

Traité du calcul intégral, pour
servir de suite à l'Analyse des
infiniments petits de M. le
marquis de l'Hôpital / par [...]

Bougainville, Louis Antoine de (1729-1811). Traité du calcul intégral, pour servir de suite à l'Analyse des infiniments petits de M. le marquis de l'Hôpital / par M. de Bougainville,.... 1754-1756.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisationcommerciale@bnf.fr.

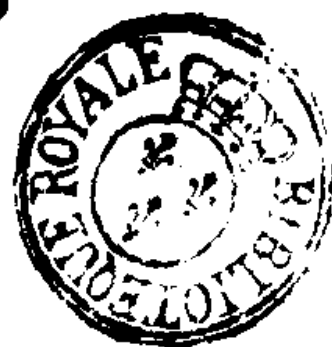
TRAITÉ
D U
CALCUL INTÉGRAL,

POUR SERVIR DE SUITE

A L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS

DE M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL;

Par M. DE BOUGAINVILLE , le jeune,



A P A R I S,

Chez H. L. GUÉRIN & L. F. DELATOUR ,
rue Saint Jacques , à Saint Thomas d'Aquin.

M. DCC. LIV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.



A MONSEIGNEUR
LE COMTE
D'ARGENSON,
MINISTRE
ET SECRÉTAIRE D'ÉTAT
DE LA GUERRE,
HONORAIRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

MONSEIGNEUR,

*Il n'appartient qu'à ceux qui Vous ressemblent,
d'aspirer au titre glorieux de Protécteurs des
Sciences, parce que seuls capables de les chérir
en Hommes de goût, & de les apprécier en*

a ij

Hommes d'Etat , ils mettent une partie de leur gloire à les rendre florissantes. Le grand Ecrivain dont les découvertes nous instruisent , & le Ministre éclairé dont l'estime bienfaisante anime nos efforts , ont la même part à nos progrès & le même droit à notre reconnoissance. C'est sous Vos yeux , MONSEIGNEUR, que je suis entré dans la carrière des Sciences : je dois Vous offrir les premiers fruits de mes travaux. S'ils sont utiles , comme j'ose l'espérer , ils sont dignes de Vous ; & l'hommage que je Vous en fais ne l'est pas moins , puisqu'il est sincère & désintéressé. Un motif personnel se joint cependant aux sentimens qui me l'ont dicté : c'est le desir d'inspirer aux Lecteurs un préjugé favorable à mon Ouvrage , en le faisant paroître sous les auspices d'un Nom cher à la Littérature , & fait pour passer à la postérité.

Je suis avec un profond respect ,

MONSEIGNEUR ,

Votre très-humble & très-obéissant
Serviteur , DE BOUGAINVILLE.

PRÉFACE.

LE Calcul ou la Géométrie des Infiniment-Petits a deux branches, *le Calcul différentiel & le Calcul intégral*. Le premier est l'art de trouver les grandeurs infiniment petites qui sont les élémens ou les différences des grandeurs finies : le second est l'art de retrouver, par le moyen des grandeurs infiniment petites, les grandeurs finies auxquelles elles appartiennent. Le Calcul différentiel descend du fini à l'infiniment petit ; l'intégral remonte de l'infiniment petit au fini : le premier décompose, pour ainsi dire, une quantité ; le dernier la rétablit. Mais ce que l'un a décomposé, l'autre ne le rétablit pas toujours ; soit que tout ne soit pas intégrable, soit que l'art n'ait pu parvenir encore à intégrer tout ce qui peut l'être.

En 1684. Leibnitz donna dans les Actes de Leipzig les regles du Calcul différentiel ; & trois ans après, Newton publia son Livre des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*, presque entièrement fondé sur ce même Calcul. Il se trouve seulement entre Leibnitz & Newton une petite différence pour

la dénomination du calcul & pour la caractéristique * des quantités qui en sont l'objet. L'expression de Leibnitz est admise par-tout, excepté en Angleterre ; & elle paroît en effet plus commode.

Leibnitz, en donnant les regles du Calcul différentiel, en cacha les démonstrations. M^{rs} Bernoulli les découvrirent aussi-tôt, & les publièrent. S'étant depuis attachés au nouveau calcul, ils y ont fait des progrès rapides ; ils l'ont même enrichi considérablement par les différentes méthodes qu'ils ont inventées, & par les usages auxquels ils ont appliqué ces méthodes.

Mais ces découvertes semées dans différens Livres ne formoient point un tout. M. le Marquis de l'Hôpital résolut d'en faire un

* *Nota.* Ce que Leibnitz nomme *différence*, Newton le nomme *fluxion* : ainsi ce que le premier appelle *Calcul différentiel*, le second l'appelle *Calcul des fluxions*. Newton nomme aussi *fluente* ce que Leibnitz nomme *intégrale*, & *Calcul des fluentes* ce que ce dernier nomme *Calcul intégral*. A l'égard de la caractéristique, Newton pour marquer qu'une variable x flue ou est différenciée, met un point au-dessus, de la manière suivante $\dot{x}$. Pour marquer une seconde différence, il met deux points ; pour une troisième, trois points ; & ainsi de suite $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, &c. Leibnitz se sert de la lettre d qu'il place au devant de la changeante différenciée, & il la répète autant de fois qu'il y a d'unités dans le degré de la différence. Ainsi dx , d^2x ou d^2x , d^3x ou d^3x , &c. marquent les différences première, seconde, troisième, &c. de x .

corps , & de les dévoiler en même temps sans réserve. En 1696. il publia l'*Analyse des Infiniment-petits* qui contient les regles du Calcul différentiel & les applications dont il est susceptible. Le grand nom de l'Auteur dans les Mathématiques , l'accueil universel fait à son Ouvrage , les applaudissemens qu'il a reçus , & les progrès dont la Géométrie lui est redevable , me dispensent d'en faire l'éloge.

Quelques années après la mort de Newton , parut son *Traité des Fluxions* ou du Calcul différentiel , qu'il avoit composé en latin & achevé en 1671. En 1736. les Anglois en donnèrent une traduction dans leur langue ; & l'illustre M. de Buffon l'a depuis traduit en françois. On lit à la tête de sa traduction une Préface , dans laquelle est détaillée l'histoire de la dispute qui s'éleva , au sujet de l'invention du Calcul de l'infini , entre Leibnitz & Newton , c'est-à-dire , entre Leibnitz & l'Allemagne d'une part , & l'Angleterre de l'autre : car Newton laissant agir pour lui sa nation , & sur-tout sa renommée , demeura simple spectateur. M. de Buffon n'entreprend point de décider une question qui partage encore aujourd'hui l'Europe ; mais il met son lecteur en état de prononcer.

Le Traité des Fluxions brille par-tout de ces traits de génie qui caractérisent l'invention. Les regles y sont démontrées avec clarté ; les applications nombreuses qu'on fait de ces regles prouvent la fécondité de la méthode , & enseignent l'art de s'en servir. Mais ce qui ne laisse rien à désirer , c'est que les regles y ont pour base une Méthaphysique solide & lumineuse. Le Calcul infinitésimal de Newton est indépendant de la réalité des quantités infiniment petites ; réalité que l'Auteur n'admet nulle part comme un principe nécessaire. La supposition qu'il en fait , n'est qu'une hypothèse momentanée pour abréger le procédé & le rendre plus simple. Il ne fait autre chose qu'appliquer le calcul à la méthode d'exhaustion des Anciens, c'est-à-dire, à la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi ce grand Philosophe ne différentie-t-il jamais des quantités , mais des équations ; parce que toute équation exprime un rapport entre deux indéterminées ; & qu'ainsi différentier une équation , c'est trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux indéterminées renfermées dans l'équation.

Faute d'être parti de ce principe , Leibnitz effrayé des difficultés que faisoient contre les grandeurs

grandeurs infiniment petites, Rolle & les autres ennemis des nouveaux calculs, réduisit ses infiniment petits à n'être que des *incomparables*, dans le même sens que l'on diroit que notre globe est *incomparablement* plus petit qu'une sphere dont la distance du soleil à Sirius seroit le demi-diametre. C'étoit ruiner l'exactitude géométrique des calculs : c'étoit détruire d'une main ce qu'il avoit élevé de l'autre. Il souffrit même que quelques Savans, à la tête desquels étoit Niewentit, admissent simplement les infiniment-petits du premier ordre, & rejettassent tous ceux d'un ordre plus élevé ; ce qui néanmoins est un des principaux fondemens du Calcul différentiel.

Quoi qu'il en soit au reste, de l'Inventeur de ce calcul, les Géometres en trouveront les regles dans le Traité des Fluxions de Newton & dans l'Analyse des Infiniment-petits de M. le Marquis de l'Hôpital ; & à l'exception d'une branche de ce calcul dont nous parlerons plus bas, ils n'auront rien à désirer sur cette matiere, après la lecture de ces Ouvrages.

A l'égard du Calcul intégral, Newton en avoit laissé entrevoir quelques regles dans son livre des *Principes*. Il les étendit ensuite & les développa dans l'Ouvrage qui a pour titre :

de Quadraturâ curvarum, publié pour la première fois en 1704. à la suite de son Traité d'Optique. On y trouve des méthodes générales pour intégrer certaines différentielles, des formules calculées d'après ces méthodes, l'usage de ces formules pour construire des tables d'intégrales, & enfin des tables même toutes construites.

Tous les grands Géometres ont travaillé depuis à l'envi sur cette matiere, dont l'importance & la difficulté étoient pour eux de puissans motifs. Les Bernoulli qui sont presque en droit de prétendre à la gloire de l'invention, & par la promptitude avec laquelle ils ont saisi quelques rayons de cette Science qui s'échappoient à peine, & par l'usage qu'ils en ont fait, donnerent de nouvelles méthodes d'intégration, qui se trouvent dans le recueil de leurs Ouvrages & dans les Actes de Leipfic. Il y a même une partie essentielle de la nouvelle Analyse, qui appartient toute entière à l'illustre Jean Bernoulli : c'est le Calcul différentiel & intégral des quantités logarithmiques & exponentielles ; quantités auxquelles Newton & Leibnitz ne paroissoient pas avoir pensé. Cotes enrichit encore le Calcul intégral de plusieurs belles méthodes dans un Ouvrage intitulé :

Harmonia mensurarum ; ouvrage qui vient d'être traduit , éclairci & augmenté par le savant D. Charles Walmesley , Bénédictin Anglois. *

Le premier Traité élémentaire de Calcul intégral se trouve dans l'Analyse démontrée du P. Reyneau , publiée en 1708. Il y donne les principales méthodes connues de son temps ; il en démontre même quelques-unes qui ne l'avoient pas été par leurs Auteurs. Mais depuis ce temps les méthodes se sont beaucoup multipliées : d'ailleurs le P. Reyneau est tombé dans quelques erreurs assez considérables.

En 1730. parut un Ouvrage de M. Stone, intitulé : *Analyse des Infiniment-petits , comprenant le Calcul intégral dans toute son étendue*. Le titre de ce livre promet beaucoup : mais malheureusement l'ouvrage ne répond point au titre ; il est bon même d'avertir les commençans , qu'ils pourroient être induits en erreur par des paralogismes qui s'y rencontrent en assez grand nombre. Je me contenterai d'en citer un exemple : *On ne peut trouver* , dit l'Auteur dès la première page de son livre , *les Intégrales exprimées par des*

* Son Livre a pour titre : *Analyse des mesures des rapports & des angles , ou réduction des intégrales aux logarithmes & aux arcs de cercle.*

fractions & par des quantités sourdes, qu'en faisant disparoître dans les unes leur dénominateur complexe & dans les autres leur signe radical ; ce qui se fait par le moyen d'une serie infinie. Cette proposition est évidemment fautive. Il suffit pour en être convaincu, de savoir les premiers principes du Calcul différentiel. Ils nous apprennent que toute fraction finie a pour différentielle une fraction, & qu'une quantité composée de radicaux les conserve aussi dans sa différentielle. On trouvera donc dans ces deux cas des intégrales finies, sans avoir besoin de recourir aux series infinies.

Qu'il me soit permis de remarquer ici que souvent on abuse de ces series. La théorie des Suites est importante, utile, nécessaire même en certains cas. Elle a précédé la découverte des nouveaux calculs qui ne peuvent s'en passer quelquefois ; & c'est le supplément le plus heureux que l'on ait trouvé à l'imperfection des méthodes. Mais le calcul des Suites ne donnant que par approximation les valeurs cherchées, & d'ailleurs étant long, pénible, & quelquefois fautif dans la pratique, il me semble qu'on ne doit l'employer qu'avec beaucoup de réserve & de précaution.

Enfin de tous les Ouvrages où l'on s'est proposé de traiter le Calcul intégral , le plus estimable , au jugement des connoisseurs , est celui de M^{lle} Agnesi , intitulé : *Instituzioni analitiche all'uso d'ella gioventù Italiana*. Ainsi l'Italie qui a été le berceau de l'Algebre , a produit aussi l'ouvrage le plus étendu que nous ayons sur la nouvelle Analyse. L'illustre Académicienne dans la partie de son livre destinée au Calcul intégral , suit un ordre qui répand un grand jour sur cette matiere : elle explique & démontre très-clairement différentes méthodes , & fait voir par-tout une grande science du calcul & beaucoup d'adresse pour le manier. Cependant son ouvrage n'est pas complet ; & l'on peut encore regarder le Livre de M. le Marquis de l'Hôpital comme la première moitié d'un grand tout qui en attend une seconde.

En effet , depuis que l'Ouvrage de M^{lle} Agnesi a paru , les Mémoires des Académies des Sciences de Paris , de Berlin , de Petersbourg , de Londres , se sont remplis d'excellens morceaux sur le Calcul intégral. M^{rs} Daniel Bernoulli , Euler , Clairault , Fontaine , d'Alembert , & un petit nombre d'autres Géomètres qui empêchent aujourd'hui l'Europe de

regretter ceux du siècle passé , se sont fort attachés à cette partie importante de la Géométrie. Non contents de se servir de cet Art sublime dans toutes leurs découvertes , ils ont perfectionné l'Art même par des méthodes également fécondes & élégantes.

Ainsi ceux qui veulent apprendre le Calcul intégral , sont obligés d'étudier un grand nombre de pièces détachées qui se trouvent éparées dans différens livres que souvent ils ne connoissent pas , ou qu'ils sont hors d'état de consulter. Cet obstacle joint à la difficulté même de la matière peut rebuter pour toujours , ou au moins arrêter dans leur course , de bons esprits dont les progrès seroient avantageux à la Géométrie. Ajoutons que les inventeurs des méthodes écrivant ordinairement pour les Savans , ne songent pas toujours à se mettre à la portée de ceux qui commencent.

Il étoit donc à souhaiter qu'on recueillît & qu'on rassemblât dans un seul Traité les différens morceaux sur le Calcul intégral , dispersés dans les ouvrages particuliers & dans les Mémoires des Académies ; qu'on fît un choix des méthodes essentielles & générales ; qu'on les présentât sous un point de vue facile à saisir ; qu'on rétablît les propositions intermédiaires

que suppriment assez souvent les inventeurs pour ne donner que des résultats ; que l'on conduisît enfin les commençans pas à pas & comme par la main dans les routes embarrassées de ce labyrinthe.

Je n'aurois pas osé former un tel projet , si je n'y avois été encouragé par les conseils de quelques amis, dont les lumieres m'ont été d'un grand secours. Sûr qu'ils ne m'abandonneroient pas dans une entreprise peut-être au-dessus de mes forces , je suis entré dans la carrière : c'est au Public à juger des premiers pas que j'y fais.

J'ai mis à la tête de cet Ouvrage une Introduction, dans laquelle j'ai exposé le Calcul différentiel des quantités logarithmiques & exponentielles , qui ne se trouve pas dans l'Analyse des Infinitement-petits. J'ai été contraint à cette occasion d'entrer dans quelque détail sur les principales propriétés des logarithmes & de la logarithmique. Cette Introduction renferme encore une théorie abrégée des sinus & des cosinus des angles , & des racines imaginaires des équations. Ces théorèmes m'ont été nécessaires pour ne rien supposer dont le lecteur n'eût sous ses yeux la démonstration.

Je divise ensuite l'Ouvrage en deux parties.

La premiere contient les regles du Calcul intégral des différentielles qui n'ont dans leur expression qu'une seule variable avec des constantes quelconques. La seconde partie est destinée à expliquer les regles du Calcul intégral des quantités ou des équations différentielles qui renferment deux, trois, ou en général plusieurs variables ; & aussi le Calcul intégral des secondes, troisiemes, &c. différences. Cette division m'a paru la plus simple & la plus naturelle. Je ne donne aujourd'hui que la premiere partie ; la seconde la suivra de près. Je pourrois même, si le Public me paroît le désirer, y joindre une troisieme partie, qui contiendrait l'application du Calcul intégral aux plus beaux Problèmes de Géométrie, d'Astronomie, de Méchanique & de Physique.

Pour remplir le plan de ce Traité, j'ai fait enforte de n'oublier aucune des méthodes connues jusqu'à présent. Je les ai placées dans l'ordre où elles m'ont paru se prêter le plus grand jour, allant des plus simples aux plus composées. A la suite de l'exposition de chaque méthode j'ai ajouté un, deux ou plusieurs exemples généraux, afin de ne laisser aux commençans aucune difficulté sur l'application des principes. Dans les endroits où l'on
ne

ne peut se passer de calculs longs & pénibles, (& ces endroits se rencontrent assez fréquemment,) j'ai fait les calculs tout au long, marchant de conséquences en conséquences, sans en supprimer aucune ; bien convaincu que le mérite principal d'un ouvrage élémentaire, est la clarté. En un mot, j'ai tâché qu'il ne restât plus à cette matière que la difficulté qui en est absolument inséparable. Je prends mon lecteur au sortir de l'Analyse des Infinités de M. le Marquis de l'Hôpital, & je suppose qu'il a les connoissances nécessaires pour entendre cet Ouvrage.

Les sources dans lesquelles j'ai puisé, sont le *Traité de la quadrature des Courbes* de Newton ; l'*Analyse démontrée* du P. Reyneau d'où j'ai tiré plusieurs méthodes, en avertissant des méprises qui lui sont échappées ; les Ouvrages de Jean Bernoulli ; le *Traité de l'Analyse des mesures des rapports & des angles*, &c. de D. Charles Walmesley ; l'Ouvrage de M^{lle} Agnesi ; les Mémoires des Académies des Sciences de Paris, de Berlin & de Petersbourg ; & enfin quelques Mémoires de M. d'Alembert qui ne sont point imprimés, & qu'il a bien voulu me communiquer. Je lui dois trop pour ne pas saisir cette occasion de lui témoigner

publiquement ma reconnoissance , mais je n'entreprendrai point de faire son éloge : mes louanges n'ajouteroient pas à sa réputation : il peut s'en reposer sur ses ouvrages , sur l'Europe & la Postérité.

Je finirai par avertir que rien n'est à moi dans cet Ouvrage , si ce n'est l'ordre que j'ai tâché de mettre dans les différentes méthodes , & la forme que je leur donne , & qui servira peut-être à les faire entendre. Je serai trop récompensé de mon travail , si je puis me flatter de contribuer aux progrès des jeunes Géomètres. La gloire des inventeurs est plus brillante sans doute ; mais seroit-on Citoyen , si l'on ne préféroit la satisfaction d'être utile à l'honneur d'être admiré ?



*EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences ,*

Du 17. Janvier 1753.

NOUS Commissaires nommés par l'Académie, avons examiné un Ouvrage de Monsieur de Bougainville le jeune, qui a pour titre : *Traité du Calcul intégral pour servir de suite à l'Analyse des Infiniment-petits de M. le Marquis de l'Hôpital.*

Cet Ouvrage est divisé en deux parties : la première traite de l'intégration des différentielles à une seule variable ; & c'est la seule que l'Auteur publie quant à présent : la seconde doit avoir pour objet l'intégration des équations & des quantités différentielles à plusieurs variables, & de différens ordres ; elle doit, suivant le projet de M. de Bougainville, suivre de près la première.

L'Auteur donne dans sa préface l'histoire abrégée du Calcul différentiel & intégral, & les principes sur lesquels est appuyée la métaphysique de ce Calcul, métaphysique que plusieurs Auteurs ont mal entendue. Il parle ensuite des différens ouvrages & mémoires qui ont été publiés sur le Calcul intégral, & dans lesquels il a puisé ; & il finit par présenter à ses lecteurs le plan général du Traité qu'il met au jour, & dont nous rendons compte.

A la tête de l'Ouvrage est une introduction qui contient différentes recherches nécessaires pour l'intelligence des problèmes de Calcul intégral. Dans cette introduction M. de Bougainville, après quelques notions préliminaires, explique d'abord le Calcul différentiel des quantités logarithmiques, qui manque dans l'*Analyse des Infiniment-petits* ; & quoique cette matière soit déjà traitée dans plusieurs ouvrages, M. de Bougainville l'a expliquée d'une manière

c ij

qui la lui rend propre , & qui en donne des idées très-nettes.

Il passe de-là au Calcul différentiel des quantités exponentielles , branche féconde du calcul des logarithmes. Il expose avec beaucoup de netteté tout ce qu'on peut désirer sur cet article , & y joint des remarques qui font concevoir clairement la nature de ces quantités.

Ensuite viennent plusieurs propositions sur les sinus , cosinus , tangentes & sécantes des arcs de cercle : elles servent à démontrer le fameux théorème de M. *Côtes* , si utile dans l'intégration des fractions rationnelles , & conduisent à une théorie encore plus étendue des racines imaginaires des équations. Cette théorie difficile , mais d'autant plus nécessaire qu'elle manque dans les livres ordinaires d'Algebre , & que le Calcul intégral ne sauroit s'en passer , est expliquée avec beaucoup de détail & de précision.

La première partie de l'Ouvrage débute par l'intégration des différentielles de la forme la plus simple : l'Auteur après en avoir donné la règle , l'applique à différens cas qui paroissent plus composés , développe & résout les difficultés qui peuvent s'y rencontrer quelquefois , & paroît avoir prévu tout ce qui peut embarrasser les commençans.

Il remarque ensuite que l'art du Calcul intégral consiste à réduire par différentes transformations une différentielle donnée à cette première forme , la plus simple de toutes. En conséquence il détaille les différentes transformations dont on peut faire usage , en montre l'art & la méthode , indique celles de ces transformations qu'on emploie le plus fréquemment , & rend cet emploi sensible par des exemples choisis.

De-là , M. de Bougainville passe à la théorie de l'addition des constantes : il entre à cette occasion dans des détails qui nous ont paru instructifs , utiles & nouveaux à certains égards.

Ces recherches sont suivies de la méthode pour l'intégration des différentielles binomes & trinomes : l'Auteur en faisant usage , comme il en avertit , du travail du P. *Reyneau* , remarque les fautes où il est tombé en traitant cette matiere , & les expose dans tout le détail & avec toute la clarté qu'exigent le nom de l'Auteur & l'importance du sujet.

Il vient ensuite à l'intégration des fractions rationnelles , & nous croyons pouvoir assurer qu'il ne laisse rien à désirer sur cette partie si essentielle & si étendue du Calcul intégral , que M. *Bernoulli* n'avoit donnée qu'imparfaitement dans les Mémoires de l'Académie 1702. L'Auteur expose d'une manière sensible ce qui manquoit au travail de M. *Bernoulli* , & développe avec beaucoup de netteté & de méthode , les moyens que différens Géometres ont imaginés pour suppléer à ce défaut.

Il fait connoître l'usage de sa théorie , non-seulement en montrant comment on integre une fraction rationnelle quelconque , mais en faisant voir de plus comment on réduit à la forme de fractions rationnelles plusieurs différentielles qui n'ont point cette forme ; & c'est ici sur-tout qu'il fait usage des transformations expliquées plus haut.

M. de Bougainville vient ensuite à l'intégration des différentielles qui supposent la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole , ainsi que des différentielles qui dépendent de la quadrature des courbes du troisième ordre : matiere qu'il traite avec la même étendue que les précédentes , & avec la même exactitude.

Enfin il explique & augmente considérablement les recherches très-abrégées que M. *Newton* a données dans sa Quadrature des Courbes , sur la quadrature de celles dont les équations ont trois ou quatre termes ; & il termine la première partie dont nous rendons compte , par l'intégration des différentielles qui contiennent des quantités exponentielles & logarithmiques , & de celles qui sont affectées de plusieurs signes d'intégration.

L'Auteur a joint à toutes ces recherches un Chapitre sur les Series, qui termine cette premiere partie de son Ouvrage. Dans ce Chapitre il donne tous les principes, & même tous les détails, nécessaires pour se mettre au fait des series & de leurs usages; il enseigne la maniere de les former, les moyens de reconnoître leur convergence ou leur divergence; & enfin leur usage dans le Calcul intégral, & principalement dans la Quadrature du Cercle, & la construction des Logarithmes.

Cet Ouvrage nous paroît remplir le désir où les Géometres étoient depuis long-temps d'avoir un Traité sur le Calcul intégral qui renfermât & expliquât clairement tout ce qui a été fait sur cette matiere, & qu'on ne pouvoit jusqu'ici se rendre familier qu'en recherchant avec beaucoup de peine différens morceaux épars dans un grand nombre d'Ouvrages, & souvent même difficiles à entendre par le peu de détail dans lequel les Auteurs sont entrés. M. de Bougainville supplée à ce que ces Auteurs n'ont point fait, & joint à cet avantage celui de présenter dans un même corps, & sous un même point de vue tous les principes & toutes les méthodes du Calcul intégral, de faire sentir l'esprit & l'art de ces méthodes, & de les détailler avec beaucoup d'ordre, d'intelligence & de clarté. Nous ne doutons point que la seconde partie, à laquelle nous savons que l'Auteur travaille assidûment, ne soit attendue avec beaucoup d'impatience par tous les lecteurs de celle-ci qui nous paroît très-digne de l'approbation de l'Académie & de l'impression. *Signé, NICOLE ; D'ALEMBERT.*

Je soussigné certifie le présent Extrait conforme à son original. & au jugement de la Compagnie. A Paris, ce vingt-neuvieme jour de Mars de l'année mil sept cent cinquante-quatre.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Acad. Royale des Sciences.

A V E R T I S S E M E N T.

DAns le courant de l'impression nous nous sommes aperçus d'une faute qui s'est glissée à l'Article VI. de l'Introduction ; nous allons la corriger ici & même éclaircir cet article qui pourroit arrêter les commençans.

Page 6. ligne 5. au lieu de $n+r$ le nombre de termes qu'il y a depuis 3 jusqu'à 8, & du reste de l'Article, lisez, $n+r$ le nombre de termes qu'il y a depuis m jusqu'à 8, on aura, comme l'on fait par la théorie des progressions géométriques, $m = 3^{\frac{1}{n}}$. Donc en prenant les logarithmes des deux membres de cette équation, on aura $\frac{1}{n} \log 3$, ou $\frac{1}{n}$ pour le logarithme de m . On aura de même $8 = m^{n+r}$; donc $(n+r) \cdot \log m$, ou $(n+r) \cdot \frac{1}{n}$ fera le logarithme de 8.



TRAITÉ



TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL,

SERVANT DE SUITE
A L'ANALYSE
DES INFINIMENT-PETITS
DE M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL.

INTRODUCTION.

*****X*****

CHAPITRE PREMIER.

*Définition du sujet , Division de l'Ouvrage , &
Explication de quelques Signes dont on se
servira dans la suite.*

I.

DÉFINITION. **L'**ART de trouver les grandeurs infini-
ment petites qui sont les différences ou Ce que c'est
que le Calcul
intégral.
les élémens des grandeurs finies , se nomme le Calcul
différentiel. M. le Marquis de l'Hopital, dans son Livre inti-

A

2 INTRODUCTION AU TRAITE'

tulé *Analyse des infiniment petits*, a donné les regles de ce Calcul, & a montré les usages auxquels on le peut appliquer. L'art de remonter des grandeurs infiniment petites aux grandeurs finies dont elles sont la différence, c'est-à-dire de trouver ces grandeurs finies, s'appelle le *Calcul Intégral*; & la quantité finie dont une quantité différentielle est l'élément ou la partie infiniment petite, s'appelle l'*Intégrale* de cette différentielle.

I I.

Division de
l'Ouvrage.

Nous diviserons ce Traité du Calcul intégral en deux parties.

Dans la première nous donnerons les méthodes d'intégrer les différentielles qui n'ont qu'une changeante.

La seconde aura pour objet l'intégration des différentielles qui contiennent deux, ou un plus grand nombre de variables.

Tel est le plan de ce Traité. Pour le remplir, nous établirons, avec le plus d'ordre qu'il nous sera possible, les différentes méthodes sur lesquelles est fondé le Calcul intégral, & nous leur donnerons la plus grande généralité dont elles seront susceptibles, aussi-bien qu'aux exemples qui en feront l'application.

I I I.

Explication
de quelques
Signes dont
on se servira
dans ce Trai-
té.

Nous allons placer ici l'explication de quelques termes & de quelques signes qui reviendront fréquemment dans cet Ouvrage,

1°. Le signe $\int$ mis devant une quantité différentielle, indique l'intégrale de cette quantité. Ainsi $\int dx$ désigne l'intégrale de dx ; $\int dx \times \sqrt{4p+9x}$, l'intégrale de $dx\sqrt{4p+9x}$, & ainsi des autres. Ce signe $\int$ s'énonce par le mot de *somme*; par exemple $\int dx\sqrt{4p+9x}$ s'énonce ainsi, *somme de $dx\sqrt{4p+9x}$* , parce que l'intégrale de $dx\sqrt{4p+9x}$ est en effet la somme des élémens, ou quantités infiniment petites $dx\sqrt{4p+9x}$.

2°. Un point entre deux quantités indique une multiplication, aussi-bien que le signe $\times$. Ainsi $ay.b$, exprime ay multiplié par b , aussi-bien que $ay \times b$. Il en est de même de $(xx+fx+g).(xx+hx+i)$ &c. Nous nous servirons indifféremment de ces deux signes de multiplication.

3°. Lorsqu'une grandeur complexe est élevée à une puissance dont l'exposant est entier ou fractionnaire, positif, ou négatif, on dit que cette grandeur est *sous le signe*. Si elle n'est élevée à aucune puissance, elle est dite *hors du signe*. Ainsi dans $(abdx+2bxdx).(aax+cx) \pm^{\frac{1}{2}}$ $aax+cx$ est sous le signe $\pm^{\frac{1}{2}}$, & $abdx+2bxdx$ est hors du signe.

4°. lx signifie le logarithme de x ; $l(aa+xx)$, celui de $aa+xx$; llx exprime le logarithme du logarithme de x , & ainsi de suite: $(lx) \pm^m$ signifie le logarithme de x , élevé à la puissance dont l'exposant est $\pm m$. Il faut bien distinguer $(lx) \pm^m$ de $l(x) \pm^m$ qui signifie le logarithme de la quantité x élevée à la puissance $\pm m$.

$(\log x^n)^{\pm m}$ veut dire le logarithme de x^n , c'est-à-dire de x élevée à la puissance n , lequel logarithme est lui-même élevé à la puissance $\pm m$.

5°. On appelle fonction d'une quantité variable x , une autre quantité dans laquelle cette variable x se trouve mêlée de quelque manière que ce soit avec ou sans constantes. Ainsi toutes les quantités suivantes sont des fonctions de x , $x^3 + x^2$; $\sqrt{\frac{a^2 + x^2}{b^2 + x^2}}$; $\int dx \sqrt{(a^2 x + b^2 x^2)}$; $a x^3 / x$; & ainsi de plusieurs autres.

On appelle fonction de deux variables xy , une quantité dans laquelle ces deux variables se trouvent mêlées de quelque manière que ce soit avec ou sans constantes : telles sont $xy - xx$; $\sqrt{(axy + byx)}$, &c.

IV.

AVERTISSEMENT. Comme on ne trouve point dans l'Analyse des infiniment petits le calcul différentiel des quantités logarithmiques & exponentielles, nous allons le donner ici, afin que le lecteur n'ait rien à désirer sur cette matière. Nous exposerons ensuite & démontrerons quelques propositions sur les Sinus, sur les Co-sinus & sur les Imaginaires, qui nous sont nécessaires dans la suite de ce Traité. Outre qu'il auroit été incommode de les démontrer à l'endroit même où nous en aurons besoin, parce que la chaîne des matières en auroit été interrompue, le lecteur ne sera peut-être pas fâché de les trouver ici toutes réunies en un seul corps.

CHAPITRE II.

Calcul différentiel des quantités logarithmiques.

V.

LEs Logarithmes sont une suite de nombres en progression arithmétique quelconque, répondans à une suite de nombres en progression géométrique quelconque. Tout système de logarithmes est arbitraire, c'est-à-dire qu'on peut supposer telle qu'on veut la progression arithmétique dont il s'agit. On suppose seulement pour plus de simplicité que le logarithme de l'unité est zéro.

Définition
des Logarithmes.

Qu'on prenne, par exemple, la suite de nombres en progression géométrique,

$$1 : 3 : 9 : 27 : 81 \text{ \&c.}$$

& la suite de nombres en progression arithmétique,

$$0 . s . 2s . 3s . 4s \text{ \&c.}$$

s représentant un nombre quelconque, & 0 étant le logarithme de l'unité; s sera le logarithme de 3, $2s$ celui de 9, & ainsi de suite.

VI.

Il y a plus : cette suite donnera non-seulement le logarithme d'un nombre quelconque de la progression triple, mais encore le logarithme au moins approché d'un nombre quelconque qui ne se trouve pas dans cette progression.

6 INTRODUCTION AU TRAITE'

Par exemple , si on demande le logarithme de 8 , il ne s'agit que de former une progression géométrique continue dans laquelle se trouvent 1, 3, 8, 9. Soit m le second terme de cette progression , n le nombre de termes qu'il y a depuis m jusqu'à 3 , $n+r$ le nombre de termes qu'il y a depuis 3 jusqu'à 8 , on aura , comme l'on fait par les élémens de la théorie des logarithmes , $\frac{r}{n}$ pour le logarithme de m , & $(n+r) \cdot \frac{r}{n}$ pour le logarithme de 8.

V I I.

Maniere de
dresser une
Table de lo-
garithmes.

On peut donc en suivant ce que nous venons d'exposer , c'est-à-dire , en imaginant une progression arithmétique quelconque dont le premier terme soit zéro , & dont les termes répondent à ceux d'une progression géométrique quelconque de nombres entiers , on peut , dis-je , dresser une table qui représente les logarithmes de tous les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à l'infini. Ces tables sont du plus grand usage pour faciliter les opérations arithmétiques. Par leur moyen les multiplications & les divisions se réduisent , comme l'on fait , à des additions & à des soustractions.

V I I I.

Quels sont
les Logarith-
mes dont se
servent les
Géometres.

Dans les tables de logarithmes dont se servent aujourd'hui les Géometres , & qui sont celles de Briggs , on suppose que la progression géométrique est 1, 10, 100 &c. & la progression arithmétique 0, 1, 2 &c. ou , ce qui revient au même 0, 1.000000, 2.000000 &c. en mettant autant de zéros qu'on veut après 1, 2 &c. pour représ

lenter ces nombres en parties décimales, & pour avoir plus exactement & sous la forme de nombres entiers les logarithmes intermédiaires.

I X.

Telle est la théorie des logarithmes. En conséquence de cette théorie, les Géomètres ont imaginé une courbe *BMNV* qu'ils ont nommé *Logarithmique*, dont la propriété principale est que les ordonnées *AB*, *PM*, *QN*, &c. étant en progression géométrique, les abscisses correspondantes *o*, *AP*, *AQ*, &c. sont en progression arithmétique.

Définition
de la Loga-
rithmique.

Fig. 1.

X.

Il est donc évident que si on imagine menées à cette courbe un nombre infini d'ordonnées en progression géométrique, les portions d'abscisses correspondantes seront égales entre elles. Car de ce que *o*, *AP*, *AQ*, &c. sont en progression arithmétique, il s'ensuit que $AP = PQ$, &c.

X I.

D'après la propriété fondamentale de la logarithmique, il est aisé d'avoir son équation.

Manière de
trouver l'é-
quation de la
Logarithmi-
que.

PROBLEME. Trouver l'équation de la logarithmique.

SOLUTION. Soient tirées dans la logarithmique *BMNV* les ordonnées $VT=y$, $NQ=z$, $MP=t$, $AB=u$, & tant d'autres qu'on voudra en progression géométrique, répondantes aux abscisses *x* en progression arithmétique. Je mene à une distance infiniment proche de

Fig. 11

8 INTRODUCTION AU TRAITE'

VT , l'ordonnée vt ; à la même distance de NQ , l'ordonnée aussi infiniment proche nq ; & ainsi de suite. On voit que chaque portion d'abscisse, renfermée entre deux ordonnées infiniment proches, sera la même, & pourra par conséquent être désignée par dx , en sorte que $Tt = dx$, & $Qq = dx$. Or puisque $Tt = Qq$, on a par la propriété de la logarithmique $VT : vt :: NQ : nq$; donc *subtrahendo* $Vk : VT :: Ne : NQ$, c'est-à-dire $dy : y :: dx : x$. Donc la raison de dy à y sera constante, c'est-à-dire qu'on pourra égaler $\frac{dy}{y}$ à une constante. Mais dx est constante; on aura donc $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$ (a est une constante quelconque.) C'est l'équation de la logarithmique.

XII.

Démonstration de quelques propriétés principales de cette courbe.

COROLLAIRE. Donc la sous-tangente de la logarithmique est constante, c'est-à-dire qu'elle est la même pour tous les points de la logarithmique. Car l'équation précédente $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$ donne $\frac{y dx}{dy} = a$; or $\frac{y dx}{dy}$ est l'expression de la sous-tangente, comme il est prouvé dans l'analyse des infiniment petits, Sect. II. donc la sous-tangente est constante.

XIII.

THÉOREME. Je dis maintenant que soit dans une même logarithmique, soit dans deux logarithmiques différentes, les ordonnées étant prises en même rapport, les portions d'abscisses correspondantes sont entre elles comme les sous-tangentes.

DÉM.

DEM. 1°. Dans la même logarithmique $m M n' N'$, si Fig. 2.
 $MP : mp :: N' Q' : n' q'$, on aura $Pp : Q' q' :: T' p : V q'$. Car alors les portions d'abscisses Pp & $Q' q'$ sont égales, & la sous-tangente est la même. Donc, &c.

2°. Dans deux logarithmiques différentes $m M n' N'$ & Fig. 2. & 3.
 $n N$, si on a $MP : mp :: NQ : nq$, on aura $Pp : Qq :: T' p : Tq$. Car en supposant d'abord que mp est l'ordonnée infiniment proche de MP , & de même que nq est infiniment proche de NQ , on aura par l'hypothese $MP : mp :: NQ : nq$, donc *subtrahendo* $Ms : mp :: Nr : nq$. Mais $Ms : mp :: Pp : T' p$, & $Nr : nq :: Qq : Tq$; donc $Pp : T' p :: Qq : Tq$, ou $Pp : Qq :: T' p : Tq$. Donc les deux portions d'abscisses infiniment petites Pp , Qq seront entre elles en raison des sous-tangentes, c'est-à-dire en raison constante. Menant une 3^e. ordonnée infiniment proche de MP & de NQ , & faisant les mêmes proportions, on trouvera le même résultat. Or par les propriétés des progressions, si on a $a : b :: c : d$, & $e : f :: c : d$, $g : h :: c : d$ &c. on aura $a + e + g$ &c. $b + f + h$ &c. $c : d$. Donc la somme des portions infiniment petites d'abscisses dans une des logarithmiques, fera à la somme des portions infiniment petites d'abscisses dans l'autre logarithmique, comme la sous-tangente de la première de ces logarithmiques est à la sous-tangente de la seconde. Donc si on prend dans deux logarithmiques différentes des ordonnées en même rapport, les portions d'abscisses correspondantes seront entre elles comme les sous-tangentes. Donc, &c.

B

XIV.

COROLLAIRE. Il est aisé de voir maintenant que dans quelque logarithmique que ce soit, le logarithme du rapport d'une ordonnée quelconque à une autre ordonnée sera ou pourra être supposé égal au nombre qui est désigné par le rapport de l'abscisse correspondante à la sous-tangente. Car pourvu que le rapport des ordonnées soit le même, soit dans une même logarithmique, soit dans deux logarithmiques différentes, le rapport de l'abscisse à la sous-tangente sera le même.

X V.

Fig. 1.

Si l'on prend maintenant AB égal à la sous-tangente PR , on trouvera qu'en supposant $PM = 10 AB$, $\frac{AP}{PR}$ logarithme de $\frac{PM}{AB}$ sera $= 2.30258509$, &c. Ce logarithme se trouve par le moyen d'une formule que nous expliquerons dans la première Partie de cet Ouvrage (Art. 338.)

Donc en général quel que soit le rapport de AB à PR , si on prend $PM = 10 AB$, on aura $\frac{AP}{PR} = 2.30258509$, &c.

Donc en faisant $PR = 1$, on aura $AP = 2.30258509$.

Donc (Théor. précédent) quelque part qu'on prenne AB & PM , soit dans la même logarithmique, soit dans deux logarithmiques différentes, pourvu que $PM = 10 AB$, on aura toujours $\frac{PR}{AP} = \frac{1}{2.30258509} = 0.43429448$. Donc $PR = AP \times 0.43429448$.

Donc en supposant, comme on le fait dans les tables,

que le logarithme AP du nombre 10, c'est-à-dire de $\frac{PM}{AB}$ est 1.00000, c'est-à-dire est égal à l'unité, on aura la valeur de la sous-tangente $PR = 0.43429448$.

XVI. Des logarithmes hyperboliques.

Telle est la logarithmique de Briggs, qui est celle des tables dont se servent les Géomètres. Neper a imaginé une autre espèce de logarithmes. On nomme ces logarithmes, hyperboliques; parce que dans la logarithmique de Neper (fig. 1.) on suppose $AB = PR$, & que cette logarithmique peut être tracée par la quadrature de l'hyperbole équilatère, rapportée aux asymptotes, en prenant la première abscisse pour l'unité.

Quels sont les logarithmes de Neper.

Pourquoi on les nomme hyperboliques.

Cette proposition se démontre de la façon suivante. Soit l'hyperbole AKF dont l'équation est $y = x^{-1}$, soient aussi les droites $AB = 1$

Fig. 4.

$$BC = x$$

$$Cc = dx$$

$$CK = x^{-1} = y$$

L'espace élémentaire de l'hyperbole ou $KCc k$ sera par conséquent $y dx$, ou $\frac{dx}{x}$ en mettant pour y sa valeur $\frac{1}{x}$. L'espace entier hyperbolique $ABCK$, ou la somme des espaces élémentaires $KCc k$ est donc $\int \frac{dx}{x}$. Donc la logarithmique peut se construire par la quadrature de l'hyperbole précédente. C'est-à-dire qu'en supposant l'hyperbole quadrable on construira la logarithmique, en lui donnant les mêmes ordonnées qu'à l'hyperbole, & prenant les abscisses

de la logarithmique correspondantes, égales aux espaces hyperboliques divisés par la ligne constante $AB = 1$.

XVII.

Au reste toutes les logarithmiques peuvent être prises pour la logarithmique des tables, en se servant d'une ordonnée quelconque AB pour représenter l'unité dans la suite des nombres naturels, & de AP , ou du logarithme de $PM = 10 AB$ pour représenter l'unité dans la suite des logarithmes, unité qu'on n'est pas obligé de supposer $= AB$; mais dans la logarithmique des tables on suppose pour plus de facilité l'origine A tellement placée, qu'en faisant $AP = AB$, on ait $PM = 10 AB$; au lieu que pour la table des logarithmes de Neper, on suppose l'origine A telle que la sous-tangente $PR = AB$, comme nous l'avons déjà dit.

XVIII.

Les principes que nous venons d'exposer sur les logarithmes suffisent pour entendre ce que nous allons dire sur leur calcul différentiel.

Regle
fondamentale
du calcul dif-
férentiel des
quantités lo-
garithmiques.

L'équation de la logarithmique $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$, se réduit à $\frac{dy}{y} = dx$, en prenant la sous-tangente a pour l'unité. Or de-là on tire cette règle générale pour la différentiation des quantités logarithmiques.

La différence du logarithme d'une quantité quelconque x , est égale à la différence de cette quantité divisée par la quantité même $d.lx = \frac{dx}{x}$.

Ainsi la différence du logarithme de $1 \pm x$ est $\pm \frac{dx}{1 \pm x}$: celle du logarithme de $\pm xy$ est $\pm \frac{x dy \pm y dx}{\pm xy}$ en supposant la sous-tangente de la logarithmique égale à l'unité, & ainsi des autres plus composées.

X I X.

Par cette règle on trouve $d \cdot l a x = \frac{a dx}{a x} = \frac{dx}{x}$. Il s'en-
fuit donc de-là, dira-t-on, que $l x = l a x$. Il est aisé de
prouver que cette conséquence n'est point absurde, quoi-
qu'elle ne suive pas nécessairement de ce que $\frac{a dx}{a x} = \frac{dx}{x}$.
Soit la logarithmique $BMNV$ dans laquelle je fais $AB = b$

Solution
d'une difficul-
té.

Fig. 1.

$$\begin{aligned} PM &= ab \\ QN &= x \\ TV &= ax \end{aligned}$$

on aura $ax : x :: a : 1$; & $ab : b :: a : 1$: Donc $ax : x :: ab : b$: donc $TQ = PA$. Maintenant qu'est-ce que le logarithme de $QN(x)$? c'est le logarithme du rapport de x à une ordonnée que l'on prend pour l'unité ; donc si on prend $AB(b)$ pour l'unité par rapport à x , on aura $l x = l \frac{x}{b} = QA$. Si l'on prend aussi la même ordonnée AB pour l'unité par rapport à $TV(ax)$, on aura $l ax = l \frac{ax}{b} = TA = QA + TQ$. Donc dans ce cas $l ax = l x +$ une constante R . Mais si on prend $PM(ab)$ pour l'unité par rapport à ax , on aura $l ax = l \frac{ax}{ab} = TP =$ (à cause de $TQ = PA$) QA . Donc dans ce cas la constante $R = 0$. Donc de ce que $\frac{a dx}{a x} = \frac{dx}{x}$, il s'ensuit seulement que $l ax = l x + R$; R étant une constante qui peut dans certaines suppositions être $= 0$.

X X.

Autre manière de trouver certaines différentielles logarithmiques.

Il y a certains logarithmes dont la différentielle ne se présente pas au premier coup d'œil : mais on les différentie aisément en se servant de substitutions simples.

Soit proposé, par exemple, de différentier $l.lx$; je suppose $lx = y$, ce qui me donne (Art. précédent) $\frac{dx}{x} = dy$, & $l.lx = ly$, & $d(l.lx) = \frac{dy}{y}$. Mettant pour y sa valeur, & pour dy la sienne, on aura $d(l.lx) = \frac{dx}{x lx}$.

X X I.

Si la proposée est $(lx)^m$, on supposera $(lx)^m = y^m$; d'où je tire $lx = y$; $\frac{dx}{x} = dy$; $d(lx)^m = m y^{m-1} dy$. Donc en mettant pour y & pour dy leurs valeurs, la différentielle cherchée est $m(lx)^{m-1} \frac{dx}{x}$.

X X I I.

Qu'on demande à présent la différentielle de $(lx^n)^m$, je ferai $x^n = z$; la proposée deviendra $(lz)^m$ dont la différentielle est, comme nous venons de le voir, $m(lz)^{m-1} \frac{dz}{z}$; mais z (hyp.) $= x^n$, & $dz = n x^{n-1} dx$; donc la différentielle cherchée est $mn(lx^n)^{m-1} \times \frac{x^{n-1} dx}{x^n} = mn(lx^n)^{m-1} \frac{dx}{x}$.

X X I I I.

Soit encore cherchée la différentielle de $(l.lx)^m$, il faudra supposer $lx = y$: cette supposition donne les équa-

tions suivantes, $\frac{dx}{x} = y$; $l.lx = ly$; $(l.lx)^m = (ly)^m$; donc $d(l.lx)^m = m(ly)^{m-1} \frac{dy}{y}$, & en substituant pour y & pour dy leurs valeurs, on a $m.(l.lx)^{m-1} \frac{dx}{x.lx}$. C'est la différentielle cherchée.

XXIV.

Enfin si je veux différentier $[l.(lx)^m]^n$, je supposerai $(lx)^m = y^m$, d'où il suit que $lx = y$, & que $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$. J'aurai aussi en suivant la même supposition $[l.(lx)^m]^n = (ly^m)^n$. Or la différentielle de $(ly^m)^n$, par ce que nous avons vu précédemment est $mn.(ly^m)^{n-1} \frac{dy}{y}$; & en mettant pour y & dy leurs valeurs en x , cette quantité devient $mn(l.lx)^{n-1} \frac{dx}{x.lx} =$ la différence de $[l.(lx)^m]^n$.

Telles sont les méthodes générales pour la différentiation des quantités logarithmiques; je passe aux exponentielles.

CHAPITRE III.

Calcul différentiel des Quantités exponentielles.

XXV.

LEs quantités exponentielles sont celles qui sont élevées à une puissance dont l'exposant est variable. Définition des Quantités exponentielles. Telle est, par exemple, a^x . Telles sont encore y^x , a^{xy} , a^{x+y} .

M. Bernoulli avoit aussi nommé ces quantités *parcourantes*, parce qu'elles parcourent, pour ainsi dire, toutes les dimensions possibles ; puisque leur exposant étant indéterminé, cet exposant peut être supposé égal à tel nombre qu'on voudra, positif ou négatif, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable.

Les équations composées en tout ou en partie de quantités de cette espèce, se nomment *équations exponentielles*, & les courbes dont ces équations expriment la nature, se nomment *courbes exponentielles*.

XXVI.

Ces quantités sont de différens degrés.

Les quantités exponentielles sont de différens degrés.

Les quantités exponentielles du premier degré, sont celles où l'exposant de la quantité est une indéterminée simple, comme a^y , b^x , z^t , en supposant que y , x , t sont des quantités simplement indéterminées.

Une quantité exponentielle du second degré est celle dont l'exposant est lui-même une exponentielle du premier, comme a^{y^2} , & ainsi de suite. En général une quantité exponentielle d'un degré quelconque a pour exposant une exponentielle du degré précédent.

Il faut appliquer ces principes aux équations & aux courbes exponentielles. Quand une équation est composée d'exponentielles de différens degrés, alors cette équation & la courbe qu'elle désigne, prennent leur nom de l'exponentielle du degré le plus élevé.

XXVII.

XXVII.

Ces quantités tiennent, pour ainsi dire, un milieu entre les *algébriques* & les *transcendentes*. Elles ont de commun avec les algébriques, qu'elles ne renferment aucune grandeur infiniment petite, & avec les transcendentes, qu'elles ne peuvent être représentées par aucune construction géométrique ordinaire.

XXVIII.

On peut rapporter à ce genre, ou plutôt à un genre intermédiaire entre les courbes algébriques & les exponentielles, celles que M. Leibnitz nomme *interfcendentes*. Ce sont celles dans l'équation desquelles on trouve quelques termes avec des exposans irrationels, comme dans l'équation $y^{\sqrt{2}} + y = x$.

On nomme exponentielles imaginaires les quantités dont l'exposant est imaginaire telles que $e^{x\sqrt{-1}}$, ou $e^{x+y\sqrt{-1}}$.

XXIX.

REMARQUE. Des propriétés des logarithmes expliquées dans le Chapitre précédent, on peut déduire les deux propositions suivantes.

1°. On change une équation exponentielle en une autre qui contient les logarithmes des quantités de la première. Ainsi soit $a^x = b^y$: ces grandeurs étant égales, leurs logarithmes sont égaux ; donc $l(a^x) = l(b^y)$. Or par la propriété des logarithmes, le logarithme de a^x est

D'une équation exponentielle on en tire une logarithmique.

xla , & le log. de b^y est ylb . Donc $xla = ylb$; donc l'équation $a^x = b^y$ conduit à cette équation plus simple $xla = ylb$. De même de l'équation $a^{x^z} = b^{y^u}$, on tire d'abord celle-ci $x^z la = y^u lb$; & cette dernière donnera $zlx + l.la = uly + l.lb$; & ainsi des autres.

Et d'une logarithmique
une exponentielle,

2°. On tire une équation exponentielle d'une équation logarithmique. Ainsi de $xlx = la$, on déduit $x^x = a$. Cette opération s'appelle repasser des logarithmes aux nombres.

X X X.

De même si on a l'équation $ly = x$, supposant $1 = lc$, c'est-à-dire que c est un nombre dont le logarithme est l'unité, on aura $ly = x \times 1$, ou $ly = xlc$, d'où l'on tire $y = c^x$. C'est par là que l'équation de la logarithmique que nous avons trouvé être $\frac{dy}{y} = dx$, devient $y = c^x$.

Explication
de cette expression $y = c^x$.

Cette expression veut dire que si on nomme b , la sous-tangente, a l'ordonnée que l'on prend pour l'unité, c l'ordonnée à laquelle répond une abscisse $= b$, on aura $\frac{y}{a} = \frac{c^{\frac{x}{b}}}{c^{\frac{x}{b}}}$, équation qui se change en $y = c^x$, en faisant $a = b = 1$.

Pour démontrer que l'équation $y = c^x$ est la même que $\frac{y}{a} = \frac{c^{\frac{x}{b}}}{c^{\frac{x}{b}}}$, remettons pour l'équation $y = c^x$ son équation logarithmique $ly = xlc$. On remarquera que dans cette équation y , x , & c expriment des lignes. Cependant ly exprime un nombre : car il n'y a que les nombres qui

ayent des logarithmes. Ainsi dans cette expression ly , y doit être censée divisée par une ligne, afin que ly représente véritablement le logarithme d'un nombre. Or cette ligne ne peut être ici que l'ordonnée a que l'on prend pour l'unité. Car nous avons vu plus haut que le logarithme numérique de l'ordonnée d'une logarithmique, n'est proprement autre chose que le logarithme de cette ordonnée divisée par celle que l'on prend pour l'unité. Ainsi au lieu de ly , on peut écrire $l\frac{y}{a}$. Par la même raison, au lieu de lc on écrira $l\frac{c}{a}$. On aura donc $l\frac{y}{a} = x l\frac{c}{a}$. Mais l'équation dans cet état n'est point homogène. Il faudra donc diviser x par quelque ligne constante. Or je dis que cette ligne ne peut être que la sous-tangente b . Car $l\frac{c}{a}$ est égal à l'unité, puisqu'on a supposé que c étoit l'ordonnée dont l'unité est le logarithme. On aura donc $l\frac{y}{a} = x$: or cette équation revient à celle-ci, $l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$ par l'Art. 14. puisque le logarithme d'une ordonnée est égal à l'abscisse divisée par la sous-tangente. Donc l'équation de la logarithmique sera $l\frac{y}{a} = \frac{x}{b} l\frac{c}{a}$ & en repassant aux nombres $\frac{y}{a} = \frac{c^{\frac{x}{b}}}{a^{\frac{x}{b}}}$.

XXXI.

Pour trouver maintenant les différentielles des quantités exponentielles, la seule règle suivante suffit. *La différentielle d'une quantité, est cette quantité même multipliée par la différence de son logarithme.*

Règle générale pour différentier les exponentielles.

Cette règle n'a pas besoin de démonstration. Car la

différence de x , est $\frac{x dx}{x} = dx$, ce que l'on fait d'ailleurs.

XXXII.

Appliquée à
des exemples.

Suivant cette règle la différence de c^x est $c^x dx / c$, ou $c^x dx$, en prenant c pour le nombre dont le logarithme est l'unité. Car le logarithme de c^x est x / c , dont la différence est $dx / c = dx$.

De même la différence de x^y est $x^y dy / x + x^{y-1} y dx$.

XXXIII.

Autre méthode pour
différentier
ces mêmes
quantités.

Pour trouver encore autrement la différentielle de c^x , soit $c^x = z$, on aura $x / c = l z$, ou $x = l z$; donc $dx = \frac{dz}{z}$, ou $z dx = dz$: ou en mettant pour z sa valeur, $c^x dx = dz$.

Si on veut différentier x^y , on fera $x^y = z$, ce qui donne $y / x = l z$; donc en différentiant $dy / x + \frac{y dx}{x} = \frac{dz}{z}$ & $z dy / x + \frac{z y dx}{x} = dz$; donc enfin mettant pour z sa valeur, on a $x^y dy / x + x^{y-1} y dx = dz$.

Il est bon de remarquer à cette occasion que $c^{lx} = x$. Car soit $c^{lx} = z$, on aura $l(c^{lx}) = l z$ ou $l x / c = l z$; donc $l x = l z$, donc $x = z$. Donc $c^{lx} = x$.

XXXIV.

Voilà donc deux manières de différentier une quantité exponentielle. La première est la plus aisée, lorsque la quantité dont l'exposant est indéterminé est constante.

Nouvel exemple de la

Ainsi qu'on demande la différence de $\frac{c^{1V-1} + c^{-1V-1}}{2}$,

je la trouverai tout de suite par la première règle première méthode.

$$\frac{c^{1V-1} dz \sqrt{-1} - c^{-1V-1} dz \sqrt{-1}}{2}, \text{ \& (à cause que } dz \sqrt{-1} = -\frac{dz}{\sqrt{-1}} \text{), elle est } -dz \left(\frac{c^{1V-1} - c^{-1V-1}}{2\sqrt{-1}} \right).$$

La seconde méthode est plus commode, lorsque la quantité dont l'exposant est indéterminé, est elle-même une indéterminée. Ainsi pour avoir la différence de x^{y^t} , je suppose $x^{y^t} = t$, ce qui me donne $y^t \log x = \log t$. Je différencie, & j'ai $y^t \frac{dx}{x} + \log x d(y^t) = \frac{dt}{t}$: ou par l'article précédent, $d(y^t) = y^t dz \log y + y^{t-1} z dy$, donc $\frac{dt}{t} = y^t \frac{dx}{x} + y^t dz \log y + y^{t-1} z dy \log x$; ou enfin en mettant pour t sa valeur, on a $dt = x^{y^t} y^t x^{-1} dx + x^{y^t} y^t dz \log y + x^{y^t} y^{t-1} z dy \log x$. Il en fera de même pour les différentielles d'un degré plus élevé.

