



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

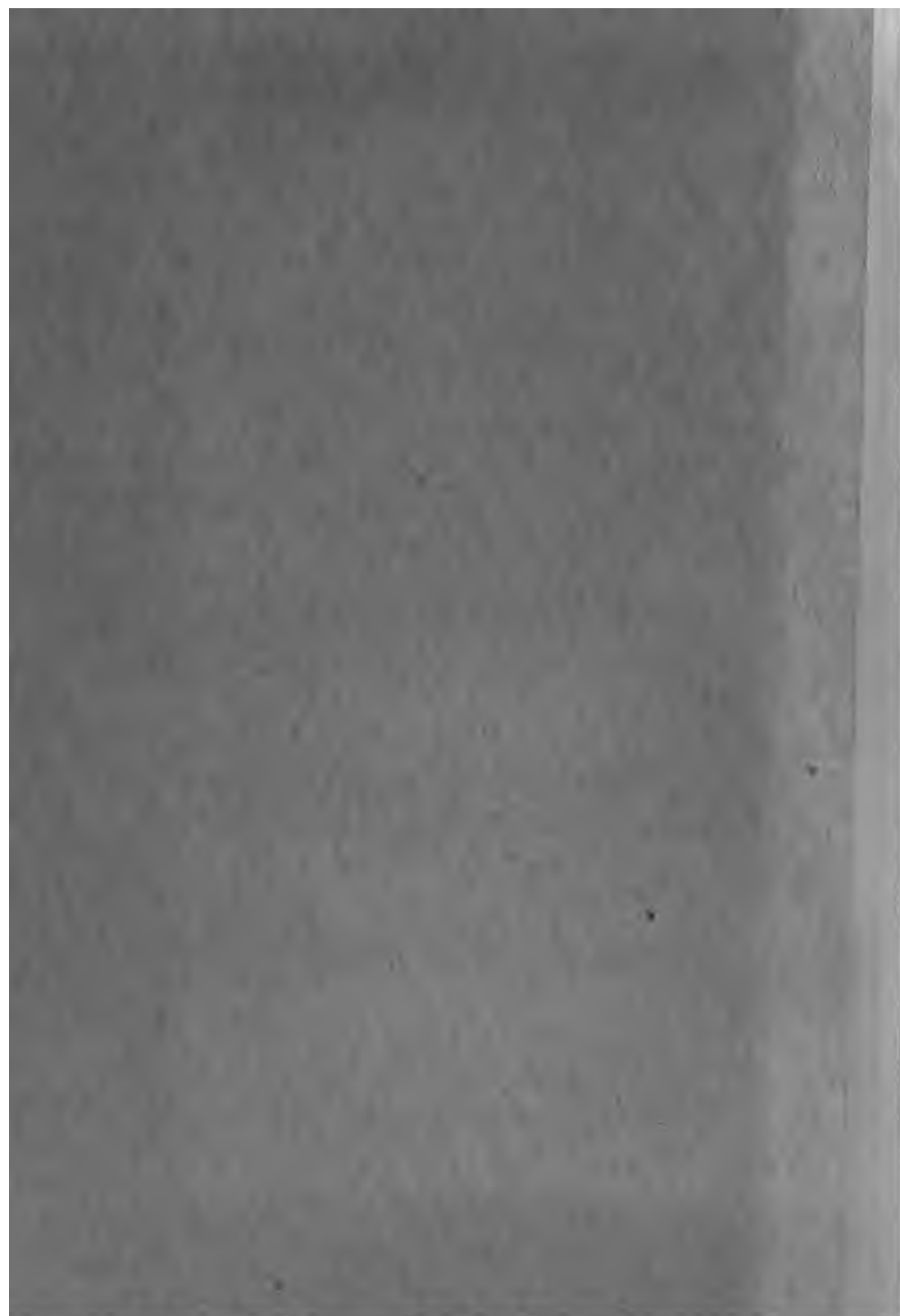
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



3 3433 06908273 7



Boys' 11
11



~~12-19-19~~

12-19-19

~~10-11-17~~

13-10-1967
2114

T R A I T É
D U
CALCUL INTÉGRAL,

POUR SERVIR DE SUITE

A L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS

DE M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL;

*Par M. DE BOUGAINVILLE, de la Société Royale
de Londres.*

SECONDE PARTIE.



A P A R I S,
Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR,
rue Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin.

M. D C C. L V I.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

PROV WAB
JUL
YEL

AVANT-PROPOS.

JE m'acquiesce avec autant d'empressement que de reconnaissance de mes engagements envers le Public. L'accueil favorable qu'il a fait à la première partie de cet Ouvrage , m'a soutenu contre les difficultés que présentait l'exécution de la seconde. L'espoir du succès m'animait. J'avois au moins un gage certain de l'indulgence de mes Juges.

Dans la première partie j'ai exposé les règles pour l'intégration des différentielles qui n'ont qu'une seule variable , ou changeante ; celle-ci explique les méthodes connues pour intégrer les différentielles qui en contiennent deux , ou un plus grand nombre. Je la divise en deux Sections , dont l'une a pour objet celles de ces différentielles qui sont du premier ordre , & l'autre celles qui sont d'un ordre plus élevé.

De toutes les méthodes inventées pour éclaircir ces matières obscures & compliquées , celles qui embrassent un plus grand nombre de cas sont , sans contredit , les plus utiles. C'est à développer les plus générales de ces méthodes , à en faire voir l'application à des cas éloignés

& qui y paroissent le moins réductibles , que je me suis sur-tout attaché. Pour épargner aux commençants des essais qui , toujours pénibles , feroient souvent infructueux à l'égard de quantités & d'équations qui ne peuvent être intégrées sans préparation , j'ai placé à la tête de cette seconde partie l'exposition du Théorème qui apprend à reconnoître quand l'intégration directe est possible , ou non. J'ai donné à l'exposition de ce Théorème toute l'étendue nécessaire pour ne laisser , je crois , aucun embarras sur la maniere de s'en servir ; & dans toute la suite de l'Ouvrage j'en fais un usage presque continuel.

La méthode développée dans le Chap. VII. de la premiere Section est aussi d'une très-grande généralité. On verra que la difficulté d'intégrer plusieurs équations se réduit souvent à les ramener au cas dans lequel la méthode du Chapitre VII. suppose les équations différentielles pour les intégrer. Celle du Chapitre XV. de la même Section est aussi une des plus ingénieuses & des plus fécondes ; d'autant mieux que M. d'Alembert à qui nous la devons , ainsi que presque la moitié des méthodes contenues dans ce Volume & dans le précédent , l'a étendue aux différentielles d'un ordre quelconque.

AVANT-PROPOS. v

La plupart de ces méthodes sont dans les volumes de 1746, 1748, 1750 des Mémoires de l'Académie de Berlin.

J'ai trouvé, dans la seconde Section, l'occasion de faire voir par un exemple, comment deux méthodes, rapprochées l'une de l'autre, se prêtent un jour mutuel & acquierent quelquefois un degré d'évidence & de généralité que les inventeurs ne leur avoient pas donné. Il y a toujours à gagner à ces sortes de combinaisons ; puisque souvent, même en manquant le but qu'on se propose, on trouve une vérité qu'on ne cherchoit pas. D'ailleurs ces méthodes qui tendent à la même fin, qui sont fondées sur les mêmes principes, qui presque toutes ont les mêmes procédés, ont nécessairement entre elles un rapport sensible. Peut-être à force d'en étudier la liaison & d'en chercher la dépendance réciproque, parviendrait-on à rendre l'instrument universel & en même temps plus simple.

Que ne pouvons-nous pas nous promettre à cet égard des travaux réunis & constants de plusieurs Géomètres du premier ordre, dont les pas ont déjà franchi un espace immense ? Le Public attend avec impatience le Traité du Calcul Intégral de M. Fontaine. Son but est

vj *AVANT-PROPOS.*

de réduire tout ce Calcul à une regle fondamentale & générale. Les essais de ce Traité qui ont déjà été lus à l'Académie des Sciences & dont l'Histoire de cette Académie (Année 1742.) fait mention , mettent en droit d'espérer tout de l'Ouvrage même.



SUPPLÉMENT

A LA PREMIERE PARTIE.

Comme on m'a fait appercevoir dans la premiere partie de cet Ouvrage quelques endroits qui n'avoient pas, pour tout le monde, ce degré de clarté que je m'étois proposé de leur donner; & qu'on m'en a indiqué d'autres, où le calcul pouvoit être simplifié; je vais éclaircir & réformer ces endroits, & corriger en même temps les fautes d'impression dont j'ai pu m'appercevoir. Je suivrai dans ce Supplément l'ordre des pages.

PAGE 11. LIGNE 15. Placez la lettre O à l'angle des asymptotes, & nommez: OC , x , au lieu de BC .

Page 15. ligne 1. $\frac{dx}{y} = y$, lisez $\frac{dx}{x} = dy$.

Page 21. ligne 10. $y^2 dz l x l y =$, lisez $y^2 dz l x l y +$.

Page 35. Lemme 6. La supposition faite dans la démonstration de ce Lemme, que $1 - 2ax + xx = 0$, $1 - 2bx + xx = 0$, &c. pourroit faire naître quelques difficultés. Quoique la vérité du Lemme n'en subsistât pas moins, il est cependant à propos de montrer comment on peut se passer de cette supposition.

Soient donc $a, b, -h$, &c. les cosinus des arcs AB, AF, AI , &c. $a, b, -h$ feront les différentes valeurs

viii SUPPLÉMENT A LA I. PARTIE

de c dans les équations aux cosinus, trouvées p. 31. Donc ces équations auront pour diviseurs $c - a, c - b, c + h, \&c.$

Supposons ces équations multipliées par 2. & faisons $2c = u$; les transformées qui en naîtront, auront pour diviseurs $u - 2a, u - 2b, u + 2h, \&c.$ Or on fait que si dans chacune de ces transformées on substitue à u une quantité quelconque P , la quantité dans laquelle chacune d'elles se change par cette substitution a pour diviseurs $P - 2a, P - 2b, P + 2h.$ Donc si à u on substitue $\frac{1+xx}{x}$, les transformées qu'on aura dans ce cas auront pour diviseurs $\frac{1+xx}{x} - 2a, \frac{1+xx}{x} - 2b, \frac{1+xx}{x} + 2h, \&c.$ Maintenant en faisant le calcul, on verra facilement que la forme générale de ces transformées est,

$$\frac{1 \pm 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}{x^\lambda}. \text{ Donc } \frac{1 \pm 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}{x^\lambda} =$$

$$\left(\frac{1+xx}{x} - 2a \right) \cdot \left(\frac{1+xx}{x} - 2b \right) \cdot \left(\frac{1+xx}{x} + 2h \right) \cdot \&c. =$$

$$\frac{(1+xx-2ax) \cdot (1+xx-2bx) \cdot (1+xx+2hx) \cdot \&c.}{x^\lambda}. \text{ Donc en-}$$

$$\text{fin } 1 \pm 2tx^\lambda + x^{2\lambda} = (1 - 2ax + xx) \cdot (1 - 2bx +$$

$$xx) \cdot (1 + 2hx + xx) \cdot \&c. = \overline{KB}^2 \times \overline{KF}^2 \times \overline{KI}^2 \times \&c.$$

Page 38. ligne 2. AF , lisez AE .

Ibid. ligne 17. Lisez $\sqrt{1 + 2hx + xx}$, au lieu de $\sqrt{1 + hx + xx}$.

Page 42. ligne 17. $\frac{AdA+BdB}{AA+BB} \times$, lisez $\frac{AdA+BdB}{AA+BB} +$.

Page 43. ligne 16. $\int h \times \frac{ada-bdb}{aa+bb}$, lisez $\int h \times \frac{ada+bdb}{aa+bb}$.

Page

Page 46. ligne 7. Comme 9 est à 1 : lisez , comme g est à 1.

Ibid. ligne 15. jusqu'à 21 : pour plus de clarté : lisez ce qui suit : $s\sqrt[1]{-1} = s\sqrt[1]{-1}^{\frac{1}{s}}$. Or cette dernière quantité se rapporte à $a + b\sqrt[1]{-1}^{g+h\sqrt[1]{-1}}$, en faisant $a=0$, $b=s$, $g=\frac{1}{s}$, $h=0$. Donc (LXX. n°. 4.) $s\sqrt[1]{-1}$ se rapporte à $A + B\sqrt[1]{-1}$, & par conséquent aussi $r + s\sqrt[1]{-1}$.

Page 51. ligne 18. $+y$: lisez $+y^m$.

Page 80. ligne 16. au lieu de fy : lisez , gy .

Ibid. ligne 22. $\frac{2gz}{g-2z}$ ou bien , &c. lisez $\frac{gz}{g-2z}$ ou bien $\frac{2gz}{g-2z}$.

Page 102. ligne pénultième. — (X) : lisez $+(X)$.

Page 117. ligne 14. Il est évident, &c. lisez, Il est évident qu'on aura toujours un triangle rectangle, dont les côtés autour de l'angle droit seront dx & dy , & dont l'hypoténuse sera du .

Page 121. ligne 26. lisez , d'un quadrilatère d'hyperbole équilatère par rapport à ses asymptotes : les coordonnées ayant leur origine à la distance 1 du sommet.

Page 129. ligne 20. un nombre entier positif : lisez , un nombre entier pair positif.

Page 133. ligne 11. $\frac{-z^m dz}{rr(zz+rr)}$, lisez $\frac{-z^m dz}{rr(zz+\frac{1}{rr})}$.

Page 152. ligne 5. $\frac{(f+fa-g)}{b-a}$: lisez $(f+\frac{fa-g}{b-a})$.

Page 159. ligne 14. la fonction de x : lisez , le coefficient de x .

• SUPPLÉMENT A LA I. PARTIE

Page 171. ligne 11. $Gz' dx$: lisez, $Gz' dz$.

Ibid. ligne 18. lisez, s étant un nombre impair positif ou négatif; & cette quantité s'intégrera, ou absolument, quand s est positive (Art. cvi. n°. 1.), ou par la quadrature du cercle (Art. cvi. n°. 2.), lorsque s est négative.

Page 180. On peut supprimer depuis la ligne 4 inclusivement, jusqu'à la ligne 7 exclusivement.

Page 181. ligne 15. $1 + x = &c.$ lisez $1 + x^A =$.

Page 199. ligne 8 & 9. demi-axe conjugué : lisez axe conjugué.

Page 204. ligne 14. = enfin $\frac{-bb du}{u \sqrt{u} \cdot \sqrt{uu \pm fu - bb}}$. Pour montrer clairement ce qui a pu conduire à ajouter à la différentielle ce qu'on lui a ajouté, mettons-la sous cette

forme $-\frac{\frac{bb du}{u}}{\sqrt{u \pm f - \frac{bb}{u}}}$; il est facile de voir que $\frac{bb du}{uu}$

est la différentielle du terme $-\frac{bb}{u}$ qui est sous le signe. Donc il ne manque que du dans le numérateur, pour que la différentielle soit complete. Donc au lieu de notre différentielle nous pourrions prendre la suivante,

$$-\frac{du + \frac{bb du}{uu}}{\sqrt{u \pm f - \frac{bb}{u}}} + \frac{du}{\sqrt{u \pm f - \frac{bb}{u}}}. \text{ La premiere}$$

partie a pour intégrale (Art. viii.) $-2\sqrt{u \pm f - \frac{bb}{u}}$, ou $-\frac{2\sqrt{uu \pm fu - bb}}{\sqrt{u}}$. La seconde n'est autre chose que $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu - bb}}$, qui se rapporte à l'Article ccvi.

Page 220. ligne 3. est égal à celle de : effacez celle de.

Page 224. ligne 1. changez le double signe $\pm$ en $\mp$.

Page 227. ligne 16. On aura une différentielle, &c. C'est ce qu'on peut voir de la manière suivante. Puisque $f + gx + hxx + x^3 = (k + lx + mx^2) \cdot (c \pm x)$, en faisant $c \pm x = z$, on aura une transformée de cette forme $[a \cdot (\pm z \mp c) + b]^2 \times \pm z^{\frac{n}{2}} dz \times (k' + l'z + mz^2)^{\frac{n}{2}}$; donc, &c.

Page 231. ligne 2. & $xx =$ &c. On peut simplifier ce calcul de la façon suivante. Substituez la valeur de x , qui vient d'être trouvée, dans l'équation $g'zx + dz = g + lx + kx^2$ & vous aurez tout de suite $g + lx + kxx = dz + g'z \times \left\{ \frac{g'z - l}{2k} \pm \sqrt{\frac{dz - g}{k} + \left(\frac{g'z - l}{2k} \right)^2} \right\}$, d'où l'on tire immédiatement le dénominateur $\sqrt{\frac{dz - g}{k} + \left(\frac{g'z - l}{2k} \right)^2} \times \left\{ dz + g'z \left(\frac{g'z - l}{2k} \right) \pm \sqrt{\frac{dz - g}{k} + \left(\frac{g'z - l}{2k} \right)^2} \right\}$; réduisant, &c. comme jusqu'à la ligne 10, je multiplie &c. On peut se dispenser de cette opération, parce que le numérateur & le dénominateur sont chacun divisibles par la quantité qui multiplie $\frac{dz}{k}$, ce qui conduit sur le champ à $\frac{\pm dz}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{\text{&c.}}}$, ligne 12. page suivante.

Quant à la remarque qui suit, page 233, on peut trouver aussi facilement, sans le secours du calcul qui précède, que la proposée se rapporte aux logarithmes, toutes les fois que $dd - \frac{dg'l}{k} + \frac{gg'g'}{k} = 0$. Car il est sûr que la proposée se réduira aux logarithmes, lorsque $g'x + d$ sera

xij SUPPLÉMENT A LA I. PARTIE

diviseur de $g + lx + kx^2$. Supposant donc qu'il le soit, & faisant la division, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d' x au dividende, on trouvera, en égalant le reste à zéro & en réduisant, $\frac{g'g'l}{k} + \frac{gg'g'}{k} = 0$.

Page 234. ligne 17. est du troisieme degré: lisez, est 3.

Page 235. ligne 20. Les quadratures de ces quatre équations: lisez, les quadratures des courbes représentées par ces quatre équations.

Ibid. ligne 23. sa quadrature se réduira: lisez, la quadrature de cette courbe se réduira.

Page 237. ligne 14. $dx = y du$, effacez $dx =$.

Ibid. ligne 15. Faites ainsi, pour plus de simplicité, le calcul suivant. Je multiplie la différentielle

$du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}$ haut & bas par $4\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}$

& j'ai $\frac{4kdu + 4ludu + 4mu^2du + 4nu^3du}{4\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$, ou bien

$\frac{kdu + 2ludu + 3mu^2du + 4nu^3du}{4\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}} + \frac{3kdu + 2ludu + mu^2du}{4\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$.

Il est évident que la premiere partie a pour intégrale $\frac{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{2}$.

A l'égard de la seconde, elle se réduit à trois autres, dont la premiere qui a pour numérateur $3kdu$ s'integre par les sections coniques, en faisant $u = \frac{1}{x}$. La seconde qui se réduit à $\frac{l du \sqrt{u}}{2\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$

est de la forme de celle dont nous cherchons l'intégrale; & la troisieme se réduit à $\frac{mudu}{4\sqrt{\frac{k}{u} + l + mu + nu^2}}$,

à laquelle, après l'avoir mise sous cette forme,

$\frac{m}{8n} \cdot \frac{2nu du}{\sqrt{\frac{k}{u} + l + mu + nu^2}}$, on voit qu'il ne manque pour être une différentielle complete, que d'avoir à son numérateur $-\frac{k du}{uu} + m du$. Cette troisieme partie se réduira donc, pour son intégration, à l'intégrale $\frac{m}{4n} \sqrt{\frac{k}{u} + l + mu + nu^2}$, à la différentielle $\frac{\frac{m}{8n} \cdot k du}{u \sqrt{u} \cdot \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$, qui se rapporte aux sections coniques en faisant $u = \frac{1}{x}$; & enfin à la différentielle $-\frac{\frac{m^2}{8n} \cdot du \sqrt{u}}{\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$, de la même forme que celle dont nous cherchons l'intégrale.

Donc la différentielle $\frac{du \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}{\sqrt{u}}$ est composée de deux parties qui s'integrent absolument, de deux parties dépendantes des sections coniques, & enfin de $(\frac{1}{2} - \frac{m}{8n}) \cdot \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$. Donc l'intégrale de $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$ dépend de celle de $\frac{du \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}{\sqrt{u}}$, c'est-à-dire, de la quadrature d'une courbe du troisieme ordre.

Page 241. ligne dernière : d'une quadrature du troisieme ordre : lisez, de la quadrature d'une courbe du troisieme ordre.

Page 244. ligne 3. xx : lisez, x.

Page 246. ligne 14. 2xx dx : lisez, 2cx dx.

Page 248. ligne 17. elle ne dépend pas toujours de

$\frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$: mais elle peut dépendre ou de $\frac{x^2 dx}{\sqrt{a+fx^3}}$,
ou de $\frac{x dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou de $\frac{dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou enfin de $\frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$.
Dans le premier cas elle s'intègre exactement. Dans le
second & le troisième elle dépend des sections coniques.

Page 253. ligne 7. fonctions de x : lisez, de z .

Page 259. ligne 6. au dénominateur $\sqrt{A+Bx}$ &c. :
lisez $\sqrt{A+Bx}$ &c.

Page 277. ligne 3. $x^3 = \frac{az-g}{z^3}$ donne, &c. Le calcul
qui suit peut s'abréger en cette manière ; $x^3 = \frac{az-g}{z^3}$
donne $x^2 dx = \frac{-2azdz + 3gdz}{3z^4}$; donc $x^2 z dx =$
 $\frac{-2azdz + 3gdz}{3z^3}$; ce qui intégré conduit tout de suite à la
ligne 7.

Ibid. ligne 22. Ay , lisez Ay^A .

Page 292. ligne 10. Si l'on avoit $\int(r dx \int u dx)$: ajoutez
ces mots : r & u étant des fonctions quelconques de x .

Ibid. ligne 15. en titre, SECONDE CAS ; effacez ce titre
& les deux lignes qui suivent. Lisez à la marge : Autre
exemple du premier cas ; & au lieu de $\int(dx) \times$
 $(\int \frac{r dx}{\sqrt{2rx-xx}})^3$, lisez $\int \left\{ dx \left(\int \frac{r dx}{\sqrt{2rx-xx}} \right)^3 \right\}$ dans
cet article & le suivant.

Page 294. Art. CCCII. jusqu'à la ligne 14 : lisez ce qui
suit. Soit proposée $\int \left\{ dx \left(\int \frac{r dx}{\sqrt{2rx-xx}} \right)^3 \right\}$; $\int \frac{r dx}{\sqrt{2rx-xx}}$
est l'expression d'un arc de cercle dont x est le sinus versé
& r le rayon : Soit, en supposant le rayon 1, z la valeur
de cet arc ; rz sera sa valeur, le rayon étant r . De même
si $\cos. z$ représente le cosinus de cet arc, le rayon étant

1, $r \cos. z$ représentera le cosinus du même arc, le rayon étant r . On aura donc $x = r - r \cos. z$; or $\cos. z = \&c.$

Au reste il est bon de marquer en passant la différence de ces deux expressions $r \cos. z$ & $\cos. rz$. La première exprime le cosinus de l'arc z pris dans un cercle dont le rayon est r ; la seconde représente le cosinus d'un arc, le nombre de fois r plus grand que z , les arcs rz & z étant pris dans le même cercle; d'où l'on voit que $r \cos. z$ & $\cos. rz$ sont deux expressions qu'il ne faut pas confondre.

Page 296. ligne dernière. Entre l'article CCV. qui termine cette page & l'article CCCVI. qui commence la suivante, insérez ces mots :

S E C O N D C A S.

Ce second cas a lieu, quand les quantités affectées du signe $\int$ sont multipliées les unes par les autres. Il n'a aucune difficulté. Prenez chaque intégrale en particulier, & multipliez-les ensuite entre elles, le produit sera la valeur de l'expression proposée. Ainsi $\int (x dx) \times \int (g x^3 dx) = \frac{x^2}{2} \times \frac{g x^4}{4} = \frac{g x^6}{8}$.

Page 316. ligne 20. ajoutez ce qui suit. On peut par le même Théorème transformer tout nombre irrationnel donné en une suite infinie de termes purement rationels. Soit, par exemple, la quantité irrationnelle $\sqrt{10}$, je la transforme en $\sqrt{9+1}$, c'est-à-dire, en un radical binome dont la première partie soit un carré; & alors élevant par le moyen de la formule le binome $9+1$ à la puissance

$\frac{1}{2}$, on aura une suite infinie de termes tous rationnels.

Page 324. ligne 18. d'un nombre plus grand que l'unité. Entre cette ligne & l'Art. CCCXL, ajoutez : mais moindre que 2. En effet si $1+z$ étoit seulement égal à 2, alors z étant 1, les deux termes du dénominateur binome seroient égaux & la serie seroit fautive ; à plus forte raison, lorsque z surpasse 2.

On peut néanmoins employer cette serie à trouver les logarithmes des nombres plus grands que l'unité ; mais il faut pour cela calculer les logarithmes de nombres moindres que 2, & qui soient tels que, multipliés entre eux, ou divisés les uns par les autres, ils produisent le nombre dont on cherche le logarithme. Par exemple, sachant que $\frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{8}{10} \times \frac{9}{10}}$, ou bien $\frac{1,2 \times 1,2}{0,8 \times 0,9} = 2$, je calcule par le moyen de la premiere serie le logarithme de 1, 2 en supposant $z = 0,2$. Je calcule pareillement les logarithmes de 0, 8 & 0, 9 par le moyen de la seconde formule en supposant $z = 0,2$ pour l'un, & 0, 1 pour l'autre. J'ajoute les logarithmes trouvés de 0, 8 & 0, 9 & je retranche la somme du double du logarithme de 1, 2, ce qui donnera le logarithme de 2. Si on se donne la peine de faire ce calcul, on trouvera ce logarithme = 0,693147180559 &c. De même puisque $\frac{2 \times 2 \times 2}{0,8} = 10$, en triplant le logarithme que nous venons de trouver, & retranchant celui de 0, 8, on aura le logarithme de 10 exprimé par 2.302585092994 &c. C'est ce

ce que (page 10. Art. xv.) nous avons promis de donner.

Lorsque par ce moyen on a formé les logarithmes de quelques nombres, on peut ensuite avoir ceux des autres nombres d'une manière plus expéditive. La méthode consiste à trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur surpasse le dénominateur de tel nombre d'unités qu'on voudra. Pour cet effet, soit a la somme du numérateur & du dénominateur de cette fraction, x leur différence; la fraction sera $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$, ou $\frac{a+x}{a-x}$. La différentielle du logarithme de cette fraction sera $\frac{2a dx}{aa - xx}$; laquelle réduite en série par la division & ensuite intégrée, donne pour le logarithme de cette même fraction $2 \times \left\{ \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} + \&c. \right\}$: intégrale à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, parce que quand $x=0$, elle devient $=0$, ainsi que cela doit être. Car lorsque $x=0$, la fraction $\frac{a+x}{a-x}$ devient $\frac{a}{a} = 1$, dont le logarithme est ici $=0$.

Maintenant s'il s'agit de trouver le logarithme d'un nombre quelconque a , celui d'un autre nombre b étant donné; je chercherai par cette formule le logarithme de la fraction $\frac{a}{b}$, si a est plus grand que b , ou $\frac{b}{a}$, s'il est plus petit: ce logarithme étant trouvé, je l'ajouterai dans le premier cas au logarithme supposé connu de b , & j'aurai le logarithme de $\frac{a}{b} \times b$; c'est-à-dire de a . Dans le second cas je retrancherai du logarithme connu de b , celui de la fraction $\frac{b}{a}$, & j'aurai le logarithme de $\frac{b}{\frac{b}{a}} = b \times \frac{a}{b} = a$.

II. Partie.

$l : L$. Donc $L = l \times 0,43429448 \text{ \&c.}$

Par une méthode semblable à celle que nous venons d'employer pour trouver le logarithme du nombre $1+z$; on peut parvenir à trouver l'expression générale de c^x , (c étant le nombre dont le logarithme est 1, & x une quantité quelconque). On supposera pour cet effet $c^x = 1+z$; donc $x = l(1+z)$ & conséquemment $x = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ &c. ; équation de laquelle tirant , par la méthode inverse des series , la valeur de z en x , on aura $z = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}$ &c. ; donc $1+z$ ou $c^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \frac{x^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{x^{10}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} + \frac{x^{11}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} + \frac{x^{12}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12} + \frac{x^{13}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13} + \frac{x^{14}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14} + \frac{x^{15}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15} + \frac{x^{16}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16} + \frac{x^{17}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17} + \frac{x^{18}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18} + \frac{x^{19}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19} + \frac{x^{20}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20} + \frac{x^{21}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21} + \frac{x^{22}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22} + \frac{x^{23}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23} + \frac{x^{24}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24} + \frac{x^{25}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25} + \frac{x^{26}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26} + \frac{x^{27}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27} + \frac{x^{28}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28} + \frac{x^{29}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29} + \frac{x^{30}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30} + \frac{x^{31}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31} + \frac{x^{32}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32} + \frac{x^{33}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33} + \frac{x^{34}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34} + \frac{x^{35}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35} + \frac{x^{36}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36} + \frac{x^{37}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37} + \frac{x^{38}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38} + \frac{x^{39}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39} + \frac{x^{40}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40} + \frac{x^{41}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41} + \frac{x^{42}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42} + \frac{x^{43}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43} + \frac{x^{44}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44} + \frac{x^{45}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44.45} + \frac{x^{46}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44.45.46} + \frac{x^{47}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44.45.46.47} + \frac{x^{48}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44.45.46.47.48} + \frac{x^{49}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44.45.46.47.48.49} + \frac{x^{50}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.$

Je remarquerai ici que cette expression trouvée pour c^x démontre ce que nous avons supposé dans la première Partie (Art. CCCVII.), savoir que $c^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1}$ lorsque x est très-petite.

J'observerai encore qu'on peut par ce moyen trouver la valeur de c . En effet puisque $c^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c.$ en supposant $x = 1$, on a $c = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c. = 2,7182818 \&c.$



*EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences,*

Du 14 Janvier 1756.

NOUS Commissaires nommés par l'Académie, avons examiné la seconde Partie de l'Ouvrage de Monsieur de Bougainville le jeune, qui a pour titre : *Traité du Calcul intégral.*

Cette seconde Partie traite de l'Intégration des Quantités différentielles à deux ou plusieurs variables, & acquitte par conséquent l'engagement que l'Auteur avoit pris avec le public. Elle est divisée en deux livres.

Le premier a pour objet l'intégration des Différentielles du premier ordre, qui contiennent deux ou plusieurs variables. M. de Bougainville après quelques Définitions & Propositions préliminaires, traite d'abord de l'intégration des quantités ou équations différentielles qui n'ont besoin pour cela d'aucune préparation ; il donne le moyen de connoître & de distinguer ces sortes de quantités ou équations, & de les intégrer. Il passe ensuite à l'intégration des équations qui ont besoin d'être préparées par quelque opération particulière ; & comme pour l'ordinaire, cette opération consiste à séparer les Indéterminées, M. de Bougainville, après avoir enseigné à construire une Equation différentielle dont les indéterminées sont séparées, donne différentes méthodes pour séparer les indéterminées dans une Equation proposée, soit par la voie des multiplications & des divisions, soit par celle des transformations. Le premier usage qu'il en fait, a pour objet les Equations homogenes, & après avoir montré comment on peut construire ces équations dans tous les cas, il

enseigne comment on peut réduire plusieurs Equations au cas de l'homogénéité.

Il passe de là à l'intégration d'une espece d'Equations qui a souvent lieu dans la solution des Problèmes ; c'est celle dont M. Bernoulli a donné le premier l'Intégrale dans les Journaux de Leipzig de 1697. M. de Bougainville, après avoir donné une méthode particuliere d'intégrer ces sortes d'Equations, fait voir comment on peut y réduire un grand nombre d'Equations proposées. Ces principes établis, il traite en général des équations à trois & quatre termes, & montre dans quels cas on peut les intégrer. Il n'oublie pas la fameuse équation de *Ricati*, ni même des équations plus compliquées, dont celle de *Ricati* n'est qu'un cas.

De là il passe à l'intégration des Equations où les deux différentielles sont élevées à différentes puissances ; le cas des Equations homogenes se retrouve encore ici, mais sous une forme bien plus générale. M. de Bougainville montre de plus comment on peut intégrer dans beaucoup d'autres cas les Equations dans lesquelles les deux différentielles se trouvent mêlées ensemble, ou élevées à des puissances plus grandes que l'unité.

L'Auteur fait voir ensuite comment on peut employer dans certains cas la méthode des Coefficients indéterminés pour intégrer en même temps plusieurs équations qui contiennent chacune un certain nombre de variables ; & comment on peut se servir de cette même méthode pour déterminer une Intégrale par certaines conditions données de la Différentielle.

Le second Livre traite de l'intégration des Equations ou quantités différentielles à plusieurs variables, du second ordre & au-delà, en supposant constante telle différentielle qu'on juge à propos. Il contient, ainsi que le Livre premier, toutes les méthodes que les Géometres ont trouvées jusqu'à présent sur le Calcul qui en est l'objet ;

xxij

L'Auteur fait par-tout se rendre propres ces méthodes par l'intelligence & la clarté avec laquelle il les a développées.

Cette Seconde Partie ne nous paroît pas moins digne que la première de l'approbation de l'Académie, & de l'impression. *Signé*, NICOLE ; D'ALEMBERT.

Je certifie le présent Extrait conforme à son original & au jugement de l'Académie. A Paris, ce 29 Janvier 1756.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.



Fautes à corriger dans la Seconde Partie.

Page 19. ligne 24. $\frac{dC}{dx} \times \frac{dB}{dz}$, lisez $\frac{dC}{dx}, \frac{dB}{dz}$.

Page 58. ligne 6. $b y y x^{\frac{1}{2}}$, lisez $b y y x^{\frac{1}{2}} dx$.

Page 116. & 117. effacez V^{-1} & V''^{-1} .

Page 154. ligne 15. $\pm n y y dx^*$, lisez $\pm n$.

Page 155. ligne 1. $\pm n dx^*$, lisez $\pm n$; *idem* ligne 8.

N'ayant pu revoir moi-même les épreuves de cette seconde Partie, à cause d'un voyage que j'ai été obligé de faire & d'une maladie assez longue qui l'a suivi, je m'en suis reposé sur l'exactitude de M. Bezout, Censeur Royal & très-habile Maître de Mathématiques, qui a bien voulu s'en charger. Ceux qui voudront s'instruire à fonds du Calcul intégral & de la Géométrie transcendante, ne sauroient mieux faire que de le prendre pour guide.



TRAITÉ



T R A I T É D U C A L C U L I N T É G R A L.

S E C O N D E P A R T I E,

Où l'on traite de l'Intégration des Différentielles à deux ou plusieurs variables.

Nous avons donné dans la première partie de ce Traité les règles que les Géomètres ont trouvées jusqu'à présent pour intégrer les différentielles qui n'ont qu'une variable. Nous allons exposer dans cette seconde partie ce que l'on fait sur l'intégration de celles qui en contiennent deux ou un plus grand nombre.

Nous diviserons cette seconde partie en deux Sections.

LA PREMIERE contiendra les règles d'intégration des différentielles à plusieurs variables qui ne passent pas le premier ordre ; telles que sont les suivantes, $xydx + xx dy$;

$\frac{xdy - ydx}{xx}$, &c.

II. Partie.

Division générale de cette Seconde Partie.

A

2 TRAITE' DU CALCUL INTE'GRAL.

LA SECONDE traitera de l'intégration des différentielles à plusieurs variables d'un ordre plus élevé ; telles que $x dx ddy$; $y' x' dy dy ddx$, &c. qui s'écrivent encore de la façon suivante, $x dx d^2 y$; $y' x' dy^2 d^2 x$, & en général $dx^n d^m y$.

Observation
sur l'addition
de la constante
à l'intégrale
trouvée.

Il ne faut pas oublier qu'il est aussi nécessaire ici d'ajouter une constante à l'intégrale trouvée , pour la rendre complète , ainsi qu'on l'a fait dans la première Partie. Nous nommerons cette constante $\pm C$, C étant positif ou négatif.





SECTION PREMIERE.

De l'Intégration des Différentielles du premier ordre qui contiennent deux ou plusieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités & des équations différentielles qui s'intègrent sans qu'il soit nécessaire d'en séparer auparavant les indéterminées, & sans aucune autre préparation.

§. I. Sur l'intégration des quantités différentielles

I.

LA différentielle de xy est, comme on le fait, $ydx + xdy$. Donc l'intégrale de $ydx + xdy$ est $xy \pm C$. Par la même raison $yx dz + yz dx + xz dy$ a pour intégrale $xyz \pm C$. En général $y^m x^n$ ayant pour différentielle $mx^n y^{m-1} dy + ny^m x^{n-1} dx$, l'intégrale de cette dernière quantité est $y^m x^n \pm C$.

10. Lorsque elles sont des quantités entières.

II.

On fait encore que la différence d'une fraction, est la différence du numérateur multipliée par le dénominateur,

20. Lorsque elles sont fractionnaires

4 TRAITE' DU CALCUL INTE'GRAL.

moins la différence du dénominateur multipliée par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur. Ainsi la différence de $\frac{z}{u}$ est $\frac{u dz - z du}{u^2}$. Donc l'intégrale de $\frac{u dz - z du}{u^2}$ est $\frac{z}{u} \pm C$. De même l'intégrale de $\frac{n y^m x^{m-1} dx - m x^n y^{m-1} dy}{y^{2m}}$ est $\frac{x^n}{y^m} \pm C$.

I I I.

En général si on nomme z une fonction quelconque de x , & Y une fonction quelconque de y , l'intégrale de $z dY + Y dz$ est $YZ \pm C$; & $\frac{z dY - Y dz}{z^2}$ a pour intégrale $\frac{Y}{z} \pm C$.

I V.

30. Lorsqu'elles contiennent des binomes, trinomes, &c. élevés à différentes puissances.

Nous avons vu dans la première partie de ce Traité que toutes les fois que dans une formule composée d'une seule variable & de constantes, la quantité hors du signe étoit la différentielle de la quantité sous le signe; l'intégrale de cette formule est la quantité même sous le signe dont l'exposant est augmenté de l'unité, divisée par ce même exposant ainsi augmenté de l'unité. Il en est de même pour les formules différentielles composées de plusieurs variables & de constantes, pourvu qu'elles aient la condition que nous venons d'énoncer.

Ainsi l'intégrale de $(dx + dy) \cdot \sqrt{x+y}$ est $\frac{2}{3} (x+y)^{\frac{3}{2}} \pm C$; celle de $(2a dx + 2b dy) \cdot (ax+by)^{-\frac{1}{2}}$ est $4 \cdot (ax+by)^{\frac{1}{2}} \pm C$. Enfin celle de

I I. P A R T I E. S E C T. I. C H A P. I. 5

$$\frac{x^3 dy + 3yx^2 dx + 3xy^2 dy + y^3 dx}{2 \cdot (x^3 y + y^3 x)^{\frac{1}{2}}} \text{ est } (x^3 y + y^3 x)^{\frac{1}{2}} \pm C.$$

V.

Si l'on avoit en général à intégrer $(x dy + y dx + 2y dy)$: $(xy + yy)^{\frac{n}{m}}$, l'intégrale en seroit $\frac{m}{m+n} \cdot (xy + yy)^{\frac{m+n}{m}} \pm C$; & de même celle de $\frac{x dy + y dx + 2y dy}{(xy + yy)^{\frac{n}{m}}}$ est $\frac{m}{m-n} \cdot (xy + yy)^{\frac{m-n}{m}} \pm C$. Il en est ainsi de beaucoup d'autres.

V I.

Si cependant on étoit embarrassé dans ces cas, & que l'intégrale ne se présentât pas d'abord, on la trouveroit sur le champ en se servant des transformations enseignées dans la première Partie. Ainsi en faisant dans $(x dy + y dx + 2y dy) \cdot (xy + yy)^{\frac{n}{m}}$, $xy + yy = z$; on aura pour transformée $z^{\frac{n}{m}} dz$, dont l'intégrale est par la règle fondamentale de tout ce calcul $\frac{m}{n+m} z^{\frac{m+n}{m}} \pm C$; & en remettant pour z sa valeur, on aura l'intégrale cherchée. Il en est de même pour toutes les différentielles qui sont dans le même cas.

V I I.

On a établi que toutes les fois que le numérateur d'une fraction composée d'une seule indéterminée & de constantes, est la différentielle du dénominateur, l'intégrale de la proposée est le logarithme du dénominateur. Cette règle a encore lieu, lorsque la fraction contient deux ou

4°. Lorsque ces quantités renferment des Logarithmes.

plusieurs indéterminées avec les mêmes conditions:

Suivant cette règle l'intégrale de $\frac{dx+dy}{x+y}$ est $\log(x+y) \pm C$:
celle de $\frac{xdy+ydx}{xy}$ est $\log xy \pm C$: De même $\int \frac{x^{m+1}+ydx-2ydy}{2xy-2y^2} =$
 $\log(xy-y^2)^{\frac{1}{2}} \pm C$. En général $\int \frac{m y^n x^{m-1} dx + n x^m y^{n-1} dy - (m+n) y^{m+n-1} dy}{r x^m y^n - r y^{m+n}}$
 $= \log(x^m y^n - y^{m+n})^{\frac{1}{r}} \pm C$, en supposant que la sous-
tangente de la logarithmique est 1. C'est ce qu'on trou-
vera tout de suite en supposant $x^m y^n - y^{m+n} = z$:
car alors on aura la transformée suivante $\frac{dz}{r z}$, dont on
fait que l'intégrale est $\log(z)^{\frac{1}{r}}$. Donc, &c.

§. II. Sur l'intégration des équations différentielles.

VIII.

Ce que c'est
qu'une équation différen-
tielle d'un or-
dre quelcon-
que.

Lorsqu'une quantité différentielle quelconque est sup-
posée égale à zéro, on l'appelle équation différentielle.
Toute équation différentielle est du même ordre que les
quantités différentielles de l'ordre le plus élevé, qu'elle
renferme; c'est-à-dire que l'équation $z^m dz + 2z du +$
 $u dz = 0$, dans laquelle les quantités différentielles dz
& du sont du premier ordre, est du premier ordre. La
suivante $\frac{a^2 y^2 dx^2 + 2a^2 y dx dy + a^2 x^2 dy^2}{y^2 x^2} = 0$ est encore
du premier. Celle-ci $ddu + x dx du + v du^2 = 0$ est
du second ordre; & ainsi de suite.

IX.

L'intégration des équations différentielles du premier

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. I. 7

ordre s'appelle autrement méthode inverse des tangentes. Ce que c'est
que la métho-
de inverse des
tangentes.
En voici la raison. La méthode directe des tangentes n'est autre chose que la méthode de trouver la tangente d'une courbe dont l'équation est donnée ; c'est-à-dire (Sect. II. des Infiniment-Petits) de trouver la valeur de la sous-tangente $\frac{y dx}{dy}$, ou ce qui est la même chose de $\frac{dx}{dy}$, en supposant qu'on ait une équation en x & en y .

Or une équation différentielle du premier ordre étant donnée, on a la valeur de $\frac{dx}{dy}$ ou de $\frac{y dx}{dy}$ en x & en y , c'est-à-dire, l'expression de la sous-tangente. L'intégration de cette équation donnera évidemment l'équation de la courbe. Donc cette intégration fera connoître la courbe dont la sous-tangente est supposée donnée ; & ainsi elle est l'inverse de la méthode directe des tangentes, qui consiste à trouver la sous-tangente d'une courbe dont l'équation est donnée.

X.

Les règles pour intégrer les équations différentielles sont à peu près les mêmes que les précédentes. Il y faut cependant ajouter un nouveau principe.

LEMME. Quand une différentielle est égale à zéro, Lemme pré-
paratoire.
son intégrale, s'il est possible de la trouver, doit être supposée égale à une constante qu'on prendra arbitrairement, en suivant toutesfois la loi des homogenes. Par exemple, si on a $a \frac{z u du - u u dz}{z z} = 0$ dont l'intégrale est $\frac{u u}{z}$, on la suppose égale à une grandeur constante a , ce qui donne $\frac{u u}{z} = a$, ou $u u = a z$, pour l'intégrale complete.

Voyons maintenant des équations qui s'intègrent sans aucune préparation.

X I.

Premier
Exemple.

Ce que nous avons dit plus haut nous fait découvrir sur le champ que l'équation $x dy + y dx = uz dt + ut dz + zt du$ est la différentielle exacte de celle-ci $xy - uzt + C = 0$; car il suffit pour s'en appercevoir de regarder les deux membres de cette équation comme deux différentielles particulieres, & d'en prendre séparément l'intégrale.

X I I.

On suivra la même règle pour l'intégration de beaucoup d'autres équations dans lesquelles les différentielles sont élevées au quarré, au cube, &c.

Si l'on a, par exemple, l'équation suivante, $x^2 dy^2 + 2xy dx dy + y^2 dx^2 = a^2 dx^2$; pour l'intégrer j'en prends la racine quarrée. Cette opération me donne $x dy + y dx = a dx$, donc l'intégrale est $xy - aax + C = 0$.

X I I I.

Qu'on propose l'équation $a^3 y dx = fy^3 dy + h^2 y^2 dz + a^3 x dy$, qui est la même que celle-ci, $a^3 y dx - a^3 x dy = fy^3 dy + h^2 y^2 dz$; ou bien encore, la même que cette autre $\frac{a^3 y dx - a^3 x dy}{y^2} = fy dy + h^2 dz$; je vois sans peine que l'intégrale de cette équation est $\frac{a^3 x}{y} - \frac{fy^2}{2} - h^2 z + C = 0$.

X I V.

X I V.

SCHOLIE. De ce que dans l'exemple précédent l'équation n'est devenue intégrable qu'après que l'un & l'autre membre en a été divisé par yy , il est assez simple de penser qu'il pourroit y avoir beaucoup de différentielles qui n'étant pas intégrables dans la forme sous laquelle on nous les présente, le deviendroient, si on les multiplioit ou si on les divisoit par quelques fonctions de leurs variables.

D'autres aussi deviendront intégrables en se servant des substitutions enseignées dans le Chapitre second de la première Partie, pour les transformer; d'autres enfin demanderont des opérations plus composées. Mais comme souvent les différentielles à plusieurs variables sont très-complicquées; qu'il est par conséquent difficile de reconnoître les méthodes qui leur conviendroient; & que même quelquefois on essayeroit inutilement de les leur appliquer; avant que d'entrer dans le détail des méthodes particulières, nous en allons exposer une générale qui apprend à reconnoître si une quantité ou une équation quelconque composée d'un nombre quelconque de variables & de leurs différentielles (dans l'état où elle est proposée) est intégrable algébriquement, ou constructible par les quadratures. Lorsque l'intégration est possible, cette méthode nous apprend à trouver l'intégrale. Souvent même, lorsque la quantité ou l'équation dans l'état dans lequel on

la propose n'est pas intégrable, la même méthode nous fait trouver le facteur qui en l'affectant la rend susceptible d'intégration. Cette méthode est fondée sur un Théorème dont nous ferons le plus grand usage dans toute la suite de ce Traité.

CHAPITRE II.

Méthode pour reconnoître quand une différentielle composée de plusieurs variables est la différentielle exacte de quelque quantité, & pour l'intégrer dans ce cas.

Solution
d'un Problème
nécessaire
pour ce qui
suit.

Avant que d'exposer cette méthode, il est nécessaire de donner ici la solution d'un Problème dont on ne peut se passer. Ce Problème consiste à différentier les quantités de la forme de $\int A dx$; A est une fonction de x & de y , telle que c'est x qui a varié; au lieu qu'on demande ici la différentielle de $\int A dx$, y variant & x étant constant.

X V.

PROBLEME. Différentier les quantités de la nature de $\int A dx$, en supposant y variable & x constant.

Nous allons
d'abord donner
la solution de ce
Problème sur
un exemple.

SOLUTION. Supposons que la quantité proposée à différentier soit $\int dx \sqrt{aa + xx}$, en faisant a variable. Je différentie la quantité $\sqrt{aa + xx}$ en faisant seule-

II. P A R T I E. S E C T. I. C H A P. II. 15

ment varier a . Cette opération donne $\frac{a da}{\sqrt{(aa+xx)}}$. J'en ôte da que je mets devant le signe $\int$ en laissant dx ainsi qu'il étoit sous ce même signe : j'aurai $da \int \frac{a dx}{\sqrt{(aa+xx)}}$ pour la différentielle cherchée de $\int dx \sqrt{(aa+xx)}$; a variant & dx étant constant. C'est ce qui se démontre ainsi.

Soit la courbe BM dont l'équation est $y = \sqrt{(aa+xx)}$, telle que $BA = a$

$$AP = x$$

$$Pp = dx$$

$$PM = y = \sqrt{(aa+xx)}$$

Figure 10

Menant l'ordonnée infiniment proche pm , on a le petit espace $PMmp = dx \sqrt{(aa+xx)}$. Donc la somme de ces petits espaces, ou l'aire entière $BAPM$ sera $\int dx \sqrt{(aa+xx)}$. Soit à présent prolongé BA en b , PM en M' , pm en m' ; & par les points b, M', m' , menée la courbe $bM'm'$. En faisant varier le parametre a & laissant x constant, on aura $MM' = \frac{ada}{\sqrt{(aa+xx)}}$; donc le petit espace $M'm'Mm = \frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$; donc la somme des petits espaces $M'm'Mm$, ou $BbM'M = \int \frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$: or da demeure toujours le même dans toutes les quantités $\frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$, puisque $da = Bb$; donc on peut le faire sortir hors du signe d'intégration: donc on a $BbM'M = da \int \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Or $BbM'M$ est l'élément de l'aire $ABMP$; donc la différence de $\int dx \sqrt{(aa+xx)}$ est $da \int \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Il est évident qu'on fera le même raisonnement sur tout autre exemple.

B ij

X V I.

Solution gé-
nérale du Pro-
blème.

COROLLAIRE. Donc en général la différence de $\int A dx$, y étant supposée variable, sera $dy \int \frac{dA}{dy} dx$; dans cette quantité, $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'auroit dy dans la différentiation de la quantité A . Ce qu'on voit aisément par l'exemple ci-dessus.

Après la solution de ce Problème, passons à l'exposition de la méthode. Nous l'appliquerons d'abord aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables; ensuite nous l'appliquerons à celles qui en renferment trois ou un plus grand nombre.

§. I. Exposition de la méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.

X V I I.

Théorème
fondamental.

THEOREME. Si on différentie une quantité telle que A composée de deux variables t & u , en faisant u variable & t constant, & qu'ensuite on différentie la différentielle qui en résulte en faisant t variable & u constant, on aura la même quantité que si on différentioit d'abord A en faisant u constant & t variable, & qu'ensuite on différentiât la différentielle qui en résulte en faisant t constant & u variable. Par exemple, soit $A = \sqrt{t^2 + nu^2}$. Différentions cette quantité en supposant t constant, la différentielle sera $\frac{nu du}{\sqrt{t^2 + nu^2}}$, qui différentiée de nouveau en traitant u comme constant, donne $\frac{-ntu dt du}{(t^2 + nu^2)^{\frac{3}{2}}}$

Maintenant différencions A en regardant u comme constant, nous aurons $\frac{t dt}{\sqrt{t^2 + nu^2}}$; dont la différentielle en supposant t constant sera $\frac{-ntu dt du}{(t^2 + nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, qui est la même quantité que la précédente.

La démonstration de ce Théorème se tire des principes mêmes du Calcul différentiel.

DÉMONSTRATION. Mettons dans A , $t + dt$ au lieu de t , A se change en $B = \sqrt{(t + dt)^2 + nu^2}$; mettons ensuite dans A au lieu de u , $u + du$, A se change en $C = \sqrt{t^2 + n(u + du)^2}$. Enfin si l'on met en même temps dans A au lieu de t , $t + dt$, & au lieu de u , $u + du$, A se change en $D = \sqrt{(t + dt)^2 + n(u + du)^2}$. Il est évident par l'inspection seule que si dans B on écrit pour u , $u + du$, B devient D ; & de même, que si dans C on écrit $t + dt$ pour t , C devient D . Cela posé, si on différencie A en regardant t comme constant, on aura $C - A$. La raison en est simple. Car pour différencier une quantité, x , par exemple, il faut supposer que x devient $x + dx$, & alors la différence qu'il y aura entre x dans le premier état & x dans le second sera la différentielle de x ; il faudra donc retrancher x de $x + dx$, ce qui donne dx . De même supposant t constant, pour avoir la différentielle de A , il faut substituer dans A à la place de u , $u + du$, ce qui donne C . C est donc ce que devient A au second instant; la différence entre A au premier instant & A au second instant, ou la différentielle de A sera donc $C - A$. Le calcul est conforme à ce raisonnement.

$$\begin{aligned}
\text{Car } C - A &= \sqrt{t^2 + n(u + du)^2} - \sqrt{t^2 + nu^2} \\
&= \frac{(\sqrt{t^2 + n(u + du)^2} - \sqrt{t^2 + nu^2}) \cdot (\sqrt{t^2 + n(u + du)^2} + \sqrt{t^2 + nu^2})}{\sqrt{t^2 + n(u + du)^2} + \sqrt{t^2 + nu^2}} \\
&= \frac{2nudu + ndu^2}{\sqrt{t^2 + nu^2} + \sqrt{t^2 + n(u + du)^2}} = \frac{nudu}{\sqrt{t^2 + nu^2}}
\end{aligned}$$

qui est en effet la différentielle de A en supposant t constant. Si dans $C - A$ on met $t + dt$ au lieu de t , on aura $D - B$, & la différentielle sera par les raisons que nous venons d'exposer $D - B - C + A$.

Maintenant dans A mettons $t + dt$ au lieu de t , nous aurons B , & la différentielle de A en supposant u constant fera $B - A$. Si dans cette différentielle on écrit $u + du$ au lieu de u , elle devient $D - C$; & la différentielle sera par conséquent $D - C - B + A$, différentielle que nous avons trouvée absolument la même par la première opération.

XVIII.

Autre manière de présenter le Théorème précédent.

Ce Théorème peut encore se présenter sous une autre forme qui suppose toujours les mêmes principes.

THÉOREME. Si $A dx + B dy$ représente la différentielle d'une fonction de x , de y & de constantes, la différence de A prise en supposant seulement y variable & divisant par dy , est égale à la différence de B prise en supposant x seul variable & divisant par dx . Ce Théorème s'énonce ainsi algébriquement $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, si $\int A dx + Y = \int B dy + X$ (Y étant une fonction de y & de constantes qu'on peut ajouter à $\int A dx$, & X une fonction de x & de constantes qu'on peut ajouter à

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. II. 15
 $\int B dy$). On se souviendra que $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'aura dy dans la différentiation de A , & $\frac{dB}{dx}$ celui de dx dans la différentiation de B .

DÉMONSTRATION. Les deux membres de cette dernière équation sont égaux : donc la différence de l'un est égale à la différence de l'autre, quelle que soit la quantité que l'on fasse varier. Donc $B dy$ qui est la différentielle de $\int B dy + X$ en faisant x constant & y variable, fera la même chose que la différentielle de $\int A dx + Y$ en supposant aussi y variable & x constant. Donc $B dy =$ (Problème précédent) $dy \int \frac{dA}{dy} dx + dY$; ou $B = \int \frac{dA}{dy} dx + \frac{dY}{dy}$. Je prends maintenant la différentielle de cette quantité en faisant varier x ; j'ai $\frac{dB}{dx} dx = \frac{dA}{dy} dx$, ou $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$.

X I X.

COROLLAIRE. On démontrera de la même manière que si $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$, $A dx + B dy$ est nécessairement une différentielle complète, c'est-à-dire qu'il y aura quelque fonction de x , algébrique, ou dépendante des quadratures, qui en fera l'intégrale exacte.

X X.

Soit la quantité $x dy \sqrt{xx+yy} + y dx \sqrt{xx+yy}$; je vois qu'elle n'a pas d'intégrale : car la différence de $x \sqrt{xx+yy}$ en supposant x variable, y constant, & ôtant dx , est $\sqrt{xx+yy} + \frac{xx}{\sqrt{xx+yy}}$: celle de

Son application à quelques différentielles.

Premier exemple.

$y\sqrt{xx+yy}$ en faisant varier y , supposant x constant & divisant par dy , est $\sqrt{xx+yy} + \frac{yy}{\sqrt{xx+yy}}$. Or ces deux différentielles sont des quantités différentes. Donc la différentielle proposée n'a point d'intégrale.

X X I.

Second
Exemple.

Soit maintenant la quantité différentielle $\frac{y dx - x dy}{xx + yy}$, dont on cherche l'intégrale. Pour m'assurer si cette quantité en a une, soit algébrique, soit dépendante des quadratures, je prends la différence de $\frac{y}{xx+yy}$ en variant seulement y & divisant par dy . Il me vient $\frac{xx - yy}{(xx + yy)^2}$. Je trouve la même quantité pour la différentielle de $\frac{x}{xx + yy}$ en faisant varier seulement x & ôtant dx . Donc la proposée est intégrable.

X X I I.

Il en est de même de toutes les autres différentielles à deux variables, quelque compliquées qu'elles soient. On voit tout d'un coup par le secours de la méthode précédente si elles sont intégrables ou non : ce qui épargne des opérations souvent longues & pénibles, quelquefois même infructueuses, quand la proposée n'est pas une différentielle exacte.

X X I I I.

Application
du Théorème
aux équations
différentielles
à deux varia-
bles.

Appliquons maintenant le Théorème aux équations différentielles à deux variables. Cette application est facile & se fait avec le même succès. Ainsi pour savoir si l'équation

$$A dx +$$

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. II. 17

$A dx + B dy = 0$ est une différentielle exacte, il faut examiner si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. En ce cas l'équation seroit intégrable algébriquement, ou constructible par les quadratures; autrement elle ne le seroit pas. Nous allons dire maintenant comment ces sortes de quantités, ou d'équations, s'intègrent.

Maniere d'intégrer les quantités $A dx + B dy$, & les équations $A dx + B dy = 0$, lorsqu'elles sont des différentielles exactes.

XXIV.

Lorsqu'une fois on aura reconnu par le Théorème précédent qu'une différentielle telle que $A dx + B dy$ est intégrable, voici la méthode qu'on peut suivre pour parvenir à l'intégration.

Appliquez
1°. aux différentielles
 $A dx + B dy$

J'intègre seulement l'un des deux membres, $A dx$ par exemple, en y supposant y constant & x variable : l'intégrale étant trouvée, je la différentie en faisant y variable & x constant; je retranche cette différentielle de $B dy$: si la différence est zéro, c'est une marque que $\int A dx$ suffit pour l'intégrale de $A dx + B dy$: sinon la différence ne peut être qu'une quantité composée de y , de dy & de constantes, dont l'intégrale étant ajoutée à $\int A dx$, la rendra l'intégrale complete de $A dx + B dy$.

XXV.

Soit la différentielle $dx \sqrt{y} + \frac{x dy}{2\sqrt{y}} - a dy \sqrt{x} -$

Exemple
particulier.

II. Partie,

C

$\frac{ay dx}{3x^{\frac{1}{3}}}$ que nous reconnoissons aisément par le Théorème fondamental être une différentielle exacte ; pour l'intégrer suivant la méthode précédente , je prends l'intégrale de $dx \sqrt[3]{y} - \frac{ay dx}{3x^{\frac{1}{3}}}$ en supposant y constant : cette intégrale est $x \sqrt[3]{y} - ayx^{\frac{1}{3}} \pm C$. Je différentie cette quantité en faisant x constant & y variable ; j'ai pour différentielle $\frac{x dy}{x \sqrt[3]{y}} - ax^{\frac{1}{3}} dy$; laquelle retranchée de $\frac{x dy}{x \sqrt[3]{y}} - ax^{\frac{1}{3}} dy$ donne zéro. Donc l'intégrale complète de la proposée est $x \sqrt[3]{y} - ayx^{\frac{1}{3}} \pm C$. C'est ce dont on peut se convaincre, si on différentie cette quantité en faisant x & y variables.

XXVI.

Application de cette Méthode aux équations $A dx + B dy = 0$.

La même méthode s'applique aux équations différentielles que le Théorème fondamental nous aura montré être intégrables. Il faudra seulement observer de faire l'intégrale trouvée égale à une constante.

XXVII.

SCHOLIE. Il arrive souvent , comme on l'a déjà vu , que l'équation n'étant pas une différentielle complète , on peut la rendre telle en la multipliant par quelque facteur composé de x , de y & de constantes. Dans la suite de cet Ouvrage nous nous servirons du Théorème fondamental pour déterminer ce facteur dans certains cas. On trouve dans les Mémoires de l'Académie , année 1740 , une méthode pour découvrir souvent quel peut être ce facteur

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. II. 19

qui se seroit évanoui en différentiant, à cause de l'égalité à zéro. Cette méthode est des plus ingénieuses ; mais comme elle ne réussit pas toujours, que d'ailleurs le procédé en est assez pénible, nous ne la détaillerons pas ici. On peut la voir dans le Mémoire même que nous venons de citer, dans lequel elle est détaillée d'une manière exacte & lumineuse. Je passe à l'application du Théorème aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.

§. II. *Application du Théorème fondamental aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.*

XXVIII.

PREMIERE PROPOSITION. Soit $A dx + B dy + C dz = 0$ une équation quelconque différentielle contenant trois variables, on s'assurera d'abord si cette équation dans l'état où elle est, ne seroit pas la différentielle exacte de quelque équation à trois variables; ce qui se découvrira en examinant par le moyen de notre Théorème si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, si $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, & si $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Si ces trois équations ont lieu à la fois, la quantité $A dx + B dy + C dz$ est une différentielle complète, sinon elle n'en est pas une.

Moyen de s'assurer si les équations représentées par $A dx + B dy + C dz = 0$ sont intégrables.

DÉMONSTRATION. Il est évident que $A dx + B dy + C dz$ n'a point d'intégrale, si les équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ & $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ n'ont pas lieu en même temps. Car si $A dx + B dy + C dz$ est une différentielle complète, il faut que $A dx + B dy$ en soit une en supposant

C ij

z constant, & faisant varier x & y , ce qui donne, suivant le Théorème fondamental, $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. De même si $A dx + B dy + C dz$ est une différentielle complète, il faut que $A dx + C dz$ en soit une en supposant y constant, x & z variables; donc on aura $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$. On fera le même raisonnement sur $B dy + C dz$.

Pour prouver l'inverse de cette proposition, savoir que si les trois équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ ont lieu, $A dx + B dy + C dz$ est une différentielle exacte, il faut faire voir que l'intégrale de $A dx + B dy$ prise en faisant y & z constans, sera, à une fonction près de y & de z , l'intégrale de $A dx + B dy + C dz$, où x, y, z sont variables; c'est ce qu'on trouve de la façon suivante.

Je différentie $\int A dx$ en faisant x, y, z variables; j'aurai (Article XVI.) $A dx + dy \int \frac{dA}{dy} dx + dz \int \frac{dA}{dz} dx$. Il ne s'agit que de montrer que cette quantité ne diffère de la proposée que par une fonction de y, z, dy, dz , qui soit une différentielle complète: c'est-à-dire qu'il faut s'assurer $A dx - A dx + B dy - dy \int \frac{dA}{dy} dx + C dz - dz \int \frac{dA}{dz} dx$, ou en réduisant que $(B - \int \frac{dA}{dy} dx) dy + (C - \int \frac{dA}{dz} dx) dz$ est une fonction sans x & une différentielle complète.

Or 1°. si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\int \frac{dA}{dy} dx$, ou $\int \frac{dB}{dx} dx$ n'est que B plus une fonction de y & de z sans x . Donc $B - \int \frac{dA}{dy} dx$ est cette fonction sans x .

2°. Si $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\int \frac{dA}{dz} dx$, ou $\int \frac{dC}{dx} dx$ n'est que C .

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. II. 21

plus une fonction de y & de z sans x . Donc $C - \int \frac{dA}{dz} dx$ est cette fonction sans x . Donc $(B - \int \frac{dA}{dy} dx) dy + (C - \int \frac{dA}{dz} dx) dz$ est une quantité sans x .

Il nous reste à prouver qu'elle est une différentielle complete, ou, ce qui revient au même, que $d(B - \int \frac{dA}{dy} dx)$

$= d(C - \int \frac{dA}{dz} dx)$. Pour le prouver je remarque que

$\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ par l'hypothèse. Donc en effaçant dans les deux membres de l'équation ce qui se détruit, elle se réduit à $d(\int \frac{dA}{dy} dx) = d(\int \frac{dA}{dz} dx)$. Mais $dy \int \frac{dA}{dy} dx +$

$dz \int \frac{dA}{dz} dx$ est la différentielle de $\int A dx$ en faisant x constant, z & y variables; donc par le Théorème fondamental $d(\int \frac{dA}{dy} dx) = d(\int \frac{dA}{dz} dx)$. Donc $(B -$

$\int \frac{dA}{dy} dx) dy + (C - \int \frac{dA}{dz} dx) dz$ est une différentielle complete: cette même quantité est une fonction sans x . Donc, &c.

Appliquons la proposition précédente à un exemple.

XXIX.

Soit proposée l'équation différentielle $max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1} dy$ Exemple,
 $+ nay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dx - \frac{ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dx}{2} - \frac{ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz}{2}$
 $= 0$. Pour que cette différentielle soit intégrable, il faut que les trois équations suivantes aient lieu en même temps,

$$1^{\circ}. d \left\{ \frac{nay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} - ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right\} = d \left(\frac{max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}}{dx} \right)$$

y seul étant variable dans le premier membre, & x dans le second.

$$2^{\circ}. d \left(\frac{(n - \frac{1}{2}) ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}}{dz} \right) = d \left(\frac{-ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}}{2 dx} \right)$$

x seul étant variable dans le premier membre, & x dans le second.

$$3^{\circ}. d \left(\frac{max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}}{dz} \right) = d \left(\frac{-ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}}{2 dy} \right)$$

z seul étant variable dans le premier membre & y dans le second. Or les équations ont lieu, puisqu'on a en même temps

$$\frac{mnay^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dy}{dy} - \frac{amy^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dy}{2 dy} = \frac{(n - \frac{1}{2}) amy^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dx}{dx}, \frac{(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}) ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz}{dz} =$$

$$\frac{(-n + \frac{1}{2}) ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dx}{2 dx}, \text{ \& enfin } - \frac{amy^{m-1} x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz}{2 dz}$$

$$= - \frac{amx^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1} dy}{2 dy}. \text{ Donc l'équation proposée}$$

est intégrable. Nous trouverons par la méthode de l'article

suivant, que son intégrale est $\frac{ax^ny^n}{\sqrt{xz}} + C = 0.$

X X X.

Intégration
des équations
différentielles
completes à
trois varia-
bles.

SECONDE PROPOSITION. Lorsque j'ai reconnu que $A dx + B dy + C dz = 0$ est intégrable, voici la méthode qu'il faut suivre pour parvenir à l'intégration. J'intègre

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. II. 23

d'abord $A dx$ en regardant x comme variable, y & z comme constantes. Ce terme étant intégré, si la différentielle est provenue d'un seul terme composé de x , y , z & de constantes, on aura l'intégrale complete de la proposée; sinon il ne pourra manquer à l'intégrale qu'une fonction de y & de z . On trouvera cette fonction de la manière suivante. Je redifférentie la quantité intégrée $\int A dx$ en regardant x comme constant, y & z comme variables; je retranche la différentielle qui en résulte de $B dy + C dz$: le reste sera une fonction différentielle de y & z , dont l'intégrale sera la fonction à ajouter à $\int A dx$.

S'il paroissoit plus commode d'intégrer d'abord un des deux autres termes $B dy + C dz$, on en seroit le maître, & l'opération demeureroit la même pour les deux termes restants.

XXXI.

En suivant cette méthode, on trouvera l'intégrale de l'équation différentielle $\frac{abz^2 y^{-1} x^{-\frac{1}{2}} dx + 2abx^{\frac{1}{2}} y^{-1} z dz}{2}$ Application à un exemple particulier,

$- abx^{\frac{1}{2}} z^2 y^{-2} dy = 0$ que nous reconnoissons (Art. XXVIII.) être intégrable. Le premier terme intégré en traitant x seul comme variable est $abz^2 y^{-1} x^{\frac{1}{2}} + C$; & l'on voit au premier coup d'œil, que c'est l'intégrale complete de la proposée.

XXXII.

Qu'on nous demande si l'équation différentielle suivante Second Exemple,
 $abx^{-1} dz + \frac{bxydy - by^2 dx}{x^2 y(x+y)} - \frac{abz dx}{xx} = 0$ est intégrable

& quelle en est l'intégrale, il sera facile d'appliquer la méthode précédente à cette différentielle.

J'examine d'abord si l'on a les trois équations suivantes :

$$1^{\circ}. d \left\{ \frac{abx^{-1}}{dx} \right\} = d \left\{ \frac{-by^2}{x^2 \sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abz}{xx} \right\}, \quad x \text{ seul va-}$$

riant dans le premier nombre, & z seul dans le second ;

$$2^{\circ}. d \left\{ \frac{abx^{-1}}{dy} \right\} = d \left\{ \frac{bxy}{x^2 \sqrt{(xx+yy)}} \right\}, \quad y \text{ seul variant}$$

dans le premier membre & z seul dans le second ;

$$3^{\circ}. d \left\{ \frac{by}{x \sqrt{(xx+yy)}} \right\} = d \left\{ \frac{-by^2 - abz \sqrt{(xx+yy)}}{x^2 \sqrt{(xx+yy)}} \right\}, \quad x$$

seul variant dans le premier membre, & y seul dans le second. Or en différentiant suivant les conditions prescrites, je trouve que les trois équations précédentes ont lieu ; donc l'équation proposée est intégrable.

Cherchons maintenant quelle est son intégrale. Suivant ce qui est dit (Art. xxx.) je prends d'abord celle de $abx^{-1} dz$ en supposant x constant ; j'ai $\frac{abz}{x} + C$. Je différentie cette quantité en traitant z comme constant & x comme variable ; j'ai $-\frac{abz dx}{xx}$ que je retranche des trois autres termes de la proposée. Il me reste après cette opération $\frac{bxy dy - by^2 dx}{x^2 \sqrt{(xx+yy)}}$ dont l'intégrale ajoutée à la quantité $\frac{abz}{x}$ sera l'intégrale complete de la proposée. Pour intégrer (N) $\frac{bxy dy - by^2 dx}{x^2 \sqrt{(xx+yy)}}$, je me sers de la méthode exposée (Art. xxiv.) j'intègre le premier terme $\frac{by dy}{x \sqrt{(xx+yy)}}$ en supposant x constant : l'intégrale est $\frac{b \sqrt{(xx+yy)}}{x} + A$. Je la différentie en supposant x seule variable ; la différen-

tielle

tielle est $\frac{-by^2 dx}{x^2 \sqrt{xx+yy}}$: laquelle retranchée du second terme de la proposée (N) donne zéro. Donc $\int \frac{bxy dy - by^2 dx}{x^2 \sqrt{xx+yy}} = \frac{b\sqrt{xx+yy}}{x} + A$. Donc enfin l'intégrale de l'équation $\frac{abd z}{x} + \frac{bxy dy - by^2 dx}{x^2 \sqrt{xx+yy}} - \frac{abz dx}{xx} = 0$ est $\frac{abz + b\sqrt{xx+yy}}{x} + B = 0$.

XXXIII.

Supposons présentement qu'on ait découvert par la méthode de l'Article xxviii. que l'équation $A dx + B dy + C dz = 0$, dans l'état où elle est, n'est point une différentielle exacte, on cherchera quel est le facteur, qui multipliant tous les termes de cette équation la rendroit une différentielle complete.

Quand une équation différentielle à trois variables n'est pas complete, on peut quelquefois la rendre telle en la multipliant par un facteur commun à tous les termes.

Je nomme μ ce facteur commun à tous les termes de l'équation, & dont l'addition la rend une différentielle complete; alors $\mu A dx + \mu B dy + \mu C dz$ fera une différentielle complete. Par conséquent j'aurai les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{A d\mu}{d y} + \frac{\mu d A}{d y} &= \frac{B d\mu}{d x} + \frac{\mu d B}{d x} ; \\ \frac{A d\mu}{d z} + \frac{\mu d A}{d z} &= \frac{C d\mu}{d x} + \frac{\mu d C}{d x} ; \\ \frac{B d\mu}{d z} + \frac{\mu d B}{d z} &= \frac{C d\mu}{d y} + \frac{\mu d C}{d y} . \end{aligned}$$

Il ne s'agit maintenant que de donner à μ une forme assez générale avec des coefficients indéterminés, pour que cette quantité étant substituée dans les trois équations précédentes, en fasse évanouir tous les termes.

Mais avant que de chercher cette forme générale pour μ , il est nécessaire d'avertir que souvent on la chercheroit

Il y a une infinité d'équations différentielles à

trois variables inutilement, parce qu'il y a une infinité d'équations diffé-
 qui n'ont rentielles à trois variables qui n'ont point d'intégrales.
 point d'inté-
 grales.

XXXIV.

Premiere
 démonstra-
 tion.

Pour le prouver je reprends les trois équations précédentes,

$$\frac{A d \mu}{d y} + \frac{\mu d A}{d y} = \frac{B d \mu}{d x} + \frac{\mu d B}{d x};$$

$$\frac{A d \mu}{d z} + \frac{\mu d A}{d z} = \frac{C d \mu}{d x} + \frac{\mu d C}{d x};$$

$$\frac{B d \mu}{d z} + \frac{\mu d B}{d z} = \frac{C d \mu}{d y} + \frac{\mu d C}{d y}.$$

J'en fais évanouir les grandeurs $\frac{d \mu}{d x}$, $\frac{d \mu}{d y}$, $\frac{d \mu}{d z}$, qui sont des quantités finies; puisque $\frac{d \mu}{d x}$ &c. exprime le rapport de $d \mu$ à $d x$, à $d y$, à $d z$; rapport qui est toujours fini. Je les fais donc évanouir de la même maniere dont on fait évanouir trois inconnues ordinaires; il arrivera que μ s'évanouira en même temps, ce qu'il est aisé de voir par le calcul suivant. Des trois équations précédentes on tire $\frac{d \mu}{d y} = \frac{B d \mu}{d x} + \frac{\mu d B}{d x} - \frac{\mu d A}{d y}$ & aussi $\frac{d \mu}{d y} = \frac{B d \mu}{d z} + \frac{\mu d B}{d z} - \frac{\mu d C}{d y}$.

Donc $\frac{A B d \mu}{d z} + \frac{A \mu d B}{d z} - \frac{A \mu d C}{d y} = \frac{C B d \mu}{d x} + \frac{C \mu d B}{d x} - \frac{C \mu d A}{d y}$.

D'ailleurs on a $\frac{d \mu}{d x} = \frac{A d \mu}{d z} + \frac{\mu d A}{d z} - \frac{\mu d C}{d x}$. Substituant

cette valeur de $\frac{d \mu}{d x}$ dans l'équation précédente, elle devient $\frac{A B d \mu}{d z} + \frac{A \mu d B}{d z} - \frac{A \mu d C}{d y} = \frac{A B d \mu}{d z} + \frac{B \mu d A}{d z} - \frac{B \mu d C}{d x} + \frac{C \mu d B}{d x} - \frac{C \mu d A}{d y}$. Je réduis cette équation, je la divise par μ qui se trouve en multiplier tous les termes, après qu'on aura effacé ceux qui se détruisent; j'aurai $\frac{B d C}{d x} - \frac{C d B}{d x}$.

I. I. P A R T I E. S E C T. I. C H A P. II. 27

+ $\frac{A d B}{d z} - \frac{B d A}{d z} - \frac{A d C}{d y} + \frac{C d A}{d y} = 0$, équation qui nous apprend que C, A, B , doivent avoir entre eux la relation exprimée par cette équation pour que la proposée $A d x + B d y + C d z = 0$ soit intégrable.

