g_3, ... allant en croissant, en nombre infini, mais n'augmentant point à l'infini. Pour préciser ce mode de détermination, il faut remarquer que si g_1, g_2, ..., au lieu d'être des nombres abstraits, sont des grandeurs concrètes, il suffit qu'elles ne croissent point à l'infini pour qu'elles approchent d'une limite λ de même espèce, de sorte que, γ étant aussi petite qu'on voudra, la suite g_1, g_2, ... soit constamment, à partir d'un certain rang, comprise entre λ et $\lambda - \gamma$. C'est sur cette propriété qu'est basée la notion du nombre en général, ou du signe qui indique

---

monstration très naturelle, est très voisin de l'exemple classique dû à M. Weierstrass et signalé par M. du Bois-Reymond dans le t. 79 du *Journal de Crelle*, savoir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n x \pi),$$

où a est un entier impair et b un nombre positif tel que l'on ait

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

La fonction choisie par Cellérier est la suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin a^n x}{a^n}.$$

La même série fournit un exemple de fonction continue qui n'est ni croissante ni décroissante. M. Darboux avait signalé, dans cet ordre d'idées, la fonction

$$\Sigma a_n (\sin n x \pi)^{\frac{2}{3}},$$

en supposant la série Σa_n absolument convergente (*Annales de l'École Normale*, année 1875).

le mode de formation de la grandeur au moyen de son unité : l'expression la plus simple de ce signe est un nombre décimal dont les chiffres se prolongent à l'infini suivant une loi fixe. Le signe une fois fixé, les nombres $g_1, g_2, \ldots$, substitués aux grandeurs, déterminent encore un nombre unique λ.

2. *Continuité des fonctions.* — Une fonction d'une variable x est un nombre qui en dépend suivant une loi fixe, exprimable ou non par les signes usuels. Désignons par $f(x)$ une fonction qui reste finie et déterminée pendant que x croît de α à β. Nous disons qu'elle est continue pour une valeur particulière $x=c$ lorsque, étant donné un nombre γ aussi petit que l'on voudra, on peut toujours en trouver un autre h tel qu'on ait $f(x)-f(c)<\gamma$ quand $x-c<h$, ces inégalités étant simplement numériques. On suppose en outre dans ces énoncés que x, comme c, est astreint à être compris entre α et β ou égal à l'un d'eux. Nous exprimerons en abrégé cette propriété en disant que la limite h *convient* à cette valeur $x=c$.

On dit que la fonction est continue de α à β si elle l'est pour chaque valeur particulière de x comprise dans cet intervalle.

Une autre manière de concevoir la continuité consisterait à dire que, quelque petit que soit γ, on peut toujours trouver un nombre h tel qu'on ait $f(x)-f(y)<\gamma$ quand $x-y<h$, x et y étant compris entre α et β, du reste quelconques. Cela revient à dire qu'on peut trouver une limite h convenant à la fois à toutes les valeurs de x. Ce nouvel énoncé n'est point tout à fait équivalent au précédent, et même il n'en est point la conséquence nécessaire dans le cas où la fonction est déterminée pour les valeurs rationnelles de x seulement. Dans ce cas, les définitions précédentes ont un sens tout aussi précis, pourvu que chaque valeur particulière c, x, y soit supposée rationnelle ; mais l'expression $\frac{1}{a-x}$, en supposant que a est une constante irrationnelle, nous donne l'exemple d'une fonction qui est continue pour toute valeur rationnelle de x, sans qu'une même valeur de h puisse convenir à toutes.