Autre exemple de la seconde méthode.

XXXV.

Si on avoit une exponentielle multipliée par une autre, la différentiation seroit aussi aisée. Par exemple, si on avoit $x^y z^u$, la différentielle de cette proposée seroit $z^u \times d(x^y) + x^y \times d(z^u)$. Or nous avons appris à différentier chacun de ces deux membres.

On prendra de même la différence d'une équation composée ou en tout ou en partie d'exponentielles, comme $a^y + x^t = b + z^u$. Il ne s'agira pour cela que de différentier séparément par les méthodes précédentes chaque partie des deux membres de l'équation.

CHAPITRE IV.

*Propositions sur les Sinus , Co-sinus , Tangentes ,
& Secantes.*

XXXVI.

Intégration
de quelques
différentielles
nécessaire
pour la suite.

Nous avons vu (Art. XVIII.) que la différentielle de $y = lx$ est $dy = \frac{dx}{x}$. Donc réciproquement l'intégrale de $dy = \frac{dx}{x}$ est $y = lx$; & en changeant cette équation logarithmique en une exponentielle, (Art. XXIX. N°. 2.) elle devient $x = e^y$, e représentant ici le nombre dont le logarithme est l'unité.

XXXVII.

La différence de $l(x + \sqrt{xx-1})$ est (Art. XVIII.)

$$\frac{dx + \frac{x dx}{\sqrt{xx-1}}}{x + \sqrt{xx-1}} = \frac{dx\sqrt{xx-1} + x dx}{(x + \sqrt{xx-1}) \times \sqrt{xx-1}} = \frac{dx}{\sqrt{xx-1}}.$$
 Donc réciproquement l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$ est $l(x + \sqrt{xx-1})$.

XXXVIII.

On trouvera de même que l'intégrale de $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}}$ est $l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx})$. En effet prenant la différentielle logarithmique de $x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$, on trouve

$$\frac{dx\sqrt{-1} + \frac{x dx}{\sqrt{1-xx}}}{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}} = \frac{dx\sqrt{-1} \times \sqrt{1-xx} + x dx}{(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}) \times \sqrt{1-xx}}$$

$$= \frac{dx\sqrt{-1} \times \sqrt{1-xx} + x\sqrt{-1} \times dx\sqrt{-1}}{(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}) \times \sqrt{1-xx}} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}}.$$

De cette manière on aura aussi $\int \frac{-dx}{\sqrt{xx-1}} = -l(x + \sqrt{xx-1})$ ou $l \frac{1}{x + \sqrt{xx-1}}$. La preuve en est la même que pour les exemples précédens.

XXXIX.

LEMME 1. Le co-sinus d'un angle quelconque est le sinus de son complément. Ainsi le co-sinus de l'arc AL est $CD = LK$ sinus de LB , complément de cet arc AL . Cela est clair par les élémens de la Géométrie.

Propositions sur les Sinus, &c. démontrées par la Synthèse.

Fig. 5.

XL.

LEMME 2. La tangente d'un angle est égale au sinus de cet angle divisé par son co-sinus, en supposant le rayon $= 1$.

DÉMONST. Soit l'angle DCB dont DK est le sinus, CK le co-sinus, BE la tangente. Le rayon $CB = 1$. A cause des triangles semblables CKD & CBE , on a $CK : KD :: CB : BE$. Donc $\frac{BE}{CB} = \frac{KD}{CK}$. Mais $CB = 1$. Donc, &c.

Fig. 6.

XLI.

LEMME 3. Le sinus d'un angle étant x , pour le rayon $= 1$, la différence de l'angle est $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$.

Autres Propositions sur les Sinus, &c. démontrées analytiquement.

DÉMONST. Soit l'angle ACB dont le sinus $EB = x$; menant du centre C les lignes Cb & eb infiniment proches, & abaissant du point B la petite perpendiculaire Bd ,

Fig. 7.

on aura $db = dx$. Mais les triangles semblables BEC & Bdb donnent $EC (\sqrt{1 - xx}) : CB (1) :: db (dx) : Bb = \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$ qui est la différence cherchée.

XLII.

LEMME 4. Le co-sinus d'un angle étant x , sa différence est $\frac{-dx}{\sqrt{1 - xx}}$, on suppose toujours le rayon $= 1$.

Fig. 8.

DEM. Soit MCB dont le co-sinus $CP = x$, menant les lignes Cm & mp infiniment proches de CM & de PM , on tirera la petite droite $Rm = Pp = -dx$, négative, parce que le co-sinus croissant, l'angle diminue. Il faut prouver que Mm différence de l'angle $MCB = \frac{-dx}{\sqrt{1 - xx}}$, ce qui est évident. Car à cause des triangles semblables MRm & MCP , on a $MP : CM :: Rm : Mm$, c'est-à-dire, $\sqrt{1 - xx} : 1 :: -dx : \frac{-dx}{\sqrt{1 - xx}}$.

XLIII.

LEMME 5. La tangente d'un angle étant x , & le rayon 1, la différence de cet angle est $\frac{dx}{1 + xx}$.

Fig. 9.

DEM. Prenons l'angle ACD dont la tangente $AB = x$, $Bb = dx$. Dd est la différence de cet angle. Or on a $CB = \sqrt{1 + xx}$; l'angle ABC ne différant de l'angle BbC que d'un infiniment petit Bb , ils sont censés égaux; donc les triangles CAB , & bmb sont ^{semblables} égaux. On a donc $CB : CA :: Bb : Bm$, c'est-à-dire $\sqrt{1 + xx} : 1 :: dx : \frac{dx}{\sqrt{1 + xx}} = Bm$. Mais Bm étant infiniment petit, CB & Cm

ne

ne diffèrent entre eux que d'un infiniment petit ; & d'ailleurs l'arc Dd étant aussi infiniment petit peut être regardé comme une petite droite perpendiculaire à Cd . Donc les triangles CBm , & CDd sont semblables : donc on a CB ($\sqrt{1+xx}$) : CD (1) :: Bm ($\frac{dx}{\sqrt{1+xx}}$) : $Dd = \frac{dx}{1+xx}$.

COROLL. Donc la différence d'un angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$, & le rayon 1, $= \frac{adb - bda}{aa + bb}$, ce qui se trouvera tout de suite après ce que nous venons de dire, en mettant dans $\frac{dx}{1+xx}$ au lieu de x , $\frac{b}{a}$, & au lieu de dx , la différence de $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire $\frac{adb - bda}{aa}$.

XLIV.

LEMME 6. Les mêmes choses étant supposées que dans le lemme précédent, & faisant la secante $CB = z$, on trouvera que la différence de l'angle $ACD = \frac{dz}{z\sqrt{zz-1}}$.

COROLL. Si dans $\frac{dz}{z\sqrt{zz-1}}$, on fait $z = \frac{1}{u}$, on aura $dz = -\frac{du}{uu}$, $zz = \frac{1}{uu}$: on aura donc $\frac{dz}{z\sqrt{zz-1}} = \frac{-\frac{du}{uu}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{uu}-1}} = \frac{-du}{\sqrt{1-uu}}$, élément d'un angle dont le cosinus est u . De là il s'ensuit que le cosinus u est en raison inverse de la secante z , puisque $u = \frac{1}{z}$; & c'est en effet ce qu'on fait d'ailleurs par la Géométrie élémentaire.

X L V.

Théorèmes
sur la même
matière, dans
lesquels on
fait usage des
quantités ex-
ponentielles.

THÉOREME 1. Le sinus x d'un angle $z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

DÉMONST. On a (Art. XLI.) $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$: donc
 $dz\sqrt{-1} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}}$. Or $\int \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}} =$ (Art. XXXVIII.)
 $l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx})$: donc $z\sqrt{-1} = l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx})$. Donc en supposant e un nombre dont
le logarithme est l'unité, on a (Art. XXX.) $e^{z\sqrt{-1}} =$
 $x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$. Donc $e^{z\sqrt{-1}} - x\sqrt{-1} =$
 $\sqrt{1-xx}$; & en quarrant les deux membres $e^{2z\sqrt{-1}} -$
 $2e^{z\sqrt{-1}}x\sqrt{-1} - xx = 1 - xx$, ou bien $e^{2z\sqrt{-1}} - 1$
 $= 2e^{z\sqrt{-1}}x\sqrt{-1}$: donc $x\sqrt{-1} = \frac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{2e^{z\sqrt{-1}}}$;
& par conséquent $x\sqrt{-1} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$; donc
enfin $x = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

X L V I.

THÉOREME 2. Le cosinus $\sqrt{1-xx}$ d'un angle z ,
dont par conséquent le rayon est l'unité, & le sinus x ,
 $= \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$.

DÉMONST. Puisque par le théorème précédent $e^{z\sqrt{-1}} =$
 $x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$, il s'ensuit que $e^{-z\sqrt{-1}} =$
 $\frac{1}{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}}$; or $\frac{1}{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}} = -x\sqrt{-1} +$
 $\sqrt{1-xx}$. (ce qui est évident ; car en multipliant le di-

viseur $x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$ par le quotient supposé $-x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$, le produit fera le dividende $= 1$).
 Donc en mettant pour $-x\sqrt{-1}$ la valeur $\sqrt{1-xx}$
 $= e^{z\sqrt{-1}}$ tirée de la première équation, on aura $e^{-z\sqrt{-1}}$
 $= 2\sqrt{1-xx} - e^{z\sqrt{-1}}$. Donc $2\sqrt{1-xx} = e^{-z\sqrt{-1}}$
 $+ e^{z\sqrt{-1}}$; donc $\sqrt{1-xx} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$.

Toutes ces propositions bien entendues, venons aux problèmes suivants.

Usage des
 Propositions
 précédentes.

XLVII.

PROBLEME 1. Soient α & ϵ deux angles dont les sinus soient appelés $\sin. \alpha$ & $\sin. \epsilon$, on propose de trouver la valeur de $\sin. \alpha \times \cos. \epsilon$.

SOLUTION. Nous venons de démontrer (Art. XLV.) que $\sin. \alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, & (Art. suivant) que $\cos. \epsilon = \frac{e^{\epsilon\sqrt{-1}} + e^{-\epsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. D'où l'on tire $\sin. \alpha \cdot \cos. \epsilon =$
 $\frac{e^{(\alpha+\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{-(\alpha+\epsilon)\sqrt{-1}} + e^{(\alpha-\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{(\epsilon-\alpha)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$.

Or $\sinus \alpha + \epsilon = \frac{e^{(\alpha+\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{-(\alpha+\epsilon)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Donc

$\frac{e^{(\alpha+\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{-(\alpha+\epsilon)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} \sin. \alpha + \epsilon$. De même

$\frac{e^{(\alpha-\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{(\epsilon-\alpha)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} \sin. \alpha - \epsilon$. Donc en

réunissant ces deux valeurs, on aura

$$\frac{e^{(\alpha+\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{-(\alpha+\epsilon)\sqrt{-1}} + e^{(\alpha-\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{(\epsilon-\alpha)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$$

D ij

$$= \frac{1}{2} \sin. a + \epsilon + \frac{1}{2} \sin. a - \epsilon. \text{ Donc enfin } \sin. a \times \cos. \epsilon = \frac{\sin. a + \epsilon}{2} + \frac{\sin. a - \epsilon}{2}.$$

XLVIII.

PROBLEME 2. Trouver la valeur de $\sin. a \times \sin. \epsilon$.

$$\text{SOLUTION. } \sin. a \times \sin. \epsilon = (\text{Art. XLV.}) \left(\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) \times \left(\frac{e^{\epsilon\sqrt{-1}} - e^{-\epsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) = \frac{e^{(a+\epsilon)\sqrt{-1}} + e^{-(a+\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{(a-\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{-(a-\epsilon)\sqrt{-1}}}{-4}.$$

$$\text{Or (Art. XLVI.) } \frac{e^{(a+\epsilon)\sqrt{-1}} + e^{-(a+\epsilon)\sqrt{-1}}}{-4} = -\frac{1}{2} \cos. a + \epsilon :$$

$$\text{\& de même } \frac{e^{(a-\epsilon)\sqrt{-1}} - e^{-(a-\epsilon)\sqrt{-1}}}{-4},$$

$$\text{ou bien } \frac{e^{(a-\epsilon)\sqrt{-1}} + e^{-(a-\epsilon)\sqrt{-1}}}{4} = \frac{1}{2} \cos. a - \epsilon.$$

$$\text{Donc les deux parties étant réunies, on aura } \sin. a \times \sin. \epsilon = -\frac{\cos. a + \epsilon}{2} + \frac{\cos. a - \epsilon}{2}.$$

COROLLAIRE 1. On prouvera de la même manière que $\cos. a \times \cos. \epsilon = \frac{\cos. a + \epsilon}{2} + \frac{\cos. a - \epsilon}{2}.$

XLIX.

COROLL. 2. On peut aussi conclure de là, 1°. que $\cos. a + \epsilon = \cos. a \times \cos. \epsilon - \sin. a \times \sin. \epsilon$. Car ce dernier membre de l'équation = (Art. XLVII. & XLVIII.) $\frac{\cos. a + \epsilon}{2} + \frac{\cos. a - \epsilon}{2} + \frac{\cos. a + \epsilon}{2} - \frac{\cos. a - \epsilon}{2} = \cos. a + \epsilon.$

2°. Que $\sinus a + \epsilon = \sin. a \times \cos. \epsilon + \sin. \epsilon \times \cos. a$, ce qui se prouvera comme l'article précédent.

L.

REMARQUE I. Il faut écrire $\frac{\cos. \frac{a-c}{2}}$, & non pas $\cos. \frac{a-c}{2}$, parce que la première de ces expressions indique la moitié du $\cos. a - c$, que l'on doit avoir ici, & que l'autre indique le cosinus de la moitié de $a - c$, qui seroit une expression fautive. Cette remarque est de quelque importance pour ne se point tromper dans l'expression des sinus & cosinus.

L I.

COROLL. 3. Le dernier Corollaire nous donne une méthode bien simple pour trouver les sinus & cosinus d'arcs doubles, triples, quadruples, &c. d'arcs donnés. Si l'on a, par exemple, le cosinus donné de l'arc $AM=c$, en supposant toujours le rayon $= 1$, on aura le sinus de cet angle $= \sqrt{1-cc}$. Si on cherche à présent le cosinus de l'arc AD double de AM , on remarquera que le cosinus & le sinus de l'arc DM égal à AM seront aussi c , & $\sqrt{1-cc}$; donc on trouvera (Art. XLIX.) le cosinus de l'arc $AD = 2cc - 1$. Si on cherche le sinus du même arc double, on le trouvera de même $= 2c\sqrt{1-cc}$.

On en tire une méthode fort simple pour trouver les Sinus, & Cosinus, d'arcs multiples d'un arc donné.

Fig. 10.

Pour trouver le sinus & le cosinus d'un arc quadruple, il faut prendre le cosinus & le sinus de l'arc double, & ensuite ceux de l'arc double de ce second; ce qui donnera, en faisant les mêmes suppositions que ci-dessus le cosinus

de l'arc quadruple $= 8c^4 - 8cc + 1$, & le sinus du même arc $= 8c^3 - 4c\sqrt{1-cc}$, & ainsi de suite pour tous les arcs doubles d'arcs donnés.

L I I.

Par cette même méthode fondée sur le dernier Corollaire, on trouveroit avec autant de facilité, les cosinus & sinus d'arcs triples, quintuples, &c. d'arcs donnés. Ainsi en supposant toujours c le cosinus donné d'un arc, on trouvera que le cosinus & le sinus de l'arc double étant $2cc - 1$, & $2c\sqrt{1-cc}$, le cosinus de l'arc triple sera $(2cc - 1) \times c - 2c\sqrt{1-cc} \times \sqrt{1-cc} = 4c^3 - 3c$, & le sinus du même arc sera $= 2c\sqrt{1-cc} \times c + \sqrt{1-cc} \times (2cc - 1) = \frac{4cc - 1}{\sqrt{1-cc}}$, & ainsi de suite.

L I I I.

Donc si on nomme s , & c , les sinus & cosinus d'un arc quelconque moindre qu'un quart de cercle, & s'' , s''' , s^{iv} , &c. c'' , c''' , c^{iv} , &c. les sinus & cosinus des arcs double, triple, quadruple, &c. de cet arc, on formera la Table suivante.

Table des Sinus & Cofinus d'Arcs quelconques multiples d'un Arc donné.

Cofinus	Sinus.
Cof. arc fin.. $c = c$	$s = \sqrt{1 - cc}$
Double $c'' = 2cc - 1$	$s'' = 2c \sqrt{1 - cc}$
Triple $c''' = 4c^3 - 3c$	$s''' = \frac{4c^2 - 1}{4c^2 - 1} \sqrt{1 - cc}$
Quadruple . . $c'''' = 8c^4 - 8c^2 + 1$	$s'''' = \frac{8c^3 - 4c}{8c^3 - 4c} \sqrt{1 - cc}$
Quintuple . . $c'''' = 16c^5 - 20c^3 + 5c$	$s'''' = \frac{16c^4 - 12c^2 + 1}{16c^4 - 12c^2 + 1} \sqrt{1 - cc}$
Sextuple . . . $c'''' = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$	$s'''' = \frac{32c^5 - 32c^3 + 6c}{32c^5 - 32c^3 + 6c} \sqrt{1 - cc}$
Septuple . . . $c'''' = 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - cc$	$s'''' = \frac{64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1}{64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1} \sqrt{1 - cc}$
&c.	&c.

Dom Charles Walmesley , Bénédictin Anglois , dans son excellent Livre de l'*Analyse des Mesures* , parvient à cette même Table , mais par une méthode différente de celle qui nous y a conduits.

L I V.

REMARQUE 2. Il est bon d'observer ici, 1°. Que si on prend un angle $LD B$ négativement, son sinus deviendra négatif sans changer de valeur, & qu'au contraire son cosinus restera positif, de sorte que $\sin. - \alpha = - \sin. \alpha$ & $\cos. - \alpha = \cos. \alpha$. Cette proposition, ainsi que les deux suivantes, se conçoit par la seule inspection d'une figure fort simple.

Fig. 56.

2°. Que le sinus d'un angle augmenté de 360° , ou d'un multiple de la circonférence, ne change point de valeur ni de signe; mais que s'il est augmenté de 180° , ou d'un

multiple impair de 180° , ce sinus deviendra négatif, aussi bien que le cosinus, sans changer d'ailleurs de valeur. Ainsi $\sin. a + 180^\circ = -\sin. a$, & $\cosin. a + 180^\circ = -\cos. a$.

3°. Que si on augmente un angle de 90° , le sinus de cet angle ainsi augmenté sera égal à son premier cosinus, & le nouveau cosinus sera égal au premier sinus pris négativement; d'où il suit que $\sin. a + 90^\circ = \cos. a$, & que $\cos. a + 90^\circ = -\sin. a$.

L V.

Fig. 10. COROLL. 4. Si l'arc AM est plus grand qu'un quart de cercle, mais n'excede pas la demie circonférence, alors son cosinus sera $-c$, & par conséquent il faut changer dans la Table les signes des termes où c se trouve avec des dimensions impaires.

L V I.

Fig. 11. REMARQUE 3. Dans les équations précédentes on voit que la racine c a toujours autant de valeurs, que l'arc dont l'équation exprime le cosinus contient de fois celui dont la racine c est le cosinus. Par exemple, c a cinq valeurs dans l'équation $c'' = 16c^5 - 20c^3 + 5c$. Pour trouver ces valeurs on décrira une circonférence $ACEA$ sur laquelle on prendra l'arc AL dont le cosinus $= c''$, & l'arc AB qui soit la cinquième partie de AL . Le cosinus de AB donne une des racines de l'équation, ensuite

ensuite en commençant au point B on divisera la circonférence en cinq parties égales BC, CD, DE, EF, FB , & les cosinus des arcs AC, AD, ADE, ADF donneront les autres valeurs de la racine c . D'où il suit qu'en nommant C la circonférence, & A l'arc AL , l'équation $c^5 = 16c^3 - 20c + 5$ donnera les cosinus des cinq arcs suivants $\frac{A}{5}, \frac{C+A}{5}, \frac{2C+A}{5}, \frac{3C+A}{5}, \frac{4C+A}{5}$.

En voici la raison. Le cosinus c de l'arc AL appartient non-seulement à cet arc AL , mais à tout autre arc terminé par les points A, L ; c'est-à-dire à l'arc $AL +$ la circonférence, à l'arc $AL +$ deux fois la circonférence, &c. Donc la racine c doit exprimer le cosinus de la cinquième partie de chacun de ces arcs.

On voit aussi par la division du cercle, qu'il ne peut y avoir que ces cinq valeurs: car en procédant au-delà, on retrouveroit les mêmes racines. En effet le cosinus de $\frac{5C+A}{5}$ ou $C + \frac{A}{5}$ est le même que le cosinus de $\frac{A}{5}$; le cosinus de $\frac{6C+A}{5}$, ou $C + \frac{C+A}{5}$ est le même que le cosinus de $\frac{C+A}{5}$, &c.

LVII.

REMARQUE 4. Le cosinus c appartient non-seulement à l'arc AL , mais encore à son complément AEL , ou $C - A$; & ce même cosinus appartient aussi à l'arc $C - A$ augmenté successivement de $C, 2C, 3C$. Donc les racines c exprimeront encore les cosinus de $\frac{C-A}{5}, \frac{2C-A}{5}, \frac{3C-A}{5}$, &c. mais ces racines seront les mêmes qui ont

E

été trouvées ci-devant. Car le cosinus de $\frac{C-A}{s}$ est le même que le cosinus de $\frac{4C+A}{s}$, parce que ces deux arcs ensemble font la circonférence entière. De même le cosinus de $\frac{2C-A}{s}$ est le même que celui de $\frac{3C+A}{s}$, &c. & ainsi de suite.

LVIII.

Il en est de même pour toutes les autres équations aux cosinus, soit que l'arc AL soit moindre ou plus grand qu'un quart de cercle, de sorte que si λ marque le nombre des parties dans lesquelles l'arc AL est divisé, les racines de ces équations seront les cosinus des arcs $\frac{A}{\lambda}$, $\frac{C-A}{\lambda}$, $\frac{C+A}{\lambda}$, $\frac{2C-A}{\lambda}$, $\frac{2C+A}{\lambda}$, $\frac{3C-A}{\lambda}$, $\frac{3C+A}{\lambda}$, &c. & ces arcs se trouveront en divisant la circonférence en autant de parties égales que λ contient d'unités, en commençant au point B , AB étant supposé égal à $\frac{AL}{\lambda}$.

LIX.

Fig. 12. COROLL. 5. Si on suppose dans les équations précédentes le cosinus de $AL = -1$, c'est-à-dire que l'arc AL devient égal à la demie circonférence, ou que ce

Fig. 13. cosinus $= 1$, c'est-à-dire que l'arc AL devient égal à la circonférence entière; dans ces deux cas, en divisant la circonférence comme nous avons enseigné dans le Corollaire précédent, les arcs des divisions paires de la première figure seront égaux aux arcs des divisions de la seconde, en supposant que le nombre λ soit le même de part & d'autre.

Si λ est un nombre impair dans le premier cas, & un nombre pair dans le second, le dernier des arcs est marqué par $\frac{C}{2}$; donc la valeur d'un des cosinus sera égal à -1 .

L X.

COROLL. 6. En supposant que les quantités a, b, h, k , &c. sont les racines des équations aux cosinus, a sera le cosinus de $\frac{A}{5}$, b celui de $\frac{C+A}{5}$, h sera celui de $\frac{2C+A}{5}$, k celui de $\frac{3C+A}{5}$, &c. & les équations aux cosinus seront composées du produit des quantités $c-a, c-b, c-h, c-k$, &c. Les principes ordinaires de l'Algebre feront aisément connoître le nombre des racines positives & celui des négatives; & comme les seconds termes manquent dans toutes les équations aux cosinus, il s'ensuit, comme on le fait, que la somme des racines ou des cosinus positifs, est égale à la somme des cosinus négatifs.

L X I.

LEMME 6. Si dans un cercle quelconque $AGSO$ décrit du centre C , on tire deux diametres AS, GO perpendiculaires l'un à l'autre; qu'on prenne sur la circonférence un arc AL dont le cosinus soit nommé r , & l'arc $AB = \frac{AL}{\lambda}$; qu'on divise la circonférence, en commençant au point quelconque B , en un nombre de parties égales marqué par λ , comme BF, FI, IP , &c. si outre cela on prend un point quelconque K , dans le diametre AS duquel on mene à tous les points de division les lignes

Lemme
qui prépare
au théorème
de M. Cotes
sur la division
des arcs de
cercle.

Fig. 14.

$KB, KF, KI, KP, \&c.$ je dis qu'on aura $\overline{KB}^2 \times \overline{KF}^2 \times \overline{KI}^2 \times \overline{KP}^2 \times \&c. = CA^{2\lambda} - 2t \times CK^\lambda + \overline{CK}^{2\lambda}$, si l'arc AL est moindre que AG ; $\& = CA^{2\lambda} + 2t \times CK^\lambda + \overline{CK}^{2\lambda}$, si l'arc AL est plus grand que AG , mais moindre que AGS .

DÉMONST. Soit tiré le rayon $BC \& BN$ perpendiculaire au diamètre AS , supposant toujours le rayon $= 1$, on nommera $CK x$, $\& a, b, h, k, \&c.$ les cosinus des arcs $AB, AF, AI, AP, \&c.$ c'est-à-dire $\frac{A}{\lambda}, \frac{C+A}{\lambda}, \frac{2C+A}{\lambda}, \&c.$ $\&$ on aura $KB^2 = BN^2 + KN^2 = 1 - aa + \overline{a-x}^2 = 1 - 2ax + xx$: de même $\overline{KF}^2 = 1 - 2bx + xx$, si les arcs AB, AF sont terminés dans la demie circonférence GAO du même côté que le point K ; on a aussi $KI^2 = 1 + 2hx + xx, KP^2 = 1 + 2kx + xx$. Supposons à présent $1 - 2ax + xx = 0$, $\&$ faisons la même supposition pour les autres valeurs, on aura $a = \frac{1+xx}{2x}$; $b = \frac{1+xx}{2x}$; $-h = \frac{1+xx}{2x}$; $-k = \frac{1+xx}{2x}$. Donc on aura généralement $c = \frac{1+xx}{2x}$. Si on transpose maintenant tous les termes des équations trouvées aux cosinus (Art. LIII.) du même côté du signe d'égalité, enforte qu'elles deviennent $= 0$, $\&$ qu'on substitue dans ces équations la valeur de c , elles deviendront celles-ci.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1 - 2cx + xx}{2x} = 0 \\ \frac{1 - 2c''x^2 + x^4}{2x^2} = 0 \\ \frac{1 - 2c'''x^3 + x^5}{2x^3} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1 - 2c^{(4)}x^4 + x^8}{2x^4} = 0 \\ \frac{1 - 2c^{(5)}x^5 + x^{10}}{2x^5} = 0 \\ \frac{1 - 2c^{(6)}x^6 + x^{12}}{2x^6} = 0 \\ \&c. \end{array}$$

Or $c, c'', c''', \&c.$ marquent le cosinus de l'arc AL que nous avons nommé t dans ce Lemme : on aura donc cette équation générale $\frac{1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}{2x^\lambda} = 0$ lorsque AL est plus petit que AG ; & lorsque AL est plus grand que AG , $\frac{1 + 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}{2x^\lambda} = 0$. Mais les équations aux cosinus sont composées du produit des racines $c - a = 0, c - b, c + h, c + k$; donc l'équation générale $\frac{1 \mp 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}{2x^\lambda} = 0$ est aussi formée du produit des racines $\frac{1+xx}{2x} - a = 0, \frac{1+xx}{2x} - b = 0, \frac{1+xx}{2x} + h = 0, \frac{1+xx}{2x} + k = 0$. Donc $\frac{1 \mp 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}{2x^\lambda} = \frac{1 - 2ax + xx \times 1 - 2bx + xx \times 1 + 2hx + xx \times 1 + 2kx + xx}{2x^\lambda}$, &c. donc enfin $AC^{2\lambda} \mp 2t \times CK^\lambda + CK^{2\lambda} = KB^2 \times KF^2 \times KI^2 \times KP^2, \&c.$

LXII.

COROLL. Il suit de ce Lemme, qu'on peut par la seule division d'un arc de cercle en parties égales assigner tous les facteurs trinomes de $x^{2m} + px^m + q$, qu'on voit être la même quantité que $1 \pm 2tx^\lambda + x^{2\lambda}$ en supposant $t = \frac{p}{2}$, $q = a^{2m}$, & regardant alors a comme le rayon $= 1$. Il faut bien faire attention à ce Corollaire ; il sera d'usage dans la suite.

LXIII.

THEOREME 3. Si on divise une circonférence de cercle $ADFA$ en arcs égaux $AB, BO, OD, DE, EF, \&c.$ Fig. 152

dont le nombre soit égal à 2λ , & que d'un point quelconque K pris dans le diamètre AF , on tire des lignes $KA, KB, KO, KD, \&c.$ à tous les points de division, on aura $CA^\lambda - CK^\lambda = KA \times KO \times KE \times KG$, & $CA^\lambda + CK^\lambda = KB \times KD \times KF \times KH$, &c. en prenant ainsi ces lignes alternativement.

Démonstration du Théorème de M. Cotes.

Fig. 13.
Fig. 15.

DÉMONSTR. 1°. Si on suppose $t = 1$ l'arc AL devient égal à la circonférence entière; par conséquent l'arc $AO = \frac{C}{\lambda}$; & si en commençant au point O , on divise la circonférence en un nombre de parties égales designé par λ aux points $E, G, I, \&c.$ A , le dernier point de division fera toujours A , & les cosinus des arcs $AO, AE, AG, AI, \&c.$ (Art. LX.) seront égaux à $a, b, h, k, \&c.$ 1; or on aura dans le cas présent $1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda} = 1 - 2x^\lambda + x^{2\lambda}$, dont la racine quarrée est $1 - x^\lambda$; donc on a (Lemme 6.) $1 - x^\lambda = \sqrt{1 - 2ax + xx} \times \sqrt{1 - 2bx + xx} \times \sqrt{1 + hx + xx} \times \sqrt{1 + 2kx + xx} \times \sqrt{1 - 2x + xx}$, c'est-à-dire $CA^\lambda - CK^\lambda = KO \times KE \times KG \times KI, \&c. \times KA$.

Fig. 12.

Fig. 15.

2°. Si on suppose $t = -1$, l'arc AL devient égal à la demie circonférence; par conséquent l'arc $AB = \frac{\frac{1}{2}C}{\lambda}$; & si du point B on divise la circonférence en un nombre de parties égales marqué par λ aux points $D, F, H, \&c.$ les cosinus des arcs $AB, AD, AF, AH, \&c.$ étant exprimés par les quantités $a, b, h, k, \&c.$ on aura dans le cas présent $1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda} = 1 + 2x^\lambda + x^{2\lambda}$, dont la racine quarrée est $1 + x^\lambda$; ce qui donne (Art. LXI.)

$$1+x^{\lambda} = \sqrt{1-2ax+xx} \times \sqrt{1-2bx+xx} \times \sqrt{1+2hx+xx} \times \sqrt{1+2kx+xx}, \text{ c'est-à-dire } CA^{\lambda} + CK^{\lambda} = KB \times KD \times KF \times KH.$$

Donc en réunissant les deux cas de $t=1$, & de $t=-1$, on a $CA^{\lambda} - CK^{\lambda} = KA \times KO \times KE \times KG$, &c. & $CA^{\lambda} + CK^{\lambda} = KB \times KD \times KF \times KH$.

LXIV.

REMARQUE. Le Théorème précédent est le fameux Théorème de M. Cotes. Il a été rendu plus général par M. Moivre, comme on le voit dans son Livre intitulé: *Miscellanea analytica de seriebus & quadraturis*. Ce Théorème dont l'auteur n'avoit pas donné la démonstration, a été démontré par l'illustre Jean Bernoulli, voy. Tome IV. de ses Œuvres, N°. CLX, & par M. Herman dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Petersbourg, tom. VI. Au reste la maniere dont il est ici démontré, m'a paru la plus simple & la plus claire. Je l'ai tirée du Livre de Dom Charles Walmesley déjà cité Art. LIII.

LXV.

COROLLAIRE I. Il n'est pas difficile d'appliquer ce Théorème à des cas particuliers, en donnant à λ telle valeur qu'on voudra. Par exemple, prenons d'abord la premiere supposition de $t=1$, & soit $\lambda=5$: divisant la circonférence en cinq parties égales aux points B, F, D, E, A ; on aura à cause de $KB=KE$ & de $KF=$

Application
du Théorème
précédent à
des cas parti-
culiers.

Fig. 13.

$KD, CA^5 - CK^5 = KB^2 \times KF^2 \times KA$; c'est-à-dire

$$1 - x^5 = \overline{1 - x} \times \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 + 2bx + xx}.$$

On trouveroit de même les valeurs de $1 - x^\lambda$ en supposant $\lambda = 6, 7, \&c.$

2°. Lorsque $t = -1$, en supposant aussi $\lambda = 5$, on trouvera $1 + x^5 = \overline{1 + x} \times \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 + 2bx + xx}.$

LXVI.

COROLLAIRE 2. Il suit du Théorème & du Corollaire précédens, qu'on trouve aisément par la division d'un arc de cercle les facteurs de $\pm x^n \pm a^n$, en supposant a égal au rayon qui est $= 1$.

CHAPITRE V.

Sur les Imaginaires.

LXVII.

NOus allons démontrer ici deux Propositions générales & du plus grand usage sur les imaginaires, la première, que toute quantité imaginaire d'une forme quelconque peut toujours se réduire à $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles. La seconde, que toute racine imaginaire d'une équation quelconque peut s'exprimer aussi par $A + B\sqrt{-1}$.

LXVIII.

Démonstration de la première Partie.

LEMME. Si $K + H\sqrt{-1} = L + P\sqrt{-1}$; $K, H, L,$
&

& P étant des quantités réelles, je dis que $K=L$ & $H=P$.

Lemme
préparatoire.

Car puisque $K-L+(H-P)\sqrt{-1}=0$, il s'enfuit que $K-L=0$ & $H-P=0$; autrement soit $K-L=R$, & $H-P=S$, on auroit $R+S\sqrt{-1}=0$, c'est-à-dire le réel R égal à l'imaginaire $-S\sqrt{-1}$, ce qui est absurde.

LXIX.

COROLLAIRE. Donc quand une quantité est égale à zéro, & qu'elle est composée de plusieurs termes, les uns réels, les autres multipliés par $\sqrt{-1}$, les deux parties sont chacune en particulier égales à zéro.

LXX.

THÉOREME I. Une quantité algébrique quelconque, composée de tant d'imaginaires qu'on voudra, peut toujours se ramener à la forme $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles quelconques.

Expression
générale que
l'on peut don-
ner à toute
quantité ima-
ginaire d'une
forme quel-
conque.

DÉMONSTRATION. 1°. Il est évident que $a+b\sqrt{-1} \pm g+h\sqrt{-1}$ peut se ramener à la forme $A+B\sqrt{-1}$; car $a+b\sqrt{-1} \pm g \pm h\sqrt{-1} = a \pm g + (b \pm h)\sqrt{-1} = A+B\sqrt{-1}$, en supposant $a \pm g = A$, & $b \pm h = B$.

2°. $(a+b\sqrt{-1}) \times (g+h\sqrt{-1})$ peut se ramener à $A+B\sqrt{-1}$. Car $(a+b\sqrt{-1}) \times (g+h\sqrt{-1}) = ag + bg\sqrt{-1} - bh + ah\sqrt{-1}$. Donc $ag - bh = A$, & $bg + ah = B$.

3°. $A+B\sqrt{-1} = \frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}$. Car $\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1}) \times (g-h\sqrt{-1})}{(g+h\sqrt{-1}) \times (g-h\sqrt{-1})} = \frac{ag + bg\sqrt{-1} - bh - ah\sqrt{-1}}{gg + hh}$. Or dans cette

F

42 INTRODUCTION AU TRAITE
 quantité ainsi réduite $\frac{ag+bh}{gg+hh} = A$, & $\frac{bg-ah}{gg+hh} = B$.
 Donc, &c.

4°. $\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}} = A+B\sqrt{-1}$. Car sup-
 posant que cela soit ainsi, on a par les logarithmes,
 $l \frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}} = l(A+B\sqrt{-1})$; ou
 $l(a+b\sqrt{-1}) - l(g+h\sqrt{-1}) = l(A+B\sqrt{-1})$. Donc
 en prenant les différentielles logarithmiques, faisant varier
 A, B & a, b , & supposant $g+h\sqrt{-1}$ constante, ce qui
 est permis, on a $(N) (g+h\sqrt{-1}) \times \left(\frac{da+db\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} \right) =$
 $\frac{dA+dB\sqrt{-1}}{A+B\sqrt{-1}}$. De plus on a $(g+h\sqrt{-1}) \times \left(\frac{da+db\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} \right) =$
 $(g+h\sqrt{-1}) \times \frac{(da+db\sqrt{-1}) \cdot (a-b\sqrt{-1})}{(a+b\sqrt{-1}) \cdot (a-b\sqrt{-1})} =$ en
 mettant d'une part tout ce qui est réel, & de l'autre tout
 ce qui est imaginaire $= \frac{gada+gbdb-ahdb+bhda}{aa+bb} +$
 $\frac{(hada+hbdb+gadb-gbda)\sqrt{-1}}{aa+bb}$. Faisant la même opéra-
 tion sur le second membre de l'équation (N), nous
 avons $\frac{dA+dB\sqrt{-1}}{A+B\sqrt{-1}} = \frac{(dA+dB\sqrt{-1}) \cdot (A-B\sqrt{-1})}{(A+B\sqrt{-1}) \cdot (A-B\sqrt{-1})} =$
 $\frac{AdA+BdB}{AA+BB} + \frac{(ADB-BdA)\sqrt{-1}}{AA+BB}$, donc
 $\frac{gada+gbdb-ahdb+bhda}{aa+bb} + \frac{(hada+hbdb+gadb-gbda)\sqrt{-1}}{aa+bb} =$
 $\frac{AdA+BdB}{AA+BB} + \frac{(ADB-BdA)\sqrt{-1}}{AA+BB}$. Or il faut (Art. LXVIII.)
 que la partie réelle du premier membre soit égale à la
 partie réelle du second, & la partie imaginaire, à la partie
 imaginaire. Nous aurons donc les deux équations suivantes,
 (O) $\frac{gada+gbdb-ahdb+bhda}{aa+bb} = \frac{AdA+BdB}{AA+BB}$: & (P)
 $\frac{(hada+hbdb+gadb-gbda)\sqrt{-1}}{aa+bb} = \frac{(ADB-BdA)\sqrt{-1}}{AA+BB}$.
 Donc (Q) $\frac{AdA+BdB}{AA+BB} = g \times \left\{ \frac{ada+bdb}{aa+bb} \right\} - h \times$

$\left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}$. Or $\int \frac{AdA + BdB}{AA + BB} = l \sqrt{AA + BB}$,
 comme il est aisé de le prouver en différentiant le second
 membre de cette équation. De même $\int g \times \left\{ \frac{ada + bdb}{aa + bb} \right\}$
 $= g l \sqrt{aa + bb} = l \sqrt{aa + bb}^g$; & $\int -h \times \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}$
 (en multipliant par 1, ou par $lc = 1$) $= -h \int \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}$
 $\times lc = lc \int \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}$. Donc en rapprochant les
 deux membres de l'équation (Q) ainsi intégrés, on a

$$l \sqrt{AA + BB} = l \sqrt{aa + bb}^g + lc \int \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\};$$

donc repassant des logarithmes aux nombres, on a

$$\sqrt{AA + BB} = \sqrt{aa + bb}^g \times c^{-h \int \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}}.$$

Faisons à présent la même opération sur l'équation (P),
 que nous venons de faire sur l'équation (O); cette équation
 (P) devient en divisant par $\sqrt{-1}$ de part & d'autre
 & réduisant (R) $\frac{AdB - BdA}{AA + BB} = h \times \left\{ \frac{ada + bdb}{aa + bb} \right\} +$
 $g \times \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}$. Mais $\int \left\{ \frac{AdB - BdA}{AA + BB} \right\} =$ (corol. Art.
 XLIII.) un angle dont la tangente est $\frac{B}{A}$; $\int h \times \left\{ \frac{ada + bdb}{aa + bb} \right\}$
 $= h l \sqrt{aa + bb}$, & $\int g \times \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\} = g$ multiplié
 par un angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$. Donc en rappro-
 chant les deux membres ainsi intégrés de l'équation (R)
 on a (S) $\int \left\{ \frac{AdB - BdA}{AA + BB} \right\} = h l \sqrt{aa + bb} + g \times$
 $\int \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}$. D'autre part nous avons trouvé plus haut
 $\sqrt{AA + BB} = (aa + bb)^{\frac{g}{a}} \times c^{-h \int \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}}$;
 nous savons aussi que $\int \left\{ \frac{AdB - BdA}{AA + BB} \right\}$ & $\int \left\{ \frac{adb - bda}{aa + bb} \right\}$
 sont des expressions d'angles dont les tangentes sont $\frac{B}{A}$ &
 $\frac{b}{a}$. Donc parce que (Art. XL.) la tangente d'un angle est

le sinus de cet angle divisé par son cosinus, B est le sinus, & A le cosinus d'un angle dont la valeur est $h \sqrt{aa+bb}$ $+ g \times \int \left\{ \frac{adb-bda}{aa+bb} \right\}$, & dont le rayon $\sqrt{AA+BB}$ est $= (aa+bb)^{\frac{g}{2}} \times c^{-h \int \left\{ \frac{adb-bda}{aa+bb} \right\}}$. Dans cette expression $c^{-h \int \left\{ \frac{adb-bda}{aa+bb} \right\}}$ (Art. xxx.) est l'ordonnée d'une logarithmique dont la sous-tangente $= 1$, & dont l'abscisse négative $= -h \int \left\{ \frac{adb-bda}{aa+bb} \right\}$, c'est-à-dire que cette ordonnée est plus petite que l'unité.

Donc enfin $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ peut se ramener à $A+B\sqrt{-1}$, puisque pour avoir A & B il ne faut que prendre un cercle dont le rayon soit égal à la valeur trouvée & toute réelle de $\sqrt{AA+BB}$; & prendre sur la circonférence de ce cercle un angle égal à la valeur aussi trouvée de $\int \left\{ \frac{AdB-BdA}{AA+BB} \right\}$; $\frac{B}{A}$ sera la tangente de cet angle; B en sera le sinus, & A le cosinus. Donc, &c.

On fait donc réduire à la forme $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant réels.

$$1^{\circ}. a+b\sqrt{-1} \pm g \pm h\sqrt{-1}$$

$$2^{\circ}. (a+b\sqrt{-1}) \times (g+h\sqrt{-1})$$

$$3^{\circ}. \frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}$$

$$4^{\circ}. \frac{g+h\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}$$

Donc une quantité algébrique quelconque composée de tant d'imaginaires qu'on voudra, peut toujours se ramener à $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant réels. C. Q. F. P.

L X X I.

Par le moyen du Théorème précédent il fera toujours

facile de réduire à la forme $A+B\sqrt{-1}$ une quantité composée de tant & de telle sorte d'imaginaires qu'on voudra. Car en allant de la droite vers la gauche on fera évanouir l'un après l'autre tous les radicaux excepté un seul. La quantité se ramenera donc à $A+B\sqrt{-1}$.

Conséquence
du Théorème
précédent.

LXXII.

Lorsque le signe radical sera différent de $\sqrt{-1}$, il n'y aura pas pour cela de difficulté : car $\sqrt[n]{-1} = (\sqrt[n]{-1})^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{-1} = (\sqrt[n]{-1})^{\frac{r}{n}}$, &c. Après cette petite observation il est aisé d'appliquer notre formule à quelque exemple que ce soit.

Application
à quelques e-
xemples.

Ainsi nous ramènerons facilement $\sqrt[n]{-c}$, à la forme $A+B\sqrt{-1}$. Car $\sqrt[n]{-c} = \sqrt[n]{\sqrt{-1} \cdot c} = \sqrt[n]{\sqrt{-1}} \times \sqrt[n]{c}$. Or en comparant cette quantité ainsi réduite avec $a+b\sqrt{-1}^{g+h\sqrt{-1}}$, on voit que,

$$h = 0$$

$$g = \frac{1}{n}$$

$$c^{\frac{1}{n}} = b$$

$$a = 0$$

$$c = aa + bb$$

$$\frac{b}{a} = \infty$$

la tangente.
donc l'angle $\int \left\{ \frac{a db - b da}{aa + bb} \right\}$ sera droit. Il s'ensuit donc de là que B & A sont les sinus & cosinus d'un angle dont le rayon $= c^{\frac{1}{n}}$, & qui est à l'angle droit, ou à 5 , ou à 9 , ou à 13 , &c. angles droits, comme $\frac{1}{n}$ est à 1 .

LXXIII.

De même $\overline{a+ b \sqrt{-1}}^g$ rentre dans le cas précédent en faisant $h=0$. Cette quantité peut donc être supposée $= A+B \sqrt{-1}$, en prenant B & A pour les sinus & cosinus d'un angle dont le rayon $= (aa+bb)^{\frac{g}{2}}$, & qui soit à l'angle dont b & a sont les sinus & cosinus, comme g est à 1. Donc si $g = \frac{1}{n}$, n étant un nombre entier quelconque, il y aura un nombre n de quantités telles que $A+B \sqrt{-1}$, qui étant élevées à la puissance n rendront $a+ b \sqrt{-1}$. Car il y a un nombre n d'angles différens dont b & a sont les sinus & cosinus, savoir A , $C+A$, $2C+A$, &c.

LXXIV.

Soit encore proposé de mettre $\sqrt[6]{\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}} \cdot (m+n\sqrt{-1})}$ $\times \left\{ \frac{k+q\sqrt{-1}}{r+s\sqrt{-1}} \right\}$ sous la forme $A+B \sqrt{-1}$. En allant de la droite vers la gauche, je commence par $r+s\sqrt{-1}$ que je mets sous la forme suivante $r+s\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$. Cette quantité sous cette forme se rapporte à $\overline{a+ b \sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}}$ dans laquelle $a=r$, $h=0$, $b=s$, $g=\frac{1}{2}$: or nous venons de démontrer que cette dernière imaginaire se ramenoit à $A+B \sqrt{-1}$. Donc, &c. J'opere de même sur $k+q\sqrt{-1} = k+q\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$ = par la même raison que la précédente $A+B \sqrt{-1}$. Ce membre devient donc $\frac{a'+b'\sqrt{-1}}{a''+b''\sqrt{-1}}$ quantité qui se rapporte à $\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}$ que

nous avons vu se ramener à $A+B\sqrt{-1}$ (Art. LXX. N°. 3.)

Nous avons donc déjà $\sqrt[6]{\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}} \cdot (m+n\sqrt{-1}) \times (c+\epsilon\sqrt{-1})}$. De même $m+n\sqrt{-1} = m+n\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$, & $a+b\sqrt{-1} = a+b\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$, & $g+h\sqrt{-1} = g+h\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$. On aura donc en faisant les mêmes raisonnemens que ci-dessus $(p+q\sqrt{-1}) \times (m'+n'\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = (p'+q'\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$: or cette quantité se rapporte à $\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}$ dans laquelle $a = p'$
 $b = q'$
 $g = \frac{1}{2}$
 $h = 0$

Donc ce premier membre se ramene aussi à $a'+\epsilon'\sqrt{-1}$: on aura donc $(a'+\epsilon'\sqrt{-1}) \cdot (a+\epsilon\sqrt{-1})$. Or nous avons vu (Art. LXX. N°. 2.) que $(a+b\sqrt{-1}) \cdot (g+h\sqrt{-1})$ se ramenoit à $A+B\sqrt{-1}$: donc la proposée entiere se ramenera à $A+B\sqrt{-1}$.

L X X V.

La seconde proposition, savoir que toute racine imaginaire d'une équation quelconque peut s'exprimer par $A+B\sqrt{-1}$, paroît une suite nécessaire de la premiere; cependant elle a besoin d'une preuve particuliere. Car quoique nous ayons démontré que toute quantité imaginaire peut se réduire à $A+B\sqrt{-1}$, on pourroit douter qu'il en fût de même des racines imaginaires des équations

Démonstration de la seconde Partie.

tions, parce qu'on pourroit croire que du moins dans certains cas ces racines n'auroient aucune expression analytique possible. Mais les Théorèmes suivans ne laisseront aucune difficulté sur cette seconde proposition.

L X X V I.

Lemmes
préparatoires
à cette démonstration.

LEMME 1. Dans une courbe dont z & u sont les coordonnées, on peut supposer $z = Du^k + Cu^{k+p}$, &c. u étant fort petite, quoique finie; & dans ce cas u étant soit positive, soit négative, cette serie representera la valeur de z .

DÉMONST. Soit $z^m + bz^{m-1}u + \dots + Kz + gu + F = 0$, l'équation de la courbe: je dis d'abord qu'on aura aisément la valeur de z en u , lorsque u est fort petite. Car ayant disposé cette équation sur le Parallélograme de M. Newton, ou sur le Triangle analytique de M. l'Abbé de Gua, de la maniere enseignée par M. Cramer (Analyse des lignes courbes, Chap. III. p. 54.) on trouvera chaque terme de l'équation de z en u l'un après l'autre, & on aura $z = Du^k + Cu^{k+p} +$, &c. Cela posé, je dis que si u est fort petite, cette serie representera la valeur de z , soit que u soit positive, soit que u soit négative.

Car 1°. lorsque u est positive & fort petite, il est évident que la valeur de z en u fera une suite extrêmement convergente, dont les termes commencent, au moins à une certaine distance du premier, à ne contenir que des puissances

puissance positives de u ; autrement elles n'iroient pas en augmentant, ce qui feroit contre la supposition & contre la maniere dont la serie a été formée. Donc si on substitue à la place de z sa valeur en u dans l'équation de la courbe, plus la valeur substituée de z aura de termes, plus les puissances de u seront hautes dans les termes qui resteront après avoir effacé ceux qui se détruisent ; & ainsi le résultat de la substitution approchera d'autant plus d'être nul, qu'on prendra plus de termes pour la valeur de z . Donc u étant positive & très-petite, quoique finie, la serie $z = Du^k + Cu^{k+p} +$, &c. représentera d'autant plus exactement la valeur de z , qu'on y prendra plus de termes, & pourra en approcher d'aussi près qu'on voudra. Donc cette serie exprime la valeur de z .

2°. Il en sera de même, si en faisant u négative dans l'équation de la courbe, on y substitue la valeur de z répondante à u négative. Car plus cette valeur substituée aura de termes, plus les puissances de $-u$ seront hautes dans les termes restans après la substitution. Or si on cherche une quantité $A + B\sqrt{-1} = (-Du)^k$, k exprime un exposant fractionnaire d'un degré pair, on trouvera facilement (Art. LXXII.) que A & B sont des quantités réelles du même nombre de dimensions que Du^k . Donc si on substitue dans ces termes restans, à la place des puissances de $-u$, leurs valeurs $A + B\sqrt{-1}$, & qu'on partage le résultat en deux quantités séparées, l'une toute réelle, & l'autre multipliée par $\sqrt{-1}$; chacune

de ces quantités sera d'autant plus petite, & approchera d'autant plus de zéro, que l'on prendra plus de termes pour la valeur de z . Donc u étant négative & très-petite, quoique finie, la serie qui exprime la valeur de z répondante à $-u$ est d'autant plus exacte qu'on y prend plus de termes. Donc cette serie est la vraie valeur de z , quoiqu'imaginaire.

Or tous les termes réels de la serie précédente peuvent se représenter par une quantité finie & réelle M ; & chacun des termes imaginaires, selon ce qui a été dit plus haut, peut se représenter par $G + H\sqrt{-1}$, G & H étant des quantités réelles. Donc la somme des termes réels & des termes imaginaires, c'est-à-dire la serie entiere que donne u négative, peut se représenter par $A + B\sqrt{-1}$.

LXXVII.

COROLLAIRE. Donc on peut toujours supposer à u prise négativement quelque valeur finie, telle que z soit $= A + B\sqrt{-1}$.

LXXVIII.

SCHOLIE. Nous remarquerons ici en passant que lorsque u est infiniment petite, il ne suffit pas, comme quelques Auteurs l'ont cru, de prendre un seul terme de la serie pour exprimer la valeur de z . Car soit, par exemple, $z = u^2 + \sqrt{u^2}$ l'équation d'une courbe, il est visible que u étant négative, z est imaginaire, parce que $\sqrt{u^2}$ est imaginaire; mais si on négligeoit absolument le terme

$\sqrt{u^2}$, u étant infiniment petite, on auroit $z = u^2$, & par conséquent on trouveroit z réelle, u étant négative, ce qui n'est pas. M. d'Alembert est le premier qui ait fait cette importante remarque dans les Mém. de l'Acad. de Berlin 1746, & qui ait par là invinciblement établi l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce que d'habiles Géomètres avoient contestée. M^r Cramer & Euler ont depuis traité la même matière; l'un dans son Introduction à l'Analyse des lignes courbes, l'autre dans les Mém. Acad. de Berlin 1749.

L X X I X.

LEMME 2. Soit a la valeur de l'abscisse dans une courbe géométrique; lorsque l'ordonnée passe du réel à l'imaginaire, on pourra toujours supposer à l'abscisse une valeur $a + b$, telle que l'ordonnée correspondante soit $A + B\sqrt{-1}$; b étant une quantité qui peut être très-petite, mais toujours finie.

DÉMONST. Soit $x^m + h x^{m-1} y + \dots + y + K = 0$ Fig. 16
l'équation d'une courbe TV , soit $\dots AP = y$

$$PM = x$$

soit aussi T le point où les ordonnées deviennent imaginaires, & soient $\dots TV = u$

$$AS = a$$

$$ST = \epsilon$$

$$MV = z$$

On aura $AS - AP = PS = TV = u$, & $\epsilon - x = z$;

G ij

donc l'équation de la courbe rapportée aux coordonnées TV, VM , fera $z^m + Bz^{m-1} + \dots + Kz + ga + F = 0$. Donc faisant TV, u , négative & très-petite, s'il est nécessaire, par exemple $= TO$, l'ordonnée au point O sera $= A + B\sqrt{-1}$; donc l'ordonnée au point E sera $= \ell + A + B\sqrt{-1}$. Car en transportant l'axe TV en AS , on ne fait qu'augmenter de la quantité constante & réelle $ST = \ell$, toutes les ordonnées MV de la courbe, soit réelles, soit imaginaires: or les ordonnées imaginaires qui répondent à TO négative & finie, mais très-petite, s'il est nécessaire, peuvent être supposées $= A + B\sqrt{-1}$. (Art. LXXVII.). Donc les ordonnées imaginaires répondantes à AL sont $ST + A + B\sqrt{-1}$. Donc depuis le point S au moins jusqu'à une certaine distance finie L , les ordonnées peuvent être représentées par $G + H\sqrt{-1}$.

Donc en général. dans toute courbe, AP étant $= q$, & $PM = p$, si S est le point, où p cesse d'être réelle, passé ce point, au moins jusqu'à une certaine distance L , on pourra supposer $p = k + i\sqrt{-1}$.

L X X X.

Seconde proposition démontrée.

Toute racine imaginaire d'une équation quelconque peut se représenter par $A + B\sqrt{-1}$.

THÉOREME 2. Soit un multinome quelconque $x^m + hx^{m-1} + lx^{m-2} + \dots + fx + g = 0$, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui substituée à la place de x fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité $m + n\sqrt{-1}$ à substituer à la place de x qui rendra ce multinome $= 0$, m & n étant des quantités réelles.

DÉMONST. A la place du dernier terme g de cette équation, soit mise une indéterminée y , enforte que $x^m + h x^{m-1} \dots + y = 0$ soit l'équation d'une courbe MT dans laquelle l'abscisse AP (y) peut toujours être supposée réelle, & dans laquelle la valeur de x en y sera ou réelle ou imaginaire. Soit fait $x = p + q \sqrt{-1}$, p & q étant des indéterminées quelconques réelles ou imaginaires, & d'une forme tout-à-fait inconnue, on aura en substituant cette valeur de x une équation qui contiendra trois indéterminées p, q, y : on pourra donc changer & séparer l'équation précédente en deux autres quelconques à volonté; pour plus de commodité, je la sépare en deux autres, dont l'une renferme tous les termes où ne se trouve point $\sqrt{-1}$, & l'autre tous ceux où $\sqrt{-1}$ se trouve; & cette dernière étant divisée par $\sqrt{-1}$, on aura les deux équations suivantes; $p^m + r p^{m-2} q^2 + \dots + y = 0$, & $q^{m-1} + \dots + r = 0$. Or ces deux équations peuvent se changer en deux autres, dont l'une renferme y & p , & l'autre y & q . Nous enseignerons plus bas (Art. LXXXVIII.) d'après les Auteurs d'Algebre comment se fait cette opération; mais il nous suffit à présent qu'on puisse la faire, & la supposer faite. Cela posé, je dis que p & q auront toujours quelque valeur réelle.

Fig. 17.

Car 1°. il est évident que depuis S jusqu'en L , p & q auront une valeur réelle, puisque (Lemme précédent), depuis S jusqu'en L , on a $x = A + B \sqrt{-1}$: donc $p = A$, & $q = B$.

2°. Supposons que passé le point L , p & q cessent d'avoir des valeurs réelles, dans ce cas on aura (Art. LXXIX.) depuis L jusqu'à une certaine distance K , par exemple, $p = k + i\sqrt{-1}$, & $q = g + h\sqrt{-1}$. Donc $x = k + g + (i + h)\sqrt{-1}$: donc $p = k + g$ & $q = i + h$; donc la supposition qu'on avoit faite que p & q cessoient d'avoir des valeurs réelles en L , est une supposition fausse.