X X X V.

Il n'en est donc pas des équations différentielles à trois variables comme de celles qui n'en ont que deux : car on est fondé à croire (ou du moins on n'a pas démontré le contraire jusqu'à présent) que toute équation différentielle à deux variables se tire de la différentiation de quelque équation en termes finis, au lieu que la démonstration précédente apprend qu'il y a une infinité d'équations à trois variables qui ne peuvent pas être venues par la différentiation d'aucune équation en termes finis.

Leur différence en cela, des équations à deux variables.

X X X V I.

Il y a plus : sans examiner si les équations différentielles à deux variables viennent de la différentiation de quelque équation en termes finis, il est aisé de prouver qu'elles expriment toujours une courbe dont la construction est possible.

Qui expriment toujours une courbe dont la construction est possible.

Car soit toute équation différentielle à deux variables représentée par $s d x = r d y$ (s & r étant des fonctions de x , de y & de constantes) ; prenons deux lignes à volonté $A B (x)$ & $B C (y)$; nous aurons par conséquent $B b = d x$, $c c' = d y = \frac{s d x}{r}$. Prenons ensuite

D ij

une ligne bb' à volonté pour un second dx , on aura $c'c' = dy = \frac{s dx}{r}$, s & r étant des fonctions de Ab & $b'c'$; & ainsi de suite; tous les points c, c' appartiendront à la courbe de l'équation donnée. Il est vrai qu'on ne peut exécuter cette opération; mais il suffit de l'imaginer exécutée, pour démontrer que toute équation différentielle à deux variables exprime toujours quelque courbe construite.

XXXVII.

Il n'en est pas ainsi des équations différentielles à trois variables. Toutes celles dans lesquelles l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$ n'a pas lieu, ne peuvent être construites en aucune manière, & les Problèmes dont la solution dépendroit d'équations pareilles, seroient impossibles.

Cette proposition peut encore se démontrer d'une autre manière indépendante de toute intégration.

Seconde démonstration.
Que plusieurs équations différentielles à trois variables ne peuvent avoir aucune construction.

Figure 3.
Cette démonstration se fait par le moyen des surfaces courbes.

Soit $dz = u dx + v dy$ une équation quelconque à trois variables, u & v étant des fonctions quelconques de x, y, z , avec des constantes; qu'on se propose de trouver la surface courbe exprimée par cette équation.

Soit AP l'axe des x , AQ celui des y , AR celui des z . Soient de plus PN la tranche de la surface courbe par un plan perpendiculaire à l'axe des x , & QN la tranche de la surface courbe par un plan perpendiculaire à l'axe des y ; l'équation de la tranche PN sera $dz = v dy$, & celle de la tranche QN sera $dz = u dx$.

I I. P A R T I E. S E C T. I. C H A P. I I. 29

Imaginons maintenant que q' & pn soient deux autres tranches de la surface courbe par des plans infiniment près & parallèles aux premiers ; on verra pour lors que si l'équation $dz = \omega dx + \vartheta dy$ exprime une surface courbe possible , il faudra que les deux courbes q' , pn , se rencontrent en un point l de la droite kl , section des deux plans $q\mu$, pmn ; c'est-à-dire qu'il faudra que l'équation de la courbe $q'l$ soit telle , qu'en y faisant $x = qk$, on ait pour z la même valeur qu'en faisant dans l'équation de la courbe pnl , $y = pk$.

Pour examiner si cela est , il faut chercher 1°. la valeur de lk prise pour une ordonnée de la courbe pnl ; & pour cela considérer lk comme ce qu'est devenue $\nu\mu$, lorsque AP est devenue Ap ; NM , nm ; PM demeurant la même. C'est-à-dire que dans la valeur de $\mu\nu = z + \vartheta dy$, il faudra mettre au lieu de z , nm , ou $z + \omega dx$, & au lieu de ϑ , ce que devient cette fonction , si l'on y substitue $x + dx$ pour x & $z + \omega dx$ pour z . Par cette opération on aura $lk = z + \omega dx + \vartheta dy + \frac{d\vartheta}{dx} dx dy + \frac{d\vartheta}{dz} \omega dx dy$.

On cherchera 2°. la valeur de lk prise pour ordonnée de la courbe q' ; & pour l'avoir, on substituera dans $nm = z + \omega dx$, $\nu\mu$, ou $z + \vartheta dy$ au lieu de z , & dans la fonction ω on substituera pour y , $y + dy$, & pour z , $z + \vartheta dy$, x demeurant constant. Par cette voye on aura $lk = z + \vartheta dy + \omega dx + \frac{d\omega}{dy} dy dx + \frac{d\omega}{dz} \vartheta dy dx$. Donc $z + \omega dx + \vartheta dy + \frac{d\vartheta}{dx} dx dy + \frac{d\vartheta}{dz} \omega dx dy = z + \vartheta dy$,

$+ \omega dx + \frac{d\omega}{dy} dy dx + \frac{d\omega}{dz} \vartheta dy dx$; ou bien en réduisant $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$. Donc il faut que cette équation ait lieu, pour que celle-ci $dz = \omega dx + \vartheta dy$ exprime une surface courbe possible.

XXXVIII.

COROLLAIRE. Il suit de là que l'équation $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$ doit être la même que l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$; c'est ce qu'il est aisé de vérifier: car puisque l'équation $dz = \omega dx + \vartheta dy$ est la même que $A dx + B dy + C dz = 0$, ou que $dz = -\frac{A dx}{C} - \frac{B dy}{C}$, il faut que $\omega = -\frac{A}{C}$, & que $\vartheta = -\frac{B}{C}$, $d\omega = \frac{AdC - CdA}{CC}$, $d\vartheta = \frac{BdC - CdB}{CC}$. Donc en substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$, on aura l'équation $\frac{BdC}{CC dx} - \frac{CdB}{CC dx} + \frac{AdB}{CC dz} - \frac{ABdC}{C^2 dz} = \frac{AdC}{CC dy} - \frac{CdA}{CC dy} + \frac{BdA}{CC dz} - \frac{ABdC}{C^2 dz}$, & en réduisant $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} = \frac{AdC}{dy} - \frac{CdA}{dy} + \frac{BdA}{dz}$, la même que nous avons trouvée plus haut.

XXXIX.

SCHOLIE. Il est évident maintenant que lorsque l'équation $\frac{BdC}{dx} - \&c.$ n'a pas lieu, la proposée $A dx + B dy + C dz = 0$, n'exprime aucune surface courbe; mais pour être certain que la surface courbe est possible, si l'équation $\frac{BdC}{dx} - \&c.$ a lieu, il faut s'assurer que toutes

les fois que l'on a cette équation , on a le même x , soit qu'on le prenne dans la tranche des y & des x , soit qu'on le prenne dans la tranche des z & des x .

Pour reconnoître que cela fera ainsi , il faut observer que le calcul qui exprimeroit cette nouvelle condition , ne différeroit de celui que nous venons de faire , qu'en ce qu'on auroit des x au lieu des z , & C au lieu de A . Si donc on pratique cette opération , l'équation $\frac{B d C}{d x} - \frac{C d B}{d x} + \frac{A d B}{d z} - \frac{B d A}{d z} - \frac{A d C}{d y} + \frac{C d A}{d y} = 0$ deviendra celle-ci $\frac{B d A}{d z} - \frac{A d B}{d z} + \frac{C d B}{d x} - \frac{B d C}{d x} - \frac{C d A}{d y} + \frac{A d C}{d y} = 0$; qui est la même absolument que la précédente , en changeant les signes & transposant.

Par cette voie l'on démontreroit aussi qu'on trouveroit le même y en le cherchant soit dans la tranche des y & des z , soit dans la tranche des x & des y .

X L.

Après avoir donné la méthode qui nous fera reconnoître celles d'entre les équations différentielles à trois variables qui ne peuvent être ni intégrées ni construites , il faut apprendre à déterminer le facteur qui rendra completes celles qui sont susceptibles d'intégration ou de construction ; mais auparavant il est nécessaire de faire les remarques suivantes qui suivent de la différentiation des quantités.

On remarquera d'abord que la plupart des fonctions qui n'ont pas un certain facteur commun à tous leurs termes , n'ont pas non plus ce même facteur à leurs différentielles,

Maniere de trouver le facteur qui peut rendre complete une équation différentielle à trois variables , lorsqu'elle est susceptible d'intégration ou de construction.

32 TRAITE' DU CALCUL INTE'GRAL:

On remarquera en second lieu que si une fonction a un dénominateur, sa différentielle aura aussi un dénominateur qui sera un multiple de celui de l'intégrale.

D'après ces observations, mettons au lieu de $\mu, \frac{P}{Q}$, P & Q étant deux fonctions sans diviseurs, P sera un facteur de la fonction φ cherchée, dont la différence est $\frac{PA}{Q} dx + \frac{PB}{Q} dy + \frac{PC}{Q} dz$, & Q contiendra le dénominateur de la même fonction φ .

J'imagine que la différentielle est divisée par l'intégrale, P s'en ira du numérateur & Q se divisera par le dénominateur. Il ne restera par conséquent après la division, pour le dénominateur commun à tous les termes, qu'une fonction R d'un degré de plus que celui de A, B, C : nous disons d'un degré de plus, parce que la quantité $\frac{Adx + Bdy + Cdz}{R}$ qui vient par cette division, est égale à $\frac{d\varphi}{\varphi}$, ou à la différence du logarithme de la fonction cherchée, & que par conséquent elle doit être d'un degré au dessous de l'unité.

Pour trouver R , on le prendra égal à la fonction positive, c'est-à-dire sans diviseurs, la plus générale d'un degré au dessus de A , avec des coefficients indéterminés; s'il y a des radicaux dans A, B, C , il faut aussi qu'ils entrent dans R , en se combinant avec x, y, z , de toutes les manières possibles.

On fera ensuite les trois équations suivantes :

$$\frac{R dA}{dx} - \frac{A dR}{dy} = \frac{R dB}{dx} - \frac{B dR}{dx},$$

$$\frac{R dB}{dx}$$

$$\frac{R \, d B}{d z} - \frac{B \, d R}{d z} = \frac{R \, d C}{d y} - \frac{C \, d R}{d y},$$

$$\frac{R \, d A}{d z} - \frac{A \, d R}{d z} = \frac{R \, d C}{d x} - \frac{C \, d R}{d x},$$

afin de déterminer par leurs secours les coefficients indéterminés de la fonction R . Mais entre ces trois équations on choisira les deux qui paroîtront donner moins de calcul, la troisieme étant inutile. Car il est aisé de voir que si l'on s'est assuré au moyen de l'équation $B \frac{d C}{d x} - C \frac{d B}{d x} + \&c.$ que l'équation $A \, d x + B \, d y + C \, d z = 0$ est possible, il arrivera que la fonction R qui convient à deux des trois équations précédentes conviendra aussi à la troisieme.

Après avoir déterminé par le secours de ces deux équations les coefficients de R , & par conséquent R même, on intégrera $\frac{A \, d x + B \, d y + C \, d z}{R}$, par la méthode de l'article xxx. pour intégrer une différentielle qu'on fait être exacte. Ensuite on égalera l'intégrale trouvée à une constante, & l'on aura l'intégrale de la proposée.

X L I.

Appliquons maintenant le Théorème aux quantités & aux équations différentielles qui renferment quatre, cinq &c. variables.

Application
du Théorème
aux différen-
tielles qui ont
4, 5, &c. variables.

Soit la différentielle $A \, d x + B \, d y + C \, d z + D \, d u + E \, d s + \&c.$ dans laquelle $A, B, C, D, E, \&c.$ expriment des fonctions de x, y, z, u, s , & de constantes; pour que cette quantité fasse une différentielle exacte, il faudra que deux des termes quelconques de cette quantité

fassent toujours une différentielle complete, en ne regardant comme variables que les deux seules lettres dont les différentielles se trouvent dans ces deux termes. On aura donc autant d'équations comme $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ &c. à vérifier, qu'il y a de manieres de combiner deux à deux les fonctions A, B, C , &c. Si ces équations ont lieu, la proposée sera intégrable; autrement elle ne le sera pas. Dans le premier cas le procédé à suivre pour en trouver l'intégrale sera le même à peu près que celui que nous avons pratiqué, (Art. xxx.) pour les différentielles à trois variables; il n'y aura de différence que dans la longueur du Calcul.

X L I I.

Procédé pour les équations à 4, 5, &c. variables.

Méthode pour s'assurer si elles peuvent devenir complètes, lorsqu'elles ne le sont pas.

Nombre d'équations à vérifier.

A l'égard des équations telles que $A dx + B dy + C dz + D du + E ds + \&c. = 0$ qui représente une équation quelconque composée de x, y, z, u, s , &c. avec leurs différentielles & des constantes; on verra d'abord si cette équation dans l'état où elle est proposée, est une différentielle complete, & la maniere de s'en assurer sera de vérifier autant d'équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ &c. qu'il y a de façons possibles de combiner deux à deux les lettres A, B, C, D, E , &c. Si l'équation proposée n'est pas une différentielle complete, il faut examiner si elle peut le devenir. Pour faire cet examen je prends à volonté trois termes de la proposée, & les égalant à zéro, je vois s'ils forment une équation possible, en observant toutefois d'y regarder comme constantes toutes les lettres, excepté

les trois dont les différentielles se trouvent dans ces trois termes. Donc en pratiquant ce qui a été dit (Art. xxxiv.) pour les équations à trois variables, on voit aisément qu'on aura autant d'équations à vérifier comme $\frac{B d C}{d x} - \frac{C d B}{d x} + \frac{A d B}{d z} - \frac{B d A}{d z} - \frac{A d C}{d y} + \frac{C d A}{d y} = 0$, qu'il aura de manières de combiner trois à trois les fonctions A, B, C, D, E , &c. Lorsque toutes les équations de la même nature que la précédente, venues par la combinaison des termes $A d x + B d y + C d z + D d u + \&c.$ pris trois à trois, auront en même temps lieu, on pourra rendre l'équation proposée une différentielle complète.

XLIII.

REMARQUE. On peut cependant abréger le nombre de ces équations à vérifier, parce que quelques-unes suivent nécessairement des autres. Pour le prouver je prends l'équation à quatre variables $A d x + B d y + C d z + D d u = 0$. Cette équation par la combinaison des quatre lettres A, B, C, D prises trois à trois me donnent les quatre équations suivantes :

Ce nombre peut quelquefois se diminuer.

Preuve sur une équation à quatre variables.

$$1^{\circ}. A d x + B d y + C d z = 0$$

$$2^{\circ}. A d x + B d y + D d u = 0$$

$$3^{\circ}. A d x + C d z + D d u = 0$$

$$4^{\circ}. B d y + C d z + D d u = 0$$

De la première équation on tire en suivant le calcul de l'Article xxxiv. $\frac{B d C}{d x} - \frac{C d B}{d x} + \frac{A d B}{d z} - \frac{B d A}{d z} - \frac{A d C}{d y} + \frac{C d A}{d y} = 0$; la seconde nous donne en suivant le même

33 *TRAITÉ DU CALCUL INTEGRAL.*

$$\text{calcul } \frac{BdD}{dx} - \frac{DdB}{dx} + \frac{AdB}{du} - \frac{BdA}{du} - \frac{AdD}{dy} + \frac{DdA}{dy} = 0 ;$$

$$\text{la troisieme nous donne } \frac{CdD}{dy} - \frac{DdC}{dy} + \frac{AdC}{du} - \frac{CdA}{du} - \frac{AdD}{dz} + \frac{DdA}{dz} = 0 ; \text{ \& enfin on tire de la quatrieme,}$$

$$\frac{CdD}{dy} - \frac{DdC}{dy} + \frac{BdC}{du} - \frac{CdB}{du} - \frac{BdD}{dz} + \frac{DdB}{dz} = 0 .$$

Or on voit aisément que si on prend trois de ces équations à volonté , la quatrieme s'ensuit nécessairement ; donc pour s'assurer si une équation à quatre variables peut devenir complete , il suffira de vérifier trois des équations de condition qu'elle donne.

XLIV.

COROLLAIRE. En faisant le même raisonnement sur les équations à cinq variables , on verra que des dix équations de condition que donne la combinaison des fonctions *A, B, C, D, E*, prises trois à trois , six suffiront pour déterminer si l'intégration ou la construction est possible. De même si la proposée avoit six variables , telles que la suivante $A dx + B dy + C dz + D du + E ds + F dr = 0$; des vingt équations de condition que donne la combinaison des six lettres *A, B, C, D, E, F*, prises trois à trois , il suffira d'en vérifier dix.

Donc en général le nombre des variables contenues dans une équation différentielle étant *m* , le nombre d'équations nécessaires à vérifier pour savoir si la proposée peut devenir complete , sera ce que le nombre *m* — 1 peut donner de combinaisons deux à deux ; c'est-à-dire

$$\frac{(m-1) \cdot (m-2)}{2} .$$

XLV.

Lorsque par les procédés que nous venons d'indiquer on aura reconnu que les équations à trois, quatre, cinq, &c. variables peuvent être rendues complètes, il faudra chercher le facteur qui doit pour cela multiplier tous les termes de l'équation. Nous ne détaillerons pas ici la méthode de trouver ce facteur; le lecteur qui sera curieux de la connaître la trouvera dans le mémoire que nous avons déjà cité dans ce Chapitre.

XLVI.

Maintenant on est en état de s'assurer si une quantité ou une équation différentielle est intégrable ou non; & l'on voit que cette connoissance doit épargner beaucoup de peines souvent inutiles. Avant que de commencer le détail des méthodes particulières, il est bon d'observer qu'il y a des équations différentielles qui ont une intégrale algébrique, d'autres qu'on ne peut intégrer algébriquement, mais dont on parvient à séparer les indéterminées. Nous allons d'abord examiner comment on construit les équations dans lesquelles les indéterminées sont séparées; ensuite nous traiterons des différentielles qui s'intègrent en les multipliant ou les divisant par des fonctions de leurs indéterminées, ou en opérant sur elles par les transformations enseignées dans le second Chapitre de la première Partie. De là nous détaillerons les méthodes différentes de séparer les indéterminées dans les équations différentielles.

CHAPITRE III.

De la construction des équations différentielles dans lesquelles les indéterminées sont séparées.

XLVII.

LEMME. **D**Ans une équation différentielle qu'on veut construire, il faut d'abord mettre d'un côté les dx & de l'autre les dy ; alors l'équation sera de cette forme $X dx = Y dy$ (X exprimant une fonction quelconque de x , & Y une fonction quelconque de y). Quand les deux membres de cette équation ne sont pas intégrables, alors on la construit par les quadratures: nous allons donner la méthode qu'il faut suivre pour cela. Mais nous observerons auparavant de quelle manière on trouve le nombre des dimensions d'une quantité quelconque X , formée de x & de constantes. Par exemple, ax^3 est de quatre dimensions, de même que $ax^3 + b^2x^2$; $\sqrt{(x^4 + c^3x)}$ est de deux; $\frac{ax^3 + b^2x^2 + g^3\sqrt{(x^4 + c^3x)}}{\sqrt{(ex + ff)}}$ est de trois, parce que le numérateur est de quatre & le dénominateur de une; & ainsi de suite.

XLVIII.

PROBLEME. Construire une équation différentielle dans laquelle les indéterminées sont séparées.

Procédé pour faire la construction.

SOLUTION. Je prends le nombre des dimensions de

X & de Y , nombre qui doit être le même. Si tous les termes n'avoient pas en apparence la même dimension, ils doivent être censés l'avoir, parce que ceux qui ont la plus petite dimension, doivent être censés multipliés par une puissance convenable d'une ligne constante, qu'on prend pour l'unité.

Soit le nombre des dimensions représenté par n , je divise mon équation par a^n (a est une constante quelconque.) J'ai donc $\frac{Ydy}{a^n} = \frac{Xdx}{a^n}$. Pour construire cette équation, soient AP , AQ perpendiculaires l'une à l'autre ;

Figure 4.

soit une courbe EK telle que $AP = x$

$$PK = \frac{x}{a^{n-1}};$$

l'aire de la courbe $APKE = \int \frac{Xdx}{a^{n-1}};$

Soit encore la courbe TD , telle qu'on ait $AQ = y$

$$QT = \frac{y}{a^{n-1}};$$

l'aire de la courbe $AQTD = \int \frac{Ydy}{a^{n-1}};$

Maintenant supposons qu'on ait $au = \int \frac{Xdx}{a^{n-1}};$

on en tirera $u = \int \frac{Xdx}{a^n};$

ensuite on tracera une courbe GN telle que $PN = u$;

supposons de même que $at = \int \frac{Ydy}{a^{n-1}};$

on aura $t = \int \frac{Ydy}{a^n};$

& soit la courbe SO telle que $SQ = t$.

Il faut donc que $t = u$.

Ayant pris $AH = QS$, on menera AI sous un angle

de 45° ; puis tirant HI parallèle à AQ , du point I on mènera IN parallèle à AP qui déterminera le point N , tel que $PN(u) = QS(t)$, & par conséquent $\int \frac{x^d x}{a^n} = \int \frac{y^d y}{a^n}$. Donc si on prolonge SQ & PN jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en M , le point M sera à la courbe qu'exprime l'équation proposée.

XLIX.

REMARQUE 1. Quelquefois il est nécessaire d'ajouter une constante ; c'est la nature du Problème qui doit servir à la déterminer : on n'ajoutera cette constante que d'un seul côté ; car il seroit inutile d'en ajouter des deux côtés à la fois, puisque l'on pourroit regarder ces deux constantes comme n'en faisant qu'une.

L.

REMARQUE 2. Si l'un des deux membres de l'équation différentielle proposée étoit intégrable, alors ce membre dépendroit d'une courbe quarrable, & l'autre membre se construiroit de la manière que nous venons d'exposer. Par exemple, si l'on avoit l'équation $dx \sqrt{px} = Y dy$ (Y exprimant une fonction de y , telle que le second membre ne soit pas intégrable algébriquement) l'intégration de cette équation donne $\frac{2x\sqrt{px}}{3} = \int Y dy$. On auroit le premier membre en traçant une parabole dont l'équation seroit $yy = px$, & l'autre membre se construiroit comme dans le Problème.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

De la séparation des indéterminées dans les équations différentielles par les règles ordinaires de l'Algebre , ou par de simples transformations.

L I.

IL est aisé de sentir qu'en séparant les indéterminées dans une équation différentielle, on la réduit aux cas de la premiere Partie ; puisqu'alors on peut regarder chaque membre de l'équation, comme une différentielle particulière qui ne contient qu'une variable. C'est cette opération que nous allons maintenant pratiquer ; d'abord pour des équations différentielles assez simples ; nous passerons ensuite aux plus composées.

L I I.

1°. Si on avoit des équations de la forme suivante $aa x dx + yy x dx = y dy \sqrt{xx + ff}$, qui équivaut à la suivante $(aa + yy) \cdot x dx = y dy \sqrt{xx + ff}$; on verroit au premier coup d'œil que les indéterminées s'y séparent par une simple division : car on a $\frac{x dx}{\sqrt{xx + ff}} = \frac{y dy}{aa + yy}$; dont l'intégrale est, comme on le fait, $(xx + ff)^{\frac{1}{2}} = l(aa + yy)^{\frac{1}{2}} + C$.

Exemples de cette séparation par les règles ordinaires de l'Algebre.

Premier exemple,

L I I I.

Second
exemple. De même l'équation $\frac{x dx}{\sqrt[3]{(a^3 + y^3)}} = \frac{y dy}{\sqrt[3]{(b^3 - x^3)}}$ devient par la seule multiplication $x dx \cdot (b^3 - x^3)^{\frac{1}{3}} = y dy \cdot (a^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$; équation dans laquelle les indéterminées sont séparées, & que l'on construira par la méthode enseignée plus haut.

L I V.

Troisième
exemple. Que j'aie $xx dx^2 + xy dx dy = aady^2$; je remarque que le premier membre de cette équation seroit un carré, s'il y avoit de plus $\frac{yy dy^2}{4}$. J'ajoute donc de part & d'autre cette quantité, & l'équation devient $xx dx^2 + xy dx dy + \frac{yy dy^2}{4} = aady^2 + \frac{yy dy^2}{4}$. Je prends la racine quarrée, ce qui me donne $xdx + \frac{ydy}{2} = \pm dy \times \left\{ \frac{yy}{4} + aa \right\}^{\frac{1}{2}}$; équation dans laquelle les indéterminées sont séparées. L'intégrale de cette équation est $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} \pm \int \left\{ dy \sqrt{\left(\frac{yy}{4} + aa \right)} \right\} + C = 0$, dont la partie qui est sous le signe $\int$ dépend de la quadrature d'une hyperbole équilatere par rapport à son second axe, l'origine des coordonnées étant au centre de la courbe.

Il en est ainsi d'un grand nombre d'autres équations différentielles qu'il est inutile de détailler ici.

L V.

Exemples de
cette même
séparation par 2°. Pour séparer les indéterminées dans l'équation suivante $adx = ydy - xdy$; on fera $y - x = z$, ou $y =$

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. IV. 43

$z + x$; $dy = dz + dx$. Après les substitutions, l'équa- des transfor-
 tion proposée deviendra $adx = zdz + zdx$; ou $adx -$ mations.
 $zdx = zdz$. Donc en divisant par $a - z$, on a $dx =$ Premier
 $\frac{zdz}{a-z}$; équation dans laquelle les indéterminées sont sépa- exemple.
 rées; & qui a pour intégrale $x = a - z + l(a - z)^{-a} + C$.
 Remettant pour z la valeur $y - x$, on aura $x = a - y$
 $+ x + l \frac{1}{(a - y + x)^a} + C$ pour l'intégrale cherchée. On
 verra d'ailleurs plus bas une méthode pour intégrer cette
 équation sans transformation. Voyez le Chap. VII.

LVI.

Soit l'équation $axdx = x^2dy + 2xydy + ydy$; Second
 je fais $x + y = z$: j'en tire $dx + dy = dz$. La propo- exemple,
 sée devient donc $axdz - axdy = z^2dy$; c'est-à-dire
 $\frac{axdz}{zz + aa} = dy$: j'intègre maintenant, & j'ai $y = \int \frac{axdz}{zz + aa}$;
 le second membre dépendant (Art. CVII. de la I^{re} Partie,)
 de la quadrature du cercle.

LVII.

Si la proposée étoit $(xdy + ydx) \times (a^4 - xxy)^{\frac{1}{2}} =$ Troisième
 $\frac{xdx + ydy}{(xx + yy)^{\frac{1}{2}}}$, je remarque que dans le premier membre de exemple.
 cette équation $xdy + ydx$ est la différentielle de xy &
 que le carré de cette intégrale se trouve dans la quantité
 sous le signe. Je fais donc $xy = z$, & j'ai pour premier
 membre de ma transformée $dz \cdot (a^4 - zz)^{\frac{1}{2}}$ qui est tel
 que je le demande. Je vois de plus que dans le second

$$= 1 + \frac{y^2 dy^2 - x^2 dy^2}{y^2 dx^2 - 2xy dy dx + x^2 dy^2} \cdot \text{Donc } \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy \sqrt{y^2 - x^2}}{y dx - x dy}; \text{ ou bien } \frac{Y}{(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y dx - x dy}{dy \sqrt{y^2 - x^2}}. \text{ Soit maintenant } \frac{x}{y} = z, \text{ on aura } y dx - x dy = y^2 dz; \& \text{ après les substitutions la transformée sera } \frac{Y}{(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y dz}{dy \sqrt{(1 - z^2)}}. \text{ Donc enfin } \frac{Y dy}{y \sqrt{(y^2 - x^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}.$$

Passons maintenant à des cas plus généraux dans lesquels les indéterminées se séparent encore par de simples transformations.

LXII.

Cas plus généraux que les précédens qui s'intègrent de même.

Première formule.

PROBLEME I. Séparer les indéterminées dans la formule générale $\frac{ay^{n-1}dy}{b+(cy^n+p)^a} = gqdx$, p & q étant des fonctions de x telles que $q = \frac{dp}{dx}$.

SOLUTION. Soit $(cy^n + p)^a = z$; on en tire $cy^n + p = z^{\frac{1}{a}}$, & en différenciant & mettant pour dp la valeur qdx , on aura $y^{n-1}dy = \frac{1}{a} z^{\frac{1}{a}-1} dz - qdx$.

$$\text{Donc } \frac{ay^{n-1}dy}{b+(cy^n+p)^a} = \frac{\frac{a}{a} z^{\frac{1}{a}-1} dz - aqdx}{cn \cdot (b+z)} = gqdx.$$

Donc enfin $\frac{az^{\frac{1}{a}-1} dz}{abcgn + acgnz + aa} = qdx$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées.

LXIII.

Application à un exemple.

Soit dans la formule précédente $b = 2g$
 $a = f^2$

$$n = 1$$

$$p = bx$$

$$q = b$$

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

l'équation sera $\frac{f^1 dy}{(cy + bx)^{\frac{1}{2}} \cdot 2g + (cy + bx)^{\frac{1}{2}}} = bg dx$. Je ferai donc $(cy + bx)^{\frac{1}{2}} = z$; j'aurai $y = \frac{zx - bx}{c}$; $dy = \frac{z dz - b dx}{c}$; & pour transformée, l'équation suivante $\frac{2f^1 z dz - b f^1 dx}{c \cdot (2g + z)} = bg dx$; ou $2f^1 z dz - b f^1 dx = 2bcg^2 dx + bcgz dx$. Donc $\frac{2f^1 z dz}{2cg^2 + f^1 + cgz} = b dx$; équation réduite en fraction rationnelle.

LXIV.

PROBLEME 2. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{y^a dx}{(bx^t + ay^n x^r)^m} = cx^q dy$; a, b, c , étant des constantes. Seconde formule plus générale.

SOLUTION. Soit $(bx^t + ay^n x^r)^m = zx^{m^1}$; on aura la transformée suivante $\frac{(z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{\alpha}{n}} dx}{a^{\frac{\alpha}{n}} z x^{m^1}} =$
 $\frac{cx^q}{na^{\frac{1}{n}}} \times (z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{1}{n}-1} \times \left\{ \frac{1}{m} x^{t-r} z^{\frac{1}{m}-1} dz + (t-r) z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx - (t-r) bx^{t-r-1} dx \right\}$, ou bien, en divisant par $(z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{1}{n}-1}$,
 $a^{\frac{1}{n}} m n x^{\frac{\alpha t}{n} - \frac{\alpha r}{n} + t-r - \frac{t}{n} + \frac{r}{n}} \cdot (z^{\frac{1}{m}} - b)^{\frac{\alpha}{n} + 1 - \frac{1}{n}} dx =$
 $a^{\frac{\alpha}{n}} cx^q + m^1 + t-r-1 + \frac{1}{n} z^{\frac{1}{m}} dz + (t-r) \times$

$$a^{\frac{\alpha}{n}} m z^{\frac{1}{m}+1} x^{q+mt+t-r-1} dx - (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} b m z x^{q+mt+t-r-1} dx.$$

Or il est évident que si dans cette équation $\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} - \frac{t}{n} + \frac{r}{n} = q + m t - 1$, les indéterminées se sépareront ;

$$\text{car alors on aura } \frac{mdx}{x} = \frac{a^{\frac{\alpha}{n}} c z^{\frac{1}{m}} dz}{a^{\frac{1}{n}} n \cdot (z^{\frac{1}{m}} - b)^{\frac{k}{n}-1} - (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} z^{\frac{1}{m}+1} + (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} b z}$$

donc les indéterminées se sépareront dans la proposée toutes les fois qu'on aura $\alpha = \frac{nq + nmt - n + t - r}{t - r}$; ou bien $q = \frac{\alpha t - \alpha r - mnt + n - t + r}{n}$.

L X V.

Application Soit dans la formule $\alpha = 2$
à un exemple. $t = 2$
 $n = 1$
 $r = 1$
 $m = \frac{1}{2}$

on aura l'équation suivante $\frac{hy^2 dx}{(bbxx + gxy)^{\frac{1}{2}}} = x dy$. Je fais $(bbxx + gxy)^{\frac{1}{2}} = xz$; ce qui me donne la transformée suivante $\frac{h dx}{g^2} \cdot \frac{(z^2 x - bbx)^2}{z^2} = \frac{x}{g} \times (2xz dz - bbdx + z^2 dx)$, & après la réduction on aura $h dx \times (z^4 - 2b^2 z^2 + b^4) = 2g x z^3 dz - b g^2 z dx + g z^2 dx$. Donc $\frac{dx}{x} = \frac{2g z^2 dz}{h z^4 - 2k b^2 z^2 + h b^4 - g z^2 + b^2 g z}$.

Il en sera de même pour beaucoup d'autres équations particulières. Je passe maintenant à plusieurs cas généraux dans lesquels les indéterminées se séparent par des méthodes qui leur sont propres.

CHAPITRE

CHAPITRE V.

De la séparation des indéterminées dans les équations homogenes.

LXVI.

DÉFINITION. **O**N appelle *équations homogenes* celles dans lesquelles la somme des dimensions des x & des y , ou séparées, ou prises ensemble, est la même dans tous les termes de l'équation. Telles sont les suivantes, $xx dy + gyy dx = fz^2 du + au^2 dz$, ou bien $xy dx + byy dx = gx^2 dy + hxy dy$. Telle est encore la suivante $dx (x\sqrt{x^4 + y^4} + gy^2\sqrt{xy^2 + x^3}) = dy \{ax^3 + by^2x + gy^2\sqrt{xx + yy}\}$ &c. Cela posé.

Ce que c'est qu'une équation homogene.

LXVII.

PROBLEME. Séparer les indéterminées dans les équations homogenes, à deux variables.

Solution générale du Problème.

SOLUTION. Soit mise l'équation sous cette forme $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}$, p exprimant le numérateur du second membre & q le dénominateur. Il est évident 1°. qu'en faisant $x = yz$, on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{y dz}{dy} + z$. 2°. Qu'en substituant pour x sa valeur yz dans p & dans q , y se trouvera à la même dimension dans tous les termes de p & dans ceux de q ; par exemple, si $\frac{p}{q} = \frac{gx^3 + hxy}{xy + byy}$; mettant pour x

II. Partie.

G

fa valeur yz on aura $\frac{gy^2z^2+hz y^3}{zy^2+by^3}$, fraction dans laquelle y a la même dimension dans tous les termes du numérateur & du dénominateur. Donc on pourra faire disparaître de l'un & de l'autre, y ; & $\frac{p}{q}$ se réduira à une quantité Z qui ne contiendra que z & des constantes. Donc on aura $\frac{ydz}{dy} + z = Z$, ou bien $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{Z-z}$, équation dans laquelle tout est séparé.

LXVIII.

Application
à un exem-
ple.

Soit à intégrer l'équation homogene $x dx \sqrt{x^4+y^4} + g y^2 dx \sqrt{xy^2+x^3} = ax^3 dy + by^2 x dy + qy^3 dy \sqrt{x^2+y^2}$; je la mets sous la forme suivante, $\frac{dx}{dy} = \frac{ax^3+by^2x+qy^3\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^4+y^4}+gy^2\sqrt{xy^2+x^3}}$, je fais $x=yz$; j'aurai par conséquent en substituant dans cette équation pour x & dx leurs valeurs $\frac{ydz}{dy} + z = \frac{az^3+bz+q\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{z^4+1}+g\sqrt{z+z^3}}$, ou bien $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{az^3+bz+q\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{z^4+1}+g\sqrt{z+z^3}} - z}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées.

LXIX.

Cette regle
s'étend à toutes les équations homogenes, à quelque puissance qu'y soient élevées les dx & les dy .

REMARQUE 1. Si dans l'équation homogene les dx & les dy étoient élevées à une puissance au-dessus du premier degré, on suivroit la même regle pour séparer les indéterminées.

Soit, par exemple, $xxdy^2+xydx^2=yydx^2$; on

donnera à cette équation la forme suivante, $dy^2 = dx^2 \left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} \right)$; donc $dy = \pm dx \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}$. Soit donc $\frac{y}{x} = \frac{z}{a}$, on en tire $ady = xdz + zdx$; & aussi $ady = dx \sqrt{(zz - az)}$. Donc $xdz + zdx = dx \sqrt{(zz - az)}$. Donc enfin $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z - \sqrt{(zz - az)}}$.

L X X.

Que l'équation proposée soit $x^2 dy^2 + xy dx dy = x^2 dx^2$, on remarquera que le premier membre seroit un carré, s'il contenoit de plus $\frac{yy dx^2}{4}$. J'ajoute donc ce terme de part & d'autre, & après avoir extrait la racine quarrée, la proposée devient $xdy + \frac{1}{2}y dx = \pm dx \sqrt{(xx + \frac{yy}{4})}$, équation qui est dans le cas de notre Problème, & qui devient par conséquent intégrable ou constructible par la méthode précédente.

L X X I.

Cette dernière méthode n'est applicable qu'aux équations dans lesquelles dy^2 ou dx^2 ne montent qu'au second degré, & dans lesquelles par conséquent on peut trouver la valeur de $\frac{dy}{dx}$. On trouvera plus bas (Art. CLIV.) une méthode pour les cas plus composés.

L X X II.

REMARQUE 2. La méthode que nous venons d'ex- Elle s'étend aussi aux équations homogènes qui

contiennent
plus de deux
variables, en
y faisant tou-
tesfois quel-
que change-
ment.

s'étendra aussi en y faisant quelques additions aux équations homogenes à trois ou à tant de variables qu'on voudra, pourvu que ces équations ne renferment point de constantes.

LXXIII.

Exemple
général.

PROBLEME. Intégrer l'équation générale $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, X, Y, Z représentent des fonctions homogenes & sans constantes de x, y, z . La méthode seroit la même si l'on avoit 4, 5 ou un plus grand nombre de variables.

SOLUTION. Je fais $y = xu$, & $z = xt$. On voit clairement qu'en substituant pour y & pour z leurs valeurs, X qui contient des x , des y & des z sans constantes, se changera en une nouvelle fonction composée de x élevée à une puissance du degré de la fonction X , & multipliée par une fonction de u & de t . De même la fonction Y sera changée en une nouvelle composée de x élevée encore à la même puissance, & multipliée par une autre fonction de u & de t ; & ainsi de Z . Supposant donc que m représente le degré des fonctions X, Y, Z , & que F, G, H soient des fonctions différentes de u & de t , substituons pour X , $x^m F$, pour Y , $x^m G$, & pour Z , $x^m H$; mettons aussi pour dy la valeur $xdu + udx$, & pour dz la valeur $xd t + tdx$, il est évident qu'on aura la transformée suivante $x^m dx . (F + Gu + Ht) + x^{m+1} Gdu + x^{m+1} Hdt = 0$, ou en divisant tous les termes par $x^{m+1} . (F + Gu + Ht)$, on a $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$;

Or dans l'équation mise sous cette forme les x sont séparées des u & des t ; car les fonctions F, G, H ne contiennent point de x . Il ne s'agit donc que de savoir (Chap. II.) si $\frac{G du + H dt}{F + Gu + Ht}$ est une différentielle complète, & de l'intégrer ensuite.

LXXIV.

Soit dans la formule précédente : : : $X = xy^2z^3$ Exemple
 $Y = zx^2y^3$ particulier
 $Z = y^2x^2z^2$

On aura $m = 6$
 & l'équation à intégrer sera $y^2z^3x dx + zx^2y^3 dy + y^2x^2z^3 dz = 0$. Je fais $y = xu$ & $z = xt$, on aura $x^6t^3u^3 dx + x^6tu^3 dy + x^6t^2u^2 dz = 0$, dans laquelle x est, comme on voit, élevée dans chaque terme au même degré que les fonctions X, Y, Z . Maintenant substituons pour dy & dz leurs valeurs, on aura la transformée suivante $(2u^2t^3 + u^4t) \cdot dx + xt u^3 du + xu^2t^2 dt = 0$, ou enfin $\frac{dx}{x} + \frac{u du + t dt}{uu + 2tt} = 0$.

LXXV.

Après avoir exposé cette méthode de séparer les indéterminées dans les équations homogenes, nous allons détailler plusieurs moyens de rendre homogenes des équations qui ne l'étoient pas.



C H A P I T R E V I.

*Méthodes pour rendre homogenes des équations
qui ne le sont pas.*

L X X V I.

Elles sont
au nombre de
deux.

NOus allons ici exposer deux méthodes qui servent à rendre homogenes des équations qui ne le sont pas. La premiere consiste à se servir de substitutions convenables, & on ne peut lui donner aucune forme générale; ce ne sera que par des exemples qu'on en montrera les usages. La seconde consiste à changer les exposants de la proposée, de telle sorte qu'on puisse déterminer dans quels cas & avec quelles substitutions on la rendra homogene. Ces deux méthodes rendront une infinité de différentielles susceptibles de la séparation des indéterminées.

L X X V I I.

Exemples de
la premiere
méthode.

Premier
exemple.

Soit proposée l'équation $dx\sqrt{aaxx + az^3} = zzdz$ qu'on voit bien n'être pas homogene. Je fais $z^3 = ayy$, ce qui me donne la transformée suivante, $dx\sqrt{aaxx + aayy} = \frac{2aydy}{3}$ qui est homogene.

L X X V I I I.

On auroit encore pu rendre cette équation homogene

d'une autre maniere, en supposant $\sqrt{aaxx + az^3} = ay$, car alors on a tout de suite $ay dx = \frac{2aydy}{3} - \frac{2axdz}{3}$, équation qui est homogene.

LXXIX.

Soit maintenant à intégrer l'équation suivante $x^3 dz + \frac{z^2 dx}{\sqrt{a+x}} = dx$: je ferai $\sqrt{a+x} = t$; donc $a+x = tt$, & $z^3 dz + 2zzdt = 2tdt$. Soit maintenant $zz = yy$, j'aurai en substituant $\frac{ydy}{2} + ydt = tdt$, équation qui est homogene.

Second
exemple.

LXXX.

S'il s'agissoit de rendre homogenes les équations suivantes, $(a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3 + \&c.) dx + (lx^3 + mx^3y + nx^4y^2 + \&c.) dy = 0$, ou bien $(ay + bxy^2 + ex^2y^3 + \&c.) dx + (lx + mx^2y + nx^3y^2 + \&c.) dy = 0$, équations dans lesquelles la somme des exposans est en progression arithmétique, la substitution qu'il faudroit faire seroit celle-ci, $y = \frac{1}{z}$. Car il nous vient après l'avoir faite, $(a + \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{zz} + \frac{ex^3}{zz^2} + \&c.) dx - (lx^3 + \frac{mx^3}{z} + \frac{nx^4}{zz} + \&c.) \frac{dz}{zz} = 0$, & $(\frac{a}{z} + \frac{bx}{zz} + \frac{cx^2}{zz^2} + \&c.) dx - (lx + \frac{mx^2}{z} + \frac{nx^3}{zz} + \&c.) \cdot \frac{dz}{zz} = 0$, équations qu'on voit bien être homogenes.

Troisième
exemple.

LXXXI.

Et en général si on avoit à intégrer l'équation suivante, $(ax^\pi + bx^\pi x^{\pi-1} + \&c.) dx + (mx^\pi z^{\pi+1} + nx^{\pi-1} z^{2\pi-1}$

$+ p x^{n-1} z^{3r-1} + \&c.) dz = 0$, on rendroit cette équation homogène en faisant $z = y^{\frac{1}{r}}$.

LXXXII.

Je passe à la seconde méthode.

Exposition
de la seconde
méthode.

Première
formule pour
les équations
à trois ter-
mes.

Soit l'équation générale composée de trois termes $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, qui peut servir de formule, & dans laquelle les exposans peuvent être positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires. Si $n+m$ étoit $= q+p = r+s$, l'équation alors seroit homogène. Ainsi nous devons supposer qu'on n'a pas les égalités précédentes. Soit dans cette hypothèse $y = z^t$, on a $dy = t z^{t-1} dz$, $y^s = z^{st}$ &c. & après les substitutions on aura la transformée $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + ctx^r z^{st+t-1} dz = 0$. Mais pour que cette équation fût homogène, on devroit avoir $nt+m = qt+p = r+st+t-1$. De la première égalité on tire $t = \frac{p-m}{n-q}$, laquelle valeur substituée dans l'équation $qt+p = r+st+t-1$, ou $(s-q+1)t = p-r+1$, l'a fait devenir $(s-q+1)(p-m) = (p-r+1)(n-q)$. Cette dernière égalité exprime les conditions que doivent avoir entre eux les exposans de la proposée, pour qu'on la puisse rendre homogène. La substitution qu'il faudra faire dans ce cas est $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Si au lieu de supposer $y = z^t$, on eût supposé $x = z^t$, on auroit trouvé le même résultat pour la condition entre les

les exposants : la seule différence , c'est qu'alors on auroit

$t = \frac{n-q}{p-m}$, ce qui rendroit la substitution à faire $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$.

LXXXIII.

Il peut arriver que la substitution de $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ soit impossible ; ce qui arrive dans le cas où $p = m$, ou $n = q$: mais alors on pourra séparer les indéterminées dans la proposée sans avoir recours à aucune préparation : car dans le cas où $p = m$, elle devient $x^{m-r} dx = - \frac{cy^s dy}{ay^n + by^q}$, ou $x^{p-r} dx = - \frac{cy^s dy}{ay^n + by^q}$; & dans celui de $n = q$, on a $ax^{m-r} dx + bx^{p-r} dx = -cy^{s-n} dy$, ou $-cy^{s-q} dy$.

LXXXIV.

Si dans la formule $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, outre la supposition de $y = z^t$ on suppose encore $x = u^a$; après les substitutions ordinaires , on trouvera $aaz^{nt} u^{am+a-1} du + b_az^{qt} u^{ap+a-1} du + ctu^{ar} z^{st+t-1} dz = 0$; comparant ensemble les exposants du premier & du second terme , on a $nt + am + a - 1 = qt + ap + a - 1$, d'où l'on tire $t = a \cdot \left\{ \frac{p-m}{n-q} \right\}$. L'équation entre les exposants du second & du troisième terme nous donne $s \cdot (s - q + 1) = a(p - r + 1)$, & mettant pour t la valeur tirée de la première équation entre les exposants , on a $a \cdot (p - m) \cdot (s - q + 1) = a \cdot (n - q) \cdot (p - r + 1)$, Équation qui exprime , comme ci-dessus , la condition que doivent avoir les exposants de la formule pour l'homogé-

néité : mais dans cette équation la lettre x se détruit dans tous les termes ; donc la seconde supposition de $x = u^a$ étoit inutile.

LXXXV.

Application
de la formule
à une équation
particulière.

Soit proposée l'équation $ay^3 x dx + byy x^{\frac{1}{2}} - c x dy = 0$, je compare cette équation avec la formule précédente : cette comparaison me donne $n = 3$

$$m = 1$$

$$q = 2$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$r = 1$$

$$s = 0$$

Dans ce cas l'équation de condition $(s - q + 1) \cdot (p - m) = (p - r + 1) \cdot (n - q)$ devient $-1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, ce qui est constant ; donc la proposée peut être rendue homo-

gene. Je fais donc $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$

$$dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$$

$$yy = z^{-1}$$

& après la transformation je trouve $\frac{ax dx}{z\sqrt{z}} + \frac{bdx\sqrt{z}}{z} + \frac{cx dz}{2z\sqrt{z}} = 0$, équation qui est homogène, comme on le voit au premier coup d'œil.

LXXXVI.

Seconde
formule con-
tenant les équa-
tions à quatre
termes.

Si le nombre des termes de l'équation est plus grand que trois, les conditions que doivent avoir les exposants

II, PARTIE. SECT. I. CHAP. VI. 59

des indéterminées augmentent à proportion. Soit, par exemple, l'équation suivante de quatre termes qui peut servir de formule $ax^m y^n dx + bx^q y^p dx + cx^r y^s dy + fx^t y^u dy = 0$, je fais $y = z^t$, d'où je tire $dy = tz^{t-1} dz$

$$y^n = z^{nt}$$

$$y^p = z^{pt}$$

$$y^s = z^{st}$$

$$y^u = z^{tu}$$

Substituant ces valeurs on a $ax^m z^{nt} dx + bx^q z^{pt} dx + tcx^r z^{st+t-1} dz + ftx^t z^{tu+t-1} dz = 0$. On doit donc avoir, 1°. $nt + m = pt + q$, d'où l'on tire $t = \frac{q-m}{n-p}$. On doit avoir 2°. $r + st + t - 1 = pt + q$, ou $st - pt + t = q - r + 1$, & mettant pour t sa valeur, on aura $(s-p+1) \cdot (q-m) = (q-r+1) \cdot (n-p)$; première condition que doivent avoir les exposants de la proposée. La comparaison du second & du quatrième terme donne $s + tu + t - 1 = pt + q$, ou $tu - pt + t = q - s + 1$, & mettant pour t sa valeur trouvée précédemment, on a $(u-p+1) \cdot (q-m) = (q-s+1) \cdot (n-p)$, équation qui donne une seconde condition que doivent encore avoir entre eux les exposants de la formule. S'ils ont ces deux conditions, alors elle pourra devenir homogène, & la substitution à faire est $y = \frac{z^{q-m}}{z^{n-p}}$.

Si les équations proposées ont cinq termes, alors leurs exposants devront avoir entre eux trois conditions, & ainsi de suite.

LXXXVII.

Application
de la formule
à quelques
équations par-
ticulières.

Première
équation.

Si on propose de rendre homogène l'équation $dx\sqrt{x} + dx\sqrt[3]{y^4} + ydy\sqrt[4]{x^3} - y^3dy = 0$; pour voir si elle est susceptible de l'homogénéité, je la compare avec la

formule, & j'ai. $m = \frac{1}{2}$

$$n = 0$$

$$q = 0$$

$$p = \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{1}{4}$$

$$s = 1$$

$$p = 0$$

$$u = 3.$$

Donc l'équation $(s - q + 1) \cdot (q - m) = (q - r + 1) \cdot (n - p)$ qui est la première qui doit se trouver entre les exposants est ici $(1 - \frac{4}{3} + 1) \cdot -\frac{1}{2} = (-\frac{1}{4} + 1) \cdot -\frac{4}{3}$, ou $-\frac{1}{2} = -\frac{4}{3}$, ce qui montre que les exposants de notre équation ont déjà la première condition requise. La seconde équation qui doit se trouver est celle-ci $(u - p + 1) \cdot (q - m) = (q - s + 1) \cdot (n - p)$: elle devient ici $(3 - \frac{4}{3} + 1) \times -\frac{1}{2} = 1 \times -\frac{4}{3}$; ou $-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$; donc les exposants de la proposée ont les conditions requises pour qu'elle puisse être rendue homogène. Je fais

$$\text{donc} \dots \dots \dots y = z^{\frac{1-m}{n-p}} = z^{\frac{3}{8}}$$

$$dy = \frac{3}{8} z^{-\frac{5}{8}} dz$$

$$y^{\frac{4}{3}} = z^{\frac{1}{2}}$$

$$y^3 = z^{\frac{9}{8}},$$

& après les substitutions on a la transformée $dx\sqrt{x} + dx\sqrt{z} + \frac{3dz\sqrt{x}}{8\sqrt{z}} = \frac{3dz\sqrt{z}}{8}$; équation qu'on voit tout de suite être homogène.

LXXXVIII.

Soit encore l'équation $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^4yydy = 0$; cherchons si elle peut devenir homogène en lui appliquant tout de suite la méthode qui nous a fait découvrir les cas d'homogénéité de la formule. Soit $y = z^t$, $dy = tz^{t-1}dz$, on trouve pour transformée $az^{2t}xxdx + bdx + cz^t xdx + tfx^4z^{2t+t-1}dz = 0$. Mais on doit avoir $2t + 2 = 1 + t$, ce qui donne $t = -1$; cette valeur de t étant mise à sa place dans la transformée, elle devient $\frac{axxdx}{zz} + bdx + \frac{cx dx}{z} - \frac{fx^4 dz}{z^2} = 0$, qui est homogène. Donc la substitution qu'il faut faire ici est $y = \frac{1}{z}$.

LXXXIX.

Telles sont les méthodes les plus générales pour rendre homogènes les équations qui ne le sont pas; il y a encore un cas qui, quoique particulier, ne laisse pas d'être assez étendu, & qu'on peut ramener à l'homogénéité; c'est celui dans lequel les indéterminées & leurs différences ne passent pas la première dimension, Nous allons l'examiner dans le Problème suivant.

X C.

Cas particu-
lier assez éten-
du qui se ra-
mene à l'ho-
mogénéité.

PROBLEME. Rendre homogene l'équation $ax dx + by dx + c dx + g x dy + f y dy + h dy = 0$.

Ce cas est
représenté par
l'équation
 $(ax+by+c) \cdot$
 $dx + (gx+f$
 $y+h) dy$.

SOLUTION. Soit cette équation mise sous la forme

suivante $(ax + by + c) dx + (gx + fy + h) dy = 0$,
je remarque d'abord que si b étoit $= g$, b & g étant de
même signe, l'équation s'intégreroit tout de suite, puis-
qu'alors elle deviendrait $\pm b \cdot (y dx + x dy) = -ax dx$
 $-fy dy - c dx - h dy$, dont l'intégrale est $\pm bxy +$
 $\frac{ax^2}{2} + \frac{fy^2}{2} + cx + hy + C = 0$: mais nous supposons
que b n'est pas égal à g . Cela posé, je fais $x = mz + nu + r$
& $y = pz + ku + s$
substituant, il me vient

$$\left\{ \begin{array}{l} amz + anu + ar \\ + bpz + bku + bs \\ + c \end{array} \right\} \cdot (mdz + ndu) \mp$$

$$\left\{ \begin{array}{l} gmz + gnu + gr \\ + fpz + fku + fs \\ + k \end{array} \right\} \cdot (pdz + kdu) = 0$$

équation qui me fait voir que j'aurois pu faire une substi-
tution plus simple. Effectivement, je suppose $x = z + r$

$$y = u + s$$

(z & u sont deux nouvelles indéterminées, s & r sont
deux constantes), j'ai $dx = dz$

$$\& \text{ } dy = du$$

substituant ces valeurs dans l'équation, elle se change en

$$\left\{ \begin{array}{l} az + ar \\ + bu + bs \\ + c \end{array} \right\} dz + \left\{ \begin{array}{l} gz + gr \\ + fu + fs \\ + h \end{array} \right\} du = 0.$$

Or je remarque que cette équation seroit homogene , si les termes $ar + bs + c$ & $gr + fs + h$ étoient égaux à zéro ; cette supposition réduisant la transformée à l'équation suivante $(az + bu) dz + (gz + fu) . du = 0$.

Il ne s'agit plus que de tirer les valeurs de r & de s relatives à cette supposition. Or ces valeurs sont $s = \frac{ah - cg}{gb - af}$

& $r = \frac{cf - bh}{gb - af}$.

Donc les substitutions qu'il faut faire dans le cas présent sont. $x = z + \frac{cf - bh}{gb - af}$

& $y = u + \frac{ah - cg}{gb - af}$.

C. Q. F. T.

XCI.

REMARQUE 1. S'il se trouvoit que cf fût $= bh$, ou $ah = cg$, l'une ou l'autre des deux constantes r ou s s'évanouiroit , ce qui marqueroit que dans ce cas on n'a besoin que d'une substitution pour x , si $s = 0$; pour y , si $r = 0$. Soit , par exemple , $cf = bh$ laissant x & sa différence , je me contenterai de supposer $y = x + s$, & je ferai le reste de l'opération comme dans l'article précédent.

Observations importantes sur l'équation précédente.

XCII.

REMARQUE 2. Si l'on avoit en même temps $cf = bh$ & $ah = cg$, alors les deux constantes r & s s'évanouiroient

auquel cas la méthode pour parvenir à l'homogénéité seroit différente. Voici comment il faudroit s'y prendre dans ce cas. Puisque $cf = bh$, & $ah = cg$, on a $g = \frac{ah}{c}$ & $f = \frac{bh}{c}$: donc l'équation proposée $(ax + by + c) dx + (gx + fy + h) dy = 0$, devient $(ax + by + c) dx + \left(\frac{ahx}{c} + \frac{bhy}{c} + h\right) dy = 0$, ou bien $(ax + by + c) dx + (ax + by + c) \cdot \frac{h dy}{c} = 0$, ou enfin $(ax + by + c) \times \left(dx + \frac{h dy}{c}\right) = 0$; ce qui donne $ax + by + c = 0$ ou $x + \frac{hy}{c} + A = 0$ (A est une constante): or ces deux équations, ou séparément, ou prises ensemble, satisfont au Problème, puisque ce sont deux lieux géométriques, qui se construisent par le moyen de deux lignes droites.

XCIII.

REMARQUE 3. Si l'on avoit $bg = af$, alors le dénominateur des équations $x = z + \frac{cf - bh}{bg - af}$ & $y = u + \frac{ah - cg}{bg - af}$ deviendrait égal à zéro; donc ces termes seroient infinis, & par conséquent la méthode ne seroit rien connoître. Mais alors ce cas seroit plus simple. Pour le prouver je remarque que la supposition présente de $bg = af$ donne $f = \frac{bg}{a}$. Mettant donc pour f cette valeur dans la proposée, elle devient $(ax + by + c) dx + \left(gx + \frac{gby}{a} + h\right) dy = 0$. Je lui donne cette autre forme $(ax + by) dx + (ax + by) \frac{g dy}{a} + c dx + h dy = 0$, & je suppose ensuite $ax + by = z$: je veux faire disparaître y & dy ,
j'ai

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. VI. 85

j'ai donc $y = \frac{z - ax}{b}$: $dy = \frac{dz - a dx}{b}$; substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il me vient $z \cdot \left\{ dx + \frac{g dz}{ab} - \frac{g dx}{b} \right\} + c dx + \frac{h dz}{b} - \frac{ah dx}{b} = 0$, ou bien $dx \left\{ z - \frac{gz}{b} + c - \frac{ah}{b} \right\} + dz \times \left\{ \frac{gz}{ab} + \frac{h}{b} \right\} = 0$:

ou enfin $dx = \frac{dz \cdot \left\{ \frac{h}{b} + \frac{gz}{ab} \right\}}{\frac{gz}{b} - z + \frac{ah}{b} - c}$, équation dans la-

quelle les indéterminées sont séparées ; ce qui prouve, comme nous l'avons dit, que ce cas est plus simple.

X C I V.

SCHOLIE. Nous venons de détailler dans les Chapitres précédents la méthode de construire les équations différentielles dont les indéterminées sont séparées ; ensuite celle de séparer les indéterminées dans les équations lorsqu'elles sont homogènes ; & enfin celle de rendre homogènes beaucoup d'équations qui ne le sont pas. Passons à un cas très-général dans lequel les indéterminées se séparent tout de suite par une méthode fort ingénieuse. Ce cas est celui de l'équation $AXy^n dy + By^{n+1} X' dx + y^q X'' dx = 0$, n & q étant des nombres quelconques, X , X' , X'' , des fonctions quelconques de x , & A , B , C , des constantes à volonté, & il peut servir de formule pour ces sortes d'équations, qui ne doivent par conséquent pas avoir plus de trois termes.



C H A P I T R E VII.

Sur la construction de l'équation

$$A X y^n dy + B y^{n+1} X' dx + C y^q X' dx = 0.$$

X C V.

Procédé de
la Méthode.

PROBLEME. Séparer les indéterminées dans la formule *
 $A X y^n dy + B X' y^{n+1} dx + C y^q X' dx = 0.$

SOLUTION. 1°. Je commence par diviser l'équation par y^q , elle devient $A X y^{n-q} dy + B X' y^{n+1-q} dx + C X' dx = 0$. Cette première opération me donne un terme $C X' dx$ qui ne contient que dx & des fonctions de x .

2°. Je divise par $A X$, & j'ai $y^{n-q} dy + \frac{B X' y^{n+1-q} dx}{A X} + \frac{C X' dx}{A X} = 0$. Ce second procédé nous donne, comme on le voit, un terme tout en y , un tout en x , & un autre qui est mêlé.

3°. J'observe maintenant que si je pouvois multiplier les deux premiers termes de l'équation ainsi réduite par une fonction de x , telle que ces deux premiers termes fussent une différentielle exacte, j'aurois l'intégrale cherchée, le troisième terme s'intégrant de lui-même. Soit donc sup-

* *Nota.* Voyez dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Ann. 1731. page 103. un Mémoire de M. de Maupertuis, où se trouve la construction de l'équation $dx = ax^m y^n dy + by^{n+1} x^p dx$, par une méthode qui diffère un peu de celle que nous donnons ici.

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. VII. 67

posé ξ la fonction de x qui rend ces deux termes une différentielle complete, & qui par conséquent n'empêchera pas le troisieme d'être intégrable, je multiplie l'équation par ξ ; & j'ai, laissant à part le troisieme terme & n'opérant que sur les deux premiers, $\xi y^{n-q} dy + \frac{B \xi y^{n-q+1} X' dx}{AX}$ qui est une différentielle complete. J'ai donc (Théor. fondamental) $d \frac{(\xi y^{n-q})}{dx} = d \frac{(B X' \xi y^{n-q+1})}{A X d y}$: c'est-à-dire, $\frac{y^{n-q} d \xi}{dx} = \frac{(n-q+1) B \xi X' y^{n-q}}{A X}$; ou bien $\frac{d \xi}{\xi} = \frac{(n-q+1) B X' dx}{A X}$. Donc $\ln \xi = \int \frac{(n-q+1) B X' dx}{A X}$. Donc enfin en passant des logarithmes aux nombres, & prenant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, on a $\xi = e^{\int \frac{(n-q+1) B X' dx}{A X}}$. Voilà donc la valeur de ξ trouvée.

4°. Mettant cette valeur de ξ dans l'équation intégrée $\frac{\xi y^{n-q+1}}{n-q+1} + \int \frac{C \xi X'' dx}{A X} \pm Q = 0$, il nous vient $\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} \times e^{\int \frac{(n-q+1) B X' dx}{A X}} + \int \frac{C X'' dx}{A X} \times e^{\int \frac{(n-q+1) B X' dx}{A X}} = \mp Q$; d'où l'on tire $y^{n-q+1} = (n-q+1) \times \left(\mp Q - \int \frac{C X'' dx}{A X} \cdot e^{\int \frac{(n-q+1) B X' dx}{A X}} \right) \times e^{\int \frac{-n+q-1}{A X} \cdot \frac{B X' dx}{A X}}$: ou enfin $y = \left\{ \frac{n-q+1}{1} \times \left(\mp Q - \int \frac{C X'' dx}{A X} \times e^{\int \frac{n-q+1}{A X} \cdot \frac{B X' dx}{A X}} \right) \times e^{\int \frac{-n+q-1}{A X} \cdot \frac{B X' dx}{A X}} \right\}^{\frac{1}{n-q+1}}$. De là il suit que quel que soit le rapport de A, B, C, n, q , dans l'équation, les indéterminées seront toujours séparées par cette méthode.

XCVI.

Observations
sur la Métho-
de précéden-
te.

REMARQUE 1. Si l'on avoit $n - q + 1 = 0$, alors il y auroit des termes infinis; la méthode, par conséquent, paroîtroit ne rien donner. Mais il faut remarquer qu'alors $n - q = -1$, & qu'ainsi la proposée devient $\frac{A dy}{y} + \frac{B X' dx}{X} + \frac{C X'' dx}{X} = 0$, équation qui s'intègre tout de suite, sans qu'il soit besoin d'avoir recours à notre méthode.

XCVII.

REMARQUE 2. Si l'on avoit $X' = x^n$, & $X = x^{n+1}$; alors la valeur logarithmique de ξ , $e^{\int \frac{n-q+1}{x} \cdot \frac{B X' dx}{A X}}$ seroit $e^{\int \frac{n-q+1}{x} \cdot \frac{B dx}{A}}$, & en faisant $\frac{n-q+1}{x} \cdot \frac{B}{A} = K$, elle deviendrait $e^{\int \frac{K dx}{x}} = e^{K l x}$: à cause que e est supposé un nombre dont le logarithme $= 1$, $e^{K l x} = x^K$; car soit $e^{K l x} = z$; on aura $l e^{K l x} = l z$; ou bien $K l x l e = l z$; or $l e = 1$, donc $K l x = l z$; donc enfin (Art. xxix. Introd. I^{re}. Part.) & $x^K = z$; or $z = e^{K l x}$; donc $e^{K l x} = x^K$. Donc en mettant pour ξ sa valeur x^K dans l'équation $\xi y^{n-q} dy + \frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} \times \frac{n-q+1}{x} \cdot \frac{B \xi X' dx}{A X} + \frac{C X'' \xi dx}{A X} = 0$, on trouve $y^{n-q} dy x^K + K x^{K-1} dx \times \frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} + \frac{C X'' x^{K-n-1} dx}{A} = 0$; ce qui nous montre que dans ce cas l'équation est intégrable beaucoup plus simplement,

XCVIII.

COROLLAIRE 1. La formule que nous venons de traiter d'une manière générale est des plus étendues : elle renferme une infinité de cas. M^{lle} Agnesi a traité la même formule dans ses Institutions Analytiques ; mais cette illustre Géometre employe pour la résoudre une méthode différente de la nôtre. Celle dont elle se sert , & qui est de M. Bernoulli , consiste à supposer y égale à deux nouvelles indéterminées ; & en faisant les substitutions ordinaires , on parvient à la séparation des indéterminées par le moyen des quantités logarithmiques & exponentielles. Notre formule comprend aussi toutes celles dont M. Craig a donné la séparation dans son Livre *de Calculo Fluentium*. C'est ce que nous développerons bien-tôt dans le Chapitre suivant , où nous donnerons les différentielles plus générales qui s'intègrent par notre méthode.

Quelle est la généralité de la formule précédente.

Tom. 2. page 904 , jusqu'à 914.

Tome 1. page 175.

Lib. de Calculo Fluent. p. 40. & seq.

XCIX.

COROLLAIRE. 2. Nous supposons dans notre formule A, B, C des coefficients quelconques, dont les signes sont positifs ou négatifs. Ainsi si on avoit $dx - ax^m y^n dy - by^{n+1} x^p dx = 0$, qui est l'équation que M. de Maupertuis traite dans le Mémoire que nous avons cité , ce cas n'auroit point de difficulté. Car comparant cette équation différentielle avec notre formule , on trouve

$$A = -a$$

$$B = -b$$

$$q = 0$$

$$X = x^m$$

$$X' = x^p$$

Donc substituant ces valeurs dans $\xi = e^{\int \frac{B X' dx}{A X}}$,

on a $\xi = e^{\int \frac{-bx^p dx}{-ax^m}} = e^{\int \frac{bx^{p-m} dx}{a}}$, ou enfin

$\xi = e^{\frac{(n+1) \cdot b}{(p-m+1) \cdot a} x^{p-m+1}}$. Si l'on avoit $dx - ay^n x^m dy$

$+ by^{n+1} x^p dx = 0$, où le second terme est seul négatif, le cas ne seroit pas plus embarrassant : on auroit

alors $\xi = e^{\frac{(n+1) \cdot b}{(p-m+1) \cdot a} x^{p-m+1}}$; &c ainsi des autres.

CHAPITRE VIII.

Des différentielles qui peuvent se ramener par des transformations à la formule du Chapitre précédent.

C.

L Orsque nous avons cherché les cas d'intégration des équations différentielles, en déterminant ceux où ces équations peuvent être rendues homogènes, les conditions d'intégrabilité ne tomboient que sur les exposants. On en peut aussi trouver qui tombent sur les coefficients

en examinant les cas où la réduite sera de la forme suivante, $AXy^n dy + BX'y^{n+1} dx + Cy^q X' dx = 0$ que maintenant nous savons intégrer. Nous allons faire cette recherche, en supposant même que dans ces équations il se trouve des fonctions de x & de y . Nous marcherons des équations les plus simples aux plus composées, afin d'accoutumer les commençans à généraliser les méthodes.

C I.

PROBLEME I. Séparer les indéterminées dans l'équation $(x^n dx + ay^n dy) \cdot p = \left\{ \frac{xdy - ydx}{xx} \right\} \cdot q$, dans laquelle p & q sont des fonctions algébriques de x & de y , telle que la somme de leurs exposants est la même dans chaque terme de p , & est aussi la même dans chaque terme de q , quoique toutefois elle puisse être différente dans p & dans q .

Première
formule de
ces différen-
tielles.

SOLUTION. Je mets d'abord l'équation sous la forme suivante $x^n dx + ay^n dy - (xdy - ydx) \times \frac{q}{p^{xx}} = 0$. Je fais $x = yz$, ce qui me donne $x^n = y^n z^n$

$$dx = ydz + zdy.$$

Donc en faisant ces substitutions j'ai $y^{n+1} z^n dz + z^{n+1} y^n dy + ay^n dy - (zydy - y^2 dz - zydy) \times \frac{q}{p^{xx}} = 0$. Or q sera (hyp.) $= y^m qz$; & $p^{xx} = y^k Tz$: donc $\frac{q}{p^{xx}} = y^k \Delta z$; donc la proposée est $y^{n+1} z^n dz + z^{n+1} y^n dy + ay^n dy + y^{k+2} \Delta z \cdot dz = 0$, ou $(z^{n+1} + a) \times y^n dy + y^{n+1} z^n dz + y^{k+2} \Delta z \cdot dz = 0$,

c'est-à-dire , $Zy^n dy + y^{n+1} z^n dz + y \Delta z . dz = 0$,
équation qui , comme on le voit , est dans le cas de notre
formule générale.

C I I.

Application
à quelques e-
xemples par-
ticuliers.

Supposons que dans la formule $n = 2$

$$p = fxy^2 + gyx^2$$

$$q = mx^2y^2 + nyx^3,$$

Premier
exemple.

l'équation dont il faut séparer les indéterminées est $(x^2 dx + ay^2 dy) \times (fxy^2 + gyx^2) = \left\{ \frac{xdy - ydx}{xx} \right\} \times (mx^2y^2 + nyx^3)$; ou $x^2 dx + ay^2 dy - (xdy - ydx) \times \frac{mx^2y^2 + nyx^3}{fxy^2 + gyx^2} = 0$. Soit $x = yz$. La transformée sera $y^3 z^2 dz + z^3 y^2 dy + ay^2 dy - (zydy - y^2 dz - zydy) \times \frac{my^4 z^2 + ny^4 z^3}{fy^3 z^2 + gy^3 z^3} = 0$; & en réduisant $(z^3 + a) . y^2 dy + y^3 z^2 dz + \left\{ \frac{m+nz}{fz+gz} \right\} y dz = 0$, qui s'intègre par le Chapitre précédent , en mettant l'indéterminée z au lieu de x .

C I I I.

Seconde
formule.

PROBLEME 2. Séparer les indéterminées dans la formule $(x^n dx + ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy) \times p = (xdy + cydx) \times q$: p & q sont des fonctions algébriques de x & de y , telles que l'excès de l'exposant de l'une de ces deux indéterminées multiplié par c sur l'exposant de l'autre indéterminée soit le même dans chaque terme de p ; & que cette même condition se trouve aussi dans chaque terme de q , sans qu'il soit pour cela nécessaire que p & q soient des fonctions

fonctions homogenes de x & de y .

SOLUTION. Je mets l'équation sous la forme suivante.

$x^n dx + ay^{\frac{-n-c-1}{c}} dy (-x dy - cy dx) \cdot \frac{q}{p} = 0$. Je remarque maintenant que par les conditions du Problème, chaque terme de p étant, par exemple $y^s x^r$, on doit avoir $s \times c - r = M$ (une constante); donc $r = s \times c - M$, donc $y^s x^r$ devient $y^s x^{s \times c - M} = \frac{y^s x^{s \times c}}{x^M}$. De même chaque terme de q sera de la forme suivante $\frac{y^k x^{k \times c}}{x^N}$.

Ce calcul me montre que la transformation que je dois faire est $yx^c = z$; donc $x^c dy + cyx^{c-1} dx = dz$ ou $(x dy + cy dx) x^{c-1} = dz$ on a aussi $y = \frac{z}{x^c}$

$$y^{\frac{-n-1-c}{c}} = x^{n+1+c} z^{\frac{-n-1-c}{c}}.$$

$$dy = \frac{x^c dz - czx^{c-1} dx}{x^{2c}}.$$

Donc en substituant dans la proposée pour y & dy leurs valeurs, on aura la transformée

$$x^n dx + \frac{ax^{n+1+2c} z^{\frac{-n-1-c}{c}} dz + acz^{\frac{-n-1}{c}} x^{n+2c} dx}{c^{2c}}$$

$(-x^{-c+1} dz) \frac{q}{p} = 0$: or il est évident par ce que nous venons de dire que $\frac{q}{p} = x^s \phi z$; donc on aura

$$x^{n+2c} dx + ax^{n+2c+1} z^{\frac{-n-1-c}{c}} dz + acz^{\frac{-n-1}{c}} x^{n+2c} dx - x^{s+c+1} dz \phi z = 0 \text{ ou } \left(1 + acz^{\frac{-n-1}{c}}\right) x^{n+2c} dx$$

II. Partie.

K

$\pm ax^{n+2c+1} z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz - x^{c+1} dz \varphi z = 0$;
 équation réduite au cas général du Chapitre précédent,
 & dont par conséquent nous savons séparer les indétermi-
 nées.

CIV.

Application
 à un exem-
 ple.

Soit dans la formule . . . $n = -10$

$$c = 3$$

$$p = by^2 x^4 + fy^9 x^{25}$$

$$q = gy^{\frac{1}{2}} x^3 - hy^{10} x^{\frac{61}{2}}$$

La proposée sera $x^{-10} dx + ay^2 dy - (x dy + 3y dx) \times$
 $\frac{gy^{\frac{1}{2}} x^3 - hy^{10} x^{\frac{61}{2}}}{by^2 x^4 + fy^9 x^{25}} = 0$. La transformation qu'il faudra faire
 est donc $yx^3 = z$; après les différentes substitutions , on
 aura la transformée suivante $x^{-10} dx + \frac{ax^{-3} z^2 dz - 3az^3 x^{-4} dx}{x^6}$
 $- x^{-2} dz \times \left\{ \frac{gz^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - hz^{10} x^{\frac{3}{2}}}{bz^{\frac{1}{2}} x^{-2} + fz^9 x^{-2}} \right\} = 0$. Donc $x^{-4} dx$
 $+ ax^{-3} z^2 dz - 3az^3 x^{-4} dx - x^4 dz \times x^{\frac{7}{2}} \times$
 $\left\{ \frac{g-hz^{\frac{19}{2}}}{bz^{\frac{1}{2}} + fz^{\frac{17}{2}}} \right\} = 0$. Donc enfin $(1 - 3az^3) x^{-4} dx$
 $+ ax^{-3} z^2 dz - x^{4+\frac{7}{2}} dz \times \left\{ \frac{g-hz^{\frac{19}{2}}}{bz^{\frac{1}{2}} + fz^{\frac{17}{2}}} \right\} = 0$, équation
 réduite à notre cas général.

C V.

Troisième
 formule qui
 comprend les
 deux précé-
 dentes.

PROBLÈME 3. Séparer les indéterminées dans la for-

mule $(x^n dx \pm ay^{\frac{-n-c-f}{c}} dy) p = (fx dy + cy dx) q$;

Les formules des deux Problèmes précédents ne sont que

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. VIII. 75

des cas particuliers de celle-ci ; celle du Problème 2 , lorsque $f=1$, & celle du Problème premier , quand $f=1$ & $c=-1$; p & q sont des fonctions de x & y telles que celles du Problème précédent , excepté qu'au lieu de multiplier par c l'exposant de l'une des deux indéterminées dans que terme de p & de q , il le faut multiplier par $\frac{c}{f}$. Il faut de plus que p & q soient telles qu'après y avoir substitué pour y sa valeur en x & en z , ou pour x sa valeur en y & en z , on trouve des quantités composées de deux facteurs , dont l'un contienne x sans z , & l'autre z sans x dans le premier cas ; ou dont l'un contienne y sans z , & l'autre z sans y dans le second.