Il en est autrement dans le cas ordinaire où la fonction est déterminée aussi bien pour les valeurs irrationnelles de la variable. En effet, supposons pour un instant que, γ étant donné, aucune limite h ne pût convenir à la fois à toutes les valeurs de x comprises entre α et β. Alors si nous partageons l'intervalle de α à β en un nombre arbitraire n d'intervalles égaux, il faudra admettre que la même anomalie aura lieu pour l'un d'eux, de sorte qu'en nommant α_1 et β_1 ses limites, aucune valeur de h ne pourra convenir à la fois à toutes les valeurs de x contenues entre α_1 et β_1. S'il en était autrement, en effet, et que pour chacun des intervalles une certaine limite h pût convenir, la plus petite conviendrait à l'intervalle entier de α à β. Nous supposerons, pour que α_1 et β_1 soient entièrement déterminés, que quand x croît à partir de α, l'intervalle de α_1 à β_1 est le premier qui ait ce caractère. Cela posé, partageons-le encore en n intervalles égaux; l'un d'eux, de α_2 à β_2, présentera encore la même anomalie qu'aucune valeur de h ne peut convenir à la fois à toutes les valeurs de x qu'il contient, et nous admettrons encore que ce soit le premier qui se trouve dans ce cas quand x croît à partir de α_1; nous le partagerons encore en n parties, et ainsi de suite à l'infini. Or les nombres α_1, α_2, α_3, ... sont parfaitement déterminés par la règle qui précède, ils sont en nombre infini, vont en croissant (ou du moins non décroissant), mais non à l'infini. Il y a donc un certain nombre c qui en est la limite, et celui-là devrait jouir de la propriété qu'en prenant θ aussi petit que l'on voudra, aucune limite h ne pourrait convenir à la fois à toutes les valeurs de x comprises entre $c+\theta$ et $c-\theta$; c'est ce qui est impossible, car, la fonction étant continue pour $x=c$, on peut trouver un nombre $2h$ tel que si x est compris entre $c\pm 2h$, on ait

$$f(x)-f(c)<\frac{1}{2}\gamma,$$

et il en résulte que, pour toute valeur de x comprise entre $c\pm h$, la limite h peut convenir; en effet, si b est une de ces valeurs, et que x soit compris entre $b\pm h$, il le sera entre $c\pm 2h$, et par suite on aura

$$f(x)-f(c)<\frac{1}{2}\gamma, \qquad f(c)-f(b)<\frac{1}{2}\gamma;$$

d'où

$$f(x)-f(b)<\gamma,$$

contrairement à l'hypothèse.

On pourrait par un raisonnement analogue, c'est-à-dire en partageant $\beta - \alpha$ en intervalles de plus en plus petits, et considérant le nombre déterminé par la suite de leurs limites inférieures, démontrer quelques autres propriétés essentielles de toutes les fonctions continues, celles de ne pouvoir passer d'une valeur à une autre sans devenir exactement égale à tout nombre intermédiaire, d'être susceptible d'une valeur maxima et minima qu'elle atteint pour une valeur au moins de la variable, etc. Ces questions offrent peu d'intérêt, vu leur évidence. Nous remarquerons seulement que l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

a un sens absolument déterminé, en désignant par $f(x)$ la fonction. Si l'on partage l'intervalle $\beta - \alpha$ en n parties égales, puis chacune en n autres, et ainsi de suite à l'infini, on peut faire correspondre une somme de produits dont chacun est celui de la valeur commune de l'intervalle, par la valeur minima de la fonction quand la variable s'y trouve comprise; la somme de ces produits correspondant à chaque intervalle étant désignée par s_1 pour le premier mode de partage, par s_2 pour le deuxième, et ainsi de suite, ces nombres $s_1, s_2, s_3, \ldots$ formés suivant une loi déterminée, sont en nombre infini, constamment croissants, et la limite dont ils s'approchent est l'intégrale ci-dessus.

3. *Continuité des séries.* — Une série est dite *convergente* lorsqu'il existe un nombre s tel que, étant donné un nombre γ aussi petit qu'on voudra, la somme des termes devienne, dès que l'on dépasse un certain rang, constamment comprise entre $s \pm \gamma$.

Une série convergente peut changer de valeur ou même devenir divergente lorsque l'on change l'ordre des termes sans en omettre aucun; c'est ce qui arrive, par exemple, quand, dans la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \ldots$, sans omettre aucun des termes négatifs, on les espace davantage pour intercaler entre eux plusieurs termes positifs; aussi, dans les énoncés suivants, est-il nécessaire de préciser entièrement ce que l'on entend par le premier terme, le deuxième, etc., sans opérer aucune réduction entre un terme et ceux qui le suivent ou le précèdent.