En continuant le même raisonnement, on trouvera que par-delà le point L & tout le long de la ligne SQ , p & q seront réelles. Donc quelque valeur qu'on suppose à y , la valeur imaginaire correspondante de x sera $= p + q\sqrt{-1}$; donc si $y = g$, la valeur correspondante de x sera $m + n\sqrt{-1}$, m & n étant réelles. Donc si $x^m + hx^{m-1} + \dots + g = 0$ a une racine imaginaire, cette racine sera $= m + n\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. Donc $x^m + hx^{m-1} + \dots + g = 0$ pourra être divisé par $x - m - n\sqrt{-1}$. Car en faisant la division, il est toujours possible de parvenir à un reste r dans lequel il n'y ait plus de x , puisque x ne monte qu'au premier degré dans le diviseur $x - m - n\sqrt{-1}$; & si on nomme Q le quotient, il est évident que $Qx - Qm - Qn\sqrt{-1} + r = 0$ sera une quantité égale & identique au multinome proposé. Donc substituant dans cette quantité $m + n\sqrt{-1}$ à la place de x , le résultat doit être $= 0$; donc $Qm + Qn\sqrt{-1} - Qm - Qn\sqrt{-1} + r = 0$, donc $r = 0$; or r ne contient point x ; donc si $r = 0$, c'est parce que réellement la division s'est faite sans reste.

LXXXI.

THÉOREME 3. Si un multinome tel que celui du Théorème précédent peut se diviser par $m + n\sqrt{-1}$, il aura en même temps pour diviseur exact $m - n\sqrt{-1}$.

DÉMONSTR. Ce Théorème sera prouvé, si on fait voir que $m + n\sqrt{-1}$ substituée à la place de x , faisant évanouir tous les termes du multinome, il en sera de même de $m - n\sqrt{-1}$.

Pour le démontrer & rendre la démonstration plus sensible, soit l'équation $x^2 + hx + g = 0$ que je suppose avoir pour diviseur exact, ou pour racine $m + n\sqrt{-1}$, en substituant pour x la valeur $m + n\sqrt{-1}$, il viendra $mm + 2mn\sqrt{-1} - nn + hm + hn\sqrt{-1} + g = 0$. Cette équation sous cette forme a, comme on voit, deux parties, l'une composée de termes réels, savoir $mm + hm - nn + g$, l'autre composée de termes tous imaginaires $2mn\sqrt{-1} + hn\sqrt{-1}$: de plus chacune de ces parties est $= 0$ (Art. LXIX.) On voit aussi que dans la partie formée de termes tous réels, il n'y a que des puissances paires de n , & dans la partie formée de termes imaginaires, toutes les puissances de n sont impaires, & de plus cette seconde équation contient $n\sqrt{-1}$ à tous ses termes: par conséquent on la peut diviser par $n\sqrt{-1}$. Or le quotient de cette division ne contiendra que des puissances paires de n , ainsi que la première partie. Donc on auroit également ces deux équations, en substituant $-n$ au lieu de $+n$. Donc on y parviendrait de

même en substituant pour x , $m - n\sqrt{-1}$ au lieu de $m + n\sqrt{-1}$. Donc si le multinome est divisible par $m + n\sqrt{-1}$, il l'est en même temps par $m - n\sqrt{-1}$.
C. Q. F. P.

LXXXII.

Toute équation ayant des racines imaginaires est réductible en facteurs trinomes réels.

COROLLAIRE. Donc les mêmes choses étant supposées que dans les Théorèmes précédens, le multinome pourra toujours se diviser en facteurs trinomes réels $xx + fx + g$, $xx + lx + i$, dont les coefficients seront réels. Car puisque ce multinome peut se diviser par $x - m - n\sqrt{-1}$ & $x - m + n\sqrt{-1}$, il pourra aussi se diviser par leur produit $xx - 2mx + mm + nn$ qui est un facteur tout réel; & faisant sur le quotient qui en proviendra les mêmes raisonnemens qu'on a faits sur le multinome, on prouvera qu'il peut aussi se diviser par un facteur trinome réel, & ainsi de suite.

LXXXIII.

SCHOLIE. Jusqu'à présent on n'avoit encore démontré la proposition générale du Corollaire précédent que pour les seuls cas suivans: 1°. pour les cas de $x^{2^{\lambda}} + 2tx^{\lambda} + 1$, & pour celui de $x^n \pm a^n$ qui revient au cas de $1 \pm x^{\lambda}$ en supposant $a=1$, cas dont nous avons parlé (Art. LXII. & LXVI.) 2°. Pour le cas où le multinome est du 3°. degré, ou du 4°. ou du 5°. En effet lorsque le multinome est 1°. du 3°. degré, on fait, & nous le démontrerons plus bas (Art. LXXXV.) pour une équation impaire d'un degré quelconque, on fait, dis-je, que ce multinome a au moins un

un facteur réel. Soit ce facteur $x + a$, en divisant le multinome par ce facteur, on aura l'autre facteur $xx + px + q$ dont les coefficients seront réels. 2°. Si le multinome est du 4^e. degré $x^4 + bx^3 + cx^2 + ex + q$, ou plutôt en faisant évanouir le second terme $x^4 + qxx + rx + s$, supposons qu'on prenne $xx + ex + f$, $xx - ex + g$ pour les deux facteurs, on trouvera (Arith. univers. p. 210.)

$$e^6 + 2qe^4 + qqee - rr - 4see = 0$$

$$f = \frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2}$$

$$g = \frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2}$$

Or l'équation $e^6 + 2qe^4$, &c. étant une équation du 3^e degré dont ee est l'inconnue, aura au moins une racine réelle, & le signe — du dernier terme fait connoître (Art. LXXXVI.) que cette racine réelle sera positive. Donc e aura pour le moins deux racines réelles, l'une positive & l'autre négative. Donc puisqu'on a une valeur de f & de g en e , les quantités f & g seront aussi réelles. Donc dans $xx + ex + f$, $xx - ex + g$, les coefficients e , f , g seront des quantités réelles.

3°. Enfin lorsque le multinome est du 5^e degré, comme il y a sûrement un facteur réel $x + a$, l'autre facteur sera du 4^e degré, ce qui revient au cas précédent.

LXXXIV.

D'où est tirée la théorie précédente.

AVERTISSEMENT. La théorie précédente sur les imaginaires est tirée d'un Mémoire de M. d'Alembert qui se trouve dans le second volume des Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1746. J'ai étendu ses démonstrations, & je leur ai donné la forme que j'ai cru la plus propre pour les mettre à la portée de tout le monde. M. Euler dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1749. a traité la même matière des racines imaginaires des équations par une méthode différente, mais plus longue. Il y a joint une méthode pour changer les quantités imaginaires en $A + B\sqrt{-1}$ qui est la même que celle de M. d'Alembert.

CHAPITRE VI.

Démonstration de quelques Propositions supposées plus haut, & d'autres nécessaires dans ce Traité.

LXXXV.

Toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle.

THÉOREME. Dans une équation quelconque d'un degré impair il y a toujours au moins une racine réelle.

DÉMONSTR. Soit l'équation $x^{2m+1} + Ax^{2m} + \dots + q = 0$, m est un nombre entier pair. Au lieu de faire le premier membre de cette équation égal à zéro, je le suppose $= y$; $x^{2m+1} + Ax^{2m} + q = y$ fera l'équation

d'une courbe dans laquelle le point où $y=0$, donnera la valeur de x . Cela posé, soit la ligne ABK l'axe de cette courbe, le point K l'origine des x . Il faut prouver que la courbe coupera son axe en un point : car alors il y aura nécessairement une valeur de x réelle, au point où $y=0$. Or supposons x positive & infinie, y le sera aussi, puisqu'elle sera alors $= x^{2m+1}$, & la courbe passera par l'extrémité de l'ordonnée PM . Si nous faisons à présent x négative & infinie, y sera infinie & $= -x^{2m+1}$, c'est-à-dire négative. Donc y après avoir été positive & infinie, lorsque $x=\infty$, sera négative & infinie, lorsque x sera négative & infinie. Or la courbe pBP est continue, puisqu'à chaque valeur de x répond une valeur de y . Donc la courbe coupera nécessairement son axe en quelque point B pour passer du positif au négatif pA . Donc l'équation a au moins une valeur réelle.

Fig. 18.

LXXXVI.

COROLL. 1. On démontrera de la même manière cette proposition connue dans tous les livres d'Algebre, mais qui y est autrement prouvée, & souvent assez mal; que toute équation d'un degré impair dont le dernier terme est affecté du signe —, a au moins une racine positive.

LXXXVII.

COROLL. 2. Par le moyen du Théorème précédent, & des deux derniers Théorèmes du Chapitre V. on peut dé-

Les racines
imaginaires
vont toujours
en nombre
pair.

H ij

montrer que les imaginaires vont toujours en nombre pair; proposition d'un très-grand usage, mais encore assez mal prouvée dans tous les livres d'Algebre.

LXXXVIII.

Solution de
quelques pro-
blèmes né-
cessaires.

PROBLEME 1. Deux équations qui renferment deux indéterminées A & B étant données, les réduire à deux autres, dont l'une ne contienne que A , & l'autre ne contienne que B , avec des constantes quelconques.

SOLUTION. Soient ordonnées ces équations par rapport à A , il est évident qu'elles fourniront chacune une ou plusieurs valeurs de A en B & en constantes. Or parmi les valeurs de A en B que fournissent la première & la seconde équations, il y en doit avoir au moins quelques-unes de communes, puisque les deux équations sont supposées avoir lieu à la fois : par conséquent ces deux équations doivent avoir quelques diviseurs communs. Je cherche donc leur plus grand commun diviseur, ce que je fais de la manière enseignée dans tous les livres d'Algebre. Je pousse la division jusqu'à ce que je sois parvenu à un reste qui ne contienne plus d' A . Je fais ce reste $= 0$, ce qui doit être pour qu'il y ait un commun diviseur : de là je tire une équation en B . J'ordonne ensuite les deux équations par rapport à B , & je fais les mêmes raisonnemens & les mêmes opérations pour avoir une équation en A .

LXXXIX.

PROBLEME 2. Trouver la valeur de x dans une équation quelconque en supposant qu'elle a des racines imaginaires.

SOLUTION. 1°. Soit cette équation $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + r = 0$. D'abord si cette équation a des racines réelles, je les trouve par une construction géométrique. Supposons que ces valeurs soient $a, b, c, \&c.$ je divise l'équation par $x - a, x - b, x - c, \&c.$ & je parviens à un reste qui ne contient plus que des racines imaginaires. Dans ce cas nous avons démontré (Art. LXXX.) qu'on peut toujours supposer $x = A + B\sqrt{-1}$. Je mets dans l'équation à la place de x sa valeur $A + B\sqrt{-1}$; il me viendra deux parties, l'une toute réelle, & l'autre toute imaginaire, toutes deux nécessairement égales à zéro chacune en particulier (Art. LXIX.). Je divise la partie imaginaire par $\sqrt{-1}$ qui est à tous les termes: j'aurai alors deux équations qui ne contiendront plus d'imaginaires, & qui auront deux inconnues A & B que je trouverai par le problème précédent.

Première
méthode pour
résoudre ce
problème.

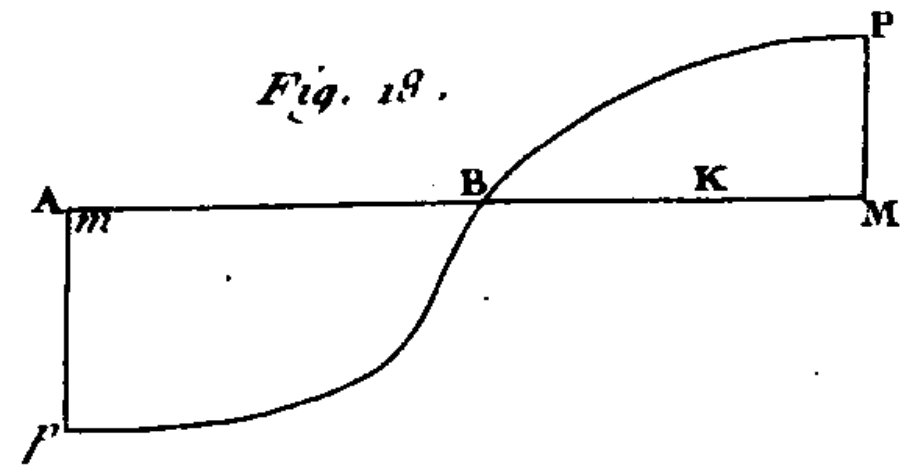
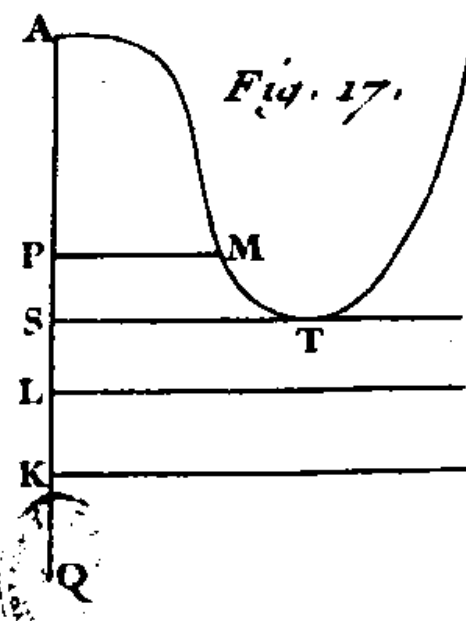
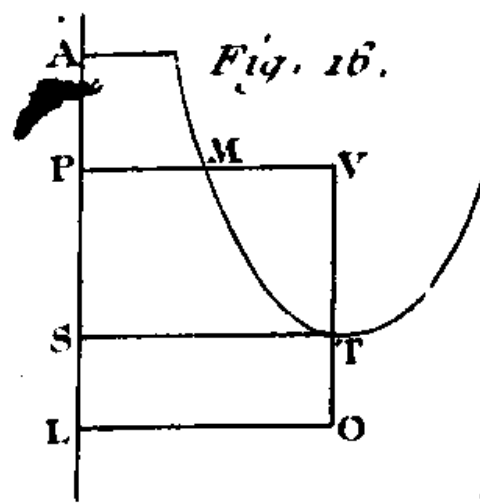
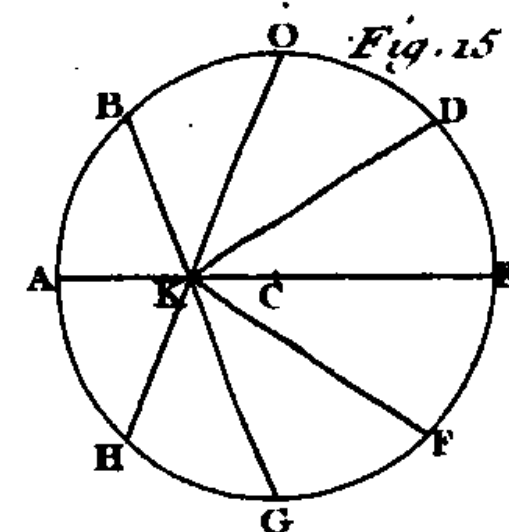
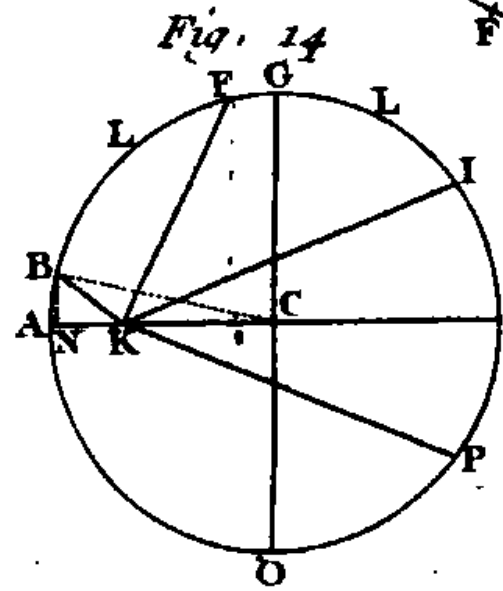
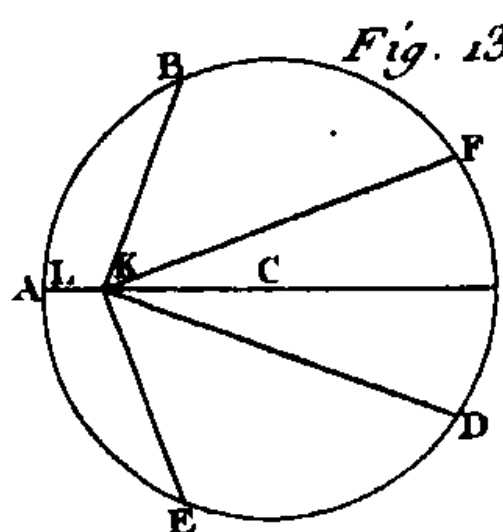
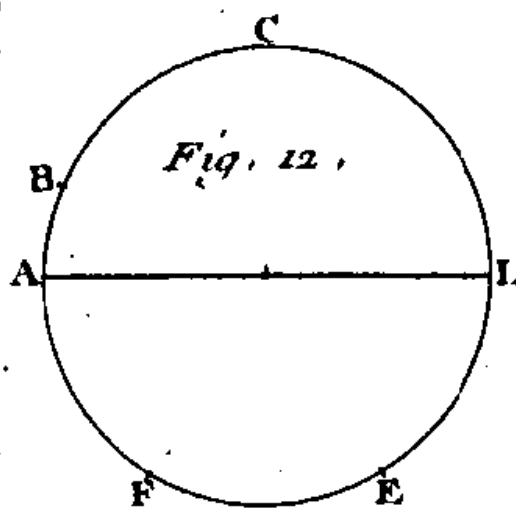
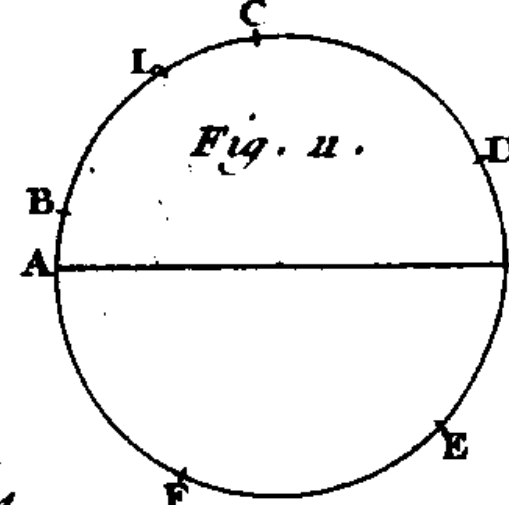
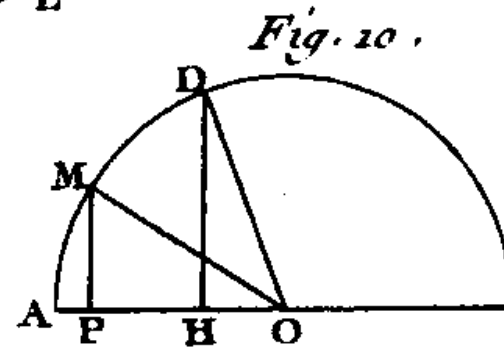
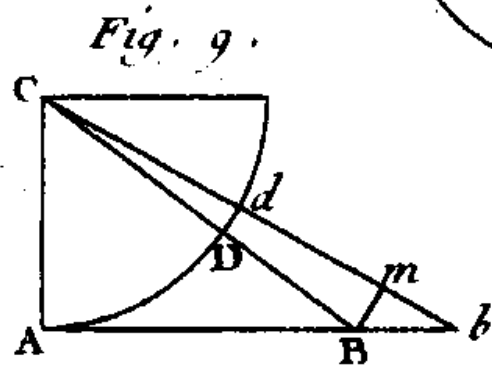
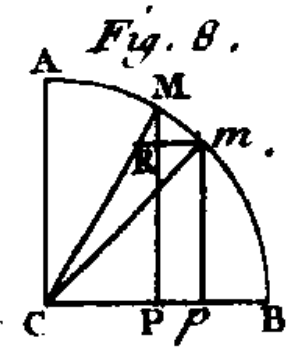
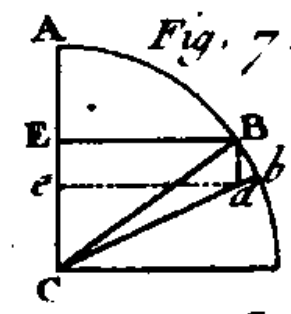
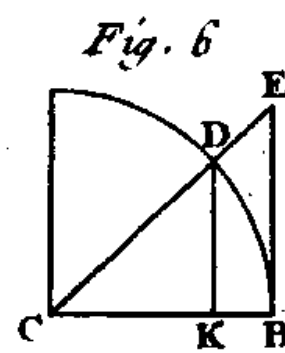
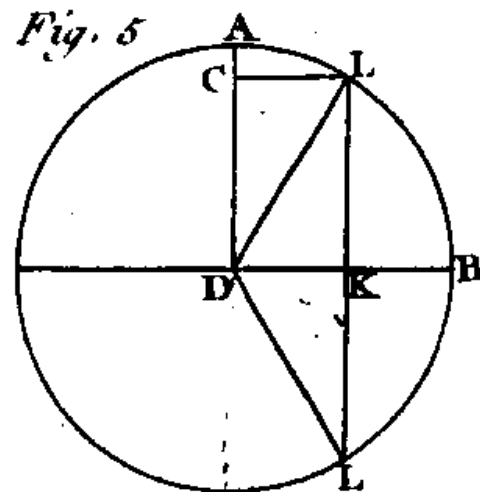
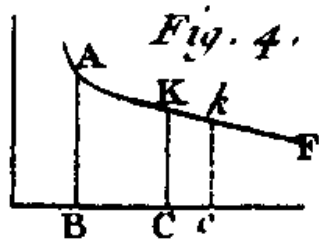
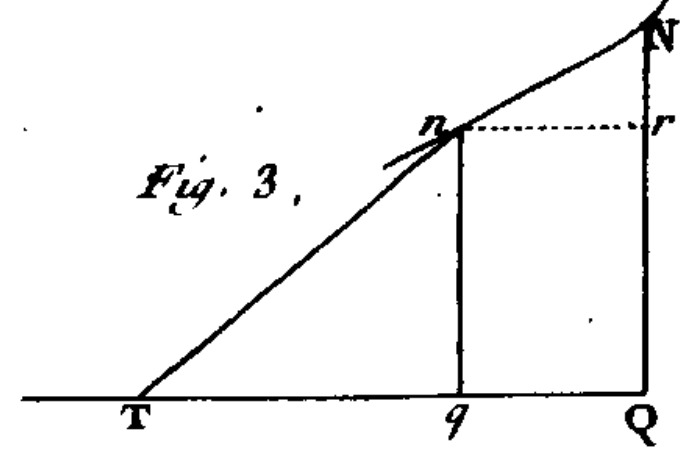
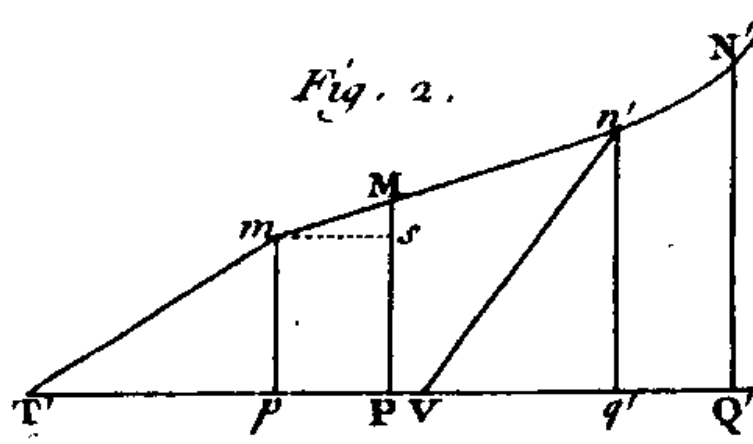
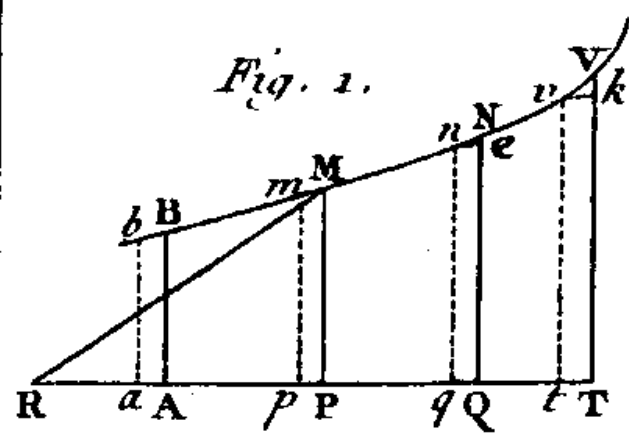
2°. Quoique les racines soient imaginaires, l'équation est toujours divisible par un facteur trinome $xx + px + q$, p & q étant réelles (Art. LXXXII.). Soit donc faite la division à la manière ordinaire, on arrivera à un reste où x ne se trouvera plus qu'au premier degré. Soit $Rx + S$ ce reste, il doit être égal à zéro, & cette égalité à zéro

Seconde
méthode pour
résoudre le
même pro-
blème.

ne doit point dépendre de la valeur de x , puisque quelle que soit x , le multinome $x^m \dots + r$ est toujours divisible par $xx + px + q$. Donc l'égalité à zéro ne viendra point de ce que x fera $= -\frac{S}{R}$, mais de ce qu'on aura en particulier $R=0$, & $S=0$. Or les quantités S & R ne contiennent plus que p & q avec des constantes ; on aura donc deux équations qu'on réduira l'une en p , & l'autre en q , dans lesquelles équations p & q auront au moins quelques valeurs réelles, qu'on trouvera alors comme à l'ordinaire.

FIN DE L'INTRODUCTION.







TRAITÉ DU CALCUL INTÉGRAL.



PREMIERE PARTIE.

De l'Intégration des différentielles qui n'ont
qu'une seule changeante.

CHAPITRE PREMIER.

*Exposition & application de la regle fondamentale
de tout le Calcul Intégral.*

I.

QUAND on a une différentielle incomplexé qui n'a qu'une changeante x multipliée ou divisée par des constantes quelconques, voici ce que l'on doit pratiquer pour en avoir l'intégrale.

Enoncé de
la regle fon-
damentale.

Il faut 1°. effacer dx ; 2°. augmenter d'une unité l'exposant de la changeante ; 3°. diviser le tout ainsi préparé par cet exposant augmenté de l'unité. Cette opération donnera l'intégrale cherchée.

I I.

Son appli-
cation 1^o. à
un exemple
général in-
complexe.

Je suppose qu'on ait à intégrer $ax^m dx$ (a est une constante quelconque, & m est un exposant quelconque). Suivant la règle précédente j'efface dx ; j'augmente l'exposant m d'une unité, ce qui donne ax^{m+1} ; je divise par $m+1$, j'ai $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$. C'est l'intégrale cherchée.

DÉMONSTR. Je prends suivant les règles du calcul différentiel la différence de $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$; cette différence est

$$\frac{(m+1) \cdot ax^{m+1-1} dx}{m+1} = ax^m dx. \text{ Donc, \&c.}$$

On trouvera de même que l'intégrale de $mx^{m-1} dx$ est $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1} = x^m$.

I I I.

Cas unique
qui peut faire
quelque diffi-
culté.

SCHOLIE I. Il n'y a qu'un seul cas qui puisse faire quelque difficulté, c'est celui où l'on auroit $x^{-1} dx$, ou $\frac{dx}{x}$. En suivant notre règle on trouve pour intégrale de cette différentielle $\frac{x^0}{0}$; or cette intégrale est égale à l'infini, ce qui se marque ainsi $\frac{x^0}{0} = \infty$. La méthode paroît donc ne rien donner dans ce cas. Mais nous avons vu dans l'Introduction (Art. XVIII.) que $\frac{dx}{x}$ est une différentielle logarithmique, dépendante par conséquent, ainsi que nous l'y avons expliqué, de la construction de la logarithmique, ou, ce qui est la même chose (Art. XVI. de l'Introduction) de la quadrature de l'hyperbole équilatère.

Solution
de ce cas.

IV.

IV.

SCHOLIE 2. Donc l'intégrale de $-\frac{dx}{x}$ est $-\log x$, ou ce qui revient au même, $\log \frac{1}{x}$, ce qu'on peut voir de plusieurs manières : car on a par les règles connues des logarithmes, $\log \frac{1}{x} = \log 1 - \log x =$ (Art. v. Introduction) $0 - \log x = -\log x$.

On peut encore s'en assurer en différentiant $\log \frac{1}{x}$; on trouvera (Art. xviii. Introduction) que la différence est $d\left(\frac{1}{x}\right)$ divisé par $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire $-\frac{dx}{x^2}$ divisé par $\frac{1}{x}$; or $-\frac{dx}{x^2}$ divisé par $\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x}$.

V.

COROLLAIRE 1. Donc toutes les fois qu'une différentielle est composée d'un seul terme, il est facile d'en avoir l'intégrale par notre règle ; comme aussi lorsqu'elle est composée de plusieurs termes dont chacun n'a qu'une seule changeante élevée dans ce terme à une puissance quelconque. Par exemple, soit donné $3bx^2dx + cx^3dx + 2c^3ydy - ffppdz$. Dans ce cas chaque terme s'intègre séparément par notre règle fondamentale, comme s'il étoit seul. Ainsi l'intégrale de la proposée est $bx^3 + \frac{cx^4}{4} + c^3yy - ffppz$; la preuve en est évidente ; puisqu'en différentiant cette intégrale on retrouve la différentielle proposée.

2°. Application à des différentielles complexes.

VI.

COROLL. 2. Si l'on a pour différentielles des fractions

3°. Application aux fractions.

qui n'aient que des constantes au dénominateur, on en trouvera de même les intégrales. Ainsi $\frac{(ax^m + px^{p-1})dx}{aa + bb}$ a pour intégrale $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + x^p$.

De même $\int \frac{b^3 x dx + 2c^4 y dy}{a} = \frac{b^3 x^2}{2a} + \frac{2c^4 y^2}{3a}$.

Tout cela est fondé sur ce que les constantes doivent se retrouver dans l'intégrale comme elles étoient dans la différentielle, par la raison que quand on différentie une quantité, on ne touche point aux constantes.

VII.

Il peut encore arriver qu'une fraction qui a une changeante à son dénominateur s'integre par la premiere regle. Ainsi $\frac{dx}{xx} = -x^{-1} dx$ a pour intégrale en suivant cette regle $\frac{1}{x}$; de même $\int \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2xx}$. Et en général si j'ai $\frac{dx}{x^m} = x^{-m} dx$; suivant la regle précédente j'efface dx ; j'augmente l'exposant $-m$ d'une unité, je divise le tout par $-m + 1$, j'ai $\int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{-(m-1).x^{m-1}}$.

VIII.

4°. Aux différentielles affectées de signes quelconques.

COROLL. 3. On integre encore par la regle fondamentale, lorsqu'une fonction de x & dx est multipliée par une quantité sous un signe quelconque, & que la grandeur hors du signe est le produit d'une constante quelconque par la différentielle de la grandeur qui est sous le signe.

Sous quelle condition.

Par exemple , soit proposé $\frac{1}{2} (a^2 dx + 2bx dx) \times \overline{a^2 x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$; dans cette quantité la grandeur hors du signe $\frac{1}{2} (a^2 dx + 2bx dx)$ est le produit du coefficient constant $\frac{1}{2}$ par $a^2 dx + 2bx dx$ différentielle de la quantité $a^2 x + bx^2$ qui est sous le signe ; je dis donc que suivant la règle fondamentale , l'intégrale de cette quantité est $\frac{1}{3} \cdot \overline{a^2 x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$. Car suivant cette règle j'augmente d'une unité l'exposant $\frac{1}{2}$ qui devient alors $\frac{3}{2}$, je divise la différentielle par $\frac{3}{2}$ multiplié par la différentielle $a^2 dx + 2bx dx$ de $a^2 x + bx^2$, le quotient $\cdot \frac{1}{3} \overline{a^2 x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$ est l'intégrale cherchée.

I X.

La raison de cette règle est bien simple ; car soit supposé $a^2 x + bx^2 = y$, on aura $\frac{1}{2} (a^2 dx + 2bx dx) \times \overline{(a^2 x + bx^2)}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} dy \times y^{\frac{1}{2}}$. Ainsi il faut faire sur la quantité donnée les mêmes opérations qu'on feroit sur $\frac{1}{2} dy \cdot y^{\frac{1}{2}}$ pour en trouver l'intégrale.

Cette règle pourra paroître embarrassante à plusieurs de nos lecteurs , qui craindront de ne pas démêler aisément les différentielles qui seront dans le cas dont il s'agit : mais au moyen des *transformations* dont nous parlerons dans la suite , la pratique en deviendra beaucoup plus facile.

X.

COROLL. 4. Quand une différentielle dx est multipliée par la puissance d'une grandeur complexe rationnelle , ou

Autre cas dans lequel on intègre par la règle fondamentale.

qui n'a que des constantes au dénominateur; que l'exposant de la puissance est un nombre entier positif, & qu'il n'y a qu'une changeante x , on en trouve l'intégrale par notre règle, en élevant la grandeur complexe à cette puissance, & multipliant chaque terme par dx , & prenant ensuite l'intégrale de chacun. Que l'on ait $dx \cdot \overline{a+bx^2}^2$, cette différentielle devient, en suivant ce que nous venons de dire, $a^2 dx + 2abx dx + b^2 x^2 dx$, dont chaque terme s'intègre par la règle fondamentale.

X I.

Formule
pour ce der-
nier cas.

En général toutes les fois qu'on aura $hx^k dx \cdot \overline{e+cx^q}^a$, en supposant a un nombre entier positif, & q, k , des nombres quelconques, entiers ou rompus, positifs ou négatifs, il est aisé d'en avoir l'intégrale finie & exacte par la première règle. Pour cela il ne faut qu'élever $e+cx^q$ à la puissance dont l'exposant est a , suivant la formule connue des Géomètres pour l'élévation d'un binôme à une puissance quelconque; multiplier chaque terme de cette suite qui sera toujours terminée, par $hx^k dx$, & prendre l'intégrale de chacun (Coroll. 1.). Dans le cas présent en pratiquant cette opération, on a $\int hx^k dx \cdot \overline{e+cx^q}^a$
 $\Rightarrow (W) \frac{he^a x^{k+1}}{k+1} + \frac{ahe^{a-1}}{k+1+q} \times cx^{k+1+q} +$
 $\frac{a \cdot (a-1)}{2} \cdot he^{a-2} ccx^{k+1+2q} + \&c.$

XII.

SCHOLIE 3. Il y a cependant un cas à observer ici à cause de quelques difficultés qu'il peut faire naître, c'est le cas où $\frac{k+1}{-q}$ seroit égal à un nombre entier positif. Car alors le dénominateur de quelqu'un des termes de la serie devient $= 0$; par exemple, si on suppose $\frac{k+1}{-q} = 2$, on aura $k+1+2q=0$, ce qui rend le troisieme terme de la serie $= \infty$. Alors donc elle ne nous fait rien connaître.

Difficulté qui peut s'y trouver quelquefois.

XIII.

Cependant cette difficulté ne subsiste pas, toutes les fois que a est $< \frac{k+1}{-q}$; car alors la serie est finie avant qu'on en soit venu au terme dont le dénominateur seroit $= 0$.

Solution de cette difficulté.

La difficulté n'a donc lieu que lorsque $a =$ ou est $> \frac{k+1}{-q}$; alors même il est aisé de la lever. Car le terme dont le dénominateur fera $= 0$ après l'intégration, contiendra avant l'intégration une différentielle logarithmique, intégrable par conséquent en supposant la quadrature de l'hyperbole. En effet, l'exposant de la puissance de x dans chaque terme est le même que le dénominateur de ce même terme; le terme où ce dénominateur fera $= 0$ fera donc $\frac{x^0}{0}$, ou (Art. III.) $\int \frac{dx}{x}$.

XIV.

Tout cela peut se démontrer sans avoir recours à notre

Démonstration de cette solution.

serie. Car soit $\frac{k+1}{-q}$ égal au nombre entier positif m , on a

$$k = -qm - 1, \text{ \& } h x^k dx \cdot \overline{e + c x^q}^{\alpha} = h x^{-qm-1}$$

$dx \cdot \overline{e + c x^q}^{\alpha}$. Ou si on élève $e + c x^q$ à la puissance α , on formera un polinome qui contiendra les puissances $x^q, x^{2q}, x^{3q}, \&c.$ de x jusqu'à $x^{\alpha q}$ inclusivement, & il est visible qu'en multipliant chaque terme de ce polinome par $h x^{-qm-1} dx = \frac{h dx}{x^{qm+1}}$, il est visible, dis-je, que si $\alpha =$ ou est $> m \left\{ \frac{k+1}{-q} \right\}$, il y aura quelqu'un des termes où la différentielle se réduira à $\frac{dx}{x}$.

X V.

REMARQUE GÉNÉRALE. Tout le calcul intégral est fondé sur cette premiere regle que nous venons d'établir; savoir la regle pour intégrer $x^m dx$. Mais toutes les différentielles ne s'appliquent pas aussi aisément à cette regle, que celles que nous venons d'examiner. Il en est qu'on n'a pu parvenir encore à y réduire. De plus parmi celles mêmes qui sont intégrables, beaucoup sont très-complicquées. En quoi donc consiste l'art du Calcul intégral? c'est à préparer ces quantités, de façon qu'on les amene à l'expression la plus simple qu'elles puissent avoir. Or pour cela les Analystes ont imaginé plusieurs transformations. Nous allons les développer ici en les réduisant à des cas généraux.



C H A P I T R E II.

Méthode pour faciliter l'intégration d'un grand nombre de différentielles par le moyen de différentes transformations.

XVI.

LA premiere transformation dont nous allons parler Premiere transformation. ici, a lieu pour les différentielles affectées de radicaux, ou élevées à des puissances dont les exposans sont négatifs, pourvu qu'en ce cas la quantité hors du signe Conditions suivant lesquelles elle a lieu. soit la différentielle même de la quantité sous le signe, ou lui soit proportionnelle. Cette transformation consiste 1°. à partager la différentielle donnée en deux parties ou facteurs, dont l'un soit dx & l'autre la grandeur complexe En quoi elle consiste. qui est sous le signe; 2°. à faire cette derniere quantité égale à une seule changeante z ; 3°. à différentier l'équation qui résulte de cette transformation; 4°. enfin à mettre dans la proposée au lieu de x & de dx leurs valeurs en z & en dz . Cette opération donne une expression plus simple débarrassée de radicaux dont l'intégrale se trouve par la premiere regle. Après l'avoir trouvée on y remettra les valeurs de z en x , & on aura l'intégrale cherchée.

Appliquons cette regle à quelques exemples.

XVII.

Soit $dx \cdot (a + bx)^p$ dont on cherche l'intégrale. Je Premier exemple.

fais, suivant ce qui est dit ci-dessus, $a + bx = z$; donc $dx = \frac{dz}{b}$, & $a + bx^p = z^p$. J'ai donc la transformée $\frac{z^p dz}{b}$ dont l'intégrale est par la première règle $\frac{z^{p+1}}{(p+1) \cdot b}$. Remettant pour z la valeur $a + bx$, on aura $\frac{(a + bx)^{p+1}}{(p+1) \cdot b}$: c'est l'intégrale cherchée.

XVIII.

Second
exemple.

Si la proposée étoit $xx dx \times (f + gx^3)^m$, on feroit de même $f + gx^3 = z$ ce qui donne $x^2 dx = \frac{dz}{3g}$, $f + gx^3 = z$. La transformée est donc $\frac{z^m dz}{3g}$, dont l'intégrale est $\frac{z^{m+1}}{(m+1) \cdot 3g}$. Substituons pour z^{m+1} la valeur $\frac{(f + gx^3)^{m+1}}{(m+1) \cdot 3g}$, l'intégrale de la proposée est, comme on le voit $\frac{(f + gx^3)^{m+1}}{(m+1) \cdot 3g}$.

XIX.

REMARQUE. On auroit pu trouver l'intégrale des deux différentielles précédentes sans se servir de transformation, par la seule première règle; car dans le premier exemple $dx \cdot (a + bx)^p$ j'augmente l'exposant p d'une unité, je divise la différentielle par cet exposant $p + 1$ multiplié par la différence $b dx$ de la changeante sous le signe; j'ai le même résultat que plus haut. Il en est de même pour la différentielle qui nous a servi de second exemple. D'où l'on peut tirer une règle générale qui comprend toutes

toutes les différentielles qui sont dans le cas des deux précédentes, c'est-à-dire toutes celles dans lesquelles l'exposant de la changeante hors du signe est moindre d'une unité que celui de la changeante sous le signe. Si l'on avoit, par exemple, à intégrer $\frac{aazdz}{(aa-zz)^2} = aazdz \cdot (aa-zz)^{-2}$. Suivant la règle précédente j'augmente dans cette différentielle d'une unité l'exposant -2 , je divise par $-1 \times -2zzdz$, il me vient $\frac{aa}{2 \cdot (aa-zz)}$, pour l'intégrale cherchée. Il en est ainsi pour toutes les autres différentielles comprises dans la formule $x^{m-1} dx \cdot (a+bx^m)^p$, m & p étant quelconques.

Regle générale pour un assez grand nombre de cas.

Mais il n'est pas toujours aisé de voir les cas où la seule première règle suffit pour intégrer ces sortes de différentielles. D'ailleurs par le secours de la transformation on s'évite la peine de faire cet examen, qui souvent est pénible.

X X.

Réduisons la règle en formule, & rendons-la plus générale.

Formule pour la première transformation.

Toutes les fois qu'on a $(A) x^{rn} \times x^{n-1} dx \cdot \frac{1}{a+bx^n}^p$, p étant tout ce qu'on voudra, & r un nombre entier positif ou zéro, cette quantité est intégrable par notre transformation.

$$x^{rn} \times x^{n-1} dx \cdot (a+bx^n)^p$$

X X I.

Premier cas. Lorsque $r =$ un nombre entier positif. Soit suivant ce que nous venons de dire $a+bx^n = z$, on

Démonstration de cette formule.

K

Premier Cas. aura $x^n = \frac{z-a}{b}$, donc $x^{n-1} dx = \frac{dz}{nb}$. On a aussi $x^{rn} =$

$\frac{z-a}{b}$ ^{$r = \text{un nombre entier positif.}$} $\frac{z-a}{b^r}$, & $a + bx^{n^p} = z^p$. Donc en mettant toutes ces

valeurs dans (A) il viendra (B) $\frac{dz}{nb} \cdot z^p \cdot \left\{ \frac{z-a}{b} \right\}^r$.

Or dans cette formule $\frac{z-a}{b}$ élevée à la puissance r qui est supposé un nombre entier positif, donnera une suite finie de termes dont chacun sera multiplié par z^p , & par $\frac{dz}{nb}$, & sera par conséquent intégrable par la première règle.

Pour le faire mieux sentir, développons la série précédente : nous aurons

$$\frac{(z^r - rz^{r-1}a + \frac{r(r-1)}{2}z^{r-2}a^2 - \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3}z^{r-3}a^3 + \&c.) \frac{z^p dz}{nb}}{b^r}.$$

$$\text{Supposons } r=3, \text{ on a } \frac{z^{p+3} \frac{dz}{nb} - 3az^{p+2} \frac{dz}{nb} + \frac{3a^2 z^{p+1} \frac{dz}{nb} - a^3 z^p \frac{dz}{nb}}{b^3},$$

$$\frac{3a^2 z^{p+1} \frac{dz}{nb} - a^3 z^p \frac{dz}{nb}}{b^3}, \text{ différentielle dont l'intégrale}$$

se prend terme à terme (Art. VI.). Cette intégrale est

$$\frac{z^{p+4}}{(p+4)nb^4} - \frac{3az^{p+3}}{(p+3)nb^4} + \frac{3a^2 z^{p+2}}{(p+2)nb^4} - \frac{a^3 z^{p+1}}{(p+1)nb^4}.$$

Mettant ensuite pour z^{p+4} , z^{p+3} , &c. leurs valeurs en x , on aura l'intégrale cherchée.

XXII.

Application du premier Cas à un exemple. Soit proposé de trouver l'intégrale de cette différentielle $x^5 dx (a + bx^3)^p = x^{1 \times 3} \times x^2 dx \cdot (a + bx^3)^p$, je vois d'abord que cette différentielle se rapporte au premier

cas de notre formule (A), r étant ici $= 1$. Je suis donc sûr qu'elle est intégrable par notre transformation. En conséquence je fais $a + bx^3 = z$, ce qui donne $x^3 = \frac{z-a}{b}$, & $x^3 dx = \frac{dz}{3b}$; donc la transformée est $\frac{z^p dz}{3b} \times \left\{ \frac{z-a}{b} \right\}$ qui n'a plus aucune difficulté, se résolvant par la première règle. Son intégrale est $\frac{z^{p+2}}{(p+2)3b^2} - \frac{az^{p+1}}{(p+1)3b^2}$. Le reste de l'opération se fera comme dans les exemples précédens.

XXIII.

Si $r = 0$, on aura $x^{n-1} dx (a + bx^n)^p$ intégrable ^{2°. Cas ou $r = 0$.} par la même transformation. Car soit $a + bx^n = z$, on aura $x^{n-1} dx = \frac{dz}{nb}$, & la différentielle se changera en $\frac{z^p dz}{nb}$. Donc, &c.

XXIV.

COROLLAIRE 1. Si $n = 1$, & $r = q$, il vient $x^q dx (a + bx)^p$ intégrable, quelque valeur qu'on donne à p , ^{Examen de quelques Cas particuliers.} q étant un nombre entier positif.

XXV.

COROLL. 2. La différentielle $dx \times (ax^q + bx^s)^p$ se change en $dx \times \left\{ x^q \times (a + bx^{s-q}) \right\}^p = x^{qp} dx (a + bx^{s-q})^p$, ce qui se ramène à notre formule, toutes les fois qu'on peut supposer $s - q = n$ & $qp = rn + n - 1$.

Si l'expression différentielle étoit $x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$, & que $\frac{m}{n}$ fût un nombre entier positif, cette expression

seroit la même que $x^{r^n+n-1} dx \cdot (a+bx^n)^p$, qu'on voit être la même chose que la formule *A*. En effet, puisque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier, m doit être un multiple de n , qu'on peut supposer représenté par $r+1 \cdot n$. Donc, &c.

XXVI.

REMARQUE 1. Quelquefois dans les transformées il se trouve des termes de la forme de $\frac{dx}{x}$; alors c'est le cas de l'Art. III.

XXVII.

Autre manière de se servir de la transformation précédente.

SCHOLIE. On peut encore se servir de la première transformation d'une manière différente de celle dont nous l'avons employée.

Premier exemple.

Qu'on ait, par exemple, à intégrer $xx dx \sqrt{a+x}$, au lieu de faire $a+x=z$, je supposerai $\sqrt{a+x}=z$, ce qui donne $a+x=zz$; $dx=2zdz$; $xx=zz-a^2$: faisant les substitutions, on a $2z^2 dz \cdot (zz-a)^2$, c'est-à-dire $2z^6 dz - 4az^4 dz + 2aaz^2 dz$, différentielle qui se rapporte au Coroll. 1. de la règle fondamentale. Intégrant & remettant ensuite dans l'intégrale trouvée les valeurs de z en x , on aura pour l'intégrale cherchée, $\frac{2}{7} \cdot \overline{a+x}^{\frac{7}{2}} - \frac{4a}{5} \cdot \overline{a+x}^{\frac{5}{2}} + \frac{2aa}{3} \cdot \overline{a+x}^{\frac{3}{2}}$, ce qu'il est facile de vérifier. Car prenant la différentielle de cette intégrale, on a $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} (a+x)^{\frac{5}{2}} dx - \frac{4a}{5} \cdot \frac{5}{2} (a+x)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{2aa}{3} \cdot \frac{3}{2} (a+x)^{\frac{1}{2}} dx = (\overline{aa+2ax+xx} \sqrt{a+x} - 2aa - 2ax \times \sqrt{a+x} + aa\sqrt{a+x}) dx =$

(en effaçant ce qui se détruit) $xx dx \sqrt{a+x}$.

On trouveroit de la même manière l'intégrale de $\frac{xx dx}{\sqrt{a+x}}$.

XXVIII.

Soit proposé d'intégrer $\frac{2 adx - 4 xdx}{\sqrt{ax - xx + bb}}$ Second exemple.
 $= 2 \cdot adx - 2 xdx \sqrt{ax - xx + bb}$, je fais $\sqrt{ax - xx + bb} = z$, & $ax - xx + bb = zz$, & $adx - 2 xdx = 2 z dz$:
 faisant les substitutions, nous aurons pour transformée $4 z z dz$ dont l'intégrale est $\frac{4}{3} z^3$, & remettant la valeur de z en x , l'intégrale de la proposée est $\frac{4}{3} (ax - xx + bb)^{\frac{3}{2}}$.
 On l'auroit trouvée de même par l'Art. VIII.

Par la même méthode on trouvera que l'intégrale de $\frac{2 adx - 4 xdx}{\sqrt{ax - xx + bb}}$ est $4 (ax - xx + bb)^{\frac{1}{2}}$.

XXIX.

Si la proposée étoit $2 xdx \cdot (xx + aa)^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire $2 xdx (xx + aa)^{\frac{2}{3}}$, Troisième exemple.
 on fera $xx + aa = z^{\frac{3}{2}}$, & $2 xdx = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$, & substituant il vient pour transformée $\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$,
 dont l'intégrale est $\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$. Donc $\int 2 xdx (xx + aa)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{xx + aa} \sqrt{xx + aa}$: ce qu'on trouveroit encore
 par l'Article VIII.

XXX.

Si j'ai $\frac{2 xdx}{\sqrt{(xx + aa)^3}} = 2 xdx \times \sqrt{xx + aa}^{-\frac{2}{3}}$, je fais Quatrième exemple.
 $\sqrt{xx + aa}^{-\frac{2}{3}} = z$, donc $xx + aa = z^{-\frac{3}{2}}$, & $2 xdx = -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$. Donc en substituant on a $-\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$,

dont l'intégrale est (Regle premiere) $3z^{-\frac{1}{2}}$; donc l'intégrale de la proposée est $3\sqrt[3]{xx+aa}$.

XXXI.

REMARQUE 2. Il y a bien des différentielles affectées de radicaux qui n'ont pas les conditions que nous avons énoncées, (Art. VIII.) qu'on peut cependant débarrasser des signes radicaux dans certains cas. Mais pour cela il faut se servir de transformations différentes de celle que nous avons employée jusqu'ici. Par leur secours on ne trouvera pas toujours l'intégrale exprimée algébriquement; mais au moins serviront-elles à délivrer la différentielle de son radical, & à la rendre plus susceptible des autres méthodes que nous enseignerons dans la suite.

XXXII.

Seconde
transforma-
tion appli-
quée à un e-
xemple.

Soit proposé d'intégrer $4x dx \sqrt{2ax - xx}$ différentielle qu'on voit bien n'être pas dans le cas de celles que nous avons traitées plus haut. Je fais $\sqrt{2ax - xx} = xz$, ou $\frac{xz}{a}$ (a est une constante que j'ajoute pour conserver l'homogénéité.). Donc $2ax - xx = \frac{xxz}{a}$, & $2a - x = \frac{xz}{a}$, donc $x = \frac{2a^2}{a^2 + zz}$, & $dx = \frac{-4a^2 z dz}{(a^2 + zz)^2}$ & $\sqrt{2ax - xx} = \frac{2a^2 z}{a^2 + zz}$: faisant les substitutions, nous avons pour transformée $-\frac{64a^3 zz dz}{(a^2 + zz)^4}$ différentielle exempte de radicaux, & que nous enseignerons dans la suite à intégrer.

XXXIII.

On peut encore intégrer la proposée de cette autre manière; la différentielle donnée étant $2 \cdot 2x dx \sqrt{2ax - xx}$, je vois que si j'avois de plus $- 4a dx \sqrt{2ax - xx}$, la quantité hors du signe seroit le produit du coefficient $- 2$ par la différentielle de la quantité sous le signe, ce qui rentreroit dans notre premier cas (Art. VIII.). J'écris donc ainsi cette quantité $- 2 \cdot (2a dx - 2x dx) \cdot (2ax - xx)^{\frac{1}{2}} + 4a dx \sqrt{2ax - xx}$, qu'on voit bien être la même que la proposée. Or dans cette différentielle la première partie $- 2 \times (2a dx - 2x dx) \cdot (2ax - xx)^{\frac{1}{2}}$ a pour intégrale (Art. VIII.) $-\frac{2}{3} \cdot (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$, & la seconde $4a dx \sqrt{2ax - xx}$ dépend de la quadrature du cercle, comme nous l'expliquerons plus bas.

Autre manière d'intégrer la différentielle qui vient de servir d'exemple.

Il faut bien remarquer la manière dont nous avons préparé cette quantité, avant de l'intégrer, pour l'appliquer aux cas semblables à celui-ci.

XXXIV.

En supposant toujours qu'on ait à intégrer $4x dx \sqrt{2ax - xx}$, je pourrois encore faire $a - x = u$, d'où je tirerois * $\sqrt{2ax - xx} = \sqrt{aa - uu}$, $dx = - du$; $4x = 4a - 4u$. Substituant donc on a $- 4adu + 4u du$

Troisième transformation appliquée au même exemple.

* Car puisque $a - x = u$, $aa - 2ax + xx = uu$; donc $- 2ax + xx = uu - aa$, donc en changeant les signes $2ax - xx = aa - uu$; donc enfin $\sqrt{2ax - xx} = \sqrt{aa - uu}$. Il faut faire attention à cette équation : c'est une espèce de formule dont les Géomètres se servent souvent en pareil cas que celui-ci.

$\sqrt{aa - uu} = -2 \times (2adu - 2u du) \sqrt{aa - uu}$,
dont la premiere partie $-2 \times 2adu \sqrt{aa - uu}$ dépend
de la quadrature du cercle, & la seconde $-2 \times -2u du$
 $\sqrt{aa - uu}$ a pour intégrale exacte $-\frac{4}{3} \cdot (aa - uu)^{\frac{3}{2}}$
(Art. VIII.).

XXXV.

Second e-
xemple de la
2e. transfor-
mation.

Si la proposée est $\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}}$ en faisant $\sqrt{ax+xx} =$
 $\frac{xz}{b}$, on aura $ax+xx = \frac{xxzz}{bb}$, ou $a+x = \frac{xzz}{bb}$, donc
 $x = \frac{abb}{zz-bb}$; $\frac{xz}{b}$ ou $\sqrt{ax+xx} = \frac{abz}{zz-bb}$; $dx =$
 $-\frac{2abbdz}{(zz-bb)^2}$; donc $\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}} = -\frac{2adz}{b}$: donc enfin
 $\int \frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}} = -\frac{2az}{b} = \frac{-2a\sqrt{ax+xx}}{x}$.

XXXVI.

Quatrieme
transforma-
tion.

Premier
exemple.

Si l'on avoit $\frac{ydy}{\sqrt{yy+gy-gg}}$, on feroit $\sqrt{yy+gy-gg} =$
 $y+z$, ce qui donne $yy+gy-gg = yy+2yz+zz$
& $y = \frac{zz+gg}{g-2z}$; & $dy = \frac{2gzdz - 2zzdz + 2gddz}{(g-2z)^2}$; &
 $\sqrt{yy+gy-gg} = \frac{gg+gz-zz}{g-2z}$: faisant les substitu-
tions on aura la transformée $\frac{2zzdz + 2gddz}{(g-2z)^2}$, dont la
premiere partie $\frac{2zzdz}{(g-2z)^2}$ se trouve, par les regles que
nous donnerons dans le Chap. X. être dépendante des
logarithmes, & la seconde $\frac{2gddz}{(g-2z)^2}$ est intégrable abso-
lument, son intégrale étant (Art. XXIII.) $\frac{2gz}{g-2z}$, ou bien
(Art. XIX.) $\frac{gg}{g-2z}$: c'est-à-dire que son intégrale est en
général, comme on le verra plus bas (Article LV.)
 $gg +$

$\frac{gg + ng - g - 2nz + 2z}{g - 2z}$ (n exprimant un nombre quelconque).

Si on y suppose $n = 1 - g$, on trouvera la première des deux intégrales, & on aura la seconde en supposant $n = 1$.

XXXVII.

Soit encore à intégrer $x^4 dx (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$: Je fais $\sqrt{aa + xx} = x + t$; j'en tire $aa + xx = xx + 2tx + tt$, donc $aa = 2tx + tt$ & $x = \frac{aa - tt}{2t}$; $dx = -\frac{dt}{2} - \frac{aadt}{2tt}$; $x^4 = \left\{ \frac{aa - tt}{2t} \right\}^4$. On aura aussi $x + t = \frac{aa + tt}{2t}$: donc $x^4 dx \sqrt{aa + xx} = \left\{ \frac{aa - tt}{2t} \right\}^4 \times \left\{ \frac{aa + tt}{2t} \right\} \times \left\{ -\frac{dt}{2} - \frac{aadt}{2tt} \right\} = -\frac{a^{12} dt}{64t^7} + \frac{a^{10} dt}{32t^5} + \frac{a^8 dt}{64t^3} - \frac{a^6 dt}{16t} + \frac{a^4 dt}{64} + \frac{a^2 dt}{32} - \frac{t^3 dt}{64}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{64} \times \frac{a^{12}}{6t^6} + \frac{1}{32} \times -\frac{a^{10}}{4t^4} + \frac{1}{64} \times -\frac{a^8}{2t^2} - \frac{a^6}{16} \ln t + \frac{a^4 tt}{128} + \frac{a^2 t^3}{128} - \frac{t^6}{384}$. Remettant dans cette intégrale pour t , t^2 , &c. leurs valeurs, on aura l'intégrale cherchée.

Second exemple.

XXXVIII.

Si l'on avoit $\frac{dx}{\sqrt{aa + xx}}$, on feroit $x + \sqrt{aa + xx} = z$, ce qui donne $z - x = \sqrt{aa + xx}$; & $zz - 2zx + xx = aa + xx$; & $zz - 2zx = aa$, d'où l'on tire $x = \frac{zz - aa}{2z}$; $dx = (zz + aa) \frac{dz}{2zz}$; $\sqrt{aa + xx} = \frac{zz + aa}{2z}$. On aura donc après les substitutions la transformée $\frac{dz}{2zz} \cdot (zz + aa) = \frac{dz}{z}$: dont l'intégrale est (Art. IV.)