SOLUTION. La proposée est $x^n dx + ay^{\frac{-fn-c-f}{c}} dy + (fx dy + cy dx) \frac{q}{p} = 0$. Pour trouver la transformation qui réussira , je raisonne comme dans le Problème précédent , & je vois qu'il faut supposer $yx^{\frac{c}{f}} = z$: cette supposition me donne $x^{\frac{c}{f}} dy + \frac{c}{f} y x^{\frac{c}{f}-1} dx = dz$ ou $fx dy + cy dx = \frac{f dz}{x^{\frac{c}{f}-1}}$. Je substitue pour y & dy leurs valeurs $y = \frac{z}{x^{\frac{c}{f}}}$,

$$dy = \frac{x^{\frac{c}{f}} dz - \frac{c}{f} z x^{\frac{c}{f}-1} dx}{x^{\frac{2c}{f}}}$$

j'ai donc la transformée suivante $(1 + \frac{acx^{\frac{-fn-f}{c}}}{f}) x^{\frac{fn+2c}{f}} dx + ax^{\frac{fn+2c}{f}+1} z^{\frac{-fn-c-f}{c}} dz - fx^{\frac{n+\frac{c}{f}+1}{f}}$

K ij

C V I.

Application
de cette for-
mule à un e-
xemple.

Supposons que dans la formule précédente $f = -3$

$$n = 2$$

$$c = 1$$

$$p = y$$

$$q = ax^2$$

L'équation à intégrer sera $(x^2 dx + ay^2 dy) y =$
 $(-3xy + ydx)ax$, ou bien $x^2 dx + ay^2 dy -$
 $(-3xy + ydx) \frac{ax}{y} = 0$. Donc la supposition qu'il
faut faire ici est $yx^{-\frac{1}{2}} = z$. Faisant les substitutions con-
venables pour y & dy , nous aurons la transformée sui-
vante $x^2 dx + ax^3 z^2 dz + \frac{ax^3}{3} z^2 x^2 dx + \frac{3ax^3 dz}{z} = 0$;
ou bien $(1 + \frac{a}{3} z^2) x^2 dx + ax^3 z^2 dz + \frac{3ax^3 dz}{z} = 0$,
équation réduite au cas général.

C V I I.

Quatrième
formule.

PROBLEME 4. Séparer les indéterminées dans la for-
mule $ax^n dx + by^n dy + (xdy - ydx) \times \left\{ \frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega} \right\} = 0$;

Celle-ci est encore plus générale que les précédentes,
 p & q étant des fonctions homogenes de x & de y , mais
de différentes dimensions, si l'on veut, dont la différence
soit k ; & π , ω étant aussi des fonctions de x & de y
homogenes chacunes telles que l'excès du nombre des
dimensions de π sur celles de ω soit $n - 1$.

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. VIII. 77

SOLUTION. Soit $x = yz$, on aura $ay^{n+1}z^n dz + ay^n z^{n+1} dy + by^n dy + (zy dy - yy dz - zy dy) \times (y^k \Delta z + y^{n-1} \phi z) = 0$, c'est-à-dire,

$az^{n+1}y^n dy \left\{ + ay^{n+1}z^n dz. \right.$
 $+ by^n dy \left\{ - y^{n+1} dz \phi z - y^{k+1} dz \Delta z = 0,$
 équation qui est, comme l'on voit, dans notre cas général,
 & de laquelle par conséquent on séparera les indéterminées sans aucune difficulté.

C VIII.

Supposons que dans la formule $n = 7$

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{x^3 y + y^3 x}{y^2} \\ \frac{q}{\omega} &= \frac{x^2 y + y^2 x}{x^3 + y^3}; \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Application} \\ \text{à un exem-} \\ \text{ple.} \end{array}$$

l'équation à intégrer sera $ax^7 dx + by^7 dy + (x dy - y dx) \times \left\{ \frac{x^3 y + y^3 x}{x y} + \frac{x^2 y + y^2 x}{x^3 + y^3} \right\} = 0$. Soit dans cette équation $x = yz$, & substituons pour x & dx leurs valeurs, nous aurons la transformée suivante $ay^8 z^7 dz + az^8 y^7 dy + by^7 dy + (zy dy - y^2 dz - zy dy) \times \left\{ y^2 \times (z^2 + 1) + y^6 \times \left(\frac{z^3 + z}{z^3 + 1} \right) \right\} = 0$; qui devient après la réduction $az^8 y^7 dy + ay^8 z^7 dz - y^4 \cdot (z^2 + 1) dz + by^7 dy - y^8 \cdot \left\{ \frac{z^3 + z}{z^3 + 1} \right\} dz = 0$, équation telle que nous la demandons.

C IX.

PROBLEME 5. Trouver les cas dans lesquels on parvient à séparer les indéterminées dans la formule $hx^q dx + by^n dy + (x dy + gy dx) \times \left\{ \frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega} \right\} = 0$.

Formule
précédente
généralisée.

Je ne mets point de coefficient à $x dy$, parce qu'il est toujours aisé de débarrasser de son coefficient un des deux termes; p, q, r, ω , étant des fonctions de x & de y , telles que a étant l'exposant de x dans un terme quelconque de p , & r l'exposant de y ; a' l'exposant de x dans q , & r' celui de y ; α l'exposant de x dans r , & ρ celui de y ; α' l'exposant de x dans ω , & ρ' celui de y ; on ait dans chaque terme de p , $-\frac{a}{g} + r = A$, dans chaque terme de q , $-\frac{a'}{g} + r' = A'$, & de même dans chaque terme de r & de ω , $-\frac{\alpha}{g} + \rho = B$ & $-\frac{\alpha'}{g} + \rho' = B'$; A, A', B, B' sont des constantes différentes. Il faut de plus que dans r & ω $-\frac{\alpha}{g} + \rho + \frac{\alpha'}{g} - \rho' = n + \frac{1}{g}$.

SOLUTION. Pour trouver quelle est la transformation qui réussira le mieux, j'observe qu'en faisant $x = zy^{-\frac{1}{g}}$, j'aurai $x dy + gy dx = gy^{-\frac{1}{g}+1} dz$; ce qui me détermine à faire cette supposition. La transformée qu'elle me donne est $hy^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}} z^q dz - \frac{h}{g} z^{q+1} y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1} dy + by^n dy + gy^{-\frac{1}{g}+1} dz \times (y^k \Delta z + y^f \phi z) = 0$. Or il est évident que cette équation se ramènera au cas général que nous traitons toutes les fois qu'on aura

$$n = -\frac{q}{g} - \frac{1}{g} - 1$$

$$\& k \text{ ou } f = -\frac{q}{g} - 1 = n + \frac{1}{g},$$

car alors l'équation précédente devient $(b - \frac{h}{g} z^{q+1}) y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1} dy + (hz^q + g\phi z) y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}} dz + gy^{k-\frac{1}{g}+1} dz \Delta z = 0$; qui est telle qu'on la demande.

C X.

Soit l'équation à intégrer $x^{-21} dx + by^3 dy + (x dy + 5y dx) \times \left\{ \frac{xy^{3-\frac{1}{5}} + x^2 y^3}{x^2 y - x^3 y^{\frac{1}{5}+3}} + \frac{ax^2 y^{\frac{1}{5}+6} + by^{\frac{1}{5}+6}}{x^2 y^{\frac{1}{5}+3} + x^3 y^{\frac{1}{5}+3}} \right\}$ Application de la formule à un exemple.

$= 0$; je ferai $\dots x = zy^{-\frac{1}{5}}$
 ce qui me donne $\dots dx = y^{-\frac{1}{5}} dz - \frac{1}{5} zy^{-\frac{1}{5}-1} dy$
 $x dy + 5y dx = 5y^{-\frac{1}{5}+1} dz.$

Donc en substituant pour x & pour dx leurs valeurs, on aura la transformée $y^4 z^{-21} dz - \frac{1}{5} z^{-20} y^3 dy + by^3 dy + 5y^{-\frac{1}{5}+1} dz \times \left\{ y^2 \cdot \left(\frac{1+z}{z-z^5} \right) + y^{\frac{1}{5}+3} \cdot \left(\frac{az^2+b}{z^2+z^5} \right) \right\}$
 $= 0$, laquelle devient en réduisant $(b - \frac{1}{5} z^{-20}) y^3 dy + \left\{ z^{-21} + \left(\frac{5az^2+5b}{z^2+z^5} \right) \right\} y^4 dz + 5y^{\frac{1}{5}+1} dz \times \left(\frac{1+z}{z-z^5} \right) = 0$, équation qui a les conditions cherchées.

C X I.

COROLLAIRE. Si dans la formule du Problème précédent on avoit $A - A' = B - B'$, alors la formule se réduiroit à un cas plus simple. Car en multipliant p par ω & π par q , & ω & q l'un par l'autre, on verroit que les deux fonctions $\frac{p}{q}$ & $\frac{\pi}{\omega}$ se réduiroient à une seule $\frac{K}{L}$, telle qu'en supposant m l'exposant de x , & μ l'exposant de y dans K , m' l'exposant de x & μ' l'exposant de y dans L , on aura encore dans chacun des termes de K $-\frac{m}{g} + \mu = C$ & dans chaque terme de L , $-\frac{m'}{g} + \mu' = C'$, C & C' étant des constantes différentes. Ce

feroit la même chose si l'on avoit $\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega} + \frac{p'}{q'} + \frac{\pi'}{\omega'}$
 + &c. un nombre quelconque de fonctions avec la con-
 dition requise par le Corollaire ; elles se réduiroient toutes
 à une seule.

CXII.

PROBLÈME 6. Trouver les cas d'intégrabilité de l'é-

$$\text{quation } dx + \frac{f^x dy}{y} = \frac{y^k x^r dy \Delta \frac{x}{y^n} + y^t x^s dx Z \frac{x}{y^n}}{y^m x^p \Phi \frac{x}{y^n} + y^q x^h \Gamma \frac{x}{y^n}}$$

dans laquelle on suppose $n = -f$.

SOLUTION. Soit $\frac{x}{y^n} = u$

on aura $y^{-n} dx - nxy^{-n-1} dy = du$

(& comme $-f = n$ hyp.) $y^f dx + fxy^{f-1} dy = du$

où $dx + \frac{f^x dy}{y} = y^{-f} du$.

En faisant pour x & dx les substitutions convenables ,

on aura la transformée suivante $y^{-f} du =$

$$\frac{y^{k-fr} dy \Delta u \times u^r + y^{t-fr-f} du Zu \times u^s - fu^{s+1} Zu . y^{t-fr-f-1} dy}{y^{m-fr} u^p \Phi u + y^{q-fh} u^h \Gamma u}$$

ou bien $y^{m-fr-f} u^p \Phi u . du + y^{q-fh-f} u^h \Gamma u . du -$
 $u^r \Delta u . y^{k-fr} dy - y^{t-fr-f} u^s Zu . du + fu^{s+1} Zu . y^{t-fr-f-1} dy$

$= 0$, équation qui se ramène à la formule $Vy^\lambda dy +$

$V'y^{\lambda+1} du + V''y^\mu du = 0$ (V, V', V'' étant des fon-

ctions de u) toutes les fois qu'on a $k-fr = t-fr-f-1$

& $q-fh$

ou $= t-fr$

$m-frp$

c'est-à-dire ,

c'est-à-dire, toutes les fois qu'on aura $k = t - f - 1$

$$\begin{array}{l} s = r \\ \& \dots \dots \dots \begin{array}{l} q = t \\ h = s \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} m = t \\ p = s \end{array} \end{array}$$

CXIII.

COROLLAIRE. Donc on séparera les indéterminées

dans l'équation $dx - \frac{x dy}{y} = \frac{dy \Delta \frac{x}{y}}{\varphi \frac{x}{y} + y^p \Gamma \frac{x}{y}}$ en faisant $\frac{x}{y} = u$. Car on aura l'équation suivante $-\Delta u \cdot dy + \varphi u \cdot y du + y^{p+1} \Gamma u \cdot du = 0$ qui a les conditions requises.

CXIV,

Soit dans la formule $\dots \dots \dots k = 3$

$$f = 1$$

$$q = t = 5$$

$$h' = r = s = 2$$

$$n = -1$$

$$m = -2$$

$$p = -3$$

Application
de la formule
à un exem-
ple.

la proposée sera $dx + \frac{x dy}{y} = \frac{ay^4 x^3 dy + by^7 x^4 dx}{cy + gy^6 x^3}$. Je suppose $xy = u$, ce qui me donne $dx + \frac{x dy}{y} = y^{-1} du$ & pour transformée l'équation $y^{-1} du = \frac{au^3 y dy + by^3 u^4 du - bu^3 y dy}{cy + gu^3 y^3}$, ou bien $c du + gy^2 u^3 du = au^3 y dy - by^2 u^4 du + bu^3 y dy = 0$, d'où l'on tire $(+u^3 - au^3) y dy + (gu^3 - bu^4) y^2 du + c du = 0$, qui est réduite à l'état demandé.

II. Partie.

L

C X V.

REMARQUE. On voit par les applications que nous venons de faire de la méthode du Chapitre VII. combien cette méthode est générale. Nous rencontrerons encore dans la suite de cet Ouvrage plusieurs équations différentielles qui s'intègrent par son moyen. Les Problèmes que nous venons de traiter renferment les cas les plus généraux qui peuvent s'y rapporter.

C H A P I T R E I X.

*Examen général de tous les cas particuliers
d'intégration des équations à trois termes.*

C X V I.

Formule
des équations
à trois termes.

Toutes les équations différentielles à trois termes peuvent être comprises sous la forme suivante (A) $ax^m u^p dx + bu^k x^n dx = du$, ou en faisant $x^{n+1} = z$, sous cette autre (B) $az^m u^p dz + bu^k dz = du$. Si on divise l'équation (B) par u^p , & que l'on suppose $u^{-p+1} = y$, alors l'équation (B) aura cette forme (C) $ax^m dx + by^q dx = dy$.

Comparée
avec celle du
Chapitre VI.

1°. Comparant cette équation avec la formule des équations à trois termes que nous avons déjà examinée (Chap. VI. Art. LXXXII.) & qui est $ay^n x^m dx + by^q x^p dx$

+ $cy^s x^r dy = 0$, on a $n = 0$

$$p = 0$$

$$s = 0$$

$$r = 0.$$

La formule $(s - q + 1) \times (p - m) = (p - r + 1) \times (n - q)$, qui exprime la condition que doit avoir l'équation précédente pour devenir homogène, est donc ici $q = \frac{m}{m+1}$. Donc toutes les fois qu'on aura dans (C)

$q = \frac{m}{m+1}$, en faisant $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, on aura $au^{\frac{m}{m+1}} du - (m+1) \cdot u^{\frac{m}{m+1}} dy + cy^{\frac{m}{m+1}} du = 0$, équation homogène, & par conséquent intégrable, ou au moins constructible.

2°. Si $q = 1$, la proposée (C) devient $ax^m dx + cy dx = dy$, équation intégrable (Chap. VII.).

CXVII.

3°. Si dans l'équation $ax^m dx + cy^q x^n dx = dy$, on a $q = 2$, cette équation devient $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, qui est la fameuse équation que tous les Géomètres connoissent sous le nom de l'équation de Ricati. Dans cette équation on n'a pu jusques ici séparer en général les indéterminées; mais il y a une infinité de valeurs de m dans lesquelles on parvient à cette séparation. Voici la méthode dont je me fers pour déterminer tous ces différents cas.

CXVIII.

Méthode pour trouver les cas dans lesquels on integre l'équation Ricati.

PROBLEME. Trouver les cas d'intégration de l'équation $ax^m dx + cy^2 x^n dx = dy$.

SOLUTION. Je fais $y = Ax^p + x^r t$. (Le coefficient A , & les exposants p & r sont des constantes arbitraires que nous déterminerons dans la suite de l'opération, t est une nouvelle indéterminée). J'aurai donc $dy = pAx^{p-1} dx + rx^{r-1} t dx + x^r dt$, & $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r} t + x^{2r} tt$: mettant pour y, yy, dy leurs valeurs dans l'équation proposée, elle devient $ax^m dx + cAAx^{2p+n} dx + 2cAtx^{p+r+n} dx + ctt x^{2r+n} dx = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$. Supposons à présent $cAA = pA$

$$2p + n = p - 1$$

$$r = 2cA$$

c'est-à-dire $p = -n - 1$,

$$A = \frac{-n-1}{c}$$

$$r = -2n - 2.$$

Par le moyen de ces égalités, les 2, 3, 5, 6^e termes de la transformée se détruisent, & elle devient $ax^m dx + ctt x^{-3n-4} dx = x^{-2n-2} dt$, c'est-à-dire, divisant par x^{-2n-2} , $ax^{m+2n+2} dx + ctt x^{-n-2} dx = dt$, ou (D) $ax^K dx + ctt x^k dx = dt$, en supposant $m+2n+2 = K$ & $-n-2 = k$

Je reprends à présent la proposée $ax^m dx + cyx^n dx = dy$, laquelle en faisant $y = \frac{1}{x}$ devient $ax^m dx$

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. IX. 85

+ $\frac{cx^ndx}{zz} = -\frac{dz}{zz}$, ou $ax^mzzdx + cx^n dx = -dz$, dans laquelle je suppose, comme plus haut, $z = Bx^q + x^a u$ (B, q, a , sont de même des constantes indéterminées, u est une nouvelle variable) : on a donc $dz = qBx^{q-1}dx + au x^{a-1}dx + x^a du$, $zz = BBx^{2q} + 2Bx^{q+a}u + uux^{2a}$, & substituant ces valeurs, nous avons $aBBx^{2q+m}dx + 2aBx^{q+a+m}udx + auux^{2a+m}dx + cx^n dx = -qBx^{q-1}dx - ax^{a-1}u dx - x^a du$; supposons à présent $aBB = -Bq$, $2q+m = q-1$, $-a = 2aB$, c'est-à-dire $q+m = -1$

$$B = \frac{m+1}{a}$$

$$a = -2m-2$$

par ces suppositions les 1^{re}, 2, 5 & 6^e termes de la dernière équation se détruisent, & elle devient $auux^{-3m-4}dx + cx^n dx = -x^{-2m-2}du$, c'est-à-dire en divisant par x^{-2m-2} , $cx^{2m+n+2}dx + auux^{-m-2}dx = -du$, ou enfin (G) $cx^B dx + auux^d dx = -du$ en supposant

$$B = 2m+n+2$$

$$\& d = -m-2.$$

CXIX.

Il est évident que dans l'équation $ax^m dx + cyx^n dx = dy$, on sépareroit tout de suite les indéterminées, si l'on avoit $m=n$; donc dans les formules (D) & (G), on parviendra à cette séparation toutes les fois qu'on aura

$$m+2n+2 = -n-2$$

$$\& 2m+n+2 = -m-2$$

équations d'où l'on tire deux valeurs de m , savoir

$$m = -\frac{3n-4}{3}$$

$$\& \dots \dots \dots m = \frac{-n-4}{3},$$

lesquelles étant supposées, les indéterminées se séparent.

Puisque dans la proposée on sépare les indéterminées, lorsque $m = \frac{-n-4}{3}$, on les séparera dans les formules (G), (D), lorsque $K = \frac{-k-4}{3}$, & $B = \frac{-\delta-4}{3}$, équations desquelles on tire deux autres valeurs de m , savoir

$$m = \frac{-5n-8}{3}$$

$$m = \frac{-3n-8}{5}$$

On trouvera, en continuant ainsi, une infinité d'autres valeurs de m , comme $m = \frac{-7n-12}{5}$

$$m = \frac{-5n-12}{7}$$

$$m = \frac{-9n-16}{7}$$

$$m = \frac{-7n-16}{9} \&c.$$

c'est-à-dire en général $m = \frac{(2h+1)x-n-4h}{2h+1}$,
 h représente un nombre quelconque entier, positif en commençant par l'unité.

C X X.

REMARQUE 1. Il faut ajouter qu'on séparera les indéterminées dans la formule précédente, toutes les fois qu'on la pourra rendre homogène par la seconde méthode du Chap. VI.

C X X I.

REMARQUE 2. Si dans l'équation, $ax^m dx$ 

$b y y x^n dx = dy$, on suppose $n = 0$, elle devient
 $a x^m dx + b y y dx = dy$, & la formule trouvée dans le
 Problème pour la valeur de m , fera $m = \frac{(2h+1) \times n - 4h}{2h+1}$
 devient $m = \frac{-4h}{2h+1}$; dans ce cas voici la méthode qu'il
 faut suivre pour trouver l'équation algébrique qui répond

Méthode
 pour trouver
 l'équation al-
 gébrique qui
 répond à l'é-
 quation pro-
 posée dans la
 supposition de
 $n = 0$.

à l'équation $-a x^{\frac{-4h}{2h+1}} dx + b y y dx = dy$. Prenons
 cette autre équation (A) $-a ds + b t t ds = dt$, qui
 donne (a) $-ds = \frac{dt}{a-b t t}$, différentielle dont l'intégrale est
 (par les méthodes des fractions rationnelles) en ajoutant une
 constante C , $C - s = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \times (l \sqrt{a+t\sqrt{b}} -$
 $l \sqrt{a-t\sqrt{b}})$, & en prenant k pour le nombre dont
 le logarithme est l'unité, on a (B) $k^{\frac{C-s}{2\sqrt{ab}}} = \frac{\sqrt{a+t\sqrt{b}}}{\sqrt{a-t\sqrt{b}}}$.
 L'équation (B) est donc identique avec l'équation (a),
 je fais dans l'une & dans l'autre $s = -x^{-1}$

& $t = \frac{1}{b} x + x x y$,
 les équations qui résulteront de ces substitutions seront
 encore identiques; on a $ds = \frac{dx}{xx}$ $dt = \frac{dx + 2b y x dx + b x x dy}{b}$
 $tt = \frac{xx + 2b x^3 y + b b y^2 x^4}{b b}$. Substituant ces valeurs dans
 l'équation (a), on a $\frac{-dx}{xx} = \frac{dx + 2b y x dx + b x x dy}{ab - xx - 2b x^3 y - b^2 y^2 x^4}$, ou
 $-ab dx + xx dx + 2b x^3 y dx + b^2 y^2 x^4 dx = xx dx +$
 $2b x^3 y dx + b x^4 dy$, ou en effaçant ce qui se détruit
 $-a dx + b y^2 x^4 dx = x^4 dy$, & enfin en divisant par
 x^4 , $-a x^{-4} dx + b y y dx = dy$ première équation réduite.

Maintenant l'équation exponentielle (B) devient après
 des réductions fort simples (D) $k^{(Cx+1) \cdot \frac{\sqrt{ab}}{x}} =$
 $\frac{x + b x x y + \sqrt{ab}}{-x - b x x y + \sqrt{ab}}$. Mais C est une quantité arbitraire.

1°. Je la suppose une quantité infinie positive, le premier membre de l'équation exponentielle sera infini : il faudra donc nécessairement que l'autre le soit aussi. Or c'est ce qui arrive, lorsque son dénominateur est $= 0$, on aura donc $-x - bxxxy + \sqrt{ab} = 0$, ce qui donne $y = \frac{-x + \sqrt{ab}}{bxx}$, ou $y = -\frac{1}{bx} + \frac{1}{xx} \sqrt{\frac{a}{b}}$, équation comprise dans l'intégrale de $-ax^{-4}dx + byydx = dy$.

2°. Si on suppose C une quantité infinie négative, le premier membre de l'équation (D) sera $= 0$, donc le numérateur du second membre sera aussi $= 0$; c'est-à-dire qu'on aura $x + bxxxy + \sqrt{ab} = 0$: ce qui donne $y = -\frac{1}{bx} - \frac{1}{xx} \sqrt{\frac{a}{b}}$; & combinant l'une & l'autre valeur de y , on a $y = -\frac{1}{bx} \pm \frac{1}{xx} \sqrt{\frac{a}{b}}$ pour l'intégrale cherchée de l'équation $-ax^{\frac{-4}{h-1}}dx + byydx = dy$ dans laquelle on suppose $h = 1$.

On voit par là comment il faudra s'y prendre pour trouver l'intégrale de cette même équation, en donnant successivement à h différentes valeurs.



CHAPITRE X.

Recherche générale de l'intégration des équations à quatre termes.

CXXII.

Toutes les équations à quatre termes peuvent se réduire à l'une de ces deux formes,

$$x^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx + a dy = 0$$

$$\text{ou } x^m dx + by^p dx + cy^s x^r dy + a dy = 0.$$

Ces équations sont toutes comprises dans deux formules.

1°. Si l'on cherche, comme on a fait pour les équations à trois termes, les cas où ces sortes d'équations peuvent être intégrées, on trouvera dans le premier cas $p = \frac{m-n}{m+1}$

Première manière de chercher les cas d'intégration de ces formules.

$$\& \dots \dots \dots s = \frac{m}{m+1}.$$

$$\text{Car soit } x^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx + a dy = 0, \&$$

faisons $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, en mettant dans la transformée pour p & s leurs valeurs, on aura l'équation suivante $\frac{du}{m+1} +$

En examinant ceux dans lesquels elles peuvent devenir homogènes.

$$\frac{by^{\frac{m-n}{m+1}} u^{\frac{n}{m+1}} du}{m+1} + \frac{cy^{\frac{m}{m+1}} u^{\frac{-m}{m+1}} du}{m+1} + a dy = 0, \text{ laquelle est homogène. Donc, \&c.}$$

2. Dans le second cas nous avons déjà vu (Chap. VI. Art. LXXXVI.) que l'équation à quatre termes $ax^m y^n dx + by^p x^q dx + cx^r y^s dy + fx^e y^n dy = 0$, qui est plus générale que la précédente, devenoit homogène, 1°. si l'on avoit $(s-p+1) \cdot (q-m) = (q-r+1) \cdot (n-p)$.

II. Partie.

M

$$2^{\circ}. (n-p+1) \cdot (q-m) = (q-e+1) \cdot (n-p).$$

Comparant cette équation avec la proposée, on a $n = 0$

$$q = 0$$

$$e = 0$$

$$n = 0$$

Ce qui nous avertit qu'on doit avoir $\frac{s+1}{m+1-r} = \frac{p}{m}$, & $p = \frac{m}{m+1}$, c'est-à-dire $p = \frac{m}{m+1}$ & $s = \frac{-r}{m+1}$. Ensuite on fera $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, ce qui donne, en substituant ces

différentes valeurs, la transformée $\frac{dx}{m+1} + \frac{by^{\frac{m}{m+1}} u^{\frac{-r}{m+1}} dx}{m+1} + cu^{\frac{r}{m+1}} y^{\frac{-r}{m+1}} dy + ady = 0$, homogène comme dans le cas précédent.

CXXIII.

Nouvelle
méthode pour
chercher les
cas d'intégra-
tion des équations
à quatre
termes.

Mais il y a d'autres méthodes pour découvrir encore de nouveaux cas d'intégration dans les formules précédentes : nous allons les examiner, 1^o. pour la formule $x^m dx + by^p x^n dx + cy^q dx + ady = 0$.

Appliquée à
la première
formule.

Il est visible que si dans cette équation on fait $y = gu^q x^h$, elle se changera en une équation de cinq termes, dont on pourra supposer que deux se détruisent dans certains cas particuliers, ce qui réduira la transformée à trois termes. L'équation de cinq termes est $x^m dx + bg^p u^{pq} x^{n+ph} dx + cg^q u^{q^2} x^{h^2} dx + agqu^{q-1} x^h du + dgbx^{h-1} u^q dx = 0$, équation dans laquelle on voit d'abord que si on suppose 1^o. $bg^p u^{pq} x^{n+ph} dx +$

$cg^s u^q x^h dx = 0$, on aura $s = p$

$$n = 0$$

$$b = -c$$

& la proposée fera par conséquent $x^m dx + a dy = 0$, qui n'a que deux termes. Donc on ne peut faire cette première supposition.

2°. On ne peut supposer non plus $cg^s u^q x^h dx + aghx^{h-1} u^q dx = 0$, comme il est aisé de le voir; car alors on auroit $s = 1$ & $h = h - 1$; ce qui est absurde.

3°. La seule supposition qu'on puisse faire sans que la proposée se réduise à n'avoir que deux termes, est celle de $bg^p u^{q^p} x^{n+p^h} dx + aghx^{h-1} u^q dx = 0$, qui nous donne $p = 1$

$$n = -1$$

$$h = -\frac{b}{a}$$

Donc en faisant $y = gu^q x^{-\frac{b}{a}}$, ou simplement $y =$

$ux^{-\frac{b}{a}}$, l'équation $x^m dx + byx^{-1} dx + cy^s dx + a dy = 0$ se réduit à celle-ci de trois termes $x^m dx +$

Equation transformée.

$cu^s x^{-\frac{bs}{a}} dx + agx^{-\frac{b}{a}} du = 0$. Or il est évident 1°.

que cette équation est intégrable ou au moins construisible, si $m = -\frac{bs}{a}$: car alors on a $\frac{dx}{x^{\frac{bs}{a}}} + \frac{cu^s dx}{x^{\frac{bs}{a}}} +$

Cas dans lesquels elle est intégrable ou construisible.

$\frac{adu}{u^{\frac{bs}{a}}} = 0$; & multipliant toute l'équation par $x^{\frac{bs}{a}}$, on a

$$dx + cu^s dx + ax^{\frac{-b+bs}{a}} du = 0; \text{ ou enfin } \frac{dx}{-\frac{b+bs}{a}} =$$

Mij

$\frac{-adu}{1+cu^s}$; équation dans laquelle les indéterminées sont séparées. Donc l'équation $x^m dx + byx^{-1} dx + cy^s dx - \frac{b^s}{m} dy = 0$ est intégrable.

2°. Si on réduit l'équation $x^m dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}} dx + ax^{-\frac{b}{a}} du = 0$ à la forme $x^m dx + a dy + by^p dx = 0$, en la mettant sous celle-ci $x^{m+\frac{b}{a}} dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}} dx + a du = 0$, & qu'on fasse $x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}+1} = z$; ce qui donne $x = z^{\frac{a}{-bs+b+a}}$ &c. on aura après les substitutions ordinaires $x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}+1} dx + q du + ku^s dz = 0$: d'où l'on conclura que si $s = \frac{m}{m+1}$, on peut intégrer, puisqu'alors l'équation est $z^m dz + q du + ku^{\frac{m}{m+1}} dz = 0$, qui devient homogène en faisant $z = y^{\frac{1}{m+1}}$. En effet, cette transformation nous donne $Ay^{\frac{m}{m+1}} dy + qy^{\frac{m}{m+1}} du + Bu^{\frac{m}{m+1}} dy = 0$.

Si $s = 1$, alors l'équation devient $q du + kudz + z^{\frac{am+b}{a}} dz = 0$, dans laquelle les indéterminées se séparent par la méthode du Chapitre VII.

De même si $s = 2$, l'intégration sera possible toutes les fois que $\frac{am+2b}{a-b} = \frac{-4n}{2n+1}$, n exprimant un nombre entier positif, puisqu'alors c'est le cas de l'équation de Riccati.

CXXIV.

En appliquant cette méthode à la seconde formule des équations à quatre termes $x^m dx + by^p dx + cy^s x^r dy + a dy = 0$ mise sous cette autre forme plus commode & aussi générale $dx + by^p x^r dx + cy^s x^n dy + a dy = 0$, on trouve outre les cas dont l'intégration se présente d'elle-même, ou qui se rapportent à ceux dans lesquels $p = \frac{m}{m+1}$ & $s = \frac{-r}{m+1}$, on trouve, dis-je, qu'en supposant $c = -b$

Application de cette même méthode à la seconde formule.

$$s = p - 1$$

$$n = r + 1$$

l'équation $dx + by^p x^r dx - by^{p-1} x^{r+1} dy + a dy = 0$ sera toujours intégrable en faisant $y = ux$. En effet la transformée devient alors $(1 + au) dx + ax du - bu^{p-1} x^{r+p+1} du = 0$, qui est intégrable par la méthode générale du Chapitre VII.

CXXV.

SCHOLIE. Après avoir examiné les cas dans lesquels on peut intégrer chacune des deux formules des équations à quatre termes, il ne sera pas inutile de chercher aussi les cas d'intégration de l'équation $x^m dx + a dy + byx^n dx + cyy dx = 0$, qui ne diffère de celle de Ricati que par le terme $byx^n dx$. C'est ce que nous allons faire dans le Chapitre suivant.



CHAPITRE XI.

Examen des cas d'intégration de l'équation
 $x^m dx + a dy + b y x^n dx + c y y dx = 0.$

CXXVI.

PROBLEME. **T** Rouver les cas d'intégrabilité de l'équation
 $x^m dx + a dy + b y x^n dx + c y y dx = 0.$

Transforma-
 tion nécessai-
 re dans le cas
 présent.

Equation
 transformée.

SOLUTION. Soit $y = p x^r + f x^s z^t$; on voit bien
 que p, r, s, t, f étant des indéterminées que nous pre-
 nons à volonté, nous serons les maîtres de leur donner
 dans la suite telle valeur que nous voudrons. Après les
 substitutions on aura la transformée suivante (A) $x^m dx$
 $+ a p r x^{r-1} dx + a f s z^t x^{s-1} dx + a f t x^s z^{t-1} dz +$
 $b p x^{r+n} dx + b f x^{s+n} z^t dx + c p p x^{2r} dx +$
 $2 c p f x^{r+s} z^t dx + c f f x^{2s} z^{2t} dx = 0$; pour abréger,
 on laissera dans la solution suivante p au lieu de sa valeur

$$\frac{-1}{b + a m + a}.$$

CXXVII.

Première
 supposition
 pour cette é-
 quation.

Soit d'abord $a f s z^t x^{s-1} dx + b f x^{s+n} z^t dx = 0$,

on aura $n = -1$
 $s = -\frac{b}{a}.$

Soit encore $m = r - 1$

&c $b p + a p r + 1 = 0$

$$t = 1$$

$$f = 1;$$

la transformée (A) sera $(1 + apr + bp) \cdot x^{r-1} dx -$
 $bzx^{-\frac{b}{a}-1} dx + ax^{-\frac{b}{a}} dz + bzx^{-\frac{b}{a}-1} dx + cppx^{2r} dx$
 $+ 2pczx^{r-\frac{b}{a}} dx + cz^2 x^{-\frac{2b}{a}} dx = 0$: & en réduisant
 cette équation suivant les suppositions précédentes , elle
 devient (B) $cppx^{2r} dx + ax^{-\frac{b}{a}} dz + 2cp x^{r-\frac{b}{a}} z dx$
 $+ cx^{-\frac{2b}{a}} z^2 dx = 0$, d'où l'on tire ce premier Théo-
 rême.

THÉOREME I. Si l'équation $x^m dx + a dy + byx^{-1} dx$ Nous fournit
 $+ cyydx = 0$ est intégrable, l'équation $cppx^{2m+2+\frac{b}{a}} dx$ trois Théorèmes.
 $+ a dz + 2cp x^{m+1} z dx + cx^{-\frac{b}{a}} z^2 dx = 0$ est aussi
 intégrable.

DÉMONSTRATION. A cause de $r = m + 1$

$$f \text{ \& } r = 1$$

$$s = -\frac{b}{a}$$

la supposition de $y = px^r + fx^s z^s$ devient ici $y =$
 $px^{m+1} + x^{-\frac{b}{a}} z$; ce qui donne la transformée suivante
 $(bp + amp + ap + 1) \cdot x^m dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1} dx +$
 $ax^{-\frac{b}{a}} dz + bzx^{-\frac{b}{a}-1} dx + cppx^{2m+2} dx +$
 $2cpzx^{m+1-\frac{b}{a}} dx + cz^2 x^{-\frac{2b}{a}} dx = 0$; mais à cause
 de $r = m + 1$, la supposition précédente de $bp + apr$
 $+ 1 = 0$, se change en $bp + amp + ap + 1 = 0$;
 multipliant de plus toute l'équation par $x^{\frac{b}{a}}$, & effaçant

ce qui se détruit, on a $c p p x^{2m+1+\frac{b}{a}} dx + a dz + 2 c p z x^{m+1} dx + c z z x^{-\frac{b}{a}} dx = 0$. Donc, &c. C'est ce qu'on trouveroit de même en mettant dans l'équation (B) pour r la valeur $m+1$.

$$\begin{aligned} \text{En supposant toujours} \quad & \dots \dots \dots s = -\frac{b}{a} \\ & n = -1 \\ & f = 1 \\ & t = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit encore} \quad & \dots \dots \dots r = -1 \\ & c p + b - a = 0 \end{aligned}$$

la transformée générale (A) devient l'équation suivante $x^m dx + c p p x^{-2} dx + b p x^{-2} dx - a p x^{-2} dx - b z x^{-\frac{b}{a}-1} dx + a x^{-\frac{b}{a}} dz + b z x^{-\frac{b}{a}-1} dx + 2 c p x^{-\frac{b}{a}-1} z dx + c x^{-\frac{2b}{a}} z z dx = 0$, qui devient à cause de l'hypothèse de $c p + b - a = 0$, & en effaçant ce qui se détruit, $x^m dx + a x^{-\frac{b}{a}} dz + 2 c p x^{-\frac{b}{a}-1} z dx + c x^{-\frac{2b}{a}} z^2 dx = 0$, d'où l'on tire ce second Théorème.

THÉOREME 2. Si l'équation $x^m dx + a dy + b x^{-1} y dx + c y y dx = 0$ est intégrable, l'équation $x^m dx + a x^{-\frac{b}{a}} dz + 2 c p x^{-\frac{b}{a}-1} z dx + c x^{-\frac{2b}{a}} z^2 dx = 0$ l'est aussi.

$$\begin{aligned} \text{Enfin en laissant toujours la supposition de} \quad & s = -\frac{b}{a} \\ & n = -1 \\ & f = 1 \\ & t = 1 \end{aligned}$$

faisant

faisant de plus $r = \frac{m}{2}$
 $p = \sqrt{-\frac{1}{c}}$,

on trouvera de la même façon que ci-dessus le Théorème suivant.

THÉOREME 3. Si l'équation $x^m dx + a dy + byx^{-1} dx + cyy dx = 0$ est intégrable, l'équation $(apr + bp) \cdot x^{\frac{m}{2}-1} dx + ax^{-\frac{b}{2}} dz + 2cpzx^{\frac{m}{2}-\frac{b}{2}} dx + czx^{\frac{m}{2}-\frac{b}{2}} dx = 0$, qui est sa transformée en supposant $y = px^{\frac{m}{2}} + x^{-\frac{b}{2}} z$, l'est aussi.

CXXVIII.

SCHOLIE 1. Les trois Théorèmes précédents nous donnent trois équations dont l'intégration dépend de celle de $x^m dx + a dy + byx^{-1} dx + cyy dx = 0$; mais nous prouverons dans le Théorème 7 suivant que cette équation, lorsque $b = 2a$, est intégrable dans les mêmes cas que celle de Ricati. Donc les trois équations $cpx^2 dx + adz + 2cpzx^{m+1} dx + cx^{-2} z^2 dx = 0$, $x^m dx + ax^{-2} dz + 2cpzx^{-1} dx + cz^2 x^{-4} dx = 0$, & $(apr + 2ap) \cdot x^{\frac{m}{2}-1} dx + ax^{-2} dz + 2cpzx^{\frac{m}{2}-2} dx + cz^2 x^{-4} dx = 0$, sont aussi intégrables dans les mêmes cas que l'équation de Ricati.

CXXIX.

Soit maintenant $afsx^{r-1} z^s dx + 2cpfx^{r+1} z^s dx = 0$,

II. Partie.

N

Seconde supposition qui donne aussi trois Théorèmes.

ce qui donne $r = -1$
 $s = -\frac{2cp}{a}$

Soit aussi $cp = a$,
 ce qui donne $s = -2$
 & soit encore $n = m+1$;

$$p = -\frac{1}{b}$$

$$f \text{ \& } t = 1,$$

on trouvera le Théorème suivant.

THÉOREME 4. En général toutes les équations
 $x^m dx + a dy + byx^{m+1} dx - aby^2 dx = 0$ sont
 intégrables.

DÉMONSTRATION. La substitution qu'il faut faire dans
 le cas présent est celle-ci, $y = px^{-1} + x^{-2}z$; mettant
 les valeurs qu'elle fournit pour y & dy dans l'équation
 précédente, elle devient $x^m dx - apx^{-2} dx - 2cpzx^{-3} dx$
 $+ ax^{-2} dz + bpx^m dx + bzx^{m+1} dx - abp^2 x^{-2} dx$
 $- 2abpzx^{-3} dx - abx^{-4} z^2 dx = 0$. Substituant dans
 cette équation pour p la valeur $-\frac{1}{b}$, suivant l'hypo-
 thèse de $cp = a$, & effaçant ce qui se détruit, on aura
 pour transformée l'équation suivante, $adz + bzx^{m+1} dx$
 $- abz^2 x^{-2} dx = 0$, qui s'intègre par la méthode géné-
 rale du Chapitre VII.

Supposant encore $r = -1$
 $cp = a$
 $s = -2$
 $n = m+1$
 $f \text{ \& } t = 1,$

on découvre la proposition suivante.

THÉOREME 5. Si l'équation $x^m dx + a dy + byx^{m+1} dx + cyy dx = 0$ est intégrable, la suivante, $(bp + 1) \cdot x^m dx + ax^{-2} dz + bx^{m-1} z dx + cx^{-4} z^2 dx = 0$, qui est la transformée, en supposant $y = px^{-1} + x^{-2} z$, l'est aussi. Or nous venons de voir (Théorème 4.) qu'on sépareroit les indéterminées dans l'équation $x^m dx + a dy + byx^{m+1} dx + cyy dx = 0$, lorsque $c = -ab$; donc on les séparera de même dans l'équation $(bp + 1) \cdot x^m dx + ax^{-2} dz + bx^{m-1} z dx + czzx^{-4} dx$; ce qui est évident, puisque la supposition de $c = -ab$, donne $abp + a = 0$, & par conséquent $bp + 1 = 0$. Donc on aura $ax^{-2} dz + bx^{m-1} z dx + czzx^{-4} dx = 0$, équation intégrable par la méthode du Chapitre VII.

Supposant toujours $r = -1$
 $s = -\frac{2cp}{a}$
 $f \text{ \& } t = 1$

& faisant $m = -2$
 $c p p - a p + 1 = 0$

on trouvera le Théorème suivant.

THÉOREME 6. Si l'équation $x^{-2} dx + a dy + byx^n dx + cyy dx = 0$ est intégrable; l'équation $bp x^{n-1} dx + ax^{-\frac{2cp}{a}} dz + bx^{n-\frac{2cp}{a}} z dx + cx^{-\frac{4cp}{a}} z z dx = 0$ l'est aussi. On démontrera cette proposition à peu près de la même façon que les précédentes.

CXXX.

Troisième
supposition.

Soit enfin cette autre supposition, $bf x^{r+n} z^s dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, on en tire . . . $r = n$

$$p = -\frac{b}{2c}$$

Soit aussi $n = -1$

$$s = 1$$

$$t = 1$$

& $c p p + b p - a p = 0$,

ce qui donne $b = 2a$,

on trouvera la proposition suivante.

Fournit trois
nouveaux
Théorèmes.

THEOREME 7. $x^m dx + a dy + b a x^{-1} y dx + c y y dx = 0$ est intégrable dans les mêmes cas que l'équation de Ricati.

DEMONSTRATION. Mettant dans la transformée générale (A) pour r , pour n & pour s leurs valeurs, & suivant la condition de $c p p + b p - a p = 0$; elle devient $x^m dx + a z dx + b z dx + a x dz + 2 c p z dx + c z^2 x^2 dx = 0$. Mais à cause de $p = -\frac{b}{2c}$, cette équation se change en la suivante $x^m dx + a z dx + a x dz + c z^2 x^2 dx = 0$; & enfin en faisant $xz = u$, on a $x^m dx + a du + c u u dx = 0$ qui est l'équation même de Ricati.

En supposant toujours $r = n$

$$p = -\frac{b}{2c}$$

& supposant de plus $n - 1 = m$

$$a p r + 1 = 0,$$

on tire des suppositions précédentes . . . $c = -\frac{b}{2p}$

& $p = -\frac{1}{ar} = \frac{-1}{am+a}$.
 Donc $c = \frac{abm+ab}{2}$. Ces conditions nous donnent le
 Théorème suivant.

THEOREME 8. L'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx$
 $+ \left\{ \frac{abm+ab}{2} \right\} . yydx = 0$ s'integre dans les mêmes
 cas que ceux dans lesquels on peut intégrer l'équation
 de Ricati.

DEMONST. Substituant dans la transformée générale
 (A) pour r, s, n leurs valeurs, & effaçant ce qui se dé-
 truit, elle se change dans l'équation suivante, $azdx +$
 $axdz - \frac{bb}{4c} x^{2m+2} dx + cz^2 x^2 dx = 0$; & en faisant
 $xz = u$, $\frac{-bb}{4c} = B$, on aura $Bx^{2m+2} dx + adu +$
 $cu^2 dx = 0$, qui est l'équation de Ricati.

THEOREME 9. Si on ne suppose pas $apr + 1 = 0$,
 on trouvera qu'en général si $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx$
 $+ cyydx = 0$ est intégrable, alors $(cpp + bp) .$
 $x^{2m+2} dx + (apr + 1) . x^m dx + adu + cu^2 dx = 0$
 l'est aussi. C'est ce qui est évident par l'inspection seule de
 la transformée générale (A), en y mettant seulement pour
 r, s , & n leurs valeurs, & en y faisant $xz = u$.

CXXXI.

SCHOLIE 2. En supposant $x^m dx + ady = fdz$,
 ce qui donne $\frac{x^{m+1}}{m+1} + ay = fz$
 & $y = \frac{fz - \frac{x^{m+1}}{m+1}}{a}$,
 Autre trans-
 formation
 dont on peut
 encore se ser-
 vir.

Equation transformée.

$$\begin{aligned} \text{l'équation } x^m dx + a dy + byx^n dx + cyy dx = 0 \\ \text{devient (X) } f dz + \frac{bfzx^n dx}{m+1} - \frac{bx^{m+1+n} dx}{m+1} + \\ \frac{cf^2 z^2 dx}{a} - \frac{2cfzx^{m+1} dx}{a(m+1)} + \frac{cx^{2m+2} dx}{(m+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

CXXXII.

Première supposition pour cette équation.

Supposant 1°. dans la transformée (X) $-\frac{bx^{m+1+n} dx}{a \cdot (m+1)}$ $+\frac{cx^{2m+2} dx}{aa \cdot (m+1)^2} = 0$, ou bien $cx^{2m+2} dx = (m+1) \cdot abx^{m+1+n} dx$, on en tire $c = (m+1) \cdot ab$

$$m = 1$$

$$n = 2;$$

ce qui donne le Théorème suivant.

Nous donne un Théorème.

THEOREME 10. $x^m dx + a dy + byx^{m+1} dx + (m+1) \cdot aby^2 dx = 0$ est intégrable. Car par les suppositions précédentes la transformée générale (X) devient $a^2 f dz - (m+1) \cdot abzx^{m+1} dx + (m+1) \cdot fc z^2 dx = 0$, équation dans laquelle les indéterminées se séparent par la méthode du Chapitre VII.

CXXXIII.

Seconde supposition qui donne aussi un Théorème.

2°. Supposant $\frac{bfzx^n dx}{a} - \frac{2cfzx^{m+1} dx}{aa \cdot (m+1)} = 0$, on en tire $n = m+1$; $c = \left\{ \frac{m+1}{2} \right\} \cdot ab$, ce qui nous donne le Théorème suivant.

THEOREME 11. $x^m dx + a dy + byx^{m+1} dx +$

$\left\{ \frac{m+1}{2} \right\} . a b y^2 dx = 0$ est intégrable dans les mêmes cas que $x^{2m+2} dx + a dz + c z^2 dx = 0$, comme on l'a trouvé déjà ci-dessus dans le Théorème 8. C'est ce qui est évident en observant dans la transformée (X) les conditions que donne la supposition précédente.

CXXXIV.

SCHOLIE 3. Si l'on fait dans l'équation $x^m dx + a dy + b y x^n dx + c y y dx = 0$, $n = 0$

Dernier cas
d'intégration
de la formule.

$$s \text{ \& } t = 1,$$

la transformée générale (A) devient (F) $x^m dx + a p r x^{r-1} dx + a f z dx + a f x dz + b p x^r dx + b f x z dx + c p p x^{2r} dx + 2 c p f x^{r+1} z dx + c f f x^2 z^2 dx = 0$.

CXXXV.

Soit maintenant dans cette dernière équation $b f x z dx + 2 c p f x^{r+1} z dx = 0$, on en tire . . $r = 0$

$$p = -\frac{b}{2c}.$$

Soit aussi $f = 1$.

En effaçant ce qui est multiplié par zéro & ce qui se détruit dans l'équation (F), on a $x^m dx + a z dx + a x dz - \frac{bb}{4c} dx + c x^2 z^2 dx = 0$; & enfin en faisant $xz = u$, on a $x^m dx + a du - \frac{bb}{4c} dx + c u^2 dx = 0$; ce qui nous donne le Théorème suivant.

THÉOREME 12. Si $x^m dx + a dy + b y dx + c y y dx = 0$ est intégrable, (B) $x^m dx - \frac{bb}{4c} dx + a du +$

$cu^2 dx = 0$ l'est aussi. Donc réciproquement la première pourra être intégrée dans tous les cas où l'on intégrera cette dernière.

On trouve, par exemple, que si $m = 2$ & $\frac{b^4}{16caa} = -1$, cette dernière équation (B) est intégrable. Car soit dans cette équation, $u = \frac{z}{a} + \frac{bbx}{4ac}$, on aura la transformée suivante $x^2 dx - \frac{bb}{4c} dx + dz + \frac{bbdx}{4c} + \frac{czzdx}{aa} + \frac{bbzx dx}{2aa} + \frac{b^4 x^2 dx}{16aac} = 0$. Or cette équation dans l'hypothèse de $\frac{b^4}{16caa} = -1$ se réduit à la suivante $2aadz + bbzx dx + 2cz^2 dx = 0$, dans laquelle on sépare les indéterminées. Donc (B) est intégrable dans le cas présent. D'où il faut conclure que $x^2 dx + ady + bydx - \frac{b^4 y^2 dx}{16aa} = 0$ l'est aussi.

CXXXVI.

Recherche
des cas d'inté-
grabilité de
deux nouvel-
les équations
à quatre ter-
mes.

REMARQUE. Outre l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyy dx = 0$, nous pouvons aussi chercher les cas d'intégrabilité des deux équations

$$x^m dx + bx^n dx + ady + cyy dx = 0$$

$$\& \dots x^m dx + ady + bx^n dy + cyy dx = 0,$$

qui ne diffèrent non plus de l'équation de Riccati que par un seul terme.

CXXXVII.

Examen de
la première.

Soit donc 1°. $x^m dx + bx^n dx + ady + cyy dx = 0$, l'équation à intégrer : faisons $y = px^r + fx^s z^t$, nous aurons $dy = rpx^{r-1} dx + ft x^s z^{t-1} dz + fs z^t x^{s-1} dx$, & pour transformée l'équation suivante, (D) $x^m dx + bx^n dx$

$$bx^n dx + aprx^{r-1} dx + afsx^{s-1} z^t dx + aftz^{t-1} x^s dz \\ + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0.$$

Soit $afsx^{s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, on en tire $r = -1$

$$s = -\frac{2cp}{a}.$$

Soit $cp = a$

$$t = 1,$$

on trouvera $f = 1.$

THEOREME 13. Si l'équation $x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$ est intégrable, la suivante $x^m dx + bx^n dx + ax^{-2} dz + cx^{-4} z^2 dx = 0$ l'est aussi; puisque c'est sa transformée en faisant $y = \frac{ax^{-1}}{c} + x^{-2} z$.

THEOREME 14. Soit encore . . . $r = -1$

$$s = -\frac{2cp}{a},$$

& de plus soit $m = -2$

& $-ap + cpp + 1 = 0;$

on pourra intégrer l'équation $x^{-2} dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$ dans le cas où l'on peut intégrer la suivante $bx^n dx + afx^s dz + cffx^{2s} z^2 dx = 0$; ce qui est évident, puisque c'est sa transformée en faisant $y = px^{-1} + x^{-1} z$, & effaçant ce qui se détruit par la supposition de $cpp - ap + 1 = 0$.

THEOREME 15. Soit maintenant $x^m dx + aprx^{r-1} dx = 0$, on en tire $r = m + 1$

$$apr = -1.$$

Soit de plus $cpp + b = 0$

$$n = 2m + 2$$

O.

$$f = 1$$

$$t = 1$$

$$s = 1.$$

La transformée générale (D) devient ici $x^m dx + bx^{2m+2} dx + (m+1) \cdot apx^m dx + az dx + ax dz + cpx^{2m+2} dx + 2cpx^{m+2} z dx + cz^2 x^2 dx = 0$, qui se réduit par les suppositions précédentes à $az dx + ax dz + 2cpx^{m+2} z dx + cz^2 x^2 dx = 0$; qui est intégrable par la méthode du Chapitre VII.; ce qui est évident en mettant l'équation sous cette forme $ax dz + (a + 2cpx^{m+2}) z dx + cz^2 x^2 dx = 0$. D'où il suit que l'équation $x^m dx + bx^{2m+2} dx + a dy - (m+1) \cdot aaby^2 dx = 0$ est intégrable.

CXXXVIII.

Examen de
la seconde é-
quation.

2°. Examinons maintenant la formule $x^m dx + bx^n dy + a dy + cy y dx = 0$: faisons $y = px^r + fx^s z^t$; on aura pour transformée l'équation suivante (Y) $x^m dx + bprx^{r+n-1} dx + bfsx^{n+s-1} z^t dx + bftx^{s+n} z^{t-1} dz + aprx^{r-1} dx + afsx^{s-1} z^t dx + aftz^{t-1} x^s dz + cpx^{2r} dx + 2cpx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0$.

Supposons maintenant $afsx^{s-1} z^t dx + 2cpx^{r+s} z^t dx = 0$, on aura $r = -1$

$$s = -\frac{2cp}{a}$$

Soit $cp = a$

$$n = m+2$$

$$bp-1 = 0,$$

on en conclura ,

THEOREME 16. que $x^m dx + bx^{m+2} dy + a dy + aby^2 dx = 0$ est intégrable.

DEMONSTR. Car par les conditions précédentes la transformée générale (Y) devient ici $x^m dx - bp x^m dx - 2bz x^{m-1} dx + bx^m dz - ap x^{-2} dx - 2ax^{-3} z dx + ax^{-2} dz + abpp x^{-2} dx + 2abp x^{-3} z dx + abx^{-4} z^2 dx = 0$; laquelle , après les réductions que donne la supposition de $bp - 1 = 0$, devient étant multipliée par xx , $(a + bx^{m+2}) . dz - 2bz x^{m+1} dx + cz^2 x^2 dx = 0$, qui , comme on le voit , est dans le cas de notre méthode générale du Chapitre VII.

Soit ensuite $bfs x^{n+s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$,
on en tire $r = n - 1$

$$s = -\frac{2cp}{br} .$$

Soit à présent $cp + br = 0$.

$$f \& t = 1$$

$$m = n - 2$$

$$apr + 1 = 0 , \text{ on aura } s = 2 .$$

Ces suppositions nous donnent le Théorème suivant.

THEOREME 17. $x^m dx + bx^{m+2} dy + a dy + (m+1)^2 . aby^2 dx = 0$ est intégrable. Car substituant dans la transformée générale (Y) pour r, n, s, f, t , leurs valeurs , faisant les réductions qu'amènent les suppositions de $cp + bm + b = 0$, & de $apm + ap + 1 = 0$, on aura l'équation suivante $(ax^2 + bx^{m+4}) . dz + 2axz dx + (m+1)^2 . abz^2 x^2 dx = 0$. Donc , &c.

O ij

CXXXIX.

REMARQUE. Il est bon d'observer ici qu'une équation $x^m dx + by^n x^p dx + cx^r y^s dy + a dy = 0$, ou $x^m dx + a dy + by^n x^p dx + cy^r dx = 0$, ne peut être changée par transformation en une autre de la même forme, & dont les coefficients soient tous trois donnés. Il ne peut y avoir que deux de ces coefficients de donnés. La raison en est qu'en faisant $x = fu$, $y = gz$, on formera trois équations différentes, quoiqu'on n'ait que deux inconnues f, g .

C H A P I T R E XII.

Méthode pour construire les équations différentielles à deux variables, dans lesquelles l'une des deux indéterminées manquent.

CXL.

Procédé de
la méthode.

Quelle est
la substitution
qu'elle em-
ploie.

Toute équation différentielle à deux variables, à quelque degré que les dx & les dy y soient élevées, se construit toujours lorsque l'une des deux indéterminées finies y manque. La méthode qu'il faut suivre dans ce cas, consiste à faire $dx = \frac{z dy}{a}$, si c'est x qui manque, ou $dy = \frac{z dx}{a}$ si c'est y qui manque. (z est une nouvelle indéterminée, & a une constante quelconque.) Car par

Cette substitution, en mettant, par exemple, $\frac{z dy}{a}$ au lieu de dx dans la proposée, il est évident qu'on aura une transformée toute divisible par une puissance de dy qui se trouvera la même par-tout, & par conséquent que la transformée sera toute composée de quantités finies. On aura aussi la valeur de z en y & en constantes, & la raison d' y à z , sera exprimée par une équation ou par une courbe algébrique. Mettant donc dans l'équation $dx = \frac{z dy}{a}$ pour dy la valeur trouvée par le procédé précédent, les indéterminées seront séparées.

Pour faire mieux sentir l'esprit de cette méthode, appliquons-la à quelques exemples.

Application
de la méthode
à quelques
exemples.

CXLI.

Soit l'équation $y dy^3 dx = a dx^4 + 2 a dx^2 dy^2 + a dy^4$, dans laquelle il ne se trouve aucune dimension finie de x . Suivant ce que nous venons de dire, je fais $dx = \frac{z dy}{a}$; $dx^2 = \frac{z z dy^2}{a a}$; $dx^4 = \frac{z^4 dy^4}{a^4}$. Mettant ces valeurs de dx , dx^2 , dx^4 dans la proposée, j'ai la transformée suivante $\frac{z y dy^4}{a} = \frac{z^4 dy^4}{a^4} + \frac{2 z z dy^4}{a} + a dy^4$, c'est-à-dire, en divisant par dy^4 qui est commun à tous les termes $\frac{z y}{a} = \frac{z^4}{a^4} + \frac{2 z z}{a} + a$; de cette équation je tire aisément la valeur de $y = \frac{z^3}{a a} + 2 z + \frac{a a}{z}$; & celle de $dy = \frac{3 z^2 dz}{a a} + 2 dz - \frac{a a dz}{z z}$: donc $\frac{z dy}{a} = dx = \frac{3 z^2 dz}{a^3} + \frac{2 z dz}{a} - \frac{a dz}{z}$. J'intègre cette équation. Son intégrale est $x = \frac{3 z^3}{4 a^3} - \frac{z z}{a} + a l z + C = 0$.

Premier
exemple.

On a donc la valeur des deux coordonnées x & y de la proposée par le moyen de deux courbes qui ont une indéterminée commune z .

Figure 5. Ayant donc pris les abscisses z sur l'axe AB , je décris la courbe DEC de l'équation $y = \frac{z^2}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, & la courbe NLM de l'équation $x = \frac{3z^4}{4a^3} - \frac{zz}{a} + alz + C = 0$ $BC = y$
 $BM = x$

seront les coordonnées de la courbe différentielle proposée.

Pour la construire je mene KO parallèle à BM , je prolonge MO en Q , enforte qu'on ait toujours $OQ = BC$, & QPR fera la courbe cherchée.

CXLI.

Second
exemple.

Soit encore l'équation $y^3 dx^5 + aaydydx^4 = a^3 dy^5$. Je fais $dx = \frac{zdy}{a}$, & après les mêmes substitutions que dans l'exemple précédent, il me vient ici $\frac{y^3 z^5 dy^5}{a^5} + \frac{aa z^4 y dy^5}{a^4} = a^3 dy^5$, & en réduisant $y^3 z^5 + a^3 y z^4 = a^5$.

Figure 6. Pour avoir la courbe de l'équation différentielle proposée, sur l'axe DH , je construis la courbe EF de l'équation $z^5 y^3 + a^3 z^4 y = a^5$; CD étant $= y$, & $CF = z$. Sur FC prolongée je prends CA égal à l'espace $DCFE$ divisé par a : on aura donc $CA = \int \frac{zdy}{a} = x$, & le point A appartient à la courbe cherchée.

CXLI.

SCHOLIE. Cette méthode est, comme on le voit,

assez étendue , d'autant plus qu'elle s'applique , comme nous le dirons dans la suite , aux différentielles d'un ordre plus élevé que le premier degré. M. d'Alembert en donne une encore plus générale dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin , année 1748. Sa méthode a deux avantages. 1°. Elle ne suppose pas qu'une des deux indéterminées manque dans l'équation. 2°. Elle mene tout de suite à l'intégration. Nous allons l'expliquer dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XIII.

Méthode pour intégrer plusieurs équations différentielles dans lesquelles dx & dy sont élevées à différentes puissances.

CXLIV.

DEMANDE. **N**ous supposerons toujours dans ce Chapitre $z = \frac{dx}{dy}$, & il ne faut pas oublier que $\frac{dx}{dy}$ est une quantité finie , comme nous l'avons dit Article xxxiv.

CXLV.

AVERTISSEMENT. La supposition qu'on fait ici de $\frac{dx}{dy} = z$, donne $dz = \frac{dy ddx - dx ddy}{dy^2}$; par conséquent , comme dans les deux méthodes pour lesquelles la présente supposition a lieu , dz se rencontre assez souvent , il

sembleroit que ces méthodes appartiennent aux différentielles du second ordre. Cependant nous avons cru devoir les traiter ici , parce que dz y est sous une forme de différentielle du premier degré.

CXLVI.

Conditions
qu'exige cet-
te méthode.

PROBLEME 1. Trouver l'intégrale d'une équation différentielle qui renferme telles fonctions qu'on voudra de dx & de dy , & dans laquelle x & y se trouvent , pourvu qu'ils ne soient ni multipliés ni divisés l'un par l'autre , ni élevés à aucune puissance plus grande que l'unité.

Formule
des équations
auxquelles on
la peut appli-
quer.

SOLUTION. Ces sortes d'équations peuvent se représenter par la formule $x = y\varphi z + \Delta z$ (φz & Δz marquant des fonctions quelconques de z , c'est-à-dire de $\frac{dx}{dy}$).

Procédé de
la méthode
appliquée à
cette formu-
le.

Je commence par différentier cette formule , j'ai $dx = dy\varphi z + yd(\varphi z) + d(\Delta z)$; ou mettant pour dx sa valeur zdy , on a $zdy = dy\varphi z + yd(\varphi z) + d(\Delta z)$; ou $dy(\varphi z - z) + yd(\varphi z) + d(\Delta z) = 0$. Donc $dy + \frac{yd(\varphi z) + d(\Delta z)}{\varphi z - z} = 0$, équation qui est dans le cas de la méthode de M. Bernoulli que nous avons expliquée dans le Chapitre VII. , & de laquelle on tire aisément la valeur de y en z ; car en prenant c pour le nombre dont le logarithme est l'unité, on a $y c^{\int \frac{d(\varphi z)}{\varphi z - z}} + \int \frac{d(\Delta z)}{\varphi z - z} \times c^{\int \frac{d(\varphi z)}{\varphi z - z}} = A$. (A est une constante quelconque ajoutée pour rendre l'intégrale complete.) Par conséquent on trouvera aussi la valeur de x , puisque $dx = zdy$, & $x = \int zdy$.

CXLVII.

CXLVII.

COROLLAIRE. Si $x = y \varphi z$, c'est le cas des équations homogenes que nous avons appris à intégrer dans le Chapitre V. Il est cependant pris ici dans un autre sens que celui des équations homogenes de M. Bernoulli. Car ici on a $\frac{x}{y} = \varphi z = \varphi \frac{dx}{dy}$, au lieu que dans le cas de M. Bernoulli on a $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$. Quoique ces deux cas rentrent l'un dans l'autre, cependant il seroit quelquefois fort difficile de ramener le premier au second; c'est-à-dire, de tirer de $\frac{x}{y} = \varphi \frac{dx}{dy}$, l'équation $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$. C'est pourquoi il étoit fort utile d'avoir une méthode particuliere pour chacun de ces deux cas. Celle que nous expliquons ici apprend en général à intégrer toute équation $x = y \varphi z$, φz étant une fonction quelconque de z , même avec des signes $\int$.

Le cas des équations homogenes se résout par cette méthode.

CXLVIII.

Néanmoins cette méthode suppose qu'on ait la valeur de $\frac{x}{y}$ en z ; mais on peut par un autre moyen résoudre encore plus généralement le cas présent. Soit, comme dans tout ce Chapitre, $z = \frac{dx}{dy}$, & $x = yk$, (z & k étant deux nouvelles changeantes) la proposée devient une équation algébrique quelconque entre z & k . Je construis la courbe qui est le lieu de cette équation, & j'ai pour chaque z la correspondante k , & *vice versa*. Or de ce que $x = yk$, & $dx = zdy$, il s'ensuit qu'on aura $zdy = ydk + kdy$, & $\frac{dy}{y} = \frac{dk}{z-k}$; donc nous parviendrons à

Autre maniere plus générale de résoudre le cas des équations homogenes.

trouver la valeur de y en construisant & en quarrant la courbe dont les abscisses sont k , & dont les ordonnées sont $\frac{1}{z-k}$.

CXLIX.

Aussi bien
que l'équa-
tion du Chap.

Chap. VI.
Art. XC.

COROLLAIRE 2. L'équation $gx dx + hy dx + f dx = ax dy + by dy + c dy$, pour laquelle nous avons donné une méthode particulière, est aussi un cas particulier du Problème précédent. En effet, cette équation est la même que la suivante $dx = \left\{ \frac{ax+by+c}{gx+hy+f} \right\} dy$, ou $\frac{dx}{dy} = \frac{ax+by+c}{gx+hy+f}$. Donc on a $z = \frac{ax+by+c}{gx+hy+f}$: ou $zgx + zhy + zf = ax + by + c$; donc $zgx - ax = -zhy - fz + by + c$; donc $x = y \left\{ -\frac{zh+b}{zg-a} \right\} + \frac{c-fz}{zg-a}$; donc enfin $x = y \varphi z + \Delta z$ qui est la formule du Problème. Donc la proposée s'intégrera par la même méthode que cette formule.

CL.

Application
à une seconde
formule.

PROBLÈME 2. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $x^m y^n z^r = \varphi(x^q y^s z^t)$ dans laquelle $z = \frac{dx}{dy}$, m, n, r, q, s, t marquent des nombres quelconques.

SOLUTION. Je fais $x^q y^s z^t = u$,

$$\text{donc } \dots \dots \dots x = u^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{s}{q}} z^{-\frac{r}{q}}$$

$$x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mr}{q}};$$

mais nous avons $x^m y^n z^r = \varphi u$, donc $y^n z^r = \frac{\varphi u}{x^m}$

$$\text{donc } y^n z^r = \frac{\varphi u}{u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ma}{q}} z^{-\frac{mt}{q}}} = (\varphi u) \cdot u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}.$$

$$\text{Donc } y^n = (\varphi u) \cdot u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}, \text{ ou } y^{\frac{nq-ms}{q}} = (\varphi u) u^{-\frac{m}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}. \text{ Donc enfin } y = (\varphi u)^{\frac{q}{nq-ms}} \times u^{\frac{-m}{nq-ms}} z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}. \text{ Donc } x = u^{\frac{1}{q}} z^{-\frac{t}{q}} y^{-\frac{s}{q}}, \text{ (\& en mettant pour } y^{-\frac{s}{q}} \text{ la valeur,)} = (\varphi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} \times u^{\frac{n}{nq-ms}} z^{\frac{rs-nr}{nq-ms}}.$$

Mais (Problème r.) $dx = z dy$. Donc si on substitue les valeurs de dx & de dy dans cette dernière équation, on trouvera les conditions d'intégrabilité de la manière suivante. Cas d'intégration de cette formule.

CL I.

Supposant $(\varphi u)^{\frac{q}{nq-ms}} \cdot u^{-\frac{m}{nq-ms}} = V'$, & $(\varphi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} = V$ pour abréger le calcul. Nous aurons Manière de les trouver.

$$x = V z^{\frac{rs-nr}{nq-ms}}, \text{ \& } y = V' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}.$$

Donc à cause de l'équation $dx = z dy$, on a

$$d \left\{ V z^{\frac{rs-nr}{nq-ms}} \right\} = z d \left\{ V' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} \right\}, \text{ c'est-à-dire, } z^{\frac{rs-nr}{nq-ms}} dV + \left\{ \frac{rs-nr}{nq-ms} \right\} V z^{\frac{rs-nr}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms}} dV' + \left\{ \frac{tm-rq}{nq-ms} \right\} V' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz, \text{ équation qui est intégrable dans tous les cas suivants.}$$

P ij

CLII.

Premier cas d'intégration. 1°. Si $tm - rq = 0$. Car alors on a $z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV + \left\{ \frac{rs - nt}{nq - ms} \right\} V z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz = z dV'$, équation qui est dans le cas de la Méthode du Chapitre VII.

De l'équation $tm - rq = 0$ on tire $\frac{t}{r} = \frac{q}{m}$, donc la proposée devient $x^m z^r y^n = \phi y^s x^{\frac{tm}{r}} z^{\frac{rq}{m}}$, & supposant $\frac{t}{r} = p$, on a $x^m z^r y^n = \phi y^s x^{p^m} z^{p^r}$. Je fais $x^m z^r = k$, donc j'ai $ky^n = \phi y^s k^p$, donc $k = \Delta y$; donc $x^m z^r = \Delta y$, équation facile à intégrer. La méthode que nous expliquons a l'avantage de fournir le moyen d'intégrer ces sortes d'équations différentielles sans chercher la valeur de $x^m z^r$ en y , ce qu'il seroit souvent impossible de trouver.

CLIII.

Second cas d'intégration de la même formule. 2. L'équation est intégrable dans le cas où $rs - nt = 0$. Car alors on a $V^{-1} dV = z^{\frac{tm - rq}{nq - ms} + 1} V'^{-1} dV' +$

$\left\{ \frac{tm - rq}{nq - ms} \right\} V'' z^{\frac{tm - rq}{nq - ms}} dz$, équation encore constructible par la même méthode de M. Bernoulli, Chapitre VII.

L'équation $rs - nt = 0$ change la proposée $x^m y^n z^r = \phi x^q y^s z^t$, en la suivante $x^m y^n z^r = \phi (x^q y^s z^t)^{\frac{n}{r}}$, d'où l'on tirera $y^n z^r = Tx$, en suivant la même opération que ci-dessus,

CLIV.

3°. Si $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, alors l'équation sera beaucoup plus simple que les précédentes. Car Troisième cas d'intégration.
dans ce cas $\frac{tm - qr}{nq - ms} = \frac{nq - ms + tm - rq}{nq - ms} - 1 = \frac{rs - nt}{nq - ms} - 1$;

donc notre dernière équation devient $z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} V^{-1} dV +$

$$\left\{ \frac{rs - nt}{nq - ms} \right\} V z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz = z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} V''^{-1} dV'' +$$

$$\left\{ \frac{rs - nt}{nq - ms} - 1 \right\} V'' z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz, \text{ c'est-à-dire,}$$

$$\frac{V^{-1} dV - V''^{-1} dV''}{\left\{ \frac{rs - nt}{nq - ms} - 1 \right\} V'' - \left\{ \frac{rs - nt}{nq - ms} \right\} V} = \frac{z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz}{z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}}}$$

équation qui est toute séparée.

Si dans le cas présent on fait $t = 0$, $r = 1$, au lieu de l'équation de condition $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, on aura la suivante $nq - ms = q + s$. Dans ce cas la proposée $x^m y^n z^r = \varphi x^q y^s z^t$ devient $x^m y^n z = \varphi x^q y^s$. Donc en mettant pour z sa valeur $\frac{dx}{dy}$, on a $x^m y^n \frac{dx}{dy} = \varphi x^q y^s$, ou $dx = x^{-m} y^{-n} dy \varphi(x^q y^s)$;

Donc en supposant $-m = p$,
 $-n = t$

toute équation de cette forme $dx = x^p y^t dy \varphi(x^q y^s)$ sera intégrable si $-tq + ps = q + s$; ainsi l'équation $dx = \frac{x}{y} dy \varphi(y^s x^q)$ est intégrable. Car on a en comparant terme à terme $p = 1$, $t = -1$: donc on a $-tq + ps = q + s$. De même dans l'équation $dx = dy \varphi(xy^s)$, $p = 0$, $t = 0$, $q = 1$; donc, &c.

C L V.

Celui des é-
quations ho-
mogenes y est
compris.

Le cas des équations homogenes de M. Bernoulli est renfermé dans l'équation générale $-tq + ps = q + s$. Car ce cas peut se représenter, comme nous l'avons déjà dit (Art. CXLVII.) par $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$, ou $dx = dy \varphi x y^{-1}$. Or comparant cette équation avec la formule de l'article précédent, on a $p = 0$; $t = 0$

$$q = 1; s = -1.$$

Donc $ps - tq = 0$, & $q + s = 0$; donc $-tq + ps = q + s$.

C L V I.

Par le même moyen on peut déterminer les conditions d'intégrabilité de l'équation $dx = a' x^m y^n dy + p x^e y^h dy + f x^g y^l dy + \&c$. Pour y parvenir, je fais $x^{\frac{1}{b}} y^{\frac{a}{b}} = u$ (a & b sont deux indéterminées.) J'ai donc $x = u^{\frac{b}{1}} y^{-\frac{a}{b}}$; $dx = \frac{1}{b} y^{-\frac{a}{b}} u^{\frac{1}{b}-1} du - \frac{a}{b} u^{\frac{1}{b}} y^{-\frac{a}{b}-1} dy$; donc j'ai la transformée suivante $\frac{1}{b} y^{-\frac{a}{b}} u^{\frac{1}{b}-1} du = \frac{a}{b} u^{\frac{1}{b}} y^{-\frac{a}{b}-1} dy + a' u^{\frac{m}{b}} y^{-\frac{a}{b}+n} dy + p u^{\frac{e}{b}} y^{-\frac{a}{b}+h} dy + f u^{\frac{g}{b}} y^{-\frac{a}{b}+l} dy + \&c$. équation qu'on voit aisément être intégrable, toutes les fois que $-\frac{a}{b} - 1 = -\frac{a}{b} + n = -\frac{a}{b} + h = -\frac{a}{b} + l$. Or de l'équation $-\frac{a}{b} - 1 = -\frac{a}{b} + n$, je tire $-\frac{a}{b} + \frac{m}{b} = n + 1$, donc $+\frac{a}{b} = \frac{n+1}{m-1}$; de même de l'équation $+\frac{a}{b} - 1$

$= -\frac{e^a}{b} + h$ on tire $-\frac{a}{b} + \frac{e^a}{b} = h + 1$. Donc $\frac{a}{b} = \frac{h+1}{e-1}$ &c. Donc la proposée est intégrable, toutes les fois que $\frac{n+1}{m-1} = \frac{h+1}{e-1} = \frac{l+1}{g-1}$ &c.

CLVII.

4°. Enfin si $nq - ms = 0$, on a $x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{sm}{q}} z^{-\frac{tm}{q}}$. Quatrième & dernier cas d'intégration de la même formule.
Donc la proposée $x^m y^n z^r = \varphi u$, devient $u^{\frac{m}{q}} y^{\frac{nq-ms}{q}} z^{\frac{rq-tm}{q}} = \varphi u$ ou $u^{\frac{m}{q}} z^{\frac{rq-tm}{q}} = \varphi u$, & l'équation proposée s'intègre toutes les fois que $n = -m$, & $q = -s$, ce qui rentre dans le cas des équations homogènes.

CLVIII.

REMARQUE. On ne retrouvera que les mêmes équations de condition, soit qu'on tire de l'équation différentielle proposée les valeurs de y & de z , ou de x & de z .