Supposons que chaque terme soit une fonction déterminée et continue d'une variable x pendant qu'elle varie de α à β. Supposons en outre que la série soit convergente pour chaque valeur de x, c'est-à-dire qu'en désignant par le reste de la série la différence entre la somme d'un certain nombre de termes et la somme totale, on puisse pour chaque valeur de x assigner un nombre n de termes tel qu'en en prenant ou n ou un plus grand nombre, le reste soit inférieur à toute quantité donnée γ. Nous l'exprimerons en abrégé, en disant que le nombre n convient à une certaine valeur de x.

Quoique l'on regarde en général la somme de la série comme fonction continue de x quand elle satisfait les conditions précédentes, on peut s'assurer qu'il n'en est pas toujours ainsi par l'exemple suivant, où les termes sont les expressions entre parenthèses

$$(1+x)+\left[\frac{x}{2}+x(1-x^2)\right]+\left[\frac{x^2}{4}+x(1-x^2)^2\right]+\left[\frac{x^3}{8}+x(1-x^2)^3\right]+\ldots,$$

de sorte que le terme général est

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n+x(1-x^2)^n.$$

Chaque terme est une fonction continue; la série est convergente quand x est compris entre $\pm\sqrt{2}$; mais, comme elle ne l'est pas à ces limites, bornons-nous à faire varier x de -1 à $+1$; pour $x=1$, les termes sont

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots,\quad 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ldots;$$

la série est également convergente pour $x=0$, les termes étant nuls depuis le second; or une semblable série satisfait rigoureusement à la condition de convergence. Pour toute autre valeur de x, la série est la somme de deux progressions convergentes, dont la raison est $\frac{1}{2}x$, $1-x^2$, et a pour valeur

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{x};$$

elle est par suite discontinue pour $x=0$.

Une série dont les termes sont fonctions continues entre $x = \alpha$, $x = \beta$ sera aussi fonction continue entre ces limites si elle satisfait ce que nous nommerons la *condition de convergence commune*, c'est-à-dire si, quel que soit γ, on peut trouver un nombre n qui convienne à la fois à toutes les valeurs de x. C'est ce qui n'a pas lieu pour la précédente; car, en n'y prenant que n termes, le reste est

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}} + \frac{(1-x^2)^n}{x};$$

or, quelque grand que soit n, il y aura toujours de petites valeurs de x pour lesquelles il dépassera γ.

Mais si la condition est satisfaite, alors, en désignant par $f(x)$ la somme de la série, par $f_n(x)$ celle des n premiers termes, on pourra choisir n de manière qu'à la fois pour toutes les valeurs de x le reste $f(x) - f_n(x)$ soit $< \frac{1}{3}\gamma$; puis, $f_n(x)$ étant une fonction continue, on pourra trouver aussi une limite h telle que l'on ait $f_n(x) - f_n(y) < \frac{1}{3}\gamma$ quand $x - y < h$; alors la limite h conviendra à la fonction $f(x)$, car si $x - y < h$, on aura

$$f(x) - f_n(x) < \frac{1}{3}\gamma, \qquad f_n(x) - f_n(y) < \frac{1}{3}\gamma, \qquad f_n(y) - f(y) < \frac{1}{3}\gamma;$$

et par suite

$$f(x) - f(y) < \gamma.$$

Par exemple, pour s'assurer que le développement de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ ou

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \ldots$$

converge bien vers la limite

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots$$

quand m croît d'une manière continue à l'infini, on peut considérer $\frac{1}{m}$ comme étant la variable, et il suffit de constater la convergence commune; elle résulte d'ailleurs de ce que le rapport du terme de rang $n+1$ au précédent est inférieur à $\frac{1}{n}$ s'il est positif, à $\frac{1}{m}$ s'il est négatif.

La condition de convergence commune est suffisante, mais non nécessaire, pour que la somme de la série soit fonction continue; c'est ce que l'on peut vérifier par l'exemple suivant, où les termes sont les expressions entre parenthèses

$$(1+xe^{-x^2})+\left(\frac{x}{1}+2xe^{-2x^2}-xe^{-x^2}\right)+\left(\frac{x^2}{1.2}+3xe^{-3x^2}-2xe^{-2x^2}\right)+\ldots,$$

de sorte que le terme général est

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+(n+1)xe^{-(n+1)x^2}-nxe^{-nx^2}.$$

En effet, les termes sont fonctions continues, quel que soit x; pour $x=0$, la somme se réduit à 1; pour toute autre valeur, la somme des n premiers est