Cinquième transformation.
Premier exemple.

log. z . Remettant pour z sa valeur, on aura log. $(x + \sqrt{aa + xx})$ pour l'intégrale cherchée.

XXXIX.

Second exemple un peu différent du premier. Si la proposée étoit $\frac{dx}{\sqrt{xx - aa}}$ on feroit encore $z = x + \sqrt{xx - aa}$, & en faisant les mêmes opérations que dans l'article précédent, on trouveroit $\int \frac{dx}{\sqrt{xx - aa}} = \log. x + \sqrt{xx - aa}$: c'est ce que nous avons déjà trouvé dans l'Introduction, (Article xxxvii.).

X L.

Cas plus compliqués que les précédens, dans lesquels notre première transformation réussit. SCHOLIE. Si la différentielle étoit composée de deux quantités radicales, on pourroit dans certains cas se servir de notre première transformation, pourvu que la quantité sous le signe n'eût point de second terme, & que la différentielle fût multipliée par une puissance impaire de l'inconnue.

Soit, par exemple, $\frac{z^3 dz \sqrt{bb + zz}}{\sqrt{gg + zz}}$: je fais $\sqrt{bb + zz} = u$; on a donc $zz = uu - bb$; $z dz = u du$. La transformée sera donc $\frac{u^2 du (u^2 - b^2)}{\sqrt{uu - bb + gg}} = \frac{u^4 du}{\sqrt{uu - bb + gg}} - \frac{b^2 u^2 du}{\sqrt{uu - bb + gg}}$, différentielle réduite aux cas précédens.

X L I.

En examinant cette façon d'opérer on voit qu'elle ne réussit le plus souvent que dans les cas où les racines sont des racines quarrées, & où l'inconnue n'excede pas le second

degré. Je dis le plus souvent, parce qu'il y en a quelques-uns où elle réussit quels que soient le signe & la puissance de l'inconnue sous le signe. Telles sont toutes les différentielles comprises sous les deux formules suivantes.

Deux formules qui comprennent ces cas.

1°. $\frac{dx \cdot (x^m + b^m)^{\pm \frac{1}{n}}}{x^{tm+1}}$, m, n, t étant des nombres entiers positifs, ou zéro. Car faisant $x^m + b^{\frac{m}{n}} = z$, on

Première formule.

aura $x^m = z^n - b^m$; $dx = \frac{nz^{n-1} dz}{m x^{m-1}}$. La transformée

fera donc $\frac{nz^{n-1} dz \cdot z^{\pm 1}}{m x^{t+1+m}}$; mais $x^{t+1+m} = z^n - b^m$; donc quand t sera un nombre entier, $t+1$ en sera aussi un; donc on n'aura plus de radical.

2°. La seconde formule est $x^n dx \cdot (x^m + b^m)^{\pm \frac{1}{p}}$, laquelle en supposant $\frac{n+1}{m}$ un nombre entier, se pourra délivrer de tous signes radicaux, ou au moins de quantités

Seconde formule.

radicales complexes, ce qui suffit. Faisant $x^m + b^{\frac{m}{p}} = z$

on a $x^m = z^{\frac{p}{m}} - b^m$, $x = z^{\frac{p}{m}} - b^{\frac{m}{m}}$; $dx =$

$\frac{p}{m} z^{\frac{p}{m}-1} dz \cdot z^{\frac{p}{m}} - b^m$; $x^n = z^{\frac{p}{m}} - b^{\frac{m}{m}}$. Substituant

on aura $\frac{p}{m} z^{\frac{p}{m}-1} dz \cdot z^{\pm 1} \cdot \{z^{\frac{p}{m}} - b^m\}^{\frac{1}{m} + \frac{n}{m} - 1}$. Lorsque

que $\frac{n+1}{m}$ sera un nombre entier, $\frac{1+n}{m}$ sera aussi entier, & par conséquent la formule n'aura point de quantité complexe embarrassée de radicaux.

XLII.

Sixieme
transforma-
tion.

Appliquée à
un exemple.

C'est ici le lieu de parler d'une transformation du plus grand usage dans de certains cas. Cette transformation consiste à faire $z^n = x$, n étant un nombre quelconque, dans les différentielles telles que $\frac{dz}{z\sqrt{a+bz^n}}$; la supposition de $z^n = x$ nous donne $z = x^{\frac{1}{n}}$; $dz = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx$; donc on a pour transformée $\frac{x^{\frac{1}{n}-1}dx}{nx^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+bx}}$ = $\frac{dx}{nx\sqrt{a+bx}}$, différentielle dont on fait évanouir le radical en faisant $\sqrt{a+bx} = u$, & qu'on intégrera par les méthodes que nous donnerons dans le Chapitre X.

XLIII.

Septieme
transforma-
tion.

Il y a encore une transformation qui consiste à égaler la changeante à une fraction. Cette transformation sert souvent à préparer à celles que nous venons d'exposer.

Exemple.

S'il s'agit d'intégrer la différentielle suivante $\frac{dx}{xx\sqrt{aa+xx}}$, je ferai d'abord $x = \frac{1}{u}$; donc $dx = -\frac{du}{uu}$; $xx = \frac{1}{uu}$; donc la différentielle entiere $\frac{dx}{xx\sqrt{aa+xx}} = \frac{-\frac{du}{uu}}{\frac{1}{uu}\sqrt{aa+\frac{1}{uu}}} = \frac{-du}{\sqrt{aa+\frac{1}{uu}}} = \frac{-u du}{\sqrt{a^2 u^2 + 1}}$. Je fais à présent selon notre premiere transformation $z = aa uu + 1$: donc $2 aa u du =$

dz & $-u du = -\frac{dz}{2aa}$. On a aussi $\sqrt{aa uu + 1} = \sqrt{z}$.
Mettant donc à la place de $-u du$, & de $\sqrt{aa uu + 1}$
leurs valeurs en dz & en z , on a $\frac{-dz}{2aa\sqrt{z}}$ dont l'inté-
grale est (regle premiere) $-\frac{\sqrt{z}}{aa}$. Substituant à $\sqrt{z}$ son
égale $\sqrt{aa uu + 1}$, il vient $-\frac{\sqrt{aa uu + 1}}{aa}$. Remettons
enfin pour uu sa valeur $\frac{1}{xx}$, nous avons $-\frac{\sqrt{aa + xx}}{aax}$
pour l'intégrale cherchée de $\frac{dx}{xx\sqrt{aa + xx}}$.

X L I V.

COROLL. Lorsque notre derniere transformation sert à
préparer à celles que nous avons enseignées précédem-
ment, il faut ordinairement faire cette opération la pre-
miere; autrement on tomberoit dans des longueurs de
calcul. Cependant ce principe n'est pas général; quelque-
fois on fait ces transformations indifféremment l'une avant
l'autre. Si on avoit à intégrer, par exemple, dx
 $\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}} - 1}$, on feroit d'abord $1-x^{-\frac{2}{3}} = z$,
ce qui donne $1-x = z^{-\frac{3}{2}}$, $dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{5}{2}} dz$. Donc
en substituant on a $\frac{1}{2} z^{-\frac{5}{2}} dz \sqrt{z-1} = \frac{\frac{1}{2} dz \sqrt{z-1}}{z^{\frac{5}{2}}} =$

Observation
utile sur cette
derniere
transforma-
tion.

$\frac{3}{2} \frac{dz}{zz} \sqrt{\frac{z-1}{z}} = \frac{3dz}{2zz} \sqrt{1-\frac{1}{z}}$. Soit à présent $z = \frac{1}{t}$, on
aura $\frac{1}{z} = t$; donc $\frac{dz}{zz} = -dt$; $\frac{3dz}{2zz} = -\frac{3}{2} dt$. Donc
 $\frac{3dz}{2zz} \sqrt{(1-\frac{1}{z})} = -\frac{3}{2} dt \sqrt{1-t} = -\frac{3}{2} dt \cdot (1-t)^{\frac{1}{2}}$
dont l'intégrale est (Art. XIX.) $\frac{-\frac{3}{2} dt (1-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} x - dt} = (1-t)^{\frac{3}{2}}$.

Remettant pour t sa valeur $\frac{1}{z}$, on a $(1 - \frac{1}{z})^{\frac{1}{2}}$; & pour $\frac{1}{z}$ sa valeur $\frac{1}{1-x}^{\frac{1}{3}}$, on a enfin pour l'intégrale cherchée $(1 - (1-x)^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = \int dx \sqrt{(1-x)^{-\frac{1}{3}} - 1}$.

XLV.

Reflexions
générales sur
les transfor-
mations que
nous venons
d'expliquer.

Voilà à peu près toutes les transformations usitées dans le Calcul intégral. On comprend sans peine l'avantage infini dont elles sont pour faciliter les opérations de ce calcul. La première, la sixième & la septième sont surtout extrêmement commodes. Les commençans ne peuvent se les rendre trop familières, en en faisant eux-mêmes de fréquentes applications. C'est à l'usage seul qu'il appartient de faire discerner celles de ces transformations qu'il faut employer préférentiellement aux autres, suivant les différentielles dont on cherche l'intégration.

CHAPITRE III.

De l'addition des constantes pour rendre les intégrales complètes.

XLVI.

Nécessité
d'ajouter une
constante à
l'intégrale
cherchée.

IL est nécessaire, avant d'aller plus loin, de remarquer ici que les constantes n'ayant point de différence, une intégrale, jointe par le signe $+$ ou $-$ avec une constante, donne la même différentielle que donneroit cette intégrale si elle étoit sans constante. On n'est donc pas sûr, lorsqu'on

retrouve l'intégrale d'une différentielle, d'avoir cette intégrale exacte; il faut souvent lui ajouter, ou en retrancher une constante; nous allons donner la méthode pour la faire trouver.

XLVII.

Mais afin que les commençans ne soient point embarrassés dans l'application de cette méthode, ils doivent avoir présent à l'esprit qu'on représente l'intégrale d'une différentielle qui n'a qu'une changeante, par la surface d'une courbe dont x est l'abscisse, & dont l'ordonnée sera la quantité qui multiplie dx .

Toute intégrale se représente par la surface d'une courbe.

Qu'on ait, par exemple, cette différentielle $dx \sqrt{x+a}$: je prends une courbe CBD * dont l'abscisse $PA = x$, $AC = a$, & l'ordonnée $PD = \sqrt{x+a}$: l'espace élémentaire $PDpd$ est $dx \sqrt{x+a}$, l'espace entier $APDB$ est donc $\int dx \sqrt{x+a}$; or $\frac{2}{3} \sqrt{x+a}^{\frac{3}{2}}$ (Art. XIX.) est l'intégrale de $dx \cdot (x+a)^{\frac{1}{2}}$, parce que cette différentielle est celle de $\frac{2}{3} \cdot (x+a)^{\frac{3}{2}}$. Il semble donc d'abord que $\frac{2}{3} (x+a)^{\frac{3}{2}}$ soit la valeur de l'aire $APDB$: mais il faut observer que $\frac{2}{3} (x+a)^{\frac{3}{2}} \pm A$, A étant une constante quelconque, a aussi pour différentielle $dx (x+a)^{\frac{1}{2}}$. Ainsi l'intégrale réelle de $dx \cdot (x+a)^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{2}{3} (x+a)^{\frac{3}{2}} \pm A$,

Fig. 1.

* Pour avoir l'équation de cette courbe, il faut effacer dx de la différentielle proposée, & supposer une changeante y égale à la quantité qui reste après avoir effacé dx . Ici on a $y = \sqrt{x+a}$: ou en rendant cette équation commensurable $yy = x+a$ équation à la parabole où l'origine des coordonnées n'est point au sommet. Voyez Guinée, *Application de l'Algèbre à la Géométrie*.

A étant une constante qui peut quelquefois être nulle, quelquefois être réelle, mais qu'il faut savoir déterminer dans chaque cas. Cela posé, je passe à la règle.

XLVIII.

Méthode qui apprend à reconnoître quand l'intégrale est complète ; & quand elle ne l'est pas, à trouver la constante qui la rendra complète.

Faites la changeante x de l'intégrale égale à zéro, & si l'intégrale devient zéro, c'est ordinairement une marque qu'elle est exacte ; si au contraire après cette supposition de $x=0$, il reste une constante dans l'intégrale, il faut la joindre à l'intégrale trouvée avec un signe contraire à celui qu'elle a ; alors cette intégrale sera complète.

XLIX.

1. Exemple. Soit 1°. $y = \sqrt{px}$, on a $y dx = dx \sqrt{px}$, dont l'intégrale est (Art. II.) $\int y dx = \frac{2}{3} \sqrt{p} \cdot x^{\frac{3}{2}}$. La supposition de $x=0$ donne le tout $=0$, donc l'intégrale est complète.

L.

2. Exemple. Soit 2°. $dx \sqrt{x+a}$ dont l'intégrale est $\frac{2}{3} (x+a)^{\frac{3}{2}}$; faisant $x=0$ il vient $\frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}}$, donc l'intégrale n'est pas complète, & la constante qu'il faut y ajouter est $-\frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}}$.

LI.

Démonstration générale de cette méthode.

Pour démontrer cette méthode, & lui donner la plus grande généralité dont elle est susceptible, je suppose que l'on connoisse la valeur complète de l'intégrale, lorsque x a une certaine valeur que je désigne par a , & que cette

cette valeur complete de l'intégrale soit Q , alors voici comme je raisonne.

Soit X la valeur générale de l'intégrale trouvée par le calcul, & à laquelle il manque une constante C que je ne connois pas encore: $X+C$ fera l'intégrale complete que je cherche.

Je suppose à présent qu'en substituant a pour x dans X , X devienne A , j'aurai $A+C$ pour la valeur complete de l'intégrale, lorsque $x=a$; d'ailleurs par la première supposition cette valeur complete $=Q$: donc $A+C=Q$, donne $C=Q-A$.

Mais le plus souvent cette valeur complete Q de l'intégrale n'est pas donnée & ne peut l'être, & la seule supposition qu'on puisse faire c'est de chercher l'endroit où la valeur Q de l'intégrale $=0$; en ce cas $Q=0$, donc $A+C=0$, donc $C=-A$.

De plus, au lieu de prendre $x=a$, on le suppose ordinairement $=0$, & cette supposition est plus simple, parce que l'aire d'une courbe commence avec les abscisses, & que par conséquent $Q=0$, lorsque $x=0$: voilà sur quoi est fondée la règle.

Après cette démonstration, appliquons-la au second exemple que nous avons donné plus haut.

L I I.

Soit $dx\sqrt{x+a}$, dont l'intégrale est $\frac{2}{3} \cdot (x+a)^{\frac{3}{2}}$ Appliquée à la différentielle qui nous a servi de second exemple.
 $=X$. Supposant $x=0$, il vient $\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = A$; donc $\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$
M

$+C=Q$. Je prends selon ce qui est dit dans la démonstration $Q=0$, donc $\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} + C = 0$, donc $C = -\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$, ce qui prouve qu'il faut ajouter la constante avec un signe contraire à celui qu'elle a dans l'intégrale.

Cependant il y a des cas dans lesquels il ne faut pas prendre $x=0$, comme on le va voir.

LIII.

Exception
à la Règle.

Fig. 2.

SCHOLIE 1. Soit la différentielle $dx \sqrt{px-pa}$ dont je cherche l'intégrale. Je représente cette intégrale par l'espace parabolique BPC , prenant l'origine des x au point A , alors l'ordonnée est imaginaire. Notre règle nous donne aussi l'espace BPC imaginaire, ce qui en fait voir la généralité.

Car $\int dx \sqrt{px-pa} = (\text{Règle 1.}) \sqrt{p} \cdot \frac{2}{3} (x-a)^{\frac{3}{2}}$; faisant $x=0$, il nous reste $\sqrt{p} \cdot \frac{2}{3} \cdot -a^{\frac{3}{2}}$. la constante est donc imaginaire. En effet, toutes les ordonnées depuis A jusqu'en B étant imaginaires, l'aire comprise entre ces deux points l'est aussi.

Mais, dira-t-on, il paroît d'abord que l'espace BPC est réel? oui, sans doute, mais un espace imaginaire ajouté à un réel, rend le tout imaginaire, ce qui arrive ici.

Mais si de toute l'aire de la courbe on ne vouloit prendre que la partie BPC , alors il faut considérer l'ordonnée au point où elle est zéro, faire x égale à la valeur de l'abscisse en ce point, & non égale à zéro; alors l'intégrale deviendra égale à zéro, ce qui rendra

la constante nulle. Par exemple ici ne prenant l'aire de la courbe que depuis le point B , & supposant $BP = a$, il faut faire $x = a$; cette valeur de x substituée en sa place dans l'intégrale $\sqrt{p \cdot \frac{2}{3} \cdot (x - a)^{\frac{3}{2}}}$ donne $\sqrt{p \cdot \frac{2}{3} \cdot (a - a)^{\frac{3}{2}}} = 0$. Donc $Q = 0$, donc $C = 0$.

L I V.

SCHOLIE 2. Il peut arriver que l'on trouve une intégrale négative. Soit, par exemple, l'hyperbole ECG , si l'origine des x est en A , que l'équation de la courbe par rapport à l'asymptote ABF soit (en nommant AB, x , $BC(y)$) $1 = xxy$, l'élément de l'aire sera $1 \cdot x \cdot x^{-2} dx$ dont l'intégrale est la quantité négative $-1x^{-1} = -\frac{1}{x}$, ou $-\frac{1}{x} + A$. Or lorsque $x = 0$, cette aire doit être $= 0$, donc $A = +\frac{1}{0}$. Donc $DABCE = \frac{1}{0} - \frac{1}{x}$, ce qui marque que l'aire $DABCE$ est infinie.

Cas où l'intégrale est négative.

Fig. 3.

Lorsque $x = \infty$, l'aire $DABCE$ devient $DAFG$, & $\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$; donc $DAFG = \frac{1}{0}$; donc $GFBC$ ou $DAFG - DABCE = \frac{1}{x}$: ce qui marque que l'intégrale $-\frac{1}{x}$ sans constante n'est pas l'aire $DABCE$, mais l'aire $CBFG$ qui commence à l'ordonnée $BC(y)$, & va vers BF qui est le côté opposé à l'origine A ; & le signe $-$ indique la position négative de cette aire $GFBC$ par rapport à l'ordonnée BC & à l'aire $DABC$. Voyez Mém. Acad. 1705. l'Ecrit de M. Varignon sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis. Voyez aussi dans l'Encyclopédie, l'art. Asymptote.

M ij

L V.

OBSERVATION IMPORTANTE. L'addition de la constante fait quelquefois que la différentielle paroît avoir deux intégrales différentes : mais si on examine attentivement ces intégrales , on verra qu'elles ne diffèrent jamais que par un terme constant qui se trouve quelquefois enveloppé dans l'une des deux. Ainsi l'on trouve que $\frac{f}{f-bx}$ & $\frac{bx}{f-bx}$ sont également les intégrales de $\frac{bf dx}{(f-bx)^2}$, puisqu'en différenciant ces deux intégrales , on retrouve cette même différentielle. Mais il est aisé de voir que $\frac{bx}{f-bx} = \frac{f}{f-bx} - 1$; d'où l'on voit que ces deux intégrales ne diffèrent que par la constante -1 . Et en général l'intégrale de $\frac{bf dx}{(f-bx)^2}$ fera $\frac{f}{f-bx} + A$ (A représentant une constante quelconque) , ou $\frac{f+Af-Abx}{f-bx}$: & si on fait $1+A=n$ (n étant un nombre quelconque) , l'intégrale fera $\frac{fn-bnx+bx}{f-bx}$. Si $n=0$, on aura $\frac{bx}{f-bx}$ qui est la seconde des deux intégrales trouvées : si $n=1$, c'est-à-dire , si $A=0$, on aura la première ; & donnant successivement à n différentes valeurs , on en trouvera une infinité d'autres qui toutes ne différeront que par des constantes.

L V I.

Il faut bien avoir présent ce que nous venons de dire sur l'addition des constantes : nous n'en parlerons plus dans la suite de ce Traité ; le lecteur est en état d'appliquer la règle générale aux différentes intégrales que nous trouve-

rons. Il faut l'appliquer aussi aux intégrales trouvées dans les deux Chapitres précédens.

C H A P I T R E I V.

Définitions & notions préparatoires à l'intégration des différentielles binomes, trinomes, &c.

L V I I.

ON suppose que dans une grandeur complexe, les exposans des puissances de la changeante x qui distinguent les termes, forment une progression arithmétique; on l'appelle un binome quand il n'y a que deux termes; un trinome quand il y en a trois, & ainsi de suite. Ainsi $ax^0 + bx^n$ est un binome, $ax^0 + bx^n + cx^{2n}$ un trinome, $a + bx^n + cx^{3n}$ un quatinome : on sous-entend le troisième terme $0x^{2n}$ qui est $= 0$, comme s'il y avoit $a + bx^n + 0x^{2n} + cx^{3n}$.

Définition
des Binomes,
&c.

On rapportera toutes les expressions des différentielles complexes, autres que celles dont nous avons parlé (Chap. I.), aux formules générales qui suivent.

Formule des Binomes.

$$gx^m dx \cdot (a + bx^n)^p$$

Des Trinomes.

$$gx^m dx \cdot (a + bx^n + cx^{2n})^p$$

Et ainsi de suite pour les quatinomes, &c.

$g, a, b, c, \&c.$ représentent les coefficients ; x la changeante ; p l'exposant de la puissance de la grandeur sous le signe : cet exposant sera un nombre entier négatif, ou une fraction. Car nous avons vu (Art. XI.) que quand c'est un entier positif, la différentielle s'integre tout de suite par la premiere regle.

LVIII.

Il peut aussi y avoir dans une même différentielle plusieurs grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, comme $gx^m dx \cdot (a+bx^n)^p \times (c+ex^n+\&c.)^q$: ces différentielles même peuvent être, si l'on veut, réduites aux cas précédens.

$$\begin{aligned} \text{Car soit } p = \frac{r}{s} \& q = \frac{t}{k}, \text{ on aura } gx^m dx \cdot (a+bx^n)^p \\ \times (c+ex^n)^q &= gx^m dx \cdot (a+bx^n)^{\frac{r}{s}} \times (c+ex^n)^{\frac{t}{k}} \\ &= gx^m dx \cdot (a+bx^n)^{\frac{rk}{sk}} \times (c+ex^n)^{\frac{ts}{sk}} = gx^m dx \cdot \\ &\left(\frac{a+bx^n}{c+ex^n} \right)^{\frac{rk}{sk}} \cdot \frac{1}{sk}. \text{ Donc, } \&c. \end{aligned}$$

LIX.

Elles peuvent avoir deux formes identiques.

Méthode pour ôter de dessous le signe une grandeur qui y est, & vice-versâ.

REMARQUE I. Les formules précédentes peuvent avoir deux formes sans changer de valeur : la premiere quand les exposans n , de la grandeur sous le signe sont positifs ; la seconde quand ils sont négatifs. Au reste on peut facilement les rendre de positifs négatifs, par une méthode qui sert à mettre sous le signe une grandeur qui est

hors du signe, & à ôter de dessous le signe une grandeur qui y est.

Soit $x^m \times \overline{ax^n}^p$. Il est évident qu'on peut multiplier cette quantité par x^q en la divisant en même temps par x^q , sans changer sa valeur; pour cela j'écris x^{m+q} , & en même temps je divise la seconde partie $\overline{ax^n}^p$ par x^q : 1°. Lorsqu'il s'agit de mettre sous le signe une grandeur qui n'y est pas. mais comme cette seconde partie est sous un signe dont l'exposant est p , il la faut diviser par $x^{\frac{q}{p}}$, & l'écrire ainsi $\overline{ax^{n-\frac{q}{p}}}^p$; & la nouvelle grandeur sera $x^{m+q} (\overline{ax^{n-\frac{q}{p}}}^p)$, identique avec la proposée $x^m \times \overline{ax^n}^p$. La raison de la seconde opération, est que la grandeur qui divise la seconde partie doit être égale à celle qui a multiplié la première; or $x^{\frac{q}{p}} = x^q$.

L X.

Si on vouloit diviser la seconde partie par x^n , c'est-à-dire, ôter x^n de dessous le signe, il faudroit multiplier en même temps la première partie par x^{np} ; ce qui changeroit la proposée en la suivante $x^{m+np} \cdot (\overline{ax^{n-n}})^p = x^{m+np} \times a^p$. La raison en est la même que la précédente. 2°. D'ôter de dessous le signe une quantité qui s'y trouve.

L X I.

Quand l'exposant p est une fraction, comme dans $x^4 \times \overline{ax^{\frac{1}{2}}}$, si on vouloit multiplier la première partie par x^3 , on trouveroit en suivant la règle précédente x^{4+3} . Cas où l'exposant de la puissance est fractionnaire.

$\{ax^{8-\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} = x^7 \times \overline{ax^{\frac{1}{2}}}$. Alors $\frac{q}{p}$ indique une multiplication au lieu d'une division. Car $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \times 2$.

LXII.

Cas où il est négatif. Lorsque l'exposant p est négatif, c'est-à-dire, lorsqu'il est $-p$, on trouvera que $-\frac{q}{p}$ devient $-\frac{q}{p}$ ou $+\frac{q}{p}$.

LXIII.

Usages de la méthode précédente. Par le moyen de cette méthode on peut rendre les exposans de nos formules de positifs, négatifs.

1°. Pour rendre les exposans de nos formules de positifs, négatifs. Je divise la grandeur sous le signe par la changeante x élevée à la plus haute puissance qu'a cette même changeante sous le signe; je multiplie en même temps la changeante x hors du signe par la même grandeur. $gx^m dx$. $(a+bx^n)^p$ devient en pratiquant l'opération précédente $gx^{m+np}(b+ax^{-n})^p$.

La seconde forme de $gx^m dx(a+bx^n+cx^{2n})^p$ est de la même manière $gx^{m+2np} dx(c+bx^{-n}+ax^{-2n})^p$. Enfin $gx^m dx(a+bx^n+Bx^{2n}) \times (c+ex^n+fx^{2n}+gx^{3n})^p$ devient $gx^{m+2n+3np} dx(B+bx^{-n}+ax^{-2n}) \times (c+fx^{-n}+ex^{-2n}+cx^{-3n})^p$.

LXIV.

2°. Pour ramener beaucoup de différentielles aux formules précédentes. Cette méthode sert aussi pour ramener à nos formules un grand nombre de différentielles.

Lorsque

Lorsque les deux termes de la grandeur sous le signe font multipliés par la changeante, comme dans $\frac{b dx}{x^1}$ Application à des binomes, $\sqrt{cx + x^2} = bx^{-\frac{1}{2}} dx (cx + x^2)^{\frac{1}{2}}$, il faut pour réduire cette quantité à la première forme de la formule des binomes, dégager le premier terme de la changeante qui le multiplie. Or cela se fait aisément par le moyen de notre méthode. Je divise la grandeur sous le signe par $x^{1 \times \frac{1}{2}}$, & je multiplie la grandeur hors du signe par cette même quantité; j'ai $bx^{-\frac{1}{2}} dx \times \overline{cx + x^2}^{\frac{1}{2}}$, dans laquelle $b = g$; $-\frac{1}{2} = m$; $c = a$; $b = 1$; $n = 1$; $p = \frac{1}{2}$.

Pour réduire cette différentielle à la seconde forme de la même formule, je multiplie la partie hors du signe par $x^{2 \times \frac{1}{2}}$, & je divise la partie sous le signe par la même grandeur: ce qui me donne $bx^{-2} (1 + cx^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ou $g = b$; $m = 2$; $b = 1$; $a = c$; $n = 1$; $p = \frac{1}{2}$.

L X V.

De la même manière pour ramener à la première forme de la formule $gx^m dx (a + bx^n + Bx^{2n}) \times (c + ex^n + fx^{2n} + \gamma x^{3n})^p$ Application à des trinomes, la quantité du même genre $x^{-2} dx (3a - 6x^2) \times (ax - 6x^3 + kx^4)^{-\frac{1}{2}}$, il faudroit diviser la grandeur sous le signe par $x^{1 \times -\frac{1}{2}}$, & multiplier celle qui est hors du signe par la même quantité; cette opération nous donne $x^{-\frac{5}{2}} dx (3a - 6x^2) \times (a + 0x^1 - 6x^2 + kx^3)^{-\frac{1}{2}}$, où on a $g = 1$; $m = -\frac{5}{2}$; $a = 3a$;

N

$$b=0; B=-6; c=a; e=0; f=-6; \gamma=k; p=-\frac{1}{2}.$$

Si on veut ramener la même différentielle à la seconde forme de la même formule, il faut 1° diviser la première grandeur complexe $3a - 6x^2$ par x^2 , & multiplier la grandeur $x^{-2} dx$, par x^2 . 2°. Diviser la seconde grandeur complexe $(ax - 6x^3 + kx^4)^{-\frac{1}{2}}$, & multiplier en même temps $x^{-2} dx$ par $x^{4 \times -\frac{1}{2}} = x^{-2}$; & on aura $x^{-2} dx (-6 + 3ax^{-2}) \times (k - 6x^{-1} + ax^{-3})^{-\frac{1}{2}}$.

LXVI.

Il en fera de même de beaucoup d'autres différentielles. Il est bon aussi d'observer que des différentielles complexes, peuvent avoir la forme de différentielles complexes. Par exemple, $dx \times \sqrt{ax} = x^0 \times dx (0 + ax^1)^{\frac{1}{2}}$.

LXVII.

Troisième
usage de la
méthode ex-
pliquée ci-
dessus.

REMARQUE 2. Il est quelquefois nécessaire pour faciliter de certaines intégrations, dont nous allons parler tout à l'heure, de faire en sorte que l'exposant de la changeante hors du signe soit moindre d'une unité que l'exposant de la plus haute puissance de la changeante sous le signe. Or cela se fait par le moyen des indéterminées, & de la présente méthode.

Soit (A) $x^r dx (e + kx^s)^n$. Pour que l'exposant r soit moindre d'une unité que s , je multiplie la changeante x^r hors du signe, par x élevée à une puissance dont l'exposant soit l'indéterminée q , c'est-à-dire, par x^q , & je divise en

même temps $e + kx^s$ par $x^{\frac{q}{n}}$. J'aurai $x^r dx (e + kx^s)^n$
 $= (B) x^{r+q} dx (ex^{-\frac{q}{n}} + kx^{s-\frac{q}{n}})^n$. Je suppose à
 présent $s - \frac{q}{n} = r + q + 1$, j'aurai $q = \frac{sn - rn - n}{n+1}$, &
 cette valeur de q étant mise à sa place dans (B), on a
 $x^{\frac{r+sn-n}{n+1}} dx \left\{ ex^{\frac{r-s+1}{n+1}} + kx^{\frac{r+sn+1}{n+1}} \right\}^n$, où l'expo-
 sant de x hors du signe ne diffère que d'une unité de
 l'exposant de la plus haute puissance de x sous le signe.

On remarquera qu'il est indifférent de multiplier $x^r dx$
 par x^q , en divisant la grandeur sous le signe par $x^{\frac{q}{n}}$, ou
 de faire l'inverse de cette opération.

LXVIII.

Toutes ces choses supposées & bien entendues, je passe à
 l'intégration des différentielles binomes, trinomes, &c.
 La méthode pour intégrer ces différentielles a deux parties.
 La première renferme les binomes qui peuvent s'intégrer
 algébriquement, c'est-à-dire exactement. La seconde com-
 prend celles qui ne s'intègrent exactement qu'en supposant
 la quadrature ou la rectification d'une courbe.



CHAPITRE V.

Premiere partie de la Méthode pour intégrer les différentielles Binomes comprises dans la formule $g x^m dx (a + b x^n)^p$, ou $g x^{m+np} dx (b + a x^{-n})^p$, dans laquelle p est un nombre quelconque.

LXIX.

Elle contient les différentielles qui s'intègrent algébriquement.
Procédé de la méthode.

Pour trouver l'intégrale de $(A) g x^m dx (a + b x^n)^p$, il faut 1°. faire en sorte que l'exposant de la changeante x hors du signe soit moindre d'une unité que l'exposant de la plus haute puissance de x sous le signe. Or cela se fait de la maniere que nous avons enseigné (Art. LXVII.).

2°. Il faut supposer une nouvelle changeante z égale à la grandeur qui est sous le signe, & substituer les valeurs que donne cette transformation, de la maniere que nous avons enseigné (Art. XVI.). On a par ce moyen une transformée dont le premier terme est intégrable par notre regle fondamentale. Le second terme est le même qu'étoit la quantité avant la transformation, à l'exception qu'il a un coefficient différent, & que l'exposant de la changeante hors du signe est augmenté ou diminué en proportion arithmétique. On fait sur ce second terme la même opération que sur le premier, ainsi de suite.

L X X.

Détaillons cette méthode en l'appliquant à notre formule

$$(A) \quad g x^m dx (a + b x^n)^p.$$

Appliquée
à la formule
 $g x^m dx$
 $(a + b x^n)^p.$

1°. Elle devient par la première opération (B) $g x^{m+q} dx$
 $\left\{ a x^{-\frac{q}{p}} + b x^{n-\frac{q}{p}} \right\}^p$, & supposant $m + q + 1 = n - \frac{q}{p}$,
on en tire $q = \frac{np - mp - p}{p + 1}$. Je substitue cette valeur de q
à sa place dans (B), on trouve (A) = (C) $g x^{\frac{m+np-p}{p+1}}$

$$dx \cdot \left\{ a x^{\frac{m-n+1}{p+1}} + b x^{\frac{m+np+1}{p+1}} \right\}^p.$$

2°. Je suppose z égale à la grandeur sous le signe, c'est-à-dire (D) $z = a x^{\frac{m-n+1}{p+1}} + b x^{\frac{m+np+1}{p+1}}$: ce qui donne

$$(E) \quad z = x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times (a + b x^n). \text{ Donc on a } (F) \quad z^{p+1} = x^{m-n+1} \times (a + b x^n)^{p+1}, \text{ \& } (\Phi) \quad z^p = \left\{ a x^{\frac{m-n+1}{p+1}} + b x^{\frac{m+np+1}{p+1}} \right\}^p.$$

$$\text{Différentiant (D) j'ai (G) } dz = \left\{ \frac{m-n+1}{p+1} \right\} a x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx + \left\{ \frac{m+np+1}{p+1} \right\} b x^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx.$$

$$\text{Et par conséquent (H) } x^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx = (I) \left\{ \frac{p+1}{m+np+1} \right\}$$

$$\frac{1}{b} dz = \left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \frac{a}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx.$$

3°. Je substitue dans le second membre de l'équation $A=C$, la valeur (I) de (H), & on a $A=(L) \left\{ \frac{p+1}{m+np+1} \right\}$

$$\frac{g}{b} dz \times \left\{ a x^{\frac{m-n+1}{p+1}} + b x^{\frac{m+np+1}{p+1}} \right\}^p = \left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\}$$

$$\frac{ag}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx \times \left\{ a x^{\frac{m-n+1}{p+1}} + b x^{\frac{m+np+1}{p+1}} \right\}^p. \text{ Ou}$$

substituant encore dans le premier terme de (L) au lieu de

$$\left\{ ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} \right\}^p \text{ fa valeur } z^p \text{ prise de } (\Phi),$$

on aura $(A) = (M) \left\{ \frac{p+1}{m+np+1} \right\} \frac{g}{b} z^p dz - (N)$

$$\left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \frac{ag}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx \times \left\{ ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} \right\}^p$$

$$= (M) \left\{ \frac{p+1}{m+np+1} \right\} \frac{g}{b} z^p dz - (P) \left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \frac{ag}{b}$$

$$x^{m-n} dx (a + bx^n)^p.$$

4°. Je cherche l'intégrale de cette équation. Or je vois bien-tôt que la regle fondamentale me donne celle de la partie (M) , je la prends & je trouve $\int (A) g x^m dx (a + bx^n)^p = (Q) \frac{1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^{p+1} - (R) \left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \frac{ag}{b} \times \int x^{m-n} dx (a + bx^n)^p$. Je substitue dans (Q) la valeur de z^{p+1} prise de (F) , & j'ai $\int (A) g x^m dx (a + bx^n)^p = (T) \frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} \times g x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1} - (R) \left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \frac{a}{b} \int g x^{m-n} dx (a + bx^n)^p$.

LXXI.

Voilà le premier terme de l'intégrale qu'on cherche. L'on trouvera tous les suivans à l'infini par de simples substitutions. Le second, par exemple, se trouve en mettant dans (T) , & dans (R) , à la place de m , $m - n$, & multipliant par le coefficient de (R) , ce que donne cette substitution. Ce second terme fera $(V) = \left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \times \frac{1}{m+np+1-n} \times \frac{a}{bb} g x^{m+1-2n} (a + bx^n)^{p+1} - (X)$

$$\left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \times \left\{ \frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \right\} \frac{aa}{bb} \int g x^{m-2n} dx \times (a + bx^n)^p.$$

La raison de cette opération est évidente. Car nous venons de trouver l'intégrale de $(A) g x^m dx \times (a + b x^n)^p$; nous cherchons maintenant celle de $(R) - \left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \times \frac{a}{b} \times g x^{m-n} dx \times (a + b x^n)^p$. En quoi diffèrent ces deux différentielles? Si nous les comparons ensemble, nous trouvons $-\left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \times \frac{a}{b} = 1, m-n = m$; donc pour avoir l'intégrale de R , il faudra substituer dans celle de A , $m-n$ à m ; & multiplier chaque terme par $-\left\{ \frac{m-n+1}{m+np+1} \right\} \times \frac{a}{b}$.

LXXII.

Le troisième terme se trouve par la même raison, en mettant dans T & dans R , $m-2n$ au lieu de m , & multipliant ce qui en vient par le coefficient de X .

De la même manière on aura le quatrième terme, & tant d'autres qu'on voudra de la suite qui est l'intégrale cherchée. Ils sont chacun multipliés par $g(a + b x^n)^{p+1}$; ainsi il suffit d'écrire ce commun multiplicateur une seule fois au commencement de la suite.

LXXIII.

REMARQUE I. On peut abrégér l'expression de cette intégrale. Pour cela, il faut 1°. diviser le numérateur & le dénominateur du premier terme, chacun par n ; ceux du second terme par n^2 ; ceux du troisième par n^3 , & ainsi de suite. Cette opération donne après la réduction $f(A)$

Moyen d'abrégér l'expression de l'intégrale de la formule.

$$= \frac{g}{n} (a + b x^n)^{p+1} \times \left(\left\{ \frac{\frac{1}{m+np+1}}{n} \right\} \frac{1}{b} x^{m-n+1} - \left\{ \frac{\frac{m+1-n}{n}}{(m+np+1)(m+np+1-n)} \right\} \frac{a}{bb} x^{m-2n+1} + \&c. \right).$$

2°. Je suppose $\frac{m+1}{n} = r.$

ce qui donne $m+1 = rn.$

$$\frac{m+1-n}{n} = r-1.$$

$$m+1-n = rn-n.$$

$$m+1-2n = rn-2n.$$

Je suppose encore $\left. \begin{matrix} r+p \\ \text{ou } \frac{m+np+1}{n} \end{matrix} \right\} = s.$

ce qui donne $\frac{m+np+1-n}{n} = s-1.$

& $\frac{m+np+1-2n}{n} = s-2.$

3°. Je substitue $r, r-1, r-2, \&c. s, s-1, s-2, \&c.$ à la place de leurs valeurs dans la dernière expression de l'intégrale, & on aura la formule suivante.

Première
formule (↓)
de l'intégrale
des différen-
tielles bino-
mes qu'on
peut ramener
à $g x^m dx$
 $(a + b x^n)^p$.

$$\int g x^m dx (a + b x^n)^p = \frac{g}{n} (a + b x^n)^{p+1} \times \left(\frac{1}{s \times b} x^{rn-n} - \left\{ \frac{r-1}{s(s-1)} \right\} \frac{a}{bb} x^{rn-2n} + \left\{ \frac{(r-1)(r-2)}{s(s-1)(s-2)} \right\} \frac{aa}{b^3} x^{rn-3n} - \&c. \right),$$

ou bien en mettant pour $rn-n, rn-2n, \&c.$ leurs valeurs $f(A) = \frac{g}{n} (a + b x^n)^{p+1} \times \left(\frac{1}{s \times b} x^{m+1-n} - \left\{ \frac{r-1}{s(s-1)} \right\} \frac{a}{bb} x^{m+1-2n} + \left\{ \frac{(r-1)(r-2)}{s(s-1)(s-2)} \right\} \frac{aa}{b^3} x^{m+1-3n} - \&c. \right).$

LXXIV.

REMARQUE 2. Quand le second terme bx^n du binôme $a+bx^n$ est négatif, il faut changer dans la formule les signes des termes dans lesquels b a une dimension impaire.

LXXV.

On peut avoir par la même méthode une formule d'intégrale de $gx^m dx (a+bx^n)^p$, où les puissances de la changeante x qui en distinguent les termes ayent pour exposans la progression arithmétique $m+1, m+1+n, m+1+2n$, au lieu que ces exposans sont dans la formule précédente $m+1-n, m+1-2n, m+1-3n$, &c. L'opération est absolument la même, que celle que nous avons déjà faite, excepté qu'il faut supposer $m+q+1 = -\frac{q}{p}$, & non pas $= n - \frac{q}{p}$; ce qui donnera $q = -\frac{mp-p}{p+1}$. Après les substitutions & transformations on

$$\begin{aligned} \text{aura } \int gx^m dx (a+bx^n)^p &= (\gamma) \left\{ \frac{1}{m+1} \right\} \times \frac{g}{a} \times x^{m+1} \\ &\times (a+bx^n)^{p+1} - \left\{ \frac{m+1+np+n}{m+1} \right\} \frac{bg}{a} \int x^{m+n} dx \times \\ &(a+bx^n)^p; \text{ on trouvera le second, troisieme, quatrieme,} \\ &\text{\&c. terme de l'intégrale comme ci-dessus (Art. LXXI.).} \\ \text{L'intégrale est } g (a+bx^n)^{p+1} &\times \left(\left\{ \frac{1}{m+1} \right\} \frac{1}{a} x^{m+1} \right. \\ &- \left\{ \frac{m+1+np+n}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \right\} \frac{b}{a^2} x^{m+1+n} + \\ &\left. \left\{ \frac{(m+1+np+n) \cdot (m+1+np+2n)}{(m+1) \cdot (m+1+n) \cdot (m+1+2n)} \right\} \frac{bb}{a^3} x^{m+1+2n} - \&c. \right). \end{aligned}$$

O

LXXVI.

On abrégera l'expression de cette formule par le même moyen qui a servi pour la précédente. On divisera le numérateur & le dénominateur du premier coefficient chacun par $-n$, ceux du second par $-n \times -n$, ceux du troisième par $-n^2$, & ainsi de suite. Après on fera passer au dénominateur du multiplicateur commun une $-n$ du diviseur de chaque terme des coefficients. Enfin on supposera $\frac{m+1}{-n} = s$

$$\frac{m+1-p}{-n} = s-p = r$$

d'où l'on tire $\frac{m+1+n}{-n} = s-1,$

$$\frac{m+1+2n}{-n} = s-2, \&c.$$

& encore $\frac{m+1+np}{-n} = r$

$$\frac{m+1+np+n}{-n} = r-1$$

$$\frac{m+1+np+2n}{-n} = r-2, \&c.$$

Mettant ces valeurs à leurs places dans les coefficients de l'intégrale, on aura cette seconde formule.

Seconde formule (ω) de l'intégrale de $\int g x^m dx (a+bx^n)^p = (\omega) \frac{g}{-n} (a+bx^n)^{p+1} \times$
 $\left(\frac{1}{as} x^{m+1} - \left\{ \frac{r-1}{s.(s-1)} \right\} \frac{b}{aa} x^{m+1+n} + \left\{ \frac{(r-1).(r-2)}{s.(s-1).(s-2)} \right\} \right.$
 $\left. \frac{bb}{a^2} x^{m+1+2n} - \&c. \right) :$

LXXVII.

REMARQUE 3. Si la différentielle binome étoit $x^m dx (ax^n + bx^{2n})^p$, il seroit aisé d'en trouver l'intégrale par notre méthode. Il suffiroit de préparer la différentielle, de manière que la changeante x ne se trouvât qu'au second terme : c'est ce qu'on feroit par le moyen de la règle donnée, Article LX.

LXXVIII.

REMARQUE 4. La même méthode nous donneroit aussi deux formules d'intégration pour la seconde forme de la formule des binomes, $gx^{m+np} dx (b+ax^{-n})^p$; mais il est inutile de s'y arrêter, les deux que nous venons de trouver étant suffisantes.

La seconde forme $gx^{m+np} dx (b+ax^{-n})^p$ de la formule des binomes donne aussi deux formules d'intégration.

C H A P I T R E V I.

*Observations sur les deux formules d'intégration (†)
& (ω) de la première partie de la méthode
des binomes.*

LXXIX.

DANS nos deux formules, lorsque r , ou $\frac{m+1}{n}$ dans la première, & $\frac{m+1-p}{-n}$ dans la seconde, est un nombre entier positif, il est évident que la suite sera finie & exacte,

Cas dans lequel r est un nombre entier positif. N'a point de difficulté.

O ij

puisque $r-1, r-2, \&c.$ étant coefficients des termes de la suite, & r un nombre entier positif, un des coefficients & tous les suivans seront $= 0$. Donc la suite aura autant de termes, qu'il y aura d'unités dans le nombre entier r .

Cas plus difficile, quand s est un nombre entier positif.

Expliqué d'abord pour la première formule (ψ).

Mais si s est un nombre entier positif, alors le cas est plus difficile : nous allons le développer.

Commençons par la première formule (ψ).

L X X X.

1°. Lorsque s étant un nombre entier positif, r n'en est pas un.

1°. Il peut arriver que r ne soit pas un nombre entier positif, & que s en soit un; car soit, par exemple, $m=2$; $n=5$; $p=\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{5}+1$, ou $\frac{2}{5}+2$, ou $\&c.$ on a $s \left\{ \frac{m+1+p}{n} \right\} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$, ou $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + 1$, ou $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + 2$, &c. $=$ à un nombre entier positif, & en général si $p = \frac{n-m-1}{n} + q$, en prenant q pour un nombre entier positif, on aura $s \left\{ \frac{m+1}{n} + p \right\} = q+1$.

Comme les termes dont le dénominateur est égal à zéro sont infinis, on pourroit croire que dans ce cas l'intégrale est infinie : mais il y a une infinité de cas où cela n'est point, l'intégrale dépendant de la quadrature d'une courbe, dans laquelle tant que x est finie, l'aire de la courbe l'est aussi. Car soit comme dans l'exemple précédent, $m=2$, $n=5$, $p=\frac{2}{5}$, on a $g x^m dx \cdot (a+bx^n)^p = g x^2 dx \cdot (a+bx^5)^{\frac{2}{5}}$, dont l'intégrale dépend de la quadrature d'une courbe dans laquelle (Art. XLVII.) l'abscisse étant x

l'ordonnée est $g x^2 \cdot \overline{a + b x^5}^{\frac{2}{5}}$. Or il est visible que lorsque $x = 0$, cette ordonnée est $= 0$, & qu'elle n'est infinie que lorsque x elle-même est infinie. Donc tant que x est finie, l'aire de la courbe exprimée par $\int g x^2 d x \overline{a + b x^5}^{\frac{2}{5}}$ est aussi finie.

L X X X I.

La formule ou série (↓) ne pouvant donc servir dans ce cas, il faut avoir recours à la série (W) ou formule $x^k d x (e + c x^q)^a$ de l'Art. XI. en faisant

Dans ce cas la première formule (↓) ne peut servir.

$$g = h$$

$$m = k$$

$$a = e$$

$$b = c$$

$$n = q$$

$$a = p$$

& si dans cette série le dénominateur de quelqu'un des termes devient $= 0$, c'est-à-dire (Schol. art. XII.) si $\frac{k+1}{-q}$, ou sa valeur $\frac{m+1}{-n}$, est un nombre entier positif, on pourra trouver l'intégrale finie & exacte de la différentielle proposée. Car puisque dans notre formule (↓) $\frac{m+1}{n} + p$ est (hypoth.) un nombre entier positif, & que $\frac{m+1}{-n}$ est aussi supposé un nombre entier positif, il faut nécessairement pour que ces deux suppositions s'accordent que $p = a$ soit un entier positif. Or cela posé on a (Article XI.) l'intégrale finie & exacte de notre différentielle.

Mais alors la seule règle fondamentale donne l'intégrale.

L X X X I I.

2°. Si $r \left\{ \frac{m+1}{n} \right\}$ & $s \left\{ \frac{m+1}{n} + p \right\}$ sont tous deux

2°. Lorsque r & s sont tous deux entiers positifs.

des nombres entiers positifs, il est visible que p fera nécessairement ou un nombre entier positif, ou un nombre entier négatif $< \frac{m+1}{n}$.

Premier cas
 $r < s$ n'a aucune difficulté.

Dans le premier cas r est $< s$, alors la formule (†) ne fait aucune difficulté; car r étant un nombre entier positif plus petit que s , la serie qui donne l'intégrale se trouve finie & exacte, avant qu'on soit arrivé au terme dont le dénominateur seroit égal à zéro.

D'ailleurs on peut résoudre ce cas simplement par l'Article XI. que nous venons de citer.

LXXXIII.

Second cas
 $r > s$ plus difficile.

Mais si p est un nombre entier négatif, alors $r > s$, & le dénominateur des termes de la formule (†) devenant $= 0$, avant que l'intégrale soit finie & exacte, cette formule ne fait rien connoître.

Le cas présent peut être représenté par (a) $\frac{g x^m dx}{a + b x^n}^p$,

où à cause que p est négatif, j'ai mis $\frac{1}{a + b x^n}^p$ au dénominateur. Parce que $\frac{m+1}{n} = r$, on a (a) $= \frac{g x^{r n - 1} dx}{(a + b x^n)^p} =$

$$\frac{g x^{r n - n + n - 1} dx}{(a + b x^n)^p} = \frac{g x^{r n - n} \times x^{n - 1} dx}{(a + b x^n)^p}. \text{ Soit maintenant}$$

(Art. XVI.) $a + b x^n = z$, on aura $x^n = \frac{z - a}{b}$; $x^{n - 1} dx$

$$= \frac{dz}{nb}; x^{r n - n} = \left\{ \frac{z - a}{b} \right\}^{r - 1}; \text{ \& enfin } \frac{g x^{r n - n} \times x^{n - 1} dx}{(a + b x^n)^p}$$

$$= \frac{g dz}{n b z^p} \times \left\{ \frac{z - a}{b} \right\}^{r - 1} = \frac{g}{n b^r} \times \frac{z^{-a} dz}{z^p}. \text{ Or comme}$$

r est (hyp.) un nombre entier positif, $r-1$ en sera un; par conséquent pour avoir l'intégrale de $\frac{z-a^{r-1}}{z^p} dz$, il ne faut qu'élever $z-a$ à la puissance $r-1$, & multiplier chaque terme par $\frac{dz}{z^p}$ pour en prendre ensuite l'intégrale.

Or comme p (hyp.) est $< r$, il s'ensuit que p ne sauroit être que tout au plus $= r-1$; & comme la puissance $r-1$ de $z-a$ doit contenir toutes les puissances de z depuis z^{r-1} jusqu'à z^0 inclusivement, il s'ensuit qu'il y aura quelqu'un de ces termes dont la multiplication par $\frac{dz}{z^p}$ réduira la différentielle à $\frac{dz}{z}$ que nous avons démontré dépendre de la quadrature de l'hyperbole.

L'intégrale de quelqu'un des termes dépendra de la quadrature de l'hyperbole.

LXXXIV.

Je passe à la seconde formule (ω).

Dans cette formule si $s \left\{ \frac{m+1}{-n} \right\}$ est égale à un nombre entier positif, elle a le même inconvénient que nous venons de remarquer dans la serie ($\downarrow$) pour un cas semblable (Art. LXXX.). Dans ce cas au lieu de faire usage de cette formule (ω), on peut employer la serie (W) en se servant des remarques que nous avons faites sur cette serie (Article XII. & suiv.).

Cas de $s =$ un nombre entier positif, expliqué pour la seconde formule (ω) de l'intégrale des binomes.

Ce qu'il faut faire alors.

On pourra aussi se servir de la formule ($\downarrow$) qui ne fera aucune difficulté, à moins que $\frac{m+1}{n} + p$ ne soit un nombre entier positif; mais en ce cas on remarquera que puisque (hyp.) $\frac{m+1}{-n}$ est un nombre entier positif, & que

1°. s étant un nombre entier positif, & r ne l'étant pas.

$\frac{m+1}{n} + p$ en est aussi un, il faut que p soit entier positif, & alors il n'y a plus de difficulté pour trouver l'intégrale.

LXXXV.

2°. r & s étant tous deux entiers positifs, Si dans cette même formule r & s sont tous deux des nombres entiers positifs & que $r < s$, alors on peut fort bien se servir de la formule (ω). D'ailleurs p est alors un nombre entier positif, & l'intégrale par conséquent se trouve aisément sans le secours de la formule. La preuve en est la même que pour le cas semblable de la formule (ψ) (Art. LXXXII.).

Mais si $s \left\{ \frac{m+1}{-n} \right\}$ est $< r \left\{ \frac{m+1}{-n} - p \right\}$, ce qui rend $p =$ à un nombre entier négatif, alors la formule (ω) ne fait rien connoître, & il faut avoir recours à une autre méthode pour trouver l'intégrale.

LXXXVI.

Puisque $\frac{m+1}{-n} = s$ que je suppose être un nombre entier positif, & que p est (hyp.) un nombre entier négatif, il s'ensuit que la différentielle, $x^m dx \cdot (a+bx^n)^p$ peut être représentée par $\frac{x^{-sn-1} dx}{(a+bx^n)^p}$. Or supposons (Art. XLIII.)

$$x^n = \frac{1}{u}, \text{ on a } x^{-sn-1} dx = -\frac{u^{s-1} du}{n}; \text{ \& } \frac{x^{-sn-1} dx}{(a+bx^n)^p} \\ = -\frac{u^{s-1} du}{n} \times \frac{u^p}{(au+b)^p} = -\frac{u^{p+s-1} du}{n \cdot (b+au)^p} : \text{ comme } p$$

& s sont des nombres entiers positifs, il est aisé d'avoir l'intégrale en cette sorte.

Soit

$$\text{Soit } b + au = z, \text{ on a } u = \frac{z-b}{a}, \text{ \& } - \frac{u^{p+s-1} du}{n \cdot (b+au)^p} \\ = - \frac{\frac{1}{n} \left\{ \frac{z-b}{a} \right\}^{p+s-1} \frac{dz}{a}}{z^p} = - \frac{\frac{1}{n} \cdot (z-b)^{p+s-1} dz}{a^{p+s} z^p}, \text{ dif-}$$

férentielle dont l'intégrale est facile, parce que $p + s - 1$ est un nombre entier positif; & il est aisé de prouver qu'il y aura quelques termes de cette intégrale qui dépendront de la quadrature de l'hyperbole.

C H A P I T R E V I I.

Seconde partie de la Méthode des différentielles binomes comprises dans la formule

$$g x^m dx \cdot (a + b x^n)^p.$$

LXXXVII.

Cette seconde partie renferme les différentielles dont l'intégrale suppose la quadrature ou la rectification d'une courbe.

Contient les différentielles qui s'intègrent en supposant la quadrature ou la rectification d'une courbe.

De la formation des deux formules précédentes, on peut en déduire deux autres pour trouver les intégrales finies des différentielles binomes que la première partie de la méthode ne donne point. Pour cela on suppose données les intégrales de quelques différentielles binomes, lorsqu'on n'en peut avoir d'exactes par les formules qui précèdent.

Elle donne aussi deux formules d'intégration.

Ces deux formules sont aisées à trouver par notre première transformation. On supposera pour abréger $u = g \times (a + bx^n)^{p+1}$, & on écrira dans chacune des formules (†) & (ω) de la première partie, non-seulement les termes qui sont chacun une intégrale, mais on écrira aussi en parenthèse pour les distinguer, chacun dans leur rang, les autres termes qui ont fait découvrir les précédens, & qui ne sont marqués que par $\int$ qui veut dire somme. Ces termes affectés du signe $\int$ étant supposés donnés, l'intégrale sera exacte.

LXXXVIII.

Ce procédé nous donne les deux formules suivantes.

Première formule (Δ) de la seconde partie de la Méthode.

Premier terme de l'intégrale.

Répondante à la formule (†) de la première partie de cette méthode.

$$\int g x^m dx \cdot (a + bx^n)^p = (\Delta) \left\{ \frac{1}{m+1+np} \right\} \cdot \frac{1}{b} u x^{m+1-n} -$$

A

$$\left(- \left\{ \frac{m+1-n}{m+1+np} \right\} \cdot \frac{a}{b} \int g x^{m-n} dx \cdot (a + bx^n)^p \right) -$$

Second terme de l'intégrale.

$$\left\{ \frac{m+1-n}{m+1+np} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{m+1+np-n} \right\} \cdot \frac{a}{bb} u x^{m+1-2n}$$

B

$$\left(+ \left\{ \frac{m+1-n}{m+1+np} \right\} \cdot \left\{ \frac{m+1-2n}{m+1+np-n} \right\} \cdot \frac{aa}{bb} \int g x^{m-2n} dx \times \right.$$

Troisième terme de l'intégrale.

$$\left. (a + bx^n)^p \right) + \left\{ \frac{(m+1-n) \cdot (m+1-2n) \times 1}{(m+1+np) \cdot (m+1+np-n) \cdot (m+1+np-2n)} \right\} \frac{a^2}{b^3} u x^{m+1-3n}$$

$$\left(- \left\{ \frac{(m+1-n) \cdot (m+1-2n)}{(m+1+np) \cdot (m+1+np-n)} \right\} \cdot \right.$$

$$\left\{ \frac{m+1-3n}{m+1+np-2n} \right\} \cdot \frac{a^3}{b^3} \int g x^{m-3n} dx \cdot (a+bx^n)^p - \&c.$$

Seconde formule (x) de la seconde partie de la Méthode.

$$\begin{aligned} & \int g x^m dx \cdot (a+bx^n)^p = (X) \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{a} u x^{m+1} \quad \text{Premier terme de l'intégrale. Répondante à la formule (u) de la première partie.} \\ & \left\{ - \frac{(m+1+np+n)}{m+1} \times \frac{b}{a} \int g x^{m+n} dx \cdot \frac{1}{a+bx^n^p} \right\} - \\ & \quad \text{Second terme de l'intégrale.} \\ & \frac{(m+1+np+n) \times 1}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \times \frac{b}{aa} u x^{m+1+n} \left\{ + \right. \\ & \quad \frac{(m+1+np+n) \cdot (m+1+np+2n)}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \times \frac{bb}{aa} \times \int g x^{m+2n} dx \cdot \\ & \quad \text{Troisième terme de l'intégrale.} \\ & \quad \left. \frac{1}{a+bx^n^p} \right\} + \frac{(m+1+np+n) \cdot (m+1+np+2n) \times 1}{(m+1) \cdot (m+1+n) \cdot (m+1+2n)} \times \\ & \quad \frac{b^2}{a^3} \times u x^{m+1+2n} \left\{ - \frac{(m+1+np+n) \cdot (m+1+np+2n)}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \right. \\ & \quad \times \frac{(m+1+np+3n)}{m+1+2n} \times \frac{b^3}{a^3} \int g x^{m+3n} dx \times \frac{1}{a+bx^n^p} \left. \right\} - \&c. \end{aligned}$$

On peut continuer ces deux formules tant qu'on voudra, les termes qu'on voit ici suffisent pour cela. On peut aussi abréger les coefficients, en donnant à r & à s les mêmes valeurs que dans les deux formules de la première partie. Nous les avons laissés ici tels que la seconde partie de notre méthode les donne immédiatement, afin que les commençans vissent clairement la formation de ces deux formules.