CLIX.

PROBLEME 3. Trouver les conditions d'intégrabilité de l'équation $x = y^k z^r \varphi(y^p z^n) + \Delta(y^p z^n)$. Recherche des cas d'intégration d'une troisième formule.

1°. Je suppose $y^p z^n = u$, donc $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$; or $z = \frac{dx}{dy}$, donc $\frac{dx}{dy} = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$: donc $dx = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$.
On a aussi $z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}}$, donc $y^k z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}}$, donc on a la transformée $x = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}} \varphi u + \Delta u$.

Nommant $u^{\frac{1}{p}} \varphi u$, V , j'ai $u^{\frac{1}{p}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(V y^{k-\frac{p}{n}} + \Delta u)$, par où il m'est facile de voir que l'équation se rapporte au cas général de M. Bernoulli expliqué (Ch. VII.) si $-\frac{p}{n} + 1 = k - \frac{p}{n}$.

2°. Si on fait encore $y^{\frac{1}{p}} z^{\frac{n}{p}} = u$, & qu'on en tire $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$, $dy = \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1} z^{-\frac{n}{p}} du - \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}-1} u^{\frac{1}{p}} dz$: on aura $dx = z dy = \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz$. D'ailleurs $y^k z^r = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r}$, donc $x = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r} \varphi u + \Delta u$.

Je nomme $u^{\frac{k}{p}} \varphi u$, V' : j'ai donc dx , ou $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz = z^{-\frac{nk}{p}+r} dV' - \left\{ \frac{nk}{p} - r \right\} V' z^{-\frac{nk}{p}+r-1} dz + d(\Delta u)$. Or si $-\frac{n}{p} + 1 = -\frac{nk}{p} + r$, on aura $-\frac{n}{p} = -\frac{nk}{p} + r - 1$; donc l'équation précédente devient $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - z^{-\frac{nk}{p}+1} V'^{-1} dV' - d\Delta u = \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}} dz - \left\{ \frac{n}{p} - 1 \right\} V' z^{-\frac{n}{p}} dz$, ou bien $z^{-\frac{n}{p}} dz \times \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} + \left\{ 1 - \frac{n}{p} \right\} V' + z^{-\frac{n}{p}+1} du \times \left\{ V'^{-1} \frac{dV'}{du} - \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1} \right\} - d\Delta u = 0$. Or on voit bien que cette équation se rapporte au cas général de M. Bernoulli, de même que l'équation de l'article précédent.

CLX.

COROLLAIRE. Si la proposée étoit $x = y^k z^r \phi(y^p z^n)$
 $+ y^{k'} z^{r'} \Delta(y^p z^n) + y^{k''} z^{r''} \Gamma(y^p z^n) + \&c.$ je ferois
 comme ci-dessus $y^p z^n = u$, donc $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$, donc
 $dx = z dy = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. Donc $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy =$
 $d(u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{p}{n} + k} \phi u + u^{\frac{r'}{n}} y^{-\frac{p}{n} + k'} \Delta u + u^{\frac{r''}{n}} y^{-\frac{p}{n} + k''} \Gamma u$
 $+ \&c.)$ Donc la proposée fera intégrable, lorsqu'on aura
 $-\frac{p}{n} + 1 = -\frac{p}{n} + k = -\frac{p}{n} + k' = -\frac{p}{n} + k''$,
 ou en faisant le même calcul que dans l'Article CLIX.
 lorsqu'on aura $\frac{p}{n} = \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} = \frac{k''-1}{r''-1}$ &c. ou bien
 lorsque $k' \& r'$, ou $k'' \& r''$ &c. sont égaux à zéro.

CLXI.

REMARQUE. Toutes les méthodes que nous avons
 expliquées dans ce Chapitre pour les équations différen-
 tielles à deux variables du premier ordre, s'étendent aussi
 à celles d'un genre plus élevé. C'est ce que nous ferons
 voir dans la suite.

CLXII.

SCHOLIE GÉNÉRALE. La méthode dont nous avons donné
 un essai (Art. CXLVIII.) peut s'étendre à toutes les équations
 dans lesquelles faisant $y^p z^q = k$, on a une équation
 entre $x \& k$. En effet on commencera par construire
 l'équation entre $x \& k$, puis on observera que $y^q z =$

II. Partie,

Q

$k^{\frac{1}{q}}$, ou en mettant pour z sa valeur $\frac{dx}{dy}$, que $y^{\frac{p}{q}} dx = k^{\frac{1}{q}} dy$, ou bien $k^{-\frac{1}{q}} dx = y^{-\frac{p}{q}} dy$. Or il est évident que pour chaque x on a une valeur de k ; donc on aura aussi pour chaque x une valeur de y correspondante.

C H A P I T R E X I V .

*Autre Méthode pour découvrir quelques équations
intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$.*

C L X I I I .

Procédé de
cette Métho-
de.

LA Méthode que nous allons expliquer ici consiste à préparer l'équation $dx = z dy$, ou $dx - z dy = 0$ de telle façon qu'on la puisse diviser en deux parties, dont l'une soit intégrable, & dont l'autre soit ou puisse devenir une différentielle exacte multipliée par une quantité quelconque. Ensuite on multipliera la première partie par une fonction de son intégrale, & on supposera que le produit de cette fonction par la quantité qui multiplie la différentielle dans la seconde partie soit égal à une fonction de l'intégrale de la différentielle contenue dans cette seconde partie. On aura par ce moyen une équation de condition qui rend la proposée intégrable.

CLXIV.

Je mets l'équation $dx - zdy = 0$ sous la forme suivante $dx - zdy - ydz + ydz = 0$: je multiplie cette dernière équation par une fonction X de x , & j'y ajoute $zydX - zy dX$, ce qui ne la change pas ; j'aurai $Xdx - Xzdy - Xydz - zy dX + yXdz + zy dX = 0$, ou bien $Xdx - Xzdy - Xydz - zy dX = -yXdz - zy dX$. Or le premier membre de cette équation est intégrable ; son intégrale est $\int Xdx - yzX$. Le second membre est la différentielle de $-zX$, multipliée par y . En suivant donc le procédé qu'indique notre méthode, je multiplie le premier membre $Xdx - Xzdy - Xydz - yz dX$ par une fonction de son intégrale, & je suppose que le produit de cette fonction, par la quantité y qui multiplie la différentielle dans le second membre, est égal à une fonction de zX . De cette hypothèse je tire le Théorème suivant.

Application
de cette Mé-
thode.

CLXV.

THÉOREME. L'équation proposée est intégrable si $y \varphi (\int Xdx - Xyz) = rzX$.

Car en pratiquant les opérations indiquées ci-dessus, la proposée devient $\{Xdx - d(Xyz)\} \times \varphi (\int Xdx - Xyz) = -d(Xz) \times y \varphi (\int Xdx - Xyz)$ qui se change par la supposition précédente en $\{Xdx - d(Xyz)\} \times \varphi (\int Xdx - Xyz) = -d(Xz) \cdot r(Xz)$, équation qu'on voit bien être intégrable.

Q ij

CLXVI.

On peut encore exprimer ce Théorème de la façon suivante : l'équation $Xdx - d(Xyz) = -y d(Xz)$ est intégrable , si $\int Xdx - Xyz$ est égale à une fonction de $y \Delta(Xz)$.

Car de ce que $\int Xdx - Xyz = \varphi y \Delta(Xz)$, il s'en suit que $y \Delta(Xz) = \Gamma(\int Xdx - Xyz)$: donc $\frac{1}{\Gamma(\int Xdx - Xyz)} = \frac{1}{y \Delta(Xz)}$: donc en multipliant les deux membres de notre équation par ces deux quantités égales , on aura $\frac{Xdx - d(Xyz)}{\Gamma(\int Xdx - Xyz)} = \frac{-d(Xz)}{\Delta(Xz)}$, équation intégrable.

CLXVII.

Premier
exemple.

COROLLAIRE. Donc l'équation $\int Xdx = pyXz + qyX''z'' + a$ est intégrable , p , q & a sont des constantes. En effet il est évident que cette équation peut se mettre sous la forme suivante $\int Xdx - yzX = pyzX - yzX + qyX''z'' + a$, ou $\int Xdx - yzX = y \cdot (pXz - Xz + qX''z'') + a = y \Delta(Xz) + a$.

Maintenant on voit que pour intégrer cette équation , il ne s'agit que de construire une courbe dont les coordonnées soient x & y . Soit $Xz = r$

$$\int Xdx - yr = k$$

$$k = u + a,$$

$$\text{on aura } k - a = y \Delta r,$$

$$\text{\& par conséquent. } y \Delta r = u.$$

II. PARTIE. SECT. I. CHAP. XIV. 125

La supposition de $k = u + a$ nous donne $dk = du$.
 Mais suivant le Théorème précédent on a dans ce cas-ci
 $Xdx - d(Xyz) + yd(Xz) = 0$: donc on aura dk
 $+ ydr = 0$, & $du + ydr = 0$: donc enfin en mettant
 pour y sa valeur $\frac{u}{\Delta r}$, il nous vient $\frac{du}{u} + \frac{dr}{\Delta r} = 0$, équation
 facile à construire & qui nous donne la valeur de y
 en u ou en r . y étant ainsi trouvée, cherchons x . Les
 suppositions précédentes nous donnent $\int Xdx - yr =$
 $u + a$. Soit $u + yr + a = t$, on aura $\int Xdx = t$. Je
 construis une courbe BM , dans laquelle $PM = X$ Figure 7.
 $AP = x$,
 l'aire de cette courbe ou $ABMP$ sera $= \int Xdx = t$.
 Je prends AB pour l'unité, & je suppose $PQ = \frac{PMBA}{AB}$
 $= \frac{\int Xdx}{1} = t$, QR sera l' x cherchée.

CLXVIII.

Soit proposée l'équation $x + Z + a = \frac{yyzdz}{zdz} + \frac{zdZ}{zdz}$, Second
exemple.
 a est une constante, & Z une fonction de z , c'est-à-dire
 de $\frac{dx}{dy}$.

Je commence par donner à cette équation la forme
 suivante $x - yz + Z + a = \frac{zdz}{zdz} \times \left(y - \frac{dZ}{dz}\right)^2$ qu'on
 voit clairement être la même équation que la proposée.
 Donc en prenant la racine quarrée des deux membres,
 on aura $\sqrt{x - yz + Z + a} = \left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \sqrt{\frac{zdz}{zdz}}$.
 Mais par l'hypothèse $z = \frac{dx}{dy}$, donc $dx - zdy = 0$,
 & par conséquent $dx - zdy - ydz + dZ + ydz =$

$$\begin{aligned}
dZ = 0; \text{ donc } \frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}} &= \frac{-ydz + dZ}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}} \\
&= \frac{-dz \cdot \left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}; \text{ donc enfin } \frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}} \\
&= \frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}. \text{ J'ai donc en intégrant } \sqrt{(x - yz + Z + a)} = \frac{1}{2} \int \frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}.
\end{aligned}$$

avec la proposée, on en tirera la valeur de x ou de y en z , ce qui donne le Théorème suivant.

CLXIX.

THÉOREME. Toutes les équations dans lesquelles $x - yz + Z + a = \varphi \left\{ \left(y - \frac{dZ}{dz} \right) \Gamma z \right\}$, sont intégrables.

DÉMONSTRATION. Puisque $x - yz + Z + a = \varphi \left\{ \left(y - \frac{dZ}{dz} \right) \cdot \Gamma z \right\}$, on aura $\varphi' (x - yz + Z + a) = \left\{ y - \frac{dZ}{dz} \right\} \times \Gamma z$; & divisant par $\varphi' (x - yz + Z + a)$ l'équation $dx - zdy - ydz + dZ = -(ydz - dZ)$, on aura $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\varphi' (x - yz + Z + a)} = \frac{-(ydz - dZ)}{\varphi' (x - yz + Z + a)} = \frac{-dz \cdot \left\{ y - \frac{dZ}{dz} \right\}}{\left\{ y - \frac{dZ}{dz} \right\} \cdot \Gamma z} = dz \Delta z$; équation dont on voit aisément que chaque membre est intégrable.

CLXX.

REMARQUE. On peut au lieu de $dx - zdy = 0$, mettre $dy - \frac{dx}{z} = 0$: alors il faudra substituer y à x ,

x à y , $\frac{1}{z}$ à z dans les équations de condition, ce qui en donnera de nouvelles.

CHAPITRE XV.

Méthode pour intégrer quelques équations différentielles par le moyen des coefficients indéterminés.

CLXXI.

Cette Méthode est utile lorsqu'on a une, deux, trois, quatre, &c. équations à intégrer ensemble, ou lorsqu'on peut regarder une équation différentielle donnée, comme étant formée de plusieurs autres équations. En général on integre par son moyen un nombre quelconque p d'équations différentielles, qui contiennent un nombre $p+1$ de variables t, x, y, z, u , &c. dont la première ait sa différence dt constante, & dont les autres x, y, z, u , &c. & leurs différences ne sont ni mêlées entre elles ni avec x , & y , &c. ni élevées à aucune puissance autre que l'unité, mais sont seulement multipliées par des puissances convenables de dt . L'intégration n'auroit même aucune difficulté de plus, si dans chacune de ces équations il y avoit un terme quelconque composé comme on voudroit de t , de dt & de constantes.

Cas dans lesquels on peut se servir de cette Méthode.

Voici le procédé que nous fait suivre cette méthode.

*

CLXXII.

En quoi elle
consiste.

On multiplie par un coefficient indéterminé la seconde des deux équations proposées, lorsqu'il n'y en a que deux; si on en a trois, on multiplie aussi la troisième par une indéterminée différente de celle qui multiplie la seconde, & ainsi de suite. Après cette première opération, on ajoute ces équations les unes aux autres, on détermine les valeurs des coefficients indéterminés, & par leur moyen aussi celles de t, x, y , &c.

Avant d'appliquer cette méthode à des exemples, nous établirons une proposition qui nous est nécessaire pour la suite.

CLXXIII.

Lemme
préparatoire.

LEMME. Si l'on a une fonction $\varphi(z + \xi)$, telle que la variable z croisse ou décroisse d'une quantité très-petite ξ , je dis qu'on aura $\varphi(z + \xi) = \varphi z + \xi \Delta z + \frac{\xi^2 \Gamma z}{2} + \frac{\xi^3 \downarrow z}{2.3.} + \&c.$ On suppose ici que $d(\varphi z) = dz \Delta z$, que $d(\Delta z) = dz \Gamma z$, que $d(\Gamma z) = dz \downarrow z$; & ainsi de suite.

DÉMONSTR. Soit $\varphi(z + \xi) = \varphi z + u$: je différentie cette équation en traitant z comme constante, ξ & u comme variables; j'aurai $d\xi \Delta(z + \xi) = du$: donc $u = \int d\xi \Delta(z + \xi)$: donc $\varphi(z + \xi) = \varphi z + \int d\xi \Delta(z + \xi)$. Soit maintenant $\Delta(z + \xi) = \Delta z + y$, j'aurai en regardant z comme constante & ξ & y comme variables $y = \int d\xi \Gamma(z + \xi)$: donc $\varphi(z + \xi) = \varphi z + \int d\xi \Delta z + \int d\xi \int d\xi \Gamma(z + \xi)$. Soit encore $\Gamma(z + \xi) = \Gamma z + t$,
j'aurai

j'aurai en supposant toujours z constante, ξ & t variables, $t = \int d\xi \downarrow (z + \xi)$; donc en substituant pour t cette valeur, on a $\Gamma(z + \xi) = \Gamma z + \int d\xi \downarrow (z + \xi)$, & par conséquent $\varphi(z + \xi) = \varphi z + \int d\xi \Delta z + \int d\xi \int d\xi \Gamma z + \int d\xi \int d\xi \int d\xi \downarrow z + \&c.$ on trouveroit une suite de termes à l'infini. Donc (Art. CCXVIII. 1^{re} Partie) $\varphi(z + \xi) = \varphi z + \xi \Delta z + \frac{\xi^2 \Gamma z}{2} + \frac{\xi^3 \downarrow z}{2 \cdot 3} + \&c.$

CLXXIV.

COROLLAIRE. On trouvera par la même méthode que $c^{fx+ax} = c^{fx} + ax c^{fx} + \frac{a^2 x^2 c^{fx}}{2} + \frac{a^3 x^3 c^{fx}}{2 \cdot 3} + \&c.$ Car soit $c^{fx+ax} = c^{fx} + t$, & soit x constante, a & t variables, on aura $c^{fx+ax} x da = dt$, donc $t = \int c^{fx+ax} x da$ & $c^{fx+ax} = c^{fx} + \int c^{fx+ax} x da$. Donc on aura une suite telle que $c^{fx+ax} = c^{fx} + \int da x c^{fx} + \int x da c^{fx} \int x da c^{fx} + \int x da c^{fx} \int x da c^{fx} \int x da c^{fx} + \&c.$ Donc en intégrant on a $c^{fx+ax} = c^{fx} + ax c^{fx} + \frac{a^2 x^2 c^{fx}}{2} + \frac{a^3 x^3 c^{fx}}{2 \cdot 3} + \&c.$

Passons maintenant à l'application de notre méthode à des exemples.

CLXXV.

PROBLEME 1. Trouver l'intégrale des deux équations

$$dx + (Cx + Dy) dt = 0$$

$$dy + (Kx + Ly) dt = 0.$$

Application de la méthode aux cas où l'on a deux équations.

SOLUTION. Suivant ce que nous avons dit, je multiplie la seconde de ces deux équations par un coefficient

II. Partie,

R.

indéterminé v , elle devient

$$v dy + (Kx + Ly) v dt = 0;$$

j'ajoute cette équation à la première, ce qui me donne l'équation suivante

$$(A) dx + v dy + \{ (C + Kv)x + (D + Lv)y \} dt = 0;$$

à présent je fais en sorte que $(C + Kv)x + (D + Lv)y$ soit un multiple de $x + vy$. J'aurai donc

$$Cx + Kvx + Dy + Lvy = Rx + Rvy,$$

(R est un coefficient constant quelconque.) Donc en comparant terme à terme les deux membres de cette équation, j'ai $C + Kv = R$, & $D + Lv = Rv$, ou $\frac{D + Lv}{v} = R$. Donc $C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$: donc $Cv + Kvv = D + Lv$, ou bien $Kvv + Cv - Lv = D$, ou $vv + \frac{Cv}{K} - \frac{Lv}{K} = \frac{D}{K}$: donc $vv + \frac{Cv - Lv}{K} + \frac{CC}{4KK} - \frac{CL}{2KK} + \frac{LL}{4KK} = \frac{D}{K} + \frac{CC}{4KK} - \frac{CL}{2KK} + \frac{LL}{4KK}$: donc en prenant la racine quarrée $v = \frac{-C + L}{2K} + \frac{\sqrt{(4DK + CC - 2CL + LL)}}{2K}$: donc enfin (B) $v = \frac{-C + L}{2K} + \frac{\sqrt{(L - C)^2 + 4DK}}{2K}$.

Je suppose à présent $x + vy = u$

j'ai $dx + v dy = du$

D'ailleurs l'équation $C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$ donne $D + Lv = (C + Kv) \cdot v$. Donc $(C + Kv)x + (D + Lv)y = (C + Kv)x + (C + Kv)vy = (C + Kv) \cdot (x + vy) = (C + Kv)u$. Donc l'équation (A)

$dx + v dy + \{ (C + Kv)x + (D + Lv)y \} dt = 0$ devient, en faisant les substitutions précédentes,

$$du + (C + Kv) u dt = 0$$

ou $\frac{du}{u} = (C + Kv) x - dt$
 équation dont l'intégrale est, comme on le fait,

$$lu = (C + Kv) x - t,$$

ou en prenant e pour le nombre dont le logarithme est l'unité, & g pour la constante, $lu = lge^{-(C+Kv)t}$

ou bien $u = ge^{-(C+Kv)t}$

Soient maintenant p, p' les deux valeurs de v trouvées par l'équation (B), au lieu de l'équation $x + vy = u$, on aura ces deux-ci (C) $x + py = u$

$$(D) x + p'y = u';$$

& de même au lieu de l'équation $u = ge^{-(C+Kv)t}$

on aura les deux suivantes $u = ge^{-(C+Kp)t}$

$$u' = g'e^{-(C+Kp')t}.$$

Des deux équations (C) & (D), je tire aisément les valeurs de x & de y . Car retranchant l'équation $x + p'y = u'$ de l'équation $x + py = u$, j'ai $py - p'y = u - u'$:
 Donc $y = \frac{u - u'}{p - p'}.$

Pour avoir maintenant la valeur de x , je multiplie par p' l'équation $x + py = u$,

& par p l'équation $x + p'y = u'$,

ce qui me donne $p'x + p'py = pu$

& $px + pp'y = pu'$;

je retranche la seconde de la première, j'ai

$$p'x + p'py - px - pp'y = p'u - pu',$$

donc $p'x - px = \frac{p'u - pu'}{p' - p}.$

Donc $x = \frac{p'u - pu'}{p' - p}.$

On mettra dans ces valeurs de x & de y pour u & pour u' leurs valeurs $ge^{-(C+Kp)t}$ & $g'e^{-(C+Kp')t}$; on déterminera les constantes g & g' en supposant $t=0$ ou une grandeur connue, & on aura l'intégrale cherchée.

CLXXVI.

Observations
nécessaires sur
la solution
précédente.

REMARQUE 1. Si les valeurs de v sont imaginaires, l'intégration se fera toujours de même. Car nous avons démontré dans l'Introduction que les exponentielles imaginaires se réduisent toujours à $A+B\sqrt{-1}$, $A-B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles. Si les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires en disparaîtroient.

CLXXVII.

REMARQUE 2. Si v n'avoit pas deux valeurs, le Problème n'auroit pas plus de difficulté, au contraire il se résoudroit beaucoup plus aisément. Car v ne peut avoir moins de deux valeurs qu'en supposant $K=0$, ou $D=0$; l'inconnue v n'étant plus qu'à la première puissance dans le premier cas, & dans le second l'équation entière pouvant se diviser exactement par v est du premier degré. Or dans ces deux cas une des deux équations est intégrable, & l'autre se réduit à la formule de M. Bernoulli, traitée dans le Chapitre VII.

Supposons $D=0$, la première équation devient

$$dx + Cx dt = 0.$$

Donc $\frac{dx}{x} = -C dt,$

Donc $lx = - Ct$,

ou en prenant e pour le nombre dont le logarithme est l'unité, & m pour la constante, on a $x = me^{-Ct}$.

La seconde équation est $dy + Ly dt + Kx dt = 0$: mettant dans cette équation pour x la valeur en t tirée de l'équation précédente, on voit clairement qu'elle est de la forme suivante $dy + Ay dt + T dt = 0$, équation dans laquelle A est une constante & T une fonction de t & de constantes. Donc elle s'intègre par la méthode de M. Bernoulli.

Ce fera la même chose, si on suppose $K = 0$, comme il est facile de s'en assurer.

CLXXVIII.

REMARQUE. Si les deux valeurs de v sont égales, on prendra arbitrairement une de ces deux valeurs, & après avoir résolu l'équation $du = - dt (C + Kv) u$, on tirera de l'équation $x + vy = u$, une valeur de x ou de y en u . Par exemple, je prends ici p pour la valeur de v . J'ai conséquemment $u = ge^{-(C+Kp)t}$. Mettant cette valeur de u dans l'équation $x + vy = u$, elle devient $x = ge^{-(C+Kp)t} - py$. Je mets ensuite cette valeur de x dans l'équation $dy + (Kx + Ly) dt = 0$, j'ai $dy + Kge^{-(C+Kp)t} dt - Kpy dt + Ly dt = 0$, ou $dy + (L - Kp)y dt + Kge^{-(C+Kp)t} dt = 0$ équation qui s'intègre aisément, comme on le voit, par le moyen de la formule $dz + bz dt + T dt = 0$. Cette

équation intégrée nous donnera la valeur de y en t . On aura donc les valeurs de x & de y en t .

CLXXIX.

Cas dans le-
quel on peut
résoudre au-
trement le
Problème.

REMARQUE 4. Nous venons de voir dans la Remarque précédente que le Problème se résout très-facilement, lorsque v n'a pas deux valeurs inégales : dans ce même cas on pourroit encore trouver les valeurs de x & de y par des méthodes différentes de celles que nous venons d'employer pour cela.

Soit 1°. $D=0$ dans l'équation $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L-C)^2 + 4DK}}{2K}$ devient 1°. $v = \frac{-C+L+L-C}{2K}$, ou $\frac{L-C}{K}$;

2°. $v = \frac{0}{2K}$. Donc en supposant dans les formules précédentes $p'=0$, on aura les valeurs de x & de y .

2°. Si $K=0$, au lieu de le supposer absolument nul, je le regarde comme infiniment petit, ce qui revient au même. Je reprends l'équation $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L-C)^2 + 4DK}}{2K}$, je la mets sous la forme suivante $v = \frac{L-C}{2K} \pm$

$\sqrt{\frac{LL-2CL+CC}{4K^2} + \frac{D}{K}}$. Ensuite pour avoir les deux valeurs de v , je prends la racine quarrée de

$\sqrt{\frac{LL-2CL+CC}{4K^2} + \frac{D}{K}}$, & je trouve que cette racine est $\frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L} +$ un terme que je puis négliger parce qu'il est infiniment petit par rapport aux autres. On a donc $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \left\{ \frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L} \right\}$. Prenant l'équation en $+$ j'ai $v = \frac{L-C}{2K} + \frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L}$, c'est-à-dire,

$v = \frac{D}{C-L}$. La prenant en moins je trouve $v = \frac{L-C}{2K} - \frac{C-L}{2K} - \frac{D}{C-L}$. Or les deux premiers termes de cette valeur étant infinis, je puis négliger le troisième. J'aurai donc pour seconde valeur de v , $v = \frac{L-C}{K}$.

On aura donc $u = g e^{-Ct}$; $u' = g' e^{-Lt}$; $y = K \left\{ \frac{u-u'}{C-L} \right\}$; $x = u - \frac{p u'}{p'} = u + \frac{D K u'}{(C-L)^2}$.

3°. Si les valeurs de p & de p' sont égales, je supposerai $p = a + \alpha$, $p' = a - \alpha$ (α est une quantité infiniment petite.) J'ai donc $u = g e^{-(C+K\alpha+\alpha^2)t}$. Or α étant une quantité infiniment petite peut être regardée comme une différentielle. Mais nous avons vu (Art. CLXXIV.) que si on avoit C^{x+dx} , on pouvoit lui donner la forme suivante $C^x + C^x dx$. Donc on aura par la même raison $u = g e^{-(C+K\alpha)t} - K g \alpha t e^{-(C+K\alpha)t}$. On trouvera de même $u' = g' e^{-(C+K\alpha)t} + K g \alpha t e^{-(C+K\alpha)t}$. On aura aussi $y = \frac{u-u'}{2\alpha}$; $x = \frac{a u - \alpha u - a u' - \alpha u'}{2\alpha}$. Donc en mettant pour u & u' leurs valeurs, & supposant $g = g'$, on a $y = -K g t e^{-(C+K\alpha)t}$, & $x = -K g t e^{-(C+K\alpha)t}$.

CLXXX.

COROLLAIRE. Le Problème s'étendra très-facilement à deux équations qui contiendront deux indéterminées x & y multipliées par des constantes & par une fonction quelconque de t , avec leurs différences aussi multipliées par des constantes & par une fonction de t , & de plus un terme $t dt$, $t dt$ qui ne renferme que des

constantes avec t . Car ces cas se rameneront d'eux-mêmes à la formule $dz + bz dt + Tdt = 0$.

CLXXXI.

Application
de la métho-
de au cas où
l'on a trois
équations.

PROBLEME 2. Intégrer les équations

$$dx + (ax + by + cz) dt = 0$$

$$dy + (ex + fy + gz) dt = 0$$

$$dz + (hx + my + nz) dt = 0.$$

SOLUTION. Suivant ce que nous avons dit (Art. CLXXII.) je multiplie la seconde de ces équations par un coefficient indéterminé v , & la troisieme par un autre coefficient indéterminé μ . Les trois équations précédentes deviennent alors,

$$dx + (ax + by + cz) dt = 0$$

$$v dy + (evx + fvy + gvz) dt = 0$$

$$\mu dz + (h\mu x + m\mu y + n\mu z) dt = 0.$$

Je les ajoute ensemble, ce qui me donne (A) $dx + v dy + \mu dz + \{(a + ev + h\mu)x + (b + fv + m\mu)y + (c + gv + n\mu)z\} dt = 0$. Je fais en sorte à présent que la quantité qui multiplie dt dans cette équation soit un facteur de $x + vy + \mu z$. J'aurai donc en supposant R un coefficient constant, j'aurai $ax + evx + h\mu x + by + fvy + m\mu y + cz + gvz + n\mu z = Rx + Rvy + R\mu z$. Donc en comparant terme à terme les deux membres de cette équation, j'ai $a + ev + h\mu = R$, $b + fv + m\mu = Rv$, $c + gv + n\mu = R\mu$. Donc $a + ev + h\mu = \frac{b + fv + m\mu}{v} = \frac{c + gv + n\mu}{\mu}$. Donc $(a + ev + h\mu)v =$

$h\mu)v = b + fv + m\mu$ & $(a + ev + h\mu)\mu = c + gv + n\mu$. Donc l'équation (A) devient (F) $dx + vdy + \mu dz + dt \times (x + vy + \mu z) \times (a + ev + h\mu) = 0$. Soit à présent $x + vy + \mu z = u$, donc $dx + vdy + \mu dz = du$, donc l'équation (F) se change en la suivante $du + (a + ev + h\mu)u dt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -(a + ev + h\mu) dt$, ou $lu = -(a + ev + h\mu)t$. Donc en prenant E pour le nombre dont le logarithme est l'unité & g pour la constante, on a $lu = lg E^{-(a + ev + h\mu)t}$, ou enfin $u = g E^{-(a + ev + h\mu)t}$.

A présent l'équation $av + evv + h\mu v = b + fv + m\mu$ donne la valeur de μ en v ; mettant cette valeur de μ dans l'équation $(a + ev + h\mu)\mu = c + gv + n\mu$, on aura, après avoir effacé ce qui se détruit & fait les réductions ordinaires, une équation du troisième degré qui donnera trois valeurs de v .

Soient p, p', p'' les trois valeurs de v , & m, m', m'' les trois valeurs correspondantes de μ . J'aurai au lieu de l'équation $u = g E^{-(a + ev + h\mu)t}$, ces trois autres équations,

$$u = g E^{-(a + ep + hm)t}$$

$$u' = g' E^{-(a + ep' + hm')t}$$

$$u'' = g'' E^{-(a + ep'' + hm'')t};$$

& au lieu de l'équation $x + vy + \mu z = u$, les trois suivantes, $x + py + mz = g E^{-(a + ep + hm)t}$

$$x + p'y + m'z = g' E^{-(a + ep' + hm')t}$$

$$x + p''y + m''z = g'' E^{-(a + ep'' + hm'')t}.$$

De ces trois équations on tirera les valeurs de x, y, z ,

& on déterminera les constantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z , lorsque $t = 0$ ou une constante donnée.

CLXXXII.

REMARQUE. On peut toujours supposer que les trois valeurs de v sont inégales. Pour cela il suffit d'augmenter un des coefficients a, b, c , &c. d'une quantité α infiniment petite ; alors on aura des valeurs de v toutes différentes entre elles, & dans lesquelles entrera la quantité α . Ces valeurs étant substituées à la place de p, p', p'' , on trouvera celles de x, y, z , dans lesquelles n'entre plus α . Pour avoir ces valeurs de v , on se servira du parallélograme de M. Newton. Au reste, il est indifférent que quelques-unes de ces valeurs soient imaginaires, pourvu qu'elles soient inégales entre elles.

CLXXXIII.

Ce qu'il faut faire si on a voit quatre équations. COROLLAIRE. Si on a quatre équations, on multipliera aussi la quatrième par une nouvelle indéterminée π . Après avoir trouvé l'équation en v , & celle qui donne la valeur de μ en v , on mettra dans cette dernière π au lieu de μ , & au lieu de h, m, n , les coefficients qui leur répondent dans la quatrième équation, & réciproquement h, m, n au lieu de ces coefficients. Après quoi on résoudroit le Problème par la Méthode semblable à celle de l'Article CLXXXI.

Si on avoit cinq, six, &c. équations, on voit à présent comment il faudroit s'y prendre pour les résoudre.

CHAPITRE XVI.

Méthode pour déterminer une intégrale par certaines conditions données de la différentielle.

CLXXXIV.

PROBLEME I. **E** Tant données deux quantités différen- Premier
exemple.
tielles telles que $a dt + v ds$
 $v dt + a ds$

qui sont l'une & l'autre des différentielles exactes de quelque fonction de $t+s$; trouver a & v , & par conséquent l'intégration des deux différentielles proposées.

SOLUTION. 1°. J'ajoute ensemble les deux différentielles proposées, ce qui me donnera $(a+v) dt + (a+v) ds$, qui est encore une différentielle exacte de quelque fonction de $t+s$; on a donc $(a+v) \cdot (dt+ds)$. D'où il suit que $a+v$ est égale à une fonction de $t+s$.

2°. Je retranche l'une de l'autre nos deux différentielles, j'ai $(a-v) dt - (a-v) ds$, ou $(a-v) \cdot (dt-ds)$: d'où je conclus que $a-v$ est égale à une fonction de $t-s$.

J'aurai donc $a+v + a-v = \varphi(t+s) + \Delta(t-s)$.
Donc $a = \frac{\varphi(t+s) + \Delta(t-s)}{2}$.

J'aurai encore $a+v - a+v = \varphi(t+s) - \Delta(t-s)$;

S ij

$$\text{donc } v = \frac{\varphi(t+s) - \Delta(t-s)}{2}.$$

CLXXXV.

Second
exemple.

PROBLEME 2. Etant données les deux différentielles exactes $v dt + \epsilon ds$

$$v ds + \epsilon n dt,$$

déterminer v & ϵ , & par conséquent l'intégrale.

SOLUTION. Je mets la seconde de nos deux différentielles sous la forme suivante

$$\epsilon \sqrt{n} \times dt \sqrt{n} + v ds.$$

Je multiplie la première par $\sqrt{n}$, ce qui ne l'empêche pas d'être une différentielle exacte, elle devient

$$v dt \sqrt{n} + \epsilon ds \sqrt{n}.$$

Maintenant 1°. j'ajoute ensemble ces deux différentielles, j'ai . . . $(dt \sqrt{n} + ds) \cdot (\epsilon \sqrt{n} + v)$

2°. Je les retranche l'une de l'autre, j'aurai

$$(dt \sqrt{n} - ds) \cdot (\epsilon \sqrt{n} - v).$$

De là je conclus que $\epsilon \sqrt{n} + v$ est une fonction de $t \sqrt{n} + s$, & $\epsilon \sqrt{n} - v$ une fonction de $t \sqrt{n} - s$.

Donc $\epsilon \sqrt{n} + v + \epsilon \sqrt{n} - v = \varphi(t \sqrt{n} + s) + \Delta(t \sqrt{n} - s)$. Donc $\epsilon = \frac{\varphi(t \sqrt{n} + s) + \Delta(t \sqrt{n} - s)}{2 \sqrt{n}}$; donc

$$\epsilon n = \frac{[\varphi(t \sqrt{n} + s) + \Delta(t \sqrt{n} - s)] \sqrt{n}}{2}.$$

De même on aura $\epsilon \sqrt{n} + v - \epsilon \sqrt{n} + v = \varphi(t \sqrt{n} + s) - \Delta(t \sqrt{n} - s)$. Donc $v = \frac{\varphi(t \sqrt{n} + s) - \Delta(t \sqrt{n} - s)}{2}$.

CLXXXVI.

PROBLEME 3. Soient données deux quantités

$$a ds + \epsilon dt$$

Troisième
exemple plus
compliqué
que les deux
précédents.

$\rho a dt + v \epsilon ds + dt \Delta(t, s) + ds \Gamma(t, s)$ dans lesquelles
 ρ & v désignent des constantes données, $\Delta(t, s)$, $\Gamma(t, s)$
des fonctions quelconques données de t & de s . De plus
ces deux quantités sont l'une & l'autre des différentielles
exactes de quelque fonction de t & de s ; déterminer a & ϵ .

SOLUTION. Je divise par la constante ρ tous les ter-
mes de la seconde différentielle, le Problème se réduira
à opérer sur les deux quantités

$$a ds + \epsilon dt$$

& $a ds + \frac{v \epsilon ds}{\rho} + \frac{dt \Delta(t, s)}{\rho} + \frac{ds \Gamma(t, s)}{\rho}$,
de manière qu'elles soient l'une & l'autre une différen-
tielle complète.

Soit $\frac{v}{\rho} = n$, je divise la seconde différentielle par $\sqrt{n}$,
& j'écris . . $\epsilon \sqrt{n} \cdot \frac{dt}{\sqrt{n}} + a ds$
 $\frac{a dt}{\sqrt{n}} + \epsilon \sqrt{n} \cdot ds + \frac{dt \Delta(t, s)}{\rho \sqrt{n}} + \frac{ds \Gamma(t, s)}{\rho \sqrt{n}}$.

Or chacune de ces deux différentielles devant être com-
plète, il faut que leur somme & leurs différences soient
aussi chacune une différentielle complète.

On aura donc 1°. en les ajoutant ensemble $(\epsilon \sqrt{n} + a)$.
 $\left\{ \frac{dt}{\sqrt{n}} + ds \right\} + \frac{dt \Delta(t, s)}{\rho \sqrt{n}} + \frac{ds \Gamma(t, s)}{\rho \sqrt{n}}$.

Soit $\epsilon \sqrt{n} + a = m$

$$\frac{t}{\sqrt{n}} + s = u,$$

en substituant ces valeurs & nommant $\psi(u, s)$ & $\Pi(u, s)$

les fonctions de u & de s qui viennent de la substitution de $(u-s)\sqrt{n}$ au lieu de t dans $\Delta(t, s)$ & $\Gamma(t, s)$, on aura la transformée suivante

$$m du + du \downarrow(u, s) + ds \Pi(u, s)$$

qui doit être une différentielle complète. On aura donc par le Théorème fondamental $\frac{dm}{ds} + \frac{d\downarrow(u, s)}{ds} = \frac{d\Pi(u, s)}{du}$, s variant seul dans le premier membre & u seul dans le second. Donc $dm = -d\downarrow(u, s) + \frac{ds d\Pi(u, s)}{du}$. Donc en prenant s pour variable & u pour constant, on a $m = -\downarrow(u, s) + \varphi u + \int ds \frac{d\Pi(u, s)}{du}$.

2°. Retranchons maintenant la seconde de nos deux différentielles de la première, nous aurons $(\epsilon\sqrt{n} - \alpha)$. $\left\{ \frac{dt}{\sqrt{n}} - ds \right\} = \frac{dt \Delta t, s}{s\sqrt{n}} - \frac{ds \Gamma t, s}{s\sqrt{n}}$ qui doit encore être une différentielle complète.

$$\text{Soit } \dots \dots \dots \epsilon\sqrt{n} - \alpha = \mu$$

$$\frac{t}{\sqrt{n}} - s = y,$$

on aura $\mu dy + dy \Xi(y, s) + ds F(y, s)$, transformée qui est une différentielle exacte. Donc on aura par le Théorème fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\Xi(y, s)}{ds} = \frac{dF(y, s)}{dy}$; & en supposant s variable & y constant $\mu = -\Xi(y, s) + \int dy \frac{dF(y, s)}{dy}$.

Or $\mu = \epsilon\sqrt{n} - \alpha$, donc $\epsilon\sqrt{n} = \alpha + \mu$. De même $m = \alpha + \epsilon\sqrt{n}$; donc $\epsilon\sqrt{n} = m - \alpha$. Donc $\alpha + \mu = m - \alpha$. Donc $\alpha = \frac{m - \mu}{2}$. Maintenant $\alpha = \epsilon\sqrt{n} - \mu$. Donc $\epsilon = \frac{m + \mu}{2\sqrt{n}}$. On aura par conséquent les valeurs de α & ϵ , puisqu'on a celles de m & de μ .

CLXXXVII.

REMARQUE. Il n'y auroit aucune difficulté pour l'intégration, quand même $\sqrt{n}$ seroit imaginaire. Car si a & c doivent être réelles, nous avons appris dans l'Introduction à en faire évanouir les imaginaires.

CLXXXVIII.

PROBLEME 4. Soient encore les deux différentielles plus générales que les précédentes

**Quatrieme
exemple qui
renferme les
trois autres.**

$$\alpha ds + \epsilon du$$

&

$$p^{\alpha} du + p^{\epsilon} du + \gamma^{\epsilon} ds + m^{\alpha} ds + dt \Delta(u, s) + ds \Gamma(u, s)$$

qui doivent être l'une & l'autre une différentielle exacte, trouver α & ϵ .

SOLUTION. Soit $ku + rs = gy$

$$\& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad fu + ds = ht,$$

k, r, g, f, δ, h sont des constantes indéterminées ; on

$$\text{aura} \cdot \cdot \cdot s = \frac{gfy - hks}{fr - \delta k}$$

$$\& u = \frac{h r t - d g y}{f r - d k} ;$$

ou en changeant les signes $u = \frac{d^2 g y - h r i}{d^2 k - f r}$.

On aura par conséquent $ds = \frac{fgdy - hkdz}{fr - \delta k}$; $du = \frac{\delta gdy - hr dz}{\delta k - fr}$.

Soit $\dots \frac{fg}{fr - dk} = \lambda$

$$\frac{-hk}{fr - d'k} = \varphi$$

$$\frac{\delta g}{\delta k - fr} = \mu$$

$$\frac{-h\dot{r}}{pk - fr} = v$$

on aura $ds = \lambda dy + \varphi dt$,

& $du = \mu dy + v dt$.

Je substitue ces valeurs dans les deux différentielles proposées. La première devient

$$\alpha \lambda dy + \epsilon \mu dy + \alpha \varphi dt + \epsilon v dt;$$

& la seconde multipliée par un coefficient indéterminé n fera $\{(\rho \alpha + p \epsilon) \mu + (\gamma \epsilon + m \alpha) \lambda\} n dy + n dy \Delta(y, t) + \{(\rho \alpha + p \epsilon) v + (\gamma \epsilon + m \alpha) \varphi\} n dt + n dt \Delta(y, t)$.

1°. J'ajoute ensemble ces deux différentielles, j'aurai $(\alpha \lambda + \epsilon \mu + \rho \alpha \mu n + \rho \epsilon \mu n + \gamma \epsilon \lambda n + m \alpha \lambda n) dy + n dy \Delta(y, t) + (\alpha \varphi + \epsilon v + \rho \alpha v n + \rho \epsilon v n + \gamma \epsilon \varphi n + m \alpha \varphi n) dt + n dt \Delta(y, t)$. Il est donc visible qu'on pourra trouver les valeurs de α & ϵ , si dans cette équation $\alpha \lambda + \epsilon \mu + \rho \alpha \mu n + \rho \epsilon \mu n + \gamma \epsilon \lambda n + m \alpha \lambda n = 0$; & (en prenant une autre valeur de n) $\alpha \varphi + \epsilon v + \rho \alpha v n + \rho \epsilon v n + \gamma \epsilon \varphi n + m \alpha \varphi n = 0$.

Mais pour que l'équation $\alpha(\lambda + \rho \mu n + m \lambda n) + \epsilon(\mu + \rho \mu n + \gamma \lambda n) = 0$ ait lieu, quelles que soient les valeurs de α & de ϵ , il faut que $\lambda + \rho \mu n + m \lambda n = 0$, & qu'aussi $\mu + \rho \mu n + \gamma \lambda n = 0$. Ces deux équations nous donnent $(1 + m n) \lambda = -\rho \mu n$; d'où l'on tire $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\rho n}{1 + m n}$; & $(1 + \rho n) \mu = -\gamma \lambda n$; d'où l'on tire $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 + \rho n}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1 + m n} = \frac{1 + \rho n}{-\gamma n}$. Nous tirerons de cette équation une valeur de n telle que $\alpha \lambda + \epsilon \mu + \rho \alpha \mu n + \rho \epsilon \mu n + \gamma \epsilon \lambda n + m \alpha \lambda n = 0$.

De même pour que $\alpha(\varphi + \rho v n + m \varphi n) + \epsilon(v + \rho v n + \gamma \varphi n) = 0$, quelles que soient les valeurs de α & de ϵ , il faut que $\varphi + \rho v n + m \varphi n = 0$, & $v + \rho v n + \gamma \varphi n = 0$. De ces

ces équations on tire $(1 + mn)\varphi = -\rho v n$; ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{-\rho n}{1 + mn}$; & encore $(1 + pn)v = -\gamma \varphi n$, ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1 + mn} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$; & par conséquent pour trouver n on aura la même équation qu'auparavant.

Je la résous cette équation $\frac{-\rho n}{1 + mn} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$; j'aurai $n^2 - \frac{(m+p)n}{\gamma\rho - mp} = \frac{1}{\gamma\rho - mp}$. Donc $n - \frac{(m+p)}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} = \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma\rho - mp} + \frac{(m+p)^2}{4 \cdot (\gamma\rho - mp)^2}}$. Donc enfin $n = \frac{m+p}{2(\gamma\rho - mp)} \pm \frac{\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2(\gamma\rho - mp)}$; & ce sont-là les deux valeurs de n .

Je multiplie la seconde différentielle transformée, 1°. par une des deux valeurs de n , ensuite par l'autre; j'aurai les deux équations suivantes: la première $(\rho\alpha\mu + \rho\epsilon\mu + \gamma\epsilon\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{ \frac{m+p + \sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} \right\} dy + \left\{ \frac{m+p + \sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} \right\} dy \Delta y, t + (\rho\alpha v + \rho\epsilon v + \gamma\epsilon\varphi + m\alpha\varphi) \times \left\{ \frac{m+p + \sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} \right\} dt + \left\{ \frac{m+p + \sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} \right\} dt \psi y, t.$

La seconde fera $(\rho\alpha\mu + \rho\epsilon\mu + \gamma\epsilon\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{ \frac{m+p - \sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} \right\} dy + \left\{ \frac{m+p - \sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} \right\} dy \Delta y, t + (\rho\alpha v + \rho\epsilon v + \gamma\epsilon\varphi + m\alpha\varphi) \cdot \left\{ \frac{m+p - \sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} \right\} dt + \left\{ \frac{m+p - \sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2 \cdot (\gamma\rho - mp)} \right\} dt \psi y, t.$

A ces deux différentielles j'ajoute la première différentielle transformée $(\alpha\lambda + \epsilon\mu) dy + (\alpha\varphi + \epsilon v) dt$, à laquelle je donne la forme suivante $(\frac{\alpha\lambda}{\mu} + \epsilon) \mu dy + (\frac{\alpha\varphi}{v} + \epsilon) v dt$, j'aurai 1°. $\left\{ \rho\alpha + \rho\epsilon + \frac{\lambda}{\mu} (\gamma\epsilon + \alpha m) \right\}$

$$\times \left(\frac{m+p+\sqrt{4rp+(m-p)^2}}{2 \cdot (rp - mp)} \right) + \frac{a\lambda}{\mu} + c \} \mu dy +$$

$$\left(\frac{m+p+\sqrt{4rp+(m-p)^2}}{2 \cdot (rp - mp)} \right) dy \Delta y, t + \left\{ (pa + pc + \frac{q}{v}(rc + am)) \times \left(\frac{m+p+\sqrt{4rp+(m-p)^2}}{2 \cdot (rp - mp)} \right) + \frac{a\phi}{v} + c \right\}$$

$$v dt + \left(\frac{m+p+\sqrt{4rp+(m-p)^2}}{2 \cdot (rp - mp)} \right) dt \downarrow y, t.$$

2°. On aura $\left\{ (pa + pc + \frac{\lambda}{\mu}(rc + am)) \times \left(\frac{m+p-\sqrt{4rp+(m-p)^2}}{2 \cdot (rp - mp)} \right) + \frac{a\lambda}{\mu} + c \right\} \mu dy +$

$$\left(\frac{m+p-\sqrt{4rp+(m-p)^2}}{2 \cdot (rp - mp)} \right) dy \Delta y, t + \left\{ (pa + pc + \frac{q}{v}(rc + am)) \times \left(\frac{m+p-\sqrt{4rp+(m-p)^2}}{2 \cdot (rp - mp)} \right) + \frac{a\phi}{v} + c \right\}$$

$$v dt + \left(\frac{m+p-\sqrt{4rp+(m-p)^2}}{2 \cdot (rp - mp)} \right) dt \downarrow y, t.$$

Dans ces deux différentielles je mets au lieu de $\frac{\lambda}{\mu}$ la valeur $\frac{-p^n}{1+mn}$, & au lieu de $\frac{q}{v}$ la valeur $\frac{-p^n}{1+mn}$, en observant d'y prendre deux valeurs différentes de n ; & alors j'aurai deux différentielles intégrables par la méthode du Problème 3.

CLXXXIX.

Examen de
quelques cas
particuliers.

SCHOLIE 1. Il ne peut y avoir de difficulté que dans deux cas. L'un seroit celui dans lequel l'équation $\frac{-p^n}{1+mn} = \frac{1+p^n}{-r^n}$ ou bien $(rp - mp)^{n^2} - (m+p)^n - 1 = 0$ ne monteroit pas au second degré. Le second seroit celui dans lequel cette même équation ne pourroit se résoudre. Le premier de ces deux cas arrivera, si $rp = mp$: car alors $(rp - mp)^{n^2} = 0$, & l'équation n'est plus que du premier degré, & par conséquent, n'a qu'une seule valeur.

Le second cas arrivera si $r_p = mp$, & si de plus $m = -p$; car alors on auroit $-1 = 0$, ce qui est impossible. Examinons ce qu'il faudra faire dans ces deux cas.

1°. Si $r_p = mp$, je fais $p = \rho K$, j'aurai $r_p = m K \rho$; donc $r = Km$. Les deux différentielles seront donc la première

$$\alpha ds + \epsilon du,$$

& la seconde

$$\rho \alpha du + \rho K \epsilon du + K \epsilon m ds + m \alpha ds \\ + dt \Delta u, s + ds \Gamma u, s,$$

ou bien,

$$(\rho du + m ds) \cdot (\alpha + K \epsilon) + du \Delta u, s + ds \Gamma u, s.$$

Soit maintenant $\rho u + ms = t$, on aura $\rho du + m ds = dt$, & soit $\alpha + K \epsilon = \mu$, la différentielle précédente deviendra celle-ci $\mu dt + ds \downarrow u, s + dt \Xi u, s$ & fera une différentielle complète. On aura donc par le Théorème fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\Xi u, s}{ds} = \frac{d\downarrow u, s}{ds}$. Donc $d\mu = -d\Xi u, s + \frac{ds d\downarrow u, s}{ds}$. Donc enfin $\mu = -\Xi u, s + \varphi t + \int \frac{ds d\downarrow u, s}{ds}$.

Pour déterminer α je fais les mêmes transformations sur la différentielle $\alpha ds + \epsilon du$. Ces transformations nous donnent $du = \frac{dt - m ds}{\rho}$, $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$. Donc la première différentielle transformée sera $\alpha ds + (\frac{\mu - \alpha}{K}) \cdot (\frac{dt - m ds}{\rho})$; ou bien $(ds + \frac{m ds}{K \rho} - \frac{dt}{K \rho}) \alpha + \frac{\mu ds}{K \rho} - \frac{m \mu ds}{K \rho}$. Soit $(1 + \frac{m}{K \rho}) s - \frac{t}{K \rho} = y$, on aura $ds + \frac{m ds}{K \rho} - \frac{dt}{K \rho} = dy$; & aussi $\frac{\mu ds}{K \rho} = \mu ds + \frac{\mu m ds}{K \rho} = \mu dy$. Donc la différen-

tielle précédente se change en celle-ci $(\alpha - \mu) dy + \mu ds$.
Donc comme elle est une différentielle complète, on aura
 $\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\mu}{ds} = \frac{d\mu}{dy}$. Donc enfin $\alpha = \mu + \int \frac{ds d\mu}{dy}$. Donc
aussi on aura la valeur de ϵ , puisque $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$.

2°. Si l'on a $p = -m$ & $\gamma v = mp$, on fera usage
de la méthode que nous venons d'exposer pour le cas où
l'on a seulement $\gamma v = mp$. Ainsi ce second cas ne pré-
sente aucune nouvelle difficulté.

C X C.

SCHOLIE 2. On pourroit encore être embarrassé dans
le cas où n auroit ses deux racines égales. Examinons ce
qu'il faut faire dans ce cas, lequel aura lieu si $-4\gamma p =$
 $(m - p)^2$, comme on le voit sans peine. Dans ce cas
on supposera seulement $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \gamma\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n +$
 $m\alpha\lambda n = 0$; ce qui nous donne, en faisant le même raison-
nement que dans l'Article CLXXXVIII. $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\gamma n}{1 + mn}$, &
 $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Donc on aura de même $\frac{-\gamma n}{1 + mn} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$;
donc à cause de l'hypothèse présente $n = \frac{m + p}{2(\gamma p - mp)}$. Je
substitue cette valeur de n dans le coefficient de dt ; c'est-
à-dire, dans $\alpha\phi + \epsilon v + \gamma\alpha v n + p\epsilon v n + \gamma\epsilon\phi n + m\alpha\phi n$; & la
seconde transformée sera en prenant pour ϕ & pour v tout
ce qu'on voudra, $n dy \Delta y, t + \left\{ \alpha \left(\phi + (\gamma v + m\phi) \cdot \right. \right.$
 $\left. \left(\frac{m + p}{2(\gamma p - mp)} \right) \right) + \epsilon \left(v + (pv + \gamma\phi) \cdot \left(\frac{m + p}{2(\gamma p - mp)} \right) \right) \right\} dt$
 $+ n dt \Delta y, t$; & en supposant $\phi + (\gamma v + m\phi) \times$
 $\left(\frac{m + p}{2(\gamma p - mp)} \right) = M$, & $v + (pv + \gamma\phi) \times \frac{m + p}{2(\gamma p - mp)}$

N , on aura la différentielle suivante,

$$(M\alpha + N\epsilon)dt + n dy \Delta y, t + n dt \downarrow y, t,$$

dans laquelle M & N représentent des constantes données.

Cette différentielle étant par l'hypothèse une différentielle complète, on aura $\frac{Md\alpha + Nd\epsilon}{dy} + \frac{d(n \downarrow y, t)}{dy} = \frac{d(n \Delta y, t)}{ds}$. Donc $Md\alpha + Nd\epsilon = -d(n \downarrow y, t) + dy \frac{d(n \Delta y, t)}{ds}$. On aura donc la valeur de $M\alpha + N\epsilon$ en y & en t , ou ce qui revient au même en s & en u , puisque, comme on l'a vu (Art. CLXXXVIII.) $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$, & $u = \frac{\delta gy - krt}{\delta k - fr}$. Nous pourrons donc supposer

$$\alpha = \varepsilon u, s + K\epsilon,$$

K étant une constante connue. Substituant pour α cette valeur dans la différentielle $\alpha ds + \epsilon du$ qui par la supposition est une différentielle exacte, on aura $\epsilon(Kds + du) + ds \varepsilon u, s$. Donc en supposant $Ks + u = r$, on aura la transformée suivante $\epsilon dr + ds \varepsilon s, r$ qui doit encore être une différentielle complète : on trouvera donc facilement la valeur de ϵ en s & r , ou ce qui est la même chose en s & en u .

CXCI.

SCHOLIE 3. Il y a encore un cas dans lequel la première méthode ne peut réussir ; c'est lorsque $p = 0$. Mais alors l'intégration n'en sera que plus facile. En effet, je donne à la seconde différentielle proposée $p\alpha du + \epsilon p du + r\epsilon ds + m\alpha ds + dt \Delta u, s + ds \Gamma u, s$ la forme suivante $m\alpha ds + m\epsilon du + p\epsilon du - m\epsilon du + r\epsilon ds + dt \Delta u, s +$

$ds \Gamma u, s$. Or par l'hypothese $\alpha ds + \epsilon du$ est une différentielle exacte; donc la partie restante $(p\epsilon - m\epsilon) du + \nu\epsilon ds + dt \Delta u, s + ds \Gamma u, s$ doit encore être complete. Je suppose $(p - m)u + \nu s = t$, j'aurai la transformée suivante $\epsilon dt + d\downarrow s, t + ds \Delta t; s$, qui sera une différentielle complete. Donc en suivant les méthodes précédentes on déterminera facilement ϵ & par conséquent α .

Si ν étoit $= 0$, alors on auroit pour seconde différentielle $p\alpha du + p\epsilon du + m\alpha ds + dt \Delta u, s + ds \Gamma u, s$ à laquelle on donneroit la forme suivante $p\alpha ds + p\epsilon du + (m\alpha - p\alpha) ds + p\alpha du + dt \Delta u, s + ds \Gamma u, s$. Or par l'hypothese $\alpha ds + \epsilon du$ est une différentielle complete; donc la partie restante $(m\alpha - p\alpha) ds + p\alpha du + dt \Delta u, s + ds \Gamma u, s$ en est aussi une. Supposant $(m - p)s + pu = t$, on déterminera α & ensuite ϵ par la même voie par laquelle on a trouvé ϵ & ensuite α dans l'article précédent.

Nous allons maintenant exposer les méthodes qui sont connues pour l'intégration des différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.





SECTION SECONDE.

De l'Intégration des Différentielles à plusieurs variables du second ordre, ou d'un ordre plus élevé.

CXCII.

LES différences secondes, troisiemes, quatriemes, &c. s'expriment de deux façons différentes, 1°. de la façon suivante ddx , $ddd x$, $dddd x$, &c. en mettant l'un après l'autre un nombre de d égal au degré de la différence; ou bien 2°. en mettant au d un exposant qui contienne un nombre d'unités égal au degré de la différence, comme $d^2 x$, $d^3 x$, $d^4 x$ & en général $d^n x$. Notions
préliminaires

Nous réduirons ici les différentielles du second ordre à celles du premier, dont l'intégration nous a occupés jusqu'à présent; nous réduirons de même les différentielles du troisieme ordre à celles du second, & ainsi de suite.

CXCIII.

Avant d'expliquer les regles qu'il faut suivre dans l'intégration des équations à plusieurs variables qui contiennent des secondes, ou des troisiemes, ou des quatriemes différences, il est bon de se rappeler leur formation.

La différence de ydx , en regardant y & dx comme variables, est $dydx + yddx$. Celle de $dydx + yddx$ est $dyddx + dxddy + yd^2x + d^2xdy$, & ainsi des troisièmes, quatrièmes, &c. différences.

De là il est facile de tirer cette proposition. L'intégrale de $dydx + yd^2x$ est ydx . Celle de $dyd^2x + dx d^2y + yd^3x + d^2xdy$ est $dydx + yddx$.

La différence de $\frac{dx}{dy}$ est $\frac{dyddx - dxddy}{dy^2}$; & celle de $\frac{ydx}{x dy}$ est $\frac{xydyddx + xdx dy^2 - xydx d^2y - ydydx^2}{x^2 dy^2}$. Donc l'intégrale de $\frac{dyd^2x - dx d^2y}{dy^2}$ est $\frac{dx}{dy}$; & ainsi des autres.

CXCIV.

REMARQUE 1. Lorsqu'on passe des premières différences aux différences secondes, troisièmes, quatrièmes, &c. on regarde quelquefois comme constante une différentielle du premier, du second, du troisième ordre. Ainsi, par exemple, en différentiant $x^m dx dy$, je puis regarder dx comme constante, & alors la différentielle de la proposée sera $m x^{m-1} dx^2 dy + x^m dx ddy$. De là il suit évidemment que quand dans cette même hypothèse il s'agira d'intégrer $m x^{m-1} dx^2 dy + x^m dx ddy$, il faudra traiter dx comme une constante ordinaire.

CXC V.

REMARQUE 2. On doit de plus se souvenir que de même que dans la réduction des différentielles du premier ordre

Ordre aux grandeurs finies , on ajoute une constante pour compléter l'intégrale , il en faut aussi ajouter une dans la réduction des secondes différences aux premières , des troisiemes aux secondes , &c. Il suit même de la Remarque précédente que la constante qu'il faudra ajouter à l'intégrale , sera une différentielle du premier ordre , lorsque la différentielle proposée sera du second ; que cette constante sera une différentielle du second ordre , lorsque la proposée sera du troisieme ; & ainsi de suite. Après ces notions préliminaires entrons en matiere.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration de certaines différentielles du second ordre , dans le cas où l'on fait que telle ou telle différentielle du premier ordre a été traitée comme constante dans le passage des premières différences aux secondes.

CXCVI.

Soit l'équation $\frac{by^m dy du}{c^m} = 2ay ddx + a dx dy$, dans laquelle $du = (\text{Art. XC I. Prem. Partie.}) \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est l'élément de la rectification de la courbe , & est supposée constante. J'observe que le second membre de cette équation seroit intégrable , s'il étoit divisé par $2\sqrt{y}$, ce que je puis trouver par le Théorème fondamental de la

Premier
exemple.

II. Partie.

✓

premiere Section, en mettant z & dz au lieu de dx & de ddx ; j'observe aussi que le premier membre du étant constante, fera toujours intégrable, quelque fonction de y qui le divise ou le multiplie. Je divise donc toute l'équation par $2\sqrt{y}$, elle devient $\frac{by^m dy du}{2c^m \sqrt{y}} = ay^{\frac{1}{2}} ddx + \frac{adx dy}{2\sqrt{y}}$, dont l'intégrale est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{(m+\frac{1}{2}) \cdot 2c^m} = u dy^{\frac{1}{2}} dx + g du$. $g du$ est la constante que j'ajoute pour rendre l'intégrale complete.

CXC VII.

Second
exemple.

Soit l'équation $Y = \frac{dx^2 - y ddy}{y^3 dx^2}$, dans laquelle $y dx$ qui exprime l'élément de l'aire de la courbe, est supposée constante, Y représente une fonction quelconque de y . Pour intégrer cette équation, je la multiplie par $2 dy$, ce qui me donne $2 Y dy = \frac{2 dy}{y^3} - \frac{2 dy ddy}{y^2 dx^2}$. Or l'intégrale de cette équation $y dx$ étant constante, est $\int 2 Y dy = -\frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yy dx^2} \pm n yy dx^2$.

CXC VIII.

Troisième
exemple.

Si la proposée étoit $Y = \frac{du^2 - y ddy}{y^3 dx^2}$, & que dx fût constante, Y représentant une fonction quelconque de y . Puisque $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; donc $du^2 = dx^2 + dy^2$, & différentiant $du ddu = dy ddy$. Substituant cette valeur de ddy dans l'équation, & la multipliant par $2y$, on a $2 Y dy = \frac{2 y dy du^2 - 2 y y du ddu}{y^4 dx^2}$, équation dont l'intégrale est

l'intégrale est $\int 2Ydy = -\frac{du^2}{y^2 dx^2} \pm n dx^2$.

CXCIX.

On pourroit encore intégrer cette équation d'une autre maniere. Je mets pour du sa valeur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ce qui me donne $Y = \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, & multipliant par $2ydy$, on a $2Ydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^2 - 2y^2 dyddy}{y^4 dx^2}$. Or dx étant constante, on voit facilement que l'intégrale de cette équation est $\int 2Ydy = \frac{-dx^2 - dy^2}{y^2 dx^2} \pm n dx^2$; qui est absolument la même que la précédente, puisque $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

C C.

Qu'on nous demande maintenant l'intégrale de cette équation $Y = \frac{dx dy du^2 + y du^2 ddx - y dx du dd u}{y dx dy dt^2}$, dans laquelle du est l'élément de l'arc de la courbe, t est une fonction de x & de y ; aucune différentielle n'ayant été prise pour constante. Je multiplie toute l'équation par $\frac{2}{y^3 dx^2}$, ce qui me donne $\frac{2Yy dx dy dt^2}{y^4 dx^2} = \frac{2dx dy du^2 + 2y du^2 ddx - 2y dx du dd u}{y^4 dx^2}$; réduisant & multipliant le second membre de cette équation haut & bas par $y dx$, on aura $\frac{2Y dy dt^2}{y^2 dx^2} = \frac{2y dy dx^2 du^2 + 2y^2 du^2 dx dx^2 x - 2y^2 dx^2 du dd u}{y^4 dx^2}$, dont l'intégrale est $\int \frac{2Y dy dt^2}{y^2 dx^2} = \frac{-du^2}{y^2 dx^2} \pm C$.

Quatrieme
exemple.

C C I.

Il arrive souvent que dans une équation telle différentielle est constante qui rend l'intégration très-difficile. Il

seroit alors fort utile de transformer l'équation en une autre dans laquelle cette différentielle fût variable. C'est ce que nous apprend la méthode suivante ; par son moyen on change l'équation proposée en une autre qui n'a aucune différentielle constante. C'est ce que M. Bernoulli appelle compléter une équation différentielle. Au reste , la méthode que nous donnons ici est plus simple & plus claire que celle qu'emploie ce grand Géometre.

C H A P I T R E II.

Méthode pour rendre completes les équations différentielles de tous les degrés.

C C II.

Exposition
de cette méthode
appliquée à des différentielles
du second ordre.

PROBLEME. Etant donnée une équation telle que $Addy + Bdx^2 + Cdy^2 + Edxdy = 0$ dans laquelle dx est constant, la transformer en une autre dans laquelle dx soit variable.

SOLUTION. Soit AC ou $BK = dx$, $KF = dy$; dx étant constant, on aura CD ou $FG = dx$, $GI = dy$, $IH = ddy$. IH sera donc le ddy , dans le cas où dx ne varie point ; c'est par conséquent le ddy de l'équation proposée. Faisons maintenant varier dx , & soit DE ou $GL = ddx$, on voit clairement que $LM = dy + ddy$; Il s'agit donc de trouver la valeur du premier ddy , c'est-

Figure 8.

à-dire, de IH en ddx & ddy , ce qui fera disparaître ce premier ddy , & mettra dans l'équation le nouveau $d'd'y$ avec le ddx . Or les triangles semblables FLM , FGH nous donnent l'analogie suivante $LM : GH :: FL : FG$, c'est-à-dire $dy + d'd'y : dy + ddy :: dx + ddx : dx$. Donc $dydx + dx d'd'y = dx dy + dy ddx + dx ddy + ddy ddx$. J'efface le terme $ddy ddx$ qui est nul par rapport aux autres : j'aurai $ddy = \frac{dx d'd'y - dy ddx}{dx}$. C'est la valeur qu'il faut substituer dans l'équation proposée à la place de ddy . Après cette substitution on aura une équation complete, c'est-à-dire, qui ne contiendra plus de différentielle constante.

CCIII.

On peut encore résoudre ce Problème d'une autre manière. Reprenons la proposée $Addy + Bdx^2 + Cdy^2 + Edxdy = 0$, je la mets sous la forme suivante $\frac{A ddy}{dx} + Bdx + \frac{Cdy^2}{dx} + Edy = 0$, ou bien $Ad(\frac{dy}{dx}) + \dots &c. = 0$. Or dans cette équation il n'y a plus aucune différentielle constante, puisque $\frac{dy}{dx}$ est une quantité finie. Mais $d.(\frac{dy}{dx}) = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$. C'est la valeur qu'il faudra substituer à $\frac{ddy}{dx}$ dans l'équation précédente. Donc la valeur qu'il faut substituer à ddy sera $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$, la même que nous avons déjà trouvée.

Autre manière de résoudre ce Problème.

CCIV.

Application
de la métho-
de aux diffé-
rentielles du
troisième or-
dre.

Soit maintenant une équation différentielle du troisième ordre $A d^3 y + B dx ddy + C dx^2 + E dy^2 + F dy dx^2 + D dy ddy$

$+ G dx dy^2 = 0$ dans laquelle dx est constant, & qu'on veut compléter. Je divise cette équation par dx^3 , & j'ai $\frac{A d^3 y}{dx^3} + \dots \&c. = 0$, ou $A d \cdot \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) + \dots \&c. = 0$, réduite au cas des équations du second ordre. Pour trouver maintenant la valeur qu'il faudra substituer au lieu de $d^3 y$, je mets l'équation sous cette forme $A dd \left(\frac{dy}{dx} \right)$

$+ \dots \&c. = 0$. Soit $p = \frac{dy}{dx}$, $dp = d \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)$, $\frac{dp}{dx} = d \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)$, on aura $d \cdot \left(\frac{dp}{dx} \right) = dd \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)$. Mais ddp

$= (\text{Art. CCIII.}) ddp - \frac{dp ddx}{dx} = dd \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right) - \frac{d dx}{dx}$.

$d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dx^2 d^3 y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dy dx d^3 x}{dx^3}$. Donc

$\frac{ddp}{dx}$, ou $dd \left(\frac{dy}{dx} \right)$, ou $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dx^2 d^3 y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dy dx d^3 x}{dx^4}$.

Donc enfin la valeur à substituer dans l'équation pour $d^3 y$ fera $\frac{dx^2 d^3 y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dy dx d^3 x}{dx^3}$.

CCV.

On trouveroit de même pour les équations du quatrième, du cinquième, &c. ordre, les valeurs qu'il y faudroit substituer à la place de $d^4 y$, $d^5 y$, &c. pour rendre ces équations complètes.

CCVI.

SCHOLIE. Mais, demandera-t-on, quel avantage retirerons-nous de compléter ici l'équation proposée? n'est-ce pas au contraire en rendre l'intégration plus difficile? Cet avantage est très-réel : après avoir rendu l'équation complète, nous serons les maîtres de traiter comme constante la différentielle qui facilitera le plus la réduction aux premières différences. Quelques exemples vont nous en convaincre.

En quoi consiste l'utilité de cette méthode.

CCVII.

Soit proposée d'intégrer l'équation $dx^3 dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$ dans laquelle dx est constant, & où l'on voudroit que dy le fût. Je rends d'abord l'équation complète, & pour cela au lieu de ddy je mets sa valeur $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$; cette substitution me donne $dx^3 dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$, équation dans laquelle aucune différentielle n'est constante. Je suppose à présent que dy est constante; j'aurai donc $ddy = 0$; donc la proposée devient $dx^3 - dy^3 + addx + xddx = 0$, dont l'intégrale est $xdx + adx - ydy = Cdy$.

Son application à plusieurs exemples.

Premier exemple.

CCVIII.

Qu'on propose maintenant l'équation suivante, $\frac{xdy^2 + xyddy + ydydx}{ydy} = \frac{xxdx - addx}{aa + xx}$, dans laquelle on a traité comme constante ydx , & qu'on veut transformer en une autre dans laquelle ydx soit variable & $x dy$

Second exemple plus compliqué que le premier.

constante; puisque ydx est constante, on aura $ddy = d\left(\frac{dy}{ydx}\right) \times ydx$: c'est-à-dire $ddy = \frac{ydxddy - dx dy^2 - ydyddx}{ydx}$. Je substitue pour ddy cette valeur dans l'équation proposée, elle devient $\frac{xdy}{y} + dx + \frac{xydxddy}{ydydx} - \frac{xdxdy^2 - xydyddx}{ydydx} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$; équation dans laquelle aucune différentielle n'est constante. Je prends maintenant pour constante xdy ; cette supposition me donne $xxddy + dydx = 0$, ou bien $\frac{dx dy}{x} = -ddy$. Je substitue dans la transformée pour ddy cette valeur, & je trouve $\frac{xdy}{y} + dx - \frac{dx}{\frac{xdy}{y}} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$. Donc en réduisant on a $-\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$. J'intègre, & j'ai $-l dx + l x dy$, ou $l \frac{xdy}{dx} = l\left(\frac{aa + xx}{x}\right)$. Donc $\frac{xdy}{dx} = \frac{aa + xx}{x}$, ou bien $xxdy = aadx + xdx$; ou enfin $dy = \frac{aadx}{xx} + dx$. Donc $y + \frac{aa}{x} - x + C = 0$.

C C I X.

Troisième exemple. Soit enfin proposé d'intégrer l'équation suivante $-\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dy^2 + dx^2}{x}$, dans laquelle ydx est constante. Pour compléter cette équation, je mets au lieu de ddy sa valeur trouvée plus haut $\frac{ydxddy - dx dy^2 - ydyddx}{ydx}$, & j'aurai la transformée suivante $\frac{-dxddy + dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$ qui est complète. Supposons à présent que dy est constant, nous aurons $ddy = 0$, donc l'équation à intégrer est $xxddx = dx^2 + dy^2$.

C C X.

Maintenant que nous sommes les maîtres de supposer toujours

toujours que dans l'équation aucune différentielle n'est constante, il est à propos d'examiner si on ne pourroit pas au moins dans certains cas déterminer quelle est la différentielle qui prise pour constante, rendra l'équation plus facile à intégrer.

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer, dans quelques cas, la différentielle qui supposée constante facilitera le plus l'intégration.

CCXI.

ON ne peut pas donner de règle générale pour reconnoître dans tous les cas quelle est la fluxion qu'on doit regarder comme constante, afin que l'intégration en devienne plus facile; on peut cependant se guider quelquefois par l'observation suivante. Je cherche si dans la proposée il y a deux, trois, &c. termes qui multipliés ou divisés par un facteur commun puissent s'intégrer. J'en prends l'intégrale, & c'est celle que je suppose constante.

CCXII.

Soit, par exemple, proposé d'intégrer l'équation suivante $X = \frac{dy^3 + dx^3 dy - x dy ddx + x dx ddy}{x^3 dy^3}$, dans laquelle X représente une fonction quelconque de x . J'observe

Son application à quelques exemples.

Premier exemple.

II. Partie.

X

que dans cette équation les deux termes $dx^2 dy + x dx ddy$ divisés par dx , donnent $dx dy + x ddy$, dont l'intégrale est $x dy$. Je vois encore que $dx^2 dy - x dy ddx$ divisés par $-xx dy$, donnent $\frac{-dx^2 + x ddx}{xx}$; différentielle dont l'intégrale est $\frac{dx}{x}$. Je puis donc également supposer pour constantes $x dy$ & $\frac{dx}{x}$. Ces deux suppositions détruiront également deux termes.

Soit 1°. supposée $x dy$ égale à une constante c , on aura $x ddy + dy dx = 0$, & multipliant par dx , $xdx ddy + dy dx^2 = 0$; ce qui réduit la proposée à l'équation suivante $X = \frac{dy^2 - x dy ddx}{2x^2 dy^2}$. Mais $x ddy + dx dy = 0$ donne $dy = \frac{-x ddx}{dx}$: donc en substituant pour dy cette valeur, on aura $X = \frac{-x dy^2 ddy}{2x^2 dx dy^2} - \frac{xdy ddx}{2x^2 dy^2}$, c'est-à-dire, $X = \frac{-x dy^2 ddy - x dy dx ddx}{2x^2 dx dy^2}$, ou $X = \frac{-dy^2 ddy - dy dx ddx}{2x^2 dx dy^2}$. Mais $x dy = c$: donc $dy = \frac{c}{x}$. Donc $X = \frac{-dy ddy - dx ddx}{2c^2 dx}$, ou $X dx = \frac{-dy ddy - dx ddx}{2cc}$, & en intégrant on a $\int X dx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4cc} + n$. Donc enfin $\int X dx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4x^2 dy^2} + n$.

CCXIII.

REMARQUE. Quand on est arrivé à l'équation $X = \frac{dy^2 - x dy ddx}{2x^2 dy^2}$, on peut abréger le calcul en multipliant l'équation par dx ; ce qui donne $X dx = \frac{dx}{2x^2} - \frac{dx ddx}{2x^2 dy^2}$, dont l'intégrale est ($x dy$ étant constante) $\int X dx = -\frac{1}{4x^2} - \frac{dx^2}{4x^2 dy^2} + n$, qui est la même que la précédente.

CCXIV.