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+nxe^{-nx^2},$$

et converge, quand n augmente, vers e^x: en effet, si, pour un instant, on fait croître n d'une manière continue, quand il augmente de 0 à $\frac{1}{x^2}$, et de $\frac{1}{x^2}$ à l'infini, nxe^{-nx^2} croît de 0 à $\frac{1}{ex}$ et décroît ensuite jusqu'à 0. La somme e^x, devenant 1 pour $x=0$, est par suite continue. Toutefois la condition de convergence commune n'est pas satisfaite; car, quelque grand que soit n, on pourra prendre x assez petit pour que la valeur $\frac{1}{x^2}$ de n, qui rend le principal terme du reste maximum, soit encore plus grande, et par suite, en prenant un plus grand nombre de termes, on aurait un reste peu différent de $\frac{1}{ex}$ et qui peut être très considérable.

4. *Intégration et différentiation des séries.* — Représentons toujours par $f(x)$ la somme d'une série convergente dont les termes sont fonctions continues de x quand cette variable croît de α à β. S'il y a une convergence commune, alors les intégrales des termes prises entre deux limites comprises entre α et β auront pour somme

$\int f(x)\,dx$ prise entre les mêmes limites : il suffit évidemment de le démontrer en supposant que ces dernières soient α et β elles-mêmes. Or, quelque petit que soit γ, on peut choisir n' de manière que, si le nombre n des termes est supérieur ou égal à n', en nommant $f_n(x)$ leur somme, on ait

$$f(x)-f_n(x)+\gamma = \text{ou} > 0, \qquad f(x)-f_n(x)-\gamma = \text{ou} < 0;$$

d'où résulte

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx + \gamma(\beta-\alpha) = \text{ou} > 0,$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx - \gamma(\beta-\alpha) = \text{ou} < 0;$$

d'où résulte évidemment que $\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx$, c'est-à-dire la somme des intégrales des termes successifs, converge vers $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, quand n augmente.

La propriété relative à la différentiation résulte de celle-là ; car, si $f(x)$, $f'(x)$ sont les sommes des deux séries dont les termes sont fonctions continues de x entre α et β, si de plus elles ont entre ces limites une convergence commune, et que les termes de la seconde soient les dérivées de ceux de la première, on pourra en conclure que $f'(x)$ est la dérivée de x. En effet, si a et $a+h$ sont deux nombres quelconques compris entre α et β, en nommant $f_n(x)$, $f'_n(x)$ la somme des n premiers termes de chaque série, on aura

$$\int_a^{a+h} f'_n(x) = f_n(a+h) - f_n(a).$$

Or le premier nombre, quand n augmente, diffère aussi peu que l'on voudra, comme on l'a vu, de $\int_a^{a+h} f'(x)\,dx$, tandis que le second converge vers $f(a+h)-f(a)$; il en résulte

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f'(x)\,dx.$$

Or, en prenant h très petit, il est aisé de voir que le second membre diffère aussi peu que l'on voudra de $f'(a)$ qui est bien, par suite, la dérivée de $f(x)$ pour $x=a$; cette valeur a est d'ailleurs un nombre quelconque compris entre α et β.

S'il n'y a pas convergence commune, il est remarquable que la première de ces deux propriétés se trouve en défaut même pour la seconde série que nous avons prise pour exemple, quoique la somme soit fonction continue; en effet, on a dans ce cas

$$\int_0^x f_n(x) = \left(\frac{x}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)+\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{1}{2}e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-2x^2}\right)+\ldots$$
$$=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1\ldots n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-nx^2},$$

qui converge, quand n est très grand, vers $e^x-\frac{1}{2}$, tandis que

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x e^x\,dx=e^x-1.$$

5. *Exemple de fonctions faisant exception aux règles usuelles.* — Considérons la fonction donnée par la série suivante

$$f(x)=\frac{\sin ax}{a}+\frac{\sin a^2x}{a^2}+\frac{\sin a^3x}{a^3}+\ldots=\sum\frac{\sin a^nx}{a^n},$$

dans laquelle a est un entier constant que nous supposerons positif et très grand. La série étant plus convergente que la progression $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots$, il est clair qu'elle a une convergence commune entre deux valeurs quelconques de x, et que, par suite, $f(x)$ est une fonction continue.