Avant de faire voir l'usage de ces formules, il est nécessaire de donner quelques notions préparatoires.

Notions préparatoires à l'application des formules de la seconde partie de la Méthode.

LXXXIX.

On regarde une différentielle comme l'élément de la quadrature ou de la rectification d'une courbe.

Nous avons déjà fait voir qu'une différentielle qui n'a qu'une changeante pouvoit être regardée comme l'élément de la quadrature d'une courbe ; c'est pour cela que dans le cas des deux dernières formules on dit que l'intégrale dépend de la quadrature d'une courbe, & que cette quadrature étant supposée on a l'intégrale finie de la différentielle.

Et c'est d'ordinaire aux sections coniques qu'on les applique.

Comme le cercle & les sections coniques sont les plus simples des courbes, & qu'elles sont plus familières, parce qu'on s'y est plus appliqué qu'aux autres, c'est d'ordinaire à leur quadrature ou à leur rectification, supposées connues, qu'on réduit les intégrales des différentielles qui ont pour intégrale quelques termes d'une intégrale exacte, & pour dernier terme l'expression de la quadrature ou de la rectification d'une courbe.

X C.

Les formules (Δ) & (X) indiquent les différentielles qui sont dans ce cas,

Les formules (Δ) & (X) font connoître quelles sont les différentielles qui sont dans ce cas, & font trouver les intégrales de ces différentielles. Pour le concevoir clairement, il faut avoir bien présents les élémens de la quadrature & de la rectification des sections coniques.

Nous allons donner ici une Table de ceux qui se rapportent à notre formule générale $g x^m dx . (a + b x^n)^p$, & la manière de les trouver. Nous pourrions renvoyer à d'autres livres où elle est expliquée ; mais il sera plus commode pour les lecteurs de l'avoir ici.

Méthode pour trouver les élémens des sections coniques.

X C I.

PROBLEME I. Trouver les élémens de la rectification du cercle & des sections coniques.

1°. Ceux de leur rectification.

SOLUTION. En nommant u l'arc de la courbe dont on cherche la longueur, du marquera chaque partie infiniment petite de cette courbe ; supposant de plus dans les courbes dont les ordonnées y sont parallèles, qu'elles soient aussi perpendiculaires aux coupées x , il est évident que chaque petit triangle dont du est l'hypothénuse, dx & dy les côtés, est toujours rectangle ; par conséquent on a pour la rectification du cercle & des sections coniques cette formule générale :

$$du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Formule pour cette rectification.

X C I I.

Lorsqu'on veut trouver la longueur d'une courbe ou d'une partie de cette courbe, il faut chercher par l'équation donnée de la courbe la valeur de dy^2 en x , dx , dx^2 , ou la valeur de dx^2 en y , dy , dy^2 ; substituer l'une ou l'autre de ces valeurs dans la formule, & alors elle sera changée en une quantité qui n'aura qu'une seule inconnue.

Usage de cette formule pour construire une Table de ces élémens.

avec les différences , & qui sera égale à du . Ce fera l'équation de la rectification de la courbe : si cette équation est intégrable , la courbe est rectifiable ; autrement elle ne l'est pas. Soit, par exemple, $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, équation aux diametres conjugués de l'hyperbole , on a $y = \sqrt{\frac{b^2 x^2 - a^2 b^2}{aa}}$, donc $dy = \frac{bx dx}{a\sqrt{(xx - aa)}}$; $dy^2 = \frac{bbxx dx^2}{a^2 x^2 - a^4}$. Donc mettant dans la formule pour dy^2 cette valeur , on a $du = dx \sqrt{\frac{bbxx}{a^2 x^2 - a^4} + 1}$. C'est l'équation pour la rectification de l'hyperbole. Il en est ainsi des autres.

Par cette regle on construit la Table suivante.

*TABLE des élémens de la rectification du Cercle
& de la Parabole.*

- 1°. En supposant le rayon du cercle $= r$ & prenant l'origine des coordonnées x & y au centre du cercle , on a $y = \sqrt{rr - xx}$; donc $du = r dx . (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$.
- 2°. En prenant l'origine des coordonnées au sommet, on a $y = \sqrt{2rx - xx}$; donc $du = r dx . (2rx - xx)^{-\frac{1}{2}}$.
- 3°. Dans la Parabole on a , comme on le fait , $y = \sqrt{px}$; donc $du = \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} . (px + 4xx)^{\frac{1}{2}}$.

On trouve les autres par la même méthode ; mais comme nous l'avons déjà remarqué , nous ne mettons ici que ceux qui se rapportent à la formule générale des binomes.

On pourroit joindre à cette Table les élémens des arcs de cercle par les Tangentes & par les Secantes que nous avons donnés dans l'Introduction, Articles xli. & suivans.

XCIII.

PROBLÈME 2. Trouver les élémens de la quadrature du cercle & des sections coniques.

2°. Ceux de leur quadrature.

SOLUTION. On doit rapporter à deux cas la connoissance de l'aire des courbes. Le premier comprend celles dont les ordonnées sont parallèles ; on les suppose perpendiculaires aux coupées , afin que les élémens de l'aire soient de petits rectangles. Le second cas renferme les courbes dont les ordonnées partent d'un même point , & leurs élémens sont de petits triangles , dont chacun est compris entre deux ordonnées infiniment proches , & a pour base une partie infiniment petite de la courbe.

Il faut distinguer deux cas.

Il y a des courbes qui peuvent appartenir aux deux cas , comme sont le cercle , l'ellipse & plusieurs autres semblables. Car en supposant dans un demi cercle & dans une demie ellipse les ordonnées infiniment proches perpendiculaires à l'axe , les élémens seront des rectangles ; & en concevant du centre dans le cercle & dans l'ellipse des rayons infiniment proches terminés à la courbe ; & encore dans l'ellipse concevant d'un des foyers des rayons tirés à l'ellipse , les élémens sont de petits secteurs. Cela posé.

Premier cas. En nommant les coupées AB , x , les ordonnées BC , y ; concevant une autre ordonnée bc infiniment proche de BC , la différence Bb (dx) de l'abscisse sera la largeur de $CBbc$ qui est l'élément de l'aire ACB ; l'ordonnée y sera la base de ce petit rectangle

1°. Courbes dont les ordonnées sont parallèles.

Figure 4.

Formule
pour ce cas.

$\Rightarrow$ par conséquent $y dx$. Donc nommant l'aire entière ACB, E , on aura $dE = y dx$. C'est la formule pour le premier cas.

2°. Courbes
dont les or-
données par-
tent du même
point.

Figure 5.

Second cas. Supposant que tous les rayons partent du même point B , les deux rayons BC, Bc étant tirés infiniment proches, formeront le petit triangle CBc qui est l'élément de l'aire de la courbe. Tirons du centre B avec le rayon BE un petit arc $Cd = dz$, qu'on pourra prendre pour une petite perpendiculaire menée du sommet C sur la base Bc (t) du petit triangle CBc , il est évident que $Cd \times \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} t dz$ fera l'expression du petit triangle CBc ; nommant donc ϵ l'aire entière, on a $d\epsilon = \frac{1}{2} t dz$ pour la formule du second cas.

Formule
pour ce se-
cond cas.

Usage de la premiere Formule $dE = y dx$.

Usage des
deux formu-
les précéden-
tes.

Par le moyen de l'équation de la courbe dont on cherche l'aire, il faut prendre la valeur de y en x , ou celle de x en y , substituer cette valeur dans la formule précédente, en sorte qu'elle ne contienne qu'une seule inconnue avec sa différence. On aura alors l'élément de la courbe laquelle est quarrable, si la différentielle qui exprime cet élément est intégrable.

Usage de la seconde Formule $d\epsilon = \frac{1}{2} t dz$.

Si on prend l'origine de x & de y , au point C ; on aura BC ou $t = \sqrt{xx + yy}$; & $dz = \sqrt{du^2 - dt^2}$; or $du^2 =$ (Article xci.) $dx^2 + dy^2$; donc $dz = \sqrt{dx^2 + dy^2 - dt^2}$. Donc mettant pour y sa valeur en x ,
on

on aura la valeur de z , en x , celle de dz en dx , & celle de $\frac{1}{2} z dz$, en x & en dx .

XCIV.

Par cette méthode on construit la Table suivante.

T A B L E des élémens de l'aire du Cercle & des
Sections coniques, qui se rapportent à la
Formule $g x^m dx . (a + b x^n)^p$.

C E R C L E.	E L L I P S E.	H Y P E R B O L E.
Quand l'origine des coordonnées est au centre du cercle.	1°. D'un secteur d'Ellipse, les coordonnées ayant leur origine au sommet de l'axe.	Lorsque l'origine des coordonnées est au centre de la courbe.
1°. D'un segment de cercle $dx (rr - xx)^{\frac{1}{2}}$.	$2a^{-\frac{1}{2}} dx . (2apx - pxx)^{\frac{1}{2}}$.	1°. D'un segment d'hyperbole équilatère par rapport à son premier axe $dx . (xx - aa)^{\frac{1}{2}}$.
2°. D'un secteur de cercle $rr dx . (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$.	2°. D'un secteur d'Ellipse, les coordonnées ayant leur origine au centre de la courbe.	2°. De la même par rapport à son second axe. $dx . (xx + aa)^{\frac{1}{2}}$.
Lorsque l'origine des coordonnées est au sommet de l'axe.	$\frac{1}{2} aap dx . (2a^3 p - 2apxx)^{-\frac{1}{2}}$.	3°. D'un segment d'hyperbole non équilatère par rapport au premier axe . $2a^{-\frac{1}{2}} dx . (pxx - aap)^{\frac{1}{2}}$.
3°. D'un segment de cercle $dx . (2rx - xx)^{\frac{1}{2}}$.		4°. De la même par rapport à son second axe. $2b^{-\frac{1}{2}} dx . (\pi xx + \pi bb)^{\frac{1}{2}}$.
4°. D'un secteur de cercle $\frac{rr dx . (2rx - xx)^{-\frac{1}{2}}}{2}$.		5°. D'un secteur d'hyperbole équilatère pour le premier axe $\frac{1}{2} a a dx . (xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$.
P A R A B O L E.		6°. Par rapport au second axe . $\frac{1}{2} a a dx . (aa + xx)^{-\frac{1}{2}}$.
L'élément de l'aire de cette courbe est $dx . (px)^{\frac{1}{2}}$, dont on fait (Art. II.) que l'intégrale est $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$. Donc la Parabole est quadrable.		7°. D'un secteur d'hyperbole non équilatère pour le premier axe . . . $\frac{1}{2} aap dx . (2apxx - 2a^3 p)^{-\frac{1}{2}}$.
		8°. Par rapport au second axe. $\frac{1}{2} bb \pi dx . (2b^3 \pi + 2b \pi xx)^{-\frac{1}{2}}$.
		9°. D'un quadrilatère hyperbolique par rapport à l'asymptote $dx . (1 \pm x)^{-1}$.
		Lorsque les coordonnées ont leur origine au sommet.
		10°. D'un segment hyperbolique. $dx . (\frac{apx + pxx}{a})^{\frac{1}{2}}$.
		11°. D'un secteur hyperbolique. $\frac{adx . (ax + 4xx)^{-\frac{1}{2}}}{4}$.

C O R O L L A I R E.

L'élément de la rectification de la parabole est, comme on l'a vu dans la Table précédente, $\frac{dx}{2} \sqrt{px+4xx}$: multipliant haut & bas cette différentielle par $\sqrt{px+4xx}$, j'ai $\frac{px dx + 4xx dx}{2x \sqrt{(px+4xx)}} = \frac{p dx + 2x dx}{2 \sqrt{(px+4xx)}}$, dont l'intégrale est $\frac{\sqrt{(px+4xx)}}{2} + \int \frac{p dx}{4 \sqrt{(px+4xx)}}$. Or cette dernière différentielle dépend de la quadrature d'un secteur hyperbolique dans lequel les coordonnées ont leur origine au sommet ; donc la rectification de la parabole & la quadrature de l'hyperbole sont la même chose.

X C V.

Observation
sur les Tables
précédentes.

REMARQUE. On remarquera dans ces éléments plusieurs sortes de différentielles : les unes qui n'ont la changeante x qu'au second terme du binôme sous le signe, sont toutes réduites à la différentielle générale $g x^m dx$. $(a + b x^n)^p$.

Les autres contiennent la changeante x , au premier terme de la grandeur sous le signe, & ont besoin de préparation pour être ramenées à l'expression générale de notre formule. Nous avons appris (Article LXIV.) à faire cette préparation.

Toutes ces choses entendues, nous allons faire voir l'usage des formules (Δ) & (x) pour connoître les différentielles dont les intégrales deviennent finies en supposant

les quadratures ou les rectifications des sections coniques, & pour trouver ces intégrales.

Application des Formules (Δ) & (x) de la seconde partie de la Méthode.

X C V I.

Pour avoir la différentielle la plus simple dont l'intégrale dépend de la rectification supposée d'un arc de cercle, marquée par (α) $\int r dx \times (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$, il faut supposer que dans la formule (Δ) (A) $\int g x^{m-n} dx \cdot (a + bx^n)^p$ est (α) $\int r dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$; mettre au lieu de g, a, b, n, p , leurs valeurs prises de (α), & ne laisser d'indéterminée que m , on aura (A) $= r x^{m-2} dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$; $m - 2 = 0$ nous donnera $m = 2$. Il faut mettre à présent dans la différentielle générale $g x^m dx \cdot (a + bx^n)^p$, les valeurs de toutes les lettres indéterminées, & on aura $\int r x^2 dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$ pour la différentielle la plus simple que donne la formule (Δ) dont l'intégrale dépend de la rectification supposée $\int r x^0 dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$.

1°. De la formule (Δ).

Premier exemple.

Pour trouver à présent l'intégrale finie de la différentielle $r x^2 dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$, il faut substituer dans le terme (1) & (A) de la formule (Δ) les valeurs des lettres indéterminées prises de $r x^2 dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$: $g = r$, $m = 2$, $n = 2$, $a = rr$, $b = -1$, $p = -\frac{1}{2}$; on a donc $\int r x^2 dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} r x^1 (rr - xx)^{\frac{1}{2}} +$

Q ji

$\frac{1}{2} r r \int r dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$. C'est l'intégrale de $rx^2 dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$.

XCVII.

Second
exemple.

Pour avoir la différentielle plus composée d'un degré que la précédente, & dont l'intégrale finie dépend de la même rectification supposée d'un arc de circonférence, il faut supposer dans la formule (Δ) (B) $\int g x^{m-2n} dx \cdot (a + bx^n)^2 = \int r x^0 dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$; & faisant les mêmes opérations que dans le précédent exemple, on trouvera que $m=4$, & que la différentielle qui suit la plus simple, dont l'intégrale finie dépend de la même rectification, est $rx^4 dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$; effaçant le terme (A) de la formule (Δ) & mettant dans les termes 1, 2, B les valeurs des lettres indéterminées prises de $rx^4 dx (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$, on trouvera sans peine que son intégrale finie est $-\frac{1}{4} rx^3 \cdot (rr - xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8} r^3 x^2 \cdot (rr - xx)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{3}{8} r^4 \int r dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$.

XC VIII.

Et en général, il est évident, 1°. que si on met dans $g x^m dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$ successivement 2, 4, 6 & les autres nombres pairs positifs à la place de m , on aura de suite toutes les différentielles que peut donner la formule (Δ), dont les intégrales finies dépendent de la rectification supposée donnée d'un arc de circonférence marqué par $\int r dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$.

2°. Qu'on aura l'intégrale de chacune en prenant autant de termes d'intégrales de la formule (Δ), que 2 se trouve de fois dans le nombre pair qu'on prend pour m , prenant de plus le terme qui les suit immédiatement & qui est marqué par l'une des lettres A , B , &c. avec son coefficient ; & enfin substituant dans tous ces termes les valeurs des indéterminées, prises dans $rx^m dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$, où au lieu de m on aura mis le nombre pair donné.

Ce fera la même chose, quand $m = 0$.

X C I X.

2°. Application de la formule (X).

Si on vouloit, avec le Pere Reyneau, se servir de la seconde formule (x) de cette partie de la méthode, comme on a fait de la première (Δ), on trouveroit en mettant successivement dans $rx^m dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$, au lieu de m les nombres pairs négatifs -2 , -4 , -6 , &c. toutes les différentielles que peut donner cette formule (Δ) ; & on seroit porté à croire, comme le P. Reyneau l'a cru, que ces intégrales dépendroient de la rectification supposée donnée d'un arc de cercle exprimé par $\int r dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$.

Mais en suivant cette méthode sans restriction, on courroit risque de tomber dans l'erreur. Nous allons faire quelques réflexions qui apprendront à s'en garantir.

Défaut de la seconde partie de la méthode précédente.



CHAPITRE VIII.

Examen des différentielles qui, suivant la seconde partie de la Méthode des Binomes, dépendent de la rectification, ou de la quadrature du Cercle.

C.

$x^m dx$. $(rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$, m étant un nombre pair négatif, est intégrable absolument. **L**A Méthode précédente nous laisse croire que les différentielles représentées par $x^m dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$, m étant un nombre pair positif ou négatif, dépendent toutes de la rectification supposée donnée d'un arc de cercle.

Cependant lorsque dans la quantité précédente m est un nombre pair négatif, ces différentielles ne dépendent point de la rectification du cercle, mais elles sont intégrables absolument.

Démonstration de cette proposition.

DÉM. Pour le prouver, soit $m = -2f$ (f est un nombre entier positif quelconque), on a $gx^m dx \cdot (rr - xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{g dx}{x^{2f} \sqrt{rr - xx}}$. Je fais suivant la transformation enseignée

(Art. XLIII.) $x = \frac{rr}{u}$; j'aurai $dx = -\frac{rr du}{u^2}$, $x^{2f} = \frac{r^{4f}}{u^{2f}}$, $\sqrt{rr - xx} = \sqrt{rr - \frac{r^2}{u}} = \frac{r}{u} \sqrt{uu - rr}$; & par

conséquent on a $\frac{g dx}{x^{2f} \sqrt{rr - xx}} = -\frac{grr}{uu} du \times \frac{u^{2f}}{r^{4f}} \left\{ \frac{u}{r \sqrt{uu - rr}} \right\} = -\frac{g u^{2f-1} du}{r^{4f-1} \sqrt{uu - rr}}$, quantité qui est

absolument intégrable. Car en la rapportant à la formule (↓), on a $m = 2f - 1$

$$n = 2$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

donc $\frac{m+1}{n} = f$; or f est un nombre entier positif, donc (Art. LXXIX.) cette quantité est intégrable absolument.

C I.

On peut encore s'en assurer autrement. Pour cela il n'y a qu'à se servir de notre première transformation. $\left\{ \frac{g}{r^{4f-1}} \right.$ Autre manière de s'en assurer.

étant des constantes, nous pouvons les laisser un instant pour rendre le calcul plus simple } : Afin de faire sur $\frac{u^{2f-1} du}{\sqrt{uu-rr}}$ la première transformation, je la prépare ainsi :

$\frac{u^{2f-1} du}{\sqrt{uu-rr}} = \frac{u^{2f-2+1} du}{\sqrt{uu-rr}} = \frac{u^{2f-2} \times u du}{\sqrt{uu-rr}}$ (on sentira aisément l'esprit de cette préparation, en réfléchissant sur les opérations que demande notre première transformation.)

Soit à présent $uu-rr = zz$, on a $uu = zz + rr$; $u^{2(f-1)} = (zz + rr)^{f-1}$, & $\sqrt{uu-rr} = z$. D'ailleurs $z dz = u du$: donc la transformée est $(zz + rr)^{f-1} dz$, qui est aisément intégrable par la règle fondamentale (Art. XI.) en élevant $zz + rr$ à la puissance $f - 1$, & multipliant chaque terme par dz .

C I I.

Mais afin qu'il ne reste aucune difficulté sur cette proposition, nous allons concilier une contradiction apparente Contradiction apparente.

qui pourroit embarrasser les commençans dans la pratique de la méthode précédente.

En effet si on jette les yeux sur la formule (7) de l'Art. LXXV. on trouve l'intégrale de $gx^m dx \cdot (a+bx^n)^p$ exprimée en cette sorte.

$$\int gx^m dx \cdot (a+bx^n)^p = \frac{1}{m+1} \times \frac{g}{a} x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1} \\ - \left\{ \frac{m+1+np+n}{m+1} \right\} \frac{bg}{a} \int gx^{m+n} dx \cdot (a+bx^n)^p - \&c.$$

Lorsque $a = rr$,

$$b = -1.$$

$$n = 2$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$\& \dots \dots \dots m = -2f$$

qui est le cas de notre différentielle $\frac{dx}{x^{2f}\sqrt{rr-xx}}$, cette

intégrale devient celle-ci : $\int \frac{g dx}{x^{2f}\sqrt{rr-xx}} = \frac{1}{-2f+1} \times \frac{g}{rr} \\ x^{-2f+1} \cdot (rr-xx)^{\frac{1}{2}} - \left\{ \frac{-2f+1}{-2f+1} \right\} - \frac{g}{rr} \int \frac{gx^{-2f+2} dx}{\sqrt{rr-xx}}.$

Si $f=1$, ce qui rend $\frac{g dx}{x^{2f}\sqrt{rr-xx}} = \frac{g dx}{x^2\sqrt{rr-xx}}$, la

quantité $\int \frac{gx^{-2f+2} dx}{\sqrt{rr-xx}}$ devient $\int \frac{g dx}{\sqrt{rr-xx}}$ qui, comme nous l'avons vu, dépend de la rectification du cercle. L'intégrale entière de $\frac{g dx}{x^2\sqrt{rr-xx}}$ paroît donc dépendre de cette rectification, ce qui feroit contraire à ce que nous venons de dire.

CIII.

Maniere
de lever cette
contradiction.

Mais il faut observer qu'alors le coefficient $\frac{-2f+2}{-2f+1}$ qui multiplie

multiplie $\int \frac{g x^{-2f+2} dx}{\sqrt{rr-xx}}$ devient $= 0$, de façon que toute cette quantité s'évanouit : on a donc l'intégrale complète de $\frac{g dx}{x^2 \sqrt{rr-xx}}$ exprimée en cette sorte $\frac{-g}{rrx} \sqrt{rr-xx}$.

En effet, si on prend suivant les regles ordinaires la différentielle de $\frac{-g}{rrx} \sqrt{rr-xx}$, on trouvera que c'est précisément $\frac{g dx}{x^2 \sqrt{rr-xx}}$.

Ainsi cette quantité différentielle ne dépend point de la rectification du cercle, parce que les intégrales liées avec cette rectification, que l'intégrale de $\frac{g dx}{x^2 \sqrt{rr-xx}}$ paroît renfermer, sont multipliées par un coefficient qui est égal à zéro ; elles disparaissent par conséquent dans cette intégrale qui reste finie, exacte & indépendante de la rectification du cercle.

C I V.

Si on se sert de la méthode précédente du P. Reyneau pour trouver les quantités différentielles qui se rapportent à la quadrature du cercle exprimée par $\int dx \sqrt{rr-xx}$, on trouvera sans peine que toutes les quantités $x^m dx \sqrt{rr-xx}$, & $\frac{dx \sqrt{rr-xx}}{x^m}$, dans lesquelles m est un Examen 1°. des quantités qui se rapportent à la quadrature du cercle exprimée par $\int dx \sqrt{rr-xx}$. nombre entier positif, se rapportent à cette quadrature. Examinons les cas dans lesquels cette méthode nous induiroit en erreur.

1°. Pour les quantités $x^m dx \sqrt{rr-xx}$, il n'y a aucune difficulté, Car on a $x^m dx \sqrt{rr-xx} = \frac{x^m dx (rr-xx)}{\sqrt{rr-xx}}$

R

$= \frac{rr x^m dx}{\sqrt{rr-xx}} - \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{rr-xx}}$ dont les deux parties dépendent de la rectification ou de la quadrature du cercle (Art. xcviij.)

2°. A l'égard des quantités $\frac{dx \sqrt{rr-xx}}{x^m}$, on a $\frac{dx \sqrt{rr-xx}}{x^m}$
 $= \frac{dx (rr-xx)}{x^m \sqrt{rr-xx}} = \frac{rr dx}{x^m \sqrt{rr-xx}} - \frac{dx}{x^{m-2} \sqrt{rr-xx}}$, dont la première partie est intégrable absolument, ainsi que nous l'avons prouvé (Art. c.) & la seconde partie l'est aussi, à moins que m ne soit $= 2$, auquel cas elle devient $\frac{-dx}{\sqrt{rr-xx}}$ qui dépend de la quadrature du cercle. D'où il suit que de toutes les quantités $\frac{dx \sqrt{rr-xx}}{x^m}$ il n'y a que la seule différentielle $x^{-2} dx \sqrt{rr-xx}$ dont l'intégration dépende de la quadrature du cercle; toutes les autres sont absolument intégrables.

C V.

3°. Des différentielles dépendantes de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-xx}}$.

Suivant la même méthode si on cherche les quantités dont l'intégration est liée avec la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-xx}}$, on trouvera :

1°. Que les quantités $\frac{x^{f+\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a-x}}$ se rapportent à cette quadrature, si f est un nombre entier positif. En effet, si on prend $\frac{zz}{a} = x$, on aura après les substitutions & transformations ordinaires $\frac{x^{f+\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a-x}} = \frac{z \cdot z^{2f+2} dz}{a^{f+1} \sqrt{a-zz}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{aa-zz}}$
 $= \frac{z \cdot z^{2f+2} dz}{a^{f+1} \sqrt{aa-zz}}$ qui dépend de la quadrature du cercle (Art. xcviij.).

2°. On croiroit aussi à la première vue, que les différentielles $\frac{dx}{x^{f+\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}}$ dépendent de cette quadrature.

Mais si on rapporte ces quantités avec la différentielle générale $gx^m dx \cdot (a+bx^n)^p$, on trouvera

$$n = 1$$

$$m = -f - \frac{1}{2}$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc} \dots \dots \dots \frac{m+1}{-n} - p = \frac{f+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}}{1} = f.$$

Mais f est ici un nombre entier positif. Or par la formule (°) quand $\frac{m+1}{-n} - p$ est égal à un nombre entier positif, la différentielle est absolument intégrable. Donc les quantités $\frac{dx}{x^{f+\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}}$ paroissent en même temps intégrables & dépendantes de la quadrature du cercle.

Pour lever cette contradiction, soit $x = \frac{zz}{a}$, on a Solution d'une contradiction apparente.
 $\frac{dx}{x^{f+\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}} = \frac{2zdz}{a} \times \frac{a^f \sqrt{a}}{z^{2f+1}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{aa-zz}} = \frac{2a^f dz}{z^{2f}\sqrt{aa-zz}}$
 quantité que nous venons de démontrer (Art. C.) être absolument intégrable.

C V I.

Il y a encore quelques différentielles qui se rapportent à la quadrature du cercle. Par exemple, $\frac{r r dx}{x \sqrt{xx-rr}}$ est l'élément d'un arc de cercle dont r est le rayon & x la sécante. ;°. Des différentielles dont l'intégrale dépend de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{r r dx}{x \sqrt{xx-rr}}$.

En suivant toujours la méthode du P. Reyneau on trouveroit que les quantités $\frac{x^m dx}{\sqrt{(xx-rr)}}$ & $\frac{dx}{x^m \sqrt{(xx-rr)}}$ dans
R ij

lesquelles m est un nombre impair positif, se rapportent à la différentielle $\frac{rr dx}{x \sqrt{xx-rr}}$ & dépendent par conséquent de la quadrature du cercle.

1°. Les quantités $\frac{x^m dx}{\sqrt{xx-rr}}$, lorsque m est un nombre impair positif, sont absolument intégrables par la formule (†) de la première partie de la méthode; puisque dans ce cas $\frac{m+1}{2}$ est égal à un nombre entier positif.

2°. Pour ce qui regarde les quantités $\frac{dx}{x^m \sqrt{xx-rr}}$, soit $x = \frac{rr}{z}$, on a $\frac{dx}{x^m \sqrt{xx-rr}} = \frac{-rr dz}{z z} \times \frac{z^m}{r^{2m}} \times \frac{z}{r \sqrt{rr-zz}} = \frac{-z^{m-1} dz}{r^{2m-1} \sqrt{rr-zz}}$, différentielle qui dépend (Art. xcvi.) de la quadrature du cercle, à cause que $m-1$ est un nombre pair positif.

C VII.

4°. Enfin On trouveroit enfin que les différentielles $\frac{x^m dx}{rr+xx}$, & des différentielles dépendantes de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{rr dx}{rr+xx}$, dans lesquelles m est un nombre pair positif, se rapportent à la différentielle $\frac{rr dx}{rr+xx}$ que l'on peut voir (Probl. 2. Art. xciii.) être l'élément d'un arc de cercle dont r est le rayon & x la tangente. Mais on peut encore s'assurer d'une autre manière, que ces quantités dépendent de la quadrature du cercle.

1°. Pour réduire les quantités $\frac{x^m dx}{rr+xx}$ à la quadrature du cercle, je fais $rr+xx=zz$, & j'ai après les substitutions ordinaires $\frac{x^m dx}{rr+xx} = \frac{(zz-rr)^{\frac{m}{2}} z dz}{zz \sqrt{zz-rr}}$ qui dépend

évidemment de la quadrature du cercle. Car soit , par

exemple , $m = 2$, on a $\frac{(zz - rr)^{\frac{m}{2}} z dz}{z^2 \sqrt{zz - rr}} = \frac{z dz}{\sqrt{zz - rr}} - \frac{rr dz}{z \sqrt{zz - rr}}$ dont la premiere partie s'integre tout de suite

par la regle fondamentale , son intégrale étant $\sqrt{zz - rr}$, & dont la seconde partie dépend de la quadrature du cercle , ainsi que nous venons de le voir dans l'article précédent.

2°. A l'égard des quantités $\frac{dx}{x^m \cdot (rr + xx)}$, si on fait $\frac{1}{x} = z$, après avoir pratiqué les différentes substitutions que donne cette transformation , on les changera en $\frac{-z^m dz}{rr(zz + rr)}$ qui dépend de la quadrature du cercle , comme on vient de le remarquer.

CVIII.

COROLLAIRE 1. De tout ce que nous venons de dire dans les articles précédens , il s'ensuit qu'il ne faut employer la seconde partie de la méthode des binomes qu'avec précaution. Lorsque cette méthode donne quelques différentielles qui se rapportent à la quadrature ou à la rectification d'une courbe , pour s'assurer qu'elle n'induit point en erreur , il faut comparer la différentielle proposée avec les formules (↓) & (ω) de la premiere partie de cette même méthode , & voir par le moyen des remarques que nous venons de faire , si son intégrale prise en suivant ces formules n'est pas finie & exacte. On remarquera aussi la grande facilité que donnent pour toutes ces opérations

Reflexion importante sur l'usage qu'on doit faire de ce qui précède.

les transformations que nous avons détaillées dans le Chapitre second, par l'usage continuel que nous en avons fait dans celui-ci. Il est bon d'observer encore la maniere dont quelquefois nous préparons les quantités pour démêler plus aisément ce qu'elles sont, & les rendre plus susceptibles du calcul.

C I X.

COROLLAIRE 2. Il n'est pas difficile d'appliquer la théorie précédente aux différentielles qui supposent la quadrature ou la rectification de l'hyperbole ou des autres sections coniques. Nous verrons plus bas en parlant des différentielles logarithmiques & exponentielles, & des fractions rationnelles, d'autres différentielles qui dépendent de la quadrature du cercle & de l'hyperbole. Nous traiterons aussi séparément des différentielles qui se rapportent à la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole.

C X.

COROLLAIRE 3. La différentielle $\frac{x^\theta dx}{1 \pm x}$ dépend de $\frac{dx}{1 \pm x}$, θ étant un nombre entier positif ou négatif. Cette proposition peut se prouver de la même maniere que les précédentes. Mais nous ne nous arrêterons pas à développer ici ce cas qui dépend de la quadrature de l'hyperbole. Nous le traiterons plus bas à l'article des fractions rationnelles. Passons aux différentielles trinomes.



C H A P I T R E I X.

Application de la Méthode des Binomes aux différentielles trinomes représentées par la formule

$$g x^m dx . (a + b x^n + c x^{2n})^p \text{ ou } \\ g x^{m+2np} dx . (c + b x^{-n} + a x^{-2n})^p .$$

C X I.

Soit d'abord pris la première forme de la formule dans laquelle les exposans de la changeante sous le signe sont positifs, on se conduira à peu près de la même façon que pour les binomes. On multipliera la partie hors du signe par x^q , & on divisera par la même quantité la partie sous le signe : cette opération donnera $g x^m dx .$

1°. Pour les différentielles qui s'intègrent algébriquement.

Le procédé est à peu près le même que pour les binomes.

$(a + b x^n + c x^{2n})^p = g x^{m+q} dx . (a x^{-\frac{q}{p}} + b x^{n-\frac{q}{p}} + c x^{2n-\frac{q}{p}})^p$. Ensuite l'on déterminera la valeur de q , en supposant $m + q = -\frac{q}{p} - 1$ & non pas $m + q = 2n - \frac{q}{p} - 1$, ni $m + q = n - \frac{q}{p} - 1$. Car ces deux dernières suppositions pourroient former quelque embarras.

Celle de $m + q = -\frac{q}{p} - 1$ donne $q = -\frac{m p - p}{p + 1}$, & substituant cette valeur de q dans l'équation précédente,

elle devient $g x^m dx . (a + b x^n + c x^{2n})^p = g x^{\frac{m-p}{p+1}} dx .$
 $\left\{ a x^{\frac{m+1}{p+1}} + b x^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + c x^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}} \right\}^p$

A présent je suppose $z = ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}}$, je prends les valeurs de z^p , de dz , &c. je fais les mêmes substitutions que dans les binomes, & je trouve d'abord :

$$\int g x^m dx \cdot (a + b x^n + c x^{2n})^p = \left\{ \frac{1}{m+1} \right\} \times \frac{1}{a} \cdot$$

Premier terme de l'intégrale.

$$g x^{m+1} \times (a + b x^n + c x^{2n})^{p+1} - \left\{ \frac{m+1+np+n}{m+1} \right\} \times \frac{b}{a} \int g x^{m+n} dx \times (a + b x^n + c x^{2n})^p -$$

A

$$\left\{ \frac{m+1+2np+2n}{m+1} \right\} \times \frac{c}{a} \int g x^{m+2n} dx \times (a + b x^n + c x^{2n})^p.$$

B

Or dans cette expression j'ai déjà le premier terme de la serie qui est la formule générale de l'intégrale des différentielles trinomes : j'ai de plus le moyen de trouver de suite tous les autres termes par de simples substitutions,

CXII.

Ainsi si je veux avoir le second terme, je substitue dans le premier terme $m+n$ à la place de m dans A & dans B & leurs coefficients : il me vient par ces substitutions trois quantités que je multiplie par le coefficient de A . Cette opération me donne le second terme de l'intégrale.

Second terme de l'intégrale.

$$- \left\{ \frac{(m+1+np+n) \times 1}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \right\} \frac{b}{a} g x^{m+1+n} \times (a + b x^n + c x^{2n})^{p+1} + \left\{ \frac{(m+1+np+n) \cdot (m+1+np+n)}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \right\} \times \frac{bb}{aa} \int g x$$

$$\int g x^{m+2n} dx \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p + \frac{(m+1+np+n)}{m+1} \cdot$$

$$\left\{ \frac{m+1+2np+3n}{m+1+n} \right\} \times \frac{bc}{aa} \int g x^{m+3n} dx \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p$$

CXIII.

Je passe au troisieme terme. Pour le trouver je n'en fais qu'un seul de B & de C, en réduisant le coefficient de B au dénominateur de C, ce qui donnera

$$= \left\{ \frac{(m+1+2np+2n) \cdot (m+1+n)}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \times \frac{ac}{aa} + \right.$$

$$\left. \frac{(m+1+np+n) \cdot (m+1+np+2n)}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \times \frac{bb}{aa} \right\} \times \int g x^{m+2n}$$

$dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p$. Je substitue maintenant dans le premier terme dans A & B, $m+2n$ à la place de m dans les exposans & les coefficients: puis je multiplie les trois quantités que cette opération me donne par le coefficient de E; on aura en nommant pour abreger k le coefficient de E.

Troisieme terme de l'intégrale.

$$k \cdot \left\{ \frac{1}{m+1+2n} \right\} \frac{1}{a} \times g x^{m+1+2n} \times (a+bx^n+cx^{2n})^{p+1}$$

$$= k \cdot \left\{ \frac{m+1+np+3n}{m+1+2n} \right\} \times \frac{b}{a} \int g x^{m+3n} dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p$$

$$= k \cdot \left\{ \frac{m+1+2np+4n}{m+1+2n} \right\} \times \frac{c}{a} \int g x^{m+4n} dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p$$

& ainsi de suite pour le quatrieme, cinquieme, &c. termes de cette serie.

CXIV.

La même méthode nous donnera une formule pour la seconde forme de la formule des différentielles trinomes dans laquelle les exposans de n sont négatifs.

CXV.

1°. Pour les différentielles trinomes dépendantes de la quadrature ou de la rectification des sections coniques.

Nous avons vu comment on trouvoit les intégrales des différentielles binomes qui dépendent de la quadrature ou de la rectification des sections coniques ; on trouvera par la même méthode les intégrales des différentielles trinomes qui peuvent aussi s'y rapporter. Nous ne nous y arrêterons pas ici. Nous nous contenterons d'observer que de même que l'intégrale d'une différentielle binome se trouve en supposant celle d'une différentielle du même ordre , l'intégrale d'une trinome se trouvera en supposant celle de deux ; l'intégrale d'une quatinome se trouvera en supposant celle de trois , & ainsi de suite.

CXVI.

On formeroit de même des formules pour les différentielles qui ont quatre , cinq , &c. tant de termes qu'on voudra avec les conditions précédentes. Les lecteurs sont à présent en état de les former eux-mêmes ; ils n'auront d'autre difficulté à essuyer que la longueur du calcul.



C H A P I T R E X.

Regles du Calcul intégral des fractions rationnelles.

C X V I I.

A Vant d'entrer dans la théorie du Calcul intégral des fractions rationnelles, il faut se rappeler ce que nous avons trouvé (Introduction Art. XVIII.) que la différence du logarithme d'une quantité, est la différentielle de cette quantité, divisée par la quantité même : d'où il suit que *l'intégrale d'une différentielle logarithmique, est le logarithme de la quantité qui la divise.*

Regle générale pour trouver l'intégrale des différentielles logarithmiques.

Ainsi l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ est $lx + P$; & si cette intégrale devient nulle, lorsque x est égale à une quantité constante, a par exemple, on aura $lx = la$, donc $P = -la$.
Donc alors $\int \frac{dx}{x} = lx - la = l \frac{x}{a}$.

Application à des exemples.

En suivant la même règle on trouvera $\int \frac{dx}{1+x} = -lx = (\text{Art. IV.}) l \frac{1}{1+x}$ & $\int \frac{dx}{1-x} = -l \frac{1}{1-x} = l \frac{1}{1+x}$.

C X V I I I.

En général toutes les fois que le numérateur d'une fraction est la différentielle même du dénominateur, ou multiple ou sous-multiple de cette différentielle, l'intégrale sera le logarithme du dénominateur ou un multiple ou un sous-multiple.

Sij

Ainsi l'intégrale de $\frac{\pm 2x dx}{aa \pm xx}$ est $l(aa \pm xx)$; celle de $\frac{\pm 3x^2 dx}{a^3 \pm x^3}$ est $l(a^3 \pm x^3)$. De même $\int \frac{4x dx}{aa + xx} = 2l(aa + xx)$, c'est-à-dire $= l(aa + xx)^2$. $\int \frac{x dx}{aa + xx} = \frac{1}{2}l(aa + xx)$ ou $l(aa + xx)^{\frac{1}{2}}$. Enfin $\int \frac{\pm m x^{n-1} dx}{a^n \pm x^n} = \pm \frac{m}{n} l(a^n \pm x^n) = \pm l(a^n \pm x^n)^{\frac{m}{n}}$.

CXIX.

Addition de
la constante
pour comple-
ter l'intégra-
le.

AVERTISSEMENT. On doit se souvenir qu'en intégrant les différentielles logarithmiques, il faut quelquefois ajouter une constante à l'intégrale trouvée pour la rendre complète. Cette constante se déterminera par la méthode que nous avons donné (Chap. III.) pour les différentielles ordinaires.

CXX.

SCHOLIE. Il y a des cas dans lesquels l'intégrale des différentielles logarithmiques ne se présente pas aussi facilement que celle des précédentes : souvent même on a besoin d'art & de préparation pour reconnoître qu'une différentielle est logarithmique. Nous allons traiter de ces cas en donnant les méthodes par lesquelles on integre les fractions rationnelles.

CXXI.

Définition
des fractions
rationnelles.

On entend par fraction rationnelle, celle dont le numérateur & le dénominateur sont des quantités sans radicaux.

Telles sont, par exemple, celles-ci $\frac{b dx + c x dx}{a x^3 + g x^2 + h x + f}$ & $\frac{x dx}{x x + 2 b x + a a}$.

CXXII.

Les plus simples des fractions rationnelles sont celles dont le dénominateur est x , ensuite celles dont le dénominateur est $x + a$: nous avons vu plus haut comment on les intègre ; enfin celles dont le dénominateur est $xx + fx + g$: soit que les racines soient réelles ou imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires. Nous donnerons dans la suite des méthodes pour intégrer ces dernières.

CXXIII.

La difficulté se réduit aux cas où la plus haute puissance du numérateur est moindre que celle du dénominateur : car lorsque l'exposant est plus petit dans le dénominateur, on peut faire la division jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste qui soit dans le premier cas.

En supposant cette division faite, soit ce reste représenté par $\frac{p}{q} dx$, M. Bernoulli a donné dans les Mémoires de l'Académie 1702, p. 289, une méthode pour intégrer ces fractions rationnelles. Nous allons d'abord la rapporter telle que nous l'a donnée ce grand Géometre. Nous ajouterons ensuite ce qui est nécessaire pour qu'elle ait la plus grande généralité possible.

Exposition
de la méthode
de M. Ber-
noulli pour
les intégrer.

CXXIV.

PROBLEME I. Intégrer les différentielles $\frac{p}{q} dx$ dans lesquelles p & q expriment des quantités rationnelles composées

comme on voudra d'une seule variable x & de constantes ; ou du moins les réduire à la quadrature de l'hyperbole ou du cercle , l'un ou l'autre étant toujours possible.

SOLUTION. Soit p divisé par q , jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste plus petit que q ; cette opération réduit la différentielle en deux parties , dont la première fera le quotient commensurable venu de la division , & la seconde fera le reste de la division , chacune multipliée par dx . Il est évident qu'on peut toujours trouver l'intégrale de la première partie , puisque ce quotient ne contiendra dans ses différens termes que des puissances de x sans aucune fraction. Il ne s'agit donc que de trouver l'intégrale du reste qu'on suppose représenté par $\frac{r}{q} dx$ (si r & q avoient quelque diviseur commun , il faudroit pour abréger les diviser par ce diviseur.)

Je suppose $\frac{r}{q} dx = \frac{a dx}{x+f} + \frac{b dx}{x+g} + \frac{c dx}{x+h} + \&c.$ c'est-à-dire , $\frac{r}{q} dx$ égale à autant de différentielles logarithmiques que la plus grande dimension de x dans q a d'unités ; a, b, c , de même que f, g, h , sont des constantes indéterminées , telles que $x+f, x+g, x+h$ &c. soient les racines du dénominateur.

Pour avoir les valeurs de ces constantes indéterminées , il faut réduire la somme $\frac{a dx}{x+f} + \frac{b dx}{x+g} + \frac{c dx}{x+h}$ à un dénominateur commun le plus petit qu'il soit possible , & il est évident que la plus haute dimension de x fera la même dans le dénominateur de cette somme & dans q ; & si la plus haute dimension de x dans le numérateur surpassoit

celle de x dans r , il faudroit supposer les termes qui manquent dans r chacun multipliés par zéro. Par cette opération le numérateur & le dénominateur de la somme auront le même nombre de termes que $\frac{r}{q} dx$. Cela fait, il faut égaler entr'eux les termes correspondans tant des numérateurs que des dénominateurs de la proposée & de la somme, ce qui donnera autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés a, b , &c. Car pour les coefficients f, g, h , ils seront connus en remarquant que ces coefficients sont les racines du dénominateur, & en déterminant ces racines à l'ordinaire par les regles que donne la Géométrie pour résoudre les équations : nous en parlerons même plus au long dans la suite. A présent il faut substituer ces valeurs à la place des indéterminées dans $\frac{adx}{x+f} + \frac{bdx}{x+g} + \&c.$ & elles deviendront les différentielles logarithmiques dont on a besoin.

On fait (Art. CXVII.) que $\frac{dx}{x+f} + \frac{dx}{x+g} + \frac{dx}{x+h}$ sont les différentielles des logarithmes de $x+f, x+g, x+h$. Ainsi $\int \frac{dx}{x+f} + \int \frac{dx}{x+g} + \int \frac{dx}{x+h} = l(x+f) + l(x+g) + l(x+h)$. Donc $\int \frac{adx}{x+f} + \frac{bdx}{x+g} + \frac{cdx}{x+h} = a \times l(x+f) + b \times l(x+g) + c \times l(x+h) =$ (Art. VII. Introd.) $l \overline{x+f}^a + l \overline{x+g}^b + l \overline{x+h}^c$. Donc parce que la somme des logarithmes de plusieurs grandeurs est égale au seul logarithme du produit de ces grandeurs, on a $\int \frac{r}{q} dx = l(\overline{x+f}^a \times \overline{x+g}^b \times \overline{x+h}^c)$.

CXXV.

COROLLAIRE. On voit par-là comment les équations différentielles rationnelles, ou qui par les transformations du Chap. III. peuvent devenir rationnelles, se réduisent à des équations exponentielles & quelquefois purement algébriques. En effet si on suppose $\frac{s dx}{t} = \frac{\sigma dy}{\theta}$, équation dont chaque membre est une différentielle semblable à celle dont on vient d'enseigner à trouver l'intégrale, mais dont le premier ne contient que la changeante x , & le second la changeante y , on peut en trouvant l'intégrale de chaque membre par la méthode précédente, réduire cette équation en une autre purement logarithmique. En effet, soit pris X & Y pour ce que les quotiens qui résultent de la division de s par t , & de σ par θ , ont d'absolument intégrable, c'est-à-dire pour les intégrales de ce que ces quotiens ont d'absolu & sans fraction, on aura en suivant ce qui est dit ci-dessus, $X + \int \overline{x+f}^a \times \overline{x+g}^b \times \overline{x+h}^c$
 $= Y + \int \overline{y+\varphi}^a \times \overline{y+\gamma}^c \times \overline{y+\lambda}^z$ &c. Si on prend à présent l'unité par laquelle on conçoit que X & Y sont multipliés, pour un logarithme constant $= \ln$, la réduction des logarithmes aux puissances donnera (Art. 29 & 30 Introduction) cette équation exponentielle $n^X \times \overline{x+f}^a \times \overline{x+g}^b \times \overline{x+h}^c = n^Y \times \overline{y+\varphi}^a \times \overline{y+\gamma}^c \times \overline{y+\lambda}^z$ qui est l'équation exponentielle à laquelle se réduit la proposée. Or cette équation peut quelquefois devenir purement algébrique,

algébrique, par exemple, lorsque X & Y sont nuls, & que a, b, c , aussi-bien que α, ϵ, x sont commensurables.

C X X V I.

Voilà la méthode telle que nous l'a donné M. Bernoulli. Examen de la méthode de M. Bernoulli.
 A examiner cette méthode en elle-même, on voit qu'elle n'apprend à intégrer les fractions rationnelles qu'en les réduisant à des logarithmes réels ou imaginaires. Or il est évident qu'il doit y avoir une infinité de fractions rationnelles différentielles qui sont intégrables absolument, d'autres qui sont en partie intégrables absolument, & en partie intégrables par logarithmes. En effet, prenez une fraction rationnelle finie telle que $\frac{1}{x+a}$, sa différentielle $\frac{-dx}{(x+a)^2}$ est intégrable absolument. De même soit prise la différence de $\frac{1}{x+a} + l(x+b)$, on aura $\frac{xxdx + 2axdx - xdx - bdx + aadx}{(x+a)^2 \times (x+b)}$, différentielle en partie intégrable absolument & en partie intégrable par logarithmes. Défauts de cette méthode.

D'où l'on voit en général qu'il peut y avoir plusieurs cas qui ne sauroient être résolus par la méthode de M. Bernoulli, au moins si on l'emploie de la façon que cet illustre Géometre l'a prescrit. Pour mieux nous en convaincre, & suppléer en même temps à ce qui lui manque, faisons la remarque suivante.

C X X V I I.

REMARQUE. Il faut distinguer trois cas dans l'intégration de toute fraction rationnelle. Car le dénominateur de la

T

Trois cas à distinguer dans l'intégration des fractions rationnelles.

fraction rationnelle peut avoir ses racines toutes réelles ou toutes imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires. Examinons ces trois cas séparément.

CXXVIII.

Premier cas
où le déno-
minateur a ses
racines toutes
réelles.

Dans le premier cas, lorsque le dénominateur a ses racines toutes réelles, elles peuvent être toutes égales, ou toutes inégales, ou en partie égales & en partie inégales.

1°. Racines
réelles éga-
les.

1°. Lorsqu'elles sont toutes égales, par exemple, quand on a $\frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{dx}{(x+a) \cdot (x+a)}$, suivant la méthode précédente, on fera $\frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{mdx}{x+a} + \frac{ndx}{x+a}$; en réduisant les deux membres de cette équation au même dénomina-

Inconvénient
de la métho-
de de M. Ber-
noulli dans
ce cas.

teur, on a $\frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{(m+n)xdx}{(x+a)^2} + (m+n) \times \frac{adx}{(x+a)^2}$. Donc en comparant les termes correspondans, $m+n=0$ & $ma+na=1$, ce qui se contredit.

On trouveroit la même contradiction si on représentoit les racines égales par x^m , ou par $(x+a)^m$. Il est donc évident que la méthode de M. Bernoulli ne peut servir, lorsque les racines du numérateur sont toutes réelles & égales. Il est aisé d'en substituer une autre.

CXXIX.

Car de ce que nous avons dit (Art. VII.) il suit que lorsque le dénominateur de la fraction est simplement x^m , la fraction a une intégrale exacte, & de même lorsque ce dénominateur est $(x+a)^m$, on en trouve aisément l'intégration exacte par notre première transformation; à

moins que dans l'un & l'autre cas la plus haute puissance de x dans le numérateur ne fût $m - 1$: car alors il y auroit une partie de la fraction intégrable par logarithmes. Quelquefois même la fraction entière seroit intégrable par logarithmes, comme $\frac{xxdx + 2axdx + aadx}{(x+a)^3}$ qui se réduit à cette différentielle logarithmique $\frac{dx}{x+a}$.

C X X X.

2°. Lorsque les racines du dénominateur sont toutes réelles inégales, qui nous assurera que la méthode précédente ne donne pas la même contradiction que ci-dessus? Il faut donc avoir recours à une autre méthode pour ne pas marcher en tâtonnant.

2°. Racines réelles inégales.

C X X X I.

3°. Soit proposé d'intégrer $\frac{dx}{x^2 \cdot (x+a)}$: suivant la méthode de M. Bernoulli on supposera $\frac{dx}{x^2 \cdot (x+a)} = \frac{f dx}{x} + \frac{g dx}{x+a} + \frac{h dx}{x+a}$, ce qui donnera en comparant ensemble les deux membres de cette équation :

3°. Racines réelles en partie égales & en partie inégales.

$$\left. \begin{array}{l} fxx + fax \\ + gxx + gax \\ + hxx \end{array} \right\} = 1. \text{ Donc } \left. \begin{array}{l} fxx + fax \\ + gxx + gax \\ + hxx \end{array} \right\} - 1 = 0;$$

d'où l'on tire 1°. $fxx + gxx + hxx = 0$, c'est-à-dire $f + g + h = 0$; 2°. $fax + gax = 0$, c'est-à-dire $f + g = 0$; 3°. $-1 = 0$, ce qui est absurde. On trouvera la même difficulté si on veut intégrer par la méthode de M. Bernoulli $\frac{dx}{(x+a)^2 \times (x+b)}$. Voilà donc le même

La méthode de M. Bernoulli est encore défectueuse dans ce cas.

T ij

inconvenient que dans le cas des racines réelles toutes égales.

CXXXII.

Nous allons faire voir d'abord que dans le cas des racines réelles toutes inégales, il est toujours possible de trouver chaque coefficient; nous ferons voir ensuite ce qu'il faut faire dans le cas des racines réelles, en partie égales, & en partie inégales, & enfin nous donnerons la méthode pour trouver les coefficients des numérateurs dans tous les cas.

CXXXIII.

Exposition
d'une autre
méthode pour
le cas des ra-
cines réelles
inégales.

PROBLEME 2. Intégrer une fraction rationnelle différentielle dont le dénominateur a toutes ses racines réelles inégales.

SOLUTION. Soit $\frac{p x^{m-n} dx \dots + q dx}{(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \cdot (x+e) \&c. (m)}$ la fraction dont on cherche l'intégrale. (La quantité m mise ici & ailleurs entre deux parenthèses, au bout du dénominateur, marque l'exposant de la dimension du dénominateur ou le nombre de ses racines). En supposant $x+a=y$, on a $x=y-a$: mettant à la place de x sa valeur, on aura la transformée suivante, $\frac{(p y^{m-n} \dots + g) dy}{y \cdot (y-a+b) \cdot (y-a+c) \cdot (y-a+e) \&c. (m)}$ dans laquelle on remarquera qu'aucun des diviseurs du dénominateur, excepté le premier, ne peut se réduire à y , puisque par l'hypothèse a, b, c, e , sont des quantités différentes. Je remarque maintenant que la transformée

$$\begin{aligned} & \frac{(py^{m-n} \dots + r) dy}{y \cdot (y-a+b) \cdot (y-a+c) \cdot (y-a+e) \&c. (m)} = \\ & \frac{(py^{m-n-1} \dots + Q) dy}{(y-a+b) \cdot (y-a+c) \cdot (y-a+e, \&c. (m-1))} + \\ & \frac{g dy}{y \cdot (y-a+b) \cdot (y-a+c) \cdot (y-a+e, \&c. (m))}. \end{aligned}$$

Le premier membre de cette quantité a déjà, comme on voit, un facteur de moins à son dénominateur. Pour mettre le second membre dans le même cas je fais $\frac{1}{y} = u$, & ce second membre devient

$$\begin{aligned} & \frac{-g du}{uu \cdot \frac{1}{u} \left\{ \frac{1-au+bu}{u} \right\} \cdot \left\{ \frac{1-au+cu}{u} \right\} \cdot \left\{ \frac{1-au+eu}{u} \right\} (m)} \\ & = \frac{-gu^{m-2} du}{(b-a) \cdot (c-a) \cdot (e-a) \&c.} \\ & = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{b-a} + u \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{c-a} + u \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{e-a} + u \right\} \&c. (m-1)} \end{aligned}$$

CXXXIV.

Il est donc évident que par cette méthode on transforme la différentielle donnée en deux autres dont le dénominateur de chacune a un exposant moindre d'une unité que celui de la fraction proposée, & qu'ainsi pour intégrer une fraction rationnelle quelconque dont les facteurs du dénominateur sont des quantités réelles & inégales, il ne faut que savoir intégrer la fraction précédente; c'est-à-dire celle dont le dénominateur a une dimension & par conséquent un facteur de moins; allant toujours ainsi en remontant de fraction en fraction, il est visible qu'on réduira l'intégration d'une fraction rationnelle quelconque dont le dénominateur

a ses racines réelles & inégales , à celle de la fraction simple $\frac{n dx}{x+a}$. Donc puisque cette différentielle est une différentielle logarithmique , il s'ensuit que toute fraction rationnelle dont le dénominateur n'a que des racines réelles & inégales peut toujours être intégrée par logarithmes.

C X X V.

COROLLAIRE. Par la méthode que nous venons d'exposer dans le Problème précédent , il est clair que l'intégration de $\frac{n dx}{x+a}$ donne très-promptement celle de $\frac{f x dx + g dx}{(x+a) \cdot (x+b)}$: celle-ci donne de même celle de $\frac{f x^2 dx + g x dx + h dx}{(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c)}$. Il est donc facile de former par ce moyen une table pour l'intégration de toutes les fractions rationnelles dont le dénominateur a ses racines réelles & inégales.

Pour intégrer une fraction rationnelle particulière la méthode de M. Bernoulli paroîtra plus courte , mais celle que nous exposons ici a deux usages : 1°. elle donne très-promptement une table qui dans le besoin seroit très-commode ; 2°. on peut , ce semble , par son moyen démontrer très-clairement la méthode de M. Bernoulli.