2°. Prenons à présent pour constante $\frac{dx}{x}$; cette supposition nous donnera $\frac{x ddx - dx^2}{x^2} = 0$, & en multipliant par $-xx dy$, on a $-x dy ddx + dx^2 dy = 0$, équation qui fait évanouir le second & le troisième terme de la proposée. Elle devient donc $X = \frac{dy^2 + x dx dy}{2x^2 dy^2}$; je la multiplie par dx , ce qui me donne $X dx = \frac{dx dy^2 + x dx^2 dy}{2x^2 dy^2}$. L'intégrale de cette équation est, à cause de $\frac{dx}{x}$ ou $\frac{dx^2}{x^2}$ qui est constante, $\int X dx = -\frac{1}{4x^2} - \frac{dx^2}{4x^2 dy^2} + C$; ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus.

CCXV.

Soit proposé d'intégrer l'équation suivante $xy \times (dx ddy - dy ddx) = y dy dx^2 - yy dY dy^2 - x dx dy^2$, dans laquelle Y représente une fonction quelconque de y .

Je remarque que dans cette équation il y a trois termes savoir $xy dy ddx + y dy dx^2 - x dx dy^2$ qui divisés par $yy dy$ forment une différentielle complète, $\frac{xy ddx + y dx^2 - x dx dy}{yy}$, dont l'intégrale est $\frac{x dx}{y}$. Je prends donc pour constante $\frac{x dx}{y}$; ce qui me donne en différentiant $\frac{xy ddx + y dx^2 - x dx dy}{yy} = 0$. Donc la proposée se réduit à $xy dxdy + yy dY dy^2 = 0$, c'est-à-dire, $dY = -\frac{xdxdy}{y dy^2}$, équation dont l'intégrale est $Y = \frac{x dx}{y dy} + C$; ce qui est évident, $\frac{x dx}{y}$ étant constante.

CHAPITRE IV.

Dans lequel on applique aux équations différentielles de tous les ordres la méthode de l'article qui apprend à intégrer ou construire les équations différentielles du premier degré dans lesquelles l'une des indéterminées finies ne se trouve à aucun terme.

CCXVI.

Conditions
que cette méthode exige.

Nous avons vu (Art. CXL.) que l'on pouvoit toujours intégrer ou construire les équations différentielles du premier degré, lorsque l'une de leurs indéterminées finies ne s'y trouve pas; la méthode exposée dans cet article s'étend encore aux équations différentielles de tous les ordres. Par exemple, lorsque dans une équation différentielle du second ordre l'une ou l'autre des deux indéterminées ne s'y trouve pas, & qu'il n'y entre que ses différences premières ou secondes combinées comme on le veut, & élevées à des puissances quelconques, il sera toujours possible de parvenir à la séparation. Le procédé qu'il faut suivre pour cela consiste à faire la première différence qui est variable, égale à la fluxion prise pour constante, multipliée par une nouvelle indéterminée.

CCXVII.

Soit proposé d'intégrer l'équation $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{du dy}$ Son appli-
 dans laquelle $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est supposé constant, cation à plu-
 & l'indéterminée finie u ne se trouve pas. Suivant ce sieurs équa-
 que nous venons de dire, je fais $dx = z du$, tions du se-
 ce qui me donne $ddx = dz du$. cond ordre.

Premier
exemple.

J'ai donc la transformée suivante $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydz du + azdudy}{du dy}$,

& en réduisant $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydz + azdy}{dy}$, ou $\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydz + azdy$. Je divise cette équation par $2\sqrt{y}$, elle devient $\frac{by^{m-\frac{1}{2}} dy}{2c^m} = adz\sqrt{y} + \frac{azdy}{2\sqrt{y}}$, équation dont

l'intégrale est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2}) \cdot 2c^m} = az\sqrt{y} \pm C$. Mais $z = \frac{dx}{du}$; donc l'intégrale cherchée est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{2mc^m + c^m} = adx\sqrt{y} \pm Cdu$.

CCXVIII.

Soit maintenant l'équation à intégrer $Yyydydx^2 + duddu = 0$, dans laquelle Y représente une fonction de y , du est l'élément de la courbe, égal par conséquent à $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ydx est la fluxion prise pour constante, & dans laquelle l'indéterminée u ne se trouve pas.

Second
exemple.

Je fais $du = zydx$

$$ddu = ydzdx,$$

& après la substitution l'équation est $Yy^2 dydx^2 =$

$-y^2 z dz dx^2$, & en réduisant $Y dy = -z dz$. L'intégrale de cette équation est $\int Y dy = -\frac{z^2}{2} + C$. Mais $z^2 = \frac{du^2}{yy dx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{yy dx^2}$. Donc l'intégrale cherchée sera

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(2Cyy - 1 - 2yy \int Y dy)}}.$$

CCXIX.

Autre manière d'intégrer les équations précédentes.

REMARQUE. On peut encore réduire aux premières différences les équations qui sont dans le cas des précédentes, en se servant de la substitution que nous avons employée (Art. CXL.) pour les différentielles du premier degré. Cette substitution consiste à égaler la première différence de l'indéterminée qui manque, à une nouvelle indéterminée multipliée par la première différence de l'autre inconnue.

CCXX.

Appliquée à l'exemple précédent.

Je reprends l'équation précédente $Yy^2 dy dx^2 + du ddu = 0$; je suppose $dx = z du$, ce qui me donne $ddx = dz du + z ddu$, d'où l'on tire $ddu = \frac{ddx - dz du}{z}$. Après avoir substitué les valeurs dans l'équation, elle devient $Yy^2 z^2 dy du^2 = \frac{dz du^2 - du ddx}{z}$. Mais par la supposition $y dx$ est constant; donc $y ddx + dy dx = 0$, donc $ddx = -\frac{dy dx}{y}$, ou en mettant pour dx sa valeur, $ddx = -\frac{z du dy}{y}$. Substituant dans la transformée cette valeur de ddx , on a $Yy^2 z^2 dy du^2 = \frac{dz du^2}{z} + \frac{z dy du^2}{zy}$, & en réduisant $Yz^2 y^2 dy = \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y}$. Soit maintenant $yz = t$,

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. IV. 167

on a $lyz = lz$, $\frac{ydz + zdz}{yz} = \frac{dz}{z}$, & $\frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$.
 Donc $Yt^2 dy = \frac{dt}{t}$, & $Ydy = \frac{dt}{t^2}$, équation dont l'intégrale est $\int Ydy = -\frac{1}{2t^2} + C$. Maintenant $tt = z^2 y^2 = \frac{yydz^2}{dx^2} = \frac{yydz^2}{dx^2 + dy^2}$, à cause de $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.
 Donc en remettant ces valeurs dans l'intégrale trouvée, on aura $2 \int Ydy = \frac{-dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2C$, & enfin $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2Cyy - 2y^2 \int Ydy - 1)}}$, équation que nous avons déjà trouvée par l'autre méthode.

CCXXI.

Soit encore proposé d'intégrer l'équation $Yy^3 dy dx^3$ Troisième exemple.
 $= dx dy du^2 + y du^2 dx - y dx du du$, dans laquelle je puis supposer constante la fluxion que je voudrai, Y est une fonction quelconque de y & de constantes.

Prenons d'abord dx constante, cette supposition donne $ddx = 0$, & fait disparaître le terme $y du^2 dx$. L'équation est donc $Yy^3 dy dx^3 = dy du^2 - y du du$.
 Pour la réduire je fais . . . $du = z dx$,

$$ddu = dz dx,$$

d'où je tire la transformée suivante $Yy^3 dy dx^3 = z^2 dy dx^3 - y z dz dx^3$, & en divisant par dx^3 , $Yy^3 dy = z^2 dy - y z dz$, ou $Yy^3 dy = (\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}) \times z^2 y$. Pour intégrer cette équation je suppose $\frac{y}{z} = \frac{t}{t}$; je prends la différence du logarithme de cette équation, j'ai $\frac{z dy - y dz}{zz} = -\frac{\frac{dt}{t}}{\frac{t}{t}}$,

& en réduisant $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{dt}{t}$. Nous avons d'ailleurs $yt = z$. Donc en substituant ces valeurs dans l'équation $Yy^3 dy = (\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}) \cdot z^2 y$, elle devient $Yy^3 dy = -\frac{dt}{t} \times y^3 t^2$, ou bien $Ydy = -t dt$, équation dont l'intégrale est $\int Ydy = -\frac{t^2}{2} \pm C$: mais $\frac{t^2}{2} = \frac{z^2}{2yy}$. Donc on a $\int Ydy = -\frac{z^2}{2yy} \pm C$; & en mettant pour z sa valeur $\frac{du}{dx}$, on a $\int Ydy = -\frac{du^2}{2yy dx^2} \pm C$.

Si on prend du constant, alors $ddu = 0$, & l'équation $Yy^3 dy dx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx - y dx du ddu$ devient $Yy^3 dy dx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx$. Soit maintenant $dx = z du$, $ddx = dz du$, l'équation en y substituant ces valeurs devient $Yy^3 dy \cdot z^3 du^3 = z dy du^3 + y dz du^3$, ou bien $Ydy = \frac{z dy + y dz}{y^3 z^3}$. Donc en intégrant on a $\int Ydy = \frac{-1}{2y^2 z^2} \pm C$, & en remettant pour z sa valeur $\frac{dx}{du}$, l'intégrale cherchée est $\int Ydy = \frac{-du^2}{2y^2 dx^2} \pm C$, la même que nous venons de trouver.

CCXXII.

Application de la méthode à des équations d'un ordre plus élevé que le second. SCHOLIE 2. Cette méthode s'appliquera aux différentielles d'un ordre plus élevé que le second, pourvu que dans celles du troisieme ordre, par exemple, l'une & l'autre des deux variables finies x & y manquent, que dans celles du quatrieme, outre l'une des deux variables finies x , y , il manque encore l'une ou l'autre des premieres différences dx , dy avec leurs fonctions. On réduira par la même méthode les équations différentielles du cinquieme ordre, dans le cas où les deux variables finies x & y ,
&

& leurs deux premières différences dx , dy , manquent ; celles du sixième , pourvu qu'outre cela il manque encore l'une ou l'autre des secondes différences ddx , ou ddy , & ainsi de suite.

CCXXIII.

Soit l'équation $dx d^3y + dx^2 d^2y = dx^4 + dy^4$, ^{1°. A une équation du troisième ordre.} susceptible , comme on le voit, de la méthode présente, puisque les deux indéterminées finies x & y ne s'y trouvent pas ; dx est constant dans cette équation. Je fais

$$\frac{p dx}{a} = dy$$

& par conséquent $\frac{dp dx}{a} = ddy$

$$\frac{ddp dx}{a} = d^3y.$$

Après avoir substitué ces valeurs dans la proposée , elle devient $\frac{dx^2 ddp}{a} + \frac{dx^3 dp}{a} = dx^4 + \frac{p^4 dx^4}{a^4}$; donc $\frac{ddp + dx dp}{a} = dx^2 + \frac{p^4 dx^2}{a^4}$, équation réduite au second ordre.

Supposant toujours dx constant, je fais $\frac{q dx}{b} = dp$,

ce qui me donne $\frac{dq dx}{b} = ddp$:

j'ai après la substitution , $\frac{dq dx}{ab} + \frac{dp dx}{a} = dx^2 + \frac{p^4 dx^2}{a^4}$,

ou $\frac{dq}{ab} + \frac{dp}{a} = dx + \frac{p^4 dx}{a^4}$: mais $dx = \frac{b dp}{q}$; donc on a

$\frac{b dp + dq}{ab} = \frac{b dp}{q} + \frac{b p^4 dp}{a^4 q}$, équation réduite aux premières différences.

CCXXIV.

Soit maintenant l'équation différentielle du quatrième ^{2°. A une équation du quatrième.} ordre $d^4y + dx d^3y - dx^2 d^2y = 0$, dans laquelle dx

II. Partie,

Y

est constant, & les deux indéterminées finies x , y , avec la première différence dy ne se trouvent pas. Je suppose donc $\frac{p \, d^2 x}{a} = dy$,

& par conséquent $\frac{d p \, d^2 x}{a} = ddy$

$$\frac{d^2 p \, d^2 x}{a} = d^3 y$$

$$\frac{d^3 p \, d^2 x}{a} = d^4 y;$$

donc en substituant pour ddy , $d^3 y$, $d^4 y$ ces valeurs, j'aurai la transformée suivante $d^3 p + dx \, d^2 p - dx^2 dp = 0$, équation qui est dans le cas de celle de l'exemple précédent; donc en opérant comme nous venons de faire, on la ramènera aux premières différences.

CCXXV.

Cas particuliers qui se ramènent aux précédents par le choix de la constante.

SCHOLIE 3. Parmi les équations qui ne sont pas susceptibles de la méthode précédente, parce que les deux indéterminées finies s'y trouvent, il y en a quelques-unes qu'on y peut ramener en prenant pour constante une différentielle telle que tous les termes affectés de l'une des deux indéterminées finies disparaissent, & qu'il ne reste que ceux qui contiennent l'autre.

Dans ce cas est l'équation suivante $dx^3 - dx \, dy^2 = y \, dx \, ddx + 2x \, dy \, ddy$, dans laquelle nous pouvons supposer constant ou dx , ou dy . Si nous faisons la première supposition, nous aurons $ddx = 0$, & par conséquent le terme $y \, dx \, ddx$ s'évanouit; si c'est dy que nous traitons comme constant, $ddy = 0$ fait disparaître

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. IV. 171

le terme $2x dy ddy$; donc dans l'une & l'autre supposition il ne reste que l'une des deux indéterminées finies.

Soit donc dx constant, on aura $dx^3 - dx dy^2 = 2x dy ddy$. Je fais $dy = \frac{p dx}{a}$

$$ddy = \frac{dp dx}{a};$$

donc en substituant j'aurai $dx^3 - \frac{p^2 dx^3}{a a} = \frac{2x p dp dx^2}{a a}$,

c'est-à-dire $a a dx - p p dx = 2x p dp$, ou $\frac{dx}{x} = \frac{2 p dp}{a a - p p}$.

Donc en intégrant on a $lx = -l(aa - pp) + lm$,

& $x = \frac{m}{a a - p p}$. Je remets pour p sa valeur $\frac{a dy}{dx}$, j'ai

$x = \frac{m}{a a - a a dy^2}$, & par conséquent $x = \frac{m dx^2}{a a dx^2 - a a dy^2}$,

ou enfin $a a dy^2 = a a dx^2 - \frac{m dx^2}{x}$.

CCXXVI.

D'autres cas se rameneront à notre méthode par de simples substitutions. Soit, par exemple, $x^m ddx = y ddy + dy^2 + yy dy^2$, je fais $y dy = dz$, d'où je tire,

$$y ddy + dy^2 = ddz$$

$$yy dy^2 = dz^2.$$

Autres cas particuliers qui s'y ramènent par de simples substitutions.

Donc en substituant ces valeurs on aura pour transformée l'équation $x^m ddx = ddz + dz^2$, dans laquelle l'une des deux indéterminées finies z ne se trouve pas.

CCXXVII.

Il y a encore un autre cas plus général que les précédents; c'est celui dans lequel on n'a que des ddy , des

dy & des dx : car alors en faisant $dy = z dx$, dx étant constant, l'équation, comme il est évident, se ramènera toujours aux premières différences. Maintenant nous allons exposer une méthode générale pour ramener à notre dernier cas un très-grand nombre d'équations différentielles.

C H A P I T R E V.

Méthode pour transformer un grand nombre d'équations différentielles qui renferment leurs deux indéterminées finies, en d'autres dans lesquelles l'une des deux ne se trouve pas.

CCXXVIII.

Fondement
de cette méthode.

LA méthode que nous allons expliquer est fondée sur le principe du calcul des exponentielles. Si l'on a une quantité telle que c^x , dans laquelle c désigne un nombre dont le logarithme est l'unité, sa différentielle fera, comme nous l'avons vu dans l'Introduction, $c^x dx$, sa seconde différence $c^x ddx + c^x dx^2$, sa différence troisième $c^x d^3x + 3c^x dx ddx + c^x dx^3$, & ainsi de suite. Or dans ces différentielles l'indéterminée finie x ne se trouve que dans l'exposant. Cette considération fit penser à M. Euler qui est l'inventeur de cette méthode, que si dans les équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier, on substituoit aux indéterminées des exponentielles telles que

les précédentes, les variables finies ne se trouveroient plus qu'aux exposants. La difficulté seroit alors réduite à faire évanouir les exponentielles introduites à la place des variables. Car par ce moyen l'équation sera délivrée de l'un de ses indéterminées, dont il ne restera que les différences.

CCXXIX.

La méthode réussira pour toutes les équations différentielles du second ordre qui sont dans un des trois cas suivans.

Trois cas généraux auxquels s'applique cette méthode.

1°. Pour celles qui n'ont que deux termes & qui sont comprises dans la formule suivante,

$$ax^m dx^p - y^n dy^{p-2} ddy = 0.$$

2°. Pour toutes les équations dans lesquelles les indéterminées & leurs différences ont le même nombre de dimensions dans chaque terme. La formule suivante peut les représenter :

$$ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy.$$

3. Pour les équations dans lesquelles l'une des deux variables avec ses différences a le même nombre de dimensions dans chaque terme. Mais il faut distinguer deux cas ; le premier, quand la première différentielle de l'indéterminée qui a par-tout le même nombre de dimensions est constante ; & ce cas peut se représenter par la formule,

$$Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-h} dx^h dy^{m+2-h} = dx^m ddy,$$

dans laquelle x a dans tous les termes le nombre m de dimensions, dx est constante, P & Q sont des fonctions

quelconques de y . Le second cas arrive lorsque c'est la première différentielle de l'autre variable, qui est constante, & ce dernier est compris dans la formule,

$Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-h} dx^h dy^{m-h+1} \Rightarrow dx^{m-1} ddx$, dans laquelle dy est constant, P & Q sont des fonctions de y , x a, comme on le voit, dans chaque terme le nombre m de dimensions.

Nous allons examiner séparément les quatre formules précédentes.

CCXXX.

Examen du
premier cas
de la métho-
de.

PROBLEME I. Intégrer les équations telles que $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx est constant.

SOLUTION. Soit $x = c^{hu}$

& $y = c^t$,

h est une quantité arbitraire qu'on déterminera dans la suite de l'opération, u & t sont deux nouvelles variables.

La supposition de $x = c^{hu}$ & de $y = c^t$, nous donne

$$dx = hc^{hu} du$$

$$ddx = hc^{hu} \times (ddu + hdu^2)$$

$$dy = c^t dt + c^t t du$$

$$ddy = c^t \times (ddt + 2dt du + t du^2 + t ddu).$$

Mais par l'hypothèse dx est constant; on aura donc $ddx = 0$, donc aussi $hc^{hu} \times (ddu + hdu^2) = 0$, c'est-à-dire, $ddu = -hdu^2$ & en substituant pour ddu cette valeur dans celle de ddy , on a

$$ddy = c^t \times (ddt + 2dt du + (1-h)t du^2).$$

Substituons dans la proposée pour x, y , &c. leurs valeurs, elle devient $a c^{h m u} h^p c^{h p u} d u^p = c^{n u} t^n \times (c^u d t + c^u t d u)^{p-2} \times c^u (d d t + 2 d t d u + (1-h) t d u^2)$, c'est-à-dire, $a c^{(m+p) h u} h^p d u^p = c^{(n+p-1) u} t^n \times (d t + t d u)^{p-2} \times (d d t + 2 d t d u + (1-h) t d u^2)$.

Maintenant il s'agit de déterminer h , de manière que les exponentielles s'évanouissent. Or pour cela on voit bien qu'il faut que $n+p-1 = h m + h p$, ce qui donne $h = \frac{n+p-1}{m+p}$; donc l'équation précédente devient (B) $a \left\{ \frac{(n+p-1)^p d u^p}{(m+p)^p} \right\} = t^n \cdot (d t + t d u)^{p-2} \times (d d t + 2 d t d u + (\frac{m-n+1}{m+p}) t d u^2)$, laquelle ne contient plus qu'une des variables finies, savoir t , & se trouve par conséquent réduite au cas du Chapitre précédent.

Puisqu'on trouve $h = \frac{n+p-1}{m+p}$, il est facile de voir que les substitutions à faire sont $x = c^{(\frac{n+p-1}{m+p}) u}$ & $y = c^u t$, dans lesquelles on observera que $n+p-1$ est la somme des dimensions de y , & $m+p$, celle des dimensions de x . Cette remarque doit servir à déterminer sur le champ dans les cas particuliers la valeur qu'on doit donner à h .

CCXXXI.

Appliquons maintenant à la formule réduite la méthode de l'Art. CCXVI. Soit $du = z dt$, on aura $d du = dz dt + z d dt$; mais la supposition de dx constant, nous a donné plus haut $d du = -h du^2$: on aura donc en mettant pour h , & pour du leurs valeurs, $d du =$

$(\frac{1-n-p}{m+p}) z z dt^2$: donc $(\frac{1-n-p}{m+p}) z z dt^2 = z ddt + dz dt$,
d'où l'on tire $ddt = (\frac{1-n-p}{m+p}) z dt^2 - \frac{dz dz}{z}$. Je substitue
dans l'équation (B) les valeurs de du & de ddt , j'ai
 $a (\frac{n+p-1}{m+1})^p a z^p dt^p = t^n \cdot (dt + z t dt)^{p-2} \times$
 $\{ (\frac{1-n-p}{m+p}) z dt^2 - \frac{dz dz}{z} + 2 z dt^2 + (\frac{m-n+1}{m+p}) z z t dt^2 \}$,
ou bien en divisant par dt^{p-1} , & multipliant par z , on
aura (D) $(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^{p+1} dt = t^n \times \{ (1 + tz)^{p-2} \times$
 $(\frac{1+n-n+p}{m+p}) z z dt + (\frac{m-n+1}{m+p}) t z^2 dt - dz \}$,
équation réduite aux premières différences.

La supposition de $du = z dt$ & la valeur $\frac{n+p-1}{m+p}$ trou-
vée pour h , nous apprennent que pour réduire sur le champ
l'équation proposée, il falloit faire $x = c (\frac{n+p-1}{m+p})^{fz dt}$
& $y = c^{fz dt} t$,
ou, ce qui revient au même, $x = c^{(n+p-1)fz dt}$
& $y = c^{(m+p)fz dt} t$.

CCXXXII.

COROLL. De ce que nous supposons $x = c^{(n+p-1)fz dt}$,
il s'en suit que $c^{fz dt} = x^{\frac{1}{n+p-1}}$; donc $f(z dt) lc =$
 $\frac{1}{n+p-1} lx$; donc à cause de $lc = 1$, $z dt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$.
mais la supposition de $y = c^{(m+p)fz dt} t$, nous donne
 $ly = (m+p) f(z dt) lc + lt$; donc en mettant pour
 $fz dt$ sa valeur en x , on a $ly = (\frac{m+p}{n+p-1}) lx + lt$;
donc $y = x^{\frac{m+p}{n+p-1}} t$, & $t = y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$; donc $dt =$

$x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \left(\frac{m+p}{n+p-1}\right) \times y x^{\frac{m+n+2p-1}{n+p-1}} dx$. Donc
 en mettant pour dt cette valeur dans l'équation $z dt =$
 $= \frac{dx}{(n+p-1)x}$, on aura $z x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \left(\frac{m+p}{n+p-1}\right)$
 $yz x^{\frac{m+n+2p-1}{n+p-1}} dx = \frac{dx}{(n+p-1)x}$; donc enfin $z =$

$$(n+p-1) x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p) y x^{\frac{m-2p}{n+p-1}} dx.$$

Donc il est évident que si nous avons la valeur de z en t ,
 ou celle de t en z , on pourra trouver le rapport de x à y .

Appliquons la méthode précédente à quelques exemples
 particuliers.

CCXXXIII.

Soit l'équation $x dx dy = y dy$ dans laquelle dx est
 constant. Comparant cette équation avec la formule, j'ai

Application
 de la formule
 à deux exem-
 ples particu-
 liers.

$$\begin{aligned}
 a &= 1 \\
 m &= 1 \\
 p &= 1 \\
 n &= 1.
 \end{aligned}$$

Mettant donc ces valeurs dans l'équation différentielle du
 premier degré (D) trouvée plus haut, on a $\frac{z dz}{2} = t$
 $(1 + tz)^{-1} \times (\frac{1}{2} z^2 dt + \frac{1}{2} t z^3 dt - dz)$; ou en rédui-
 sant $z^2 dt + t z^3 dt = 3 t z^2 dt + z^3 t^2 dt - 2 t dz$.

CCXXXIV.

Soit encore proposé de réduire aux premières différen-
 ces l'équation $\frac{a dx}{x} = \frac{dy}{y}$, dans laquelle dx est constant.
 Comparant cette équation avec notre formule, on trouve

II. Partie.

Z

$$\begin{aligned} p &= 1 \\ n &= -1 \\ m &= -1; \end{aligned}$$

on auroit donc dans le cas présent $p+m=0$, donc tous les termes de l'équation réduite feroient infinis, & par conséquent la méthode ne peut servir dans ce cas.

Mais alors l'intégration est facile. Car on a $x ddy = ay dy dx$; mais dx constant donne $ddx=0$: donc l'intégrale du premier membre est $xdy - ydx$, & celle du second est $\frac{ayydx}{2}$. Donc on aura $\frac{xdy - ydx}{yy} = \frac{adx}{2} \pm Cdx$.

CCXXXV.

Seconde
partie de la
méthode.

PROBLEME 2. Intégrer les équations qui se rapportent à la formule générale $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$, dans laquelle dx est constant.

SOLUTION. Soit $x = c^u$

$$y = c^u t$$

j'aurai $dx = c^u du$,

& comme dx est constant, $c^u ddu + c^u du^2 = 0$; c'est-

à-dire, $ddu = -du^2$, on a aussi

$$dy = c^u dt + c^u t du$$

$$ddy = c^u . (ddt + 2du dt + t du^2 + t ddu),$$

& à cause que nous avons $ddu = -du^2$,

$$ddy = c^u . (ddt + 2du dt).$$

Substituant ces valeurs dans la formule, elle devient $ddt + 2du dt = at^{-m-1} du^p \times (dt + t du)^{2-p} + bt^{-n-1} du^q . (dt + t du)^{2-q}$, équation dans laquelle ne se trouve pas l'indéterminée finie u .

Je suppose donc $du = z dt$, ce qui me donne $ddu = dz dt + z ddt$. Mais $ddu = -du^2 = -z z dt^2$; donc $ddt = -\frac{dz dt}{z} - z dt^2$. Donc on aura l'équation suivante $at^{-m-1} z^p dt^p \cdot (dt + z t dt)^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt^q \cdot (dt + z t dt)^{2-q} = -\frac{dz dt}{z} + z dt^2$, ou bien (A) $at^{-m-1} z^p dt \cdot (1 + z t)^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt \cdot (1 + z t)^{2-q} = -\frac{dz}{z} + z dt$, équation différentielle du premier ordre: d'où je conclus que je pouvois réduire tout de suite la proposée en faisant $x = e^{\int z dt}$

$$y = e^{\int z dt} t.$$

Ces deux suppositions nous donnent $dx = e^{\int z dt} z dt$ & $dy = e^{\int z dt} dt + e^{\int z dt} z t dt$; donc $ddx = e^{\int z dt} \times (z ddt + dz dt + z z dt^2)$: mais dx étant constant, $ddx = 0$, donc $z ddt + dz dt + z z dt^2 = 0$, & $ddt = -z dt^2 - \frac{dz dt}{z}$, & par conséquent on aura $ddy = e^{\int z dt} \times (z dt^2 - \frac{dz dt}{z})$.

Appliquons cette formule à quelques exemples.

CCXXXVI.

Soit l'équation $x dx dy - y dx^2 = yy ddy$. Pour la comparer avec la formule, je l'écris ainsi $xy^{-2} dx dy - y^{-1} dx^2 = ddy$. J'ai donc

Application
à un exemple.

$$a = 1$$

$$m = 1$$

$$p = 1$$

$$n = 0$$

$$b = -1$$

$$q = 2$$

Z ij

Substituant ces valeurs dans l'équation (A) elle devient $t^{-2} z dt \times (1 + zt) - t^{-1} z z dt = -\frac{dz}{z} + z dt$, ou $\frac{z dt + z z t dt}{t^2} - \frac{z z dt}{t} = -\frac{dz + z z dt}{z}$; ou $z z dt + z^3 t dt - z^3 t dt = -t t dz + z z t t dt$. Donc en réduisant on a $z z dt - z z t t dt = -t t dz$. Donc $dt - \frac{dt}{t} = \frac{dz}{z}$, & en intégrant $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + C$; c'est-à-dire $t t z + z = -t + C t z$. Mais par les substitutions $z = \frac{du}{dt}$; donc l'équation $C t z - t = t t z + z$ devient ici $C t du - t dt = t t du + du$, ou (E) $du = \frac{t dt}{C t - t t - 1}$. D'un autre côté la supposition de $c^u = x$ donne $u l c = l x$, & à cause que $l c = 1$, $du = \frac{dx}{x}$; on aura aussi $y = c^u t = x t$, donc $t = \frac{y}{x}$, $dt = \frac{x dy - y dx}{x x}$. Substituons dans (E) pour du , dt , t leurs valeurs, on aura $y dy + x dx = C y dx$, équation au cercle dans le cas où $C = 0$.

CCXXXVII.

SCHOLIE. La formule que nous venons de traiter dans le Problème précédent n'a que trois termes : on pourroit y en ajouter tant d'autres qu'on voudroit, pourvu toutesfois qu'ils eussent les conditions énoncées Art. CCXXIX. Pour ne laisser aucun doute sur cet article, nous allons appliquer la méthode à un exemple qui a plus de trois termes.

Autre exemple dans lequel l'équation a plus de trois termes. Soit proposée l'équation suivante $y^2 dx^3 + x^2 dy^3 - y x dx dy^2 - y x dy dx^2 + y x^2 dx ddy - x y^2 dx ddy = 0$, dans laquelle dx est constant. Je suppose, ainsi que

je l'ai fait plus haut, $x = c^u$

$$y = c^u t,$$

j'aurai $dx = c^u du$

$$dy = c^u (dt + t du),$$

& à cause que $ddx = 0$, $ddy = c^u \times (ddt + 2dudt)$.
Je substitue pour x , y , dx , dy , ddy leurs valeurs dans l'équation, je trouve la transformée suivante après les réductions ordinaires $(F) dt^3 + 2t du dt^2 - t t dt du^2 + t dt du^2 + t du ddt - t t du ddt = 0$, dans laquelle on voit bien que l'indéterminée finie u ne se trouve pas.

Je fais donc $du = z dt$,

j'en tire $ddu = dz dt + z ddt$, ou parce que $ddx = 0$ donne $ddu = -du^2$, $-du^2 = dz dt + z ddt$, donc $ddt = -z dt^2 - \frac{dz dt}{z}$. Donc enfin après avoir substitué ces valeurs dans (F) , on aura la réduite $dt + 2tz dt - t dz + t t dz = 0$, ou bien $(t t - t) dz + 2z t dt + dt = 0$, équation réduite au cas général du Chapitre VII.

Si on applique à cette équation les règles que nous avons données dans ce Chapitre, on trouvera pour son intégrale $(t - 1)^2 z + t - t t = C$.

Cherchons maintenant au moyen de cette intégrale le rapport de x à y . La supposition de $du = z dt$ donne $z = \frac{du}{dt}$; donc l'intégrale trouvée devient $(t - 1)^2 du + t dt - dt t t = C dt$, ou $du = \frac{C dt - t dt + dt t t}{(t - 1)^2}$, équation dont l'intégrale est en ajoutant la constante A , (G) $u = \int \frac{t - C - t t + A t - A}{t - 1} dt$. Mais la supposition de $x = c^u$ donne $u = lx$, & comme on suppose aussi $y = c^u t$, on

aura $y = tx$, & $t = \frac{y}{x}$. Donc l'intégrale (G) devient

$lx = \frac{y - Cx - yly + ylx - Ax + Ay}{y - x}$. Donc $ylx - xlx = y - Cx - yly + ylx - Ax + Ay$. Donc enfin en réduisant & supposant . . . $-C - A = m$

& $A + 1 = n$,

on a $mx + ny = yly - xlx$.

CCXXXVIII.

Troisième
partie de la
méthode.

Comprend
deux cas.

La troisième partie de la méthode comprend, ainsi que nous l'avons dit plus haut, toutes les équations dans lesquelles l'une des deux variables avec ses différences a dans chaque terme le même nombre de dimensions. Nous avons dit aussi qu'il falloit distinguer deux cas; le premier, quand on a pour constante la première différence de l'indéterminée qui a le même nombre de dimensions à tous les termes; le second lorsque c'est la première différence de l'autre indéterminée qui est constante. Nous traiterons ces deux cas séparément.

CCXXXIX.

Premier cas
représenté par
la formule

$Px^m dy^{m+2}$

$+ Qx^{m-n} dx^m ddy$,

$dx^n dy^{m+2-n}$ & de dx est m dans tous les termes, dx est constant &

$= dx^m ddy$. P, Q sont des fonctions quelconques de y .

PROBLEME 3. Intégrer les équations représentées par la formule $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^m ddy$, dans laquelle la somme des exposants de x & de dx est m dans tous les termes, dx est constant & $= dx^m ddy$. P, Q sont des fonctions quelconques de y .

SOLUTION. Je suppose $x = c^u$,
ce qui me donne $dx = c^u du$

& $ddu = -du^2$;
je substitue ces valeurs dans la formule, & je la divise par c^{mu} , qui se trouve à tous les termes, j'ai la transformée
(I) $Pdy^{m+2} + Qdu^n dy^{m+2-n} = du^m ddy$, laquelle ne contient point u .

Je fais donc $du = zdy$, $ddu = dzdy + zddy$: mais $ddu = -du^2$ & $du^2 = z z dy^2$; donc $zddy + dzdy = -zzdy^2$, & par conséquent $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$.
Donc en substituant ces valeurs l'équation (I) devient
 $Pdy^{m+2} + Qz^n dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz$, & divisant par dy^{m+1} , (L) $Pdy + Qz^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$, équation réduite aux premières différences. Il est évident qu'on auroit réduit tout de suite la proposée, si on eût fait $x = c^{fzdy}$. Cette supposition nous eût donné $dx = c^{fzdy} zdy$, $ddx = c^{fzdy} (dzdy + zddy + z^2 dy^2)$: or $ddx = 0$, donc on auroit eu $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$, comme on l'a trouvé plus haut.

Appliquons cette formule à un cas particulier qui ait plus de trois termes.

Application
de la formule
à un exemple.

CCXL.

Qu'on ait à intégrer l'équation $2adx^2 dy + axdx ddy = 2xdx dy^2 + 2xxdy ddy$, dans laquelle dx est constant. Soit $x = c^{fzdy}$

$$dx = c^{fzdy} zdy$$

$$ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}.$$

Substituons pour x , dx , ddy , ces valeurs dans l'équation, elle devient $2ac^{2fzdy}z^2dy^3 - ac^{2fzdy}z^2dy^3 - ac^{2fzdy}dzdy^2 = 2c^{2fzdy}zdy^3 - 2c^{2fzdy}zdy^3 - \frac{2c^{2fzdy}dzdy^2}{z}$, & en divisant par $c^{2fzdy}dy^2$ qui se trouve à tous les termes, on a après la réduction $az^2dy - adz = -\frac{zdz}{z}$, ou bien $ady = \frac{adz - zdz}{z}$. L'intégrale de cette équation est $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C$. Maintenant la supposition $x = c^{fzdy}$ nous donne $lx = fzdy$, & $\frac{dx}{x} = zdy$: donc $z = \frac{dx}{x dy}$. Remettant dans l'intégrale pour z cette valeur, nous aurons l'équation réduite

$$aydx^2 = xx dy^2 - ax dx dy + C dx^2.$$

Je passe au second cas.

CCXLI.

Second cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$, dans laquelle dy est constant, P & Q sont des fonctions de y .

PROBLEME 4. Intégrer les équations contenues dans la formule $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$, dans laquelle dy est constant, P & Q sont des fonctions de y .

SOLUTION. Je fais comme ci-dessus $x = c^u$

$$dx = c^u du$$

$$ddx = c^u (ddu + du^2).$$

Suivant ces substitutions dans la formule, nous aurons (M) $Pdy^{m+1} + Qdu^n dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1} ddu$ laquelle ne contient plus u . Nous avons divisé par c^{mu} qui multiplioit tous les termes.

Je suppose donc $du = zdy$
 dy

dy étant constant, on a . . . $ddu = dzdy$,
 & substituant ces valeurs dans l'équation (M), elle de-
 vient $Pdy^{m+1} + Qz^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} +$
 $z^{m-1} dy^m dz$, & en divisant par dy^m , $Pdy + Qz^n dy$
 $= z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$, équation différentielle du pre-
 mier ordre à laquelle on parviendrait sur le champ en
 faisant $x = c^{\int z dy}$.

Je passe à un exemple.

CCXLII.

Soit proposé de réduire aux premières différences l'équa-
 tion $2dx dy = addx - yddx$, dans laquelle dy est
 constant. Je fais $x = c^{\int z dy}$

Application
 de cette for-
 mule à un
 exemple.

$$\begin{aligned}
 dx &= z dy c^{\int z dy} \\
 ddx &= c^{\int z dy} \times (z^2 dy^2 + z d^2 y + dz dy).
 \end{aligned}$$

Mais comme dy est constant, $ddy = 0$, donc $ddx =$
 $c^{\int z dy} \times (z^2 dy^2 + dz dy)$. Faisant ces substitutions dans
 la proposée, nous aurons $2z dy^2 = azz dy^2 + adz dy -$
 $zz y dy^2 - y dy dz$; & divisant par dy , $2z dy = azz dy$
 $+ adz - zzy dy - y dz$, équation réduite aux premières
 différences,

CCXLIII.

REMARQUE. Cette équation nous a servi pour faire
 voir l'application de notre méthode; mais on peut la ré-
 duire tout de suite: car on a $2dx dy + yddx = addx$,
 dont l'intégrale dy étant constant, $ydx + xdy = adx$
 $+ Cdy$.

II. Partie.

A a

CHAPITRE VI.

Application de la méthode du Chapitre XV. aux équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

CCXLIV.

Conditions
que cette méthode exige. **N**ous avons vu (Chap. XV.) comment, au moyen des coefficients indéterminés, on intègre un nombre n d'équations différentielles du premier ordre qui renferment un nombre n d'indéterminées $x, y, z, u, \&c.$ multipliées par des constantes & par une même fonction de t , avec leurs différentielles $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}, \&c.$ aussi multipliées par des constantes & par une fonction de t qui soit la même pour toutes, & de plus une fonction quelconque $\phi, \phi', \&c.$ de la variable t . Cette même méthode s'étend aux différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

Si l'on a un nombre n d'équations différentielles contenant un nombre n de changeantes $x, y, z, \&c.$ multipliées par des constantes & par une fonction quelconque ϕ de t avec leurs différences $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$ aussi multipliées par des constantes & par ϕ ; & les différences secondes $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \&c.$ multipliées de même par des constantes & par ϕ , & ainsi de suite jusqu'aux différences

$\frac{d^r x}{dt^r}$, $\frac{d^r y}{dt^r}$, $\frac{d^r z}{dt^r}$ d'un degré quelconque r ; que de plus chacune de ces équations contienne, si l'on veut, une fonction quelconque ϕ' , ϕ'' de t ; voici la méthode qu'il faudra suivre pour parvenir à l'intégration.

CCXLV.

On fera $d^{r-1}x = u dt^{r-1}$ Procédé de la méthode.
 $d^{r-2}x = u' dt^{r-2}$
 $d^{r-1}y = u'' dt^{r-1}$
 $d^{r-2}y = u' dt^{r-2}$, &c.

Par ces substitutions on changera les équations données en d'autres équations qui seront au nombre de $n + (n-1)r$, & qui ne contiendront que les indéterminées x, y, z , &c. u, u', u'', u''' , &c. avec leurs premières différences seulement $dx, dy, dz, du, du', du'', du'''$. Ces équations alors s'intégreront en les multipliant toutes excepté la première, par des coefficients indéterminés différents, & pratiquant ensuite les autres opérations que prescrit la méthode du Chapitre XV. Nous allons appliquer ces principes à quelques exemples.

CCXLVI.

Soit $n=2$, $r=4$, enforte qu'on ait à intégrer les deux équations suivantes $d^4y + b d^3y dt + c d^2y dt^2 + e dy dt^3 + f dx dt^3 + g d^3x dt^2 + h d^2x dt + i d^4x + \phi dt^4 = 0$, & $d^4y + c d^3y dt + z d^2y dt^2 + e dy dt^3 +$ Son application à des exemples.
Premier exemple.

A a ij

$$\varphi dx dt^3 + \gamma d^2 x dt^2 + \lambda d^3 x dt + \mu d^4 x + \tau dt^4 = 0.$$

Je suppose alors $d^3 y = z dt^3$

$$d^2 y = p dt^2$$

$$dy = q dt$$

$$d^3 x = u dt^3$$

$$d^2 x = r dt^2$$

$$dx = s dt,$$

z, p, q, r, s, u étant de nouvelles indéterminées. Faisant dans les deux équations proposées les transformations précédentes, on a $dt^3 dz + bz dt^4 + cp dt^4 + eq dt^4 + fs dt^4 + gr dt^4 + hudt^3 + idt^3 du + 0 dt^4 = 0$, & $dt^3 dz + ez dt^4 + xp dt^4 + iq dt^4 + qs dt^4 + rr dt^4 + \lambda u dt^4 + \mu dt^3 du + \tau dt^4 = 0$. Mais au lieu de $d^3 y = z dt^3$ on peut mettre $dp = z dt$; au lieu de $d^2 y = p dt^2$, $dq = p dt$; au lieu de $d^3 x = u dt^3$, $dr = u dt$; au lieu de $d^2 x = r dt^2$, $ds = r dt$. Donc on aura les huit équations suivantes :

$$dz + idu + (bz + cp + eq + fs + gr + hu + 0) dt = 0$$

$$dz + \mu du + (ez + xp + iq + qs + rr + \lambda u + \tau) dt = 0$$

$$dx - s dt = 0$$

$$dy - q dt = 0$$

$$ds - r dt = 0$$

$$dq - p dt = 0$$

$$dr - u dt = 0$$

$$dp - z dt = 0.$$

Les équations sont réduites à l'état qu'exige la méthode du Chapitre XV. il est maintenant facile de la leur appliquer,

CCXLVII.

Soit encore l'équation $\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{bddy}{dt^2} + \frac{cdy}{dt} + Ky + T$ Second
exemple.
 $= 0$, T étant une fonction de t . Je mets l'équation sous
cette forme $d^3y + bdydt + cdydt^2 + Kydt^3 + Tdt^3$
 $= 0$, & j'ai $n = 1$, $r = 3$. Je fais donc $ddy = xdt^2$

$$dy = zdt;$$

différentiant cette dernière équation, & supposant dt
constant, on aura $ddy = dzdt$; donc $dzdt = xdt^2$
ou $dz = xdt$. Donc nous aurons les deux équations sui-
vantes $dz - xdt = 0$

$$dy - zdt = 0.$$

Mettant dans la proposée pour d^3y , ddy , dy leurs va-
leurs tirées des équations précédentes, & supposant tou-
jours dt constant, nous aurons $dt^3dx + bxdt^3 + czdt^3$
 $Kydt^3 + Tdt^3 = 0$ & $dx + bxdt + czdt + Kydt$
 $+ Tdt = 0$, équation réduite au cas de l'Art. CLXXV.
Voilà donc les trois équations sur lesquelles nous devons
opérer.

Selon ce qui est dit (Chap. XV.) je multiplie la se-
conde de ces équations par un coefficient indéterminé μ ,
& la troisième par un autre coefficient indéterminé v .
J'aurai donc $dx + (bx + cz + Ky + T)dt = 0$

$$vdy - vzdt = 0$$

$$\mu dz - \mu xdt = 0.$$

J'ajoute ensemble ces trois équations de la façon suivante
(A) $dx + vdy + \mu dz + ((b - \mu)x + (c - v)z +$

$Ky + T) dt = 0$. Soit maintenant $bx - \mu x + cz - vz + Ky = Rx + Rvy + R\mu z$, j'aurai en comparant terme à terme $b - \mu = R$

$$c - v = R\mu$$

$$K = Rv.$$

Donc $b - \mu = \frac{c-v}{\mu} = \frac{K}{v}$. Donc $(b - \mu)\mu = c - v$ & $(b - \mu)v = K$. Donc l'équation (A) devient $dx + vdy + \mu dz + (x + vy + \mu z) \cdot (b - \mu) dt + Tdt = 0$. Soit $x + vy + \mu z = u$, on aura $du + (b - \mu)u dt + Tdt = 0$, équation intégrable par la méthode du Chapitre VII.

Nous avons maintenant $\mu\mu - b\mu = v - c$, ou $\mu = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(v - c + \frac{bb}{4})}$ & $\frac{b}{2} \pm \sqrt{(v - c + \frac{bb}{4})} = \frac{K}{v}$; donc $v - c + \frac{bb}{4} = \frac{KK}{vv} - \frac{bK}{v} + \frac{bb}{4}$. Donc $v^3 - cvv + Kbv = KK$. Soient n, n', n'' les trois valeurs de v , on aura en supposant que m, m', m'' sont les trois valeurs correspondantes de μ , on aura, dis-je,

$$du + (b - m)u dt + Tdt = 0$$

$$du + (b - m')u dt + Tdt = 0$$

$$du + (b - m'')u dt + Tdt = 0,$$

$$\text{\& encore} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x + ny + mz = u$$

$$x + n'y + m'z = u'$$

$$x + n''y + m''z = u''.$$

Des trois premières équations on tirera la valeur de u en t , & les trois secondes nous donneront celles de x, y, z . Donc enfin on aura la valeur de y en t .

CCXLVIII.

REMARQUE. Cette méthode peut s'abrégée en certains cas, par exemple, si on a $d^4y + Aydx^4 + Xdx^4 = 0$, au lieu d'employer quatre équations du premier degré, on peut se contenter de deux du second $ddy = udt^2$

$$ddu = Aydt^2,$$

lesquelles se réduisent à une équation du second degré, & celle-ci à deux du premier.

CHAPITRE VII.

Exposition d'une méthode pour construire ces mêmes

équations $\frac{ad^ny}{dx^n} + \frac{bd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \&c.$

$+ X = 0$, en y supposant $X = 0$.

CCXLIX.

DAns le Tome VII. des *Miscellanea Berolinensia*, M. Euler donne une méthode pour construire ces mêmes

équations $\frac{ad^ny}{dx^n} + \frac{bd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots \&c. + X = 0$, en

y supposant toutesfois $X = 0$. Voici le procédé de cette méthode.

Procédé de
cette métho-
de.

Il fait $y = Ac^{f^*}$
 $dy = Ac^{f^*} f dx$
 $ddy = Ac^{f^*} ff dx^2$
 $d^ny = Ac^{f^*} f^n dx^n$

Ces valeurs substituées dans l'équation $\frac{ad^n y}{dx^n} + \frac{bd^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{hd^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \&c. + y = 0$ nous donnent la transformée suivante $\frac{Aac^{f^x} f^n dx^n}{dx^n} + \frac{Abc^{f^x} f^{n-1} dx^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{Agc^{f^x} f^{n-2} dx^{n-2}}{dx^{n-2}} + \frac{Ahc^{f^x} f^{n-3} dx^{n-3}}{dx^{n-3}} + \&c. \dots + Ac^{f^x} = 0$, & en effaçant ce qui se détruit, on a $af^n + bf^{n-1} + gf^{n-2} + hf^{n-3} + \&c. \dots + 1 = 0$. Il ne s'agit donc que de résoudre cette dernière équation; & cette solution nous donnera autant de valeurs particulières de y , que l'équation aura de racines. On ajoutera ensemble toutes ces valeurs de y , & on aura l'intégrale complète de la proposée. C'est ce que nous allons développer en ramenant à des cas particuliers l'équation générale.

C C L.

Examen
des différents
cas qui peu-
vent arriver.

Supposons $n = 2$, l'équation à intégrer sera $\frac{addy}{dx^2} + \frac{bdy}{dx} + y = 0$; & en mettant pour y sa valeur Ac^{f^x} , & en réduisant on a $Ac^{f^x} \cdot (1 + bf + aff) = 0$. Que les valeurs de cette équation soient f & f' , j'aurai $y = Ac^{f^x}$ & $y = Bc^{f'^x}$. Or chacune de ces valeurs de y substituée dans l'équation la rend égale à zéro; je dis de plus que la somme de ces deux valeurs donne de même un résultat égal à zéro. Car on aura $Ac^{f^x} \cdot (1 + bf + aff) = 0$ & $Bc^{f'^x} \cdot (1 + bf' + af'f') = 0$ dans lesquelles tout se détruira par des signes contraires. Donc la somme de

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. VII. 193

de ces deux valeurs substituée dans l'équation fera aussi évanouir tous les termes. Donc il faudra supposer $y = Ac^{f^x} + Bc^{f^x}$, & cette supposition renferme tous les cas, A étant $= 0$, $B = 0$, & A & B ayant une valeur.

Si $n = 3$, on trouvera par la même méthode, qu'il faut supposer $y = Ac^{f^x} + Bc^{f^x} + Dc^{f^x}$, A, B, D étant des coefficients tout-à-fait arbitraires, & ainsi de suite.

C C L I.

Lorsque f a ses valeurs égales, l'équation alors sera représentée par $ffy - \frac{2fdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$. Soit $y = c^{f^x} u$, on aura $dy = c^{f^x} du + fu c^{f^x} dx$, & en supposant dx constant, $ddy = c^{f^x} ddu + 2fc^{f^x} dx du + ffc^{f^x} dx^2$. Donc en substituant ces valeurs on aura la transformée suivante $ffc^{f^x} u - \frac{2fc^{f^x} du}{dx} - \frac{2ffc^{f^x} u dx}{dx} + \frac{c^{f^x} ddu}{dx^2} + \frac{fc^{f^x} dx du}{dx^2} + \frac{fc^{f^x} dx du}{dx^2} + \frac{ffc^{f^x} u dx^2}{dx^2} = 0$. Donc en effaçant ce qui se détruit, on a $ddu = 0$. Donc $du = \epsilon dx$, $u = \epsilon x + \alpha$. Donc lorsque $1 + bf + aff = 0$ est un carré, il faut supposer $y = (\alpha + \epsilon x) c^{f^x}$.

C C L II.

Lorsque dans une équation différentielle du troisième ordre, f aura ses trois valeurs égales, on trouvera par la même méthode qu'on doit alors supposer $y = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx) c^{f^x}$. Car dans ce cas on aura l'équation suivante à intégrer $f^3 y - \frac{3f^2 dy}{dx} + \frac{3fd^2 y}{dx^2} - \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$. Soit, comme ci-

II. Partie.

B b

dessus, $y = uc^{fx}$, $d^3y = c^{fx} d^3u + 3fc^{fx} dx ddu + 3ffc^{fx} dx^2 du + f^3uc^{fx} dx^3$. Après avoir substitué pour y , dy , d^2y , d^3y leurs valeurs, on trouve $d^3u = 0$; donc $ddu = Adx^2$; $du = Axdx + Bdx$ & $u = \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$. Donc enfin $y = uc^{fx} = (a + ex + rxx)c^{fx}$.

CCLIII.

Donc en général si f avoit un nombre k de racines égales, il faudroit supposer $y = (a + ex + rxx + sxx^2 + \dots + \lambda x^{k-1})c^{fx}$. Ce qui est évident par ce qui précède.

CCLIV.

Maintenant si f a des valeurs imaginaires, ces imaginaires, comme on le sait, iront toujours en nombre pair. Ainsi supposons que dans l'équation $1 + bf + aff = 0$, on ait $\frac{b}{2\sqrt{a}} < 1$, alors on aura (Art. LXXXI. Introd.) $f = m + n\sqrt{-1}$ & $f' = m - n\sqrt{-1}$. Donc il faudra supposer $y = Ac^{mx+nx\sqrt{-1}} + Bc^{mx-nx\sqrt{-1}} = (Ac^{nx\sqrt{-1}} + Bc^{-nx\sqrt{-1}})c^{mx}$. Si l'on suppose A & B réelles & égales & $= P$, cette quantité deviendra réelle; & dans ce cas on aura (Art. XLVI. Introd.) $y = c^{mx} \times 2P \cos nx$. Elle sera encore réelle si on suppose A & B imaginaires & de différents signes. Soit, par exemple, $A = Q\sqrt{-1}$, $B = -Q\sqrt{-1}$, on aura $y = c^{mx} \cdot (Q\sqrt{-1} \cdot c^{nx\sqrt{-1}} - Q\sqrt{-1} \cdot c^{-nx\sqrt{-1}}) =$ (Art. XLV. Introd.) $c^{mx} \cdot 2\sqrt{-1} \cdot Q\sqrt{-1} \sin nx = c^{mx} \times -2Q \sin nx$. Nous venons de trouver plus haut $y = c^{mx}$.

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. VII. 195

$2P$. $\cos. nx$. Donc en général $y = c^{mx} \cdot \sin. (nx + R)$.
 Donc l'intégrale cherchée est $y = Hc^{mx} \cdot \sin. (nx + R)$.
 Car prenons un angle R dont le sinus soit au co-sinus,
 comme $2P$ est à $-2Q$, on aura $\sin. R : \cos. R :: 2P : -2Q$.
 Donc $\sin. R = \frac{2P}{H}$ & $\cos. R = -\frac{2Q}{H}$. Donc
 $2P = H \cdot \sin. R$ & $-2Q = H \cdot \cos. R$. Mettant ces
 valeurs dans $2P \cdot \cos. nx - 2Q \cdot \sin. nx$, on aura $H \cdot$
 $\sin. R \cdot \cos. nx + H \cdot \cos. R \cdot \sin. nx = H \times (\sin. R \cos.$
 $nx + \cos. R \cdot \sin. nx) = (\text{Art. XLIX. N}^\circ 2. \text{Introduct.})$
 $H \cdot \sin. (nx + R)$.

Appliquons maintenant cette méthode à quelques exemples.

CCLV.

Soit proposé d'intégrer l'équation suivante $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Kddy}{dx^2} = 0$, dans laquelle dx est constant. Je suppose $y = Ec^{fx}$; j'aurai la transformée suivante $A + Bf + \frac{Bf^2}{K} = 0$; & en réduisant $A + Bf + Kff = 0$. Cette équation a deux racines, toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires.

Application de la méthode à une équation différentielle du second ordre.

1°. Les racines sont réelles, quand BB est $> 4AK$.
 Dans ce cas les deux racines sont $f = \frac{-B \pm \sqrt{BB - 4AK}}{2K}$.
 Donc l'intégrale cherchée est (Art. CCXLIX.) $y =$
 $\frac{Bx + x\sqrt{BB - 4AK}}{2K} + c \frac{Bx - x\sqrt{BB - 4AK}}{2K}$.

Il y a encore un cas particulier à distinguer ici, c'est celui dans lequel on auroit $BB = 4AK$. Car alors $A + 2f\sqrt{4AK} + Kff = 0$ seroit un carré, celui de $\sqrt{A}$

Bb ij

$+f\sqrt{K}$. Donc les racines seroient égales. Donc (Art. CCLI.) on auroit $y = (a + ex) e^{-x\sqrt{\frac{A}{K}}}$. Car la supposition de $BB = 4AK$ donne $B = 2\sqrt{AK}$ & $f = -\frac{B}{2K}$. Donc $y = (a + ex) e^{-x\sqrt{\frac{A}{K}}}$ fera l'intégrale de l'équation $Ay + \frac{2dy\sqrt{AK}}{dx} + \frac{Kddy}{dx^2} = 0$.

2°. Soit maintenant $BB < 4AK$, dans ce cas les racines seront imaginaires. On aura donc $m = -\frac{B}{2K}$, $+n\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{(BB - 4AK)}}{2K}$ & $n = \frac{\sqrt{(4AK - BB)}}{2K}$. Donc en comparant cette valeur avec la formule $y = Hc^{mx} \sin.(nx + R)$, on aura l'intégrale suivante $y = Hc^{-\frac{Bx}{2K}} \cdot \sin.(x \frac{\sqrt{(4AK - BB)}}{2K} + R)$.

CCLVI.

Son application à une équation du troisième ordre.

Soit encore à intégrer l'équation suivante $y - \frac{3a^2 ddy}{dx^2} + \frac{2a^3 d^3y}{dx^3} = 0$; je supposerai $y = Ac^{fx}$, ce qui me donne la transformée suivante $1 - 3aaff + 2a^3f^3 = 0$. Les facteurs de cette équation sont $(1 + 2af)$ & $(1 - af)^2$. Le premier nous donne $f = -\frac{1}{2a}$, d'où l'on tire $y = Ac^{\frac{-x}{2a}}$. Le second a ses deux valeurs égales, on aura $f = \frac{1}{a}$, & par conséquent $y = (a + ex)c^{\frac{x}{a}}$. Donc l'intégrale complete sera $y = Ac^{\frac{-x}{2a}} + (a + ex)c^{\frac{x}{a}}$.

CCLVII.

A une équation d'un ordre n quelconque.

Enfin soit proposé d'intégrer l'équation suivante $\frac{d^ny}{dx^n}$.

$= 0$; la supposition de $y = Ac^{fx}$ donne ici $f^n = 0$. Donc f a toutes ses racines égales. Donc suivant ce que nous avons dit plus haut, il faudra faire $y = (a + bx + cxx + \dots \&c.) c^{fx}$. Mais $f = 0$ donne $c^{fx} = c^0 = 1$. Donc la supposition se réduit à $y = a + bx + cxx + \dots + px^{n-1}$.

Et en effet c'est ce qu'on trouvera de même, en prenant successivement autant d'intégrales que n contient d'unités. Soit $n = 4$, la proposée sera $\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$, dx étant constant, on aura pour intégrale $\frac{d^3 y}{dx^3}$, que l'on supposera égale à une constante de cette forme $\frac{a}{dx}$; ce qui fournit l'équation suivante $d^3 y = a dx^3$; & ensuite $ddy = ax dx^2 + b dx^2$; $dy = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + f$. Donc enfin $y = \frac{ax^4}{12} + \frac{bx^3}{6} + \frac{cx^2}{2} + fx$.

CHAPITRE VIII.

Comparaison de la Méthode exposée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI.

CCLVIII.

T Elle est la méthode donnée par M. Euler pour la solution des équations renfermées dans la formule

$$\frac{ad^n y}{dx^n} + \frac{bd^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \&c. = 0. \text{ Cette méthode}$$

Démonstration de la Méthode précédente,

peut paroître plus simple que celle qui résulte de la solution générale exposée dans le Chapitre VI. Mais la Méthode de M. d'Alembert rapprochée de celle de M. Euler en démontre la généralité. En effet on ne voit pas clairement que l'intégration ne réussira qu'en faisant $y = Ac^{fx}$; au lieu que la solution énoncée ci-dessus qui donne la valeur de y , nous montre avec évidence que y doit en effet être exprimée par un certain nombre de termes $Ac^{fy} + Bc^{gx} + Dc^{hx} + \&c.$

Car dans les cas, par exemple, où l'équation est du troisième degré, telle que $d^3y + bddydx + cdydx^2 + Kydx^3 = 0$, en faisant, $ddy = p dx^2$

$$dy = z dx,$$

& pratiquant les opérations exposées (Art. CCXLV.) on aura les trois équations suivantes,

$$dp + bp dx + cz dx + Ky dx = 0$$

$$dz - p dx = 0$$

$$dy - z dx = 0;$$

$$\& \text{ ensuite } \dots dp + (bp + cz + Ky) dx = 0$$

$$v dy - v z dx = 0$$

$$\mu dz - \mu p dx = 0.$$

Donc $dp + v dy + \mu dz + \{(b - \mu)p + (c - v)z + Ky\} dx = 0$. Donc en supposant $(b - \mu)p + (c - v)z + Ky = Rp + Rvy + R\mu z$, & $p + vy + \mu z = u$, on aura $\frac{du}{u} = (\mu - b) dx$. Donc en faisant pour les valeurs de v & de μ les mêmes calculs que dans l'article CLXXV. on trouvera $p + ny + mz = u$

$$p + n'y + m'z = u'$$

$$p + n''y + m''z = u'',$$

$$\& \text{ de plus } \dots \dots \dots du + p u dx = 0$$

$$du' + p' u' dx = 0$$

$$du'' + p'' u'' dx = 0.$$

Par le moyen des trois premières équations, on aura d'abord $p = \frac{m'u' - m'u'' + n'm'y - n'm''y}{m'' - m'}$, $z = \frac{u' - u'' - n'y + n''y}{m'' - m'}$, &

par conséquent on aura $y = \frac{(m'' - m')x - m'u' + m'u''}{nm'' - nm' - n'm - n''m + n'm' - n''m''}$.

Donc $y = Pu + P'u' + P''u''$. Mais des trois secondes équations on tire

$$lu = -px + b$$

$$lu' = -p'x + b'$$

$$lu'' = -p''x + b'',$$

$$\& \text{ par conséquent } \dots \dots \dots u = c^{-px+b}$$

$$u' = c^{-p'x+b'}$$

$$u'' = c^{-p''x+b''},$$

$$\text{ou bien encore } \dots \dots \dots u = c^{-px} \times c^b.$$

$$u' = c^{-p'x} \times c^{b'}$$

$$u'' = c^{-p''x} \times c^{b''}.$$

$$\text{Donc enfin } \dots \dots \dots y = Ac^{fx} + Bc^{g^x} + Dc^{hx}.$$

CCLIX.

En suivant la méthode de M. d'Alembert, si on trouve les valeurs de f égales, alors on augmentera ces valeurs de quantités infiniment petites différentes l'une de l'autre. Ainsi on fera $y = Ac^{f^x+a^x} + Bc^{f^x+p^x}$, a & p étant des quantités infiniment petites. Donc on aura $y = Ac^{f^x} + Aaxc^{f^x} + Bc^{f^x} + Bpxc^{f^x}$; d'où l'on tire $y =$

Examen des cas différens d'après la méthode du Chapitre VI.

$(A+B)c^{fx} + (Aa+Bp)xc^{fx}$. Donc enfin $y = (l+mx)c^{fx}$; supposition que nous fait faire de même la méthode de M. Euler. Nous aurions pu pousser l'expression de c^{fx+ax} & de c^{fx+px} au-delà de deux termes; mais nous nous sommes contentés de deux, parce qu'il n'y a dans l'équation $y = Ac^{fx+ax} + Bc^{fx+px}$ que deux coefficients A & B & deux quantités infiniment petites a & p absolument arbitraires.

CCLX.

Si f a trois valeurs égales, alors on supposera $y = Ac^{fx+ax} + Bc^{fx+px} + Dc^{fx+sx}$. Comme il y a dans ce cas trois coefficients & trois quantités infiniment petites indéterminées, on poussera jusqu'à trois termes la valeur approchée de c^{fx+ax} & des autres. On aura donc $y = Ac^{fx} + Aaxc^{fx} + \frac{Aaaxxc^{fx}}{2} + Bc^{fx} + Bp xc^{fx} + \frac{Bppxxc^{fx}}{2} + Dc^{fx} + Ds xc^{fx} + \frac{Dssxxc^{fx}}{2}$. Donc $y = (A+B+D)c^{fx} + (Aa+Bp+Ds)xc^{fx} + \left\{ \frac{Aaa+Bpp+Dss}{2} \right\} x^2 c^{fx}$. Donc enfin $y = (l+mx+nx^2)c^{fx}$.

CCLXI.

Quand une des valeurs de f est $= 0$, c'est alors une marque qu'il y a dans l'exposition de y un terme tout constant. Soit, par exemple, à intégrer l'équation $d^3y + ad^2ydx + bdydx^2 = 0$, si je fais $y = Ac^{fx}$, après la substitution

substitution j'aurai la transformée suivante $A c^{f^x} f^3 dx^3 + A a c^{f^x} f^2 dx^2 + A b c^{f^x} f dx = 0$; donc $f^3 + aff + bf = 0$; donc nous aurons $f = 0$ & $ff + af + b = 0$. Cette seconde équation nous donne $y = B c^{g^x} + D c^{h^x}$. La première donne $y = E c^0 = E_1 = E$. Donc la valeur complète de y est $y = B c^{g^x} + D c^{h^x} + E$.

Et en effet, soit $dy = z dx$
 $z = A c^{f^x}$,
 on aura $ddy = dz dx$
 $d^2 y = ddz dx$,
 & par conséquent la transformée suivante $ddz dx + a dz dx^2 + b z dx^3 = 0$, qui donne $ff + af + b = 0$.
 Donc (Art. CCL.) $z = A c^{g^x} + F c^{h^x}$. Or $dy = z dx$,
 donne $y = \int z dx + E = \int (A c^{g^x} dx + F c^{h^x} dx) + E$.
 Donc $y = B c^{g^x} + D c^{h^x} + E$.

CCLXII.

Si f a plusieurs valeurs égales à zéro, alors on remarquera que ces valeurs sont de plus égales entre elles. Donc suivant ce que nous avons dit (Art. CLIX.) on augmentera ces valeurs de quantités infiniment petites c^{ax} , c^{bx} , c^{Bx} différentes l'une de l'autre, & on poussera l'expression de ces quantités jusqu'à un nombre de termes égal à celui des racines $= 0$.

CCLXIII.

Soit proposé d'intégrer l'équation $d^2 y + a d^4 y dx +$

II. Partie,

Cc

Application
à un exemple
du cinquieme
ordre.

$bd^3ydx^2 = 0$, dans laquelle dx est toujours constant.

La transformée, en supposant $y = Ac^{fx}$, sera $Ac^{fx}f^5dx^5 + Aac^{fx}f^4dx^4 + Abc^{fx}f^3dx^3 = 0$; & en réduisant on a $f^5 + af^4 + bf^3 = 0$. Or de cette équation on tire 1°. $f^3 = 0$, qui nous apprend que f a trois valeurs égales & $= 0$; 2°. $ff + af + b = 0$. Donc en pratiquant ce qui est dit plus haut, on aura pour l'équation

$$\begin{aligned} ff + af + b = 0, \quad y = Ac^{-\frac{ax}{2} + x\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - b\right)}} + \\ Bc^{-\frac{ax}{2} - x\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - b\right)}}; \text{ ou bien } y = Ac^{mx} + Bc^{nx}. \text{ Pour } \\ \text{l'équation } f^3 = 0, \text{ on aura } y = Dc^{fx+ax} + Ec^{fx+ax} \\ + Fc^{fx+ax} = Dc^{fx} + Daxc^{fx} + \frac{Daxxc^{fx}}{2} + Ec^{fx} \\ + Eaxc^{fx} + \frac{Eaxxc^{fx}}{2} + Fc^{fx} + Faxc^{fx} + \frac{Faxxc^{fx}}{2} \\ = (D+E+F)c^{fx} + (Da+Ea+Fa)xc^{fx} + \\ (Daa+Eaa+Faax)\frac{x^2c^{fx}}{2}. \text{ Mais } f=0, \text{ donne } c^{fx} \\ = c^0 = 1, \text{ donc on a } y = D+E+F+(Da+Ea+Fa)x + \\ (Daa+Eaa+Faax)\frac{x^2}{2} = l+px+qx^2. \\ \text{Donc la valeur complète de } y \text{ sera } Ac^{mx} + Bc^{nx} + \\ l+px+qx^2. \end{aligned}$$

CCLXIV.

C'est ce dont on peut se convaincre de la façon suivante: Je reprends l'équation proposée $d^5y + ad^4ydx + bd^3ydx^2 = 0$. Faisons $y = z$, $dy = zdx$

$$dz = qdx$$

$$dq = rdx$$

$$r = A'c^{fx},$$

Nous aurons $ddy = dzdx = qdx^2$

$$d^3y = dqdx^2 = rdx^3$$

$$d^4y = ddrdx^3$$

$$d^5y = ddrdx^3.$$

Donc la transformée sera $d^2rdx^3 + adrdx^4 + brdx^5$

$= 0$, ou $ddr + adrdx + brdx^2 = 0$; équation de

laquelle on tire (Art. CCLVIII.) $r = A'c^{mx} + B'c^{nx}$.

Mais $dq = rdx$ donne $q = \int rdx + E = \int (A'c^{mx} dx$

$+ B'c^{nx} dx) + E = \frac{A'c^{mx}}{m} + \frac{B'c^{nx}}{n} + E$. Donc $q =$

$A''c^{mx} + B''c^{nx} + E$. De même $dz = qdx$ donne $z =$

$\int qdx + C = \int (A''c^{mx} dx + B''c^{nx} dx + E dx) + C$.

Donc $z = A'''c^{mx} + B'''c^{nx} + Ex + C$. Enfin $dy =$

zdx donne $y = \int zdx + L = \int (A'''c^{mx} dx + B'''c^{nx} dx$

$+ Ex dx + C dx) + L$. Donc $y = Ac^{mx} + Bc^{nx} +$

$l + px + qxx$.

CCLXV.

SCHOLIE I. Si l'on veut maintenant appliquer la

méthode de M. Euler à l'équation $d^ny + ad^{n-1}ydx +$

$\dots + Xdx^n = 0$, dans laquelle se trouve, comme

on le voit, le terme Xdx^n , alors on remarquera que

dans le cas où l'équation différentielle est, par exemple,

du troisième ordre, le Problème se réduit aux équations

suivantes $du + pudx + Xdx = 0$

$$du' + p'u'dx + Xdx = 0$$

$$du'' + p'u''dx + Xdx = 0,$$

$$\& \dots \dots \dots x + ny + mz = u$$

Application
de la métho-
de du Chap.
VII. Sect. II.
à une formule
plus générale
que celle
qu'on y a
traitée.

$$x + n'y + m'z = u'$$

$$x + n''y + m''z = u''.$$

Multipliant par $c^{f'x}$ l'équation $du + pudx + Xdx = 0$, elle devient $duc^{f'x} + pudxc^{f'x} + Xdx c^{f'x} = 0$; dont l'intégrale est $uc^{f'x} + \int Xc^{f'x} dx + P = 0$. Donc $u + c^{-f'x} \int Xc^{f'x} dx + Pc^{-f'x} = 0$. On aura de la même manière $u' + c^{-f''x} \int Xc^{f''x} dx + Pc^{-f''x} = 0$, $u'' + c^{-f'''x} \int Xc^{f'''x} dx + Pc^{-f'''x} = 0$. Substituant ces valeurs de u , u' , u'' dans les trois secondes équations, on en tirera la valeur de y en x , laquelle sera de la forme suivante $y = Ac^{f'x} + Bc^{g'x} + Dc^{h'x} + \&c. + Ec^{f''x} \int c^{-f''x} Xdx + Fc^{g''x} \int Xc^{-g''x} dx + Gc^{h''x} \int Xc^{-h''x} dx + \&c.$

CCLXVI.

Application
de la formule
à une équation
différentielle
du second
ordre.

Ainsi supposons qu'on ait à intégrer l'équation différentielle du second ordre $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$, on fera $y = Ac^{f'x} + Bc^{g'x} + Ec^{f''x} \int Xc^{-f''x} dx + Fc^{g''x} \int Xc^{-g''x} dx$. Maintenant pour déterminer f , g , A , B , E , F , je substitue dans l'équation à la place de y , dy , ddy , leurs valeurs : cette opération me donne la transformée suivante ;

$$\begin{aligned} & Ac^{f'x} f'^2 dx^2 + Bc^{g'x} g'^2 dx^2 + EdXd^2 + EfXd^2 + \\ & + Aac^{f'x} f' dx^2 + aBc^{g'x} g' dx^2 + FdXd^2 + FgXd^2 \\ & + Abc^{f''x} dx^2 + bBc^{g''x} dx^2 + aEXdx^2 \\ & + aFXdx^2 + Xdx^2 \\ & + Ef^2 dx^2 c^{f''x} \int c^{-f''x} Xdx + Fg^2 dx^2 c^{g''x} \int c^{-g''x} Xdx \\ & + aEfdx^2 c^{f''x} \int c^{-f''x} Xdx + aFgdx^2 c^{g''x} \int c^{-g''x} Xdx \\ & + bEdx^2 c^{f''x} \int c^{-f''x} Xdx + bFdx^2 c^{g''x} \int c^{-g''x} Xdx = 0. \end{aligned}$$

Or de cette équation on tire les six équations suivantes, en égalant à zéro les coefficients de tous les termes analogues,

$$Aff + Aaf + Ab = 0$$

$$Bgg + Bag + Bb = 0$$

$$Eff + Eaf + Eb = 0$$

$$Fgg + Fag + Fb = 0$$

$$Ef + Fg + Ea + Fa + 1 = 0$$

$$E + F = 0$$

Donc on aura les valeurs de A, B, E, F, f, g . Donc on aura la valeur complete de y . Au reste on remarquera que A & B pourront être tout ce qu'on voudra.

Si y a des racines égales, par exemple, si $f = g$, alors au lieu des termes $Ec^{f*} \int c^{-f*} Xdx + Fc^{g*} \int c^{-g*} Xdx$, on aura $p c^{f*} \int c^{-f*} Xdx + q x c^{f*} \int c^{-f*} Xdx - q c^{f*} \int x c^{-f*} Xdx$.

Car dans ce cas il faut faire (Art. CCLIX.) $y = Ac^{f*+a*} + Bc^{f*+p*} + \&c. + Ec^{f*+a*} \int c^{-f*-a*} Xdx + Fc^{f*+p*} \int c^{-f*-p*} Xdx + \&c.$ a & p étant des quantités infiniment petites différentes l'une de l'autre. Or $c^{f*+a*} = c^{f*} + a x c^{f*}$, $c^{f*+p*} = c^{f*} + p x c^{f*}$: donc en supposant $A + B = l$, $Aa + Bp = m$, on aura $y = (l + mx) c^{f*} + Ec^{f*} \int c^{-f*} Xdx - Ec^{f*} \int a x c^{-f*} Xdx + E a x c^{f*} \int c^{-f*} Xdx - E a x c^{f*} \int a x c^{-f*} Xdx + Fc^{f*} \int c^{-f*} Xdx - Fc^{f*} \int p x c^{-f*} Xdx + F p x c^{f*} \int c^{-f*} Xdx - F p x c^{f*} \int p x c^{-f*} Xdx =$ (en supposant $E + F = p$, & $Ea + Fp = q$) $(l + mx) c^{f*} + (p + qx) c^{f*} \int c^{-f*} Xdx - (E + E a x) . c^{f*} \int a x c^{-f*} Xdx - (F +$

$F_p(x) c^{fx} \int p x c^{-fx} X dx = (l + mx) c^{fx} + (p + qx) c^{fx} \int c^{-fx} X dx - (E_a + E_{aa} x) c^{fx} \int x c^{-fx} X dx - (F_p + F_{pp} x) c^{fx} \int x c^{-fx} X dx$. Mais comme a & p sont des quantités infiniment petites, les termes où se trouvent leurs quarrés sont nuls par rapport aux autres : donc on aura $y = (l + mx) c^{fx} + p c^{fx} \int c^{-fx} X dx + q x c^{fx} \int c^{-fx} X dx - q c^{fx} \int x c^{-fx} X dx$.

Si plusieurs racines étoient égales à zéro, par exemple, si on avoit $f = 0$, $g = 0$, alors cette supposition nous donneroit $c^{fx} = 1$; donc on auroit $y = l + mx + \&c. + p \int X dx + q x \int X dx - q \int x X dx + \&c.$

Il est aisé de voir maintenant le procédé qu'il faudroit suivre, s'il y avoit dans l'équation proposée plus de deux racines égales, ou égales à zéro.

CCLXVII.

Autres équations traitées par la méthode du Chap. VII. Sect. II.

SCHOLIE 2. En suivant les mêmes principes, on appliquera facilement la méthode de M. Euler aux équations différentielles du premier degré que nous avons résolues dans le Chapitre XV. par la méthode des coefficients indéterminés : nous trouverons la forme que doivent avoir les valeurs indéterminées x, y, z &c. Nous allons le faire voir par un exemple.

CCLXVIII.