Cette série nous fournira un exemple soit d'une fonction qui n'a jamais de dérivée, soit d'une fonction qui n'a jamais aucune période de croissance ou de décroissance; ces propriétés seront plus aisées à vérifier en supposant a pair pour la première et impair pour la seconde. Dans les deux cas, nous supposerons $a>1000$, et nous poserons aussi, i étant un exposant positif qui sera pris très grand,

$$k_i=\frac{f\left(x+\frac{2\pi}{a^i}\right)-f(x)}{\frac{2\pi}{a^i}}.$$

Il est clair que, dans cette expression, les termes dans lesquels $n =$ ou $> i$ disparaîtront, et l'on pourra écrire

$$k_i = \sum_1^{i-1} \cos(a^n x) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a^{i-n}}\right)}{\frac{2\pi}{a^{i-n}}} - \sum_1^{i-1} \sin(a^n x) \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{a^{i-n}}\right)}{\frac{2\pi}{a^{i-n}}};$$

puis dans la seconde somme chaque terme est numériquement inférieur à $\frac{1}{2}\frac{2\pi}{a^{i-n}}$, et par suite la somme entière a la progression indéfinie $\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{a^2} + \ldots = \frac{\pi}{a-1}$. Dans la première somme, si l'on remplace les sinus par les angles, l'erreur commise sur chaque terme est également inférieure à $\frac{1}{6}\left(\frac{2\pi}{a^{i-n}}\right)^2$ et par suite, sur la somme, elle l'est au produit de la précédente par $\frac{2}{3}\frac{\pi}{a}$, d'où résulte que nous pourrons poser

$$k_i = \cos(ax) + \cos(a^2 x) + \cos(a^3 x) + \ldots + \cos(a^{i-1} x) + \frac{\theta}{a-1},$$

θ étant compris entre ± 4.

Supposons maintenant a pair et posons

$$k'_i = \frac{f\left(x + \frac{\pi}{a^i}\right) - f(x)}{\frac{\pi}{a^i}};$$

les termes dans lesquels $n > i$ disparaissent encore dans cette différence; le terme de rang i donne $-\frac{2\sin(a^i x)}{\pi}$, de sorte qu'on aura

$$k'_i = \sum_1^{i-1} \cos(a^n x) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a^{i-n}}\right)}{\frac{\pi}{a^{i-n}}} - \sum_1^{i-1} \sin(a^n x) \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{a^{i-n}}\right)}{\frac{\pi}{a^{i-n}}} - \frac{2\sin(a^i x)}{\pi}.$$

On verrait encore que la seconde somme est numériquement inférieure à

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots\right) = \frac{\pi}{2(a-1)},$$

et qu'en remplaçant dans la première les sinus par les angles, l'erreur qui en résulte est une très petite fraction de l'expression précédente. On aura, par suite,

$$k'_i = \cos(ax) + \cos(a^2 x) + \cos(a^3 x) + \ldots$$
$$+ \cos(a^{i-1} x) + \frac{\theta'}{a-1} - \frac{2\sin(a^i x)}{\pi},$$

θ' étant compris entre ± 2.

Or s'il arrivait que, pour une certaine valeur de x, la fonction $f(x)$ eût une dérivée $f'(x)$, cela supposerait que, γ étant aussi petit qu'on voudrait, l'expression

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

fût comprise entre $f'(x) \pm \gamma$, toutes les fois que $y - x$ serait numériquement inférieure à une certaine limite h; d'où résulterait que les expressions k_i, k'_i devraient, quand i augmente, converger vers une même limite et, par suite, $k_{i+1} - k_i$, $k_i - k'_i$ vers o; or on a

$$k_{i+1} - k_i = \cos(a^i x) + \frac{\theta''}{a-1}, \qquad k_i - k'_i = \frac{2}{\pi}\sin(a^i x) + \frac{\theta'''}{a-1},$$

en désignant par θ'', θ''' la somme algébrique de deux quantités analogues, de sorte que θ'' est compris entre ± 8, et θ''' entre ± 6; il faudrait donc que

$$\cos(a^i x) + \frac{\theta''}{a-1}, \quad \sin(a^i x) + \frac{\frac{\pi}{2}\theta'''}{a-1}$$

devinssent à la fois aussi petits qu'on voudra quand i croît à l'infini.