Effectivement nous avons déjà vu que toutes les fractions rationnelles dont le dénominateur a ses racines réelles & inégales sont intégrables par logarithmes ; mais il reste à prouver que ces fractions peuvent être réduites en autant de différentielles logarithmiques que leur dénominateur a de facteurs différens. C'est ce que M. Bernoulli s'est

contenté de supposer sans le prouver, & la preuve néanmoins en paroît d'autant plus nécessaire, qu'on a vu des exemples auxquels la méthode de cet illustre Géometre ne doit être appliquée qu'avec précaution.

C X X X V I. \.

Pour faire cette démonstration nous nous contenterons d'un exemple. Soit $\frac{fx dx + g dx}{(x+a) \cdot (x+b)}$ la quantité à intégrer : faisant par la méthode du Problème précédent $x + a = z$, elle se réduit à $\frac{f dz}{z-a+b} - \frac{(-fa+g) dz}{z \cdot (z-a+b)}$ dont on voit que le premier membre a déjà un facteur de moins. J'opere sur le second, je fais $\frac{a}{z} = u$, donc $z = \frac{a}{u}$, & $dz = -\frac{a du}{u^2}$. Substituant pour z & dz ces valeurs en u &

Démonstration de la méthode de M. Bernoulli.

$$\begin{aligned} du, \text{ le second membre devient } & \frac{(fa-g) \cdot \frac{a du}{u^2}}{\frac{a}{u} \cdot \left\{ \frac{a}{u} - a + b \right\}} = \\ & \frac{(fa-g) \frac{a du}{u^2}}{\frac{a}{u} - \frac{a^2 + aab}{u}} , \text{ \& en divisant haut \& bas par } aa, = \\ & \frac{(fa-g) \frac{du}{u^2}}{\frac{aa}{u^2} - \frac{a+b}{u}} =, \text{ en multipliant haut \& bas par } uu, \\ & \frac{(fa-g) du}{aa + (b-a)u} , \text{ \& enfin en divisant le numérateur \& le } \\ & \text{dénominateur par } b-a, \text{ cette différentielle se réduit à } \\ & \frac{(fa-g) du}{\frac{aa}{b-a} + u} , \text{ laquelle quantité a, comme on voit, un facteur} \end{aligned}$$

de moins que plus haut. La fraction entiere réduite est donc $\frac{f dz}{z-a+b} + \frac{(fa-g) du}{\frac{aa}{b-a} + u}$ dont l'intégrale est $f l(z -$

$a+b) + \frac{f a - g}{b-a} l \left\{ \frac{a a}{b-a} + u \right\} = \left\{ \text{en mettant pour } z \right.$
 $\& \text{ pour } u \text{ leurs valeurs } x+a \& \frac{a a}{x+a} \left. \right\} f l(x+b) +$
 $\frac{f a - g}{b-a} l(x+b) \times \frac{a a}{(x+a) \cdot (b-a)}.$ Or la différence de

cette intégrale est $\int \frac{f a - g}{b-a} \cdot \frac{d x}{x+b} - \frac{f a + g}{b-a} \times \frac{d x}{x+a}.$

Donc la différentielle $\frac{f x d x + g d x}{(x+a) \cdot (x+b)}$ peut être représentée
 par $\frac{p d x}{x+a} + \frac{q d x}{x+b}.$ Il est évident par la nature de notre

méthode, que la démonstration que nous venons de donner
 pour la différentielle simple $\frac{f x d x + g d x}{(x+a) \cdot (x+b)}$ s'appliquera
 aisément à toutes les autres différentielles plus composées.

Donc &c.

CXXXVII.

A présent je passe au cas où les racines du dénominateur
 étant toutes réelles, sont en partie égales & en partie
 inégales.

Application
 de notre der-
 nière métho-
 de au cas des
 racines réel-
 les en partie
 égales & en
 partie inéga-
 les.

Ce cas peut être représenté par $\frac{d x}{x^m \cdot (x+a) \cdot (x+b) \&c.},$
 ou $\frac{d x}{(x+a)^m \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c.},$ car cette dernière diffé-
 rentielle se réduit à la première par la simple transforma-
 tion de $x+a$ en $z.$

CXXXVIII.

PROBLEME 3. Intégrer une fraction rationnelle diffé-
 rentielle comme $\frac{(A x^p \dots + Q) d x}{x^m \cdot (x+a) \cdot (x+b) \&c.}$ ou
 $\frac{(A x^p \dots + Q) d x}{(x+a)^m \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c.}$ dont le dénominateur a ses
 racines réelles en partie égales & en partie inégales.

SOLUTION. Si la proposée est $\frac{(A x^p \dots + Q) \cdot d x}{(x+a)^m \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c.}$
 on

on la ramène au simple cas de $\frac{(Ax^p \dots + Q) dx}{x^m \cdot (x+a) \cdot (x+b) \&c.}$ par la seule transformation de $x+a$ en z , de sorte que toute la difficulté se réduit à trouver l'intégrale de cette dernière quantité.

Pour y parvenir on divisera le numérateur par x^m tant qu'il sera possible de le faire, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on arrive à un reste où l'exposant de x soit plus petit que m , & la proposée deviendra par conséquent égale à

$$\frac{(Ax^{p-m} \dots + K) dx}{(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c. (n)} + \frac{(Hx^{m-1} \dots + Q) dx}{x^m \cdot (x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c. (m+n)},$$

ou en général à cause que H peut être $= 0$,

$$\frac{(Ax^{p-m} \dots + K) dx}{(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c. (n)} + \frac{(Lx^r \dots + S) dx}{x^m \cdot (x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c. (m+n)}$$

où l'on observera que $r < m$. Soit maintenant $\frac{1}{x} = u$,

on aura $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$: substituons ces valeurs

de x & de dx dans le second membre : (car le premier dans lequel les racines sont toutes inégales, s'intègre aisément par les articles précédens :) ce second membre de-

$$\text{viendra } \frac{(Su^r \dots + L) - du}{uu \cdot u \cdot \frac{1}{u^m} \times \frac{(1+au) \cdot (1+bu) \cdot (1+cu) \&c.}{u^n}} =$$

$$\frac{(-Su^{r+2} \dots - L) u^{m+n} du}{u^{r+2} \cdot (1+au) \cdot (1+bu) \cdot (1+cu) \&c. (n)} ; \text{ or à cause}$$

que (hyp.) $m > r$ & que n est au moins $= 1$, il s'enfuit que u^{m+n} se divise par u^{r+2} & que la quantité

entière se réduit à $\frac{(-Su^{m+n-2} \dots - Lu^{m+n-r-2}) du}{(1+bu) \cdot (1+cu) \cdot (1+au) \&c. (n)}$ où

la plus haute dimension du dénominateur est n , & $m+n-2$ celle du numérateur. Or $m+n-2$ est au moins $= n$, puisque m est au moins $= 2$: donc le numérateur

peut se diviser par le dénominateur, ce qui produira un quotient intégrable. Donc la proposée peut être intégrée en partie.

CXXXIX.

COROLLAIRE 1. Il est évident qu'il y a autant de termes dans le quotient qu'il y a d'unités dans $(m+n-2) - (n) + 1 = m-1$; desorte que la différentielle donnée peut être représentée dans son entier par

$$\begin{aligned} & \frac{(Ax^{p-m} \dots + K) dx}{(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c. (n)} + Fu^{m-2} du + \dots \\ & + Gdu + \frac{(Mu^{n-1} \dots + P) du}{(1+au) \cdot (1+bu) \cdot (1+cu) \&c.}, \text{ ou en mettant} \\ & \text{pour } u \text{ la valeur } \frac{x}{x+a}, \frac{(Ax^{p-m} \dots + K) dx}{(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \&c. (n)} - \\ & \frac{Fdx}{x^m} - \frac{Qdx}{x^{m-1}} \dots - \frac{Gdx}{xx} + \frac{Sdu}{1+au} + \frac{Rdu}{1+bu} \&c. \\ & = \frac{Bdx}{x+a} + \frac{Cdx}{x+b} + \frac{Ddx}{x+c} \&c. - \frac{Fdx}{x^m} \dots - \frac{Gdx}{xx} - \\ & \frac{Sdx}{x \cdot (x+a)} - \frac{Rdx}{x \cdot (x+b)} \&c. \& \text{ à cause que } \frac{Sdx}{x \cdot (x+a)} + \\ & \frac{Rdx}{x \cdot (x+b)} = (\text{Art. CXXXV.}) \frac{Odx}{x} + \frac{Vdx}{x+b} \&c. \text{ il s'enfuit} \\ & \text{que la différentielle proposée peut être représentée par} \\ & - \frac{Odx}{x} - \frac{Gdx}{xx} \dots - \frac{Fdx}{x^m} \dots + \frac{Edx}{x+a} + \\ & \frac{Ldx}{x+b} + \frac{Ndx}{x+c} \&c. \text{ ou plus simplement enfin par} \\ & \frac{(-Ox^{m-1} - Gx^{m-2} \dots - F) dx}{x^m} + \frac{Edx}{x+a} + \frac{Ldx}{x+b} + \frac{Ndx}{x+c} \&c. \end{aligned}$$

CXL.

COROLLAIRE 2. Donc si on veut intégrer la fraction $\frac{dx}{x^2 \cdot (x+a)}$ par notre dernière méthode, on supposera $\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
 &= u, \text{ \& elle se changera en } \frac{-u du}{1+au} = -\frac{\frac{u du}{a}}{\frac{1}{a}+u} = \\
 &= -\frac{\frac{u du}{a}}{\frac{1}{a}+u} - \frac{\frac{1}{a} du}{\frac{1}{a}+u} + \frac{\frac{1}{a} du}{\frac{1}{a}+u} = -\frac{du}{a} \times \left\{ \frac{u + \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+u} \right\} \\
 &+ \frac{\frac{1}{a} du}{\frac{1}{a}+u} = -\frac{du}{a} + \frac{\frac{1}{a} du}{\frac{1}{a}+u} \text{ dont l'intégrale est } -\frac{u}{a} \\
 &+ \int \frac{\frac{1}{a} du}{\frac{1}{a}+u} = -\frac{u}{a} + \frac{1}{a} \int \frac{du}{\frac{1}{a}+u}. \text{ Mais si on}
 \end{aligned}$$

veut se servir de la méthode de M. Bernoulli, il faudra sup-
 poser $\frac{dx}{x(x+a)} = \frac{A dx}{x+a} + \frac{B dx}{x}$; on déterminera
 les coefficients de la manière que nous enseignerons bien-tôt;
 ensuite on intégrera.

C X L I.

COROLLAIRE 3. Il suit de ce qui a été dit dans le
 Problème & dans ses Corollaires, que la fraction est en
 partie intégrable absolument & en partie intégrable par
 logarithmes, lorsque le dénominateur a ses racines en
 partie égales & en partie inégales. Ceci peut servir d'éclair-
 cissement à un endroit du Traité de la quadrature des
 Courbes de M. Newton, où ce grand Géometre s'exprime
 ainsi : *Si ordinata est fractio rationalis irreducibilis cum deno-*
minatore ex duobus vel pluribus terminis composito, resolvendus
est denominator in divisores suos omnes primos; & si divisor sit
aliquis cui nullus alius est æqualis, curva quadrari nequit.

Explication
 d'un passage
 de Newton.

En effet nous venons de voir que quand les racines sont en partie égales & en partie inégales , ou quand elles sont toutes inégales , l'intégration dépend des logarithmes ou de la quadrature de l'hyperbole , & que par conséquent si la différentielle proposée représente l'élément de l'aire d'une courbe , cette courbe ne sera point quarrable absolument.

CXLII.

COROLLAIRE 4. Si la proposée est

$$\frac{(Ax^p \dots + K) dx}{(x+a)^m \cdot (x+b)^n \cdot (x+c) \cdot (x+e) \&c.}, \text{ on pourra prendre}$$

$$\frac{(Fx^{m-1} \dots + G) dx}{(x+a)^m} + \frac{(Qx^{n-1} \dots + P) dx}{(x+b)^n} + \frac{R dx}{x+c} + \frac{S dx}{x+e} + \&c.$$

ou

$$\frac{(Bx^{m+n-1} \dots + D) dx}{(x+a)^m \cdot (x+b)^n} + \frac{R dx}{x+c} + \frac{S dx}{x+e} + \&c.$$

pour la différentielle qui doit représenter la proposée. On déterminera les coefficients par la méthode de l'article CL. que nous donnerons plus bas. Voyons à présent ce qu'il faut faire pour trouver dans chaque cas la valeur des coefficients du numérateur. Nous supposons dans le Problème suivant sur la détermination des coefficients du numérateur , la fraction débarrassée de dx , il est aisé de la remettre après l'opération.

CXLIII.

Exposition
de la méthode
de M. Cotes
pour détermi-
ner les coeffi-
ciens du nu-
mérateur des
fractions ra-
tionnelles.

PROBLEME 4. Déterminer les coefficients des numérateurs des fractions simples dans lesquelles se décompose une fraction rationnelle dans le cas où les racines du dénominateur sont toutes réelles & inégales.

SOLUTION. Soit cette fraction rationnelle représentée par $\frac{x^\theta}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 + \dots + Ux^\lambda}$ l'exposant θ est supposé moindre que λ , & L, M, N &c. sont des quantités données.

1°. Lorsque les racines du dénominateur sont réelles & toutes inégales.

Je suppose $L + Mx + Nx^2 + Px^3 + \dots + Ux^\lambda = 0$: je cherche les racines de cette équation qui dans le cas précédent sont inégales. Soient ces racines représentées par $e + fx = 0, g + hx = 0, k + lx = 0$ &c. on aura donc $L + Mx + Nx^2 + Px^3 + \dots + Ux^\lambda = \overline{e + fx} \cdot \overline{g + hx} \cdot \overline{k + lx}$ &c. Je suppose ensuite

$$\frac{x^\theta}{\overline{e + fx} \cdot \overline{g + hx} \cdot \overline{k + lx} \text{ \&c.}} = \frac{A}{e + fx} + \frac{B}{g + hx} + \frac{C}{k + lx} + \text{\&c.}$$

ce qui donnera, comme tout le monde fait, $x^\theta = A \times \overline{g + hx} \times \overline{k + lx} + B \times \overline{e + fx} \times \overline{k + lx} + C \times \overline{e + fx} \times \overline{g + hx} + \text{\&c.}$ Pour abréger soit $\overline{g + hx} \times \overline{k + lx} = Q$; $\overline{e + fx} \times \overline{k + lx} = R$; $\overline{e + fx} \times \overline{g + hx} = S$, & $L + Mx + Nx^2 + Px^3 + \dots + Ux^\lambda = K$; on aura $x^\theta = AQ + BR + CS + \text{\&c.}$ mais la supposition de $e + fx = 0$, donne $x = -\frac{e}{f}$; $x^\theta = -\frac{e^\theta}{f^\theta}$; &

$R = 0$; $S = 0$; d'où l'on tire dans ce cas $-\frac{e^\theta}{f^\theta} = AQ$ & $A = -\frac{e^\theta}{f^\theta Q}$. Mais $\overline{e + fx} \times Q = K$; prenant les

différences de part & d'autre, K & Q étant variables, on a $f dx \times Q + dQ \times \overline{e + fx} = dK$: ou plutôt parce que $e + fx = 0$, on a $f dx \times Q = dK$, & ainsi $Q = \frac{dK}{f dx}$. Prenons à présent la différence de $L + Mx +$

$Nx^2 + Px^3 \dots + Ux^\lambda$, & mettons pour x la valeur

$$-\frac{e}{f}, \text{ nous aurons } Q = \frac{M - 2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \dots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}{f}.$$

Donc en mettant cette valeur dans l'équation $A = -\frac{e^\theta}{f^\theta}$,

$$-\frac{e^\theta}{f^\theta} \times f = \frac{e^\theta}{Q}$$

$$\text{on aura } A = \frac{-\frac{e^\theta}{f^\theta} \times f}{M - 2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \dots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}.$$

Pareillement si on suppose $g + hx = 0$, on aura $x = -\frac{g}{h}$; $x^\theta = -\frac{g^\theta}{h^\theta}$ & $Q = 0$ & $S = 0$: par conséquent $-\frac{g^\theta}{h^\theta} = BR$; & $B = -\frac{g^\theta}{h^\theta R}$. Mais puisque $K =$

$\overline{g + hx} \times R$, on aura $dK = h dx \times R + dR \times \overline{g + hx}$;
 & dans ce cas $dK = h dx \times R$; ce qui donne $R = \frac{dK}{h dx}$,
 d'où l'on tire $R = \frac{M - 2N \times \frac{g}{h} + 3P \times \frac{gg}{hh} \dots - \lambda U \times \frac{g^{\lambda-1}}{h^{\lambda-1}}}{h}$

& par conséquent à cause que $B = -\frac{g^\theta}{h^\theta R}$ on aura

$$-\frac{g^\theta}{h^\theta} \times h = \frac{g^\theta}{R}$$

$$B = \frac{-\frac{g^\theta}{h^\theta} \times h}{M - 2N \times \frac{g}{h} + 3P \times \frac{gg}{hh} \dots - \lambda U \times \frac{g^{\lambda-1}}{h^{\lambda-1}}}.$$

L'on trouvera de la même manière

$$C = \frac{-\frac{k^\theta}{l^\theta} \times l}{M - 2N \times \frac{k}{l} + 3P \times \frac{kk}{ll} \dots - \lambda U \times \frac{k^{\lambda-1}}{l^{\lambda-1}}}, \text{ \& ainsi}$$

des autres. Mettant donc ces valeurs de A, B, C &c. dans les numérateurs des fractions, les coefficients en sont déterminés. $C. Q. F. T.$

CXIV.

COROLLAIRE. Il est donc clair que puisque les valeurs de A, B, C , &c. sont toutes semblables, on peut avoir une règle générale pour déterminer les coefficients indéterminés des numérateurs des fractions dans lesquelles se résout, suivant la méthode de M. Bernoulli, une fraction rationnelle qui a ses racines réelles & inégales. Car on voit que la valeur d'une de ces indéterminées quelconques, de B par exemple, est une fraction dont le numérateur est égal à x^{θ} . multipliée par la fonction de x qui est dans le dénominateur de B ; & dont le dénominateur est égal à la différence du dénominateur de la fraction proposée divisée par dx , en mettant dans ce numérateur & ce dénominateur de la valeur de B , la valeur de x tirée de l'équation respective du dénominateur de B , égal à zéro. On doit observer que les numérateurs des valeurs de A, B, C , &c. ont le signe $+$, lorsque θ est un nombre pair en y comprenant le zéro; ils ont aussi ce même signe, lorsque les valeurs de x sont positives, par exemple si les diviseurs du dénominateur de la proposée étoient $e - fx, g - hx$ &c. car les valeurs de x feroient dans ce cas, comme on le voit aisément, $+\frac{e}{f}, +\frac{g}{h}$ &c. Aussi dans ce même cas le dénominateur de la proposée auroit cette forme

$L - Mx + Nx^2 - Px^3 + \&c.$ puisque toutes les racines étant positives, les termes doivent avoir successivement les signes $+$ & $-$ suivant les principes de la formation des équations, connus par tous les Algébristes.

CXLV.

Application
de cette mé-
thode à quel-
ques exem-
ples.

Premier
exemple.

Cette méthode se développera encore davantage en l'appliquant à quelques exemples. Soit la fraction $\frac{dx}{e+fx \times g+hx}$, changée suivant la méthode de M. Bernoulli en ces deux autres $\frac{A dx}{e+fx} + \frac{B dx}{g+hx}$; il s'agit de déterminer la valeur de A & de B . Je suppose d'abord qu'on ait $\frac{1}{(e+fx) \cdot (g+hx)} = \frac{A}{e+fx} + \frac{B}{g+hx}$, dans ce cas on a $x^0 = 1$, donc $e = 0$, & supposant $e+fx = 0$ on en tire $x = -\frac{e}{f}$; donc par la règle donnée dans le précédent Corollaire, le numérateur de la fraction égale à A est $-\frac{e^0}{f^0} \times f = f$, à cause que $e = 0$; & le dénominateur est égal à la différence de $(e+fx) \times (g+hx)$; cette différence est $fg dx + fhx dx + eh dx + fhx dx$; laquelle à cause de $e+fx = 0$, se réduit à $fg dx + fhx dx$. Je divise par dx , & je mets pour x la valeur $-\frac{e}{f}$. Cette différence devient $= fg - eh$. Donc on aura $A = \frac{f}{fg-eh}$.

De la même manière en supposant $g+hx = 0$, on trouvera $B = \frac{h}{eh-fg}$. Donc $\frac{1}{(e+fx) \cdot (g+hx)} = \frac{f}{fg-eh} \times \frac{1}{e+fx} - \frac{h}{fg-eh} \times \frac{1}{g+hx}$; donc $\frac{dx}{(e+fx) \cdot (g+hx)} = \frac{f dx}{e+fx} - \frac{h dx}{g+hx}$

x

• $\times \frac{1}{fg-eh} - \frac{h dx}{g+hx} \times \frac{1}{fg-eh}$, qu'on voit évidemment être deux différentielles logarithmiques. Pour être mieux convaincu de la bonté de la méthode, voyons si ces deux différentielles sont identiques avec la fraction proposée $\frac{dx}{(e+fx) \cdot (g+hx)}$. Ces deux différentielles sont $\frac{f dx}{(fg-eh) \cdot (e+fx)}$ - $\frac{(fg-eh) \cdot (g+hx)}{h dx}$. Je les réduis au même dénominateur, j'ai $\frac{fg dx + fhx dx - eh dx - fhx dx}{(fg-eh) \cdot (e+fx) \cdot (g+hx)} = \frac{(fg-eh) \cdot dx}{(fg-eh) \cdot (e+fx) \cdot (g+hx)}$ $= \frac{dx}{(e+fx) \cdot (g+hx)}$.

C X L V I.

Si l'on avoit à intégrer $\frac{xx dx}{ax^3 - bx^2 + cx - d}$, en supposant Second exemple. que les diviseurs du dénominateur soient $ex - f$, $gx - h$, $ix - l$, & que par conséquent $\frac{xx dx}{ax^3 - bx^2 + cx - d} = \frac{A dx}{ex - f} + \frac{B dx}{gx - h} + \frac{C dx}{ix - l}$; on trouvera $\theta = 2$, & la supposition de $ex - f = 0$ donnera $x = \frac{f}{e}$. Continuant l'opération comme dans l'exemple précédent, on aura la valeur de A . En supposant ensuite successivement $gx - h = 0$, & $ix - l = 0$, on trouvera les valeurs de B & de C : substituant ces valeurs dans les fractions simples énoncées ci-dessus, elles deviendront $\frac{ff}{3aff + 2bef + cee} \times \frac{e dx}{ex - f} + \frac{hh}{3ahh + 2bgh + cgg} \times \frac{g dx}{gx - h} + \frac{ll}{3all + 2bil + cii} \times \frac{i dx}{ix - l}$ qui sont trois différentielles logarithmiques.

C X L V I I.

Enfin si la fraction rationnelle avoit cette forme Troisième exemple. $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \dots + Ux^\lambda}$, (λ est plus grand que

l'exposant de x dans le numérateur), la méthode qu'on a donnée dans le Problème précédent serviroit encore pour résoudre cette fraction en plusieurs fractions simples $\frac{A}{e+fx} + \frac{B}{g+hx} + \frac{C}{k+lx} + \&c. (\lambda)$. Car supposant $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \dots + Ux^\lambda = (e+fx) \cdot (g+hx) \cdot (k+lx) \&c. = K$, donnant ici les mêmes valeurs que dans le Problème 4. à Q, R, S , on aura $a+bx+cx^2+dx^3+\&c. = AQ+BR+CS+\&c.$ & lorsque $e+fx=0$, ou $x=-\frac{e}{f}$, on a $a-b \times \frac{e}{f} + c \times \frac{ee}{ff} - d \times \frac{e^3}{f^3} + \&c. = AQ$: & puisque $Q = \frac{dK}{fdx} = \dots$

$$\frac{M-2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \dots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}{f} \text{ on aura } A =$$

$$\frac{a-b \times \frac{e}{f} + c \times \frac{e^2}{f^2} - d \times \frac{e^3}{f^3} + \&c.}{Q} = \frac{(a-b \times \frac{e}{f} + c \times \frac{ee}{ff} - d \times \frac{e^3}{f^3} + \&c.) \times f}{M-2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \dots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}$$

De la même manière en supposant $g+hx=0$, on trouvera la valeur de B , & celle de C en supposant $k+lx=0$; d'où l'on conclura que les valeurs de A, B, C , dans ce cas sont semblables à celles qu'on a trouvées dans le cas du Problème 4. La différence n'est que dans les numérateurs qui changent suivant les numérateurs des fractions proposées.

CXLVIII.

2°. Lorsque les racines du dénominateur sont en partie égales & en partie inégales.

PROBLEME 5. Déterminer les coefficients du numérateur des fractions simples dans lesquelles se résout une fraction rationnelle différentielle en supposant les racines.

du dénominateur en partie égales & en partie inégales.

SOLUTION. Soit cette fraction représentée par la

suivante $\frac{x^\theta}{(e+fx)^{\delta} \cdot (g+hx)^{\lambda} \cdot (k+lx)^{\mu} \&c.}$, (la somme des

quantités $\delta + \lambda + \mu + \&c.$ est censée plus grande que l'exposant θ). Supposons cette fraction égale à

$$\frac{A+Bx+Cx^2 \dots + Fx^{\delta-1}}{(e+fx)^{\delta}} + \frac{G+Hx+Ix^2 \dots + Mx^{\lambda-1}}{(g+hx)^{\lambda}} + \frac{N+Px+Qx^2 \dots + Tx^{\mu-1}}{(k+lx)^{\mu}} + \&c.$$

cette supposition donnera $x^\theta = (A+Bx+Cx^2 \dots + Fx^{\delta-1}) \times (g+hx)^{\lambda} \times (k+lx)^{\mu} + (G+Hx+Ix^2 \dots + Mx^{\lambda-1}) \times (e+fx)^{\delta} \times (k+lx)^{\mu} + (N+Px+Qx^2 \dots + Tx^{\mu-1}) \times (e+fx)^{\delta} \times (g+hx)^{\lambda} \&c.$

On égalera à zéro la somme de tous les termes qui sont multipliés par la grandeur x élevée à une autre puissance que θ , & on égalera à x^θ la somme des autres termes qui sont multipliés par x^θ . De cette manière on aura autant d'équations qu'il y a de quantités indéterminées $A, B, C \&c.$ dont on trouvera les valeurs par le moyen de ces équations.

Cette dernière méthode n'est autre chose que celle de M. Bernoulli appliquée à ce cas particulier, avec les précautions que nous avons indiquées ci-dessus, & qui empêchent cette méthode d'être fautive. On peut en effet s'assurer par les moyens que nous avons exposés plus haut, que les coefficients $A, B, C \&c.$ seront ou tous réels, ou tout au plus quelques-uns égaux à zéro ; & qu'ainsi on

pourra toujours les déterminer par la méthode de M. Bernoulli.

CXXIX.

Application
à un exem-
ple.

Soit proposé d'intégrer la fraction $\frac{xx dx}{(e+fx)^2 \cdot (g+hx)^2}$; je la suppose égale à $\frac{A dx + B x dx}{(e+fx)^2} + \frac{C dx + D x dx}{(g+hx)^2}$, ce qui donnera en pratiquant ce qui est prescrit dans le Problème précédent, & en ôtant dx qu'on remettra après l'opération,

$$xx = \begin{cases} Agg + 2Aghx + Ahhxx \\ + Bggx + 2Bghxx + Bhhx^2 \\ + Cee + 2Cefx + Cffxx \\ + Deex + 2Defxx + Dffx^2. \end{cases}$$

La seconde opération que nous avons dit qu'il falloit faire, c'est de supposer

$$Agg + Cee = 0$$

$$2Aghx + Bggx + 2Cefx + Deex = 0$$

$$Ahhxx + 2Bghxx + Cffxx + 2Defxx = xx$$

$$Bhhx^2 + Dffx^2 = 0.$$

Ensuite on résoudra ces quatre équations par les méthodes algébriques ordinaires ; leur résolution nous donnera les valeurs de A, B, C, D ; après quoi on intégrera aisément.

C L.

Cas où l'on
peut abréger
la méthode
du Problème
précédent.

REMARQUE. On peut quelquefois abréger la méthode du Problème précédent : par exemple, lorsque la fraction rationnelle différentielle a cette forme $\frac{x^\theta dx}{(e+fx) \cdot (g+hx)^\lambda}$.

Car supposant $\frac{x^\theta}{(e+fx) \cdot (g+hx)^\lambda} = \frac{A}{e+fx} + \frac{B+Cx+Dx^2 \dots + Gx^{\lambda-1}}{(g+hx)^\lambda}$, on aura $x^\theta = A \cdot (g+hx)^\lambda$

+ $(B+Cx+Dxx \dots + Gx^{\lambda-1}) \times (e+fx)$.

Mais la supposition de $e+fx=0$ donne $x^\theta = A$.

$(g+hx)^\lambda$; $x = -\frac{e}{f}$; $x^\theta = \pm \frac{e^\theta}{f^\theta}$: donc $\pm \frac{e^\theta}{f^\theta} =$

$A \times (g - \frac{he}{f})^\lambda$, & $A = \pm \frac{e^\theta}{f^\theta} \times f^\lambda$, en prenant le

signe +, lorsque $\theta = 0$, ou un nombre pair, & le signe — lorsque θ est un nombre impair.

La valeur de A étant ainsi trouvée, on aura facilement celles de B, C, D par la méthode du dernier Problème.

Car, comme on y a vu, on aura $Ag^\lambda + Be = 0$,

lorsque θ est un nombre entier positif; donc $B = -\frac{g^\lambda}{e} \times$

$A = \mp \frac{g^\lambda e^{\theta-1} f^{\lambda-\theta}}{(fg-eh)^\lambda}$. De même puisque ${}^\lambda g^{\lambda-1} hx$ est le

second terme de la quantité $g+hx$ élevée à la puissance λ ,

on aura ${}^\lambda g^{\lambda-1} hA + Bf + Ce = 0$, lorsque θ est plus

grand que l'unité, ou ${}^\lambda g^{\lambda-1} hA + Bf + Ce = 1$,

lorsque $\theta = 1$; on trouvera par cette équation la valeur

de C , & ainsi des autres.

CL I.

La fraction $\frac{a+bx+cx^2 \&c.}{(e+fx) \cdot (g+hx)^\lambda}$ se résoudra par la même méthode. Car on fera $\frac{a+bx+cx^2 \&c.}{(e+fx) \cdot (g+hx)^\lambda} = \frac{A}{e+fx} +$ Autre exemple.

$\frac{B + Cx + Dx^2 + \dots + Gx^{\lambda-1}}{(g + hx)^\lambda}$; ainsi on trouvera $A =$
 $\frac{af^\lambda - be f^{\lambda-1} + ce f^{\lambda-2} - \&c.}{(fg - eh)^\lambda}$. On aura ensuite $Ag^\lambda +$
 $Be = a$, ce qui donne $B = \frac{a - Ag^\lambda}{e}$ (en mettant pour
 A sa valeur) $\frac{a}{e} - \frac{af^\lambda g^\lambda + beg^\lambda f^{\lambda-1} - ceg^\lambda f^{\lambda-2} + \&c.}{e \times (fg - eh)^\lambda}$. On
trouvera de la même manière les valeurs de $C, D, \&c.$

CLII.

Il est visible que les termes les plus difficiles à intégrer
dans la fraction rationnelle ainsi transformée seront de cette
forme $\frac{Ax^m dx}{(x+B)^n}$. (A & B étant des constantes, & m, n
des nombres entiers positifs). Or ces termes peuvent
s'intégrer aisément soit en entier, soit par logarithmes
(Art. XVI.) en faisant $x + B = z$.

SCHOLIE. Par le moyen de ces règles pour déterminer
les coefficients des numérateurs des fractions rationnelles,
on peut se servir de la méthode de M. Bernoulli sans
craindre aucune erreur. Passons au cas des racines ima-
ginaires.

CLIII.

2°. Cas où le
dénominateur
a ses racines
imaginaires.

Inconvénient
de la méthode
de M. Ber-
noulli dans ce
cas.

Dans le cas où le dénominateur a ses racines toutes ima-
ginaires, si on suivoit la méthode de M. Bernoulli, on
auroit une expression chargée d'imaginaires aussi impossible
à construire sous cette forme que le seroit une équation du
troisième degré dans le cas irréductible, si on la construisoit

en suivant la forme de la racine. Il faut donc chercher par une autre voie l'intégration de ces quantités.

Prenons d'abord le cas le plus simple, lorsque le dénominateur a deux racines imaginaires.

CLIV.

PROBLEME 6. Intégrer une fraction rationnelle dont le dénominateur est le produit de deux racines imaginaires.

Dans ce cas on y substitue notre méthode du Problème 2.

SOLUTION. Soit la fraction représentée dans ce cas par $\frac{l dx + m x dx}{xx + fx + g}$. Je fais d'abord évanouir le second terme du dénominateur en supposant selon la règle connue par tous les Algébristes $x + \frac{f}{2} = z$, ce qui donne après les

$$\text{substitutions ordinaires } \frac{l dx + m x dx}{xx + fx + g} = \frac{l dz + m z dz - \frac{mf}{2} dz}{zz + \frac{ff}{4} + g}.$$

& en faisant $l - \frac{mf}{2} = n$ & (si g est $> \frac{ff}{4}$), $\frac{ff}{4} + g = pp$, cette quantité devient $\frac{n dz}{zz + pp} + \frac{m z dz}{zz + pp}$, dont la première partie est l'élément d'un arc de cercle dont z est la tangente, & la seconde est une différentielle logarithmique.

CLV.

REMARQUE 1. Quand $xx + fx + g$ est le produit de deux racines imaginaires, xx & g sont toujours de même signe; d'où il suit que s'ils sont tous deux négatifs, on peut leur donner à l'un & à l'autre le signe $+$ en changeant les signes haut & bas. Car si g avoit le signe $-$, on trouveroit les deux racines réelles.

CLVI.

REMARQUE 2. Lorsque xx n'est point délivré de coefficients, mais qu'il en a un, C par exemple, on divisera haut & bas par C . Ainsi on peut toujours supposer dans le cas des racines imaginaires que xx a le signe $+$, & est sans coefficients.

Il ne nous reste donc plus que deux choses à savoir, 1°. si on peut toujours représenter les racines imaginaires par des facteurs trinomes réels ; or nous avons démontré dans l'Introduction Art. LXXXII. que cela est toujours possible. 2°. Il faut trouver la méthode de déterminer les coefficients n & m du numérateur. Nous allons la donner dans le Problème suivant.

CLVII.

Usage de la méthode de M. Cotes dans le cas des racines imaginaires, pour déterminer les coefficients du numérateur.

PROBLEME 7. Déterminer les coefficients du numérateur des fractions partielles dans lesquelles se résout une fraction rationnelle, en supposant que les racines du dénominateur sont toutes imaginaires.

SOLUTION. Soit cette fraction rationnelle représentée par $\frac{x^\theta}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 + \dots + Ux^\lambda}$ (on suppose toujours $\theta < \lambda$) $= \frac{A + Bx}{a + bx + cxx} + \frac{C + Dx}{e + fx + gxx} + \frac{E + Fx}{h + kx + lxx}$. Soit pour abréger le calcul $\frac{e + fx + gxx}{a + bx + cxx} \times \frac{h + kx + lxx}{a + bx + cxx} = Q$; $\frac{a + bx + cxx}{e + fx + gxx} \times \frac{h + kx + lxx}{a + bx + cxx} = R$; $\frac{a + bx + cxx}{e + fx + gxx} = S$; on aura, comme dans les Problèmes précédens

précédens, $x^\theta = \overline{A + Bx} \times Q + \overline{C + Dx} \times R + \overline{E + Fx} \times S + \&c.$ Maintenant si on suppose $a + bx + cxx = 0$, on aura $R = 0$, $S = 0$, donc $x^\theta = \overline{A + Bx} \times Q$; & si les racines de l'équation $a + bx + cxx = 0$ sont $m + nx = 0$, $p + qx = 0$, on aura $x = -\frac{m}{n}$, & $x = -\frac{p}{q}$. Lorsque $x = -\frac{m}{n}$, on a $Q = \overline{e - f \times \frac{m}{n} + g \times \frac{m^2}{n^2} \times h - k \times \frac{m}{n} + l \times \frac{m^2}{n^2} \times \&c.}$ & lorsque $x = -\frac{p}{q}$, $Q = \overline{e - f \times \frac{p}{q} + g \times \frac{p^2}{q^2} \times h - k \times \frac{p}{q} + l \times \frac{p^2}{q^2} \times \&c.}$ Pour distinguer cette dernière valeur de Q de la première nous la marquerons par Q'' . Ainsi pour les deux différentes valeurs de x , l'équation $x^\theta = \overline{A + Bx} \times Q$ se résout dans les deux suivantes $-\frac{m^\theta}{n^\theta} = \overline{A - B \times \frac{m}{n} \times Q}$; & $-\frac{p^\theta}{q^\theta} = \overline{A - B \times \frac{p}{q} \times Q''}$; donc on a $A = -\frac{m^\theta}{n^\theta} + B \frac{m}{n}$ & $A = -\frac{p^\theta}{q^\theta} + B \frac{p}{q}$.

Comparant ces deux valeurs de A , on trouve celle de $B = \overline{Q' \times \frac{q m^{\theta-1}}{p n^{\theta-1}} - Q \times \frac{n p^{\theta-1}}{m q^{\theta-1}}}$. Prenant de même les

$\frac{q}{p} - \frac{n}{m} \times QQ'$
deux valeurs de B dans les deux équations $-\frac{m^\theta}{n^\theta} = \overline{A - B \times \frac{m}{n} \times Q}$, $-\frac{p^\theta}{q^\theta} = \overline{A - B \times \frac{p}{q} \times Q''}$, & comparant ensemble ces deux valeurs, on en tire $A = \overline{Q' \times \frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} - Q \times \frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}}}$. Ces valeurs supposent que θ est

un nombre impair : mais lorsque $\theta = 0$, ou un nombre pair, on aura alors les valeurs suivantes $A =$

$$Q \times \frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}} - Q' \times \frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} \quad \& \quad B = \frac{Q \times \frac{np^{\theta-1}}{mq^{\theta-1}} - Q' \times \frac{qm^{\theta-1}}{pn^{\theta-1}}}{\frac{q}{p} - \frac{n}{m} \times QQ'}$$

Pareillement en supposant $e + fx + gxx = 0$, on a $Q = 0$, $S = 0$, &c. & $x^\theta = \overline{C + Dx} \times R$; & si $r + sx = 0$, $t + vx = 0$ sont les racines de l'équation $e + fx + gxx = 0$, on aura $x = -\frac{r}{s}$, & $x = -\frac{t}{v}$, d'où par un calcul semblable à celui que nous venons de faire pour A & pour B , on trouvera $C =$

$$\frac{\pm R \times \frac{r^{\theta-1}}{v^{\theta-1}} \mp R' \times \frac{r^{\theta-1}}{s^{\theta-1}}}{\frac{v}{s} - \frac{s}{r} \times RR'} \quad \& \quad D = \frac{\pm R \times \frac{r^{\theta-1}}{rv^{\theta-1}} \mp R' \times \frac{vr^{\theta-1}}{rs^{\theta-1}}}{\frac{v}{s} - \frac{s}{r} \times RR''}$$

Il faut se servir des signes $+-$, lorsque θ est un nombre pair ou zéro, & des signes $-+$, lorsque c'est un nombre impair. On trouvera de même les valeurs de E , F , &c.

CLVIII.

COROLLAIRE 1. Si la fraction étoit $\frac{dx}{(e+fx+gxx)^d \cdot (h+kx+lsx)^\lambda}$ il la faudroit supposer égale à $\frac{(Rx^{2d-1} \dots + Q) \cdot dx}{(e+fx+gxx)^d} + \frac{(Sx^{2\lambda-1} \dots + P) \cdot dx}{(h+kx+lsx)^\lambda}$ & déterminer les coefficients par la méthode du Problème 5.

COROLLAIRE 2. Si la proposée étoit $\frac{dx}{(e+fx+gxx) \cdot (h+kx+lsx)^\lambda}$, on la feroit $= \frac{Adx + Bxdx}{e+fx+gxx} + \frac{C + Dx + Exx \dots + Hx^{\lambda-1}}{(h+kx+lsx)^\lambda}$,

& on détermineroit les coefficients comme on a fait dans la remarque qui suit le Problème 5.

C L I X.

La difficulté se réduit donc à savoir intégrer une fraction de cette forme $\frac{Ax^m dx}{(B + Cx + Fxx)^n}$; (A, B, C, F étant des coefficients quelconques, & m, n étant des nombres entiers positifs): or par la méthode exposée dans les articles CLIV. CLV. CLVI. on réduira d'abord l'intégration à celle de différentes quantités dont chacune sera de cette forme $\frac{Gz^r dx}{(zz + pp)^n}$; r étant un nombre entier impair ou pair. Dans le premier cas soit $zz + pp = uu$, on aura une transformée composée d'une suite de termes tous de cette forme $Hu^q du$ (q étant positif ou négatif): ainsi l'intégration n'aura aucune difficulté. Dans le second cas où r est un nombre pair, on fera $zz + pp = uu$, & on trouvera que la transformée sera composée de termes de cette forme $\frac{Lu^s du}{\sqrt{(uu - pp)}}$, (s étant un nombre pair positif ou négatif): & cette quantité s'intègre ou absolument, quand s est négative (Art. c.), ou par la quadrature du cercle (Art. xcvi.) lorsque s est positive.

C L X.

Soit cherchée l'intégrale de cette fraction $\frac{x^3 dx}{(a + bx + cxx) \cdot (e + fx + gxx)}$ dont le dénominateur a des racines imaginaires.

Application des formules du Problème 7. à un exemple.

Y ij

Pour la trouver nous supposons d'abord la fraction sans dx , il sera facile de la remettre après l'opération. Cela posé je l'égalé à la somme des deux suivantes $\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2} + \frac{C+Dx}{e+fx+gxx}$, ce qui donne $x^0 = (A+Bx) \times (e+fx+gxx) + (C+Dx) \times (a+bx+cx^2)$; donc $Q = e+fx+gxx$, $R = a+bx+cx^2$; donc $x^0 = (A+Bx) \times Q + (C+Dx) \times R$. Si on suppose $a+bx+cx^2 = 0$, on a $R = 0$; & en continuant l'opération comme dans le Problème 7, à cause que $\theta = 3$ est un nombre impair, on trouvera

$$A = \frac{Q'' \times \frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} - Q \times \frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}}}{\left\{ \frac{q}{p} - \frac{n}{m} \right\} \cdot QQ''} = \frac{Q'' \times \frac{m^2}{n^2} - Q \times \frac{p^2}{q^2}}{\left\{ \frac{q}{p} - \frac{n}{m} \right\} QQ''}$$

Si on suppose $a+bx+cx^2 = (m+nx) \times (p+qx) = mp + mqx + np x + nqxx$, on aura $mp = a$; $mq + np = b$; $nq = c$; $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{b}{c}$, & $\frac{mm}{nn} + \frac{2mp}{nq} + \frac{pp}{qq} = \frac{bb}{cc}$; & mettant pour $\frac{2mp}{nq}$ sa valeur $\frac{2a}{c}$, on a $\frac{mm}{nn} + \frac{pp}{qq} = \frac{bb}{cc} - \frac{2a}{c}$. On aura aussi $Q = e - f \times \frac{m}{n} + g \times \frac{mm}{nn}$; $Q'' = e - f \times \frac{p}{q} + g \times \frac{pp}{qq}$: d'où on déduit $Q'' \times \frac{mm}{nn} - Q \times \frac{pp}{qq} = \frac{m^2}{n^2} \times e - \frac{m^2 p}{n^2 q} \times f + \frac{m^2 p^2}{n^2 q^2} \times g - \frac{p^2}{q^2} \times e + \frac{m p^2}{n q^2} \times f - \frac{m^2 p^2}{n^2 q^2} \times g = \left\{ \frac{m^2 q^2 - n^2 p^2}{n^2 q^2} \right\} \times e - \left\{ \frac{m^2 p q - m n p^2}{n^2 q^2} \right\} \times f$: & si on divise cette dernière quantité par $\frac{q}{p} - \frac{n}{m} = \frac{mq - np}{mp}$, le quotient est $\frac{mp \times (mq + np)}{n^2 q^2} \times e - \frac{m^2 p^2}{n^2 q^2} \times f = \frac{ab}{cc} \times e - \frac{aa}{cc} \times f$.

Si on cherche de même la valeur de QQ'' , on trouve

$$A = \frac{ahe - aaf}{ccee - becf + bbeg - 2aceg + acff - abfg + aagg} = \frac{ahe - aaf}{(ec - ag)^2 + (bg - cf) \times (be - af)}.$$

Pareillement en substituant ces valeurs dans l'équation $B = Q'' \times \frac{q m^{\theta-1}}{p n^{\theta-1}} - Q \times \frac{n p^{\theta-1}}{m q^{\theta-1}}$,

$$\left\{ \frac{q}{p} - \frac{n}{m} \right\} \cdot Q Q''$$

on trouve $B = \frac{bbe - ace - abf + aag}{(ec - ag)^2 + (bg - cf) \times (be - af)}.$

Pour trouver les valeurs de C & D , il est inutile de faire un calcul semblable à celui qu'on vient de faire pour A & B . Car en comparant ensemble les formules, on voit que la formule qui donne la valeur de C est semblable à celle de A , & la formule de D à celle de B & que tout le changement nécessaire consiste à substituer a, b, c , à la place de e, f, g ; par conséquent on aura $C = \frac{aef - bee}{(ec - ag)^2 + (bg - cf) \times (be - af)}$ & $D = \frac{aff - bef - aeg + eec}{(ec - ag)^2 + (bg - cf) \times (be - af)}$. On a donc toutes les valeurs des indéterminées. Substituant donc ces valeurs à la place de A, B, C, D , & remettant dx dans les fractions partielles $\frac{A dx + B x dx}{a + bx + cxx} + \frac{C dx + D x dx}{e + fx + gxx}$, délivrant xx de ses coefficients de la manière qu'il est dit (Art. CLVI.), il est aisé de voir qu'on aura deux fractions de la forme de $\frac{l dx + m x dx}{xx + fx + g}$, qu'on intégrera séparément par la méthode du Problème 6.

Nous n'avons plus à examiner que le cas où les racines du dénominateur sont en partie réelles & en partie imaginaires.

CLXI.

PROBLEME 8. Déterminer les coefficients du numérateur, lorsque les racines du dénominateur sont en partie réelles & en partie imaginaires.

3e. Cas.
Lorsque les racines du dénominateur sont en partie réelles & en partie imaginaires.

Usage de la
méthode de
M. Cotes
dans ce cas.

SOLUTION. Dans ce cas on supposera la fraction re-

présentée par $\frac{x^0}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \dots + Ux^\lambda} = \frac{A + Bx}{a + bx + cxx}$

+ $\frac{C + Dx}{e + fx + gxx}$ + $\frac{H}{k + lx}$: alors comparant avec les formules

du Problème 7, on aura $Q = (e + fx + gxx) \times (k + lx)$:

$R = (a + bx + cxx) \times (k + lx)$: $S = (a + bx + cxx)$

$\times (e + fx + gxx)$. Or en examinant ces différentes

valeurs il est aisé d'appercevoir la similitude des formules

qui expriment les quantités A, B, C, D avec celles du

Problème 7. La supposition de $k + lx = 0$ nous donne

$$Q = 0$$

$$R = 0$$

$$\& \dots \dots \dots - \frac{k}{l} = x$$

$$\& \dots \dots \dots - \frac{k^0}{l^0} = H \times S$$

$$\& \dots \dots \dots H = - \frac{k^0}{l^0} \times \frac{1}{S}$$

$$S \text{ étant } = (a - b \times \frac{k}{l} + c \times \frac{kk}{ll}) \times (e - f \times \frac{k}{l} + g \times \frac{kk}{ll}) :$$

C'est la même chose soit que λ soit pair ou impair.

CLXII.

Application
à un exem-
ple.

Soit proposé d'intégrer la fraction $\frac{x}{L + Mx + Nx^2 + Px^3}$:

Je suppose que le dénominateur de cette fraction est

$(e + fx + gxx) \times (k + lx)$. Cela posé je fais la fraction

entière égale à la somme des deux suivantes $\frac{A + Bx}{e + fx + gxx}$

+ $\frac{C}{k + lx}$. Je suppose ensuite $e + fx + gxx = 0$: si les

racines de cette équation sont $(m + nx) \times (p + qx) =$

$$mp + mqx + np x + nqxx, \text{ on a } \dots mp = e$$

$$mq + np = f$$

$$d'où l'on tire \dots \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{f}{g},$$

A présent comparant la proposée avec les formules du Problème 7, on voit que $\theta = 0$ & par conséquent

$$A = Q \times \frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}} - Q'' \times \frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} = Q \times \frac{q}{p} - Q'' \times \frac{n}{m}.$$

$$\frac{\left\{ \frac{q}{p} - \frac{n}{m} \right\} \cdot QQ''}{\left\{ \frac{q}{p} - \frac{n}{m} \right\} \cdot QQ''}$$

$$\text{Mais le cas présent donne } \dots Q = k - l \frac{m}{n}$$

$$\& \dots Q'' = k - l \frac{p}{q}$$

$$\& Q \times \frac{q}{p} - Q'' \times \frac{n}{m} = k \cdot \left\{ \frac{q}{p} - \frac{n}{m} \right\} - \left\{ \frac{m^2 q^2 - n^2 p^2}{mq \cdot np} \right\} l.$$

$$\text{Divisons cette quantité par } \frac{q}{p} - \frac{n}{m} = \frac{mq - np}{mp}, \text{ on aura}$$

$$\text{pour quotient } k - \left\{ \frac{mq + np}{nq} \right\} \times l = k - l \times \frac{f}{g} : \&$$

$$\text{parce que } QQ'' = kk - kl \times \left\{ \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \right\} + \frac{mp}{nq} \times ll$$

$$= kk - \frac{fkl}{g} + \frac{ell}{g}, \text{ il vient enfin } A = \frac{gk - fl}{gkk - fkl + ell}.$$

$$\text{Par un calcul semblable on trouve } B = \frac{-gl}{gkk - fkl + ell}.$$

Pour trouver la valeur de C, il faut se servir de la formule du Problème 8, H qui est la même que C ici

$$= \frac{k^{\theta}}{l^{\theta}} \times \frac{1}{S}. \text{ Dans l'exemple présent } \frac{k^{\theta}}{l^{\theta}} = 1, \& S =$$

$$e - f \times \frac{k}{l} + g \times \frac{kk}{ll}, \text{ ce qui donne } C = \frac{ll}{gkk - fkl + ell}.$$

On a donc les valeurs de toutes les indéterminées. Substituant ces valeurs & remettant dx , on aura deux fractions partielles dont l'une s'intégrera comme dans le Problème 6, & l'autre fera une différentielle logarithmique.

CLXIII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Donc si le dénominateur d'une fraction rationnelle est ou peut être supposé $(a + bx) \cdot (g + hx) \dots \&c. \times (e + fx)^a \cdot (k + lx)^e \dots \&c. \times (i + mx + nxx)^r \cdot (p + qx + rxx)^r$, il faudra supposer cette fraction égale à une suite d'autres fractions dont les dénominateurs soient $a + bx$; $g + hx$; $\dots \dots \dots (e + fx)^a$; $(k + lx)^e$; $\dots \dots \dots (i + mx + nxx)^r$; $(p + qx + rxx)^r$ &c. & appliquer ensuite les méthodes exposées ci-dessus, tant pour trouver les numérateurs que pour intégrer ces sortes de fractions ; au moyen de quoi il ne doit plus rester de difficulté sur quelque espèce de fractions rationnelles que ce puisse être.

CLXIV.

Les numérateurs des fractions rationnelles étant déterminés par les méthodes précédentes, comment on trouve les dénominateurs ?

SCHOLIE 1. GÉNÉRAL. Dans tout ce qui précède nous avons supposé qu'on connoissoit les dénominateurs des fractions rationnelles différentielles, & nous avons enseigné la méthode générale de trouver les numérateurs. Mais ces dénominateurs ne sont pas effectivement connus : il faut donc les trouver. Or nous savons que les racines de ces dénominateurs sont toutes réelles, ou toutes imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires.

1°. Lorsqu'elles sont toutes réelles, il est aisé de les avoir en résolvant l'équation par les règles ordinaires de l'Algebre, ou en la construisant géométriquement.

2°.

2°. Lorsqu'elles sont toutes imaginaires on les trouvera par la méthode enseignée dans l'Introd. Art. LXXXIX. & suiv.

3°. Enfin dans le troisieme cas on cherchera d'abord les réelles & les imaginaires ensuite.

CLXV.

SCHOLIE 2. Il est évident qu'au moyen de tout ce que nous avons dit dans ce Chapitre on peut intégrer ou absolument, ou par la quadrature du cercle, ou par celle de l'hyperbole, toute fraction rationnelle différentielle quelconque. Mais la méthode générale étant très-pénible par elle-même, les Géometres ont cherché des moyens de la simplifier. Ils y ont réussi dans quelques cas, & ces cas sont ceux où le dénominateur a une des deux formes suivantes, $bx^{2m} + gx^m + f$, ou $x^n \pm a^n$. Nous allons les examiner dans le Chapitre suivant.

C H A P I T R E X I.

Examen des cas où le dénominateur est $bx^{2m} + gx^m + f$, ou $x^n \pm a^n$, dans lesquels on abrége la méthode générale.

CLXVI.

Soit $bx^{2m} + gx^m + f$ le dénominateur de la fraction ; 1°. Comment on a le dénominateur de ces sortes de fractions.
1°. on peut diviser le haut & le bas de la fraction par le coefficient b du terme bx^{2m} : ainsi on peut supposer

Z

ce terme sans coefficient. 2°. On peut toujours donner à x^{2m} le signe $+$, puisque s'il avoit le signe $-$ il n'y auroit qu'à changer les signes de tous les termes du numérateur & du dénominateur, ce qui ne change pas la valeur de la fraction. Dans cet état le premier terme x^{2m} ayant le signe $+$, le dernier terme qui sera $\frac{f}{b}$ & que j'appelle q , doit aussi avoir le signe $+$. Car s'il avoit le signe $-$, on trouveroit, en regardant $x^{2m} + \frac{g}{b}x^m - \frac{f}{b}$ comme une équation du second degré, que ses facteurs seroient $x^m + \frac{g}{2b} + \sqrt{\frac{gg}{4bb} + \frac{f}{b}}$ & $x^m + \frac{g}{2b} - \sqrt{\frac{gg}{4bb} + \frac{f}{b}}$: c'est-à-dire qu'on pourroit résoudre la fraction rationnelle proposée en deux autres qui auroient pour dénominateur $x^m \pm k$, $x^m \pm l$: or chacune de ces fractions se réduiroit au cas de $x^n \pm a^n$ dont nous allons parler plus bas.

3°. Enfin dans le dénominateur $x^{2m} + \frac{g}{b}x^m + q$, on peut toujours regarder q comme égale à une quantité a élevée à la puissance $2m$; & prenant a pour le rayon d'un cercle égal à l'unité, on pourra supposer $a^{2m} = 1$.

Donc toute la difficulté se réduit 1°. à intégrer les fractions dont le dénominateur est de cette forme $x^{2\lambda} \pm 2tx^\lambda + 1$; 2°. à intégrer celles dont le dénominateur est $x^n \pm a^n$, n étant un nombre impair. Car s'il étoit pair, & qu'il y eût $+a^n$, ce cas se réduiroit au premier en faisant $t=0$. S'il étoit pair, & qu'il y eût $-a^n$, il se réduiroit en deux autres facteurs $x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}$, & $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{2}}$.

Nous allons exposer les méthodes que les Géomètres ont trouvées pour intégrer ces sortes de fractions,

CLXVII.

PROBLEME. Trouver les facteurs de $x^{2\lambda} \pm 2tx^\lambda + 1$, & de $x^n \pm a^n$.

Nous avons résolu ce Problème par le moyen de la division d'un arc de cercle en parties égales dans l'Introduction, Articles LXI. & LXII. pour le premier cas, & Art. LXIII. & LXVI. pour le second.

Il ne nous reste donc plus qu'à trouver les numérateurs. On les auroit par la méthode générale ; mais il y en a une plus simple que voici.

CLXVIII.

Supposons d'abord que la fraction proposée ait cette forme $\frac{x^\theta}{1+x^\lambda}$, (λ est un nombre impair) enforte que 2°. Comment on trouve les numérateurs.

$1+x^\lambda = L + Mx + Nx^2 + Px^3 \dots + Ux^\lambda$; 1°. Quand le dénominateur est $1+x^\lambda$,
on aura $L=1, M=0, N=0, P=0, U=1$, & si on suppose (Introduction Art. LXIII.) $1+x^\lambda =$
 $(1-2ax+xx) \times (1-2bx+xx) \times (1+x)$, &c.

on aura $\frac{x^\theta}{1+x^\lambda} = \frac{A+Bx}{1-2ax+xx} + \frac{C+Dx}{1-2bx+xx} + \frac{H}{1+x}$ &c.

Soit $(1-2bx+xx) \times (1+x) = Q$, $(1-2ax+xx) \times (1+x) = R$ & $(1-2ax+xx) \times (1-2bx+xx) = S$,
voici comment on s'y prendra pour abréger les formules du Problème 7. Soit supposé $1-2ax+xx=0$, on

Z ij

en déduira $x = a \pm \sqrt{aa-1}$. Soit $a + \sqrt{aa-1} = l$,
& $a - \sqrt{aa-1} = m$; les deux racines de l'équation

$\times$ $1 - 2ax + xx = 0$ seront $x - l = 0$, & $x - m = 0$;
donc $Q = (1 - 2bl + ll) \times (1 + l)$, & $Q'' =$
 $(1 - 2bm + m^2) \times (1 + m)$. On aura aussi $l + m = 2a$,
& $lm = 1$.