Soient proposées les deux équations

$$dx + a dy + (cx + ey) T dt + t dt = 0$$

$dy + b dx + (fx + gy) T dt + F dt = 0$,
 dans lesquelles θ , T & F sont des fonctions quelconques
 de t . Je multiplie la seconde de ces deux équations par
 un coefficient indéterminé μ , & j'aurai

$$dx + a dy + (cx + ey) T dt + \theta dt = 0$$

$$\mu dy + b \mu dx + (fx + gy) \mu T dt + \mu F dt = 0 :$$

je les ajoute ensemble, j'ai $(1 + b\mu) dx + (a + \mu) dy + \{(c + \mu f)x + (e + g\mu)y\} T dt + (\theta + \mu F) dt = 0$.
 Soit $(c + f\mu)x + (e + g\mu)y = (1 + b\mu)Rx + (a + \mu)Ry$, on aura en comparant terme à terme

$$c + f\mu = R + b\mu R$$

$$e + g\mu = aR + \mu R,$$

donc l'équation devient $(1 + b\mu) dx + (a + \mu) dy + \{(1 + b\mu)Rx + (a + \mu)Ry\} T dt + (\theta + \mu F) dt = 0$.

Soit . . . $(1 + b\mu)x + (a + \mu)y = u$,

on aura . . . $(1 + b\mu)Rx + (a + \mu)Ry = Ru$

$$(1 + b\mu)dx + (a + \mu)dy = du :$$

donc en substituant ces valeurs dans la dernière équation,
 j'aurai $du + RuT dt + (\theta + \mu F) dt = 0$, équation in-
 tégrable par la méthode de M. Bernoulli, exposée dans
 le Chapitre VII. Section I.

Rappelons-nous le procédé que cette méthode nous
 donne pour trouver la valeur de u en t , nous multiplie-
 rons l'équation par t' , en supposant que t' soit une fon-
 ction de t , telle que les deux premiers termes devien-
 nent une différentielle exacte. On aura donc $t' du +$
 $Ru t' T dt + (\theta + \mu F) t' dt = 0$. Mais par l'hypothèse

précédente on a $dt' = R t' T dt$; donc $\frac{dt'}{t'} = RT dt$; donc $lt' = \int RT dt$; donc $t' = c^{RfTdt}$. Donc $c^{RfTdt} du + u c^{RfTdt} RT dt + (\theta + \mu F) c^{RfTdt} dt = 0$, équation dont l'intégrale est $u c^{RfTdt} + \int (\theta + \mu F) c^{RfTdt} dt = Q$. Donc enfin $u = Q c^{-RfTdt} - c^{-RfTdt} \int (\theta + \mu F) c^{RfTdt} dt$.

Maintenant on a . . . $\frac{c + f\mu}{1 + b\mu} = R$,
 & . . . $\frac{e + g\mu}{a + \mu} = R$;
 donc . . . $\frac{e + g\mu}{a + \mu} = \frac{c + f\mu}{1 + b\mu}$: donc
 $e + g\mu + b e \mu + b g \mu \mu = a c + a f \mu + c \mu + f \mu \mu$,
 équation qui nous apprend que μ a deux valeurs. Soient m & m' ces deux valeurs de μ , au lieu de l'équation $u = Q c^{-RfTdt} - c^{-RfTdt} \int (\theta + \mu F) c^{RfTdt} dt$, on aura les deux suivantes,

$$u = Q c^{-RfTdt} - c^{-RfTdt} \int (\theta + mF) c^{RfTdt} dt,$$

$$u' = Q' c^{-R'fTdt} - c^{-R'fTdt} \int (\theta + m'F) c^{R'fTdt} dt;$$

& au lieu de l'équation $(1 + b\mu)x + (a + \mu)y = u$,
 en supposant . . . $1 + b m = i, a + m = n$

$$1 + b m' = l, a + m' = h,$$

on aura . . . $i x + n y = u$

$$l x + h y = u'.$$

De ces deux équations on tire après un calcul fort simple . . .

$$y = \frac{i u' - l u}{i h - l n},$$

$$x = \frac{h u - n u'}{i h - l n}.$$

Donc en substituant pour u , & u' leurs valeurs, on aura

$$x = A c^{-RfTdt} + B c^{-R'fTdt} + E c^{-RfTdt} \int (\theta + mF) c^{RfTdt} dt$$

$e^{RfTdt} dt + Fc^{-RfTdt} \int (\theta + m'F) e^{RfTdt} dt$. Donc en

supposant — $R = f$

— $R' = g$

on a $x = Ac^{ffTdt} + Bc^{gfTdt} + Ec^{ffTdt} \int (\theta + m'F) e^{-ffTdt} dt + Fc^{gfTdt} \int (\theta + m'F) e^{-gfTdt} dt$. On trou-

vera de même $y = A'c^{ffTdt} + B'c^{gfTdt} + E'c^{ffTdt} \int (\theta + m'F) e^{-ffTdt} dt + F'c^{gfTdt} \int (\theta + m'F) e^{-gfTdt} dt$.

CCLXVIII.

Si l'on avoit à intégrer les trois équations suivantes ,

$$dx + (ax + by + cz) dt = 0$$

$$dy + (ex + fy + gz) dt = 0$$

$$dz + (hx + my + nz) dt = 0$$

on trouveroit en suivant les mêmes procédés

$$x = Ac^{ft} + Bc^{gt} + Dc^{ht}$$

$$y = A'c^{ft} + B'c^{gt} + D'c^{ht}$$

$$z = A''c^{ft} + B''c^{gt} + D''c^{ht} ;$$

CCLXIX.

COROLLAIRE GENERAL. Il suit de tout ce que nous venons de dire dans ce Chapitre , que la forme qu'il faut donner aux indéterminées x, y, z , &c. dépend de deux choses , 1°. De la forme de la valeur des a dans l'équation finale. 2°. Du nombre d'équations du premier degré auxquelles le Problème se réduira ; ou ce qui revient au même , des valeurs de u, u', u'' , &c. qui toutes sont , comme on l'a vu , représentées par des équations semblables & de différents coefficients.

II. Partie.

D d

CHAPITRE IX.

Méthode pour trouver les cas d'intégrabilité de quelques équations du second ordre, représentées par la formule (M) $(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)x dx dv+(g+hx^n)v dx^2=0$, dans laquelle dx est constant.

CCLXX.

DAns les Chapitres IX, X & XI de la première Section, nous avons développé comment on trouvoit les cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati & de quelques autres du premier ordre à trois ou quatre termes, qu'on ne peut intégrer généralement par les méthodes connues des Géomètres jusqu'à présent. C'est un travail avantageux aux progrès de l'analyse, que de chercher ainsi des intégrales particulières, lorsque l'art ne nous en donne point de générales. M. Euler l'a pratiqué pour les équations du second ordre représentées par la formule (M) $(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)x dx dv+(g+hx^n)v dx^2=0$, dans laquelle dx est supposé constant.

Quel est l'auteur de cette méthode.

Solution d'un Problème nécessaire pour la suite.

Mais avant d'exposer la méthode dont il se sert, nous allons placer ici la solution d'un Problème dont nous aurons lieu de faire l'application dans ce Chapitre.

CCLXXI.

PROBLEME. Etant donnée l'intégrale particulière d'une différentielle d'un ordre plus élevé que le premier, trouver par son moyen l'intégrale générale & complete de cette équation.

SOLUTION. Soit l'équation $Pddv + Qdx dv + Rv dx^2 = 0$, dans laquelle P, Q & R sont des fonctions de x , qu'on a intégrée pour un cas particulier en faisant $v = X$, c'est-à-dire, une fonction de x . Pour trouver l'intégrale complete, je fais $v = Xz$,

ce qui me donne . . $dv = Xdz + z dX$

$$ddv = zddX + 2dXdz + Xddz.$$

Je substitue ces valeurs dans la proposée ; cette substitution donne la transformée suivante ,

$$\begin{aligned} PzddX + 2PdXdz + PXddz &= 0 \\ + Qz dXdz + QXdxdz \\ + RzXdx^2 \end{aligned}$$

mais X est la valeur qu'il faut substituer à v dans l'équation $Pddv + Qdx dv + Rv dx^2 = 0$; on aura donc $PzddX + Qz dXdz + RzXdx^2 = 0$; donc en effaçant ces termes dans la transformée , il nous reste $2PdXdz + QXdxdz + PXddz = 0$, ou bien $\frac{2dX}{X} + \frac{Qdx}{P} + \frac{ddz}{dz} = 0$. Or P & Q étant des fonctions de x , l'intégrale de cette équation est $2lX + \int \frac{Qdx}{P} + l \frac{dz}{dz} = A$; & en supposant $\int \frac{Qdx}{P} = s$, c le nombre dont le logarithme est l'unité, on aura $2lX + slc + l \frac{dz}{dz} = A$; ou bien $X^2 c' dz$

D d ij

$= A dx$, ou $X^2 dz = A c^{-1} dx$. Donc $z = A \int \frac{c^{-1} dx}{X^2}$;

donc Xz ou $v = AX \int \frac{c^{-1} dx}{X^2}$; équation qui est l'intégrale complete de $P ddv + Q dx dv + R v dx^2 = 0$, en supposant que $v = X$ nous en donne une intégrale particuliere. Je passe maintenant à la méthode de M. Euler.

CCLXXII.

En quoi consiste la méthode.

Cette méthode consiste à transformer l'équation (M) en une serie telle que dans plusieurs cas elle soit finie, & que nous ayons par conséquent pour ces cas l'intégrale de la proposée. Nous ramenerons ensuite cette équation du second degré à une du premier, à laquelle nous donnerons différentes formes pour en déduire un grand nombre d'équations différentielles du premier ordre qui seront intégrables dans les mêmes cas que la formule (M).

On y peut faire usage de deux series différentes.

La formule (M) $(a + bx^n) \cdot x^2 ddv + (c + fx^n) \cdot x dx dv + (g + hx^n) \cdot v dx^2 = 0$ peut se transformer en serie de deux façons différentes.

1°. En supposant $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \&c.$

2°. En supposant $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} + \&c.$ Examinons séparément les deux series que nous donnent ces deux transformées, & les conditions suivant lesquelles ces series seront terminées.

CCLXXIII.

1°. En faisant dans $(a + bx^n)x^2 ddv + (c + fx^n)$ Premiere
Serie.
 $x dx dv + (g + hx^n)v dx^2 = 0$, $v = Ax^m + Bx^{m+n}$
 $+ Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \&c.$ on aura
 $dv = mAx^{m-1}dx + (m+n)Bx^{m+n-1}dx + (m+$
 $2n)Cx^{m+2n-1}dx + (m+3n) \cdot Dx^{m+3n-1}dx +$
 $(m+4n) \cdot Ex^{m+4n-1}dx + \&c.$; & comme dx est
 constant, on aura $ddv = m \cdot (m-1) Ax^{m-2}dx^2 +$
 $(m+n) \cdot (m+n-1) Bx^{m+n-2}dx^2 + (m+2n) \cdot$
 $(m+2n-1) \cdot Cx^{m+2n-2}dx^2 + (m+3n) \cdot (m+$
 $3n-1) \cdot Dx^{m+3n-2}dx^2 + (m+4n) \cdot (m+4n-1) \cdot$
 $Ex^{m+4n-2}dx^2 + \&c.$ Substituant dans l'équation $(a +$
 $bx^n)x^2 ddv + (c + fx^n) \cdot x dx dv + (g + hx^n)x dx^2$
 $= 0$, pour v , dv , ddv , ces valeurs, on aura la trans-
 formée suivante $(N) \{cm + g + am \cdot (m-1)\} Ax^m$
 $dx^2 + \{(cm + cn + g + (m+n) \cdot (m+n-1)a)B$
 $+ (fm + h + bm \cdot (m-1))A\} x^{m+n}dx^2 + \{(fm$
 $+ fn + h + (m+n) \cdot (m+n-1)b)B + (cm + 2cn$
 $+ g + (m+2n) \cdot (m+2n-1)a)C\} x^{m+2n}dx^2 +$
 $\{(fm + 2fn + h + (m+2n) \cdot (m+2n-1)b)C +$
 $(cm + 3cn + g + (m+3n) \cdot (m+3n-1)a)D\}$
 $x^{m+3n}dx^2 + \{(fm + 3fn + h + (m+3n) \cdot (m+$
 $3n-1)b)D + (cm + 4cn + g + (m+4n) \cdot (m+4n$
 $-1)a)E\} x^{m+4n}dx^2 + \{(fm + 4fn + h + (m+$
 $4n) \cdot (m+4n-1)b)E\} x^{m+5n}dx^2 + \&c. = 0.$

J'égale maintenant à zéro les termes homogenes, j'aurai

la valeur déterminée des coefficients A, B, C, D, E , & de l'exposant m . D'abord on a $g + cm + am \cdot (m-1) = 0$; & afin de ne pas tomber dans des quantités affectées de signes radicaux, je regarde m comme un nombre connu, & je m'en sers pour déterminer g . J'aurai donc $g = -cm - am \cdot (m-1)$.

Le second terme nous donne $\{cm + cn + g + (m+n) \cdot (m+n-1)a\} B + \{fm + h + bm \cdot (m-1)\} A = 0$. Je substitue dans cette équation au lieu de g sa valeur, j'aurai $\{cm + cn - cm - am \cdot (m-1) + (m+n) \cdot (m+n-1)a\} B + \{fm + h + bm \cdot (m-1)\} A = 0$, & en effaçant ce qui se détruit, on a

$$B = \frac{-A \cdot [h + fm + bm \cdot (m-1)]}{cn + an \cdot (2m+n-1)}.$$

Faisant les mêmes opérations sur les termes suivans, on

$$\begin{aligned} \text{trouve } C &= \frac{-B \cdot [h + f(m+n) + b(m+n) \cdot (m+n-1)]}{2cn + 2an \cdot (2m+2n-1)} \\ D &= \frac{-C \cdot [h + f(m+2n) + b(m+2n) \cdot (m+2n-1)]}{3cn + 3an \cdot (2m+3n-1)} \\ E &= \frac{-D \cdot [h + f(m+3n) + b(m+3n) \cdot (m+3n-1)]}{4cn + 4an \cdot (2m+4n-1)} \end{aligned}$$

&c.

On voit par là que A fera une quantité constante arbitraire, dont la détermination donnera celle de tous les coefficients suivans. Il est encore évident que les valeurs de ces coefficients étant une fois déterminées, si un seul d'entre eux est égal à zéro, tous les suivans s'évanouiront, en sorte que dans ces cas la valeur de v sera finie, & par conséquent l'équation (M) intégrable.

Supposons, par exemple, que $h + fm + bm \cdot (m-1)$

$\equiv 0$, alors $B=0$, donne $C=0$, $D=0$, $E=0$;
 & par conséquent $v = Ax^m$ & la transformée sera
 $\{m \cdot (m-1) \cdot (a+bx^n) + m \cdot (c+fx^n) + (g+hx^n)\}$
 $Ax^m dx^n \equiv 0$, dont on connoît l'intégrale.

Si $h+f(m+n)+b(m+n) \cdot (m+n-1) = 0$,
 alors on aura $C=0$, & par conséquent $D=0$, $E=0$;
 on aura donc $v = Ax^m + Bx^{m+n}$.

Si $h+f(m+2n)+b(m+2n) \cdot (m+n-1) = 0$,
 alors $D=0$ donne aussi $E=0$, & $v = Ax^m + Bx^{m+n}$
 $+ Cx^{m+2n}$. Donc en général en supposant i un nombre

Equations
 de condition
 suivant les-
 quelles la pre-
 miere Serie
 sera terminée
 & la formule
 (M) intégrale.
 ble.

entier positif ou zéro, l'équation proposée (M) sera inté-
 grable toutes les fois qu'on aura $h+f(m+in)+b$
 $(m+in) \cdot (m+in-1) = 0$, ou $h = -f(m+in)$
 $- b(m+in) \cdot (m+in-1)$.

CCLXXIV.

Il y a cependant des cas dans lesquels cette méthode
 ne nous donneroit point l'intégrale que nous demandons;
 ce sont ceux dans lesquels le dénominateur de nos coeffi-
 cients s'évanouiroit; par exemple, si on avoit $c = -a$.
 $(2m+in+n-1)$.

CCLXXV.

2°. Je suppose maintenant $v = Ax^k + Bx^{k-n} +$
 $Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} + \&c.$ Je fais les mêmes
 calculs que nous venons de faire plus haut: ils me donnent
 les valeurs de v , dv , ddv ; je substitue ces valeurs

Seconde
 Serie.

dans l'équation (M), j'aurai la transformée suivante (P)

$$\{h + fk + bk.(k-1)\} Ax^{k+n} dx^2 + \{g + ck + ak.(k-1)\} A + (h + f(k-n) + b(k-n).(k-n-1)) B\} x^k dx^2 + \{g + (k-n)c + (k-n).(k-n-1)a\} B + (h + (k-2n)f + (k-2n).(k-2n-1)b) C\} x^{k-n} dx^2 + \{g + (k-2n)c + (k-2n).(k-2n-1)a\} C + (h + (k-3n)f + (k-3n).(k-3n-1)b) D\} x^{k-2n} dx^2 + \{g + (k-3n)c + (k-3n).(k-3n-1)a\} D + (h + (k-4n)f + (k-4n).(k-4n-1)b) E\} x^{k-3n} dx^2 + \{g + (k-4n)c + (k-4n).(k-4n-1)a\} Ex^{k-4n} dx^2 + \&c.$$

Maintenant je fais sur cette transformée les mêmes opérations que j'ai faites sur la transformée (N); j'égale à zéro les termes homogenes: j'aurai par ce moyen les valeurs des coefficients A, B, C, D, E , & aussi celle de l'exposant k . Je trouve d'abord

$$h + fk + bk(k-1) = 0$$

& en supposant k connu & déterminé, on a

$$h = -fk - bk.(k-1).$$

Substituant dans les différentes équations des termes homogenes pour h cette valeur, je trouve

$$\begin{aligned} B &= \frac{A.(g + ck + ak.(k-1))}{fn + bn.(2k-n-1)} \\ C &= \frac{B.(g + c(k-n) + a(k-n).(k-n-1))}{2fn + 2bn.(2k-2n-1)} \\ D &= \frac{C.(g + c(k-2n) + a(k-2n).(k-2n-1))}{3fn + 3bn.(2k-3n-1)} \\ E &= \frac{D.(g + c(k-3n) + a(k-3n).(k-3n-1))}{4fn + 4bn.(2k-4n-1)} \\ &\&c. \end{aligned}$$

A

A fera ici comme dans la serie (N) une quantité constante arbitraire, de laquelle dépendra la détermination de tous les autres coefficients; & en général si on suppose dans cette serie (P)

$$g = -c(k-in) - a(k-in).(k-in-1),$$

i étant un nombre entier positif ou zéro, la serie s'arrêtera, & l'on aura l'intégrale de l'équation (M).

Par exemple, si $i=0$, on a B, C, D, E égaux à zéro, & par conséquent $v = Ax^k$; si $i=1$, on aura $v = Ax^k + Bx^{k-n}$, & $C=0, D=0, E=0$; & ainsi de suite.

Cas dans lesquels cette seconde Serie sera terminée & la formule (M) intégrable.

CCLXXVI.

COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire il s'ensuit que l'équation $(a+bx^n)x^a ddv + (c+fx^n)x dx dv + (g+hx^n)v dx^a = 0$, dans laquelle

Réunion de tous les cas d'intégrabilité précédents.

$$g = -cm - am.(m-1)$$

$$\& \dots h = -fk - bk.(k-1)$$

sera intégrable toutes les fois qu'on aura $f(-m-in) = h+b(m+in).(m+in-1)$, ou $c.(-k+in) = g+a(k-in).(k-in-1)$; ou bien en mettant pour h & g leurs valeurs, on trouvera l'équation intégrable, lorsque $f = \frac{[(m+in).(m+in-1) - k.(k-1)]b}{k-m-in} =$ (en faisant la division) $[1-k-m-in]b$; ou lorsque $c = \frac{[(k-in).(k-in-1) - m.(m-1)]a}{m-k+in} = (1-k-m+in)a$.

On a donc deux façons différentes de trouver une infinité de cas dans lesquels la proposée est intégrable; &

II. Partie,

Ec

dans chacun de ces cas on trouvera algébriquement la valeur de v en x , en cherchant celle des coefficients B, C, D, E dont le nombre alors est limité.

CCLXXVII.

SCHOLIE. Il faut bien remarquer que les intégrales trouvées par la méthode précédente ne sont que des cas particuliers des intégrales complètes, que nous a donnés la supposition de quelque constante $= 0$, ou $= \infty$. Mais en suivant la méthode indiquée dans le Problème qui est à la tête de ce Chapitre, on trouvera les intégrales complètes de tous ces cas différents.

CCLXXVIII.

Réduction
de la formule
(M) en une
équation dif-
férentielle du
premier or-
dre.

Nous allons maintenant examiner les équations différentielles du premier degré qui résultent de notre formule (M), équations qu'on intégrera dans les mêmes cas dans lesquels on intègre cette formule.

Soit suivant la méthode exposée dans le Chapitre VI. Sect. II. $v = c^{\int z dx}$, & par conséquent $z = \frac{dv}{v dx}$; on voit bien que connoissant la valeur de v , on aura sur le champ celle de z en x . L'hypothèse précédente nous donne $dv = c^{\int z dx} z dx$; & comme dx est supposé constant, on a $ddv = c^{\int z dx} \cdot (dx dz + z^2 dx^2)$. Substituant ces valeurs dans (M), on a pour transformée $(a + bx^n) \cdot x^2 c^{\int z dx} \cdot (dx dz + z^2 dx^2) + (c + fx^n) \cdot c^{\int z dx} z x dx^2 + (g + hx^n) \cdot c^{\int z dx} dx^2 = 0$; laquelle

devient après les réductions ordinaires (V)

$(a+bx^n) \cdot x^2 dz + (c+fx^n) z x dx + (a+bx^n) \cdot z^2 x^2 dx + (g+hx^n) dx = 0$, équation différentielle du premier degré.

Donc (Art. CCLXXIII.) en y supposant

$$g = -cm - am \cdot (m-1),$$

$$\& \dots \dots h = -fk - bk \cdot (k-1),$$

elle sera intégrable, toutes les fois qu'on aura ou bien $f = \left\{ \frac{(m+in) \cdot (m+in-1) - k \cdot (k-1)}{k-m-in} \right\} b = (1-k-m-in)b$; ou bien $c = \left\{ \frac{(k-in) \cdot (k-in-1) - m \cdot (m-1)}{m-k+in} \right\} a = (1-k-m+in)a$; & de plus après avoir trouvé pour ces cas la valeur de v , on aura celle de z au moyen de l'équation $z = \frac{dv}{v dx}$.

Cas dans lesquels la réduite (V) est intégrable.

CCLXXIX.

SCHOLIE. Mais afin que l'on voie mieux les équations particulières renfermées dans cette équation générale (V), transformons-la dans une autre qui n'ait que trois termes de la forme suivante $Pdz + Qz^2 dx + Rdx = 0$, P, Q & R étant des fonctions de x . Or nous pouvons faire cette transformation de plusieurs manières différentes que nous allons examiner ici séparément.

Transformations de l'équation (V) en d'autres de trois termes.

CCLXXX.

PREMIERE TRANSFORMATION. Soit dans l'équation (V) $z = Ty$, T étant une fonction inconnue de x , on aura

Première transformation.

Ee ij

$dz = ydT + Tdy$; & la transformée sera $(a + bx^n) \cdot yx^s dT + (a + bx^n) \cdot x^s Tdy + (c + fx^n) \cdot Tyx dx + (a + bx^n) y^s T^s x^s dx + (g + hx^n) dx = 0$. Soit maintenant $(c + fx^n) Tyx dx + (a + bx^n) \cdot yx^s dT = 0$, ou en effaçant yx qui est commun aux deux termes $(c + fx^n) \cdot Tdx + (a + bx^n) \cdot x dT = 0$, on a $\frac{(c + fx^n) dx}{(a + bx^n) x} + \frac{dT}{T} = 0$, équation de laquelle il faut tirer la valeur de T .

Pour cela je donne au premier membre la forme suivante $\frac{acx^{-1} dx + afx^{n-1} dx}{aa + abx^n}$; j'y ajoute & j'en retranche

en même temps $\frac{bcx^{n-1} dx}{aa + abx^n}$, j'aurai

$$\frac{acx^{-1} dx + bcx^{n-1} dx + afx^{n-1} dx - bcx^{n-1} dx}{aa + abx^n}, \text{ ou bien } \frac{cdx}{ax}$$

+ $\frac{(af - bc)x^{n-1} dx}{a \cdot (a + bx^n)}$. L'équation entière sera donc $\frac{cdx}{ax} +$

$$\frac{(af - bc)x^{n-1} dx}{a \cdot (a + bx^n)} + \frac{dT}{T} = 0. \text{ Son intégrale est, comme}$$

on le fait, $\frac{c}{a} l x + \frac{(af - bc)}{abn} \cdot l(a + bx^n) + lT = 0$, en supposant la constante $= 0$; donc $lT = \frac{(bc - af)}{abn} l(a + bx^n) - \frac{c}{a} l x$; d'où l'on tire en repassant des

$$\text{logarithmes aux nombres } T = \frac{(a + bx^n)^{\frac{bc - af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}.$$

Par conséquent la supposition qu'on doit faire pour

$$z = Ty, \text{ est celle-ci } z = \frac{(a + bx^n)^{\frac{bc - af}{abn}} y}{x^{\frac{c}{a}}}. \text{ Cette}$$

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. IX. 221

supposition nous donne $dz = \frac{(bc-af)}{a} \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}-1}$
 $yx^{n-\frac{c}{a}-1} dx + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} x^{-\frac{c}{a}} dy - \frac{c}{a} \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{-\frac{c}{a}-1} dx$. Donc en substituant pour z
& dz ces valeurs dans l'équation (V), on aura celle-ci
 $\frac{(bc-af)}{a} \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{n+1-\frac{c}{a}} dx + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} x^{2-\frac{c}{a}} dy - \frac{c}{a} \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}$
 $yx^{1-\frac{c}{a}} dx + (c+fx^n) \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{1-\frac{c}{a}} dx$
 $+ (a+bx^n)^{\frac{2bc-2af}{abn}+1} y^2 x^{2-\frac{2c}{a}} dx + (g+hx^n) dx = 0$.

Pour réduire cette équation, je la divise par la quantité

$(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} x^{2-\frac{c}{a}}$ qui multiplie dy , j'ai $dy -$
 $\frac{cy dx}{ax} - \frac{(af-bc)yx^{n-1} dx}{a \cdot (a+bx^n)} + \frac{(c+fx^n)y dx}{(a+bx^n) \cdot x} + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}$

$$y^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g+hx^n) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0.$$

Maintenant comme $\frac{cy dx}{ax} + \frac{(af-bc)yx^{n-1} dx}{a \cdot (a+bx^n)}$ &
 $\frac{(c+fx^n)y dx}{(a+bx^n) \cdot x}$ sont deux expressions différentes de la même
grandeur, & que dans l'équation précédente elles sont
de signes contraires, elles s'y détruisent. Conséquem-
ment il ne nous reste plus que (A) $dy +$

$$\frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+hx^n) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0;$$

Equation
transformée
(A) qui n'a
plus que trois
termes.

équation intégrable, si $g = -cm - am.(m-1)$

& $h = -fk - bk.(k-1).$

toutes les fois qu'on aura ou bien $f = (1-k-m-in)b,$

ou bien $c = (1-k-m+in)a,$

i représentant un nombre entier quelconque.

Examinons séparément les cas particuliers de cette équation.

CCLXXXL

Equations
particulieres
de trois ter-
mes qu'on
peut tirer de
cette équation.

Supposons 1^o que $bc = af$, l'équation (A) devient

$$(B) \quad dy + y^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g + hx^n) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{a + bx^n} = 0.$$

Soit $x^{\frac{a-c}{c}} = t$, on aura $x = t^{\frac{a}{a-c}}$; $dx = \frac{a}{a-c} t^{\frac{a}{a-c}-1} dt$;

$x^{-\frac{c}{a}} = t^{\frac{-c}{a-c}}$; $x^{\frac{c}{a}-2} = t^{\frac{c-2a}{a-c}}$. Faisant ces substitutions

dans l'équation précédente, on a celle-ci $dy + \frac{a}{a-c} y^2$

$$t^{\frac{a-c}{a-c}-1} dt + \frac{a \cdot (g + ht^{\frac{an}{a-c}}) t^{\frac{c-2a+a}{a-c}-1} dt}{(a-c) \cdot (a + bt^{\frac{an}{a-c}})} = 0; \text{ c'est-}$$

à-dire qu'en réduisant on aura (Y) $dy + \frac{ay^2 dt}{a-c} +$

Première
équation parti-
culière.

$$\frac{a \cdot (g + ht^{\frac{an}{a-c}}) dt}{(a-c) \cdot (a + bt^{\frac{an}{a-c}}) t} = 0. \text{ Donc (Corollaire, Arti-}$$

$$\text{cle CCLXXVI.) cette équation (Y) fera intégrable; si}$$

$g = -cm - am(m-1)$

Dans quels
cas elle est in-
tégrable.

$$\& \dots \dots \dots h = -fk - bk(k-1);$$

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. IX. 223

toutes les fois que . . . $f = (1 - k - m - in) b$,
ou que $c = (1 - k - m + in) a$.
Donc à cause de l'hypothese présente de $bc = af$, qui
donne $f = \frac{bc}{a}$, l'équation (Y) fera intégrable, si

$$g = -cm - am \cdot (m - 1)$$

$$\& \text{ } h = -\frac{b}{a} \{ ck + ak \cdot (k - 1),$$

toutes les fois qu'on aura $c = (1 - k - m - in)$,

ou $c = (1 - k - m + in)$;

c'est-à-dire, toutes les fois qu'on aura $\frac{c + ak + (m - 1)a}{an} =$

$\pm i =$ par conséquent un nombre entier positif ou négatif.

CCLXXXII.

Si de plus $c = 0$, l'équation (Y) devient $dy + y^2 dt$
 $+\frac{(g+ht^n)dt}{(a+bt^n)t^2} = 0$, & en mettant pour g & h leurs
 valeurs trouvées plus haut, on a (Z) $dy + y^2 dt =$
 $\frac{(am \cdot (m-1) + bk \cdot (k-1)t^n)dt}{(a+bt^n)t^2}$; équation intégrable toutes Seconde
équation par-
ticulière.
 les fois qu'on aura $\frac{k+m-1}{n} = \pm i$. Donc si on suppose Dans quels
cas intég-
rable.
 alternativement k , ou $m = 0$, dans le premier cas l'é-
 quation $dy + y^2 dt = \frac{am \cdot (m-1)dt}{(a+bt^n)t^2}$ fera intégrable, toutes
 les fois que $\frac{m-1}{n}$ fera égal à un nombre entier positif ou
 négatif; & si on suppose $m = 0$, l'équation $dy +$
 $y^2 dt = \frac{bk \cdot (k-1)t^n dt}{(a+bt^n)t^2}$ fera intégrable, lorsque $\frac{k-1}{n}$ fera
 égal à un nombre entier positif ou négatif.

CCLXXXIII.

Mais si l'on a $c = a$, alors l'équation (B) devient $dy + \frac{y^2 dx}{x} = - \frac{(g + hx^n) dx}{(a + bx^n) x}$; & en mettant pour g & pour h leurs valeurs, on a (X) $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{(amm + bkkx^n) dx}{(a + bx^n) x}$; équation intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{k+m}{n}$ égal à un nombre entier positif ou négatif. Donc en supposant dans cette dernière équation $k = 0$, on aura la suivante $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{amm dx}{(a + bx^n) x}$; intégrable si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier positif ou négatif; & en y supposant $m = 0$, on aura cette autre équation $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{bkkx^n dx}{a + bx^n}$; intégrable toutes les fois que $\frac{k}{n}$ sera un nombre entier positif ou négatif.

Troisième
équation par-
ticulière.

Dans quels
cas intégrable.

CCLXXXIV.

Reprenons maintenant l'équation (A) $dy + \frac{(a + bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^{\frac{c}{a}} dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g + hx^n) x^{\frac{c}{a}-1} dx}{(a + bx^n)^{\frac{bc-af}{abn} + 1}} = 0$;

& supposons que dans cette équation $c = -a(n-1)$

on aura $x^{\frac{c}{a}} = x^{-n+1}$

$$x^{\frac{c}{a}-1} = x^{-n}$$

$$\frac{bc-af}{abn} = \frac{b-f}{bn} - 1$$

$$\frac{bc-af}{abn} + 1 = \frac{b-f}{bn}$$

Donc

Donc l'équation (A) devient (D) $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} y^2 x^{n-1} dx}{a+bx^n} + \frac{(g+hx^n) dx}{x^{n+1} \cdot (a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}}} = 0.$

Soit dans cette équation (D) $(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} = t,$

on aura . . . $a+bx^n = t^{\frac{bn}{b-f}}$

$$x^n = \frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}$$

$$x = \frac{(t^{\frac{bn}{b-f}} - a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

$$dx = \frac{\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{bn}{b-f}-1} dt}{b-f}$$

Donc en faisant ces substitutions dans l'équation (D) ; on aura la transformée suivante ,

$$dy + \frac{y^2 \cdot \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right) \cdot \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{bn}{b-f}-1} \cdot t dt}{(b-f) t^{\frac{bn}{b-f}} \cdot \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} + \frac{\{g+h\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)\} \cdot \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{bn}{b-f}-1} dt}{(b-f) \cdot \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}+1}}$$

$= 0$; c'est-à-dire, qu'en réduisant on a (E) $dy + \frac{y^2 ds}{b-f}$

Quatrième
équation par-
ticulière.

$$+ \frac{b \cdot (bg - ah + ht^{\frac{bn}{b-f}}) t^{\frac{bn}{b-f}-2} dt}{(b-f) \cdot (t^{\frac{bn}{b-f}} - a)^2} = 0.$$

Dans quels
cas elle est in-
tégrable.

Si donc on suppose dans cette équation $g = -cm$
 $-am \cdot (m-1)$; c'est-à-dire à cause de $c = -a(n-1)$,
 $g = am \cdot (n-1) - am \cdot (m-1) = am \cdot (n-m)$,
 & $h = -fk - bk \cdot (k-1)$, elle sera intégrable, toutes
 les fois qu'on aura $\frac{k+m-n}{n}$ égale à i , c'est-à-dire à un
 nombre entier positif; ou bien encore lorsqu'on aura
 $\frac{f+b(m+k-1)}{bn}$ égal à un nombre entier négatif.

Si l'on a de plus dans l'équation $dy + \frac{y^2 dt}{b-f} + \left\{ b \cdot \right.$
 $abm(n-m) + afk + abk(k-1) - fk - bk \cdot (k-1)$
 $\left. t^{\frac{bn}{b-f}} \right\} \times \frac{t^{\frac{bn}{b-f}-2} dt}{(b-f) \cdot (t^{\frac{bn}{b-f}} - a)^2} = 0$, si l'on a, dis-je,

alors on aura $b-f = bn$
 $\frac{bn}{b-f} = 1$,

& l'équation précédente devient celle-ci $dy + \frac{y^2 dt}{bn} +$
 $\frac{b[am \cdot (n-m) - ak \cdot (n-k) + k \cdot (n-k)t] dt}{nt \cdot (t-a)^2} = 0$, laquelle sera

intégrable dans le cas où $\frac{k+m}{n}$ sera égal à $\pm i$, c'est-à-
 dire à un nombre entier positif ou négatif. De là il suit
 qu'en supposant $k = n$, l'équation $dy + \frac{y^2 dt}{bn} +$
 $\frac{abm \cdot (n-m) dt}{nt \cdot (t-a)^2} = 0$ sera intégrable, si $\frac{m}{n}$ est égal à un
 nombre entier quelconque. Si $m = n$, l'équation $dy +$
 $\frac{y^2 dt}{bn} - \frac{[abk \cdot (n-k) + bk \cdot (n-k)t^2] dt}{nt \cdot (t-a)^2} = 0$ sera intégrable,
 lorsque $\frac{k}{n}$ sera un nombre entier quelconque.

CCLXXXV.

SECONDE TRANSFORMATION. Soit reprise l'équation (V) Seconde transformation pour l'équation (V).
 $(a + bx^n) x^2 dz + (c + fx^n) xz dx + (a + bx^n) z^2 x^2 dx + (g + hx^n) dx = 0$, dans laquelle on suppose

$$g = -cm - am \cdot (m - 1)$$

$$\& \dots h = -fk - bk \cdot (k - 1),$$

& qui est alors intégrable, toutes les fois que

$$f = (1 - k - m - in) b,$$

ou que $c = (1 - k - m + in) a$,

nous la transformerons encore en une équation de trois termes en faisant $z = Ty + S$, T & S représentent des fonctions de x . Cette supposition nous donne

$$dz = Tdy + ydT + dS$$

$$z^2 = T^2y^2 + 2TSy + SS,$$

& pour transformée l'équation suivante (E) $(a + bx^n)$
 $Tx^2dy + (a + bx^n) x^2y dT + (a + bx^n) x^2 dS +$
 $(c + fx^n) Tyx dx + (c + fx^n) Sx dx + (a + bx^n)$
 $T^2y^2x^2dx + 2(a + bx^n) TSyx^2dx + (a + bx^n) S^2x^2dx$
 $+ (g + hx^n) dx = 0$. Maintenant afin de faire évanouir

le terme affecté de y , supposons $(a + bx^n) x dT + 2$
 $(a + bx^n) TSx dx + (c + fx^n) \cdot Tdx = 0$, on aura

$$\frac{dT}{T} + 2Sdx + \frac{(c + fx^n) dx}{(a + bx^n)x} = 0. \text{ Soit } T = x^p, \text{ de telle}$$

forte qu'après avoir divisé par $(a + bx^n) T x^2$, le coefficient de $y dx$ soit une puissance simple de x ; on aura

$$\frac{p dx}{x} + 2Sdx + \frac{(c + fx^n) dx}{(a + bx^n) dx} = 0, \& \text{ par conséquent}$$

Ff ij

$$\begin{aligned}
\frac{p}{x} + 2S + \frac{c+fx^n}{(a+bx^n)x} &= 0 : \text{ donc } S = -\frac{p}{2x} \\
\frac{-c-fx^n}{2x \cdot (a+bx^n)} &= \frac{-ap-c-(f+bp)x^n}{2x \cdot (a+bx^n)} : \text{ donc } dS = \\
&= \frac{(fnx^{n-1} + bnp x^{n-1}) dx \cdot 2x(a+bx^n)}{4x^2 \cdot (a+bx^n)^2} \\
&= \frac{-(2adx + 2b(n+1)x^n dx) \cdot -(c+ap+(f+bp)x^n)}{4x^2 \cdot (a+bx^n)^2} \\
&= (\text{en réduisant}) \\
&= \frac{a(c+ap)dx - a(n+1) \cdot (f+bp)x^n dx + b(f+bp)x^{2n} dx + b(n+1) \cdot (c+ap)x^n dx}{4x^2 \cdot (a+bx^n)^2} \\
\text{substituant dans l'équation (F) pour } T, T^2, S, S^2, dS & \\
\text{leurs valeurs, effaçant le terme que nous y avons supposé} & \\
\text{égal à zéro \& réduisant, on aura } (a+bx^n)x^{p+2}dy & \\
+ (a+bx^n)y^2x^{2p+2}dx + & \\
\frac{2acdx + 2a^2pdx - 2afnx^n dx + 2afx^n dx}{4 \cdot (a+bx^n)} + & \\
\frac{2abpx^n dx + 2bfx^{2n} dx + 2b^2px^{2n} dx}{4 \cdot (a+bx^n)} + & \\
\frac{2bcnx^n dx + 2bcx^n dx + 2abpx^n dx - cc dx}{4 \cdot (a+bx^n)} & \\
- \frac{2cfx^n dx - ffx^{2n} dx + a^2p^2 dx}{4 \cdot (a+bx^n)} + & \\
\frac{2abp^2x^n dx + b^2p^2x^{2n} dx}{4 \cdot (a+bx^n)} + gdx + hx^n dx = 0; & \\
\& \text{ en divisant par } a+bx^n \text{ les termes dont ce binome} & \\
\text{est un diviseur exact, on aura la transformée suivante} & \\
(a+bx^n) \cdot x^{p+2}dy + (a+bx^n)y^2x^{2p+2}dx + & \\
\frac{p \cdot (p+2) \cdot (a+bx^n)dx}{4} + \frac{(c+2g)dx + (f+2h)x^n dx}{2} &
\end{aligned}$$

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. IX. 229

$$-ccdx + 2n(bc - af)x^n dx - 2cfx^n dx - ffx^{2n} dx = 0; \text{ \& en-}$$

fin en divisant par $(a + bx^n)x^{p+2}$, on a l'équation

$$(H) \quad dy + y^2 x^p dx + \frac{p \cdot (p+2) dx}{4x^{p+2}} + \frac{(c+2g)dx + (f+2h)x^n dx}{2x^{p+2} \cdot (a+bx^n)} \quad \begin{array}{l} \text{Equation} \\ \text{transformée} \\ (H). \end{array}$$

$$- \frac{(c+fx^n)^2 dx + 2n(bc - af)x^n dx}{4 \cdot (a+bx^n)^2 x^{p+2}} = 0. \text{ Or cette équation}$$

sera intégrable, dans les cas où g étant $= -cm$ Dans quels cas elle est intégrable.

$-am(m-1)$ & $h = -fk - bk \cdot (k-1)$, on aura

$f = (1 - k - m - in)b$, ou $c = (1 - k - m + in)a$;

c'est-à-dire, toutes les fois que l'une des deux quantités

$\frac{-(k+m-1)b-f}{bn}$, ou $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ sera égale à un nombre entier positif.

CCLXXXVI.

Maintenant faisons 1°. $bc = af$, ou $f = \frac{bc}{a}$, l'équation (H) devient celle-ci $dy + y^2 x^p dx + \frac{p \cdot (p+2) dx}{4x^{p+2}} +$

Equations particulières qu'on peut tirer de la transformée (H).

$$\frac{(ac + 2ag)dx + (bc + 2ah)x^n dx}{2ax^{p+2} \cdot (a+bx^n)} - \frac{(cc + \frac{2bccx^n}{a} + \frac{b^2c^2x^{2n}}{aa})dx}{4x^{p+2} \cdot (a+bx^n)^2}$$

$= 0$; c'est-à-dire, en réduisant $dy + y^2 x^p dx + \frac{p \cdot (p+2) dx}{4x^{p+2}}$

$$+ \frac{(g+hx^n)dx}{x^{p+2} \cdot (a+bx^n)} + \frac{cdx}{2ax^{p+2}} - \frac{ccdx}{4aa x^{p+2}} = 0; \text{ ou bien}$$

en mettant au même dénominateur les deux derniers termes

& retranchant en même temps $\frac{aadx}{4aa x^{p+2}}$, on aura (L)

Première équation particulière.

$$dy + y^2 x^p dx + \frac{(p+2)^2 dx}{4x^{p+2}} - \frac{(a-c)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}} + \frac{(g+hx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}$$

$= 0$. En supposant dans cette équation $g = -cm -$

Quels sont
les cas d'inté-
grabilité.

$am(m-1)$ & $h = -\frac{b}{a} \times ck + ak(k-1)$, elle sera intégrable toutes les fois que $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ sera un nombre entier positif ou négatif. Faisons de plus dans cette équation $c = a$, on aura en mettant pour g & h leurs valeurs, $dy + y^2 x^p dx + \frac{(p+1)^2 dx}{4x^{p+2}} - \frac{(am+m+bkkx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}} = 0$, qui sera intégrable si $\frac{k+m}{n}$ est égal à un nombre entier quelconque.

CCLXXXVII.

2°. Soit dans l'équation (H) $b = 0$, elle se change en celle-ci $dy + y^2 x^p dx + \frac{p(p+2)dx}{4x^{p+2}} + \frac{(2ac+4ag)dx}{4a^2 x^{p+2}} + \frac{(af+2ah)x^n dx}{2a^2 x^{p+2}} - \frac{(cc+2cfx^n+ffx^{2n}+2afnx^n)dx}{4a^2 x^{p+2}} = 0$;

& en retranchant & ajoutant comme plus haut $\frac{dx}{4x^{p+2}}$,

Seconde
équation par-
ticulière.

on a (O) $dy + y^2 x^p dx + \frac{(p+1)^2 a^2 dx}{4a^2 x^{p+2}} - \frac{(a-c)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}} + \frac{4agdx}{4a^2 x^{p+2}} + \frac{(af+2ah-afn-cf)x^n dx}{2a^2 x^{p+2}} - \frac{ffx^{2n} dx}{4a^2 x^{p+2}} = 0$,

Dans quels
cas elle se
peut intégrer.

équation intégrable, si . . $g = -cm - am(m-1)$

& $h = -fk$,

toutes les fois qu'on aura $f = (1-k-m-in)b$, ou $c = (1-k-m+in)a$, c'est-à-dire toutes les fois que $f = 0$, ou que $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ est un nombre entier positif. Dans le cas où $f = 0$, l'équation (O) en y supposant $(p+1)^2 a^2 - (a-c)^2 + 4ag = AA$ devient $dy + A^2 x^{-p-2} dx + y^2 x^p dx = 0$, qui est l'équation de Ricati. Donc (Sect. I. Chap. IX. Art. CXIX.) elle s'inté-

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. IX. 231

grera toutes les fois qu'on aura $-p-2 = \frac{(2h+1) \times -p-4h}{2k+1}$, h représentant un nombre entier positif f en commençant par l'unité, c'est-à-dire, lorsque p sera $= 1$; ce qui est évident, puisqu'alors l'équation devient $x^3 dy + y^2 x^4 dx + a dx = 0$, laquelle est dans le cas de la formule de M. Bernoulli traitée dans le Chapitre VII. Sect. I,

CCLXXXVIII.

Soit dans l'équation (O) $a^2 (p+1)^2 - (a-c)^2 + 4ag = aa^2$, & $af - naf - 2afk - cf = aef$, on aura $g = \frac{aa^2 + (a-c)^2 - a(p+1)^2}{4a}$, & $c = a - na - 2ak - ae$. Donc mettant cette valeur de c dans g , on a $g = \frac{aa + a(n+2k+e)^2}{4} - \frac{a(p+1)^2}{4}$. Après avoir fait ces substitutions, on a (Q) $dy + y^2 x^p dx + \frac{a dx}{4x^{p+2}} + \frac{efx^n dx}{2ax^{p+2}} - \frac{ffx^{2n} dx}{4a^2 x^{p+2}} = 0$. Dans cette équation on doit avoir $g = -cm - am \cdot (m-1)$: mais $c = a - na - 2ak - ae$, & $g = \frac{aa + a(n+2k+e)^2}{4} - \frac{a(p+1)^2}{4}$; donc on aura $g = am \cdot (n+2k+e) - am m$. Donc $4m \times (n+2k+e) = a + (n+2k+e)^2 - (p+1)^2 + 4mm$. Donc $(n+2k+e)^2 - 4m \cdot (n+2k+e) + 4mm = (p+1)^2 - a$. Donc enfin $n+2k+e = nm \pm \sqrt{(p+1)^2 - a}$; & l'équation sera intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{m-n-k-e}{n}$, ou $\frac{-n-e \pm \sqrt{(p+1)^2 - a}}{2n}$ égal à un nombre entier positif.

Troisième équation particulière.

Dans quels cas elle se peut intégrer.

CCLXXXIX.

Soit dans l'équation (Q) $a = 0$ & $e = 0$, elle devient

Quatrième équation particulière. $dy + y^2 x^p dx = \frac{ffx^{2n-p-2} dx}{4aa}$, intégrable toutes les fois qu'on aura $\frac{-n \pm (p+1)}{2n}$ égal à un nombre entier positif.

Ses cas d'intégrabilité.

C'est ce qui est évident par ce que nous avons déjà vu tant de fois dans ce Chapitre, & ce qu'on retrouveroit encore par l'Article CCIX. du Chapitre IX. Sect. I. puisque cette équation est celle de Riccati, qui est par conséquent intégrable dans tous les cas où $m = \frac{(2h+1) - n - 4h}{2h+1}$, h représentant un nombre entier positif. Mettant ici pour m la valeur $2n - p - 2$, & pour n la valeur p , on retrouvera pour l'intégrabilité la même condition que ci-dessus.

CCXC.

Cinquième équation particulière (φ). Soit dans (Q) a seulement $= 0$, on aura (φ) $dy + y^2 x^p dx + \frac{efx^n dx}{2ax^{p+2}} - \frac{ffx^{2n} dx}{4a^2 x^{p+2}} = 0$; équation intégrable,

Ses cas d'intégrabilité.

toutes les fois que $\frac{-n - 6 \pm (p+1)}{2n} = i$, c'est-à-dire un nombre entier positif. On aura donc $-n - 6 \pm (p+1) = 2in$, & par conséquent $6 \pm (p+1) - n \cdot (2i+1)$: de-là il suit que l'équation $dy + y^2 x^p dx = \frac{ffx^{2n-p-2} dx}{4aa} + \frac{fn(2i+1) + f(p+1)x^{n-p-2} dx}{2a^2}$ est toujours intégrable. Si dans cette équation on suppose 1°. $p = 0, n = 2$; 2°. $p = 0, n = 1$; 3°. $p = -1, n = 1$, on aura les équations suivantes qui seront intégrables

Autres équations particulières intégrables qui viennent de l'équation (φ). $dy + y^2 dx = \frac{ffx^2 dx}{4aa} + \frac{f(4i+2+1) dx}{2a^2}$, $dy + y^2 dx = \frac{ff dx}{4aa} + \frac{f(2i+1 \pm 1) dx}{2aa}$, $dy + \frac{y dx}{x} + \frac{ff dx}{4aa} + \frac{f(2i+1) dx}{2a}$.

CCXCI.

CCXCI.

Soit dans l'équation (Q) ϵ seulement $= 0$, on aura l'équation suivante (i) $dy + y^2 x^p dx = \frac{ffx^{2n-p-2} dx}{4aa}$ — $\frac{a dx}{4x^{p+2}}$, laquelle fera intégrable toutes les fois qu'on aura $\frac{n \pm \sqrt{(p+1)^2 - a}}{2n} = i$, c'est-à-dire un nombre entier positif. On aura donc $2in + n = \pm \sqrt{[(p+1)^2 - a]}$; & en élevant au quarré $n^2 (2i+1)^2 = (p+1)^2 - a$. Donc $a = (p+1)^2 - n^2 \cdot (2i+1)^2$. Donc l'équation $dy + y^2 x^p dx = \frac{ffx^{2n-p-2} dx}{4aa} + \frac{[n^2 (2i+1)^2 - (p+1)^2] dx}{4x^{p+2}}$ est toujours intégrable. Donc en supposant $p=0$, $\frac{ff}{4aa} = A$, on aura l'équation $dy + y^2 dx = Ax^{2n-2} dx + \frac{[n^2 \cdot (2i+1)^2 - 1] dx}{4x^2}$ qui est toujours intégrable. Donc en supposant successivement $p=0, n=1$; $p=0, n=2$; $p=0, n=3$, &c. on aura les équations suivantes

$$dy + y^2 dx = A dx + \frac{i(i+1) dx}{xx}$$

$$dy + y^2 dx = Ax^2 dx + \frac{4i \cdot (i+1) dx}{xx}$$

$$dy + y^2 dx = Ax^4 dx + \frac{9i \cdot (i+1) dx}{xx}$$

& une infinité d'autres qui seront intégrables.

Sixieme
équation par-
ticuliere (i).

Ses cas d'in-
tégrabilité.

Autres équations intégrables qui viennent de l'équation (i).

CCXCII.

Je reprends l'équation (Q) $dy + y^2 x^p dx = \frac{(ffx^{2n} - 2a\epsilon f x^n - a^2 \epsilon^2) dx}{4aa x^{p+2}}$, & je suppose $a = -\epsilon^2$, on aura $dy + y^2 x^p dx = (ffx^{2n} - 2a\epsilon f x^n + a^2 \epsilon^2) \frac{dx}{4aa x^{p+2}}$

II. Partie, G g

Septieme
équation par-
ticuliere.

Dans quels cas elle est intégrable. $= \frac{(fx^n - a\epsilon)^2 dx}{4aa x^{p+2}}$; & cette équation sera intégrable, toutes les fois que $-n - \epsilon - \sqrt{(p+1)^2 + \epsilon^2} = 2in$.

Donc alors on aura $2in + n + \epsilon = \pm \sqrt{(p+1)^2 + \epsilon^2}$; & en quarrant les deux membres, on a $4i^2 n^2 + 4in^2 + 4\epsilon in + n^2 + 2\epsilon n + \epsilon\epsilon = (p+1)^2 + \epsilon\epsilon$; donc en réduisant $\epsilon = \frac{(p+1)^2 - n^2(2i+1)^2}{2n \cdot (2i+1)}$. Donc l'équation

$$dy + y^2 x^p dx = \left(\frac{n^2 \cdot (2i+1)^2 - (p+1)^2}{4n \cdot (2i+1)} + \frac{fx^n}{2a} \right) \frac{dx}{x^{p+2}}$$

est toujours intégrable. Donc en donnant successivement à p & à n différentes valeurs, on aura différentes équations intégrables. Soit, par exemple, $p = 0$, on aura l'équation

$$\text{intégrable } dy + y^2 dx = \left(\frac{n^2 \cdot (2i+1)^2 - 1}{4n \cdot (2i+1)} + \frac{fx^n}{2a} \right) \times \frac{dx}{xx}.$$

Si $p = -1$, on aura pour lors $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \left(\frac{n(2i+1)}{4} + \frac{fx^n}{2a} \right) \frac{dx}{x}$ qui est intégrable.

CCXCIII.

Soit dans l'équation (Q) $x^{p+1} = z$,

on aura $x = z^{\frac{1}{p+1}}$

$$x^n = z^{\frac{n}{p+1}}$$

$$x^{p+2} = z^{\frac{p+2}{p+1}}$$

$$dx = \frac{1}{p+1} z^{\frac{-p}{p+1}} dz$$

$$\frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{dz}{(p+1)zs}$$

$$x^p dx = \frac{dz}{p+1}.$$

II. PARTIE. SECT. II. CHAP. IX. 235

Donc la transformée sera $dy + \frac{y^2 dt}{p+1} = \left\{ \frac{n^2 (2i+1)^2 - (p+1)^2}{2n \cdot (2i+1)} \right.$ Huitieme
équation par-
ticuliere inté-
grable.

$$\left. \frac{f t^{\frac{n}{p+1}}}{2a} \right\} \times \frac{dt}{(p+1) t t} ; \text{ ou } (p+1) dy + y^2 dt =$$

$\left\{ \frac{n^2 \cdot (2i+1)^2 - (p+1)^2}{2n \cdot (2i+1)} + \frac{f t^{\frac{n}{p+1}}}{2a} \right\} \times \frac{dt}{t t} ;$ équation qui est intégrable.

CCXCIV.

En suivant cette méthode on trouveroit encore les cas d'intégrabilité d'un grand nombre d'équations différentielles qui ne sont pas intégrables absolument ; la difficulté ne consisteroit que dans la longueur du calcul. Par exemple, si l'on veut chercher les cas d'intégrabilité de l'équation $(a + b x^n + c x^{2n}) x^2 ddv + (f + g x^n + h x^{2n}) x dx dv + (p + q x^n + r x^{2n}) \cdot v dx^2 = 0$, on les trouveroit en faisant $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \&c.$ ou bien $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + \&c.$ On détermineroit les coefficients $A, B, C, D, \&c.$ de la même maniere que nous avons déterminé ceux des Articles CCLXXIII. & CCLXXV.; mais on doit remarquer ici qu'il faut que deux de ces coefficients soient égaux à zéro, pour que les autres s'évanouissent. C'est ce dont il est aisé de se convaincre en mettant dans la proposée pour v, dv, ddv leurs valeurs tirées de l'une des deux series précédentes. Par exemple, si on se sert de la serie premiere, on trouvera qu'afin que $v = Ax^m$ il faut que $p + fm + am(m-1) = 0$, & qu'en même temps $q + gm +$

Application
de la métho-
de précédente
à une formule
différentielle
du second or-
dre plus com-
pliquée que la
formule (M).

G g ij

$bm.(m-1)=0$ & $r+hm+cm(m-1)=0$. Pour que $v = Ax^m + Bx^{m+n}$ il sera nécessaire qu'on ait

$$1^{\circ}. B = A \cdot \{q+gm+bm(m-1)\}$$

$$2^{\circ}. 0 = p+fm+am(m-1)$$

$$3^{\circ}. 0 = r+h(m+n)+c(m+n).(m+n-1)$$

$$4^{\circ}. n^2 \cdot \{h+c(2m+n-1)\} \cdot \{f+a(2m+n-1)\} + \{q+gm+bm.(m-1)\} \cdot \{q+g.(m+n)+b.(m+n).(m+n-1)\} = 0, \text{ \& ainsi de suite.}$$

CHAPITRE X.

Examen de plusieurs équations différentielles du second ordre, intégrables dans les mêmes cas que d'autres équations du même ordre qui ont un terme de moins.

CCXCV.

Application
à une équation
différentielle du
second ordre.

THEOREME. L'Equation différentielle du second ordre $ddu + \xi du dx + u X dx^2 + \zeta dx^2 = 0$ est intégrable dans les mêmes cas dans lesquels on peut intégrer la suivante $ddu + \xi du dx + u X dx^2 = 0$, qui, comme on le voit, a un terme de moins. ξ , X & ζ dans la première équation, ξ & X dans la seconde sont des fonctions de x .

DEMONSTRATION. Je suppose $du + t Q dx = 0$; t & Q étant deux indéterminées; substituant pour du & ddu

leurs valeurs dans la proposée, la divisant ensuite par Qdx & changeant les signes, on aura $dt + \frac{t dQ dx}{Q dx} + t \frac{u X dx}{Q} - \frac{u X dx}{Q} - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$. A cette équation j'ajoute l'équation $\frac{du}{dt} + t Q dx = 0$, j'aurai (A) $du + dt + (tQ + \frac{t dQ}{Q dx} + \frac{u X}{Q} - \frac{\zeta dx}{Q}) \times dx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$. Or cette équation seroit intégrable, si elle se pouvoit ramener à la forme suivante $du + dt + (u + t). P dx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$, P & Q étant des fonctions connues de x . Car en faisant $u + t = r$, $du + dt = dr$, on auroit $dr + r P dx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$; équation réduite à la formule du Chapitre VII. & qui nous donne $r = G e^{-\int P dx} + e^{-\int P dx} \int \frac{\zeta}{Q} e^{\int P dx} dx$. Donc (B) $u = G e^{-\int P dx} + e^{-\int P dx} \int \frac{\zeta}{Q} e^{\int P dx} dx - t$; $du = -G e^{-\int P dx} P dx - e^{-\int P dx} P dx \int \frac{\zeta}{Q} e^{\int P dx} dx + \frac{\zeta}{Q} dx - dt$. Substituant cette valeur dans $du + t Q dx = 0$, on aura une équation réductible encore au cas du Chapitre VII. & qui nous donnera la valeur de t en x . Donc en mettant dans (B) pour t cette valeur, on aura celle de u en x . Donc, dans l'hypothèse précédente, l'équation $ddu + \zeta du dx + u X dx^2 + \zeta dx^2 = 0$ sera intégrée.

Or pour que l'équation (A) se puisse ramener à la suivante $dt + du + (u + t). P dx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$, il faut que $tQ + \frac{t dQ}{Q dx} + \frac{u X}{Q} - \frac{\zeta dx}{Q} = (u + t). P$; ce qui arrivera, si $-\frac{X}{Q} = \zeta + Q + \frac{dQ}{Q dx}$. Car alors on aura $du + dt + \left\{ (\zeta + Q + \frac{dQ}{Q dx}) \times t + (\zeta + Q + \frac{dQ}{Q dx}) u \right\} \times dx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$; & en supposant $\zeta + Q + \frac{dQ}{Q dx} = P$, on

aura $du + dr + (u+r) \cdot P - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$. Mais de l'équation $\xi + Q + \frac{dQ}{Q dx} = -\frac{x}{Q}$ on tire $X dx + \xi Q dx + Q Q dx + dQ = 0$; donc toutes les fois que cette dernière équation sera intégrable, $ddu + \xi du dx + u X dx^2 + \zeta dx^2 = 0$ le fera aussi.

CCXCVI.

Prenons maintenant l'équation $ddu + \xi du dx + u X dx^2 = 0$, & cherchons l'équation de condition d'après laquelle elle seroit intégrable. Je suppose suivant la méthode de M. Euler, exposée dans le Chapitre V. de cette seconde Section, $u = c^{\int y dx}$, dx étant toujours constant, on aura $du = c^{\int y dx} y dx$; $ddu = c^{\int y dx} dy dx + c^{\int y dx} y^2 dx^2$. Donc après les substitutions & réductions on aura la transformée suivante $X dx + y \xi dx + yy dx + dy = 0$. Donc si cette équation est intégrable, l'équation $ddu + \xi du dx + u X dx^2 = 0$ le fera aussi; réciproquement si cette dernière équation est intégrable, la première le fera, c'est-à-dire, qu'on aura la valeur de y en x . Car puisqu'on a par l'hypothèse la valeur de u en x & que $y = \frac{du}{u dx}$, on aura donc la valeur de y dans l'équation $X dx + \xi y dx + yy dx + dy = 0$. Or cette équation est, comme on le voit, la même absolument que la réduite $X dx + Q \xi dx + Q Q dx + dQ = 0$. Donc l'équation $ddu + \xi du dx + u X dx^2 + \zeta dx^2 = 0$ est intégrable dans les mêmes cas que la suivante $ddu + \xi du dx + u X dx^2 = 0$ laquelle a un terme de moins. C. Q. F. D.

Cherchons maintenant quelques cas particuliers d'intégration des équations précédentes.

CCXCVII.

THEOREME. Si dans l'équation $ddu + \xi dxdx + uXd x^2 + \zeta dx^2 = 0$, ξ contient un terme de cette forme $\frac{A}{x}$, il sera toujours possible de faire évanouir ce terme, excepté dans le cas où $A = 1$.

Recherche de quelques cas d'intégration de la formule qui sert d'exemple.

En effet, divisant l'équation par dx , elle devient $\frac{ddu}{dx} + \frac{Adu}{x} + uXd x + \zeta dx = 0$, que l'on peut (Art. CCIII.) mettre sous la forme suivante $d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{Adu}{x} + \&c. = 0$. Or dans cette équation il n'y a plus aucune différentielle constante, puisque $\frac{du}{dx}$ est une quantité finie; je suppose dx variable, & j'aurai $\frac{ddu}{dx} - \frac{duddx}{dx^2} + \frac{Adu}{x} + uXd x + \zeta dx = 0$; ou $ddu - \frac{duddx}{dx} + \frac{Adu dx}{x} + uXd x^2 + \zeta dx^2 = 0$.

Soit maintenant $x = fz^k$ & dz constant, la transformée sera $ddu - \frac{(k-1).dzdu}{z} + \frac{Akdzdu}{z} + \&c. = 0$, ou $ddu - \frac{k dz du}{z} + \frac{dz du}{z} + \frac{Akdzdu}{z} + \&c. = 0$. Supposons $k = \frac{-1}{A-1}$, on aura $ddu + \frac{dz du}{(A-1).z} + \frac{dz du}{z} - \frac{A dz du}{(A-1).z} + \&c. = 0$; ou enfin $ddu + \frac{dz du}{(A-1).z} + \frac{A dz du}{(A-1).z} - \frac{dz du}{(A-1).z} - \frac{A dz du}{(A-1).z} + \&c. = 0$. Donc il est évident que toutes les fois que A ne sera pas $= 1$.

la substitution de $x = fz^{\frac{1}{A-1}}$ fera évanouir le second terme de l'équation qui deviendra pour lors $ddu + B\varphi(z) dz^2$.

$+C\Gamma(z)dz^2=0$, $\varphi(z)$ & $\Gamma(z)$ étant des fonctions différentes de z .

Donc en général si on a $ddu + \frac{Adudx}{x} + uBx^m dx^2 + \zeta dx^2 = 0$, cette différentielle se réduit à l'équation $ddu + uRz^p dz^2 + \zeta' dz^2 = 0$.

Soit $du + tQdz = 0$; en mettant pour ddu sa valeur, divisant l'équation par Qdz & changeant les signes, on aura la transformée suivante $dt + \frac{t dQ dz}{Q dz} - \frac{u Rz^p dz}{Q} - \zeta' dz = 0$. A cette équation j'ajoute celle-ci $du + tQdz = 0$; ce qui me donne $du + dt + (tQ + \frac{t dQ}{Q dz} - \frac{u Rz^p}{Q}) \times dz - \zeta' dz = 0$, équation intégrable dans le cas où $tQ + \frac{t dQ}{Q dz} - \frac{u Rz^p}{Q} = (u+t) \times P$. Cette proposition se démontreroit de la même façon dont nous l'avons démontrée Article CCXCV.

Or pour que $tQ + \frac{t dQ}{Q dz} - \frac{u Rz^p}{Q} = (u+t) \times P$, il faut que $-\frac{Rz^p}{Q} = Q + \frac{dQ}{dz}$. Donc l'équation $ddu + uRz^p dz^2 + \zeta' dz^2 = 0$ s'intégrera dans les mêmes cas que l'équation $Rz^p dz + QQ dz + dQ = 0$, qui est l'équation de Ricati. Nous avons donné les cas d'intégration de cette formule aux Articles CXVIII. & suivants de cette seconde Partie.

CCXCVIII.

THEOREME 2. Si $A=1$, l'équation sera $ddu + \frac{dudx}{x} + uBx^m dx^2 + \zeta dx^2 = 0$; en faisant toujours $du + tQdx = 0$ & suivant les mêmes procédés que dans les Articles précédents,

précédents, l'intégration se réduira à celle de $Bx^m dx + Qx^{-1} dx + QQ dx + dQ = 0$. Soit dans cette équation $Q = rx^{-1}$, la transformée sera $Bx^m dx + \frac{r^2 dx}{xx} + \frac{dr}{x} = 0$; intégrable dans le cas où $m = -2$, puisqu'elle devient alors $Bdx + xdr + rrdx = 0$. On trouvera les autres cas d'intégration de l'équation $Bx^m dx + Qx^{-1} dx + QQ dx + dQ = 0$, en se servant des méthodes employées dans le Chapitre XI. de la première Section de cette seconde Partie.

CCXCIX.

THEOREME 3. Reprenons l'équation de condition de l'Art. CCXCVI. $Xdx + \xi Q dx + QQ dx + dQ = 0$; & faisons dans cette équation $X = Ax^m$ & $\xi = Bx^n$, elle devient $Ax^m dx + BQx^n dx + QQ dx + dQ = 0$, la même que celle dont nous avons trouvé les cas d'intégrabilité dans le Chapitre XI. de la première Section. Soit donc comme dans l'Article CXXVI. $Q = Bx^r + fx^s z^t$, p, r, f, s, t étant des indéterminées prises à volonté, on aura la transformée suivante $Ax^m dx + Bpx^{n+r} dx + Bfz^t x^{n+s} dx + ppx^{2r} dx + 2fpz^t x^{s+r} dx + ffz^{2t} x^{2s} dx + prx^{r-1} dx + fsz^t x^{s-1} dx + ft x^s z^{t-1} dz = 0$; intégrable dans tous les cas où elle se peut réduire à une équation de cette forme $X'z^{t-1} dz + z^t X'' dx + z^{2t} X''' dx = 0$, X', X'', X''' étant des fonctions ou des puissances de x , puisqu'alors c'est le cas de M. Bernoulli, traité dans les Articles xcv. & suivants. La trans-

II. Partie.

H h

formée sera encore intégrable, toutes les fois qu'elle tombera dans les cas intégrables de l'équation de Riccati.

CCC.

RÉMARQUE. En faisant $X = Ax^m + x^{-1}$, l'équation de condition sera $Ax^m dx + x^{-1} dx + BQx^n dx + QQdx + dQ = 0$; dont la transformée ne sera pas, comme il est aisé de le voir, plus compliquée que celle du Théorème précédent. On en trouvera par la même méthode les cas d'intégrabilité.

CCCI.

THEOREME 4. Soit dans l'équation de condition $\xi = 0$ & $X = Ax^m + Bx^n$, elle devient $Ax^m dx + Bx^n dx + QQdx + dQ = 0$, dont on trouvera encore les cas d'intégrabilité en faisant $Q = px' + fx'z'$.

CCCCII.

Autre formule à laquelle s'applique notre méthode.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Dans le Chapitre ix. de cette présente Section, nous avons vu comment on pouvoit dans certains cas intégrer l'équation différentielle $(a + bx^n) \times x^2 ddv + (c + fx^n) \cdot x dx dv + (g + hx^n) \times vx dx^2 = 0$. Il s'ensuit du Théorème premier de ce Chapitre, qu'on pourra dans les mêmes cas intégrer cette équation augmentée d'un terme ξdx , ξ étant une fonction quelconque de x .

CCCIII.

SCHOLIE. Reprenons l'équation $ddu + \xi dndx + uXd x^2 + \zeta dx^2 = 0$, & au lieu de supposer $du + \tau Qdx = 0$, supposons $du - EtQdx = 0$, E étant un coefficient indéterminé ; nous aurons la transformée suivante $EQdt dx + Et dQdx + EtQ\xi dx^2 + uXd x^2 + \zeta dx^2 = 0$. Multipliant cette seconde équation par un coefficient indéterminé v , & la divisant par $EQdx$, on aura $vd\tau + \frac{vdQdx}{Qdx} + v\xi dx + \frac{v u X dx}{EQ} + \frac{v \zeta dx}{EQ} = 0$. J'ajoute à cette équation la suivante $du - EtQdx = 0$, & je les divise par v , j'aurai $\frac{du}{v} + d\tau + \left\{ \frac{\tau dQ}{Qdx} - \frac{EtQ}{v} + \xi\tau + \frac{v u X}{E v Q} \right\} dx + \frac{\zeta dx}{EQ} = 0$; équation intégrable (Art. CCXCV.), si $\frac{\tau dQ}{Qdx} - \frac{EtQ}{v} + \xi\tau + \frac{v u X}{E v Q} = \left(\frac{u}{v} + \tau \right) \times P'$. Or il faut pour cela que $\frac{v X}{EQ} = \frac{dQ}{Qdx} - \frac{EQ}{v} + \xi$; ce qui donne pour nouvelle équation de condition (D) $Xdx - \frac{EQ\xi dx}{v} + \frac{E^2 Q^2 dx}{v^2} - \frac{EdQ}{v} = 0$. Mais il est visible que cette nouvelle supposition ne rend pas la solution fondamentale plus générale, puisque la nouvelle équation de condition (D) & la première $Xdx + Q\xi dx + QQdx + dQ = 0$ reviennent à la même, en mettant dans l'équation (D) Q pour $-\frac{EQ}{v}$.

CCCIV.

COROLLAIRE. En général toute équation $X'dx + \xi'udx + X'u^2 dx + du = 0$ deviendra $Xdx + \xi ydx +$
H h ij

$yydx + dy = 0$ en faisant $X''u = y$; puisque cette supposition nous donne $u = \frac{y}{X''}$, $du = \frac{dy}{X''} - \frac{y dX''}{X''^2}$ & pour transformée $Xdx + \xi ydx + y^2 dx + dy = 0$, X étant $= X'X''$ & $\xi = \frac{\xi'}{X} - \frac{dX''}{X''^2 dx}$.

On peut même changer cette équation en celle-ci $\frac{X'dx}{r} + X'y^2 rdx + dy = 0$, qui dans certains cas pourroit être plus commode. Il faut pour cet effet supposer $u = yr$ & $\frac{dr}{r} + \xi dx = 0$. Car alors la transformée sera $X'dx + yr\xi dx + y^2 r^2 X'dx + rdy + ydr = 0$. Divisons par yr , elle devient $\frac{X'dx}{yr} + \xi dx + X'y rdx + \frac{dy}{y} + \frac{dr}{r} = 0$; & à cause de $\frac{dr}{r} + \xi dx = 0$, $\frac{X'dx}{yr} + X'y rdx + \frac{dy}{y} = 0$; ou enfin $\frac{X'dx}{r} + X'y^2 rdx + dy = 0$.

CCCV.

COROLLAIRE 2. Puisque l'équation $ddu + \frac{du dx}{x} + uXdx^2 + \xi dx^2 = 0$ se réduit (Théorème 2.) à $Xdx + Qx^{-1}dx + QQdx + dQ = 0$, il s'ensuit qu'en faisant $Q = \frac{y}{x}$, elle se réduira à $xXdx + \frac{y^2 dx}{x} + dy = 0$. En effet la transformée sera $Xdx + yx^{-2}dx + y^2 x^{-2}dx + x^{-1}dy - yx^{-2}dx = 0$; c'est-à-dire $Xdx + y^2 x^{-2}dx + x^{-1}dy = 0$; & en multipliant par x , $xXdx + \frac{y^2 dx}{x} + dy = 0$.

CCCVI.

On peut appliquer la méthode expliquée dans ce Chapitre à des équations d'un ordre plus élevé que le second.

Soit, par exemple, l'équation du troisieme ordre d^3u
 $+ \xi ddu dx + X du dx^2 + u \zeta dx^3 + \chi dx^3 = 0$; ξ, X, ζ, χ étant des fonctions de x . En faisant $ddu + Q dt dx$
 $+ t N dx^2 = 0$, Q, t, N étant trois indéterminées, Application
 de la méthode
 à une équation différentielle du troi-
 sieme ordre.
 on trouvera que la proposée est réductible à une équation
 du second degré de cette forme $ddz + R' dz dx - \frac{\chi dx^2}{Q}$
 $= 0$; si $N = X + Q Q - \frac{dQ}{dx} - \xi Q$ & $\zeta + N Q - \frac{dN}{dx} - \xi N = 0$. Car suivant la supposition précédente la
 transformée sera, après les substitutions ordinaires,
 $- Q dx ddt - dQ dt dx - \xi Q dt dx^2 - N dt dx^2 +$
 $X du dx^2 - t dN dx^2 - \xi t N dx^3 + u \zeta dx^3 + \chi dx^3 = 0$.
 Divisant cette équation par $- Q dx$ & y ajoutant l'é-
 quation $ddu + Q dt dx + t N dx^2 = 0$, on aura ddu
 $+ ddt + (\frac{dQ}{Q dx} - Q + \xi + \frac{N}{Q}) \times dt dx - (\frac{X}{Q}) \times du dx$
 $+ (\frac{dN}{dx} + \xi N - N Q) \times \frac{dx^2}{Q} - (\zeta) \frac{dx^2}{Q} - \frac{\chi dx^2}{Q} = 0$.
 Donc si $(F) \frac{dQ}{Q dx} - Q + \xi + \frac{N}{Q} = - \frac{X}{Q}$, & que $\frac{dN}{dx}$
 $+ \xi N - N Q - \zeta = 0$, on aura en supposant l'un &
 l'autre membre de l'équation $(F) = R'$, $ddu + ddt$
 $+ (du + dt) \times R' dx - \frac{\chi dx^2}{Q} = 0$; & enfin en faisant
 $du + dt = dz$, on trouve $ddz + R' dz dx - \frac{\chi dx^2}{Q}$
 $= 0$.

Or en substituant dans l'équation $\frac{dN}{dx} + \xi N - N Q - \zeta = 0$ pour N la valeur tirée de l'équation (F) qui de-
 vient $N = X + Q Q - \frac{dQ}{dx} - \xi Q$, on trouvera une
 équation différentielle du second degré dont Q fera l'in-
 connue qu'il faudra déterminer en x . Donc l'intégration

de l'équation $d'u + \xi d\eta dx + X d\eta dx^2 + u \xi dx^3 + x dx^3 = 0$, se réduit à celle d'une équation différentielle du second ordre.

F I N.





T A B L E

D E S M A T I E R E S

Contenues dans cette Seconde Partie.

<i>AVANT-PROPOS,</i>	<i>Page iiij</i>
<i>Supplément à la Première Partie,</i>	<i>vij</i>

Division générale de cette Seconde Partie,	<i>Page 1</i>
Observation sur l'addition de la constante à l'intégrale trouvée,	<i>2</i>

S E C T I O N P R E M I E R E.