Or c'est impossible, puisque, leurs seconds termes étant de très petites fractions, la somme de leurs carrés diffère toujours très peu de l'unité.

Supposons maintenant a impair, nous allons démontrer que la fonction ne peut jamais être constamment croissante ni constamment décroissante pendant que x croît de α à β, quels que soient ces deux nombres. En effet, nous pouvons choisir l'entier μ assez grand pour qu'on ait

$$a^{\mu}(\beta-\alpha) > 6\pi,$$

et il en résultera que, pendant que x croît de α à β, le produit $a^{\mu}x$ devient au moins six fois un multiple exact de π; soient x' la plus petite valeur de x pour laquelle cela a lieu, x'' la suivante; comme il y en a plusieurs encore, il en résulte

$$\beta - x'' > 2(x''-x') \quad \text{ou} \quad 2\frac{\pi}{a^{\mu}};$$

par suite,

$$x'+\frac{2\pi}{a^{\mu}}, \quad x''+\frac{2\pi}{a^{\mu}}$$

sont compris entre α et β, et il en sera de même *a fortiori* de

$$x'+\frac{2\pi}{a^{i}}, \quad x''+\frac{2\pi}{a^{i}},$$

en supposant $i > \mu$. Or x' et x'' étant aussi compris entre α et β, il résulterait de notre hypothèse que

$$f\left(x'+\frac{2\pi}{a^{i}}\right)-f(x'), \qquad f\left(x''+\frac{2\pi}{a^{i}}\right)-f(x'')$$

devraient avoir le même signe; il en serait, par suite, de même des valeurs de k_i en y substituant $x = x'$, $x = x''$. Or ces deux valeurs se composent chacune des trois expressions suivantes

$$k_i = \frac{0}{a-1} + \sum_{1}^{\mu-1}\cos(a^n x) + \sum_{\mu}^{i-1}\cos(a^n x),$$

dont la première est une très petite fraction, la deuxième est numériquement inférieure à $\mu-1$, quel que soit i; quant à la troisième, les valeurs de $a^n x$, étant le produit de $a^{\mu}x$ par un entier impair, deviendront toutes à la fois un multiple pair de π pour l'une des valeurs $x = x'$ ou x'', et un multiple impair pour l'autre, ce qui donne

$$i-1-\mu, \quad -(i-1-\mu),$$

dans les deux cas; or on peut prendre i assez grand pour que le signe de k_i soit celui de cette partie de sa valeur; par suite, k_i sera de signe contraire dans les deux cas, contrairement à l'hypothèse.

6. *Remarques sur la série de Taylor.* — Observons que, si une série convergente a tous ses termes positifs, on peut à volonté changer leur ordre, en réunir plusieurs en un seul, ou réciproquement remplacer un seul par d'autres tous positifs, dont il est la somme; on peut aussi mettre à part des termes en nombre infini, la somme des deux séries formées soit par ceux-là, soit par ceux qui restent reproduit la primitive. Convenons, pour abréger, de dire qu'une série est *numériquement* convergente lorsqu'elle a des termes positifs et négatifs, mais reste convergente en les prenant tous avec le signe $+$. Dans ce cas également, on peut changer à volonté l'ordre des termes, remplacer quelques-uns d'entre eux, même en nombre infini, par un seul égal à leur somme, et en répétant l'opération, remplacer la série primitive par une autre dont les termes soient eux-mêmes des séries. Il suffit que tout terme, choisi à volonté dans l'ordre ancien, ait sa place déterminée dans l'ordre nouveau.