$\times$ Or par le Problème 7. $l^\theta = \overline{A + Bl} \times Q$, & $m^\theta =$
 $A + Bm \times Q''$; de ces deux équations je tire la valeur de A
& celle de B . Car j'ai $\frac{l^\theta}{Ql} - \frac{A}{l} = B$, & $\frac{m^\theta}{Q''m} - \frac{A}{m} = B$.
Donc $\frac{l^{\theta-1}}{Q} - \frac{m^{\theta-1}}{Q''} = \frac{A}{l} - \frac{A}{m} = \frac{Am - Al}{lm} =$ (à cause
que $lm = 1$) $A \times (m - l)$. Donc enfin $A = \frac{l^{\theta-1}}{Q \cdot (m-l)}$
 $- \frac{m^{\theta-1}}{Q'' \cdot (m-l)}$. En suivant le même procédé on trouvera
 $B = \frac{l^\theta}{Q \cdot (l-m)} - \frac{m^\theta}{Q'' \cdot (l-m)}$. Mais puisque $1 + x^\lambda =$
 $Q \times (1 - 2ax + xx)$, on aura $\lambda x^{\lambda-1} dx = dQ \times$
 $(1 - 2ax + xx) + Q \times \frac{2x dx - 2a dx}{1 - 2ax + xx}$; & dans la
supposition de $1 - 2ax + xx = 0$ & de $x = l$, on a
en mettant pour x la valeur l , retranchant $dQ \times$
 $\frac{2l dx - 2a dx}{1 - 2ax + xx}$, & divisant les deux membres de l'équa-
tion par dx , on a, dis-je, $\lambda l^{\lambda-1} = Q \times (2l - 2a)$:

De même lorsque $x = m$, il viendra en faisant les
mêmes opérations que ci-dessus, $\lambda m^{\lambda-1} = Q'' \times (2m - 2a)$.
Or de ce que $l + m = 2a$, on a $2l - 2a = l - m$,
& $2m - 2a = m - l$; donc $\lambda l^{\lambda-1} = Q \times \overline{l - m}$, &
 $\lambda m^{\lambda-1} = Q'' \times \overline{m - l}$: de plus la supposition de
 $1 - 2ax + xx = 0$ donne aussi $1 + x^\lambda = 0$; on aura

donc $x^\lambda = -1$, ou $l^\lambda = -1$, & $m^\lambda = -1$, & par conséquent $Q \times \overline{l-m} = \lambda l^{\lambda-1} = -\frac{\lambda}{l}$, & $Q' \times \overline{m-l} = \lambda m^{\lambda-1} = -\frac{\lambda}{m}$; mettons ces valeurs dans les formules de A & de B , on trouvera $A = \frac{l^\theta + m^\theta}{\lambda}$, $B = -\frac{(l^{\theta+1} + m^{\theta+1})}{\lambda}$.

Par les mêmes opérations, en supposant que p & q sont les racines de $1 - 2bx + xx = 0$, on trouvera $C = \frac{p^\theta + q^\theta}{\lambda}$, $D = -\frac{(p^{\theta+1} + q^{\theta+1})}{\lambda}$.

Pour trouver la valeur de H , on suivra la méthode précédente : car selon ce qui est dit dans le Problème 8; $x^\theta = H \times S$; & supposant $1+x=0$ ou $x=-1$, on a $1=H \times S$, lorsque θ est $=0$ ou un nombre pair, & $-1=H \times S$ lorsque θ est un nombre impair. Mais puisque, comme on fait, $1+x^\tau = S \times (1+x)$, on a $\lambda x^{\lambda-1} dx = dS \times 1+x + S dx$, ce qui donne $S=\lambda$, lorsque $1+x=0$: d'où on déduit $H=\frac{1}{\lambda}$, lorsque θ est un nombre pair en y comprenant le zéro, & $H=-\frac{1}{\lambda}$, lorsque θ est un nombre impair.

CLXIX.

Si le dénominateur de la proposée a cette forme $1-x^\lambda$, on aura $\frac{x^\theta}{1-x^\lambda} = \frac{A+Bx}{1-2ax+xx} + \frac{C+Dx}{1-2bx+xx} + \frac{G}{1-x}$; & en faisant le calcul comme plus haut, on trouve encore $A = \frac{l^\theta + m^\theta}{\lambda}$, $B = -\frac{(l^{\theta+1} + m^{\theta+1})}{\lambda}$, $C = \frac{p^\theta + q^\theta}{\lambda}$, $D = -\frac{(p^{\theta+1} + q^{\theta+1})}{\lambda}$, & $G = \frac{1}{\lambda}$, θ étant un nombre pair ou impair.

CLXX.

REMARQUE. Si on avoit eu $\frac{A+Bx}{1+2ax+xx}$ &c. en supposant encore $x=l$, $x=m$, $x=p$, $x=q$ &c. on auroit eu les mêmes valeurs de A , B , C , D &c.

CLXXI.

2°. Lorsque le dénominateur est $1-2tx^\lambda+x^{2\lambda}$. Lorsque la fraction est $\frac{x^\theta}{1-2tx^\lambda+x^{2\lambda}}$, on supposera $1-2tx^\lambda+x^{2\lambda} = \frac{1-2ax+xx}{1-2tx^\lambda+x^{2\lambda}} \times \frac{1-2bx+xx}{1-2tx^\lambda+x^{2\lambda}} \times \frac{1-2cx+xx}{1-2tx^\lambda+x^{2\lambda}}$ &c. & par conséquent $\frac{x^\theta}{1-2tx^\lambda+x^{2\lambda}} = \frac{A+Bx}{1-2ax+xx} + \frac{C+Dx}{1-2bx+xx} + \frac{E+Fx}{1-2cx+xx}$ &c. Il est aisé de voir qu'on auroit ici comme dans le cas que nous venons de traiter, $A = \frac{l^{\theta-1}}{Q \cdot m-l} - \frac{m^{\theta-1}}{Q'' \cdot m-l}$, $B = \frac{l^\theta}{Q \cdot l-m} - \frac{m^\theta}{Q'' \cdot l-m}$. Mais parce que $1-2tx^\lambda+x^{2\lambda} = Q \times (1-2ax+xx)$, on aura en différentiant cette équation $-2tx^{\lambda-1}dx + 2\lambda x^{2\lambda-1}dx = dQ \times (1-2ax+xx) + Q \times \dots 2x dx - 2a dx$. Faisant les mêmes calculs que dans l'Article CLXVIII, cette équation, lorsque $1-2ax+xx=0$, & $x=l$, se change en $\lambda l^{\lambda-1} \times (-2t+2l^\lambda) = Q \times (2l-2a) =$ (à cause de ce qu'on a vu ci-dessus Art. CLXVIII.) $Q \times \overline{l-m}$; & lorsque $x=m$, on a $\lambda m^{\lambda-1} \times (-2t+2m^\lambda) = Q'' \times \overline{2m-2a} = Q'' \times \overline{m-l}$: mais puisque la supposition de $1-2ax+xx=0$ donne aussi $1-2tx^\lambda+x^{2\lambda}=0$, on en tire $2t = x^\lambda + \frac{1}{x^\lambda} = l^\lambda + \frac{1}{l^\lambda}, = l^\lambda + m^\lambda$,

& $2t = x^\lambda + \frac{1}{x^\lambda} = m^\lambda + \frac{1}{m^\lambda} = m^\lambda + l^\lambda$, parce que $lm = 1$ (Art. CLXVIII.), & par conséquent $l^\lambda = \frac{1}{m^\lambda}$, & $m^\lambda = \frac{1}{l^\lambda}$. Mettons cette valeur de $2t$, dans les deux équations ci-dessus, on a $\lambda l^{\lambda-1} \times \overline{l^\lambda - m^\lambda} = Q \times \overline{l - m}$, & $\lambda m^{\lambda-1} \times \overline{m^\lambda - l^\lambda} = Q'' \times \overline{m - l}$; ce qui donne $A = \frac{l^{\theta-1}}{\lambda \cdot l^{\lambda-1} \times (m^\lambda - l^\lambda)} - \frac{m^{\theta-1}}{\lambda \cdot m^{\lambda-1} \times (m^\lambda - l^\lambda)}$
 $= \frac{l^{\theta-\lambda}}{\lambda \times (m^\lambda - l^\lambda)} - \frac{m^{\theta-\lambda}}{\lambda \times (m^\lambda - l^\lambda)}$; & $B = \frac{l^{\theta-\lambda+1}}{\lambda \times (l^\lambda - m^\lambda)} - \frac{m^{\theta-\lambda+1}}{\lambda \times (l^\lambda - m^\lambda)}$. Le calcul pour trouver C, D &c. est le même.

Si on avoit $1 + 2tx^\lambda + x^{2\lambda}$, on trouveroit les mêmes valeurs pour A, B, C &c.

C H A P I T R E X I I.

Maniere de trouver algébriquement dans certains cas les facteurs de $x^n + a^n$ & de $x^{2m} + px^m + q$.

C L X X I I.

NOus avons vu (Art. CLXVII.) comment on trouve les facteurs de $x^n + a^n$ & de $x^{2m} + px^m + q$, par la division d'un arc de cercle en parties égales. Mais lorsque la circonférence se divise en un nombre de parties représentées par un des nombres de la progression géométrique, 1, 2, 4, 8, 16, on fait qu'une telle division

peut toujours se faire géométriquement. Dans ces cas on peut assigner non-seulement par la division de la circonférence, mais même algébriquement les valeurs des facteurs. Quoique cette recherche ne soit pas ici absolument nécessaire, puisque la division de la circonférence est plus commode que la construction algébrique, nous croyons cependant qu'elle fera plaisir à nos lecteurs.

CLXXIII.

Recherche des facteurs de $x^n + a^n$. PROBLEME. Trouver algébriquement les facteurs de $x^n + a^n$, n étant un nombre de la progression géométrique 2, 4, 8, 16, &c.

1°. Lorsque n est un nombre de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, 16 &c.

Pour résoudre ce Problème il faut trouver des facteurs $xx + fx + g$, $xx + hx + i$ &c. où les coefficients f , g , h , i &c. soient des quantités réelles, & qui multipliées l'une par l'autre rendent la quantité $x^n + a^n$. Soit par exemple $x^4 + a^4$, on aura

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + f \\ + h \end{array} \right\} x^2 + g \left. \begin{array}{l} + g \\ + fh \\ + i \end{array} \right\} x^2 + hg \left. \begin{array}{l} + if \end{array} \right\} x + gi = x^4 + a^4.$$

en multipliant l'un par l'autre les deux trinomes. On tire de cette équation en la comparant avec la donnée $x^4 + a^4$
 1°. $f + h = 0$, 2°. $g + i + fh = 0$, 3°. $hg + if$, ou (à cause de $f = -h$) $hg - ih = 0$, 4°. $gi = a^4$.
 L'équation $hg - ih = 0$ donne ou $g = i$, ou $h = 0$: en supposant $h = 0$, on a $f = 0$, $g = -i$, $i = \pm \sqrt{-a^4}$; & les facteurs sont $xx + \sqrt{-a^4}$, $xx - \sqrt{-a^4}$; ce qui

qui étant imaginaire ne fait rien connoître. Mais en supposant $g=i$, on trouve $g=aa$, $i=aa$, $f=a\sqrt{2}$, $h=-a\sqrt{2}$, de sorte que les facteurs sont $xx+ax\sqrt{2}+aa$, $xx-ax\sqrt{2}+aa$ qui ont la condition qu'on demande. On trouvera les composans de ces facteurs par la méthode générale de l'Article suivant.

CLXXIV.

En général $x^n + a^n$ (n étant un nombre de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, 16 &c.) $= (x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2} + a^{\frac{n}{2}}) \times (x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2} + a^{\frac{n}{2}})$, comme il est aisé de s'en assurer en multipliant ces deux quantités l'une par l'autre. Mais il faut outre cela savoir subdiviser ces deux derniers facteurs en deux autres, &c ainsi de suite, jusqu'à ce que l'exposant de x le plus haut soit $= 2$; c'est ce qui se fera de la manière suivante.

Je prends une quantité comme $x^m + qx^{\frac{m}{2}} + a^m$ dans laquelle m soit divisible par 4. Je cherche les facteurs $x^{\frac{m}{2}} + gx^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{2}}$, $x^{\frac{m}{2}} - gx^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{2}}$ qui peuvent la composer. Multipliant l'un par l'autre ces deux facteurs, il me vient $x^m + 2a^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}} + a^m$: je compare cette

$$- gg x^{\frac{m}{2}}$$

quantité avec $x^m + qx^{\frac{m}{2}} + a^m$: cette comparaison me donne $2a^{\frac{m}{2}} - gg = +q$, donc $g = \pm \sqrt{2a^{\frac{m}{2}} - q}$. Par où l'on voit, 1°. que si q est une quantité négative,

A a

g est toujours une quantité réelle ; 2°. que si q est positif & $< 2a^{\frac{m}{2}}$, g sera encore une quantité réelle. On voit à présent que les facteurs de $x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2 + a^{\frac{n}{2}}}$, $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2 + a^{\frac{n}{2}}}$ sont $x^{\frac{n}{4}} \pm a^{\frac{n}{8}} x^{\frac{n}{8}} \sqrt{2 - \sqrt{2}} + a^{\frac{n}{4}}$, & $x^{\frac{n}{4}} \mp a^{\frac{n}{8}} x^{\frac{n}{8}} \sqrt{2 + \sqrt{2}} + a^{\frac{n}{4}}$: car comparant les deux quantités $x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2 + a^{\frac{n}{2}}}$, $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2 + a^{\frac{n}{2}}}$ avec $x^m + qx^{\frac{m}{2}} + a^m$,

on a 1°. $m = \frac{n}{2}$

donc $\frac{m}{2} = \frac{n}{4}$

& $\frac{m}{4} = \frac{n}{8}$

2°. on a $q = \pm a^{\frac{n}{4}} \sqrt{2}$

mettant cette valeur de m & de q à leur place dans l'équation trouvée plus haut $g = \pm \sqrt{2a^{\frac{m}{2}} - q}$, elle devient $g = \pm \sqrt{2a^{\frac{n}{4}} \mp a^{\frac{n}{4}} \sqrt{2}} = \pm \sqrt{a^{\frac{n}{4}} \times \sqrt{2 \mp \sqrt{2}}} = \pm a^{\frac{n}{8}} \sqrt{2 \mp \sqrt{2}}$. Donc les facteurs $x^{\frac{m}{2}} + gx^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{2}}$ & $x^{\frac{m}{2}} - gx^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{2}}$ deviennent $x^{\frac{n}{4}} \pm a^{\frac{n}{8}} x^{\frac{n}{8}} \sqrt{2 - \sqrt{2}} + a^{\frac{n}{4}}$ & $x^{\frac{n}{4}} \mp a^{\frac{n}{8}} x^{\frac{n}{8}} \sqrt{2 + \sqrt{2}} + a^{\frac{n}{4}}$, qui sont les facteurs de $x^n + a^n$.

On trouvera de même les produifans de ces quatre facteurs. Car g sera toujours ou négatif ou $< 2a^{\frac{m}{2}}$, puisque $\sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \pm \sqrt{2 \mp \sqrt{2}} \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \pm \sqrt{2 \mp \sqrt{2}}$ &c. à l'infini est < 2 .

Application
à un exemple.

Si, par exemple, $x^8 + a^8$ est le dénominateur de la fraction, les composans seront $x^2 + ax\sqrt{2 + \sqrt{2}} + aa$,

$$x^2 - ax\sqrt{2+\sqrt{2}}+aa, x^2+ax\sqrt{2-\sqrt{2}}+aa, \\ x^2 - ax\sqrt{2-\sqrt{2}}+aa.$$

CLXXV.

Si au lieu de $x^n + a^n$ on avoit $x^n + qx^{\frac{n}{2}} + a^n$,
alors 1°. ou q est $> 2a^{\frac{n}{2}}$, auquel cas les facteurs seront
 $x^{\frac{n}{2}} + \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}$, $x^{\frac{n}{2}} + \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}$,
que l'on divisera ensuite en leurs facteurs trinomes par la
méthode de l'Article précédent; ou bien 2°. q sera $< 2a^{\frac{n}{2}}$:
alors les deux facteurs seront $x^{\frac{n}{2}} + x^{\frac{n}{4}}\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q} + a^{\frac{n}{2}}$,
& $x^{\frac{n}{2}} - x^{\frac{n}{4}}\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q} + a^{\frac{n}{2}}$ qui se diviseront de
même en leurs facteurs trinomes, & ainsi de suite.

CLXXVI.

C'est une chose assez singuliere que dans le cas où la
résolution de $x^n + qx^{\frac{n}{2}} + a^n$ en ses facteurs par la regle
ordinaire donne un binome composé de $x^{\frac{n}{2}} + \& -$ une
quantité imaginaire, la recherche de ces mêmes facteurs
supposés des trinomes donne des quantités dans lesquelles
il n'entre point de coefficients imaginaires, & au contraire
que lorsqu'il y en a dans les trinomes il n'y en ait point
dans les binomes. Cette remarque a déjà été faite par
M. Gabriel Manfredi dans un Mémoire imprimé parmi ceux
de l'Académie de l'Institut de Bologne, tome 1.

A a ij

CLXXVII.

En considérant $x^n + qx^{\frac{n}{2}} + a^n = 0$ comme une équation, si on veut prendre les racines à l'ordinaire, on aura $x^n + qx^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - a^n$; donc $x^{\frac{n}{2}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}$, ou bien $x^{\frac{n}{4}} = \pm \sqrt{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}}$: & les racines tirées des deux facteurs $x^{\frac{n}{2}} \pm x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q + a^{\frac{n}{2}}}$, sont $x^{\frac{n}{4}} = -\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q} \pm \sqrt{-2a^{\frac{n}{2}} - q}$ & $x^{\frac{n}{4}} = +\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q} \pm \sqrt{-2a^{\frac{n}{2}} - q}$. Les deux racines précédentes représentent les racines $\pm \sqrt{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}}$.

On voit par-là les $\sqrt[4]{}$ imaginaires réduites à des $\sqrt[2]{}$: on voit aussi comment il peut arriver quelquefois que des racines réelles se présentent sous une forme imaginaire.

CLXXVIII.

2°. Lorsque n est un nombre simplement pair.

Toute la difficulté de trouver algébriquement les diviseurs trinomes de $x^n + a^n$, lorsque n est un nombre simplement pair, c'est-à-dire, divisible par 2 & non par 4, se réduit à celle de trouver les facteurs trinomes de $x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}$.

CLXXIX.

Soit $x^6 + a^6$ le dénominateur de la fraction dont on demande les facteurs. Comme l'on fait que les diviseurs de $x^3 + a^3$, sont $x + a$, $xx - ax + aa$, ce qu'il est aisé de vérifier en multipliant l'un par l'autre ces deux facteurs, on verra que les diviseurs de $x^6 + a^6$ sont $xx + aa$ & $x^4 - aaxx + a^4$. A présent les diviseurs trinomes de $x^4 - aaxx + a^4$ sont $xx + ax\sqrt{3} + aa$, $xx - ax\sqrt{3} + aa$. Car supposant que ces diviseurs sont $xx + fx + aa$, $xx + gx + aa$; les multipliant l'un par l'autre, on trouve

Application à plusieurs exemples.

Premier exemple.

$$x^4 + gx^3 + 2a^2x^2 + a^2fx + a^4 = 0 \\ + fx^3 + fgx^2 + a^2gx$$

D'où l'on tire en comparant cette équation avec $x^4 - aaxx + a^4$

1°. $g + f = 0$

donc $g = -f$

2°. on a $2aa + fg = -aa$

Donc en réduisant & mettant pour g la valeur, on a $3aa - ff = 0$

Donc $f = a\sqrt{3}$

& $g = -a\sqrt{3}$

Donc &c.

CLXXX.

De même les facteurs de $x^{10} + a^{10}$ dépendent de ceux de $x^5 + a^5$ qui sont $x + a$, & $x^4 - ax^3 + aaxx -$

Second exemple.

$a^3 x + a^4$. Si on suppose maintenant que les diviseurs trinomes de $x^4 - ax^3 + aaxx - a^3 x + a^4$ sont $xx + fx + aa$, $xx + gx + aa$, faisant les mêmes opérations que dans l'exemple précédent, on trouvera

$$1^{\circ} \dots \dots \dots g + f = -a$$

$$\text{donc} \dots \dots \dots g = -a - f$$

$$2^{\circ} \dots \dots \dots 2aa + fg = aa,$$

donc en réduisant & mettant pour g la valeur, on a

$$ff + af - aa = 0$$

$$\text{Donc} \dots \dots \dots ff + af + \frac{1}{4} aa = a^2 + \frac{1}{4} a^2$$

$$\text{Donc} \dots \dots \dots f + \frac{1}{2} a = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc enfin} \dots \dots \dots f = -\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\& \dots \dots \dots g = -\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Donc les facteurs trinomes de $x^4 - ax^3 + a^2 x^2 - a^3 x + a^4$ sont $xx - \left\{ \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{2} \right\} x + aa$ & $xx - \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} \right\} x + aa$; lesquels étant multipliés ensuite par $x + a$, rendent $x^5 + a^5$. On peut observer en passant, qu'en multipliant l'une par l'autre les deux quantités $-\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}$, & $-\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{2}$, le produit est aa . On trouve le même résultat en mettant dans l'équation $ff + af - aa = 0$ les valeurs de ff & de f en g , à leur place : donc f & g sont les racines de l'équation $ff + af - aa = 0$.

CLXXXI.

On peut encore, si l'on veut, faire la division de $x^4 -$

$ax^3 + aaxx - a^3x + a^4$ par $xx + fx + aa$, & on aura au quotient $xx - (a + f)x + af + ff$, & pour reste on trouve $-f^3x - af^2x + a^2fx - a^2f^2 - a^3f + a^4$. Supposant ce reste $= 0$, nous avons l'équation $ff + af - aa = 0$ la même qu'on vient de trouver ; son autre facteur est $-aa - fx$.

CLXXXII.

REMARQUE 1. En se servant des méthodes que nous venons de donner pour trouver algébriquement les facteurs trinomes de $x^n \pm a^n$, on trouveroit ceux de $x^{2m} \pm px^m + q$.

CLXXXIII.

REMARQUE 2. La circonférence du cercle pouvant être divisée géométriquement, c'est-à-dire par la règle & le compas, non-seulement en 2, 4, 8 ; &c. mais encore en 3, 5, 15 parties égales, il s'ensuit qu'on pourra assigner algébriquement les facteurs de $x^{2m} + px^m + q$ & de $x^n + a^n$ non-seulement lorsque m , ou $n = 1, 2, 4, 8$, comme nous l'avons vu plus haut, mais encore toutes les fois que m ou n seront des nombres égaux à 3, 5, 15 multipliés par quelqu'un des termes de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, 16, &c.

CLXXXIV.

REMARQUE 3. Tout facteur $x^{3m} + bx^{2m} + gx^m + q$ pourra toujours se réduire au cas général. Car on pourra

Les facteurs de $x^{2m} \pm px^m + q$ se trouvent par les mêmes procédés que ceux de $x^n \pm a^n$.

Observations particulières sur ce qui précède.

toujours regarder ce facteur comme une équation du troisième degré composée des deux suivantes $x^m + g$, & $x^{2m} + hx^m + l$: g, h , & l étant des quantités réelles.

De même tout facteur $x^{4m} + bx^{3m} + cx^{2m} + ex^m + f$ peut être regardé comme composé de ces deux facteurs trinomes $x^{2m} + kx^m + q$, $x^{2m} + ix^m + p$, dans lesquels les coefficients seront réels (Art. LXXXIII. Introd. ult.). Enfin $x^{5m} \dots + S$ peut se réduire en deux facteurs l'un quaternome, l'autre simple où tous les coefficients seront réels.

C H A P I T R E X I I I.

Des différentielles qui peuvent se ramener à des fractions rationnelles.

C L X X X V.

IL est évident par les Chapitres précédens que toute fraction rationnelle différentielle non intégrable algébriquement, dépend pour son intégration de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, ou, ce qui revient au même, de la rectification du cercle ou de la parabole. Donc toute différentielle qui par transformation pourra se réduire à des fractions rationnelles, s'intégrera ou absolument, ou par les mêmes quadratures ou rectifications.

Nous allons examiner ici les cas généraux dans lesquels cette transformation peut se faire avec succès.

C L X X X V I.

CLXXXVI.

1°. $\frac{x^{\frac{m}{r}} dx}{e + fx^n}$ deviendra rationnelle en supposant $x^{\frac{1}{r}} = z$. Examen des différentielles les plus générales qui peuvent se transformer en fractions rationnelles.
 Car on aura $x = z^r$, $dx = rz^{r-1} dz$, & $x^n = z^{rn}$.
 Donc en substituant dans la proposée pour x & dx , leurs valeurs en z & en dz , on aura la transformée suivante $\frac{rz^{m+r-1} dz}{e + fz^{rn}}$, qu'on voit bien être une fraction rationnelle, m , r , & n étant des nombres entiers.

CLXXXVII.

2°. La transformation réussira dans les différentielles qui contiendront tant de puissances $x^{\frac{\delta}{\lambda}}$, $x^{\frac{m}{n}}$, &c. qu'on voudra sans aucun autre radical. Par exemple, si j'avois $\frac{x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{\delta}{\lambda}} \cdot x^{\frac{\tau}{\phi}} \cdot dx}{e + fx^k}$, je donnerois à la proposée la forme suivante $\frac{x^{\frac{m}{n} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\tau}{\phi}} dx}{e + fx^k}$: je réduis ensuite tous les exposans fractionnaires au même dénominateur q , & je fais $x^{\frac{1}{q}} = z$, & par conséquent $x = z^q$, $dx = qz^{q-1} dz$. Par ce moyen tous les radicaux disparaissent, & la fraction proposée devient rationnelle.

CLXXXVIII.

3°. Que la fraction proposée contienne au numérateur $\left\{ \frac{a+ex}{d+\gamma x} \right\}^{\frac{\tau}{\lambda}}$, $\left\{ \frac{a+ex}{d+\gamma x} \right\}^{\frac{\mu}{\nu}}$, sans autres radicaux, le

dénominateur étant toujours $e + fx^k$, on la réduiroit au cas précédent en faisant $\frac{\alpha + \epsilon x}{\delta + \gamma x} = z$.

CLXXXIX.

4°. A plus forte raison si elle contenoit simplement $(\alpha + \epsilon x)^{\frac{r}{\lambda}}$.

C X C.

5°. Si j'ai à intégrer $\frac{x^{\frac{p}{q}} dx}{(a + bx)^{\frac{n}{r}}}$, je mets d'abord cette fraction sous la forme suivante $\frac{x^{\frac{pr}{qr}} dx}{(a + bx)^{\frac{nq}{qr}}}$. Je la multiplie ensuite haut & bas par $x^{\frac{nq}{qr}}$, ou par $(a + bx)^{\frac{pr}{qr}}$. Soit à présent $\frac{x}{a + bx}$ ou $\frac{a + bx}{x} = z$, pratiquant le reste de l'opération ; on parvient à une transformée rationnelle si $\frac{pr + nq}{qr}$ est un nombre entier.

C X C I.

6°. En faisant $x^n = z$, on ramenera au troisième cas la fraction suivante $\frac{dx}{x \cdot (a + bx^n)^q}$, n & q étant tout ce qu'on voudra.

C X C I I.

7°. Si la différentielle ne contient point d'autre radical que $(a + bx \pm cxx)^{\frac{m}{2}}$, m étant un nombre impair, alors on la pourra réduire en fraction rationnelle. Car pour dégager de dessous le signe radical ce qui en peut être ôté,

on changera le radical en $\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} \pm xx}$. Or on connoît plusieurs façons de faire évanouir ce radical. 1°. Si on a $+xx$, on supposera $x+z = \sqrt{\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} + xx}$, ce qui donne en quarrant $xx + 2xz + zz = \frac{a}{c} + \frac{bx}{c} + xx$, & en réduisant $x = \frac{czz - a}{b - 2cz}$. 2°. Si on a $-xx$ on supposera le radical $\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} - xx} = \sqrt{f+x} \times \sqrt{g-x}$, ou $\sqrt{-f+x} \times \sqrt{g-x}$. Je fais à présent $\sqrt{\pm f+x} \times \sqrt{g-x} = (g-x)z$, ou $(\sqrt{g-x} \times \sqrt{g-x})z$, j'en tirerai $\sqrt{\pm f+x} = z\sqrt{g-x}$; donc $\pm f+x = (g-x)zz$; donc $x+xyz = gzz \pm f$, & enfin $x = \frac{gzz \pm f}{zz+1}$.

CXCIII.

8°. Que l'on ait dans la fraction différentielle proposée $(a+bx)^{\frac{n}{2}}$ & $(c+fx)^{\frac{m}{2}}$ sans autres expressions radicales, m & n représentant des nombres impairs, on la réduira à la précédente, en faisant $c+fx = zz$, ce qui donnera $(c+fx)^{\frac{m}{2}} = z^m$ &c.

CXCIV.

9°. Si la fraction a pour numérateur $X \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}}$, & pour dénominateur $X'(f+gx)^{\frac{m}{2}} + X''(c+hx)^{\frac{r}{2}}$ (X, X', X'' désignant des fonctions rationnelles quelconques de x), on multipliera le haut & le bas de la fraction par $X'(f+gx)^{\frac{m}{2}} - X''(c+hx)^{\frac{r}{2}}$. On voit que par

cette opération le dénominateur devient $X' \times X' (f+gx)^m - X'' X'' (c+bx)^r$ quantité qui n'a plus de radicaux, & le numérateur se réduit au cas du N°. 3.

CXCIV.

10°. Si la fraction proposée a pour numérateur une fonction rationnelle de x , & pour dénominateur $X + X' (a+bx)^{\frac{n}{2}} + X'' (f+gx)^{\frac{m}{2}}$, on la réduira à la précédente en multipliant haut & bas par $X + X' (a+bx)^{\frac{n}{2}} - X'' (f+gx)^{\frac{m}{2}}$.

CXCV.

11°. Quand la fraction aura pour dénominateur $X (c+fx+gxx)^{\frac{m}{2}} + X' (a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}$, on la réduira à celle du N°. 7 en multipliant le numérateur & le dénominateur par $X (c+fx+gxx)^{\frac{m}{2}} - X' (a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}$.

CXCVI.

Enfin si la proposée contient $\sqrt[m]{a + b\sqrt[n]{c} + e\sqrt[f]{x} + \&c. \left(\frac{g+hx}{l+mx}\right)^{\frac{1}{d}}}$ d étant un nombre entier positif ou négatif, $a, b, c, \&c.$ des constantes, & $m, n, f, \&c.$ des nombres entiers positifs ou négatifs, on pourra faire disparaître tous les radicaux l'un après l'autre, en supposant la quantité $\sqrt[m]{a + b\sqrt[n]{c} + \&c.}$ égale à une quantité simple z , ce qui donnera une valeur rationnelle de x en z ,

par le moyen de laquelle la différentielle donnée pourra être changée en fraction rationnelle.

CXCVIII.

REMARQUE. On pourra simplifier quelquefois la transformation. Car $x^{n-1} dx$ multiplié par une fonction rationnelle de x^n , n étant quelconque, se réduit à une fraction rationnelle, en faisant $x^n = z$.

Et en général si ci-dessus on met par-tout $x^{n-1} dx$ pour dx , & x^n pour x , il n'y aura qu'à faire $x^n = z$, & on retombera dans les mêmes cas.

CXCIX.

Voilà ce qu'il est important de savoir sur les fractions rationnelles différentielles, & ce qu'on peut regarder comme le résultat de ce qu'ont écrit sur cette matière M^{rs} Bernoulli, Cotes, & plusieurs autres. Voyez Mém. Acad. Berlin 1746. Au reste l'article des fractions rationnelles est un des plus importants & des plus étendus de tout le Calcul intégral, & la manière dont on l'a traité ici pourra être fort utile aux commençans.

Conclusion
de ce qui re-
garde les fra-
ctions ratio-
nelles.

Quels sont
les Auteurs
qui ont écrit
sur cette ma-
tière.



CHAPITRE XIV.

Des différentielles qui se rapportent à la rectification de l'ellipse ou de l'hyperbole.

C C.

Quels sont les Géomètres qui ont travaillé sur cette matière. **M^R**. Maclaurin dans son *Traité des Fluxions* second volume, page 225. a donné quelques recherches sur les différentielles réductibles à la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole; mais son travail sur cette matière n'étant pas complet, M. d'Alembert l'a continué dans la seconde partie d'un Mémoire sur le Calcul intégral imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, tome 4. C'est d'après ces deux grands Géomètres que nous allons exposer ici ce qu'on fait sur cette matière.

C C I.

1°. Élément de la rectification d'une Ellipse dont le grand axe est $2a$, & le paramètre p .

Figure 6.

LEMME 1. Soit une ellipse dont le grand axe $Aa' = 2a$, le paramètre $= p$, supposons que les coupées KB, Kc &c. prises depuis le centre K sont x , les ordonnées BC, c , y , l'équation de l'ellipse fera $\frac{2a}{p}yy = aa - xx$, ou $2a yy = aap - pxx$. Prenant les différences il vient $4ay dy = - 2px dx$ ou $\frac{2a}{p}y dy = - x dx$, d'où l'on tire $dy = - \frac{px dx}{2ay}$ & $dy^2 = \frac{p^2 x^2}{4a^2 y^2} dx^2 = \frac{p^2 x^2}{2a \times 2a yy} dx^2$, = (en mettant pour $2a yy$ sa valeur) $\frac{p^2 x^2}{2a^2 - 2axx} dx^2$. Substituant

cette valeur de dy^2 dans la formule (de l'Art. 91.) $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve $du = \sqrt{dx^2 + \frac{p x x dx^2}{2 a^3 - 2 a x x}} = dx$

$$\sqrt{1 + \frac{p x x}{2 a^3 - 2 a x x}} = dx \sqrt{\frac{p x^2 - 2 a x^2 + 2 a^3}{2 a^3 - 2 a x x}}, \text{ \& en}$$

$$\text{divisant haut \& bas par } 2 a, \text{ on a } dx \sqrt{\frac{a a + \frac{p-2a}{2a} x x}{\sqrt{a a - x x}}} \\ = dx \sqrt{a a + \frac{(p-1)}{2a} \cdot x x} \text{ pour l'élément de l'ellipse en}$$

question. Par la propriété connue de l'ellipse on aura $2 p a$ égal au quarré du demi-axe conjugué. Donc si l'on fait $\frac{p}{2 a} = q$, le quarré du même demi-axe conjugué fera $4 q a a$. Soit à présent $a a + (q-1) x x = a z$, on aura $x x = \frac{a z - a a}{q-1}$, $2 x dx = \frac{a dz}{q-1}$, $dx = \frac{a dz}{q-1 \cdot 2 \sqrt{a z - a a}}$

$$\frac{a dz}{q-1 \cdot 2 \sqrt{a z - a a}} : \text{ substituant cette valeur dans l'équa-} \\ \text{tion } du = dx \frac{\sqrt{a a + (q-1) x x}}{\sqrt{a a - x x}}, \text{ on aura } du = \\ \frac{a dz \sqrt{a z}}{\sqrt{q-1} \cdot 2 \sqrt{a z - a a} \cdot \sqrt{a a - a z + a a}} = \frac{a dz \sqrt{a z}}{2 \sqrt{a z - a a} \cdot \sqrt{q a a - a z}} \\ = \frac{dz \sqrt{a z}}{2 \sqrt{z - a} \cdot \sqrt{q a - z}} = \frac{dz \sqrt{a z}}{2 \sqrt{(q a + a) z - z z - q a a}}.$$

CCII.

D'où il suit qu'en général $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{f z - z z - g g}}$ dépend de la rectification d'une ellipse dont g est un des demi-axes, & dont l'autre demi-axe que je nomme r doit être tel

Différentielle
qui en dépend
immédiatement.

que $fr - rr = gg$. En effet, en comparant les deux dernières différentielles entre elles terme à terme, on a $qaa = gg$; $qa + a = f$, ou $qaa = fa - aa$; donc $fa - aa = gg$, ou à cause que a (hyp.) $= r$, $gg = fr - rr$, le second axe est donc $\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$. Car si on multiplie cette quantité par f , & si on lui ajoute son quarré, on trouvera gg après avoir effacé les termes qui se détruisent. Il suit aussi de là que les abscisses x prises depuis le centre doivent être telles que $rz = rr + \frac{gg}{rr} - 1 \cdot xx$: car nous avons plus haut $aa + (q-1)xx = az$: or $a = r$, $aa = rr$, $qaa = gg$; donc $q = \frac{gg}{aa} = \frac{gg}{rr}$, donc &c.

CCIII.

REMARQUE 1. Si ff étoit $< 4gg$, la valeur de r feroit imaginaire, par conséquent l'ellipse le feroit aussi. Mais alors la différentielle proposée feroit imaginaire & sans intégrale; ce qui est évident, puisque dans ce cas $\sqrt{fz - zz - gg}$ feroit imaginaire, cette quantité étant la même que celle-ci $\sqrt{\frac{f^2}{4} - gg - \left\{\frac{f}{2} - z\right\}^2}$.

CCIV.

REMARQUE 2. Il est clair que $\frac{ff}{4} - gg = \frac{ff}{4} - fr + rr = \frac{f}{2} - r$. Or comme par la remarque précédente $\sqrt{\frac{ff}{4} - gg - \left\{\frac{f}{2} - z\right\}^2}$ doit toujours être réelle, il s'ensuit que $\sqrt{\left\{\frac{f}{2} - r\right\}^2 - \left\{\frac{f}{2} - z\right\}^2}$
ou

ou $\sqrt{\left\{r - \frac{f}{2}\right\}^2 - \left\{z - \frac{f}{2}\right\}^2}$, selon que r & z sont $<$ ou $> \frac{f}{2}$, doit être aussi réel : mais suivant ce qui est dit ci-dessus, $fr - rr = gg$ ou $\frac{fr}{2} - \frac{rr}{2} = \frac{gg}{2}$, ou $\frac{f}{2} - \frac{r}{2} = \frac{gg}{2r}$, ou $\frac{f}{2} = \frac{gg}{2r} + \frac{r}{2}$. Donc si $r < \frac{f}{2}$, on a $r < \frac{gg}{2r} + \frac{r}{2}$, ce qui donne $rr < gg$ & $\frac{gg}{rr} > 1$; $\frac{gg}{rr} - 1$ est donc une quantité positive. Dans ce cas l'équation $rz = rr + \left\{\frac{gg}{rr} - 1\right\}xx$ peut se changer en $rz = rr + hxx$, ou $z = r + \frac{hxx}{r}$, d'où il suit que $z > r$ ce qui est d'ailleurs évident, puisque dans ce cas on a $\sqrt{\left\{\frac{f}{2} - r\right\}^2 - \left\{\frac{f}{2} - z\right\}^2}$. La valeur $\frac{rz - rr}{h}$ de xx fera donc positive, donc x sera réelle. Si $r > \frac{f}{2}$, on aura $r > \frac{gg}{2r} + \frac{r}{2}$, ce qui donnera $rr > gg$ & $\frac{gg}{rr} < 1$; donc $\frac{gg}{rr} - 1$ fera une quantité négative : on aura donc $rz = rr - hxx$, ou $z = r - \frac{hxx}{r}$, donc $z < r$, ce qui suit encore de ce qu'alors on a $\sqrt{\left\{r - \frac{f}{2}\right\}^2 - \left\{z - \frac{f}{2}\right\}^2}$. La valeur $\frac{rz - rr}{-h}$, ou $\frac{rr - rz}{h}$ de xx fera donc encore positive, la valeur de x par conséquent sera encore réelle.

CCV.

REMARQUE 3. Nous avons vu (Art. CCII.) que la valeur du second axe r de l'ellipse étoit $\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$. On peut donc prendre pour r l'une ou l'autre des deux valeurs $\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$ ou $\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$. Mais cela ne réduit-il pas la différentielle proposée à la rectification de deux ellipses différentes ? D'abord on feroit

tenté de le croire, & par ce moyen on trouveroit un arc d'ellipse égal à un autre arc d'ellipse. Ce qui rend encore la chose plus vraisemblable, c'est que ces ellipses ont un axe commun g . Mais en y faisant attention on reconnoîtra que ces deux ellipses sont semblables, g est le grand axe de l'une, & le petit axe de l'autre. Et en effet l'équation $gg = \left\{ \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - gg} \right\} \times \left\{ \frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - gg} \right\}$ donne cette proportion $\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - gg} : g :: g : \frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$; donc &c.

CCVI.

Figure 7. **LEMME 2.** Soit une hyperbole dont le grand axe $2KA = 2a$, le parametre $= p$, les abscisses x étant prises depuis le centre. Soit l'équation de cette hyperbole $\frac{2a}{p}yy = xx - aa$, ou $2ayy = pxx - aap$. Différentiant cette équation, il vient $4aydy = 2pdx$, d'où l'on tire $dy = \frac{p}{2ay} dx$, & $dy^2 = \frac{ppxxdx^2}{4aayy} = \frac{ppxxdx^2}{2apxx - 2a^3p} = \frac{pxxdx^2}{2axx - 2a^3}$: substituant cette valeur de dy^2 dans la formule de l'Article XC1. $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on a $\sqrt{dx^2 + \frac{p p x x d x^2}{2 a x x - 2 a^3}}$, ou $dx \frac{\sqrt{2 a x x + p x x - 2 a^3}}{\sqrt{(2 a x x - 2 a^3)}}$, ou enfin $dx \frac{\sqrt{\frac{(p+1)}{2a} xx - a^2}}{\sqrt{xx - aa}}$ pour l'élément d'une hyperbole dont $2a$ est le premier axe, & p le parametre de cet axe.

Faisant comme plus haut $\frac{p}{2a} = q$, & $(q+1) \times xx - aa = az$, on changera par les mêmes opérations que celles qui ont été faites pour l'ellipse, la différentielle proposée en celle-ci $\frac{dz \sqrt{az}}{2\sqrt{(zz + a - qa \times z - qa a)}}$.

Différentielle
qui en dépend
immédiatement.

On trouvera de même que $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{(zz - gg \pm fz)}}$ dépend de la rectification d'une hyperbole dont le second axe $= 2g$, & dont le premier axe $2r$ doit être tel que $rr - gg = \pm fr$. Les deux demi-axes sont donc g , & $r = \pm \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}$. Les abscisses x prises depuis le centre, à cause de $q = \frac{gg}{rr}$, sont égales à $\pm \frac{\sqrt{(aa + az)}}{\sqrt{(\frac{gg}{rr} + 1)}}$.

CCVII.

REMARQUE. Si on prend l'hyperbole par rapport à son second axe DKd , nommant ce second axe $2b$, le parametre de cet axe π , l'abscisse prise sur le second axe x , l'ordonnée parallèle au premier axe y , l'équation de l'hyperbole par rapport à ce second axe sera $\frac{\pi}{2b} yy = xx + bb$; & en faisant les mêmes opérations que pour le premier axe, on trouvera $du = dx \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2b} + 1}{\sqrt{xx + bb}}} xx + bb$: faisant

Elément de
l'hyperbole
par rapport à
son second
axe.

$\frac{\pi}{2b} = q$, & $(q+1) \times xx + bb = bz$, on trouvera la même transformée que ci-dessus; on n'auroit donc par ce moyen aucune nouvelle différentielle réductible à la rectification de l'hyperbole.

Donne la
même diffé-
rentielle que
la précédente.

CCVIII.

Différentielle
qui dépend de
la rectifica-
tion de l'hy-
perbole équi-
latère.

COROLLAIRE. Si la différentielle proposée étoit $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{zz-gg}}$, en comparant cette différentielle avec $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{zz-gg \pm fz}}$ on voit que $f=0$, on aura donc $rr-gg=0$ ou $rr=gg$, c'est-à-dire que les deux axes sont égaux; la proposée se rapporte donc à la rectification d'une hyperbole dont $2g$ est l'axe.

CCIX.

Autre diffé-
rentielle qui
se ramène à
la rectifica-
tion de l'hy-
perbole.

Pour trouver l'intégrale de $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{bb \pm fz - zz}}$,
Je fais $z = \frac{bb}{u}$, ce qui donne $dz = -\frac{bb du}{u^2}$; $\sqrt{z} = \sqrt{\frac{bb}{u}}$, ou $\frac{b}{\sqrt{u}}$; $zz = \frac{b^4}{u^2}$. Mettant à la place de z , dz , zz leurs valeurs en u , on a $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{bb \pm fz - zz}} =$
$$\frac{-\frac{bb du}{u^2} \times \frac{b}{\sqrt{u}}}{\sqrt{bb \pm \frac{fbb}{u} - \frac{b^4}{u^2}}} = \frac{-\frac{bb du}{u^2} \times \frac{b}{\sqrt{u}}}{\frac{b}{u} \sqrt{uu \pm fu - bb}} = \text{enfin}$$
$$\frac{-bb du}{u^2 \sqrt{u} \sqrt{uu \pm fu - bb}}.$$
 Cette différentielle est la même que la suivante $\frac{-u^2 du - bb du}{u \sqrt{u} \sqrt{uu \pm fu - bb}} + \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu - bb}}$.
La première partie de cette différentielle s'intègre sans peine. Car on a $\frac{-u^2 du - bb du}{u \sqrt{u} \sqrt{uu \pm fu - bb}} = \frac{-u^2 du - bb du}{u^2 \sqrt{uu \pm fu - bb}}$
$$= \frac{-du - \frac{bb du}{u^2}}{\sqrt{uu \pm fu - bb}} = \frac{-du - \frac{bb du}{uu}}{\sqrt{u \pm f - \frac{bb}{u}}},$$
 dont il est aisé de

trouver l'intégrale. Car faisant $u \pm f - \frac{bb}{u} = z$, on a $du + \frac{bb du}{uu} = dz$; donc il vient $-\frac{dz}{\sqrt{z}}$ dont l'intégrale est $-2\sqrt{z}$; donc en remettant pour z & dz leurs valeurs, l'intégrale est $-\frac{2\sqrt{uu \pm fu - bb}}{\sqrt{u}}$. L'intégrale entière cherchée est donc $-\frac{2\sqrt{uu \pm fu - bb}}{\sqrt{u}} + \int \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu - bb}}$. Or ce dernier membre qui est sous le signe $\int$ est réductible (Art. CCVI.) à la rectification d'une hyperbole dont les deux demi-axes sont b , & $\pm \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + bb}$. Donc la différentielle proposée est réductible à la rectification de l'hyperbole.

C H A P I T R E X V.

Des différentielles dont l'intégration dépend à la fois de la rectification de l'ellipse & de celle de l'hyperbole.

C C X.

PROBLEME I. **I**ntégrer $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{b^2 \pm fz - zz}}$.

Premier
exemple de
ces différen-
tielles.

SOLUTION. $b^2 \pm fz - zz$ (les signes de bb & de zz étant différens) a deux racines réelles, l'une positive & l'autre négative. Je les représente par $a - z$, $m + z$; la proposée devient donc $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(a-z)(m+z)}}$
 $= \frac{dz}{m\sqrt{z}} \times \left\{ \frac{m+z}{\sqrt{(a-z)(m+z)}} - \frac{z}{\sqrt{(a-z)(m+z)}} \right\} =$

en faisant les réductions ordinaires $\frac{dz \sqrt{m+z}}{m \sqrt{z} \cdot \sqrt{a-z}}$ —

$$\frac{dz \sqrt{z}}{m \sqrt{(a-z) \times (m+z)}} = \frac{dz \sqrt{m+z}}{m \sqrt{z} \cdot \sqrt{a-z}} - \frac{dz \sqrt{z}}{m \sqrt{bb \pm fz - zz}}.$$

Or le second membre de cette différentielle s'intègre (Art. CCIX.) par la rectification d'une hyperbole dont les deux demi-axes sont b & $\pm \frac{f}{2} + A$ en supposant $\frac{f^2}{4} +$

$bb = AA$, & par conséquent $\sqrt{\frac{f^2}{4} + bb} = A$. Pour intégrer à présent le premier membre de la différentielle transformée, je fais $m+z = x$ ce qui donne 1°. $\sqrt{z} = \sqrt{x-m}$, 2°. $dz = dx$, 3°. $\sqrt{a-z} = \sqrt{m+a-x}$.

Substituant toutes ces valeurs on a $\frac{dx \sqrt{x}}{m \sqrt{x-m} \cdot \sqrt{m+a-x}} =$

$$\frac{dx \sqrt{x}}{m \sqrt{mx + ax - xx - mm - am + mx}} = \frac{dx \sqrt{x}}{m \sqrt{(a+2m)x - xx - m(a+m)}}.$$

Cette différentielle se rapporte à la rectification de l'ellipse (Art. CCII.) : la comparant terme à terme avec la différentielle de l'Article CCII. $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{fz - zz - gg}}$, on a $m \times a + m =$

gg ; $a + 2m = f$; les deux demi-axes trouvés g , & $\frac{f}{2} +$

$\sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$ deviennent donc $\sqrt{m(a+m)}$ & $\frac{a+2m}{2} + \sqrt{\frac{aa+4am+4mm}{4} - am - mm}$, c'est-

à-dire, $\sqrt{m(a+m)}$ & $a+m$. Pour trouver à présent ceux de l'ellipse en question ici, il faut chercher les valeurs de a , & de m . Pour cela j'ai d'abord l'équation suivante $\sqrt{bb \pm fz - zz} = \sqrt{(a-z)(m+z)}$; ce qui donne par la comparaison terme à terme $am = bb$

& $a - m = \pm f$. Nous avons encore supposé $\frac{ff}{4} + bb = AA$, donc $\frac{ff}{4} = AA - bb = AA - am = AA - aa \pm fa$, ce qui donne $\pm \frac{f}{2} + A = a$. Mettant cette valeur de a dans $a - m = f$, on aura $\pm \frac{f}{2} + A - f = m$ ou $m = \mp \frac{f}{2} + A$; donc $a + m = \pm \frac{f}{2} + A \mp \frac{f}{2} + A = 2A$, & $\sqrt{m \times (a + m)} = \sqrt{2A \cdot \left\{ A \mp \frac{f}{2} \right\}}$ qui sont les deux demi-axes de l'ellipse cherchée.

CCXI.

COROLLAIRE. Si l'on a $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz - bb \pm fz}}$, il faut essayer si par des transformations on ne peut pas ramener cette différentielle à quelqu'un des cas précédens. Pour y parvenir, je fais $z = \frac{bb}{u}$; ce qui donne en faisant les mêmes calculs que nous avons déjà faits (Art. CCIX.) la transformée $\frac{-du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{bb \pm fu - uu}}$ qu'on voit évidemment s'intégrer par le Problème précédent, & dépendre de la rectification des mêmes ellipse & hyperbole. Les demi-axes de l'hyperbole sont b & $\pm \frac{f}{2} + A$, ceux de l'ellipse sont $\sqrt{2AA - Af}$ & $2A$. On suppose toujours $A = \sqrt{\left\{ \frac{ff}{4} + bb \right\}}$.

CCXII.

REMARQUE. Il est bon de faire observer ici de quel usage fréquent sont les transformations que nous avons enseignées dans le commencement de ce Traité. Elles sont, pour ainsi dire, la clef de tout ce Calcul, du moins

Réflexion sur le fréquent usage des transformations enseignées au commencement de ce Traité.

le facilitent-elles extrêmement. On voit aussi par les exemples que nous avons donnés jusqu'ici comment on ramène les différentielles dont on cherche l'intégration à d'autres différentielles dont l'intégrale nous est connue. Nous en allons encore donner des exemples.

CCXIII.

Autres différentielles qui sont dans le cas des précédentes.

PROBLEME 2. Trouver l'intégrale de $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz + bb \pm fz}}$.

SOLUTION. Ce Problème a deux cas, le premier lorsque le trinome $zz + bb \pm fz$ a ses racines réelles, le second lorsqu'il a ses racines imaginaires. Examinons ces deux cas séparément.

P R E M I E R C A S.

Lorsque $zz + bb \pm fz$ a ses racines réelles, je les représente par $z + m$, & $z + n$, quand il y a $+ fz$; & par $z - m$, $z - n$, quand il y a $- fz$. Je suppose $n > m$, supposition que je puis toujours faire. J'ai donc

$$\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(zz \pm fz + bb)}} = \frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(z \pm m) \cdot (z \pm n)}}.$$
 Soit

$$z \pm m = u; \text{ on a } dz = du; \sqrt{z} = \sqrt{u \pm m}, \text{ \& } \sqrt{z \pm n} = \sqrt{u \pm m \pm n}.$$
 La proposée se change donc en

$$\frac{du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{(u \pm m) \times (u \pm m \pm n)}} = \frac{du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{uu \pm 2um \pm un + mm - mn}}.$$

Mais comme (hyp.) $n > m$, la transformée peut être représentée par $\frac{du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{uu \pm ku - qq}}$. Elle s'intégrera donc (Article CCXII.) par la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole

l'hyperbole à la fois. Comparant cette dernière différentielle avec celle de l'Article que nous venons de citer, on trouve que les demi-axes de l'hyperbole sont ici q , & $\pm \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + qq}$, & que les demi-axes de l'ellipse sont $2\sqrt{\frac{kk}{4} + qq}$ & $\sqrt{2\left\{\frac{kk}{4} + qq\right\} \mp k\sqrt{\frac{kk}{4} + qq}}$
 $= \sqrt{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{kk}{4} + qq\right)} \times \sqrt{\left(\frac{kk}{4} + qq\right) \mp k\sqrt{\left(\frac{kk}{4} + qq\right)}}}$
 $= \sqrt{2\sqrt{\frac{kk}{4} + qq} \times \sqrt{\mp \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{kk}{4} + qq}}}$

Comparant à présent $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz \pm fz + bb}}$ avec la transformée $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz \pm nz \pm mz + mn}}$, on trouve 1°. dans le cas de $+fz \dots mn = bb$

$$m+n = f \dots$$

donc $\dots n = \frac{bb}{m} \dots$

& $m+n=f$ devient $mm+bb = fm$

ou bien $\dots mm - fm + \frac{ff}{4} = \frac{ff}{4} - bb$

ou $\dots m = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff}{4} - bb}$,

& par conséquent $\dots n = \frac{f}{2} \mp \sqrt{\frac{ff}{4} - bb}$

donc à cause de $m < n$ on a $m = \frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - bb}$

& $\dots n = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - bb}$

donc en supposant $\frac{ff}{4} - bb = AA$, on a $m = \frac{f}{2} - A$

$$\dots n = \frac{f}{2} + A.$$

Comparant maintenant la transformée $\frac{du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{uu \pm 2um \pm un + mm - mn}}$ D d

avec $\frac{du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{uu \pm ku - qq}}$, on trouve dans le même cas

$$\text{de } +fz \quad \dots \quad -2m + n = k$$

$$\text{donc } \dots \quad \frac{k}{2} = -m + \frac{n}{2}$$

$$\text{cette comparaison donne aussi } -mm + mn = qq$$

$$\text{donc } \dots \quad q = \sqrt{-mm + mn},$$

& en mettant pour m & n leurs valeurs trouvées ci-dessus, il nous viendra $\dots \quad q = \sqrt{fA - 2AA}$:

$$\text{on a aussi } \frac{nn}{4} - mn + m^2 + q^2 = \frac{k^2}{4} + q^2$$

$$\text{ou bien } \dots \quad \frac{nn}{4} - q^2 + q^2 = \frac{kk}{4} + qq,$$

$$\text{donc } \dots \quad \frac{n}{2} = \sqrt{\frac{kk}{4} + qq}.$$

Les demi-axes trouvés de l'hyperbole q & $\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{kk}{4} + qq}$

$$\text{font donc } \dots \quad q = \sqrt{fA - 2AA}$$

$$\& \dots \quad -m + n = 2A.$$

Les demi-axes de l'ellipse sont $n = \frac{f}{2} + A$

$$\& \sqrt{\frac{f}{2} + A} \times \sqrt{m - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{f}{2} + A} \times$$

$$\sqrt{\frac{f}{2} - A} = b.$$

2°. Dans le cas de $-fz$, faisant les mêmes calculs que ci-dessus, on trouve $\dots \quad mn = bb$

$$m + n = f$$

$$2m - n = -k$$

$$mm - nm = -qq,$$

$$\text{donc } \dots \quad q = \sqrt{fA - 2AA}$$

$$\& \dots \quad \sqrt{\frac{kk}{4} + qq} = \frac{n}{2}.$$

Les demi-axes de l'hyperbole sont donc

$$\begin{aligned}
 & q = \sqrt{fA - 2AA} \\
 \& \dots \dots \dots m = \frac{f}{2} - A : \\
 \text{ceux de l'ellipse sont} \dots \dots n = \frac{f}{2} + A \\
 \& \sqrt{n} \times \sqrt{\left\{ -m + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \right\}} = \sqrt{nn - mn} = \\
 \sqrt{\left\{ \frac{ff}{4} + fA + AA - \frac{ff}{4} + AA \right\}} = \sqrt{(2AA + fA)}.
 \end{aligned}$$

Si dans le cas de $-fz$, au lieu de supposer que les racines sont $z - m$, & $z - n$, on les suppose $m - z$, & $n - z$, comme on le doit faire lorsque $z < m$ & $< n$ (n étant toujours supposé $> m$) on fera dans ce cas $m - z = t$, & après les réductions & transformations ordinaires on aura $\frac{-dt}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{(m-t) \cdot (n-m+t)}}$, qui se rapporte à la différentielle du Problème 1. Art. CCX.

Pratiquant ici les mêmes calculs que nous avons faits plus haut, on trouve $\dots \dots mn = bb$

$$m + n = f$$

$$m(n - m) = qq$$

$$2m - n = \pm k.$$

Ces équations donnent un résultat qui est le même que le précédent. Je passe au cas où les racines sont imaginaires.

S E C O N D C A S.

Si $zz \pm fz + bb$ a ses racines imaginaires, je commence par faire évanouir le second terme, en faisant

$$z \pm \frac{f}{2} = u$$

ou $\dots \dots \dots z = u \mp \frac{f}{2},$

D d ij

ce qui donne $zz = uu + fu + \frac{ff}{4}$

. $dz = du$. . .

. $\sqrt{z} = \sqrt{u + \frac{f}{2}}$.