De l'Intégration des Différentielles du premier
ordre qui contiennent deux ou plusieurs
variables.

C H A P I T R E P R E M I E R.

*Des quantités & des équations différentielles qui
s'intègrent sans qu'il soit nécessaire d'en séparer
auparavant les indéterminées & sans aucune
autre préparation.*

§. I. Sur l'intégration des quantités différentielles.

I.	1°. Lorsqu'elles sont des quantités entières,	
II.	2°. Lorsqu'elles sont fractionnaires,	<i>ibid.</i>
IV.	3°. Lorsqu'elles contiennent des binomes, trinomes, &c. élevés à différentes puissances,	
VII.	4°. Lorsque ces quantités renferment des Logarithmes,	<i>4</i> <i>5</i>

§. II. *Sur l'intégration des équations différentielles.*

VIII. Ce que c'est qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque,	6
IX. Ce que c'est que la méthode inverse des tangentes,	7
X. Lemme préparatoire,	<i>ibid.</i>
XI. Exemples,	8

C H A P I T R E I I.

Méthode pour reconnoître quand une différentielle composée de plusieurs variables est la différentielle exacte de quelque quantité, & pour l'intégrer dans ce cas.

Solution d'un Problème nécessaire pour ce qui suit,	10
XV. Solution de ce Problème sur un exemple,	<i>ibid.</i>
XVI. Solution générale du Problème,	12

§. I. *Exposition de la Méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.*

XVII. Théorème fondamental,	<i>ibid.</i>
XVIII. Autre manière de présenter le Théorème précédent,	14
XX. Son application à quelques différentielles,	15
Premier exemple,	<i>ibid.</i>
XXI. Second exemple,	16
XXIII. Application du Théorème aux équations différentielles à deux variables,	<i>ibid.</i>

Manière d'intégrer les quantités $A dx + B dy$ & les équations $A dx + B dy = 0$, lorsqu'elles sont des différentielles exactes.

XXIV. Appliquée 1°. aux différentielles $A dx + B dy$,	17
XXV. Exemple particulier,	<i>ibid.</i>
XXVI. 2°. Application de cette méthode aux équations $A dx + B dy = 0$,	18

§. II. *Application du Théorème fondamental aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.*

XXVIII. Moyen de s'assurer si les équations représentées par $A dx + B dy + C dz = 0$ sont intégrables,	19
XXIX. Exemple,	21
XXX. Intégration des équations complètes à trois variables,	22

XXXI.

DES MATIÈRES.

249

XXXI.	Application à un exemple particulier,	23
XXXII.	Second exemple,	<i>ibid.</i>
XXXIII.	Quand une équation différentielle à trois variables n'est pas complete, on peut quelquefois la rendre telle, en la mul- tipliant par un facteur commun à tous les termes, Il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables qui n'ont point d'intégrales,	25 <i>ibid.</i>
XXXIV.	Première démonstration,	26
XXXV.	Leur différence en cela des équations à deux variables,	27
XXXVI.	Qui expriment toujours une courbe dont la construction est possible,	<i>ibid.</i>
XXXVII.	Seconde démonstration que plusieurs équations différentielles à trois variables ne peuvent avoir aucune construction, Cette démonstration se fait par les surfaces courbes,	28 <i>ibid.</i>
XL.	Manière de trouver le facteur qui peut rendre complete une équation différentielle à trois variables, lorsqu'elle est suc- ceptible d'intégration ou de construction,	31
XLI.	Application du Théorème aux différentielles qui ont 4, 5, &c. variables,	33
XLII.	Procédé pour les équations à 4, 5, &c. variables, Méthode pour s'assurer si elles peuvent devenir completes, lorsqu'elles ne le sont pas, Nombre d'équations à vérifier,	34 <i>ibid.</i> <i>ibid.</i>
XLIII.	Ce nombre peut quelquefois se diminuer. Preuve sur une équation à quatre variables,	35

CHAPITRE III.

*De la construction des équations différentielles dans
lesquelles les indéterminées sont séparées.*

XLVII.	Ce qu'il faut faire avant que de construire l'équation,	38
XLVIII.	Procédé pour faire la construction,	<i>ibid.</i>

CHAPITRE IV.

*De la séparation des indéterminées dans les équa-
tions différentielles par les regles ordinaires de
l'Algebre, ou par de simples transformations.*

LII.	Exemple de cette séparation par les regles ordinaires de l'Algebre, Premier exemple,	41 <i>ibid.</i>
LIII.	Second exemple,	42
LIV.	Troisième exemple,	<i>ibid.</i>
LV.	Exemples de cette même séparation par des transformations,	<i>ibid.</i>
LXII.	Cas plus généraux que les précédents qui s'intègrent de même. Première formule,	46

II. Partie,

Ii

LXIII. Application à un exemple ,	46
LXIV. Seconde formule plus générale ,	47
LXV. Application à un exemple ,	48

CHAPITRE V.

De la séparation des indéterminées dans les équations homogenes.

LXVI. Ce que c'est qu'une équation <i>homogene</i> ,	49
LXVII. Solution générale du Problème ,	<i>ibid.</i>
LXVIII. Application à un exemple ,	50
LXIX. Cette règle s'étend à toutes les équations homogenes , à quelque puissance qu'y soient élevées les dx & les dy ,	<i>ibid.</i>
LXXII. Elle s'étend aussi aux équations homogenes qui contiennent plus de deux variables , en y faisant toutefois quelque changement ,	51
LXXXIII. Exemple général ,	<i>ibid.</i>
LXXXIV. Exemple particulier ,	52

CHAPITRE VI.

Méthode pour rendre homogenes des équations qui ne le sont pas.

LXXXVI. Elles sont au nombre de deux ,	54
LXXXVII. Exemples de la premiere méthode. Premier exemple ,	<i>ibid.</i>
LXXXIX. Second exemple ,	55
LXXX. Troisième exemple ,	<i>ibid.</i>
LXXXII. Exposition de la seconde méthode. Premiere formule pour les équations à trois termes ,	56
LXXXV. Application de la formule à une équation particulière ,	58
LXXXVI. Seconde formule contenant les équations à quatre termes ,	<i>ibid.</i>
LXXXVII. Application de la formule à quelques équations particulieres. Premiere équation ,	60
XC. Cas particulier assez étendu qui se ramene à l'homogénéité. Ce cas est représenté par l'équation $(ax + by + c) \cdot dx + (gx + fy + h) \cdot dy = 0$,	61
XCI. Observations importantes sur l'équation précédente ,	62

CHAPITRE VII.

Sur la construction de l'équation

$$AXy^n dy + By^{n+1} X' dx + Cy^q X'' dx = 0.$$

XCV. Procédé de la méthode ,	66
XCVI. Observations sur la méthode précédente ,	68
XCVIII. Quelle est la généralité de la formule précédente ,	69

DES MATIERES.

259

CHAPITRE VIII.

Des Différentielles qui peuvent se ramener par des transformations à la formule du Chapitre précédent.

CI.	Premiere formule de ces différentielles,	71
CII.	Application à quelques exemples particuliers,	72
CIII.	Seconde formule,	ibid.
CIV.	Application à un exemple,	74
CV.	Troisième formule qui comprend les deux précédentes ;	ibid.
CVI.	Application de cette formule à un exemple,	76
CVII.	Quatrième formule,	ibid.
CVIII.	Application à un exemple,	77
CIX.	Formule précédente généralisée,	ibid.
CX.	Application de la formule à un exemple ;	79
CXII.	Cinquième formule,	80
CXIV.	Son application à un exemple,	81

CHAPITRE IX.

Examen général de tous les cas particuliers d'intégration des équations à trois termes.

CXVI.	Formule des équations à trois termes. Comparée avec celle du Chapitre VI.	82
CXVIII.	Méthode pour trouver les cas dans lesquels on integre l'équation de Ricati ,	84
CXXI.	Méthode pour trouver l'équation algébrique qui répond à cette équation $ax^m dx + by^2 x^n dx = dy$, dans la supposition de $n = 0$.	87

CHAPITRE X.

Recherche générale de l'intégration des équations à quatre termes.

CXXII.	Ces équations sont toutes comprises dans deux formules, Première maniere de chercher les cas d'intégration de ces formules ; en examinant ceux dans lesquels elles peuvent devenir homogenes ,	89
CXXIII.	Nouvelle méthode pour chercher les cas d'intégration des équations à quatre termes. . . Appliquée à la premiere formule,	ibid.
CXXIV.	Application de cette même méthode à la seconde formule,	90

C H A P I T R E X I.

Examen des cas d'intégration de l'équation

$$x^m dx + a dy + byx^n dx + cy^2 dx = 0.$$

CXXVI.	Transformation nécessaire dans le cas présent.... Equation transformée,	94
CXXVII.	Première supposition pour cette équation, Nous fournit trois Théorèmes,	<i>ibid.</i> 95
CXXIX.	Seconde supposition qui donne aussi trois Théorèmes,	97
CXXX.	Troisième supposition... Fournit trois nouveaux Théorèmes,	100
CXXXI.	Autre transformation dont on peut encore se servir, Equation transformée,	101 102
CXXXII.	Première supposition pour cette équation.... Nous donne un Théorème,	<i>ibid.</i>
CXXXIII.	Seconde supposition qui donne aussi un Théorème,	<i>ibid.</i>
CXXXIV.	Dernier cas d'intégration de la formule,	103
CXXXVI.	Recherche des cas d'intégrabilité de deux nouvelles équations à quatre termes,	104
CXXXVII.	Examen de la première,	<i>ibid.</i>
CXXXVIII.	Examen de la seconde équation,	106

C H A P I T R E X I I.

Méthode pour construire les équations différentielles à deux variables, dans lesquelles l'une des deux indéterminées manque.

CXL.	Procédé de la méthode.... Quelle est la substitution qu'elle emploie,	108
	Application de la méthode à quelques exemples,	109

C H A P I T R E X I I I.

Méthode pour intégrer plusieurs équations différentielles dans lesquelles dx & dy sont élevées à différentes puissances.

CXLVI.	Conditions qu'exige cette méthode, Formule des équations auxquelles on la peut appliquer....	112
	Procédé de la méthode appliquée à cette formule,	<i>ibid.</i>
CXLVII.	Le cas des équations homogènes se résout par cette méthode,	113
CXLVIII.	Autre manière plus générale de résoudre le cas des équations homogènes,	<i>ibid.</i>

DES MATIÈRES.

253

CXLIX.	Aussi bien que l'équation du Chapitre VI. Art. xc.	114
CL.	Application à une seconde formule,	<i>ibid.</i>
	Cas d'intégration de cette formule,	115
CLI.	Manière de les trouver,	<i>ibid.</i>
CLII.	Premier cas d'intégration,	116
CLIII.	Second cas d'intégration de la même formule,	<i>ibid.</i>
CLIV.	Troisième cas d'intégration,	117
CLV.	Celui des équations homogènes y est compris,	118
CLVII.	Quatrième & dernier cas d'intégration de la même formule,	119
CLIX.	Recherche des cas d'intégration d'une troisième formule,	<i>ibid.</i>

CHAPITRE XIV.

*Autre méthode pour découvrir quelques équations
intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$.*

CLXIII.	Procédé de cette méthode,	122
CLXIV.	Application de cette méthode,	123
CLXVII.	Premier exemple,	124
CLXVIII.	Second exemple,	125

CHAPITRE XV.

*Méthode pour intégrer quelques équations différen-
tielles par le moyen des coefficients
indéterminés.*

CLXXI.	Cas dans lesquels on peut se servir de cette méthode,	127
CLXXII.	En quoi elle consiste,	128
CLXXIII.	Lemme préparatoire,	<i>ibid.</i>
CLXXV.	Application de la méthode aux cas où l'on a deux équations,	129
CLXXVI.	Observations nécessaires sur la solution précédente,	132
CLXXIX.	Cas dans lequel on peut résoudre autrement le Problème,	134
CLXXXI.	Application de la méthode aux cas où l'on a trois équations,	136
CLXXXIII.	Ce qu'il faut faire si on avoit quatre équations,	138

CHAPITRE XVI.

*Méthode pour déterminer une intégrale par certaines
conditions données de la différentielle.*

CLXXXIV.	Premier exemple,	139
CLXXXV.	Second exemple,	140
CLXXXVI.	Troisième exemple plus compliqué que les deux précédents,	141
CLXXXVIII.	Quatrième exemple qui renferme les trois autres,	143
CLXXXIX.	Examen de quelques cas particuliers,	146

SECTION SECONDE.

De l'Intégration des différentielles à plusieurs variables du second ordre, ou d'un ordre plus élevé.

CXCII. Notions préliminaires,

151

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration de certaines différentielles du second ordre ; dans le cas où l'on fait que telle ou telle différentielle du premier ordre a été traitée comme constante dans le passage des premières différences aux secondes.

CXCVI. Premier exemple,

153

CXCVII. Second exemple,

154

CXCVIII. Troisième exemple,

ibid.

CC. Quatrième exemple,

155

CHAPITRE II.

Méthode pour rendre complètes les équations différentielles de tous les degrés.

CCII. Exposition de cette méthode appliquée à des différentielles du second ordre,

156

CCIII. Autre manière de résoudre ce Problème,

157

CCIV. Application de la méthode aux différentielles du troisième ordre,

158

CCVI. En quoi consiste l'utilité de cette méthode,

159

CCVII. Son application à plusieurs exemples,

ibid.

DES MATIERES. 255

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer dans quelques cas , la différentielle qui , supposée constante , facilitera le plus l'intégration.

CCXII. Son application à quelques exemples, 161

CHAPITRE IV.

Dans lequel on applique aux équations différentielles de tous les ordres la méthode de l'article qui apprend à intégrer ou construire les équations différentielles du premier degré dans lesquelles l'une des indéterminées finies ne se trouve à aucun terme.

CCXVI. Conditions que cette méthode exige , 164

CCXVII. Son application à plusieurs équations du second ordre..... 165

Premier exemple , 165

CCXVIII. Second exemple , ibid.

CCXIX. Autre manière d'intégrer les équations précédentes , 166

CCXX. Appliquée à l'exemple précédent , ibid.

CCXXI. Troisième exemple , 167

CCXXII. Application de la méthode à des équations d'un ordre plus élevé que le second , 168

CCXXIII. 1°. A une équation du troisième ordre , 169

CCXXIV. 2°. A une équation du quatrième , ibid.

CCXXV. Cas particuliers qui se ramènent aux précédents par le choix de la constante , 170

CCXXVI. Autres cas particuliers qui s'y ramènent par de simples substitutions , 171

CHAPITRE V.

Méthode pour transformer un grand nombre d'équations différentielles qui renferment leurs deux indéterminées finies , en d'autres dans lesquelles l'une des deux ne se trouve pas.

CCXXVIII. Fondements de cette méthode , 172

CCXXIX.	Trois cas généraux auxquels elle s'applique,	173
CCXXX.	Examen du premier cas de la méthode,	174
CCXXXIII.	Application de la formule à deux exemples particuliers,	177
CCXXXV.	Seconde partie de la méthode,	178
CCXXXVI.	Application à un exemple,	179
CCXXXVII.	Autre exemple dans lequel l'équation a plus de trois termes,	180
CCXXXVIII.	Troisième partie de la méthode comprend deux cas,	182
CCXXXIX.	Premier cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$.	<i>ibid.</i>
CCXL.	Application de la formule à un exemple,	183
CCXLI.	Second cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$,	184
CCXLII.	Application de cette formule à un exemple,	185

C H A P I T R E V I.

Application de la Méthode du Chapitre XV. de la première Section aux équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

CCXLIV.	Conditions que cette méthode exige,	186
CCXLV.	Procédé de la méthode,	187
CCXLVI.	Son application à des exemples,	<i>ibid.</i>

C H A P I T R E V I I.

Exposition d'une Méthode pour construire ces mêmes

$$\text{équations } \frac{a d^n y}{d x^n} + \frac{b d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \frac{g d^{n-2} y}{d x^{n-2}}, \&c.$$

+ X = 0, en y supposant X = 0.

CCXLIX.	Procédé de cette méthode,	191
CCL.	Examen des différents cas qui peuvent arriver,	192
CCLV.	Application de la méthode à une équation différentielle du second ordre,	195
CCLVI.	Son application à une équation du troisième ordre,	196
CCLVII.	A une équation d'un ordre n quelconque,	<i>ibid.</i>

CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Comparaison de la Méthode exposée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI. Sect. II.

CCLVIII.	Démonstration de la méthode précédente,	197
CCLIX.	Examen des cas différents d'après la méthode du Chap. VI.	199
CCLXIII.	Application à un exemple du cinquième ordre,	202
CCLXV.	Application de la méthode du Chapitre VII. Sect. II. à une formule plus générale que celle qu'on y a traitée,	203
CCLXVI.	Application de la formule à une équation différentielle du second ordre,	204
CCLXVII.	Autres équations traitées par la méthode du Chap. VII. Sect. II.	206

CHAPITRE IX.

Méthode pour trouver les cas d'intégrabilité de quelques équations du second ordre, représentées par la formule $(M)(a+bx^n)x^2dv+(c+fx^n)x dx dv+(g+hx^n)v dx^2=0$, dans laquelle dx est constant.

CCLXX.	Quel est l'auteur de cette méthode,	210
	Solution d'un Problème nécessaire pour la suite,	<i>ibid.</i>
CCLXXII.	En quoi consiste la méthode,	212
	On y peut faire usage de deux séries différentes,	<i>ibid.</i>
CCLXXIII.	Première série,	213
	Equations de condition suivant lesquelles la première série sera terminée & la formule (M) intégrable,	215
CCLXXV.	Seconde série,	<i>ibid.</i>
	Cas dans lesquels cette seconde série sera terminée & la formule (M) intégrable,	217
CCLXXVI.	Réunion de tous les cas d'intégrabilité précédents,	<i>ibid.</i>
CCLXXVIII.	Réduction de la formule (M) en une équation différentielle du premier ordre,	218
	Cas dans lesquels la réduite (V) est intégrable,	219
CCLXXIX.	Transformations de l'équation (V) en d'autres de trois termes,	<i>ibid.</i>

II. Partie.

K k

CCLXXX.	Première transformation ,	<i>ibid.</i>
	Equation transformée qui n'a plus que trois termes ,	221
CCLXXXI.	Equations particulieres de trois termes qu'on peut tirer de cette équation ,	222
	Première équation particuliere . . . Dans quels cas elle est intégrable ,	<i>ibid.</i>
CCLXXXII.	Seconde équation particuliere Dans quels cas intégrable ,	223
CCLXXXIII.	Troisième équation particuliere Dans quels cas intégrable ,	224
	Quatrième équation particuliere Dans quels cas elle est intégrable ,	226
CCLXXXV.	Seconde transformation pour l'équation (∇) ,	227
	Equation transformée (H) Dans quels cas elle est intégrable ,	229
CCLXXXVI.	Equations particulieres qu'on peut tirer de la transformée (H) Première équation particuliere ,	<i>ibid.</i>
	Quels sont ses cas d'intégrabilité ,	230
CCLXXXVII.	Seconde équation particuliere Dans quels cas elle se peut intégrer ,	<i>ibid.</i>
CCLXXXVIII.	Troisième équation particuliere Dans quels cas elle se peut intégrer ,	231
CCLXXXIX.	Quatrième équation particuliere Ses cas d'intégrabilité ,	232
CCXC.	Cinquième équation particuliere (ϕ) Ses cas d'intégrabilité ,	<i>ibid.</i>
	Autres équations particulieres intégrables qui viennent de l'équation (ϕ) ,	<i>ibid.</i>
CCXCI.	Sixième équation particuliere (ξ) Ses cas d'intégrabilité ,	233
	Autres équations intégrables qui viennent de l'équation (ξ) ,	<i>ibid.</i>
CCXCII.	Septième équation particuliere ,	<i>ibid.</i>
	Dans quels cas elle est intégrable ,	234
CCXCIII.	Huitième équation particuliere intégrable ,	235
CCXCIV.	Application de la méthode précédente à une formule différentielle du second ordre plus compliquée que la formule (M) ,	<i>ibid.</i>

C H A P I T R E X.

Examen de plusieurs équations différentielles du second ordre , intégrables dans les mêmes cas que d'autres équations du même ordre qui ont un terme de moins.

CCXCV.	Application à une équation différentielle du second ordre ,	238
--------	---	-----

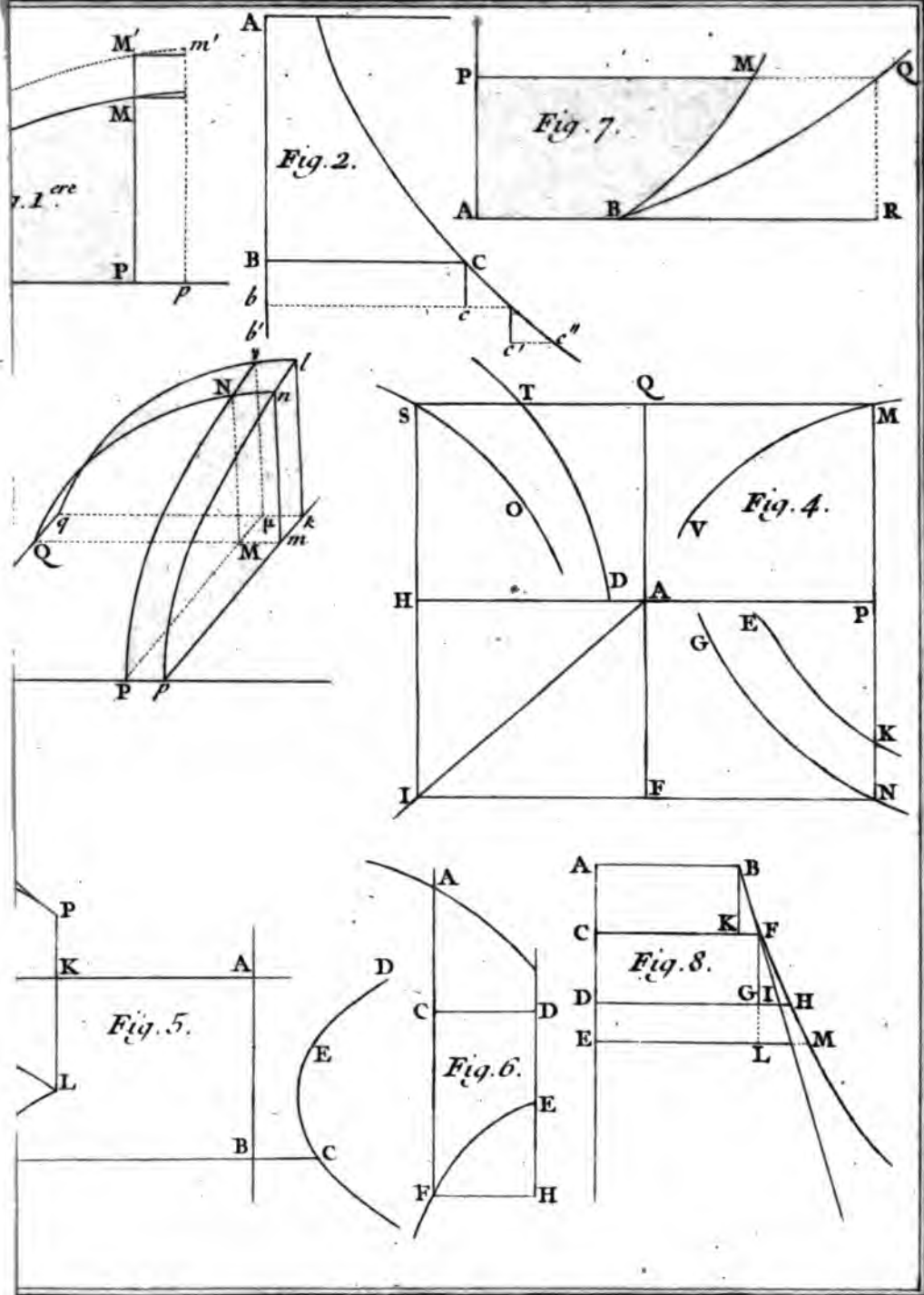
DES MATIERES. 259

CCXCVII.	Recherche de quelques cas d'intégration de la formule qui sert d'exemple ,	239
CCCII.	Autre méthode à laquelle s'applique notre méthode ,	242
CCCVI.	Application de la méthode à une équation différentielle du troisième ordre ,	245

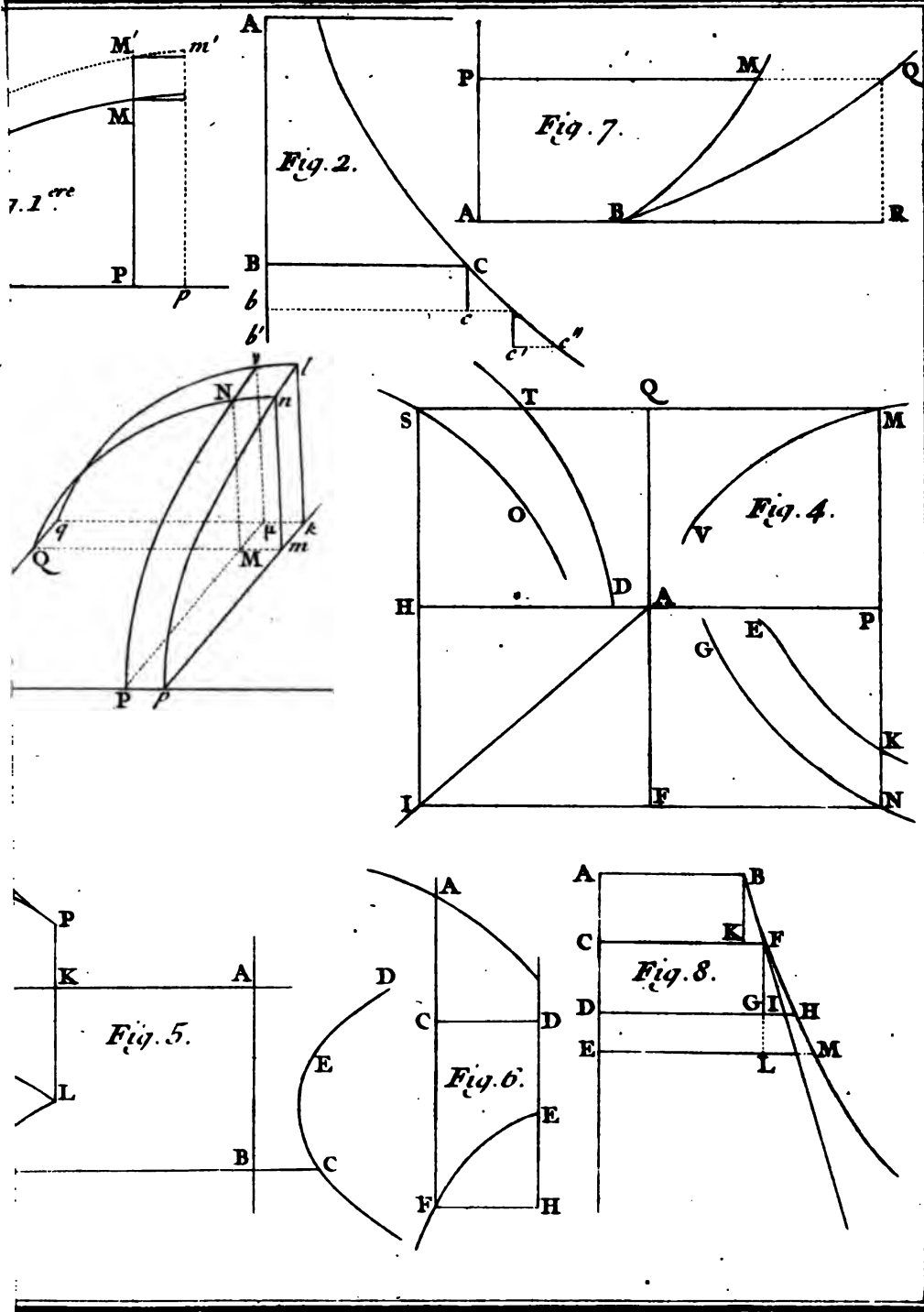
Fin de la Table des Matieres.



Calcul Integral Seconde Partie.



Calcul Integral Seconde Partie.





CATALOGUE
DES
LIVRES DE FOND,
ET D'UNE PARTIE
DES LIVRES D'ASSORTIMENT,

QUI SE TROUVENT A LA LIBRAIRIE MATHÉMATIQUE

DE BACHELIER,

(SUCCESSEUR DE MADAME VEUVE COURCIER,)

Libraire du Bureau des Longitudes de France, de l'École royale polytechnique,
éditeur du *Journal de physique, de chimie et d'histoire naturelle; des Annales
de l'Industrie nationale et étrangère*, 1^{re}. SÉRIE, et du *Recueil industriel*;
Libraire pour les MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, LES ARTS MÉCANIQUES, L'INDUSTRIE,
LA MARINE, LES PONTS ET CHAUSSÉES, les Sciences et les Arts qui en dépendent.

QUAI DES AUGUSTINS, N^o. 55.



PARIS.

JUILLET 1827.

OUVRAGES PUBLIÉS PAR SOUSCRIPTION.

RECUEIL INDUSTRIEL, MANUFACTURIER, agricole et commercial; de la salubrité publique et des beaux-arts; Répertoire général des brevets d'invention; renfermant la description des expositions publiques faites en France et à l'étranger; par J.-G.-V. De Moléon, ancien élève de l'École polytechnique, membre du jury central de l'exposition de 1823, etc.

Le prix de la souscription, pour douze numéros, ou 4 vol., avec 48 planches, est, franc de port, de 30 fr. pour Paris, de 36 fr. pour les départemens, de 42 fr. pour les pays étrangers. On ne reçoit pas de souscription pour moins de douze numéros. Le premier numéro a paru en janvier 1827.

ANNALES DE L'INDUSTRIE NATIONALE ET ÉTRANGÈRE, ou **MERCURE TECHNOLOGIQUE**, recueil de Mémoires sur les Arts et Métiers, les Manufactures, le Commerce, l'Industrie, l'Agriculture, etc., renfermant la description du musée des produits de l'industrie française, exposés au Louvre en 1819. — *Dédiées au Roi*, par L. Seb. LENOIR, Professeur de technologie et des Sciences Physico-Chimiques appliquées aux arts; et J.-G.-V. de Moléon, élève de l'École Polytechnique, membre de la Société d'Encouragement, etc., commencées en 1820 et terminées en 1826 inclusivement, 28 vol. in-8. 210 fr.

Chaque année, composée de 4 vol., se vend séparément. 30 fr.

ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES; Ouvrage périodique, rédigé par M. J.-D. GERGONNE, Professeur de Mathématiques transcendantes, à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Depuis le 1^{er} juillet 1810 ces Annales paraissent régulièrement de mois en mois par livraison de 32 pages in-4^o, au moins, en sorte que les 12 Livraisons de chaque année forment un volume in-4^o de près de 400 pages, accompagné de toutes les planches nécessaires pour l'intelligence du texte.

Le prix de la Souscription annuelle, commençant au 1^{er} juillet de chaque année, est de 21 fr., franc de port pour la France, et de 24 fr. pour l'étranger.

Chaque volume se vend séparément 18 fr.

Cet Ouvrage renferme une grande quantité de Mémoires intéressans sur les Mathématiques et toutes les parties qui en dépendent.

ANNALES MARITIMES ET COLONIALES, contenant ce qui a paru depuis dix ans de plus intéressant sur la Marine et les Colonies, publiées avec l'approbation de S. Exc. le Ministre de la Marine et des Colonies et sous les auspices de S. A. R. l'Amiral de France, par M. BAZOT, Commissaire de Marine, Membre de la Légion d'Honneur, Chef de bureau au Ministère. Prix : 25 fr.

Franc de port pour la France, 31 fr.
pour l'étranger, 37 fr.

Il paraît un cahier par mois.

Il reste encore quelques collections complètes de ce Journal, depuis 1816. Prix de chaque année, 25 fr.

Comme Journal, les Annales Maritimes et Coloniales rendent un compte exact de ce qui est publié en France et chez l'étranger; comme Recueil, elles renferment un grand nombre de Mémoires et de Voyages inédits du plus haut intérêt. La Marine et les Colonies ayant leur régime particulier, une partie de leurs Annales est spécialement consacrée à leur législation et à leur administration militaire, civile et judiciaire. Cette précieuse Collection est composée, aujourd'hui, de 26 vol. in-8., dont plusieurs de 1000 pages, grande justification, avec des planches gravées au Dépôt général de la Marine et d'autres lithographiées.

BULLETIN UNIVERSEL DES SCIENCES ET DE L'INDUSTRIE, dédié aux Savans de tous les pays et à la Librairie nationale et étrangère; publié sous la direction de M. le Baron de FRÉCHET, Officier supérieur au Corps royal d'État-Major, Chevalier de Saint-Louis et de la Légion d'Honneur, Membre de plusieurs Sociétés savantes nationales et étrangères.

Conditions de la Souscription. — Les abonnemens pour le Bulletin universel dans son ensemble, comme pour chacune de ses diverses sections, qu'on peut se procurer séparément, datent de janvier, pour douze volumes ou douze numéros paraissant le 1^{er} de chaque mois. Le prix en est payé d'avance; les lettres de demande et l'argent sont adressés franc de port.

Les prix d'abonnement pour l'année 1827 seront, en conséquence, fixés conformément au tableau suivant des sections du Bulletin.

PRIX D'ABONNEMENT AU BULLETIN UNIVERSEL, etc.

	Paris. fr.	Les dép., port franc. fr. c.	L'étranger, port fr. fr.
1. Sciences mathématiques, physiques et chimiques.	15	17 50	20
2. Sciences naturelles et géologie	26	30 50	35
3. Sciences médicales, etc.	22	25 50	29
4. Sciences agricoles, écon., etc.	15	17 50	20
5. Sciences technologiques	18	21	24
6. Sciences géograph., écon., publ., voyages.	22	25 50	29
7. Sciences hist., antiquités, philol.	18	21	24
8. Sciences militaires.	11	14	16
TOTAUX.	148	172,50	197

Prix des 7 premières sections prises ensemble	120	142 50	165
Prix du Bulletin complet	132	156 50	181

CORRESPONDANCE ASTRONOMIQUE, géographique, hydrographique et statistique, par M. le baron de ZACH. Cet ouvrage paraît depuis le 1^{er} juillet 1818, régulièrement de mois en mois, par cahier de 6 à 7 feuilles d'impression.

Le prix de la souscription annuelle, ou de douze cahiers, est de 36 francs pour Paris. La collection se compose de 14 vol. in-8., du prix de chacun 18 fr.

ENCYCLOPÉDIE PORTATIVE, ou Résumé universel des Sciences, des Lettres et des Arts, par une Société de savans et de gens de lettres, sous la direction de MM. Bailly et de Moléon. Cet ouvrage formera deux séries, chacune composée de 100 volumes grand in-32, de 250 à 300 pages.

Le prix de chaque volume ou livraison est de 3 fr. 50 c. Par la poste, 3 fr. 80 c.

Chaque volume se vend séparément.

La 1^{re} Série traitera des Sciences physiques, des Sciences rationnelles et des Sciences littéraires.

Les 18 premières Livraisons de cette première Série sont en vente.

La 2^e Série traitera des Arts et Métiers, de l'Industrie en général et des Sciences appliquées à l'Industrie et aux Arts.

JOURNAL DE PHYSIQUE, DE CHIMIE, D'HISTOIRE NATURELLE ET DES ARTS, Ouvrage périodique qui paraît tous les mois par cahier de dix feuilles d'impression, avec des pl. en taille-douce; ce qui forme 2 vol. par an, format in-4.; par feu J.-C. DELAMÉTHIE, Professeur au Collège de France, et continué par M. H. DE BLAINVILLE, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, Professeur de Zoologie, d'Anatomie et de Physiologie comparées, à la Faculté des Sciences, suppléant de M. Cuvier au Jardin du Roi et au Collège de France, Membre et Secrétaire de la Société Philomathique, etc. Ce journal a cessé de paraître. Il se termine avec le t. 96.

On trouve à la même adresse des Collections complètes, des volumes et même des numéros séparés.

Le prix de chacun des volumes depuis le tome 50 jusqu'au tome 96 inclusivement est de 20 fr.; ceux antérieurs ne coûtent que 15 fr. Le prix de chaque numéro est de 4 fr.

EXTRAIT DU CATALOGUE

DE BACHELIER, SUCCESSION DE M^{me}. V^o. COURCIER,

Quai des Augustins, n^o. 55, à Paris.

JUILLET 1827.

ALDINI. ESSAI THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTAL SUR LE GALVANISME, 2 vol. in-8. avec 10 planches. 10 fr.

ALLIX, Lieutenant-Général. THÉORIE DE L'UNIVERS, ou de la cause primitive du Mouvement et de ses principaux effets, 2^e. édit., 1 vol. in-8., 1818. 5 fr.

* **AMPERE, de l'Institut. PRÉCIS DES LEÇONS SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL**, données à l'Ecole royale polytechnique, in-4 (1^{re} partie.) 8 fr.

* — Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des AXES PERMANENS de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes, in-4., 1823. 4 fr.

* — Théorie des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience, in-4., 1826, figures. 9 fr.

* — Précis de la théorie des phénomènes électro-dynamiques, in-8., 1824. 2 fr.

* — Description d'un appareil électro-dynamique, in-8., 1826. 1 f. 50 c.

* — Exposé méthodique des phénomènes électro-dynamiques et des lois de ces phénomènes, in-8., 1823. 1 f. 50 c.

* — Mémoire sur une nouvelle expérience électro-dynamique, in-8., 1825. 1 f. 50 c.

* — Précis d'un mémoire sur l'électro-dynamique in-8., 1825. 1 fr.

* — Considérations sur la théorie mathématique du jeu, in-4. 4 fr.

* **ANALYSE DE LA LUMIÈRE** déduite des lois de la mécanique, 1 fort vol. in-8. avec planches, 1826. 9 fr.

ANALYSE de l'origine de tous les cultes, ou religion de Dupuis, in-8. 3 fr.

* **ANNALES DE L'INDUSTRIE nationale et étrangère** de 1820 à 1826, formant 28 vol. in-8. 210 fr.

Chaque année se vend séparément 30 fr.

Voies ci-contre les Annales mensuelles de l'industrie.

* **ANNUAIRE** présenté au Roi par le BUREAU DES LONGITUDES de France, in-18. (Cet ouvrage paraît tous les ans.) 1 fr.

ARAGO et BIOT. RECUEIL D'OBSERVATIONS. (*Voies BIOT.*) 21 fr.

ARITHMÉTIQUE (L') des campagnes, à l'usage des Ecoles primaires, etc., ouvrage adopté par l'Université, in-12. 1 fr.

AVIS aux ouvriers en fer, sur la fabrication de l'acier, in-4., figures. 3 fr.

BABLOT. CALCUL DES PIEDS DE FER, suivant leur épaisseur et largeur, réduit au poids. *Nouv. édit.*, augm. du tarif du poids du FER ROND, à l'usage des serruriers, architectes - toiseurs, qui sont souvent chargés de faire des devis et marchés concernant la serrurerie, à la suite duquel on trouvera des tarifs à tant la livre et à tant le cent, etc., et de plusieurs tables. 1 vol. in-12., 1821. 2 fr. 50 c.

BABRON. PRÉCIS DES PRATIQUES DE L'ART NAVAL EN FRANCE, en Espagne et en Angleterre, etc., in-8., 1817. 6 f. 50 c.

BAILLY. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE ET MODERNE, dans laquelle on a conservé littéralement le texte, en supprimant seulement les calculs abstraits, les notes hypothétiques, les digressions scientifiques, etc.; par V. C., 2 vol. in-8. 10 fr.

* **BARRES DU MOLARD, officier supérieur au corps royal d'artillerie. NOUVEAU système de ponts à grandes portées, ou moyen**

économique de construire des arches de toutes grandeurs, in-4., 1827, figures. 7 fr.

* **BARROIS (Th.). THÉORIE DES BATEAUX AQUAMOTEURS**, propres à remonter les fleuves et à les descendre plus rapidement, par la seule action de leur courant, in-8., 1826, figures. 1 f. 50 c.

BARRUEL, ex-Professeur à l'Ecole Polytechnique. TABLEAUX DE PHYSIQUE, ou Introduction à cette science, à l'usage des Elèves de l'Ecole Polytechnique; nouv. édit., entièrement refondue et augmentée, grand in-4., cart., 1806. 10 fr.

BASTENAIRE - DAUDENART, ancien manufacturier, ex - propriétaire et directeur de la manufacture de porcelaine à fritte de Saint-Amand-les-Eaux. **L'ART DE LA VITRIFICATION, ou TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE, THÉORIQUE ET PRATIQUE DE LA FABRICATION DU VERRE**; ouvrage dans lequel sont décrits avec précision les divers procédés qu'on emploie pour se procurer toutes les espèces de verres et cristaux colorés, tant pour la formation des vases que pour les vitraux et les pierres imitant les pierres précieuses; ainsi que les manipulations relatives à cette branche importante de l'industrie française; suivi d'un Vocabulaire des mots techniques employés dans cet art, et d'un Traité de la dorure sur cristal et sur verre. 1 vol. in-8., avec planch. 1825. 7 fr.

BAUDEUX. Arithmétique universelle, traduite de NEWTON. 2 vol. in-4. 40 fr.

* **BERARD. NOUVELLE MÉTHODE** pour déterminer les racines des équations numériques et les intégrales simples ou indéfinies, in-4., 1818. 6 fr.

* **BERGERON. MANUEL DU TOURNEUR**, ouvrage dans lequel on enseigne aux amateurs la manière d'exécuter sur le tour à pointes, à lunettes, etc., tout ce que l'art peut produire d'utile et d'agréable; précédé de notions élémentaires sur la connaissance des bois, la menuiserie, la fonte des métaux, etc. 2^e. édition, revue et augmentée par Hameelin Bergeron. 2 vol. in-4. et atlas, 1816. 60 fr.

* **BERGERY, Professeur de sciences appliquées à l'école d'artillerie de Metz, GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE À L'INDUSTRIE**, à l'usage des artistes et des ouvriers, in-8., 1825, figures. 5 fr.

* **BERGERY. Exercices d'arithmétique** à l'usage des jeunes ouvriers qui veulent suivre les cours industriels, in-8., 1826. 50 c.

* — **GÉOMÉTRIE DES COURBES**, appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers, in-8., 1825, figures. 4 fr.

BERLINGHIERI. EXAMEN DES OPÉRATIONS ET DES TRAVAUX DE CÉSAR AU SIEGE D'ALEZIA (œuvre posthume). Luques, 1812. 3 fr. 50 c.

BERNOULLI (JACOB). L'ART DE CONJECTURER à la Loterie, traduit du latin, par *Wastel*, in-4. 7 fr. 50 c.

BERTHOUD. 1^o. L'ART DE CONDUIRE ET DE RÉGLER LES PENDULES ET LES MONTRES, 4^e. édit., augmentée d'une planche, et de la manière de tracer la ligne méridienne du temps moyen, 1811, vol. in-12, avec 5 pl. 2 fr. 50 c.

2^o. **HISTOIRE DE LA MESURE DU TEMPS** par les Horloges. Paris, 1802, vol. in-4., avec 23 pl. gravées. 36 fr.

3^o. **TRAITÉ DES HORLOGES MARINES**, contenant la théorie, la construction, la main-d'œuvre de ces machines, et la manière de les éprouver, suivi des éclaircissements sur l'invention, la théorie, la construction et les épreuves des nouvelles machines proposées en France pour la détermination des longitudes en mer par la mesure du temps; un gros volume in-4., avec 27 planches, 1773. 24 fr.

4^o. **ECLAIRCISSEMENTS** sur l'invention, la théorie, la construction et les épreuves des nouvelles machines proposées en France pour la détermination des longitudes en mer par la mesure du temps, servant de suite à l'Essai sur l'Horlogerie et au Traité des Horloges marines, etc., vol. in-4. 6 fr.

5^o. **LES LONGITUDES PAR LA MESURE DU TEMPS**, ou Méthode pour déterminer les longitudes en mer, avec le secours des horloges marines, suivie du Recueil des Tables nécessaires au pilote, pour réduire les observations relatives à la longitude et à la latitude, 1 vol. in-4. 9 fr.

6^o. **DE LA MESURE DU TEMPS**, ou Supplément au Traité des horloges marines et à l'Essai sur l'Horlogerie, contenant les principes de constructions, d'exécution et d'épreuves des petites horloges à longitudes portatives, et l'application des mêmes principes de construction, etc., aux montres de poche, ainsi que plusieurs constructions d'horloges astronomiques, etc., onze pl. en taille douce, 1 vol. in-4. 18 fr.

7^o. **TRAITÉ DES MONTRES À LONGITUDES**, contenant la description et tous les détails de main-d'œuvre de ces machines, leurs dimensions, la manière de les éprouver, etc., suivi 1^o. du Mémoire instructif sur le travail des montres à longitudes; 2^o. de la description de deux Horloges astronomiques; 3^o. de l'Essai sur une Méthode simple de conserver le rapport des poids et des mesures, et d'établir une mesure universelle et perpétuelle, avec sept planches en taille-douce. 12 fr.

8^o. Suite du Traité des Montres à Longitudes, contenant la construction des Montres verticales portatives, et celle des Horloges horizontales, pour servir dans les plus longues traversées, un volume in-4., avec deux planches en taille-douce. *Prix de ces deux Ouvrages, réunis en un volume*, 24 fr.

9^o. Supplément au Traité des Montres à Longitudes, suivi de la Notice des recherches de l'Auteur, depuis 1752 jusqu'en 1807. 12 fr.

Total de cette Collection, 191 fr. 50 c.

* **BERTHEVIN. ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE COMPLÉMENTAIRE**, ou Méthode nouvelle, par laquelle à l'aide des compléments arithmétiques, on exécute toutes les opérations de calcul. Nouvelle édition, in-8., 1826. 5 fr.

BEZOUT. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES À L'USAGE DE LA MARINE, DE L'ARTILLERIE, et des Elèves de l'Ecole Polytechnique, nouvelle édition, revue et augmentée par M. RAYNAUD, Examinateur des Candidats de l'Ecole Polytechnique; et M. de ROSSEL, ancien capitaine de vaisseau, Directeur adjoint du Dépôt général des Cartes, Plans et Archives de la Marine. 6 vol. in-8., avec planches. 31 f. 50.

On vend séparément,

— **ARITHMÉTIQUE** avec des notes fort étendues.

- Jues, et des Tables de Logarithmes jusqu'à 10,000, etc., par REYNAUD, douzième édit., 1826. 3 fr. 50 c.
- Le texte pur se vend séparément, 2 fr.
- Les notes seules, 2 fr. 50 c.
- **GÉOMÉTRIE**, avec des Notes fort étendues, par le même, troisième édit., 1824. 6 fr.
- Le texte pur se vend séparément, 4 fr.
- Les notes seules, 4 fr.
- **ALGÈBRE** et Application de cette science à l'Arithmétique et à la Géométrie, nouvelle édition, avec des notes, par le même; in-8, 1822. 6 fr.
- Le texte pur se vend séparément, 4 fr.
- Les Notes seules, 4 fr.
- **MÉCANIQUE**, nouvelle édition, 2 vol. in-8. 10 fr.
- **TRAITÉ DE NAVIGATION**, nouvelle édition, revue et augmentée de Notes, et d'une Section supplémentaire où l'on donne la manière de faire les Calculs des Observations avec de Nouvelles Tables qui les facilitent; par M. de Rosset, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. 1 vol. in-8., avec 10 pl. 6 fr.
- **NOTES** et additions aux trois premières sections du Traité de navigation; par Ant. Reboul. 3 fr.
- Cours de mathématiques avec des notes et additions, par Peyrard. **GÉOMÉTRIE**, 6^e édition in-8. 7 fr.
- Cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie, 4 vol. grand in-8. (Texte pur.) 24 fr.
- BIOT** et **ARAGO**, Membres de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes de France. **RECUEIL D'OBSERVATIONS GÉODESIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES**, exécutées par ordre du Bureau des Longitudes de France, en Espagne, en France, en Angleterre et en Écosse, pour déterminer la variation de la pesanteur et des degrés terrestres, sur le prolongement du méridien de Paris, faisant suite au troisième volume de la Base du système métrique. 1 vol. in-4, avec fig., 1821. 21 fr.
- BIOT. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE**, destiné à l'enseignement dans les Collèges, etc., 3 vol. in-8., 1810.
- **PHYSIQUE MÉCANIQUE**, par E. G. FISCHER, traduite de l'allemand avec des Notes et un Appendice sur les anneaux colorés, la double refraction et la polarisation de la lumière, 4^e édition, revue et considérablement augmentée, 1 vol. in-8., avec planches. *Sous presse*.
- **ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE**, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, in-8., 7^e édition, 1826. 6 fr. 50 c.
- **TABLES BAROMÉTRIQUES** portatives, donnant les différences de niveau par une simple soustraction, in-8. 1 fr. 50 c.
- * — **Essai sur l'HISTOIRE GÉNÉRALE DES SCIENCES**, pendant la révolution française, in-8. 3 fr.
- Recherches sur l'intégration des équations différentielles, partielles, et sur les vibrations des surfaces. (Extrait des mémoires de l'Institut.) in-4. 4 fr.
- BOISGENETTE. CONSIDÉRATIONS SUR LA MARINE FRANÇAISE** en 1818, et sur les dépenses de ce département, vol. in-8. 1818. 3 fr.
- BONNEFOUX**, capitaine de frégate, etc. **SEANCES NAUTIQUES** ou exposé de diverses manœuvres des vaisseaux, in-8., 1824, figures. 5 fr.
- BORDA. TABLES TRIGONOMÉTRIQUES DÉCIMALES**, ou Tables des Logarithmes des sinus, sécantes et tangentes, suivant la division du quart de cercle en cent degrés, et précédées de la Table des Logarithmes des nombres, etc., calculées par Ch. Borda, rev., augmentées et publiées par J.-B.-J. Delambre. Paris, an IX, in-4. 15 fr.
- BORGNIS**, Ingénieur et membre de plusieurs académies. **TRAITÉ COMPLET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX ARTS**, contenant l'exposition méthodique des théories et des expériences les plus utiles pour diriger le choix, l'invention, la construction et l'emploi de toutes les espèces de machines; ouvrage divisé en dix *Traités* format in-4., avec 249 planches, dessinées par Girard, et gravées par Adam, 1818 à 1823. 206 fr.
- Chaque *Traité* se vend séparément, ainsi qu'il suit: *Excepté les 4 premiers*.
- I. *De la composition des machines*, contenant la classification, la description et l'examen comparatif des organes mécaniques; avec tableaux synoptiques et 43 planches donnant les figures de plus de 1200 organes de machines, 1818. 25 fr.
- II. *Du mouvement des Fardeaux*, contenant la description et l'examen des machines les plus convenables pour transporter et élever toute espèce de fardeaux; volume de 334 pages et 20 planches gravées, 1818. 20 fr.
- III. *Des machines que l'on emploie dans les constructions diverses*, ou Description des Machines dont on fait usage dans les quatre genres d'Architecture, civile, hydraulique, militaire et navale; vol. de 336 pag. avec 26 planches, 1818. 20 fr.
- IV. *Des Machines hydrauliques*, ou Machines employées pour élever l'eau nécessaire aux besoins de la vie, aux usages de l'Agriculture, aux épuisements temporaires et aux épuisements dans les mines, volume in-4., avec 27 pl., 1819. 20 fr.
- V. *Des Machines d'Agriculture*. Ce volume décrit les instruments et machines aratoires, les machines employées à récolter les produits du sol et à leur donner les préparations premières, les moulins et les mécanismes qui servent à épurer le blé et à bluter les farines, et enfin les pressoirs, les cylindres, les pilons et autres machines employées à l'extraction des huiles et du vin, etc.; volume in-4. avec 28 planches, 1819. 21 fr.
- VI. *Des Machines employées dans diverses fabrications*, contenant la description des machines en usage dans les grosses forges et dans les ateliers de métallurgie, dans les papeteries, dans les tanneries, etc.; vol. in-4., avec 27 pl., 1819. 21 fr.
- VII. *Des Machines qui servent à confectionner les étoffes*, contenant la manière de préparer les matières filamenteuses, animales et végétales, l'examen comparatif des moyens mécaniques employés dans les filatures; la description des métiers avec leurs accessoires pour toutes espèces d'étoffes, depuis les plus simples jusqu'aux plus figurées; enfin, la manière de donner aux étoffes les derniers apprêts avant d'être livrées au commerce; vol. in-4., avec 44 pl., 1820. 30 fr.
- VIII. *Des Machines qui imitent ou facilitent les fonctions vitales des corps animés*, suivi d'un appendice sur les machines de théâtres anciens, et sur les procédés en usage dans les théâtres modernes, pour effectuer les changements à vue, les vols directs et obliques et autres effets; vol. in-4., avec 27 pl., 1820. 21 fr.
- IX. **THÉORIE DE LA MÉCANIQUE USUELLE**, ou Introduction à l'étude de la Mécanique appliquée aux arts, contenant les principes de Statique, de Dynamique, d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique applicables aux Arts industriels; la théorie des moteurs, des effets utiles des machines, des organes mécaniques intermédiaires, et l'équilibre des supports, 1 vol. in-4., 1821. 15 fr.
- X. **DICTIONNAIRE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX ARTS**, contenant la définition et la description sommaire des objets les plus importants ou les plus usités qui se rapportent à cette science, avec l'énoncé de leurs propriétés essentielles, suivi d'indications qui facilitent la recherche des détails plus circonstanciés, in-4., 1823. 13 fr.
- BORGNIS. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CONSTRUCTION APPLIQUÉE À L'ARCHITECTURE CIVILE**, contenant les principes qui doivent diriger, 1^o le choix et la préparation des matériaux; 2^o la configuration et les proportions des parties qui constituent les édifices en général; 3^o l'exécution des plans déjà fixés, suivi de nombreuses applications puisées dans les plus célèbres monuments antiques et modernes, etc., in-4., et Atlas de 30 planches, gravées par Adam, 1823. 36 fr.
- BOSSUT. Essai sur l'histoire générale des mathématiques depuis leur origine**, 2 vol. in-8. 10 fr.
- BOUCHARLAT**, Professeur de Mathématiques transcendentes aux Écoles militaires. Docteur des Sciences, etc. **THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES** du second ordre, précédée des principes fondamentaux de la Géométrie analytique; seconde édition in-8. 6 fr.
- **ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL**, 3^e édition, revue et augmentée, in-8., avec planches, 1826. 6 fr.
- **ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE**, in-8., avec planches, 2^e édition, 1827. 6 fr.
- * **BOUE. ESSAI GÉOLOGIQUE SUR L'ÉCOSSE**, in-8., figures. 8 fr.
- BOURDE-DE-VILLEHUCET. LE MANŒUVRIER**, ou Essai sur la Théorie et la Pratique des mouvements du navire et des évolutions navales; nouv. édit., augmentée, 1^o d'un Appendice du même auteur, contenant les principes fondamentaux de l'arrimage des vaisseaux, suivi d'un mémoire sur le même sujet, par Grognard, ingénieur-construteur; 2^o des nouvelles Manœuvres du canon, à bord des vaisseaux du Roi, et du Mode d'exercice pour les officiers et les équipages; 1 fort vol. in-8., gr. pap. carré fin, avec 11 pl., 1814. 6 fr.
- **PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ARRIMAGE des vaisseaux**. (Extrait du *Manœuvrier*), in-8 avec 3 planches. 3 fr.
- BOURDON. Inspecteur de l'Académie de Paris. ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE**, 1 vol. in-8., 4^e édit., 1826, *Ouvrage adopté par l'Université*, 5 fr.
- **ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE**, 4^e édit., considérablement augmentée, 1 fort vol. in-8., 1825, *Ouvrage adopté par l'Université*, 7 fr.
- **APPLICATION DE L'ALGÈBRE À LA GÉOMÉTRIE** à deux et à trois dimensions, 1 fort vol. in-8. avec 15 planches, *Ouvrage adopté par l'Université*, 1825, 7 fr. 50 c.
- Thèse de mécanique, qui a été soutenue le 9 mars 1811 devant la faculté des sciences de Paris, etc., in-4. 3 fr. 50 c.
- * **BRESSON. DES FONDS PUBLICS** français et étrangers, et des Opérations de la Bourse de Paris, ou Recueil contenant, 1^o le détail sur les rentes 3 pour cent, 4 et demi pour cent et 5 pour cent consolidés, sur les Canaux; 2^o des notions exactes sur tous les fonds étrangers; 3^o les diverses manières de spéculer, etc.; 5^e édition, revue et augmentée, conformément aux affaires actuelles de la Bourse, in-12, 1825. 3 fr. 50 c.
- * — **DE LA LIQUIDATION DES MARCHES À TERME** à la Bourse de Paris: ouvrage contenant les détails sur la méthode des compensations, la circulation et l'endossement des noms, les délégations, la balance générale des feuilles de liquidation, les paiements et les livraisons des effets publics, etc., avec un aperçu sur les *fonds publics anglais*, faisant connaître la nature et l'état de rentes 3 pour 100 consolidés, 3 p. 100 réduits, 3 et demi pour 100, nouveaux 4 pour 100, annuités à vie, annuités longues, effets de la Banque, fonds de la Compagnie de la mer du Sud, fonds de la Compagnie des Indes, bons des Indes, billets de l'échiquier, fonds d'amortissement, etc.; suivi de développemens sur le mode de liquidation en usage aux bourses de Londres, d'Amsterdam et de

Francfort, avec des considérations sur l'influence que les marchés à termes en fonds publics doivent exercer sur le crédit en général, et les intérêts commerciaux de chaque pays, in-12, 1846. 2 fr.

BRIANCHON, Capitaine d'artillerie. **APPLICATION DE LA THEORIE DES TRANSVERSALES**. Cours d'opérations géom. sur le terrain, etc., 1818, in-8. 1 fr. 80 c.

— **MÉMOIRE** sur les lignes du second ordre 1817, in-8. 2 fr.

BRISSON. **DICTIONNAIRE RAISONNÉ DE PHYSIQUE**, 6 vol. in-8., et atlas in-4. 36 fr.

— **PESANTEUR SPÉCIFIQUE DES CORPS**, ouvrage utile à l'Histoire naturelle, à la Physique, aux Arts et au Commerce, 1 vol. in-4., avec pl. 15 fr.

BUQUOY. (Comte de) Exposition d'un nouveau Principe général de DYNAMIQUE, dont le principe des Vitesses virtuelles n'est qu'un cas particulier; lu à l'Institut de France le 28 août 1815, in-4. 2 fr.

BUREAU DES LONGITUDES DE FRANCE.

* **OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES** faites à l'observatoire royal de Paris, publiées par le Bureau des Longitudes, tome 1^{er}, in-folio, 1825. 50 fr.

* **TABLES DE JUPITER, DE SATURNE ET D'URANUS**, par M. BOUVARD, in-4, 2^e édition. 12 fr.

* **TABLES DE LA LUNE**, par M. BURCKHARDT, in-4. 8 fr.

* **TABLES DU SOLEIL**, par M. DELAMBRE, et Tables de LA LUNE, par M. BURG, in-4. 18 fr.

* **TABLES ÉCLIPTIQUES DES SATELLITES DE JUPITER**, par M. DELAMBRE, in-4. 10 fr.

* **TABLES DE LA LUNE**, formées par la seule théorie de l'attraction, par M. le baron de DAMOISEAU, in-4. 12 fr.

* **CONNAISSANCE DES TEMPS**, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour les années 1827, 1828 et 1829. Prix de chaque année avec additions 6 fr., sans additions 4 fr.

* **ANNUAIRE** présenté au Roi par le Bureau des Longitudes, in-18. (Cet ouvrage paraît tous les ans.) 1 fr.

BURCKHARDT, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France. **TAB. DES DIVISEURS POUR TOUS LES NOMBRES DU 1^{er}, 2^e ET 3^e MILLION**, avec les nombres premiers qui s'y trouvent; grand in-4., pap. velin, 1817. 36 fr.

Chaque million se vend séparément, savoir : le 1^{er} million, 15 fr. le 2^e, et 3^e chacun 12 fr.

CAGNOLI. **TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE**, traduit de l'italien, par M. Chompré, 2^e édition, in-4., 1808. 18 fr.

— Catalogue de 501 étoiles, suivi de tables relatives d'aberration et de nutation, etc., Modène, 1807, in-4. 6 fr.

CANUS DE MÉZIÈRES. **TRAITÉ SUR LA FORCE DES BOIS** de CHARPENTE, ouvrage essentiel pour ceux qui veulent bâtir, et qui donne les moyens de procurer plus de solidité aux édifices, de connaître la bonne et la mauvaise qualité des Bois, de calculer leur force, etc., in-8. 6 fr.

CANARD, Professeur de Mathématiques transcendentes au Lycée de Moulins. **TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES ÉQUATIONS**, in-8. 1808. 6 fr.

CARNOT, Général, Membre de l'Institut et de la Légion d'Honneur, etc. **DE LA DÉFENSE DES PLACES FORTES**. Ouvrage composé pour l'Instruction des Élèves du Corps du Génie, troisième édition, revue et considérablement augmentée, avec 11 pl. 1 vol. in-4., 1812. 25 fr.

Le même Ouvrage, deuxième édit., sans planch., in-8., 1811. 6 fr.

— **MÉMOIRE SUR LA FORTIFICATION** primitive, pour servir de suite au Traité sur la défense des Places fortes, in-4., fig., 1823. 6 fr.

— **GÉOMÉTRIE DE POSITION**, in-4., papier velin, 1803. 18 fr.

Le même Ouvrage, grand pap. vel. 36 fr.

— **MÉMOIRE SUR LA RELATION** qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un **ESSAI SUR LA THEORIE DES TRANSVERSALES**, in-4., 1806. 5 fr.

— **DE LA CORRELATION DES FIGURES DE GÉOMÉTRIE**, ang. in-8., gr. pap. 3 fr.

— **RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL**, in-8., fig., nouv. édit., revue et augmentée, 1813. 3 fr. 50 c.

— **PRINCIPES DE L'ÉQUILIBRE** et du Mouvement, in-8., 1803. 5 fr.

* **CARNOT**, ancien élève de l'École polytechnique. **RÉFLEXIONS SUR LA PUISSANCE MOTRICE DU FEU**, in-8., 1824. 3 fr.

CHARPENTIER, capitaine au corps royal d'artillerie de marine. **TRAITÉ D'ARTILLERIE NAVALE**, contenant un exposé succinct de la théorie du pendule ballistique et des expériences de Hutton; les principes fondamentaux de l'artillerie navale, etc., traduit de l'anglais de Douglas, in-8., 1826. 7 fr.

CHLADNI. **TRAITÉ D'ACOUSTIQUE**, in-8., avec 8 planches. 7 fr. 50 c.

CHRISTIAN, Directeur du Conservatoire des Arts et Métiers. **TRAITÉ DE MÉCANIQUE INDUSTRIELLE**, ou Exposé de la science de la Mécanique, déduite de l'expérience et de l'observation, à l'usage des manufacturiers et des artistes; 3 vol. in-4 et Atlas de 60 pl. doubles, 1825. 75 fr.

— **DÉS IMPOSITIONS** et de leur influence sur l'industrie agricole, etc., in-8. 2 f. 50 c.

CLAIRAUT. **ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE**, 6^e édit., avec des Notes et des Additions très-étendues, par M. Garnier; précédés d'un Traité d'Arithmétique par Thévenau, et une Instruction sur les nouveaux poids et mesures, 2 vol. in-8., 1801. 10 fr.

— **THEORIE DE LA FIGURE DE LA TERRE**, tirée des principes de l'Hydrostatique, in-8., deux édit., 1808. 10 fr.

CLOUET (J. B.), ex-Professeur de Dessin à l'École des Mines et à celle de la Brigade topographique au Dépôt des fortifications. **NOUVEAU TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE PERSPECTIVE** à l'usage des artistes et des personnes qui s'occupent du Dessin, précédé des premières notions de la Géométrie élémentaire, de la Géométrie descriptive, de l'Optique et de la projection des ombres. 1 vol. in-4., et atlas de 84 pl., dont plusieurs coloriées, 1823. 30 fr.

CONDORCET. **MOYENS FACILES D'APPRENDRE A COMPTER** avec facilité; deux édit., in-12. 1 fr. 25 c.

CORNIBERT. **Manuel du canonier marin**, in-8. 6 fr.

— **TAB. DE PORTÉES DES CANONS** et carronades en usage dans la marine; précédée de l'application des principes théoriques et pratiques de l'artillerie, au tir de ces bouches à feu à bord des vaisseaux de guerre, in-8., figures, 1807. 6 fr.

COTTE. **Tables des articles contenus dans LE JOURNAL DE PHYSIQUE**, in-4. 6 fr.

— **TAB. DES MATIÈRES** contenues dans les Mémoires de l'Académie, pour les années 1781 à 1790, tome X. 15 fr.

COULOMB, Membre de l'Institut de France. **THEORIE DES MACHINES SIMPLES**, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la raideur des cordages. Nouvelle édit., à laquelle on a ajouté les Mémoires suivans du même auteur : sur les frottemens de la pointe des pivots; — Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fil.

de métal; — Résultats de plusieurs expériences destinées à déterminer la quantité d'action que les hommes peuvent fournir par leur travail journalier, suivant les différentes manières dont ils emploient leurs forces; — Observations théoriques et expérimentales sur l'effet des moulins à vent et sur la figure de leurs ailes; — sur les murs de revêtement et l'équilibre des voûtes, etc. vol. in-4., avec 10 pl., 1821. 15 fr.

COULOMB. **RECHERCHES SUR LES MOYENS** d'exécuter sous l'eau toutes sortes de travaux hydrauliques sans employer aucun épuisement, in-8., 3^e édit. 1 fr. 80 c.

COUSIN. **TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL**, 2 vol. in-4., 6 pl. 21 fr.

— **TRAITÉ ÉLÉM. DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE** ou d'ALGÈBRE, in-8. 4 fr.

D'ABREU. **PRINCIPES MATHÉMATIQUES** de J.-A. Chuna, traduit du portugais, in-8. 5 fr.

* **DARCET**. **Mémoire** sur la construction des latrines publiques, et sur l'assainissement des latrines et des fosses d'aisances, in-8., figures, 1822. 1 f. 50 c.

* — **Description** d'un fourneau de cuisine avec 2 planches, 1821. 2 f. 50 c.

* — **MÉMOIRE SUR LES SOUFFLOIRS**, in-8., figures, 1821. 1 f. 50 c.

DAUBUISSON. **MÉMOIRE SUR LES BASALTES DE LA SAXE**, accompagné d'Observations sur l'origine des Basaltes en général, lu à la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut national, an 11, in-8. 2 fr. 50 c.

DAULNOY. **Calcul** des intérêts de toutes les sommes, à tous les taux et pour tous les jours de l'année, etc., in-12. 1 f. 80 c.

DÉCESSART. **DESCRIPTION DES TRAVAUX HYDRAULIQUES**, 2 vol. in-4., 67 pl. 84 fr.

DELAISTRE. **Science** des ingénieurs, divisée en trois livres, où l'on traite des Chemins, des Ponts, des Canaux et des Aqueducs. 2 vol. in-4., et Atlas, 1825. 40 fr.

DELABRE, Secrétaire perpétuel de l'Institut, membre de la Légion d'Honneur, professeur d'astronomie au collège royal de France, etc. **TRAITÉ COMPLET D'ASTRONOMIE THÉORIQUE ET PRATIQUE**, 3 vol. in-4., avec 29 pl., 1814. 60 fr.

— **Abrégé** du même Ouvrage, ou **LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ASTRONOMIE** théorique et pratique données au collège de France. 1 v. in-8., avec 17 pl., 1813. 40 fr.

— **HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE**, 2 vol. in-4., avec 17 pl., 1817. 40 fr.

— **HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE DU MOYEN ÂGE**, 1 vol. in-4., 1819, avec 17 pl. en taille-douce. 25 fr.

— **HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE MODERNE**, 2 vol. in-4., avec 17 pl., 1821. 50 fr.

DELABRE. **HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE DUXVIII^e SIÈCLE**, in-4. 1827. 36 fr.

DELABRE et **LEGENDRE**. **Méthode analytique** pour la DÉTERMINATION D'UN ARC DU MÉRIDIEN, in-4., an 7. 9 fr.

DELAMÉTHIERE, professeur au collège de France, ancien rédacteur du Journal de physique, etc. **CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉTRES ORGANISÉS**, 2 vol. in-8. 12 fr.

— **DE LA PERFECTIBILITÉ ET DE LA DÉGÉNÉRESCENCE DES ÉTRES ORGANISÉS**, formant le tome III des Considérations sur les êtres organisés, 1 vol. in-8. 6 fr.

— **DE LA NATURE DES ÉTRES EXISTANS**, ou Principes de la philosophie naturelle, 1 vol. in-8. 6 fr.

— **LEÇONS DE MINÉRALOGIE** données au collège de France, 2 vol. in-8., 1812. 14 fr.

DELAU. **DÉCOUVERTE DE L'UNITÉ** et généralité de principe, d'idée et d'exposition

- de la science des nombres, son application positive et régulière à l'algèbre, à la géométrie, et surtout à la pratique, aux développemens et à l'extension du précieux système décimal. Calculs théorico-pratiques, 1809. 1 vol. in-8. 3 fr.
- DE LUC. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE GÉOLOGIE**, in-8., 1809. 5 fr.
- Recherches sur les modifications de l'atmosphère. 4 vol. in-8. 20 fr.
- Précis de la philosophie de Bacon et des progrès qu'ont faits les sciences naturelles, 2 vol. in-8. 10 fr.
- DEMONFERRAND**, Professeur de Mathématiques et de Physique au Collège de Versailles. **MANUEL D'ELECTRICITÉ DYNAMIQUE**, ou Traité sur l'action mutuelle des conducteurs électriques et des aimans, et sur la nouvelle théorie du magnétisme, pour faire suite à tous les Traités de Physique élémentaire, in-8., 1823, avec 5 planches. 4 fr.
- DEPRASSE**, professeur de mathématiques à Berlin. **TABLES LOGARITHMIQUES** pour les nombres, les sinus et les tangentes, disposées dans un nouvel ordre, corrigées et précédées d'une Introduction; traduites de l'allemand et accompagnées de notes par *Halma*, 1814, in-18. 1 fr.
- DESTUTT-TRACY. ÉLÉMENTS D'IDÉOLOGIE**, 4 vol. in-8. 22 fr.
- Chaque volume se vend séparément, savoir :
- Idéologie proprement dite, 5 fr.
 - GRAMMAIRE, 5
 - LOGIQUE, 6
 - TRAITÉ DE LA VOLONTÉ, 6
- EVELEY**, professeur de mathématiques, etc. **APPLICATION DE L'ALGÈBRE À LA GÉOMÉTRIE**, in-4, nouvelle édit., 1824, in-4°. 14 fr.
- DIONIS-DU-SÉJOUR. TRAITÉ DES MOUVEMENS APPARENS DES CORPS CÉLESTES**, 2 vol. in-4. 40 fr.
- D'OBENHEIM** voyez **OBNHEIM**.
- DUBOURGUET**, ancien officier de marine, professeur de mathématiques au collège Louis-le-Grand. **TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL**, indépendans de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites; ouvrage mis à la portée des commençans, et où se trouvent plusieurs nouvelles théories et méthodes fort simplifiées, d'intégrations, avec des applications utiles aux progrès des sciences exactes, 2 v. in-8. Paris, 1810 et 1811. 16 fr.
- **TRAITÉ DE LA NAVIGATION**, ouvrage approuvé par l'Institut de France, et mis à la portée de tous les navigateurs, in-4., 1808, avec fig. 20 fr.
- DUBRUNFAUT**, Membre de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale, etc. **TRAITÉ COMPLET DE L'ART DE LA DISTILLATION**, contenant, dans un ordre méthodique, les instructions théoriques et pratiques les plus exactes et les plus nouvelles sur la préparation des liqueurs alcooliques avec les raisins, les grains, les pommes de terre, les féculs et tous les végétaux sucrés ou farineux, 2 vol. in-8., fig., 1824. 10 fr. 50 c.
- **ART DE FABRIQUER LE SUCRE DE BETTERAVES**, contenant : 1°. la description des meilleures méthodes usitées pour la culture et la conservation de cette racine; 2°. l'exposition détaillée des procédés et appareils utiles pour en extraire le sucre avec de grands avantages. Suivi d'un essai d'analyse chimique de la betterave, propre à éclairer la théorie des opérations qui ont pour objet d'en séparer la matière sucrée; 1 vol. in-8., avec pl., 1825. 7 fr. 50 c.
- DU COUEDIC. LA RUCHE PYRAMIDALE**, méthode simple et naturelle pour rendre perpétuelles les peuplades d'abeilles, et obtenir de chaque peuplade, à chaque automne, la récolte d'un panier plein de cire et de miel, sans mouches, sans couvains, outre plusieurs essais, avec l'art de rétablir et d'utiliser, au retour de l'été, les ruches des essaims dont les peuplades auraient péri en automne, dans l'hiver ou au printemps, en faisant éclore les œufs restés dans les alvéoles; et l'Art de convertir le miel en sucre blanc inodore, de faire l'hydromel, des sirops, etc., ouvrage utile aux habitans des campagnes; deux. édit., considérablement augmentée, et ornée d'une gravure, 1 vol. in-8., 1813. 3 fr.
- DUCREST. VUES NOUVELLES SUR LES COURANS D'EAU**, la navigation intérieure et la marine, 1 vol. in-8., 1803. 5 fr.
- DUFOR. ESSAI DE GÉOLOGIE**, in-8. 1 fr.
- * — **DUFOR, de Genève. GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE**, avec ses applications à la recherche des ombres, in-8. et atlas in-4., 1827. 6 fr.
- DUFRENOY, ingénieur des mines**. Voyez page 12.
- * **DULEAU**, ingénieur des ponts et chaussées, Essai théorique et expérimental sur la RESISTANCE DU FER FORGE, in-4., figures. 8 fr.
- DUMAS (l'abbé)**. Nouvelles méthodes pour résoudre les équations d'un degré supérieur, in-8., 1815. 2 f. 50 c.
- DUPAIN NOUVEAU TRAITÉ DE TRIGONOMETRIE rectiligne**, in-8. 6 fr.
- **LA PRATIQUE DU DESSIN** dans l'architecture bourgeoise, in-8. figures. 3 fr.
- * **DUPIN (C.)**, membre de l'Institut. **VOYAGES DANS LA GRANDE-BRETAGNE** entrepris relativement aux services publics de la guerre, de la marine et des ponts et chaussées, en 1816, 1817, 1818, 1819, 1820 et 1821, présentant le tableau des institutions et des établissemens qui se rapportent à
- I. la Force militaire;
 - II. la Force navale;
 - III. aux Travaux civils des ports de commerce, des routes, des ponts et des canaux;
- 2°. SECTION.
- IV. Force productive.
- Chaque partie se vend séparément.
- I°. partie. **FORCE MILITAIRE**, 2 vol. in-4. et atlas 2°. édit., 1825. 25 fr.
 - II°. partie. **FORCE NAVALE**, 2 vol. in-4. et atlas 2°. édit., 1825. 25 fr.
 - III°. partie. **FORCE COMMERCIALE**, 1°. SECTION, 2°. édit. **TRAVAUX CIVILS DES PONTS ET CHAUSSÉES**, 2 vol. in-4., et atlas, 1824. 27 fr.
- IV. partie. **FORCE COMMERCIALE EXTÉRIEURE**, 2°. SECTION, paraîtra dans le courant de 1827.
- * — **FORCES COMMERCIALES ET PRODUCTIVES DE LA FRANCE**, 2 vol. in-4., avec deux grandes cartes, 1827. 25 fr.
- * — **SITUATION PROGRESSIVE DES FORCES DE LA FRANCE** depuis 1814, in-4., 1827.
- * — **GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE DES ARTS ET DES BEAUX-ARTS**. Cours NORMAL à l'usage des ouvriers et des artistes, des sous-chefs et des chefs d'ateliers et de manufactures, professé au Conservatoire royal des Arts et Métiers par l'auteur; 3 vol. in-8. 18 fr. et 24 fr. franc de port.
- 1°. volume. **GÉOMÉTRIE**, ou des Formes nécessaires à l'Industrie. 6 fr.
 - 2°. volume. **MACHINES ÉLÉMENTAIRES** nécessaires à l'Industrie. 6 fr.
 - 3°. volume. **FORCES MOTRICES** nécessaires à l'Industrie. 6 fr.
- Chaque leçon se vend séparément 40 c. et 50 franc de port.
- * — **DISCOURS ET LEÇONS SUR L'INDUSTRIE**, le Commerce, la Marine, et sur les Sciences appliquées aux Arts, 2 vol. in-8., 1825. 10 f. 50 c.
- **DÉVELOPPEMENS DE GÉOMÉTRIE** 1 vol. in-4°. 1813. 15 fr.
- **APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE ET DE MÉCANIQUE À LA MARINE**, aux Ponts et Chaussées, etc. in-4., 1822. 15 fr.
- **ESSAI HISTORIQUE** sur les services et les travaux scientifiques de G. Monge, etc., in-8., 1819. 4 fr. 50 c.
- **Le même**, in-4 avec portrait parfaitement ressemblant. 7 fr. 50 c.
- DUPIN. ESSAIS SUR DÉMOSTHÈNES** et sur son éloquence, contenant une traduction des Harangues pour Olympe, avec le texte en regard; des considérations sur les beautés des pensées et du style de l'Orateur athénien, in-8., 1814. 4 fr.
- **LETTRE À MILADY MORGAN**, sur Shakespeare, in-8., 1818. 2 fr. 50 c.
- * — **SYSTÈME** de l'administration britannique en 1822, considérée sous les rapports des finances, de l'industrie, du commerce et de la navigation, d'après un exposé ministériel, in-8., 1822. 3 fr.
- * — **OBSERVATIONS** sur la puissance de l'Angleterre et sur celle de la Russie au sujet du parallèle établi par M. De Pradt entre ces puissances, deuxième édition, in-8., 1824. 1 fr. 50 c.
- * — **PROGRÈS DES SCIENCES ET DES ARTS** de la marine française depuis la paix. in-8., 1820. 1 f. 25 c.
- * — **TABLEAU DES ARTS ET MÉTIERS** et des beaux-arts, pour servir d'introduction à son Cours de géométrie et de mécanique appliquées aux arts professés dans les villes de France, in-8., 1826. 2 fr.
- * — **EFFETS DE L'ENSEIGNEMENT** populaire de la lecture, de l'écriture, de l'arithmétique, de la géométrie et de la mécanique appliquée aux arts, in-8., 1826. 1 fr.
- * — **Rapport fait à l'Institut de France**, sur les avantages, les inconvéniens et les dangers des machines à vapeur, in-8., 1825 1 f. 25 c.
- * — **Du rétablissement de l'Académie de marine**, in-8., 1815. 1 f. 50 c.
- * — **Considérations sur les avantages de l'industrie et des machines en France et en Angleterre**, in-8., 1825. 1 f. 25 c.
- * — **Inauguration de l'amphithéâtre du Conservatoire des arts et métiers**, in-8., 1821. 1 f. 50 c.
- * — **Influence du commerce sur le savoir**, sur la civilisation des peuples anciens et sur leur force navale, in-8., 1822. 1 f. 25 c.
- * — **Du commerce et de ses travaux publics en France et en Angleterre**, in-8., 1823. 1 f. 50 c.
- * — **Tableau de l'architecture navale** au dix-huitième siècle, in-4. 1 f. 80 c.
- * — **AVANTAGES SOCIAUX** d'un enseignement public appliqué à l'industrie, in-8., 1821. 1 f. 25 c.
- * — **Progrès de l'industrie française**, depuis le commencement du dix-neuvième siècle. in-8., 1824. 1 f. 50 c.
- * — **INTRODUCTION** d'un nouveau cours de mécanique, appliquées aux arts, à l'usage des ouvriers, etc. Discours prononcé le 11 novembre 1824, in-8. 1 f. 50 c.
- * — **Second Discours** sur la géométrie et la mécanique, appliquées aux arts; prononcé le 24 décembre 1824, in-8. 1 f. 50 c.
- * — **Discours prononcé le 26 mars 1825** au Conservatoire des arts et métiers, pour la clôture du cours. in-8. 1 f. 50 c.
- DUPUIS. MÉMOIRE EXPLICATIF DU ZODIAQUE** chronologique et mythologique, ouvrage contenant le tableau comparatif des maisons de la lune chez les différens peuples de l'Orient, et celui des plus anciennes observations qui s'ylient, d'après les Égyptiens, les Chinois, les Perses, les Arabes, les Chalcéens, etc., in-4., 1806. 7 fr.
- DUTENS**. Analyse raisonnée des PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ECONOMIE POLITIQUE, in-8., 1814. 3 fr.
- DUVILLARD**. Recherches SUR LES RENTES ET LES EMPRUNTS, in-4. 10 fr.
- **Analyse et tableau DE L'INFLUENCE DE LA PETITE VÉROLE** sur la mortalité à chaque âge, et de celle d'un préservatif, tel que la vaccine peut avoir sur la population et la longévité, in-4., 1806. 10 fr.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

* **JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**, par MM. Lagrange, Laplace, Monge, Pruney, Fourcroy, Berthollet, Vanquelin, Lacroix, Hachette, Poisson, Séguin, Gay-

ton-Morveau, Barruel, Legendre, Haüy, Malus.
La Collection jusqu'à la fin 1823, contient 19
Cahiers in-4, avec des planches. 120 fr.
Chaque Cahier séparé se vend 6 fr.
Excepté le 9^e, qui coûte 15 fr.
Les 17^e et 19^e, qui coûtent chacun 9 fr.
Et le 18^e. 7 fr. 50 c.