Considérons maintenant une fonction quelconque $f(x)$, et supposons que $f(x+t)$ soit développable par la série de Taylor suivant les puissances de t lorsque x a une valeur particulière $x=a$, et que l'accroissement t a une valeur quelconque inférieure à une certaine limite k. Soit θ un nombre numériquement inférieur à k, nous allons démontrer que $f(x+t)$ est encore développable suivant les puissances de t lorsque $x=a+\theta$, pourvu que, en désignant par θ', t' les valeurs numériques de θ et t quand elles sont négatives, on ait

$$\theta'+t'<k;$$

en effet, nommons c, c_1, c_2, ... les valeurs que prennent $f(x)$ et ses dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, quand on y pose $x=a$: comme $\theta+t$ est numériquement inférieur à k, on aura

$$f(a+\theta+t)=c+c_1\frac{\theta+t}{1}+c_2\frac{(\theta+t)^2}{1.2}+c_3\frac{(\theta+t)^3}{1.2.3}+\ldots,$$

de sorte que la série sera convergente et donnera bien la valeur de la fonction; la série reste convergente, par hypothèse, quand on y remplace $\theta+t$ par k; les termes, dans ce cas, étant tous inférieurs à un certain maximum M, il en résulte que, si l'on remplace $\theta + t$ par $\theta' + t'$, le terme général sera inférieur à

$$M\left(\frac{\theta' + t'}{k}\right)^n,$$

et comme nous supposons $\theta' + t'$ différent de k et plus petit, il en résulte que, même en y remplaçant $c, c_1, \ldots$ par leurs valeurs positives s'il y en a de négatifs, la série resterait convergente; il en serait, par suite, de même si l'on remplaçait chaque puissance $(\theta' + t')^n$ par son développement, ou le terme quelconque par $n+1$ différents (¹).

De là résulte que la série qui exprime $f(a+\theta+t)$ quand on y remplace de même le terme contenant $(\theta+t)^n$ par $n+1$ différents est numériquement convergente; on peut, par suite, sans changer sa somme, grouper autrement les termes et écrire

$$\begin{aligned} f(a+\theta+t) = {} & \left(c + c_1\frac{\theta}{1} + c_2\frac{\theta^2}{1.2} + c_3\frac{\theta^3}{1.2.3}\right) \\ & + \frac{t}{1}\left(c_1 + c_2\frac{\theta}{1} + c_3\frac{\theta^2}{1.2} + \ldots\right) \\ & + \frac{t^2}{1.2}\left(c_2 + c_3\frac{\theta}{1} + c_4\frac{\theta^2}{1.2} + \ldots\right) + \ldots \end{aligned}$$

Les séries successives précédentes sont numériquement convergentes; si, dans l'une d'elles, on prend $\theta, c_1, c_2, c_3, \ldots$ tous avec le signe $+$, elle a évidemment une convergence commune quand θ diminue jusqu'à o, puisque, alors, le reste de la série, quand on prend n termes, ne fait que décroître. Cette limite supérieure, du reste, ne peut être que trop forte quand on restitue à $\theta, c_1, \ldots$ leurs signes; ainsi la série a encore une convergence commune, d'où résulte que celles qui servent de coefficient à $\frac{t}{1}, \frac{t^2}{1.2}, \cdots$ sont bien les dérivées successives de la première par rapport à θ; or, celle-ci est $f(a+\theta)$; on aura, par suite,

$$f(a+\theta+t) = f(a+\theta) + f'(a+\theta)\frac{t}{1} + f''(a+\theta)\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

C. Q. F. D.

(¹) Ici et deux lignes plus bas, l'auteur veut dire que l'on remplace le terme *unique* de rang $n+1$ par les $n+1$ termes *distincts* qui résulteraient de son développement.

Ce qui précède suppose que, pour $x = a$, la série qui exprime $f(a+t)$ non seulement est convergente, mais représente bien la fonction; on admet qu'il en est ainsi, en général, quand l'accroissement t est au-dessous d'une limite k suffisamment petite, ou du moins qu'il n'y a d'exception que pour certaines valeurs particulières de x. Nous allons toutefois donner un exemple d'une fonction pour laquelle cela n'a jamais lieu; savoir la suivante

$$f(x) = \frac{\sin(gx)}{1} + \frac{\sin(g^2x)}{1.2} + \frac{\sin(g^3x)}{1.2.3} + \frac{\sin(g^4x)}{1.2.3.4} + \ldots,$$

dans laquelle g est un entier positif très grand. Les séries formées par les dérivées successives des termes donnent bien celles de la fonction, c'est-à-dire on a bien

$$f'(x) = \frac{g\cos(gx)}{1} + \frac{g^2}{1.2}\cos(g^2x) + \frac{g^3}{1.2.3}\cos(g^3x) + \ldots,$$

$$f''(x) = -\frac{g^2}{1}\sin(gx) - \frac{g^4}{1.2}\sin(g^2x) - \ldots,$$

car les termes de $f^{(n)}(x)$ sont numériquement inférieurs à $\frac{g^n}{1}$, $\frac{g^{2n}}{1.2}$, $\frac{g^{3n}}{1.2.3}$, ou à ceux de la série e^{g^n}; chacune de ces séries, y compris $f(x)$, a, par suite, une convergence commune entre deux valeurs quelconques de x.

Or, s'il arrivait que, pour une certaine valeur $x = a$, la série de Taylor donnât la valeur exacte de $f(a+t)$ quand $t < k$, elle donnerait, comme on l'a vu, aussi celle de $f(x+t)$ quand $x = a + \theta$, θ et t étant deux nombres que nous supposerons positifs, toutes les fois que $\theta + t < k$; ou en désignant $\frac{1}{2}k$ par h, cela arriverait toutes les fois que x est compris entre a et $a+h$, et que $t < h$. Or on peut prendre l'entier μ assez grand pour que x croissant de a à $a+h$, $g^\mu x$ passe par une valeur multiple de 2π; donnant à x la valeur correspondante, on devrait avoir

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\frac{t}{1} + f''(x)\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

Nous allons prouver, au contraire, que les termes de celle-là croissent sans limite, quel que soit t. En effet, en supposant n

impair, on aura

$$\frac{t^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}x = \pm \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{g^n}{1}\cos(gx) + \frac{g^{2n}}{1.2}\cos(g^2x) + \ldots\right],$$

$$\begin{aligned}\pm \frac{t^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}x = \frac{t^n}{1.2\ldots n}\Bigg\{ & \frac{g^n}{1}[\cos(gx) - 1] \\ & + \frac{g^{2n}}{1.2}[\cos(g^2x) - 1] + \ldots \\ & + \frac{g^{(\mu-1)n}}{1\ldots(\mu-1)}[\cos(g^{\mu-1}x) - 1]\Bigg\} \\ & + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{g^n}{1} + \frac{g^{2n}}{1.2} + \frac{g^{3n}}{1.2.3} + \ldots\right),\end{aligned}$$

en remarquant que $\cos(g^\mu x)$, $\cos(g^{\mu+1}x)$, ... sont l'unité.

La première partie de cette expression est inférieure à

$$\frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(2\frac{g^n}{1} + 2\frac{g^{2n}}{1.2} + \ldots\right),$$

et *a fortiori* à

$$\frac{2(tg^{\mu-1})^n}{1.2\ldots n},$$

laquelle décroît sans limite quand n augmente; la seconde partie est

$$\frac{(e^{g^n} - 1)t^n}{1.2\ldots n},$$

laquelle croît à l'infini, puisque, en laissant de côté le terme -1, remplaçant n par $n+1$, le rapport des valeurs est

$$\frac{e^{g^n(g-1)}t}{n+1},$$

lequel lui-même croît à l'infini.

Il ne résulte pas de ce qui précède que la série de Taylor pour cette fonction soit toujours divergente. Supposons, par exemple, que g soit un nombre impair de la forme $4i+3$, de sorte que g^3, g^5, ... aient cette même forme, et g^2, g^4, ... la forme $4i+1$. Alors, en posant $x = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad \ldots$$

et

$$f(x) = -\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}, \quad \ldots, \quad f''(x) = \frac{g^2}{1} - \frac{g^4}{1.2} + \frac{g^6}{1.2.3}, \quad \ldots$$

et, en général, n étant pair,

$$\pm f^{(n)}x = \frac{g^n}{1} - \frac{g^{(2n)}}{1.2} + \frac{g^{(3n)}}{1.2.3} - \ldots = 1 - e^{-g^n},$$

ce qui donne, pour la série de Taylor,

$$(e^{-1} - 1) - \frac{t^2}{1.2}(e^{-g^2} - 1) + \frac{t^4}{1.2.3.4}(e^{-g^4} - 1) - \ldots,$$

série convergente, quel que soit t, mais qui, comme nous l'avons prouvé, ne peut point représenter la fonction $f(x+t)$.