Correspondance de l'École Polytechnique,
par M. Hachette, 3 vol. in-8. (Rare.)
Lp n^o 3 du tome 3^e, se vend séparément 4 f.

* ÉPURES À L'USAGE DE L'ÉCOLE
ROYALE POLYTECHNIQUE, contenant
102 planches gravées in-fol., (sans texte),
sur la géométrie descriptive, la charpente,
la coupe des pierres, la perspective et les
ombres. Prix en feuilles, 24 fr.

* COLLECTION D'ÉPURES DE TOPO-
GRAPHIE À LUMIÈRE OBLIQUE (an-
cien système), 15 pl. in-folio sans texte. 7 fr.

* COLLECTION D'ÉPURES DE TOPOGRA-
PHIE À LUMIÈRE DIRECTE (nouveau
système), 13 planches in-folio sans texte. 7 fr.

* — RELATIVES À LA FORTIFICATION
DES PLACES ET DE CAMPAGNE,
56 planches in-folio sans texte. 15 fr.

ÉCOLE DE LA MINIATURE, ou l'Art
d'apprendre à peindre sans maître, nouvelle
édition revue, corrigée et augmentée, 1 vol.
in-12, fig. 1816. 3 fr.

ÉLIE DE BEAUMONT. (*Voyez Dufrénoy*).

EUCLIDE. ŒUVRES EN GREC, LATIN
ET FRANÇAIS, d'après un manuscrit très-
ancien, qui était resté inconnu jusqu'à nos
jours; par Peyrard, traducteur des Œuvres
d'Archimède, ouvrage approuvé par l'Acadé-
mie des sciences; 3 vol. in-4., 1814, 1817
et 1818. 90 fr.

Les mêmes, papier vélin. 120 fr.

Les mêmes, tirées sur papier grand-raisin fin, 120 fr.

Les mêmes, sur papier grand-raisin vélin. 180 fr.

Il ne reste plus que quelques exemplaires de
ces trois derniers papiers.

EULER. ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE, nouvelle
édit., 1807, 2 vol. in-8. 12 fr.

— LETTRES à une Princesse d'Alle-
magne, sur divers sujets de PHYSIQUE
ET DE PHILOSOPHIE. Nouv. édit., con-
forme à l'édition originale de Saint-Péters-
bourg, revue et augmentée de l'ÉLOGE
D'EULER par Condorcet, et de diverses
Notes par M. Labezy, docteur des Sciences de
l'Université, Instituteur à l'École Polytech-
nique, etc., 2 forts vol. in-8. de 1150 pag.,
imprimés en caractère neuf et sur papier
carré fin avec le portrait de l'auteur, 1812,
broch. 15 fr.

EVANS (OLIVER). MANUEL DE L'INGÉ-
NIEUR-MÉCANICIEN, Constructeur de
machines à vapeur, traduit de l'anglais par
Doolittle, in-8., avec 7 pl., 2^e édit., 1825.
5 fr.

EXERCICES et Manœuvres du canon à bord
des vaisseaux du Roi, et Règlement sur le
mode d'exercice des officiers et des équipa-
ges; nouvelle édition, augmentée de Nou-
velles Manœuvres des deux bords, et de
plusieurs Tables de Pointage, extraites de
Charueux, par un officier de marine (Wil-
laumez); 1 vol. in-8., 1815. 2 fr.

FATIO. Tables d'INTERÊTS SIMPLES et
composés, suivies de celles de Buffon et de
Bailey sur la mortalité dans les différents
âges, in-folio. 18 fr.

FAVIER, Ingénieur en chef des Ponts et
Chaussées. EXAMEN DES CONDITIONS
DU MODE D'ADJUDICATION DES TRAV-
AUX PUBLICS, suivi de Considérations
sur l'emploi de ce mode et de celui de régie,
1^{re} in-8., 1824. 2 fr.

FISCHER, Membre honoraire de l'Académie
des Sciences de Berlin, etc. PHYSIQUE
MÉCANIQUE, traduite de l'allemand, avec
des Notes et un Appendice sur les anneaux
colorés, la double réfraction et la polarisation
de la lumière, par M. BIOT, membre
de l'Institut, 4^e édit., revue et considé-

ralement augmentée, 1 vol. in-8., avec pl.,
Sous Presse:

FLEURIEU, membre de l'Institut, VOYAGE
AUTOUR DU MONDE pendant les années
1790, 1791 et 1792, par ÉTIENNE MAR-
CHAND, précédé d'une introduction his-
torique, auquel on a joint des recherches
sur les terres australes de Drake, et un
examen critique du voyage de Roggewen
avec cartes et figures, 4 vol. in-4. et atlas
60 fr.

LE MÊME OUVRAGE, 5 vol. in-8 et atlas
in-4. 30 fr.

FORFAIT. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE
LA MATURE DES VAISSAUX, à l'usage
des élèves de la Marine; seconde édit.,
augmentée d'un grand nombre de Notes et
de Tables; par M. Villamez, capitaine de
vaisseau; suivi d'un Appendice contenant un
Mémoire sur le Système de construction des
Mâts d'assemblage en usage dans les Ports
de Hollande, et sur les Modifications que l'on
propose d'y apporter; par M. Rolland, in-
specteur-adjoint du Génie maritime; 1 vol.
in-4., avec 25 pl., 1825. 18 fr.

FOURCROY. TABLEAUX SYNOPTIQUES
DE CHIMIE, in-fol. cart. 9 fr.

FRANCOEUR, Professeur de la Faculté des
Sciences de Paris, ex-Examineur des Can-
didats de l'École Polytechnique, etc. URA-
NOGRAPHIE, ou Traité élémentaire d'Astro-
nomie, à l'usage des personnes peu ver-
sées dans les mathématiques, des Géogra-
phes, des Marins, des Ingénieurs, accompa-
gnée de planisphères, troisième édition,
revue et considérablement augm., 1 vol.
in-8., 1821, avec planches. 9 fr.

— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANI-
QUE, 6^e édition, in-8. 1825. 7 fr. 50 c.

— ÉLÉMENTS DE STATIQUE, in-8. 3 fr.

— COURS COMPLET DE MATHÉMATI-
QUES PURES, dédié à S. M. Alexandre-
ler, Empereur de toutes les Russies;
Ouvrage destiné aux Elèves des Écoles Nor-
male et Polytechnique, et aux Candidats qui
se disposent à y être admis, 2^e édit., revue
et considérabl. augm., 2 vol. in-8., avec pl.,
1819. 15 fr.

* — LA GONIOMÉTRIE, ou l'art de tracer
sur le papier des angles, dont la graduation
est connue, et d'évaluer le nombre de degrés
d'un angle déjà tracé, accompagné d'une
table des cordes de 1 à 10,000, in-8., figur.
1 f. 25 c.

* — L'ENSEIGNEMENT DU DESSIN LINÉAIRE,
d'après une méthode applicable à toutes les
écoles primaires, quel que soit le mode d'in-
struction qu'on y suit, 2^e édition, 1 vol. in-
8. et atlas, in-folio de 12 planches, 1817.
7 fr.

FRANÇAIS, professeur à Metz MÉMOIRE
SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION
d'un corps solide autour de son centre de
masse, in-4., 1813. 2 f. 50 c.

FRAY, Commissaire-Ordonnateur des Guerres,
Membre de la Légion d'Honneur, etc. ES-
SAI SUR L'ORIGINE DES CORPS OR-
GANISÉS ET INORGANISÉS, et sur
quelques phénomènes de Physiologie animale
et végétale, 1 vol. in-8., 1817. 5 fr.

* FULTON (Robert). RECHERCHES SUR
LES MOYENS DE PERFECTIONNER
LES CANAUX DE NAVIGATION et sur
les nombreux avantages des petits canaux,
in-8., avec le supplément. 7 f. 50 c.

GALLON. Recueil de Machines approuvées
par l'Académie, 7 vol. in-4., avec 945 plan-
ches. 150 fr.

— Le 7^e volume se vend séparément. 30 fr.

GARNIER, Ingénieur des Mines, ancien Elève
de l'École Polytechnique. TRAITÉ SUR
LES Puits ARTÉSIENS, ou sur les diffé-
rentes espèces de Terrains dans lesquels on
doit rechercher des eaux souterraines. Ou-
vrage contenant la description des procédés
qu'il faut employer pour ramener une partie
de ces eaux à la surface du sol, à l'aide
de la sonde du mineur ou du fontainier; se-

conde édition, revue et augmentée, avec 25
planches, in-4., 1826. 16 fr.

GARNIER. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE,
à l'usage des Elèves de tout âge, 2^e édit.,
in-8., 1808. 2 fr. 50 c.

— ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE à l'usage des
Aspirans à l'École Polytechnique, 3^e édit.,
in-8., revue, et augmentée, 1811. 6 fr.

— Suite de ces Eléments, 2^e partie. ANALYSE
ALGÈBRE, nouvelle édition considé-
rablement augmentée; in-8., 1814. 7 fr.

— GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, ou appli-
cation de l'Algèbre à la Géométrie, seconde
édition, revue et augm., 1 vol. in-8. avec
14 pl., 1813. 6 fr.

— LES RECIPROQUES de la Géométrie,
suivi d'un Recueil de Problèmes et de Thé-
orèmes, et de la construction des Tables tri-
gonométriques, in-8., 2^e édition, considé-
rablement augmentée, 1810. 5 fr.

— ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, contenant
les deux Trigonométries, les éléments de la
Polygonométrie et du levé des Plans, et
l'Introduction à la Géométrie descriptive, 1
vol. in-8 avec pl., 1812. 5 fr.

— LEÇON DE STATIQUE à l'usage des As-
pirans à l'École Polytechnique, 1 vol. in-8.
avec douze pl., 1811. 5 fr.

— LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL,
3^e édit., 1 vol. in-8. avec 4 pl., 1811. 7 fr.

— LEÇONS DE CALCUL INTEGRAL,
1 vol. in-8 avec deux pl., 1812. 7 fr.

— TRISECTION DE L'ANGLE, suivie de
Recherches analytiques sur le même sujet,
in-8., 1809. 2 fr. 50 c.

— DISCUSSION DES RACINES des Équa-
tions déterminées du premier degré à plu-
sieurs inconnues, et élimination entre deux
équations de degrés quelconques à deux
inconnues, 2^e édit., 1 vol. in-8. 1 fr. 80 c.

GAUSS. RECHERCHES ARITHMÉTI-
QUES, traduites par M. Poulet-Desisle,
Elève de l'École Polytechnique et Professeur
de Mathématiques à Orléans, 1 vol. in-4.,
1807. 18 fr.

* GERMAIN (Mlle. Sophie). RECHERCHES
SUR LA THÉORIE DES SURFACES ÉLAS-
TIQUES, in-4., 1824. 5 fr.

* — REMARQUES sur la nature, les bornes
et l'étendue de la question des surfaces élas-
tiques, et équation générale de ces surfaces,
in-4., 1826. 1 f. 50 c.

GICQUEL-DESTOUCHES, Capitaine de
Vaisseau. TABLES COMPARATIVES des
principales Dimensions des Bâtimens de
guerre français et anglais de tous rangs, de
leur Mât, de leur Gréement, d'Artillerie, etc.,
d'après les derniers réglemens, avec plu-
sieurs autres Tables relatives à un Système
de mât, proposé comme plus convenable
que celui actuel, aux bâtimens de guerre
français; ouvrage utile aux officiers de la
Marine royale, in-4. 9 fr.

GILBERT, Ingénieur de Marine. ESSAI SUR
L'ART DE LA NAVIGATION PAR LA
VAPEUR, 1 vol. in-4 avec trois grandes
planches, 1820. 5 fr.

GIRARD, Ingénieur en chef des Ponts et
Chaussées, Directeur du Canal de l'Ouvert
et des eaux de Paris, etc. RECHERCHES
EXPERIMENTALES SUR L'EAU ET LE
VENT, considérées comme forces motrices
applicables aux moulins et autres machines
à mouvement circulaire, traduit de l'anglais
de Smeaton, 2^e édit. in-4., avec pl. 1827 9 fr.

— DEVIS GÉNÉRAL DU CANAL DE
L'OURCQ, 2^e édition, in-4., avec une
grande carte, 1820. 6 fr.

— MÉMOIRE SUR LES GRANDES ROU-
TES, LES CHEMINS DE FER et les
canaux de navigation; traduit de l'allemand
de GRASMAN, par P. TERQUEM, et pré-
cédé d'une introduction, par M. P.-S. GI-
RARD, in-8., 1824, figures. 6 f. 50 c.

* — DEVIS DU CANAL SAINT-MARTIN,
in-4., avec une grande carte, 1820. 8 fr.

* — Nouvelles observations SUR LE CANAL
SAINT-MARTIN et supplément au devis
général, in-4 avec une grande planche colo-
riée, 1821. 6 fr.

- * GIRARD, Essai sur le mouvement des eaux courantes et la figure qu'il convient de donner aux canaux qui les contiennent, in-4, 6 fr.
- * — Mémoire pour servir d'introduction au devis général des ouvrages à exécuter pour la distribution des eaux du canal de l'Oureq, dans l'intérieur de Paris, in-4, figures, 15 fr.
- * — Recherches sur les eaux publiques de Paris, les distributions successives qui en ont été faites, et les divers projets qui ont été proposés pour les augmenter, 4 vol. in-4, avec planches, 1812, 15 fr.
- * — Description générale des différents ouvrages à exécuter pour la distribution des eaux du canal de l'Oureq dans l'intérieur de Paris, et devis détaillé de ces ouvrages, in-4, 1812, figures, 12 fr.
- * — MÉMOIRE SUR LE CANAL DE SOISSONS destiné à joindre le canal de l'Oureq aux canaux des Ardennes et de Saint Quentin, in-4, avec une grande planche, 5 fr.
- DEVIS DES PONTS à bascule à construire sur le canal de l'Oureq, in-4, fig. 1808, 6 fr.
- * GINOT DES ROIS (Mademoiselle). PLANISPIÈRE MOBILE, 3^e édition, tableau collé sur carton, 3 fr. 50 c.
- * — PLANÉTAIRES HÉLIOCENTRIQUE et GÉOCENTRIQUE, 2^e édition, deux cartes collées sur carton ensemble, 7 fr.
- * — CALENDRIER ASTRONOMIQUE PERPETUEL, indiquant le quantième des mois, les jours de la semaine, des phases de la lune, les éclipses, etc. Tableau collé sur carton, 5 fr.
- GIROD-CHANTRANS. ESSAI SUR LA GÉOGRAPHIE PHYSIQUE, le climat et l'histoire naturelle du département du Doubs, 2 vol. in-8, 10 fr.
- GOUDIN (Oeuvres de M. B.), contenant un Traité sur les PROPRIÉTÉS COMMUNES A TOUTES LES COURBES, un Mémoire sur les ÉCLIPSES DE SOLEIL, nouv. édit., in-4, 7 fr. 50 c.
- GRAFF. Galerie des combinatoires à la loterie, in-8, 6 fr.
- * GREMILLET. NOUVELLE THÉORIE DU CALCUL DES INTÉRÊTS simples et composés, des annuités, des rentes et des placements viagers, etc., 1 vol. grand in-8, 1823, 7 fr. 50 c.
- * — RECUEIL DE PROBLÈMES amusants et instructifs, avec les démonstrations raisonnées, et l'application des règles de l'arithmétique à leurs solutions, etc., 2 vol. in-8, 11 fr. Chaque volume se vend séparément, savoir :
Tome 1^{er}, Questions, in-8, 5 fr.
Tome 2^e, Solutions, in-8, 6 fr.
- * GUEPRATTE. Instruction sur le PLANISPIÈRE CÉLESTE, à l'usage de la marine, et détermination des éclipses de lune, de soleil et des occultations d'étoiles, in-8, 1826, avec une très-grande carte, 12 fr.
- * HACHETTE, ex-Professeur à l'École Polytechnique, PROGRAMMES D'UN COURS DE PHYSIQUE, ou Précis des leçons sur les principaux phénomènes de la nature, et sur quelques applications des Mathématiques à la Physique, in-8, 1809, 5 fr. 50 c.
- TRAITE ÉLÉMENTAIRE DES MACHINES, nouvelle édit. augmentée, 1 vol. in-4, avec 32 planches, 1819, 25 fr.
- HAGEAU, inspecteur divisionnaire au corps des ponts et chaussées. DESCRIPTION du canal de jonction de la Meuse au Rhin, etc., 1819, 1 vol. in-4, grand papier, et atlas composé de 21 pl. sur demi-feuille grand-aigle, 70 fr.
- HASSENFRATZ. La SYDÉROTECHNIQUE, ou l'art de traiter le minéral de fer pour en obtenir la fonte du fer ou de l'acier, etc., 4 vol. in-4, avec 66 planches, 1811, 80 fr.
- COURS DE PHYSIQUE CÉLESTE, ou leçons sur l'exposition du système du monde, in-8, figures, 7 fr. 50 c.
- Traité élémentaire et pratique de l'art de scier la pierre caennaise, etc., in-4, figures, 1825, 18 fr.
- HATCHETT. EXPÉRIENCES NOUVELLES et Observations sur les différents ALIAGES DE L'OR, leur pesanteur spécifique, etc., traduites de l'anglais par Lerat, contrôleur du monnayage à Paris, avec des Notes, par Guyton-Morveau, in-4, 9 fr.
- HAUY. Membre de l'Académie Royale des Sciences, Professeur de minéralogie au Jardin du Roi, etc., etc. TRAITE DES CARACTÈRES PHYSIQUES DES PIERRES PRÉCIEUSES, pour servir à leur détermination lorsqu'elles ont été taillées, 1 vol. in-8, 1817, avec 3 pl. en taille-douce, 6 fr.
- TABLEAU COMPARATIF DES RÉSULTATS DE LA CRISTALLOGRAPHIE et de l'analyse chimique, relativement à la classification des Minéraux, vol. in-8, 5 fr. 50 c.
- TRAITE DE MINÉRALOGIE, précédé d'un TRAITE DE CRISTALLOGRAPHIE, 2^e édition revue, corrigée et considérablement augmentée, 6 vol. in-8, et deux atlas, ensemble 204 pl. en taille-douce, 1822 et 1823, 90 fr.
- Ces deux ouvrages se vendent séparément, savoir :
Traité de Minéralogie, 4 vol. in-8, et atlas de 120 planches in-4, 60 fr.
Traité de Cristallographie, 2 vol. in-8, et atlas de 84 planches in-4, 30 fr.
- HAUY. TRAITE ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, troisième édition, considérablement augmentée, adopté par le Conseil royal de l'Instruction publique, pour l'enseignement dans les collèges, 2 vol. in-8, avec 19 pl., 1821, 15 fr.
- HERBIN DE HALLE. DES BOIS propres AU SERVICE DES ARSENAUX de la marine et de la guerre, etc., accompagné de 40 planches enluminées, représentant les arbres qui fournissent les diverses pièces de constructions, in-8, 1823, 9 fr.
- HISTOIRE ET MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE PARIS, 167 vol. in-4, rel., 1500 fr.
- Chaque volume, depuis 1666 jusqu'à 1790 (le dernier de cette collection), se vend séparément, 20 fr.
- Table des matières contenues dans les Mémoires de l'Académie, 10 vol.; chaque vol. 15 fr.
- Savans étrangers, 11 vol.; chaque vol. 20 fr.
- Prix, tomes 7, 8 et 9, ensemble, 60 fr.
- Machines, 7 vol., 150 fr.
- Le tome 7^e, séparément, 36 fr.
- HOMASSEL, Elève gagnant maîtrise, et ex-Chef des teintures de la Manufacture des Gobelins. COURS THÉORIQUE ET PRATIQUE SUR L'ART DE LA TEINTURE en laine, soie, fil, coton, fabrique d'Indienne en grand et petit teint, suivi de l'Art du Teinturier-Degraisier et du Blanchisseur, avec les expériences faites sur les végétaux colorans, 3^e édit., 1818, 1 vol. in-8, 5 fr.
- * HUERNE DE POMMEUSE. DES CANAUX NAVIGABLES, considérés d'une manière générale, avec des recherches comparatives sur la navigation intérieure de la France et celle de l'Angleterre, 1 vol. in-4, et atlas, 25 fr.
- HUTTON. NOUVELLES EXPÉRIENCES D'ARTILLERIE faites pendant les années 1787, 85, 89 et 91, où l'on détermine la force de la poudre, la vitesse initiale des boulets de canon, les portées des pièces à différentes élévations, la résistance que l'air oppose au mouvement des projectiles, les effets des différentes longueurs, des différentes charges de poudre, etc., etc.; trad. de l'anglais, par O. Terquem, prof. de mathématiques aux écoles royales, et bibliothécaire au dépôt central de l'artillerie, etc., 1826, in-4, avec planch., 10 fr.
- La 1^{re} partie traduite sur Villantroy, in-4, 1802, 7 fr. 50 c.
- * INSTRUCTION SUR LA MANIÈRE DE SE SERVIR DE LA REGLE A CALCUL, instrument à l'aide duquel on peut obtenir à vue, sans plume, crayon, ni papier, le résultat de toutes espèces de calcul, avec 21 figures, représentant l'instrument dans les principales opérations, 2^e édition, ébrignée et augmentée, in-12, 1825, 2 fr.
- * INSTRUCTION DU CONSEIL DE SALUBRITÉ, SUR LA CONSTRUCTION DES LATRINES PUBLIQUES et sur l'assainissement des Fosses d'aisances; précédé du Rapport remis à Monsieur le Dauphin, Par un membre de la Société. Imprime par ordre du Conseil général de la Société royale des Prisons; in-4, 1825, avec de très-grandes planches, 5 fr.
- * JANVIER, horloger ordinaire du Roi. MANUEL CHRONOMETRIQUE, ou Précis de ce qui concerne le Temps, ses divisions, ses mesures, leurs usages, etc., vol. in-12, avec 5 planches, 1821, 4 fr.
- JOURNAL DE PHYSIQUE, DE CHIMIE, D'HISTOIRE NATURELLE ET DES ARTS, 96 vol. in-4, avec beaucoup de planches, 1500 fr.
- Chaque volume se vend séparément 18 fr.
- et chaque numéro, 4 fr.
- JUVIGNY. MOYEN DE SUPPLÉER PAR L'ARITHMÉTIQUE A L'EMPLOI DE L'ALGÈBRE dans les questions d'intérêts composés, d'annuités, d'amortissemens, etc., terminé par une application spéciale du même procédé à l'extinction de la dette publique, in-8, 1825, 2 fr.
- * — APPLICATION DE L'ARITHMÉTIQUE AU COMMERCE et à la banque, d'après les principes de Bezaud. ouvrage élémentaire, théorique et pratique, 3^e édit., deux parties en 1 vol. in-8, 1827, 7 fr.
- * JOUANNO, professeur de mathématiques au collège de Pontivy. ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE, théorique et pratique, in-8, 1826, 3 fr. 50 c.
- * JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. Voyez ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
- LABEY, ex-professeur à l'École Polytechnique. TRAITE DE STATIQUE, vol. in-8, 3 fr. 50 c.
- LA CAILLE. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES, augmentées par Marie, avec des Notes par M. Labey, Professeur de Mathématiques et Examinateur des Candidats pour l'École Polytechnique; Ouvrage adopté par l'Université, pour l'enseignement dans les Lycées, etc., in-8, fig., 1811, 6 fr. 50 c.
- LEÇONS D'OPTIQUE, augmentées d'un TRAITE DE PERSPECTIVE; nouvelle édition, in-8, 1808, 5 fr.
- LACOURDRAYE. THÉORIE DES VENTS ET DES ONDES, in-8, 4 fr.
- LACROIX, Membre de l'Institut et de la Légion d'Honneur, etc. TRAITE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL; 2^e édition, revue, corrigée et considérablement augmentée, 3 vol. in-4, avec 18 pl., 66 fr.
- Le troisième volume se vend séparément, 26 fr.
- L'Auteur a fait des changemens et augmentations considérables à cette nouvelle édition, qu'il a revue avec le plus grand soin.
- COURS DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'École centrale des Quatre Nations, Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Écoles secondaires, Collèges, etc., 9 vol. in-8, 38 fr. 50 c.
- Chaque volume du Cours de M. LACROIX se vend séparément, savoir :
— Traité élémentaire d'Arithmétique, 17^e édition, 1826, 2 fr.
— Éléments d'Algèbre, 14^e édit., 1825, 4 fr.
— Éléments de Géométrie, 13^e édit., 1825, 4 fr.
— Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et l'Application de l'Algèbre à la Géométrie, 7^e édit., 1822, 4 fr.
— Complément des Éléments d'Algèbre, 5^e édition, 1825, 4 fr.
— Complément des Éléments de Géométrie, ou Éléments de Géométrie descriptive, 5^e édition, 1822, 3 fr.
— Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 3^e édition, 1820, 7 fr. 50 c.

- LACROIX.**—Essai sur l'Enseignement général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques, 1 vol. in-8., seconde édition, revue et augmentée, 1816. 5 fr.
- TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES PROBABILITÉS**, in-8., 2^e édition, avec une planche, 1822. 5 fr.
- LAGRANGE**, Sénateur, Grand Officier de la Légion-d'Honneur, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France, etc. **LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS**, nouv. édition, revue, corrigée et augmentée, in-8. 6 fr. 50 c.
- Elles contiennent des formules et des méthodes nouvelles.
- DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES** de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des équations algébriques, in-4.; 3^e édition, revue et corrigée. Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement dans les Lycées, etc., 1826. 15 fr.
- Cette 3^e édition est précédée d'une analyse de cet ouvrage, par M. Poisson de l'Institut.
- THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES**, nouvelle édition, revue, corrigée et augmentée par l'Auteur, in-4., 1813. 15 fr.
- MÉCANIQUE ANALYTIQUE**, nouvelle édition, revue et augmentée par l'Auteur, 2 vol. in-4., 1811 et 1815. 36 fr.
- (L'Auteur a fait des augmentations considérables à cette nouvelle édition.)
- Le tome second se vend séparément, pour ceux qui ne l'ont pas retiré. 18 fr.
- Lagrange a publié un grand nombre de Mémoires dans la collection des *Mémoires de l'Académie des Sciences*; quelques-uns se vendent séparément.
- LAGRIVE**, MANUEL DE TRIGONOMÉTRIE PRATIQUE, revu par les Professeurs du Cadastre, MM. Reynaud, Harros, Plausol et Boson, et augmenté des Tables des Logarithmes à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 1 vol. in-8. 7 fr.
- LALANDE**, Membre de l'Institut, Directeur de l'Observatoire, **TABLES DES LOGARITHMES** pour les nombres et les sinus, etc., revues par Reynaud, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique, **PRÉCÉDÉES DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE**, par le même; 1 vol. in-8., avec planches, 1818. 3 fr.
- Les Tables de Logarithmes de LALANDE seules, sans la Trigonométrie de M. Reynaud, se vendent séparément. 2 fr.
- HISTOIRE CÉLESTE FRANÇAISE**, in-4. 15 fr.
- BIBLIOGRAPHIE ASTRONOMIQUE**, in-4. 30 fr.
- Et les autres ouvrages du même auteur.
- LAMÉ**, Elève Ingénieur au Corps royal des Mines. Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE; in-8., avec pl., 1818. 2 fr. 50 c.
- LANCELIN**, INTRODUCTION A L'ANALYSE DES SCIENCES, ou de la Génération des fondemens et des instrumens de nos connaissances, 3 vol. in-8., 1803. 15 fr.
- LANZ** et **BETANCOURT**, ESSAI SUR LA COMPOSITION DES MACHINES, 2^e édition, revue, corrigée et considérablement augmentée, vol. in-4. avec 13 gr. pl., 1819. 15 fr.
- LAPEYROUSE** (DE). TRAITÉ SUR LES MINES ET LES FORGES du comté de Foix, in-8., avec 6 grandes planches. 6 fr.
- LAPIE**, Atlas classique et universel de géographie ancienne et moderne, in-folio, 39 cartes, demi-reliure. 36 fr.
- LAPLACE** (M. le marq. de), Pair de France, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes de France, des Sociétés royales de Londres, de Göttingue, etc.
- EXPOSITION DU SYSTÈME DU MONDE**, 5^e édition, revue et augmentée par l'Auteur, in-4., 1824, avec portrait, 15 fr.
- Le même ouvrage, 2 vol. in-8., sans port., 1824.
- THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS**, 1 vol. in-4., troisième édition, 1820, avec le 4^e supplément. 27 fr. 50 c.
- Quatrième Supplément à la Théorie des Probabilités, 1825, séparément. 2 fr. 50 c.
- ESSAI PHILOSOPHIQUE SUR LES PROBABILITÉS**, 5^e édition, revue et augmentée, in-8., 1825. 4 fr.
- PRÉCIS DE L'HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE**, 1 vol. in-8., 1821. 3 fr.
- TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE**, 5 vol. in-4.
- Les 3^e, 4^e et 5^e volumes se vendent ensemble. 62 fr.
- Les 4^e et 5^e volumes. 47 fr.
- Le 5^e imprimé en 1825. 26 fr.
- Le même, 5 vol. in-4., grand papier vélin, 184 fr.
- LAROUVRAIE** (DE). L'ART DES COMBATS SUR MER, dédié au Duc d'Angoulême, in-4. avec pl. 6 fr.
- LASALLE**, TRAITE ÉLÉMENTAIRE D'HYDROGRAPHIE appliquée à toutes les parties du pilotage, etc. 1 vol. in-8., avec pl., 1817. 6 fr.
- * **LEBLANC**, dessinateur et graveur du Conservatoire des arts et métiers. RECUEIL DE MACHINES, instrumens et appareils, qui servent à l'économie rurale, tels que charues, semoirs, herse, moulins, presse hydrauliques et à vis, etc. Il en paraît 8 livraisons, grand-rain in-folio. Prix de chaque livraison. 6 fr.
- LEFÈVRE DE FOURCY** (L.), examinateur des aspirans à l'École polytechnique, etc. **LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE**, données au collège royal de Saint-Louis, dans lesquelles on traite des problèmes déterminés, de la ligne droite et des lignes du second ordre; in-8., fig., 1827. 5 fr. 50 c.
- LEFÈVRE**, Géomètre en chef du Cadastre, NOUVEAU TRAITE DE L'ARPENTAGE, à l'usage des personnes qui se destinent à l'état d'arpenteur, au levé des plans et aux opérations du nivellement, quatrième édition entièrement refondue et augmentée d'un Traité de Géodésie pratique, ouvrage contenant tout ce qui est relatif à l'arpentage, l'aménagement des bois et la division des propriétés; ce qu'il faut connaître pour les grandes opérations géodésiques et le nivellement, 2 vol. in-8. avec 29 pl. nouvellement gravées, dont une color. pour les teintes conventionnelles, 1826. 16 fr.
- MANUEL DU TRIGONOMÈTRE**, servant de Guide aux jeunes Ingénieurs qui se désignent aux opérations géodésiques; suivi de diverses solutions de Géométrie pratique, de quelques Notes et de plusieurs Tableaux, 1 vol. in-8., avec planches; 1819. 5 fr.
- * —**ESSAI SUR L'ARPENTAGE PARCELLAIRE**, ou recueil et développement des instructions et réglemens sur la partie d'art du cadastre, à l'usage des employés chargés du levé des plans parcellaires des communes et de leurs calculs, in-8., fig. et tabl. 6 fr.
- Voyez le Supplément, page 12.
- LEFRANÇOIS**, ESSAIS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, 2^e édition, revue et augmentée, 1 vol. in-8., 1824. 2 fr. 50 c.
- LEGENDRE**, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, Conseiller titulaire de l'Université, ESSAIS SUR LA THÉORIE DES NOMBRES, 2^e édition, revue et considérablement augm., in-4., 1808, avec deux Supplémens, imprimés en 1816 et en 1825. 24 fr.
- Le Supplément imprimé en 1816 se vend séparément. 3 fr.
- Celui imprimé en 1825. 3 fr.
- Nouvelle Méthode pour la DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES, avec deux Supplémens contenant divers perfectionnemens de ces Méthodes et leur application aux deux Comètes de 1805, 1806. in-4. 10 fr.
- Le deuxième Supplément, 1820, se vend séparément. 4 fr.
- EXERCICES DU CALCUL INTÉGRAL** sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures, 3 vol. in-4. avec les supplémens, 1811 à 1819. 72 fr.
- LEGENDRE** et **DELABRE**, Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien, in-4. 9 fr.
- LENORMAND**, professeur de technologie, etc. NOUVEAU MANUEL DE L'ART DU DÉGRAISSEUR, etc., ou Instruction sur les moyens d'enlever soi-même toutes sortes de taches; 3^e édit., revue, corrigée et augmentée d'un Appendice sur la manière de blanchir le papier et d'enlever les taches d'encre, de graisse, de cire ou d'huile sur les livres et estampes, etc., 1 vol. in-12, avec une planche, 1826. 3 fr.
- L'ART DU DISTILLATEUR** des eaux-de-vie et des esprits, 2 vol. in-8., fig., 1817. 18 fr.
- * — Manuel de l'art du fabricant de verdet, in-8. 3 fr.
- * **LENORMAND** et **DEMOLÉON**, DESCRIPTION DES EXPOSITIONS DES PRODUITS DE L'INDUSTRIE FRANÇAISE faites à Paris, depuis leur origine, jusques à celle de 1819 inclusivement, renfermant les noms et les adresses de tous les exposans, tant nationaux qu'étrangers, avec 84 planches, 4 vol. in-8., 1824. 36 fr.
- LÉONARD DE VINCY** ESSAI SUR SES OUVRAGES PHYSICO-MATHÉMATIQUES, avec des fragmens tirés de ses manuscrits apportés de l'Italie, par J.-B. Venturi, professeur de physique à Modène, in-4. 2 f. 50 c.
- LEPAUTE**, Horloger du Roi. TRAITÉ D'HORLOGERIE, contenant tout ce qui est nécessaire pour bien connaître et pour régler les pendules et les montres, la description des pièces d'horlogerie les plus utiles, etc., vol. in-4., avec 17 pl. 24 fr.
- * **LIEFMEIER**, CONSIDÉRATIONS SUR L'ÉTABLISSEMENT D'UNE USINE HYDRAULIQUE quelconque, précédées des considérations sur les moyens de faire produire à l'eau un effet maximum, dans les coursiers, par son choc sur les aubes, des roues hydrauliques, et calcul de la dépense d'eau d'une vanne, et suivies d'un mémoire sur les moulins à pilons, in-8., figures, 1826. 2 f. 50 c.
- LEPAGE**, ancien avocat. LOIS DES BATIMENS, ou le NOUVEAU Desgodets, traitant suivant les Codes civil et de procédure, des servitudes en général, des réparations, par vice de construction, accidens et vétusté, etc., 2 vol. in-8., 1826. 9 fr.
- L'HUILLIER**, membre de la Société d'Encouragement de Rouen. QUELQUES IDÉES NOUVELLES SUR L'ART D'EMPLOYER L'EAU comme moteur des roues hydrauliques, in-8., 1823, fig. 2 fr. 50 c.
- L'HUILLIER** et **PETIT**, DICTIONNAIRE DES TERMES DE MARINES ESPAGNOLS ET FRANÇAIS, in-8. 8 fr.
- LIBES**, Professeur de Physique au Lycée Charlemagne à Paris, etc. HISTOIRE PHILOSOPHIQUE DES PROGRES DE LA PHYSIQUE, 4 vol. in-8., 1811 et 1814. 20 fr.
- Le quatrième volume se vend séparément. 5 fr.
- TRAITÉ COMPLET ET ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE**, présenté dans un ordre nouveau, d'après les découvertes modernes; deuxième édition, revue, corrigée et considérablement augmentée, 3 vol. in-8., avec fig., 1813. 18 fr.
- LE MONDE PHYSIQUE** et le MONDE MORAL, ou lettres à M^{me} de ***. 2^e édition considérablement augmentée, 2 vol. in-8., 1822, figures. 15 fr.
- NOUVEAU DICTIONNAIRE DE PHY-**

SIQUE, rédigé d'après les découvertes les plus modernes, 3 vol. in-8 et atlas. 24 fr.

MAGRÉ. LE PILOTE AMÉRICAIN, contenant la description des côtes orientales de l'Amérique du nord, depuis le fleuve Saint-Laurent jusqu'au Mississipi, et trad. de l'anglais, et publié par ordre du ministre de la marine, 1826, in-8. 5 fr.

* MAIRET, relieur et imprimeur lithographe. NOTICE SUR LA LITHOGRAPHIE, 2^e édition, suivie d'un essai sur la reliure et le blanchiment des livres et gravures, in-8., 1824, figures. 5 fr.

* MALUS, Lieutenant-Colonel au Corps du Génie, Membre de l'Institut d'Égypte. THÉORIE DE LA DOUBLE RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE dans les substances cristallisées, in-4., avec pl. 12 fr.

MANSON. Traité du fer et de l'acier, in-4., 1804, 15 planches. 18 fr.

MARCEL DE SÈRRES. ESSAI SUR LES ARTS et les Manufactures d'Autriche, 1814, 3 vol. in-8., avec 34 planch., 21 fr.

MARIE, Professeur de Mathématiques et de Topographie. PRINCIPES DU DESSIN ET DU LAVIS DE LA CARTE TOPOGRAPHIQUE, présentés d'une manière élémentaire et méthodique, avec tous les développemens nécessaires aux personnes qui n'ont pas l'habitude du Dessin, accompagnés de 9 modèles, dont huit sont coloriés avec soin; 1 vol. in-4., oblong., 1825, 15 fr.

MASCHERONI. PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE, résolus de différentes manières, traduit de l'italien, 1 vol. in-8., 1803. 3 fr.

MAUDUIT, Professeur de Mathématiques au Collège de France à Paris. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ARITHMÉTIQUE, ou Principes d'Analyse numérique, in-8., nouv. édition, 1803. 5 fr.

— LEÇONS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, nouvelle édition, revue, corrigée et augmentée, 2 vol. in-8., 1817, avec 17 pl. 10 fr.

— INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES, pour servir de suite aux élémens de géométrie de M. Rivard, in-8. 3 fr.

MAZÉAS. Abrégé des élémens d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie, etc., in-12. 3 fr.

MAYNIEL, Chef de bataillon au corps du Génie, sous-directeur des fortifications. TRAITE EXPERIMENTAL, ANALYTIQUE ET PRATIQUE DE LA POUSSÉE DES TERRES ET DES MURS DE REVÈTEMENT, contenant: 1^o. l'Exposition et la Discussion des expériences anciennes et nouvelles sur la poussée des terres; 2^o. l'Exposition et la Discussion des diverses théories sur la poussée des terres; 3^o. la Comparaison des nouvelles expériences sur la théorie de Coulomb, généralisée, et application de cette théorie; 4^o. Traité pratique sur la poussée des terres et des murs de revêtement; suivi d'un Appendice sur le frottement des vannes dans leurs coulisses, 1808, 1 vol. in-4. 12 fr.

MAZURE - DUHAMEL, Conservateur de l'Observatoire de la Marine et Professeur à l'École de Navigation à Toulon. MÉMOIRE SUR L'ASTRONOMIE NAUTIQUE, in-4., avec 2 pl. et tableaux. 7 fr. 50 c.

MÉMOIRES SUR LA TRIGONOMÉTRIE sphérique, par un Officier de l'Etat-Major, etc., in-8., 1 fr. 50 c.

MÉMOIRES DE L'INSTITUT, Sciences physiques et mathématiques.

Tomes I, 18 fr.; II, 24; III, 18; IV, 18; V, 20; VI, 20; VII ou 1806, 24; VIII ou 1807, 20; IX ou 1808, 30; X ou 1809, 20; * XI ou 1810, 2 vol., 22; * XII ou 1811, 2 vol., 25; * XIII ou 1812, 2 vol., 22; * XIV ou 1813, 1814, 1815, 1 vol., 18; * Académie des Sciences, 1816, tomes I, 18; * 1817, II, 20; * 1818, III, 25; * IV ou 1819 et 1820, 30. V ou 1821 et 1822, 1823, 20.

Savans étrangers.

Tomes I, 36 fr.; II, 18.

— 1^{re}. Nouvelle série, 1827. 20 fr.

Base du système métrique.

Tomes I, II, III, 100 fr.; IV, par Biot et Arago, 21.

Science morale et politique.

Tomes I, 18 fr.; II, 18; III, 18; IV, 18; V, 18.

Littérature et Beaux-Arts.

Tomes I, 20 fr.; II, 20; III, 20; IV, 20; V, 20.

Littérature ancienne.

Tomes * I et II, 42 fr.; * III et IV, 42; * V et VI, 48.

Prix total de la collection, telle qu'elle est indiquée ci-dessus. 895 fr.

* MÉMOIRE sur un nouveau système de guerre et de construction maritime et sur un nouveau moyen de navigation sans voiles; par J.-M. D. L. F., in-8., 1825. 2 f. 50 c.

* — Sur les moyens d'exploiter, par le Sénégal, les mines d'or de Bambouc, et de fonder un grand commerce avec l'Afrique intérieure, par J.-M. D. L. F., in-8., 1826. 1 f. 50 c.

MOLLET, ex-Doyen de la Faculté des Sciences de Lyon, etc. GNOMONIQUE GRAPHIQUE, ou Méthode simple et facile pour tracer les Cadrans solaires sur toutes sortes de plans et sur les surfaces de la sphère, et du cylindre droit, sans aucun calcul, et en ne faisant usage que de la règle et du compas, troisième édition, suivie de la Gnomonique analytique, etc., 1 vol., in-8., 1827, avec 8 planches. 3 fr.

MONGE (G.), ancien Sénateur, Membre de l'Institut. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; 5^e édition, augmentée d'une Théorie des Ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'Auteur, par M. BRISSON, ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, 1 vol. in-4., avec 28 pl., 1827. 12 fr.

MONGE. TRAITE ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE, à l'usage des Écoles de la Marine, in-8., 6^e édition, revue par M. Hachette, ex-Instituteur de l'Ecole Polytechnique. Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement dans les Lycées, 1826. 3 fr. 50 c.

MONTEIRO-DA-ROCHA, Commandeur de l'Ordre du Christ, Directeur de l'Observatoire de l'Université de Coimbra, etc. MÉMOIRES SUR L'ASTRONOMIE PRATIQUE, traduits du portugais par M. de Mello, in-4., 1808. 7 fr. 50 c.

MONTGÉRY (DE), Capitaine de frégate. REGLES DE POINTAGE à bord des vaisseaux, ou Remarques sur ce qui est prescrit à cet égard, dans les exercices de 1808 à 1811; suivies de Notes sur diverses branches d'artillerie en général, et en particulier de l'artillerie de la Marine, 1 vol. in-8. 5 fr.

— MÉMOIRE SUR LES PÉTARDS FLOTTANS et sur les mines flottantes, ou machines infernales maritimes, br. in-8., 1819. 2 fr.

* — TRAITE DES FUSÉES DE GUERRE, nommées autrefois Rochettes, et maintenant fusées à la Congrève, in-8., 1825, figures. 6 fr.

MONTUCLA. HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le Tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les Mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres. Nouvelle édition, considérablement augmentée, et prolongée jusque vers l'époque actuelle, achevée et publiée par Jérôme de Lalande, 4 vol. in-4., avec figures. 60 fr.

Il reste encore quelques exemplaires des tomes III et IV, qui se vendent séparément des deux premiers vol. 40 fr.

Cet ouvrage est ce qui existe de plus complet jusqu'à présent en cette partie.

* MOREL (ALEX.) PRINCIPE ACOUSTIQUE nouveau et universel de la Théorie musicale, ou la Musique expliquée, 1 vol. avec pl., 1816. 7 fr.

* MORISOT. Tableaux détaillés des prix de tous les ouvrages de bâtiment, 7 vol. in-8. 58 fr.

Les 4 premiers volumes se vendent séparément, savoir:

Le 1^{er}. 11 fr. 50 c.

Les 2^e, 3^e et 4^e. chacun. 8 50

Et les 5^e, 6^e et 7^e. ensemble. 21

MOULTESON. ARITHMÉTIQUE DES CAMPAGNES, à l'usage des écoles primaires, ouvrage adopté par le conseil royal de l'instruction publique, in-12, cartonné. 1 fr.

NEWTON. ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE, traduite en français par M. Baudoux, avec des notes explicatives, 2 vol. in-4., 14 planches. 40 fr.

NICHOLSON. DESCRIPTION DES MACHINES A VAPEUR, et détail des principaux changemens qu'elles ont éprouvés depuis l'époque de leur invention, et des améliorations qui les ont fait parvenir à leur état actuel de perfection, ouvrage traduit de l'anglais, 1 vol. in-8. avec 8 pl., 1826. 5 fr.

NOËL. ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE raisonnée et appliquée, 2^e édition, 1 vol. in-8., 1827. 6 fr.

NORIE. RECUEIL COMPLET DE TABLES UTILES A LA NAVIGATION. (Voy. VIOLAINNE). 6 fr.

NOUVELLE THÉORIE DES PARALLÈLES avec un appendice contenant la manière de perfectionner la théorie des parallèles de A. M. Legendre, in-8. 2 fr.

OBEINHEIM (d'), ancien sous-directeur des fortifications, etc. BALISTIQUE, indication de quelques expériences propres à compléter la théorie du mouvement des Projectiles de l'Artillerie, etc. Strasbourg, 1814, in-8., avec 3 pl. 6 fr.

PAIXHANS, Elève de l'Ecole Polytechnique, Chef de bataillon au Corps royal d'Artillerie, etc. NOUVELLE FORCE MARITIME et application de cette force à quelques parties du service de l'armée de terre, ou Essai sur l'état actuel des moyens de la force maritime; sur une espèce nouvelle d'artillerie de mer qui détruirait promptement les vaisseaux de haut bord; sur la construction de navires à voiles et à vapeur, de grandeur modérée, qui, armés de cette artillerie, donneraient une marine moins coûteuse et plus puissante que celle existante, et sur la force que le système des bouches à feu proposé offrirait à terre pour les batteries de siège, de place, de côtes et de campagne; in-4., avec 7 planches, 1822. 18 fr.

— EXPÉRIENCES FAITES PAR LA MARINE FRANÇAISE, sur une arme nouvelle, changemens qui paraissent devoir en résulter dans le système naval, et examen de quelques questions relatives à la Marine, à l'Artillerie, à l'attaque et à la défense des Côtes et des Places, in-8. 1825. 3 fr.

PARISOT. TRAITE DU CALCUL CONJECTURAL, ou l'Art de raisonner sur les choses futures et inconnues, in-4., 1810. 15 fr.

PAUCTON. TRAITE DE METROLOGIE, ou Traité des Mesures, Poids et Monnaies des anciens et des modernes, in-4. 18 fr.

PECIET, professeur au collège de Marseille, chargé des cours publics de physique et de chimie appliquées aux arts, etc. COURS DE CHIMIE, 1 fort volume in-4. avec 9 planches. 36 fr.

— COURS DE PHYSIQUE, 1 fort vol. in-4. avec 24 planches. 36 fr.

PERSON. RECUEIL DE MÉCANIQUE ET DESCRIPTION DE MACHINES RELATIVES A L'AGRICULTURE ET AUX ARTS, in-4., avec 18 pl., 1802. 16 fr.

PERTUSIER, officier d'artillerie de la garde royale. LA FORTIFICATION ordonnée d'après les principes de la Statique et de la Balistique modernes, etc. 1822, in-8. avec atlas. 25 fr.

- Cet ouvrage n'a été tiré qu'à 400 exemp., 23 seulement ont été livrés au commerce.
- La Moldavie et la Valachie, et de l'influence politique des Grecs du Fanal, in-8., 1822. 3 fr.
 - POINSOT, Membre de l'Institut et de la Légion d'Honneur, Inspecteur-général de l'Université, Examineur d'admission à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr, etc. **TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE**, adopté pour l'Instruction publique, in-8., 4^e édit., 1821, avec pl. 5 fr.
 - **MÉMOIRE SUR L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA THÉORIE DES NOMBRES**, in-4., 1819. 3 fr.
 - **RECHERCHES SUR L'ANALYSE DES SECTIONS ANGULAIRES**, in-4., 1825. 5 fr.
 - POISSON, Membre de l'Institut, Professeur à l'Ecole Polytechnique, etc. **TRAITÉ DE MÉCANIQUE**, 2 vol. in-8., avec 8 pl., 1811. 12 fr.
 - * POMMIÉS. **MANUEL DE L'INGÉNIEUR DU CADASTRE**, contenant les connaissances théoriques et pratiques utiles aux Géomètres en chef et à leurs collaborateurs, pour exécuter le levé général du plan des communes de France, conformément aux instructions du Ministre des Finances sur le cadastre de France; précédé d'un **Traité de Trigonométrie rectiligne**, par A.-A. Reynaud, vol. in-4., 1808. 12 fr.
 - PONCELET, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, capitaine au corps royal du Génie. **TRAITÉ DES PROPRIÉTÉS PROJECTILES DES FIGURES**, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la Géométrie descriptive, et d'opérations géométriques sur le terrain, in-4., 1822. 16 fr.
 - * — **MÉMOIRE SUR LES ROUES HYDRAULIQUES VERTICALES à aubes courbes**, mues par dessous, suivi d'expériences sur les effets mécaniques de ces roues, in-4., figures, 2^e édit., 1827. 7 fr.
 - POULET-DELISLE, Professeur de mathématiques au Lycée d'Orléans. **APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE**, in-8., 1806. 5 fr.
 - **RECHERCHES ARITHMÉTIQUES**, trad. du latin de GAUSS, in-4. 18 fr.
 - PRONY, Membre de l'Institut. **LEÇONS DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE**, données à l'ECOLE POLYTECHNIQUE, 2 vol. in-4., 1815. 30 fr.
 - Le même ouvrage, 2 vol. in-4., grand papier, 36 fr.
 - Et les autres ouvrages du même auteur.
 - * PROUST. **Recueil de Mémoires relatifs à la physique à canon**; extrait du Journal de Physique, in-4. 18 fr.
 - PUISSANT, Officier supérieur, Chef des études à l'Ecole d'Application des Ingénieurs Géographes, etc. **RECUEIL DE DIVERSES PROPOSITIONS DE GÉOMÉTRIE**, résolues ou démontrées par l'analyse, 3^e édit., augmentée d'un précis sur le **LEVÉ DES PLANS**, in-8., avec pl. 1824. 7 fr.
 - **TRAITÉ DE GÉODÉSIE**, ou exposition des Méthodes trigonométriques et astronomiques applicables, soit à la mesure de la Terre, soit à la confection du canevas des cartes et des Plans topographiques, 2^e éd., 2 vol. in-4., formant ensemble plus de 800 p., avec 13 pl., 1819. 30 fr.
 - **MÉTHODE GÉNÉRALE** pour obtenir le résultat moyen dans une série d'observations astronomiques faites avec le cercle répétiteur de Borda, in-4., 1823. 6 fr.
 - **TRAITÉ DE TOPOGRAPHIE**, d'Arpentage et de Nivellement, 2^e édit., considérablement augmentée, 1 vol. in-4., avec 9 pl. gravées par M. Adam. 20 fr.
 - Principes du figuré du terrain et lavis sur les plans et cartes topographiques, susceptibles de servir de base à l'enseigne-
 - ment du dessin dans les écoles, des services publics et comparaison des différents modes proposés à ce sujet; in-8., figures 3 f. 50 c.
 - QUARTIER DE RÉDUCTION et astronomique en usage dans la Marine, en feuille. 60 c. collé sur carton. 1 fr. 50 c.
 - * QUINET, ancien commissaire des guerres. **MÉMOIRE POUR L'EXPOSE DES VARIATIONS MAGNÉTIQUES** et atmosphériques du globe terrestre, avec des tables de la déclinaison et de l'inclinaison de l'aiguille aimantée sur toute la terre, présenté au bureau des Longitudes, in-8., 1826. 4 f. 50 c.
 - RAMOND. **Mémoire sur la formule barométrique de la mécanique céleste et les dispositions de l'atmosphère, qui en modifient les propriétés**, etc., in-4., 1811. 12 fr.
 - RAMSDEN. **DESCRIPTION D'UNE MACHINE** pour diviser les instruments de mathématiques, traduit de l'anglais par Lalande, 1770, in-4., grand papier, fig. 6 fr.
 - RAVINET, sous-chef à la division générale des Ponts-et-Chaussées. **DICIONNAIRE HYDROGRAPHIQUE DE LA FRANCE**, contenant la description des rivières et canaux flottables et navigables dépendans du domaine public, avec un tableau synoptique, indiquant le système général de la navigation intérieure; ouvrage couronné par l'Académie royale des Sciences; suivi de la Collection complète des Tarifs des Droits de Navigation; 2 vol. in-8. avec une très-grande Carte de la Navigation intérieure, publiée par la Direction des Ponts-et-Chaussées. 15 fr.
 - Le tome deuxième, contenant les lois, réglemens, etc., relatifs à la Navigation, se vend séparément. 8 fr.
 - RAIMOND. **Lettre à M. Villoteau**, touchant ses vœux sur la possibilité et l'utilité d'une théorie exacte des **PRINCIPES NATURELS DE LA MUSIQUE**, etc., in-8., 1811. 4 fr.
 - Essai sur la détermination DES BASES PHYSICO-MATHÉMATIQUES DE L'ART MUSICAL, etc., in-8., 1813. 2 fr.
 - RECUEIL COMPLET DE TABLES UTILES A LA NAVIGATION (Foyes Violaine), in-8. 9 fr.
 - REBOUL. (Antoine-Joseph) **TABLES NOUVELLES DE VENUS**, d'après la Théorie de M. de Laplace, et d'après les Elémens de M. de Lindeneau, in-4., 1811. 5 fr.
 - **NOTES SUR LA NAVIGATION DE BEZOUT**, in-8. 3 fr.
 - REYNAUD, Examineur des Candidats de l'Ecole Polytechnique. **ARITHMÉTIQUE**, à l'usage des élèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Militaire, 14^e édition, augmentée d'une Table des Logarithmes des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix mille, 1 vol. in-8., 1827. 4 fr. 50 c.
 - **TRAITÉ D'ALGÈBRE**, à l'usage des élèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole spéciale Militaire, 1 vol. in-8., 6^e édit. *Sous presse*.
 - **ALGÈBRE**, ancienne édit., 2^e section, 1 vol. in-8., 1810. 5 fr.
 - **TRAITÉ DE L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMETRIE**, à l'usage des élèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique; 1 vol. in-8. avec 10 pl., 1819. 6 fr.
 - **COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE**, à l'usage des élèves qui se destinent à subir les examens pour le Baccalauréat ès-lettres, 1 vol. in-8., 1824. 6 fr.
 - **TRIGONOMETRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE**, 3^e édit., suivie des TABLES DES LOGARITHMES des nombres et des lignes trigonométriques de LALANDE, in-8. avec fig., 1818. 3 fr.
 - Les Tables de Logarithmes de LALANDE seules, sans la Trigonométrie, se vendent séparément. 2 fr.
 - **ARITHMÉTIQUE** à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, in-8. 5 fr.
 - REYNAUD. **MANUEL de l'Ingénieur du Cadastre**, par MM. Pommies et Reynaud; in-4. 12 fr.
 - **TRAITÉ DE TRIGONOMETRIE** de Lagrange, avec les notes de Reynaud, in-4. 7 fr.
 - ET DUHAMEL. **PROBLÈMES ET DÉVELOPPEMENS** sur les diverses parties des mathématiques, in-8. avec 11 pl., 1823. 6 fr.
 - **NOTES SUR L'ARITHMÉTIQUE DE BEZOUT**, 11^e édit.; in-8., 1823. 2 fr. 50 c.
 - **SUR LA GÉOMÉTRIE**, in-8., 1825. 4 fr.
 - **SUR L'ALGÈBRE**, et application de l'Algèbre à la Géométrie; in-8., 1823. 4 fr.
 - RIVARD. **TRAITÉ DE LA SPHÈRE ET DU CALENDRIER**; 7^e édit. (faite sur la 6^e donnée par M. Lalande), revue et augmentée de notes et addit., par M. Pussant, officier supérieur; 1 vol. in-8., avec 3 pl. bien gravées, 1816. 4 fr.
 - ROMME, Associé de l'Institut de France. **TABLEAUX DES VENTS, DES MAREES ET DES COURANS** qui ont été observés sur toutes les mers du globe, avec des réflexions sur ces phénomènes, 2 vol. in-8., 1817. 12 fr.
 - RUGGIÉRI. **ÉLÉMENTS DE PYROTECHNIE** divisés en cinq parties: la 1^{re} contenant le **Traité des matières**; la 2^e, les feux de terre, d'air et d'eau; la 3^e, les feux d'aérostation; la 4^e, les feux de théâtre et les feux de guerre; suivis d'un Vocabulaire et de la Description de quelques feux d'artifices, etc.; 2^e édit. revue, corrigée et augmentée de nouvelles découvertes et inventions faites par l'auteur, telles que les beaux feux verts, baguettes détonantes pour éviter la chute dangereuse des fusées volantes, etc., 1 vol. in-8. avec 28 pl., 1821. 9 fr.
 - **PYROTECHNIE MILITAIRE**, 1812, 1 vol. in-8. avec pl. 6 fr.
 - * SAVARY. **MÉMOIRE SUR L'APPLICATION DU CALCUL** aux phénomènes électro-dynamiques, in-4., figures, 1823. 3 fr.
 - SCHWAB. **ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE**. 1^{re} partie, *géométrie plane*, in-8., 1823. 2 f. 50 c.
 - * SÉANCES DE L'ÉCOLE NORMALE, nouvelle édition, 13 vol. in-8. et 1 vol. de planches. 50 fr.
 - * SEGUIN d'Annonay. **DES PONTS EN FIL DE FER**, 2^e édition, in-4., 1826, figures. 5 fr.
 - * — **MÉMOIRE SUR LE CHEMIN de fer de Saint-Etienne à Lyon par Saint-Chamond, Rive-de-Gier et Givors**, in-4., figures, 1826. 3 fr.
 - SEGUIN. **MANUEL D'ARCHITECTURE**, ou Principes des Opérations primitives de cet Art, où l'on expose des Méthodes abrégées tant pour l'évaluation des surfaces et solides circulaires que pour le développement des courbes, et pour l'extraction des racines carrées et cubiques, par de nouvelles règles fort simples. Cet ouvrage est terminé par une table des carrés et des cubes, dont les racines commencent par l'unité et vont jusqu'à dix mille. In-8., avec 10 pl. 6 fr.
 - **TABLES DES NOMBRES CARRÉS ET CUBIQUES**, et des racines de ces nombres, depuis un jusqu'à dix mille. 3 fr.
 - SERVOIS. **SOLUTIONS PEU CONNUES** de différents problèmes de Géométrie pratique, 1 vol. in-8. 2 fr. 50 c.
 - SGANZIN, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, etc. **PROGRAMMES OU RÉSUMES DES LEÇONS D'UN COURS DE CONSTRUCTION**, avec des Applications tirées principalement de l'Art de l'Ingénieur des Ponts et Chaussées, 3^e édition, revue et considérabl. aug., 1 vol. in-4., 1821 avec 10 pl. 15 fr.
 - SIMONIN. **TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE DÉCIMALE**, 1 vol. in-8. 2 fr.
 - SYLVESTRE. **TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE**

- QUE à l'usage des Pensionnats et des Écoles Chrétiennes, 3^e édit., 1822. 5 fr.
- SIMMENCOURT. TABLEAUX DES MONNAIES** de change et des monnaies réelles, des poids et mesures, des cours des changes et des usages commerciaux des principales villes du monde, ou Répertoire du banquier, in-4., 1817. 3 fr.
- SINGER (George). ÉLÉMENTS D'ÉLECTRICITÉ ET DE GALVANISME**, traduit de l'anglais par THILLAYE, Professeur au collège Louis-le-Grand, 1 fort vol. in-8., 1816. 8 fr.
- SMEATON. (Voyez GIRARD.)**
- SOULAS. LA LEVÉE DES PLANS ET L'ARPENTAGE RENDUS FACILES**, précédées de notions élémentaires de Trigonométrie rectiligne à l'usage des employés au Cadastre de la France, deuxième édition, revue et corrigée, 1 vol. in-8., 1820, avec 3 pl. 3 fr.
- STAINVILLE (De), Répétiteur à l'École Polytechnique. MÉLANGES D'ANALYSE ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE**, 1 vol. in-8. de 600 pages, 1815, avec 3 pl. 7 fr. 50 c.
- STIRLING. ISAACI NEWTONI ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS**, sequitur illustratio ejusd. tractatus, in-8. 7 fr. 50 c.
- SUZANNE**, Docteur ès-Sciences, Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne à Paris, etc. **DE LA MANIÈRE D'ÉCRIRE LES MATHÉMATIQUES**; Ouvrage destiné à servir de guide aux jeunes gens, à ceux surtout qui veulent approfondir cette science, ou qui aspirent à être admis à l'École Normale ou à l'École Polytechnique, 3 vol. in-8., avec fig.
- Chaque partie se vend séparément : savoir,*
- 1^{re} Partie. PRÉCEPTES GÉNÉRAUX ET ARITHMÉTIQUE, seconde édition, considérabl. aug., in-8. 6 fr.
 - 2^e Partie. ALGÈBRE, épuisée, in-8. ne se vend plus séparément.
 - 3^e Partie. GÉOMÉTRIE, in-8. 6 fr. 50 c.
- TEDFAT**, Recteur de l'Académie de Nîmes. **Leçons élémentaires D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE**, in-8. 5 fr.
- **Leçons élémentaires de GÉOMÉTRIE**, in-8. 5 fr.
- **Leçons élémentaires d'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE**, et Calculs différentiel et intégr., 2 vol. in-8., 10 fr.
- * **TISSERAND. Traité d'arithmétique algébrique**, in-8., 1823. 5 fr.
- THEVENEAU. COURS D'ARITHMÉTIQUE** à l'usage des Écoles centrales et du Commerce, in-8. 3 fr.
- THIOUT aîné**, maître horloger à Paris. **TRAITÉ D'HORLOGERIE MÉCANIQUE ET PRATIQUE**, approuvé par l'Académie des Sc., 2 vol. in-4., avec 91 pl. 36 fr.
- * **TRAITÉ DE GÉODÉSIE PRATIQUE**, contenant de nouvelles méthodes à l'usage des arpenteurs et des géomètres du cadastre, suivi d'un recueil de lois et de diverses formules et procédés verbaux, concernant le ministère des arpenteurs, in-8., 1827, figur. 2 f. 50 c.
- TREDGOLD (Thomas)**, Ingénieur civil, Membre de l'Institution des Ingénieurs civils. **ESSAI PRATIQUE SUR LA FORCE DU FER COULÉ ET D'AUTRES MÉTAUX**, destiné à l'usage des ingénieurs, des maîtres de forges, des architectes, des fondeurs, et de tous ceux qui s'occupent de la construction des machines, des bâtiments, etc., contenant des règles pratiques, des tables et des exemples, le tout fondé sur une suite d'expériences nouvelles, et une table étendue des propriétés de divers matériaux; traduit de l'anglais, sur la deuxième édition, par T. DUVERNE. 1 vol. in-8. avec planch., 1826. 6 fr.
- TREDGOLD. PRINCIPES DE L'ART DE CHAUFFER ET D'AÉRER LES ÉDIFICES PUBLICS**, les Maisons d'habitation, les Manufactures, les Hôpitaux, les Serres etc., et de construire les Foyers, les Chaudières, les Appareils pour la vapeur, les Grilles, les Étaves, démontrés par le Calcul et appliqués à la Pratique; avec des remarques sur la nature de la Chaleur et de la Lumière, et plusieurs Tables utiles dans la Pratique; trad. de l'anglais sur la 2^e édit., par Th. DUVERNE. 1 vol. in-8., avec planch. 1825. 7 fr.
- **TRAITÉ PRATIQUE** sur les chemins en fer et sur les voitures destinées à les parcourir; principes d'après lesquels on peut évaluer leur force, leurs proportions et la dépense qu'ils nécessitent; ainsi que leur produit annuel; conditions à remplir pour les rendre utiles, économiques et durables; théorie des chariots à vapeur, des machines stationnaires, et de celles où l'on emploie le gaz. Leur effet utile et les frais qu'elles occasionent. Orné de planches, et contenant beaucoup de tables, in-8. 1826. 5 fr.
- TREUIL**, Professeur à l'École militaire de Saint-Cyr. **ESSAIS DE MATHÉMATIQUES**, contenant quelques détails sur l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie et la Statique, in-8., 1819. 2 fr.
- * **TRISTAN (comte de)**. Recherches sur quelques effluves terrestres, in-8., 1826. 6 fr.
- * **VALLÉE**, ancien élève de l'École Polytechnique, Ingénieur au Corps royal des Ponts et Chaussées. **TRAITÉ DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE**, dédié à M. MONGE. (Ouvrage sur lequel l'Institut de France a fait un rapport très-avantageux.) 2^e édit., 1 vol. in-4., avec un atlas de 67 pl., 1825. 20 fr.
- * **TRAITÉ DE LA SCIENCE DU DESSIN**, contenant la théorie générale des ombres, la perspective linéaire, la théorie des images d'optique, et la perspective aérienne appliquée au lavis; pour faire suite à la Géométrie descriptive; 1 vol. in-4., avec un atlas de 56 pl., 1821. 20 fr.
- VAN-BEEK**. De l'influence que le fer des vaisseaux exerce sur la boussole, et un moyen d'estimer la déviation que l'aiguille éprouve de ce chef, trad. du hollandais; par M. Lipkins; in-8. 2 fr. 50 c.
- VASTEL. ARITHMÉTIQUE DU JEU DE BOSTON**, ou Chances Bostoniennes, in-12. 1 fr. 50 c.
- **ART DE CONJECTURER**, traduit du latin de J. Bernoulli, avec des observations, éclaircissements et additions, in-4^o. 7 f. 50 c.
- WATIN. L'ART DU PEINTRE**, doreur et vernisseur, nouvelle édition, augmentée de l'art du fabricant de couleurs, par BOUNGEOIS, in 8., 1823. 5 fr.
- * **VINCENT, professeur de mathématiques spéciales. COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE**, à l'usage des élèves qui se destinent à l'école polytechnique et à l'école militaire, in-8., 1826, figures. 6 fr.
- VIOLAINE. RECUEIL DES TABLES UTILES A LA NAVIGATION**, traduit de l'anglais de John William NORRIS, professeur d'Hydrographie à Londres; précédé d'un **ABRÉGÉ DE NAVIGATION PRATIQUE**, contenant ce qui est nécessaire et indispensable à toutes les classes de marins; enrichi de plus, d'un **VOCUBULAIRE** des termes les plus usités dans la MARINE; le tout extrait des meilleurs Auteurs français, anglais, espagnols, etc; recueilli, mis en ordre et augmenté de Remarques et Observations nouvelles, par P. A. VIOLAINE, ex-Commissaire de Marine, Professeur de Mathématiques et de Navigation, etc.; 1 vol. in-8., 1815. 9 fr.
- VISCONTI. MUSÉE PIE CLÉMENTIN**, 8 vol. in-8., contenant chacun un grand nombre de planches. 250 f.
- VOIRON. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE** depuis 1781 jusqu'à 1811, pour servir de suite à l'Histoire de l'Astronomie de Bailly, in-4., 1811. 12 fr.
- (Cet ouvrage est indispensable aux personnes qui possèdent les 5 volumes de l'Astronomie de Bailly.)
- WILLAMEZ, vice-amiral. DICTIONNAIRE DES TERMES DE MARINE**, nouvelle édition, revue et considérablement augmentée, 1825, vol. in-8., avec pl. dessinées et gravées par Baugean. 12 fr.
- Le même, avec 157 pavillons. 15 fr.
- Les 157 pavillons coloriés se vendent séparément. 3 fr.
- SUPPLÉMENT.**
- LEFÈVRE, ingénieur en chef de cadastre. APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE** à la mesure des lignes inaccessibles, et des surfaces planes, etc., ou longipolymètre pratique, in 8., 5 figures. 1827. 5 fr.
- VOYAGE MÉTALLURGIQUE EN ANGLETERRE**, ou Recueil de mémoires sur le gisement, l'exploitation et le traitement des minerais d'étain, de cuivre, de plomb, de zinc, et de fer, dans la Grande-Bretagne, par M. DUFRÉNOY ET ELIE DE BEAUMONT, ingénieurs des mines. 1 fort vol. in-8. avec 17 planches. 1827. 12 fr. 50 c.
- * **D'ARCET. DESCRIPTION D'UNE SALLE DE VAISSEAU**, présentant l'application des perfectionnements et des appareils accessoires convenables à ce genre de constructions; in-4., 1827, fig. 2 fr.
- * — **INSTRUCTION RELATIVE A L'ART DE L'APPAREIL**, rédigé au nom du conseil de salubrité de la ville de Paris et du département de la Seine; in-4., 1827, avec 3 grandes planches. 3 fr.
- * **LAURENT**, peintre, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de dessin à l'École royale forestière de Nancy. **THÉORIE DE LA PERSPECTIVE, première partie, TRAITÉ DE PERSPECTIVE LINÉAIRE** à l'usage des artistes; in-8., 1827, fig. 4 fr.
- * **THOUIN (André)**, membre de l'Institut, professeur de culture au Muséum d'histoire naturelle, etc. **Cours de culture et naturalisation des végétaux**, 3 vol. in-8., et atlas de 65 planches in-4. 1827. 35 fr.
- SOUS PRESSE :**
- CONNAISSANCE DES TEMPS** pour 1830.
- APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE**, à l'usage de l'École polytechnique, par MONGE, 5^e édition, in 4.
- ESSAI SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES**, suivi de notices sur quelques géomètres célèbres, par M. LACROIX, membre de l'Institut, in-8.
- GÉOMÉTRIE DU COMPAS**, par Macheron, 2^e édition, in-8., figures.
- TRAITÉ DES MACHINES A VAPEUR**, traduit de l'anglais de Tredgold, etc. 1 vol. avec planches.
- 1
- IMPRIMERIE DE FAIN. RUE RACINE, N^o 4, PLACE DE L'ODÉON.**