Substituant ces valeurs dans la proposée, on a

$\frac{du}{\sqrt{u + \frac{f}{2}} \cdot \sqrt{uu + \frac{ff}{4} + bb}}$, & en supposant $\frac{ff}{4} = bb$

$= AA$, on a $\frac{du}{\sqrt{u + \frac{f}{2}} \cdot \sqrt{uu + AA}}$. Je fais en-

suite $u + \sqrt{uu + AA} = t$

ou $t - u = \sqrt{uu + AA}$

& $tt - 2tu + uu = uu + AA$,

donc $u = \frac{tt - AA}{2t}$

$du = (tt + AA) \times \frac{dt}{2tt}$

. . . $\sqrt{u + \frac{f}{2}} = \frac{\sqrt{tt - AA + ft}}{\sqrt{2t}}$

$\sqrt{uu + AA} = \frac{\sqrt{t^2 + 2ttAA + A^2}}{\sqrt{+tt}}$

$= \frac{tt + AA}{\sqrt{2t}}$

$tt + AA \cdot \frac{dt}{2tt}$

La nouvelle transformée sera donc $\frac{\sqrt{tt - AA + ft}}{\sqrt{2t}} \times \left\{ \frac{tt + AA}{2t} \right\}$

$= \frac{\left\{ \frac{tt + AA}{2t} \right\} \times \frac{dt}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{t}}}{\frac{\sqrt{(tt - AA + ft)}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{t}}} = \frac{dt \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{(tt - AA + ft)}}$

$= \frac{dt \sqrt{2}}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{tt - AA + ft}}$, qui s'intègre par le Corollaire

du Problème 1. Art. CCXI.

Si $z < \frac{f}{2}$, au lieu de $z - \frac{f}{2} = u$, on fera $\frac{f}{2} - z = u$

& en supposant $\sqrt{uu + AA} - u = t$, la transformée sera $\frac{dt \sqrt{z}}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{t^2 - AA + ft}}$, qui s'intègre de la même manière que la précédente.

Pour ce qui regarde les demi-axes de l'ellipse & de l'hyperbole dans ce cas, nous ne nous arrêterons pas à détailler tous les calculs nécessaires pour les trouver, le lecteur doit être suffisamment exercé à les faire lui-même. En supposant, comme nous l'avons dit, $\frac{ff}{4} - bb = -AA$, il trouvera que les deux demi-axes de l'hyperbole sont A & $\pm \frac{f}{2} + b$, & ceux de l'ellipse $2b$, & $\sqrt{2b \times (\pm \frac{f}{2} + b)} = \sqrt{2bb \pm bf}$.

CCXIV.

PROBLEME 3. Trouver l'intégrale de $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{fz - bb - zz}}$. Troisième exemple.

SOLUTION. La quantité $\sqrt{fz - bb - zz}$ peut avoir cette autre forme $\sqrt{\frac{ff}{4} - bb - \left\{\frac{f}{2} - z\right\}^2}$. En la considérant sous cette forme, on remarquera que si $\frac{ff}{4}$ est $< bb$, la différentielle proposée est imaginaire, & par conséquent sans intégrale; donc pour que le Problème soit possible, il faut que $fz - bb - zz$ ait ses racines réelles. Je les suppose $a - z$ & $z - c$, la proposée sera $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(a-z) \times (z-c)}} = \frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{ac + cz - zz - ac}}$.

Je fais $a - z = u$, donc $dz = -du$, &c; après les opérations ordinaires on trouve la transformée

$$\frac{-du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{a-u} \cdot \sqrt{a-u-c}} = \frac{-du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{aa - ac - 2au + cu + uu}}$$

mais a doit toujours être supposé $> c$, car $a - z$ & $z - c$ doivent toujours être positifs; si l'un des deux étoit négatif, la différentielle seroit imaginaire, ce qui est contre l'hypothèse. S'ils sont tous deux négatifs, il les faut changer en $z - a$, & $c - z$ qui ne diffèrent de $a - z$ & de $z - c$ que par le changement des signes; donc $a > z$ & $z > c$, donc $a > c$; la proposée peut donc être supposée égale à $\frac{-du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{gg \pm ku + uu}}$ qui s'intègre par le Problème 2.

Pour trouver les demi-axes de l'ellipse & de l'hyperbole, j'ai d'abord en comparant les deux premières différentielles $a + c = f$
 $ac = bb$.

Je compare ensuite les deux dernières, cette comparaison me donne $aa - ac = gg$

$$2a - c = -k$$

$$aa - ac + \frac{cc}{4} = \frac{kk}{4}$$

donc $\frac{kk}{4} > gg$,
 donc les racines sont réelles. De plus $a > c$ donne $2a > c$, & k positif. Comparant maintenant notre transformée $\frac{-du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{uu - ku + gg}}$ avec $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz - fz + bb}}$ dont les demi-axes ont été trouvés (Art. CCXIII. n°. 2.), $zz - fz + bb$ ayant ses racines réelles; faisant $A' = \sqrt{\frac{kk}{4} - gg}$, on trouvera que les demi-axes de l'hyperbole sont $\sqrt{kA' - 2A'A'}$ & $\frac{k}{2} - A'$, & que ceux de l'ellipse sont $\sqrt{2A'A' + A'k}$, & $A' + \frac{k}{2}$: or $k = 2a - c$, $gg = aa - ac$, $a + c = f$, & $ac = bb$. Substituant

donc pour A' & k leurs valeurs en b & en f , & faisant $\sqrt{\frac{bb}{4} - ff} = A$, on trouve que les demi-axes de l'hyperbole sont $2A$ & $\sqrt{fA - 2AA}$, & ceux de l'ellipse sont b , & $\frac{f}{2} + A$.

CCXV.

PROBLEME 5. Trouver l'intégrale de $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{zz + bb \pm fz}}$. Quatrième exemple.

SOLUTION. Le dénominateur a ses deux racines réelles, ou il les a imaginaires.

P R E M I E R C A S.

Lorsque $zz + bb \pm fz$ a ses deux racines réelles, elles seront $z + a$, & $z + c$ dans le cas de $+fz$, & $z - a$, $z - c$ dans le cas de $-fz$. A présent il est évident que

$$\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz + bb}} = \frac{z dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz \pm az \pm cz + ac}}. \text{ Je fais } z \pm a$$

$= y$, en supposant $c > a$, on a $z = y \mp a$; $dz = dy$; $z \pm c = y \mp a \pm c$. Substituant ces valeurs de z on aura

$$\frac{z dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{z \pm a} \cdot \sqrt{z \pm c}} = \frac{y \mp a \cdot dy}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{(y \mp a) \cdot (y \mp a \pm c)}} =$$

$$\frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{(y \mp a) \cdot (y \mp a \pm c)}} \mp \frac{a dy}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{(y \mp a) \cdot (y \mp a \pm c)}}. \text{ Or}$$

comme par la supposition $c > a$, on voit clairement que ces deux différentielles peuvent se représenter par les deux

suivantes $\frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{yy \pm ny - mm}}$ & $\frac{dy}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{yy \pm ny - mm}}$, la pre-

miere desquelles se rapporte à l'Article CCVI., & la seconde au Corollaire du Problème I. Art. CCXI.

On a ici $ac = bb$

$$a + c = f$$

$$-2a + c = \pm n$$

$$-aa + ac = mm.$$

Les axes de l'hyperbole sont m & $\pm \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + mm}$,
c'est-à-dire $\sqrt{-aa + ac}$ & $-a + c$. Or a étant par
la supposition $< c$, $= \frac{f}{2} - A$, & $c = \frac{f}{2} + A$, donc
les axes de l'hyperbole sont $\sqrt{fA - 2AA}$ & $2A$. Les
axes de l'ellipse sont $\sqrt{2\sqrt{\frac{nn}{4} + mm} \times (\pm \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} + mm})}$
& $2\sqrt{\frac{nn}{4} + mm}$, c'est-à-dire $\sqrt{c \times a} = b$, & c ou
 $\frac{f}{2} + A$.

CCXVI.

REMARQUE. Si lorsqu'on a $-fz$, les racines au lieu
d'être $z - a$ & $z - c$, sont $a - z$, & $c - z$, en suppo-
sant toujours $c > a$; alors on fera $a - z = u$, ce qui
donne en opérant comme ci-dessus $\frac{z dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(a-z) \cdot (c-z)}}$

$$= \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(a-u) \cdot (c-a+u)}} - \frac{adu}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{(a-u) \cdot (c-a+u)}} \text{ dont,}$$

la première partie s'intègre par l'Article CCIX. & la se-
conde par l'Article CCX. Lorsqu'on a $-fz$, les demi-
axes de l'hyperbole sont $\sqrt{fA - 2AA}$ & $\frac{f}{2} - A$, &
ceux de l'ellipse sont $\sqrt{2AA + fA}$ & $A + \frac{f}{2}$.

CCXVII.

CCXVII.

SECOND CAS.

Lorsque $zz + fz + bb$ a ses deux racines imaginaires, on fait d'abord évanouir le second terme en faisant $z + \frac{f}{2} = u$, ce qui donne $dz = du$, $\sqrt{z} = \sqrt{u + \frac{f}{2}}$; $zz = uu + fu + \frac{ff}{4}$; on aura donc la transformée

$$\frac{du \sqrt{u + \frac{f}{2}}}{\sqrt{uu + bb - \frac{ff}{4}}} : \text{ \& en faisant } bb - \frac{ff}{4} = AA, \text{ il}$$

$$\text{vient } \frac{du \sqrt{u + \frac{f}{2}}}{\sqrt{uu + AA}} = \frac{u du + \frac{f}{2} du}{\sqrt{u + \frac{f}{2}} \cdot \sqrt{uu + AA}}, \text{ comme}$$

il est évident en multipliant haut & bas par $\sqrt{u + \frac{f}{2}}$, ce qui ne change rien à la valeur.

Soit à présent $u + \sqrt{uu + AA} = y$; donc $uu - 2uy + yy = uu + AA$, donc $u = \frac{yy - AA}{2y}$

& $du = \frac{dy}{2yy} \times yy + AA$,

on a aussi $\sqrt{uu + AA} = \frac{yy + AA}{2y}$

& de même $\sqrt{u + \frac{f}{2}} = \frac{\sqrt{yy - AA + fy}}{\sqrt{2y}}$.

La première partie $\frac{u du}{\sqrt{u + \frac{f}{2}} \cdot \sqrt{uu + AA}}$ de la pro-

posée devient donc $\frac{\frac{dy}{4y^2} \times y^2 - A^2}{\frac{\sqrt{yy - AA + fy}}{\sqrt{2y}} \times \frac{yy + AA}{2y}} =$

E c

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{dy}{2y} \times \overline{yy - AA} \times \frac{yy + AA}{2y}}{\frac{\overline{yy - AA + fy}}{\sqrt{2y}} \times \frac{yy + AA}{2y}} = \frac{\frac{dy}{2yy} \times \overline{yy - AA}}{\frac{\overline{yy - AA + fy}}{\sqrt{2y}}} \\
&= \frac{\frac{dy \sqrt{2} \cdot \sqrt{y}}{2y \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{yy - AA + fy}}}{\frac{AA dy \sqrt{2} \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{y} \cdot y \sqrt{y} \cdot \sqrt{yy - AA + fy}}} \\
&= \frac{\frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{yy - AA + fy}}}{\frac{AA dy}{\sqrt{2} \cdot y \sqrt{y} \cdot \sqrt{yy - AA + fy}}} \cdot \text{La se-} \\
&\quad \text{conde partie } \frac{\overline{u + \frac{f}{2}} \cdot \overline{uu + AA}}{\sqrt{u + \frac{f}{2}} \cdot \sqrt{uu + AA}} = \text{de même} \\
&\quad + \frac{\frac{f dy}{4yy} \times \overline{yy + AA}}{\frac{\overline{yy - AA + fy}}{\sqrt{2y}} \times \frac{yy + AA}{2y}} = \frac{+ \frac{f dy}{2y}}{\frac{\overline{yy - AA + fy}}{\sqrt{2y}}} = \text{enfin} \\
&\quad \frac{\frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{yy - AA + fy}}}{\frac{AA dy}{\sqrt{2} \cdot y \sqrt{y} \cdot \sqrt{yy - AA + fy}}} + \frac{f dy}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{yy - AA + fy}}
\end{aligned}$$

La transformée entière est donc

dont la première partie s'intègre par l'article CCVI. ; la seconde par l'article CCIX. , & la troisième par l'art. CCXI.

Si quand on a $zz - fz + bb$, z est $< \frac{f}{2}$, en sorte qu'il faille supposer $\frac{f}{2} - z = u$, alors en pratiquant ce qui a déjà été fait (Problème 2.) dans un cas semblable, on aura (en faisant $\sqrt{uu + AA} - u = t$) la transformée suivante $\frac{dt \sqrt{t}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{tt - AA + ft}} - \frac{AA dt}{\sqrt{2} \cdot t \sqrt{t} \cdot \sqrt{tt - AA + ft}} - \frac{f dt}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{tt - AA + ft}}$ dont les trois parties s'intègrent de la même manière que les trois ci-dessus.

Dans le cas présent des racines imaginaires, l'intégration de $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz + bb}}$ dépend des mêmes ellipse & hyperbole

que $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz + fz + bb}}$ en faisant les mêmes suppositions.

CCXVIII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. On doit conclure de tout ce que nous venons de dire pour résoudre les Problèmes précédens que l'intégration de la différentielle $\frac{z^{\pm \frac{1}{2}} dz}{\sqrt{a \pm bz \pm czx}}$ dépend toujours de la rectification d'une ou de plusieurs sections coniques.

C H A P I T R E X V I.

Suite des Chapitres précédens sur les différentielles dont l'intégration dépend de la rectification des sections coniques.

CCXIX.

Soit cherchée d'abord l'intégrale de $\frac{x^{\pm \frac{n}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$, Application aux exemples les plus généraux.
 n étant un nombre entier impair, & a, b, c , des coefficients quelconques.

Pour résoudre ce Problème 1°. prenons la différence de $x^p \times \sqrt{a + bx + cxx}$, elle sera Premier exemple.

$$\begin{aligned} & p x^{p-1} dx \times (a + bx + cxx)^{\frac{1}{2}} + x^p \times \frac{\frac{b}{2} dx + cxdx}{\sqrt{a + bx + cxx}} = \\ & \frac{p x^{p-1} dx \times (a + bx + cxx) + x^p \cdot \left\{ \frac{b}{2} dx + cxdx \right\}}{\sqrt{a + bx + cxx}} = \end{aligned}$$

E e ij

$$px^{p-1} dx + \left(\frac{b}{2} + bp\right) x^p dx + (c + cp) x^{p+1} dx$$

On voit par cette différentielle que l'intégrale de $\frac{px^{p-1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ est égale à celle de $x^p \sqrt{a+bx+cx^2}$

$$+ \int \frac{\left(\frac{b}{2} + bp\right) x^p dx + (c + cp) x^{p+1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \text{ c'est-à-dire}$$

moins l'intégrale de $\frac{\left(\frac{b}{2} + bp\right) x^p dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, & de $\frac{(c + cp) x^{p+1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$; elle dépend donc de ces deux der-

nières. Donc en général l'intégration de $\frac{x^{-q-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ dépend de celle de $\frac{x^{-q+\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, & de celle de $\frac{x^{-q+\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, tant que q n'est pas $= 1$; car si $q = 1$, $p - 1 = -\frac{1}{2}$ & $p = -\frac{1}{2}$, & $\frac{b}{2} + bp = 0$.

Donc en donnant successivement différentes valeurs à q , on trouvera que toutes les différentielles $\frac{dx}{x^q \sqrt{x} \sqrt{a+bx+cx^2}}$, q étant un nombre entier positif, s'intégreront aussi-tôt qu'on connoîtra l'intégrale des différentielles $\frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{a+bx+cx^2}}$ & $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ que nous avons appris à trouver dans les deux Chapitres précédens.

CCXX.

On remarquera que l'intégrale de $\frac{dx}{x \sqrt{x} \sqrt{a+bx+cx^2}}$ ne dépend que de $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$; car alors $q = +1$.

& par conséquent $\frac{b}{2} + bp = 0$, donc la première différentielle s'évanouit. Ainsi il ne reste que la seconde à laquelle répond $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a + bx + cxx}}$. On prouvera aussi que $\frac{x^{q+\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ dépend de $\frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ & de $\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$. Car comme nous avons vu (Art. précédent) $\frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ dépend de $\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ & de $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$: de même $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ dépend de $\frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$, & de $\frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ &c. donc réciproquement.

CCXXI.

On peut encore s'en assurer d'une autre manière en faisant $x = u^{-1}$; $dx = -\frac{du}{uu}$, ce qui donnera la transformée suivante $-\frac{du \times u^{-q-\frac{1}{2}}}{\sqrt{m + nu + quu}}$, qui dépend, comme nous venons de le voir, de $\frac{u^{-\frac{1}{2}} du}{\sqrt{m + nu + quu}}$ & de $\frac{u^{-\frac{3}{2}} du}{\sqrt{m + nu + quu}}$, c'est-à-dire, de $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ & de $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{a + bx + cxx}}$.

CCXXII.

Différentiel-
les qui dépen-
dent de la
précédente.

COROLLAIRE 1. Il suit de là que l'intégration de $x^{\pm \frac{n}{2}} dx \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}^{\frac{p}{2}}$ p étant un nombre entier positif, dépend encore de $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ & $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}$.

En effet si on multiplie la proposée par $\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, elle deviendra composée de différentes parties de la forme

de $\frac{x^{\pm \frac{k}{2}} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$; donc &c.

CCXXIII.

COROLLAIRE 2. Soit cherchée l'intégrale de

$\frac{x^p dx \cdot x^{\frac{n}{2}} dx}{a+bx+cx^2}$, p & n étant des nombres entiers po-

sitifs. On supposera $\frac{x}{a+bx+cx^2} = z^{-1}$ ce qui donne

$xz = a+bx+cx^2$ ou $xx + \frac{bx-xz}{c} = -\frac{a}{c}$, donc

$xx + \frac{bx-xz}{c} + \frac{bb+zz}{4cc} - \frac{bz}{2cc} = -\frac{a}{c} + \frac{bb+zz}{4cc} -$

$\frac{bz}{2cc}$, ou $x = \frac{z+b}{2c} \pm \sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}$.

Par le moyen de cette valeur de x on trouvera celle de dx ; & en faisant les substitutions ordinaires, on aura une transformée composée de différentes parties intégrables chacune séparément par l'article CCXIX. & dépendantes par conséquent de nos deux différentielles.

CCXXIV.

COROLLAIRE 3. Si on avoit $\frac{x^{-p} \cdot x^{\frac{n}{2}} dx}{a + bx + cx^2}$, on feroit $x = \frac{1}{u}$, ce qui donne $x^{-p} = u^p$, $dx = -\frac{du}{u^2}$, & enfin la transformée suivante $\frac{-u^{p-2} \cdot u^{\frac{n}{2}} du}{m + nu + gu^2}$ qui s'integre par l'article précédent, excepté dans le cas de $p = +1$ que nous allons examiner. Donc la proposée dépend de $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(f+gu+hu^2)}}$ & de $\frac{du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{(f+gu+hu^2)}}$, ou ce qui est la même chose, de $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$ & de $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(a+bx+cx^2)}}$.

Dans le cas de $p = +1$ la proposée est $\frac{dx \cdot x^{\frac{n}{2}}}{x \cdot a + bx + cx^2}$.

On supposera $\frac{x}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{z}$, ce qui donnera comme plus haut $x = \frac{-b+z}{2c} \pm \sqrt{-\frac{a}{c} + \frac{bb-2bz+zz}{4cc}}$, $dx = +\frac{dz}{2c} \pm \frac{bdz - zdz}{4cc \cdot \sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}}$, & aussi

$\frac{x^{\frac{n}{2}}}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{z^{\frac{n}{2}}} = z^{-\frac{n}{2}}$: donc en mettant pour

x, dx , &c. leurs valeurs en z & dz , il nous viendra la

transformée suivante $z^{-\frac{n}{2}} \times \left\{ +\frac{dz}{2c} \pm \frac{(b-z) dz}{4cc \sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}} \right\}$.

Je multiplie le haut & le bas par $\frac{-b+z}{2c} \pm$

$\sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}$; ce qui réduira le dénominateur à une constante, & la transformée fera en partie intégrable absolument, & en partie intégrable par les Articles CCXIX. & CCXXII. en supposant l'intégration de $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}}$ & de $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}}$, c'est-à-dire de nos deux différentielles en question.

CCXXV.

COROLLAIRE 4. De là il suit que $x^{\pm \frac{n}{2}} dx \times (a+bx+cx^2)^{\pm \frac{p}{2}}$ dépend de l'intégration des deux différentielles $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ & $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}$, c'est-à-dire de la rectification des sections coniques.

CCXXVI.

Différentielle qui dépend de la rectification de l'hyperbole seule.

REMARQUE. Il arrive cependant quelquefois que la différentielle $x^{\pm \frac{n}{2}} dx \cdot (a+bx+cx^2)^{\frac{p}{2}}$ ne dépend pas de la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole, mais d'une de ces deux courbes seulement. Soit pour le prouver

$dx \sqrt{\frac{(p+2a)}{2a} xx - aa}$ l'élément d'une hyperbole,

soit $x + \sqrt{xx - aa} = z$, & par conséquent $x = \frac{zz+aa}{2z}$
 $dx = (zz - aa) \frac{dz}{2zz}$; supposons de plus $\frac{p}{2a} = q$, on aura la transformée $\frac{dz}{2zz} \left\{ (zz+aa)^2 \times (q+1) - 4aaz \right\}^{\frac{1}{2}}$:
 faisons

faisons $z z = a u$, $z = \sqrt{a u}$, $d z = \frac{a d u}{2 \sqrt{a u}}$, on aura la différentielle suivante $\frac{a d u}{4 a u \sqrt{a u}} \times \{ (a u + a a)^2 \times (q + 1) - 4 a^3 u \}^{\frac{1}{2}} =$ en divisant par $\sqrt{a}$, $\frac{d u}{4 u \sqrt{u}} \{ (u + a)^2 - (q a + a) - 4 a a u \}^{\frac{1}{2}}$, d'où l'on voit que $\frac{d u \sqrt{u u + 2 p u a + a a}}{u \sqrt{u}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole seule, p étant $= \frac{q - 1}{q + 1}$.

C C X X V I I.

Si on propose de trouver l'intégrale de $x^{\pm \frac{n}{2}} d x$, Second exemple,
 $(a \mp x x)^{\pm \frac{p}{2}}$, p & n exprimant des nombres entiers & a étant positif ou négatif.

1°. On prendra $\frac{x^q d x}{\sqrt{a \mp x x}}$. Pour trouver l'intégrale de cette différentielle, comparons-la avec la formule (X) de l'Article LXXXVIII.

$$\int g x^m d x (a \mp b x^n)^p = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} u x^{m+1} \left\{ - \left(\frac{m+1+n p+n}{m+1} \right) \times \frac{b}{a} \times \int g x^{m+n} d x \times a \mp b x^n \right\} - \&c. \text{ on trouvera } \dots$$

$$g = 1$$

$$m = q$$

$$b = 1$$

$$n = 2$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$u = a \mp x x + \frac{1}{2}$$

faisant ces substitutions dans la formule, on trouvera

E f

l'intégrale de $\frac{x^q dx}{\sqrt{a+xx}} = \frac{x^{q+1} \sqrt{a+xx}}{(q+1)a} \pm \frac{q+2}{(q+1)a}$

$\int \frac{x^{q+2} dx}{\sqrt{a+xx}}$: d'où l'on voit que si on suppose $q = \frac{k}{2}$,

k étant un nombre impair positif ou négatif, $\frac{x^q dx}{\sqrt{a+xx}}$ & $\frac{x^{q+2} dx}{\sqrt{a+xx}}$ dépendront toujours l'une de l'autre. Donc

$\frac{x^{\frac{1}{2} \pm 2f} dx}{\sqrt{a+xx}}$ dépend toujours de $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a+xx}}$, c'est-à-dire de la rectification de l'hyperbole, (Art. CCIX.) & quelquefois de celle de l'ellipse.

2°. $x^{\frac{1}{2} \pm 2f} dx (a+xx)^{\frac{p}{2}}$ en dépend aussi, parce qu'il n'y a qu'à la multiplier haut & bas par $\sqrt{a+xx}$, ce qui la changera en une suite de termes de la forme $\frac{x^{\frac{1}{2} \pm 2k} dx}{\sqrt{a+xx}}$.

3°. On prouvera de même que $\frac{dx \cdot x^{-\frac{1}{2} \pm 2f}}{\sqrt{a+xx}}$ & $dx \cdot x^{-\frac{1}{2} \pm 2f} \times (a+xx)^{\frac{p}{2}}$ dépendent de $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{a+xx}}$, c'est-à-dire (Art. CCX. & CCXIII.) de la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole.

4°. Si on prend la différence de $\frac{x^{\frac{m}{2}}}{(a+xx)^{\frac{g}{2}}}$, m & g étant des nombres impairs, & m positif ou négatif, on aura $\frac{m x^{\frac{m}{2}-1} dx}{2(a+xx)^{\frac{g}{2}}} \pm \frac{g x^{\frac{m}{2}+1} dx}{2(a+xx)^{\frac{g}{2}+1}}$, ce qui nous

montre que l'intégration de $\frac{x^{\pm \frac{n}{2}} dx}{(a \mp xx)^{\frac{p}{2}}}$ dépend de celle de $\frac{x^{\pm \frac{n}{2} \mp 2} dx}{(a \mp xx)^{\frac{p}{2} \mp 1}}$, & qu'ainsi (n°. 1, 2, 3 du présent Article) elle dépend de $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a \mp xx}}$ & de $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{a \mp xx}}$;

CCXXVIII.

COROLLAIRE 1. Puisque $x^{\pm \frac{n}{2}} dx \cdot (a \mp xx)^{\pm \frac{p}{2}}$ dépend (Art. CCXXVII.) de la rectification des sections coniques, il s'ensuit en faisant $a \mp xx = uu$, que $(a \mp uu)^{(\pm \frac{n}{2} - 1) \times \frac{1}{2}} \times u^{\pm p \mp 1} du$ en dépend aussi, & en faisant $u = \frac{1}{y}$, que $(k \pm yy)^{\pm \frac{n-2}{4}} \times y^{\mp p \mp \frac{n}{2} - 2} dy$ en dépend encore : donc en général $(a \pm byy)^{\pm \frac{n}{4} - \frac{1}{2}} \times y^{\pm p} dy$, & $(a \pm byy)^{\pm \frac{n}{4} - \frac{1}{2}} \times y^{\pm \frac{q}{2}} dy$ en dépendent.

Autres différentielles dont l'intégrale suit de celle de notre second exemple.

CCXXIX.

COROLLAIRE 2. Si la proposée étoit $(ax \mp b)^p dx \times (f \mp gx \mp hxx \pm x^3)^{\pm \frac{n}{2}}$, n exprimant un nombre entier impair, & p un nombre entier positif quelconque, dans ce cas comme (Art. LXXXV. Introd.) $f \mp gx \mp hxx \pm x^3$ a toujours au moins une racine réelle, on la supposera $c \pm x = z$; faisant la substitution, on aura une différentielle composée de différens termes tous intégrables par l'Article CCXXV.

CCXXX.

COROLLAIRE 3. Si on a $x^p dx (f+gx+hx^2)^{\frac{n}{2}}$, n & p étant des nombres entiers positifs on fera $f+gx+hx^2=z^2$, ce qui donnera $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{c}{2} + \frac{d}{2}z^2}$, a, c, d étant des constantes, la transformée s'intégrera par le Corollaire précédent.

Si $n = -1$ ou -2 , p étant positif, en faisant la même transformation que dans le commencement de cet article, la proposée s'intégrera de la même manière; car $\frac{dx}{x^2} = \frac{3dz^2 dz}{2z^2 \sqrt{\frac{c}{2} + \frac{d}{2}z^2}} = \frac{3dz}{2\sqrt{\frac{c}{2} + \frac{d}{2}z^2}}$ &c; si p est positif & n un nombre négatif, tel que $1 + \frac{2n}{3} = \pm \frac{k}{2}$, k étant toujours comme ci-dessus un nombre entier impair, alors faisant $f+gx+hx^2 = a+uu$, on intégrera les différentes parties de la transformée par les Articles CCXXVII. & CCXXVIII. & si k est un nombre pair, la proposée se réduit à des différentielles logarithmiques réelles ou imaginaires.

Si n est positif ou $= -1$, ou $= -2$, ou que $1 + \frac{2n}{3} = \pm \frac{k}{2}$ & que $g=0$, on réduira la proposée au cas de l'Article CCXXIX. p étant positif ou négatif: car il n'y a qu'à faire $f+hx^2 = z^2$.

CCXXXI.

COROLLAIRE 4. Si on avoit à intégrer $x^{\frac{n}{2}} dx (a \mp xx)^{\frac{k}{2}}$, & qu'on supposât $a \mp xx = uu$, $\mp 2x dx$

$= 2udu$, on aura une transformée $u^{k+1} du (b \mp uu)^{\frac{n-3}{2}}$; ce qui nous montre que k étant un nombre entier positif ou négatif, & n un nombre entier positif & impair, la proposée s'intègre (Article précédent) par la rectification des sections coniques, & qu'elle peut s'intégrer par cette rectification, n étant impair & négatif.

CCXXXII.

Si on demande l'intégrale de $x^p dx (f + gx + hxx)^{\frac{n}{2}}$, Troisième exemple.
 p étant un nombre entier positif & n positif ou négatif, je la trouve ainsi :

$$\begin{aligned} &\text{Je fais } f + gx + hxx = z^2; \text{ donc } xx + \frac{gx}{h} + \frac{gg}{4hh} \\ &= \frac{z^2 - f}{h} + \frac{gg}{4hh}, \text{ \& } x = -\frac{g}{2h} \pm \frac{1}{2h} \sqrt{4hz^2 - 4fh + gg}, \\ &\text{\& en faisant } z^2 = uu, \text{ on aura } dx = \pm \frac{u du}{\sqrt{uuh - fh + \frac{gg}{4}}}, \end{aligned}$$

& on trouvera en faisant les substitutions une transformée intégrable par des arcs de sections coniques.

Si $g = 0$, l'intégration ne se fera pas moins de la même manière, p & n étant positifs ou négatifs.

CCXXXIII.

Soit encore la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)}}$ Quatrième exemple.
 dont on cherche l'intégrale. Pour la trouver, je distingue deux cas ; car le dénominateur a ses racines réelles ou imaginaires.

1°. S'il a des racines réelles, je suppose que $mx + n$ en

est une : je fais $mx+n=z$; donc $x=\frac{z-n}{m}$; $dx=\frac{dz}{m}$.

L'autre racine fera du troisième degré. On aura donc une transformée de cette forme $\frac{k dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(p+qz+rz^2+sz^3)}}$.

Soit à présent $z=\frac{1}{u}$; $dz=-\frac{du}{u^2}$; $zz=\frac{1}{uu}$, $z^3=\frac{1}{u^3}$; on aura donc en faisant les substitutions

$$\frac{\frac{K du}{uu}}{\sqrt{\frac{1}{u}} \cdot \sqrt{\left\{p + \frac{q}{u} + \frac{r}{uu} + \frac{s}{u^3}\right\}}} = \frac{\frac{K du}{uu}}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{u\sqrt{u}} \sqrt{(pu^3+qu+ru+s)}} \\ = \text{enfin } \frac{-du}{\sqrt{(pu^3+qu+ru+s)}}.$$

Or on voit que cette transformée se rapporte à des arcs de sections coniques (Art. CCXXX.).

2°. Si le dénominateur $a+bx+cx^2+ex^3+fx^4$ a ses racines imaginaires, nous avons démontré (Introd. Art. LXXXII.) qu'une pareille quantité se pouvoit diviser en deux facteurs trinomes réels. Soient ces deux facteurs $g+lx+kxx$, & $m+nx+rx^2$, on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(g+lx+kxx)} \cdot \sqrt{(m+nx+rx^2)}} \\ = (\text{en multipliant ce dénominateur haut \& bas par } \sqrt{g+lx+kxx}) \frac{dx}{(g+lx+kxx) \cdot \frac{\sqrt{(m+nx+rx^2)}}{\sqrt{(g+lx+kxx)}}}, \text{ \& en} \\ \text{nommant } \varphi \text{ le quotient de cette division, \& } g'x+\delta \text{ le} \\ \text{reste, on a la proposée} = \frac{dx}{(g+lx+kxx) \cdot \sqrt{\varphi + \frac{g'x+\delta}{g+lx+kxx}}}$$

$$\text{Soit à présent } \frac{g'x+\delta}{g+lx+kx^2} = z^{-1}, \text{ on a } g'zx+\delta z = \\ g+lx+kxx; \text{ donc } xx + \frac{lx-g'zx}{k} = \frac{\delta z - g}{k}; \text{ donc} \\ xx + \frac{lx-g'zx}{k} + \frac{ll-2g'lz+g'g'z^2}{4kk} = \frac{\delta^2 z - g}{k} +$$

$\frac{ll - 2g'lz + g'g'zz}{4kk}$: donc enfin prenant la racine quarrée

$$x = \frac{g'z-l}{2k} \pm \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2} \text{ \& } xx = \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2$$

$$\pm \left\{ \frac{g'z-l}{k} \right\} \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2} + \frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2.$$

Le dénominateur devient donc $\sqrt{\varphi z + 1} \times \left\{ g + \frac{g'lz-ll}{2k} \right.$

$$\pm l \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2} + 2k \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2 \pm$$

$$g'z \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2} \pm l \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2}.$$

$\pm \delta z - g \}$. Réduisant cette quantité, elle devient

celle-ci $\sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \times \left\{ \frac{g'g'z-lg'}{2k} + \delta \pm \right.$

$$g' \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2} \text{ . On a aussi } dx = \frac{g'dz}{2k} \pm$$

$$\frac{\frac{\delta dz}{k} \pm \frac{l g'dz \pm g'g'z dz}{2kk}}{2 \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2}} \text{ . La transformée entière fera}$$

$$\text{donc } \frac{\frac{dz}{k} \times \left\{ g' \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2} \pm \delta \pm \frac{l g' \pm g'g'z}{2k} \right\}}{2 \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2}}.$$

$$\sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \cdot \times \left\{ \frac{g'g'z-lg'}{2k} + \delta \pm g' \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2} \right\}$$

Je multiplie cette différentielle haut & bas par $\frac{g'g'z-lg'}{2k} + \delta$

$$\pm g' \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{ \frac{g'z-l}{2k} \right\}^2}, \text{ ce qui rend le dénomina-}$$

$$\text{teur} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \times \left[\left(\frac{g'g'z-lg'}{2k} \right)^2 + 2\delta \times \right.$$

$$\left. \left(\frac{g'g'z-lg'}{2k} \right) + \delta\delta - g'g' \times \left\{ \frac{\delta z-g}{k} + \left(\frac{g'z-l}{2k} \right)^2 \right\} \right]$$

$$= \sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \cdot \times \left[\frac{g'^4 zz}{4kk} - \frac{g'^3 lz}{2kk} + \frac{ll g'g'}{4kk} + \right.$$

$$\left. \frac{\delta g'g'z}{k} - \frac{\delta lg'}{k} + \delta\delta - \frac{\delta g'g'z}{k} + \frac{g'^2 g}{k} - \frac{g'^4 zz}{4kk} + \frac{g'^3 lz}{2kk} - \right.$$

$$\left. \frac{ll'g'g'}{4kk} \right] = (\text{en effaçant ce qui se détruit}) \sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \\ \times \left\{ \delta\delta - \frac{\delta l g'}{k} + \frac{g'^2 g}{k} \right\}. \text{ Le numérateur multiplié par la} \\ \text{même quantité devient } \frac{dz}{k} \times \left[\frac{g'^2 z - l g' g'}{2k} \sqrt{\frac{\delta z - g}{k} + \left\{ \frac{g' z - l}{2k} \right\}^2} \right. \\ \pm \frac{\delta g' g' z + \delta l g'}{2k} \mp \frac{2 g'^3 l z \pm g'^4 z z \pm ll'g'g'}{4kk} + \delta g' \sqrt{\frac{\delta z - g}{k} + \left\{ \frac{g' z - l}{2k} \right\}^2} \\ \pm \delta\delta \mp \frac{\delta l g' + \delta g'^2 z}{2k} \mp \frac{g' g' \delta z \pm g' g' g}{k} \mp \frac{g'^4 z z \pm 2 g'^3 l z \pm g' g' l l'}{4kk} \\ \left. - \delta g' \sqrt{\frac{\delta z - g}{k} + \left\{ \frac{g' z - l}{2k} \right\}^2} + \frac{l g' g' - g'^3 z}{2k} \sqrt{\frac{\delta z - g}{k} + \left\{ \frac{g' z - l}{2k} \right\}^2} \right].$$

On voit en effaçant ce qui se détruit, que cette quantité se réduit à $\frac{dz}{k} \times \pm \left\{ \delta\delta - \frac{\delta l g'}{k} + \frac{g' g' g}{k} \right\}$. La transformée est donc

$$\frac{\frac{dz}{k} \times \pm \left\{ \delta\delta - \frac{\delta l g'}{k} + \frac{g' g' g}{k} \right\}}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \cdot 2 \sqrt{\frac{\delta z - g}{k} + \left\{ \frac{g' z - l}{2k} \right\}^2} \times \left\{ \delta\delta + \frac{g' g' g - \delta l g'}{k} \right\}} \\ = \frac{\pm dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \times 2k \sqrt{\frac{\delta z - g}{k} + \left\{ \frac{g' z - l}{2k} \right\}^2}}. \text{ Pour}$$

intégrer cette différentielle, je fais $z = \frac{1}{u}$, $dz = -\frac{du}{uu}$;

ce qui donne $\frac{\pm \frac{du}{uu}}{\sqrt{\frac{1}{u}} \cdot \sqrt{\frac{\varphi}{u} + 1} \cdot 2k \sqrt{\frac{\frac{\delta}{u} - g}{k} + \left\{ \frac{\frac{g'}{u} - l}{2k} \right\}^2}}$

$$= \frac{\pm \frac{du}{uu}}{\frac{1}{u} \sqrt{\varphi + u} \cdot 2k \sqrt{\frac{\delta - gu}{ku} + \frac{g'g' - 2g'l u + ll'uu}{4kk uu}}} \\ = \frac{\pm \frac{1}{u} \sqrt{\varphi + u} \cdot 2k \sqrt{\frac{\delta - gu}{ku} + \frac{g'g' - 2g'l u + ll'uu}{4kk uu}}}{\pm du} \\ = \frac{\pm \sqrt{\varphi + u} \cdot \sqrt{(4\delta k - 2g'l)u + (ll' - 4kg)uu + g'g'}}{\pm du} = \frac{\pm \sqrt{ff \pm pu \pm quu}}{\pm du},$$

qui s'intègre par les Problèmes précédens, & se réduit à des arcs de sections coniques.

CCXXXIV.

REMARQUE. Il faut remarquer que si la quantité $\delta\delta - \frac{\delta g' l}{k} + \frac{g g' g'}{k}$ qui multiplie le haut & le bas de la transformée étoit égale à zéro, alors la solution ne dépendroit plus que des logarithmes. Car résolvant cette équation par les regles ordinaires de l'Algebre, on auroit $\delta - \frac{g' l}{2k} = \pm g' \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{l l}{4 k k}}$, d'où on tire $\delta = \frac{g' l}{2k} \pm g' \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{l l}{4 k k}}$. Donc $\frac{g' x + \delta}{g + l x + k x x}$ se réduiroit à $\frac{g'}{k \left(x + \frac{l}{2k} + \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{l l}{4 k k}} \right)}$. Donc alors la proposée dépendroit de la quadrature de l'hyperbole.

CCXXXV.

Si on a la différentielle $\frac{dx}{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)^{\frac{p}{2}}}$, elle pourra toujours s'intégrer par des arcs de sections coniques, pourvu que le dénominateur $a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ ait quelques racines réelles: car alors on supposera, comme dans la premiere partie de l'article précédent, $mx + n = z$ & $z = \frac{1}{u}$. Conséquences qu'on en peut tirer.

CCXXXVI.

Qu'on propose à intégrer $\frac{x^{\pm p} dx}{\sqrt{x} \cdot (a + bx)^{\frac{n}{2}} \cdot (c + fx + gxx)^{\frac{m}{2}}}$, on fera $x = \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{dy}{y^2}$, $x^{\pm p} = \frac{1}{y^{\pm p}}$; & en faisant les substitutions on aura la différentielle suivante

G g

$$\frac{1}{y \pm p} \times \frac{-dy}{yy}$$

$$\sqrt{\frac{1}{y} \times \left(\frac{b+ay}{y}\right)^{\frac{n}{2}} \times \left(\frac{g+fy+cy}{y}\right)^{\frac{m}{2}}}$$

— $y^{+p-2} dy$; donc enfin

$$\frac{1}{y^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} (b+ay)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{y^m} (g+fy+cy)^{\frac{m}{2}}$$

la transformée fera $\frac{y^{+p-2+\frac{n+1}{2}+m} dy}{(k+ly)^{\frac{n}{2}} \cdot (p+qy+sy)^{\frac{m}{2}}}$.

Ce qui nous apprend que si l'exposant de y dans le numérateur est un nombre entier positif, la proposée s'intégrera par des arcs de sections coniques en faisant $k+ly = z$.

CHAPITRE XVII.

Des différentielles dont l'intégration dépend de la quadrature des courbes du troisième ordre.

CCXXXVII.

Définition
des courbes
du troisième
ordre.

L Es lignes du troisième ordre ou du second genre sont celles dans l'équation desquelles l'exposant de l'indéterminée élevée à la plus haute puissance, ou la somme des exposants des puissances des deux indéterminées, est du troisième degré. Ces courbes sont par conséquent coupées en trois points par une même ligne droite: car on fait que le degré de l'équation qui exprime la

nature d'une ligne géométrique , est égal au nombre des points dans lesquels cette ligne géométrique peut être coupée par une même droite.

CCXXXVIII.

L'équation générale la plus composée des lignes du troisieme ordre est $a + by + cx + kyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + ixxxy + lx^3 = 0$. Mais cette équation peut se simplifier en donnant aux coordonnées de certaines positions. M. Newton est le premier qui ait écrit sur les courbes du second genre , un Ouvrage dans lequel il les détaille & annonce leurs propriétés générales. Il donne quatre équations auxquelles il les rapporte toutes. Ces quatre équations sont :

Leur formule générale,

Quels sont les Géomètres qui ont écrit sur cette matière.

$$\begin{aligned} xyy - ey &= ax^3 + bx^2 + cx + f \\ xy &= ax^3 + bx^2 + cx + f \\ yy &= ax^3 + bx^2 + cx + f \\ y &= ax^3 + bx^2 + cx + f. * \end{aligned}$$

Quatre équations auxquelles se ramènent toutes celles des courbes du troisieme ordre.

CCXXXIX.

Nous donnerons ci-après les quadratures de ces quatre équations auxquelles se réduisent celles de toutes les courbes du troisieme ordre. Car quelle que soit l'équation d'une courbe de ce genre , sa quadrature se réduira toujours à l'une des quatre précédentes. En effet transportant les axes dans une autre position pour réduire l'équation donnée

* Nota. Voyez pour la démonstration de cette proposition un excellent Mémoire de M. Nicole. *Mém. Acad.* 1729.

à l'une des quatre formules générales, on n'aura que des espaces rectilignes à ajouter ou à soustraire pour avoir l'aire rapportée aux coordonnées primitives, ce qu'il est aisé de prouver ainsi.

La quadrature de toutes les courbes du 3^e. ordre se réduit toujours à celle d'une des quatre équations précédentes.

Soit donnée l'équation quelconque d'une courbe du troisième ordre BM (Fig. 8.) dont les coordonnées z & u sont AP & PM , (l'angle qu'elles forment étant quelconque). Tirant la droite AB parallèle à PM , l'espace qu'il s'agit de quarrer est $ABMP$. Transformons l'équation donnée en l'une de nos quatre équations générales, & supposons que cette transformation introduise pour nouvelles coordonnées aQ & Qk , l'origine étant en a . Menant par les points de la courbe M & B les droites Mp & Bb parallèles à la nouvelle ordonnée Qk , on trouvera par la méthode que nous donnerons plus bas l'espace $BbpM$. Cet espace étant trouvé, comme il n'est autre que $APMB - GPM + BAGpb$, il ne s'agira pour avoir la quadrature de l'aire $APMB$ rapportée aux coordonnées primitives, que d'ajouter à l'aire connue $BbpM$ l'espace GPM , & d'en retrancher ensuite l'espace $BAGpb$. Mais ces deux espaces sont rectilignes. Donc pour avoir la quadrature de l'aire rapportée aux coordonnées primitives, on n'a que des espaces rectilignes à ajouter ou à soustraire. *C. Q. F. P.*

Avant de donner la méthode générale de quarrer toutes les courbes du troisième ordre, nous allons chercher l'intégration des différentielles générales qui en dépendent.

C C X L.

LEMME. L'intégrale de $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de la quadrature d'une courbe du troisieme ordre.

DÉMONST. Soit $x = \frac{1}{u}$, on aura $dx = -\frac{du}{u^2}$, & la proposée devient $\frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u} \cdot \frac{\sqrt{(au^3+bu^2+cu+f)}}{\sqrt{u^3}}} = \frac{-du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ Différentielle qui dépend de la quadrature d'une courbe du troisieme ordre dont l'équation est $uyy = k+lu+mu^2+nu^3$.

$\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$. La difficulté se réduit donc à intégrer cette transformée. Pour y parvenir, je cherche l'intégrale de $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$, qui est l'élément d'un espace curviligne du troisieme ordre dont l'équation seroit $uyy = k+lu+mu^2+nu^3$. Car cette équation donne $y = \frac{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$, & substituant cette valeur de y dans la formule de l'élément de l'aire des courbes, $dx = y du$, on trouve $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$.

Pour intégrer cette différentielle, je la multiplie haut & bas par $\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}$, ce qui me donne

$$\frac{k du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{(l du + m u du + n u^2 du) \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}.$$

Voilà donc deux membres qui intégrés séparément donneront l'intégrale cherchée.

1°. Je fais dans le premier membre $u = \frac{1}{z}$, d'où je tire $du = -\frac{dz}{z^2}$, $\sqrt{u} = \frac{1}{\sqrt{z}}$: donc en faisant ces sub-

$$\text{stitutions } \frac{k du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} = \frac{-\frac{k dz}{z^2}}{\frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{\sqrt{(kz^3+lz^2+mz+n)}}{z\sqrt{z}}} = \frac{-k dz}{\sqrt{(n+mz+lz^2+kz^3)}} \text{ que nous avons vu (Art. CCXXIX.)}$$

se rapporter à des arcs de sections coniques.

2°. J'opere à présent sur le second membre

$$\frac{nu^2 du \sqrt{u} + mudu \sqrt{u} + ldu \sqrt{u}}{\sqrt{(k + lu + muu + nu^3)}} : \text{ce second membre multiplié haut \& bas par } 4\sqrt{u} \text{ devient } \frac{4nu^3 du + 4mu^2 du + 4ludu}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + muu + nu^3)}} \\ = \frac{2ludu + 3muudu + 4nu^3 du}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} + \frac{2ludu + mu^2 du}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}}.$$

Or cette dernière quantité en ajoutant & retranchant

$$\frac{k du}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} + \frac{m du}{8nu\sqrt{u}} \times \left(\frac{muu + \dots}{\sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} \right)$$

devient

$$\frac{kdu + 2ludu + 3mu^2 du + 4nu^3 du}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + muu + nu^3)}} + \frac{2ludu + mu^2 du - k du}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + muu + nu^3)}} \\ + \frac{m du}{8nu\sqrt{u}} \times \left\{ \frac{mu^2 + k}{\sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} \right\} - \frac{m du}{8nu\sqrt{u}} \times \left\{ \frac{mu^2 + k}{\sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} \right\} \\ = \frac{kdu + 2ludu + 3muudu + 4nu^3 du}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + muu + nu^3)}} \\ + \frac{2ludu}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} + \frac{m}{4n} \left\{ \frac{mu^2 du + 2nu^3 du - k du}{2u\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} \right\} \\ - \frac{mmudu}{8n\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} + \frac{mk du}{8nu\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} \\ - \frac{k du}{4\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}}.$$

En examinant cette différentielle, je remarque deux portions qui sont chacune une différentielle complète, savoir $\frac{u}{4}^{-\frac{1}{2}} du \cdot \times (k + 2lu + 3mu^2 + 4nu^3) \times (k + lu + mu^2 + nu^3)^{-\frac{1}{2}}$, & $\frac{u}{2}^{-\frac{1}{2}} du \cdot (mu^2 + 2nu^3 - k) \times (k + lu + mu^2 + nu^3)^{-\frac{1}{2}}$. Je les compare avec les formules que nous avons données pour les différentielles complexes, & je trouve que leurs intégrales sont $\frac{u^{\frac{1}{2}} \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}}{2}$, & $u^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}$. J'ai donc le second membre qui me restoit à intégrer, savoir

$$\frac{n u^2 du \sqrt{u} + m u du \sqrt{u} + l du \sqrt{u}}{\sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}} = d \left\{ u^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}}{2} \right\} +$$

$$\frac{2 l u du}{4 \sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}} + \frac{m}{4 n} d \left\{ u^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)} \right\}$$

$$- \frac{m m u du}{8 n \sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}} + \frac{m}{4 n} \times \left\{ \frac{k}{2} \frac{du \cdot u^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}} - \frac{k}{m} \frac{n u^{-\frac{1}{2}} du}{\sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}} \right\}.$$

Je fais dans le dernier terme $u = \frac{1}{z}$, ce qui me donne

$$u^{-\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}}; u^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{z}; du = -\frac{dz}{z^2}. \text{ Donc j'ai}$$

$$\frac{\frac{k}{2} du \cdot u^{-\frac{1}{2}} - \frac{k}{m} n u^{-\frac{1}{2}} du}{\sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}} = \frac{k n dz}{m \sqrt{(n + m z + l z^2 + k z^3)}}$$

$-\frac{k z dz}{2 \sqrt{(n + m z + l z^2 + k z^3)}}$, différentielle dont les deux membres se rapportent à des arcs de sections coniques, comme on l'a déjà vu plusieurs fois. Donc en réunissant tous les différens membres de la transformée

$\frac{k du + l u du + m u^2 du + n u^3 du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}}$, on trouve que l'intégrale de la différentielle $\frac{du \sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}}{\sqrt{u}}$ dépend de la

rectification des sections coniques & de $\left\{ \frac{l}{2} - \frac{m m}{8 n} \right\} \times$

$\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}}$. Donc réciproquement l'intégrale de $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}}$ dépend de celle de $\frac{du \sqrt{(k + l u + m u^2 + n u^3)}}{\sqrt{u}}$,

& dépend par conséquent de la quadrature d'une courbe du troisieme ordre. Donc $\frac{dx}{x \sqrt{(a + b x + c x x + f x^3)}}$ en dépend aussi. C. Q. F. D.

CCXLI.

SCHOLIE I. Il n'y a qu'un seul cas qui puisse souffrir quelque difficulté, c'est celui dans lequel $\frac{l}{2} = \frac{m m}{8 n}$,

Cas unique dans lequel la démonstration précédente peut faire quelque difficulté.

ou $4ln = mm$. Dans ce cas $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ dépend uniquement des sections coniques, donc $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ & $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ne

Solution de
cette difficul-
té.

dépendent point l'une de l'autre. Mais alors nous venons de voir que la première de ces différentielles se réduit à des arcs de sections coniques. La seconde peut se réduire à la quadrature d'un espace curviligne du troisième ordre, excepté dans un seul cas où elle dépend de la rectification des sections coniques. Voici comme je le prouve.

Soient les trois racines de $k+lu+mu^2+nu^3$, $au+b$, $cu+e$, $gu+f$; il y en aura au moins une réelle (Art. LXXXV. Introd.), deux peuvent être imaginaires, on aura donc (A) $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} =$

$$\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(au+b)(cu+e)(gu+f)}} = (B)$$

$$\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{bef+(beg+bcf+acf)u+(bcg+acf+aeg)u^2+acgu^3}}$$

Comparant terme à terme les deux équations (A) & (B),

$$\begin{aligned} \text{on a } \dots\dots\dots k &= bef \\ l &= beg+bcf+acf \\ m &= bcg+acf+aeg \\ n &= acg. \end{aligned}$$

On aura donc $4ln = 4abcegg + 4abccfg + 4aacefg$,
 $mm = bbccgg + 2abccgf + 2abecg^2 + a^2c^2f^2 +$
 $2a^2cefg + a^2e^2g^2$. L'équation $4ln = mm$, qui est la
supposition présente, donne donc $4abcegg + 4abccfg$
 $+ 4a^2cefg = b^2c^2g^2 + 2abc^2gf + 2abecg^2 + a^2c^2f^2$

+

$+ 2a^2cefg + a^2e^2g^2$, ou bien $2abceg^2 + 2abc^2fg + 2a^2cefg + 2abceg^2 + 2abc^2fg + 2a^2cefg = b^2c^2g^2 + 2abc^2fg + 2abceg^2 + a^2c^2f^2 + 2a^2cefg + a^2e^2g^2$: donc enfin on a en réduisant (C) $2abceg^2 + 2abc^2fg + 2a^2cefg = b^2c^2g^2 + a^2c^2f^2 + a^2e^2g^2$.

Soit maintenant $au + b = x$, on en tire $u = \frac{x-b}{a}$: $du = \frac{dx}{a}$: &c. La proposée se change donc en

$$\frac{\frac{dx}{a} \cdot \frac{\sqrt{x-b}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{\left\{\frac{cx-bc+ae}{a}\right\} \cdot \left\{\frac{gx-bg+af}{a}\right\}}} = \text{en multipliant}$$

haut & bas par $\sqrt{x-b}$

$$\frac{xdx - bdx}{a\sqrt{a} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-b} \cdot \sqrt{\left\{\frac{cx-bc+ae}{a}\right\} \cdot \left\{\frac{gx-bg+af}{a}\right\}}}.$$

Cette différentielle a deux membres. Le second, en faisant $x = \frac{1}{z}$, devient après les substitutions différentes que donne cette transformation $\frac{dz}{\sqrt{(\alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \lambda)}}$, qu'on fait se réduire à des arcs de sections coniques.

A l'égard du premier membre, il se rapporte à la quadrature d'une courbe du troisieme ordre, excepté dans un seul cas dans lequel la différentielle est beaucoup plus simple. En effet, ce premier membre est (D)

$$\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{cgx^3 + (aeg - 3bcg + afc)x^2 + (3b^2cg - 2abcf + a^2ef)x - b^3cg + ab^2cf - a^2ebf + aeb^2g}}$$

qui dépend d'une quadrature du troisieme ordre, étant la

même différentielle que (A) $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}}$ que nous avons démontré en dépendre, hormis quand $4ln = mm$. Pour trouver ici quel est ce cas, je compare terme

à terme les différentielles (D) & (A) : cette comparaison me donne

$$l = 3b^2cg - 2abeg - 2abcf + a^2ef$$

$$m = -3bcg + aeg + afc$$

$$k = aeb^2g - b^3cg + ab^2cf - a^2ebf$$

$$n = cg$$

$$\text{donc } 4ln = 12b^2c^2g^2 - 8abceg^2 - 8abc^2fg + 4a^2cefg$$

& $mm = 9b^2c^2g^2 - 6abceg^2 - 6abc^2fg + a^2e^2g^2 + 2a^2cefg + a^2c^2f^2$: donc l'équation $4ln = mm$ devient ici $12b^2c^2g^2 - 8abceg^2 - 8abc^2fg + 4a^2cefg = 9b^2c^2g^2 - 6abceg^2 - 6abc^2fg + a^2e^2g^2 + 2a^2cefg + a^2c^2f^2$, ou bien en réduisant (E) $3c^2g^2b^2 - 2abceg^2 - 2abc^2fg = a^2e^2g^2 - 2a^2cefg + a^2c^2f^2$. Quand cette équation a lieu, la proposée ne dépend point du Lemme précédent; mais examinons ce qui arrive alors.

Cette équation (E) combinée avec l'équation (C) donne la suivante $c^2g^2b^2 - aebcg^2 + bc^2agf = 0$; mais cette dernière équation n'est égale à zéro, que parce que l'un de ses facteurs est $= 0$: or elle est composée de $cg b \times (cgb - aeg - acf)$; on aura donc ou $cgb = 0$, ou $cgb - aeg - acf = 0$. 1°. Dans le cas de $cgb = 0$, on a $c = 0$, ou $b = 0$, ou $g = 0$, c'est-à-dire en combinant la différentielle (B) avec (A) $n = 0$, ou $k = 0$. Donc $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}}$, devient alors $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(lu + mu^2 + nu^3)}} = \frac{du}{\sqrt{l + mu + nu^2}}$ qui

s'integre par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole , suivant ce que nous avons dit dans l'article des fractions rationnelles , soit que les racines soient égales ou inégales , réelles ou imaginaires ; ou bien $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2)}}$, que nous avons démontré (Art. CCVI.) dépendre des arcs de sections coniques.

2°. Si on avoit $cgb - aeg - acf = 0$, on en tire-
roit $cgb = aeg + acf$, & en élevant au quarré (F)
 $c^2g^2b^2 = a^2e^2g^2 + 2a^2ecfg + a^2c^2f^2$; mais on a l'équa-
tion (E) $2c^2gb^2 + c^2g^2b^2 - 2baecg^2 - 2afc^2bg =$
 $a^2e^2g^2 - 2a^2egfc + a^2f^2c^2$; mettant dans (E) pour
 $2c^2gb^2$ sa valeur tirée de (F), on a $2a^2e^2g^2 + 4a^2ecfg$
 $+ 2a^2c^2f^2 + c^2g^2b^2 - 2baecg^2 - 2afc^2bg = a^2e^2g^2$
 $- 2a^2egfc + a^2f^2c^2$, & en réduisant (I) $g^2c^2b^2 +$
 $a^2e^2g^2 + a^2c^2f^2 = 2g^2bcae + 2c^2afgb - 2a^2egcf$.
Cette équation (I) combinée avec l'équation (C) donne
 $2a^2ecfg = 0$, d'où il s'ensuit que a , ou e , ou g , ou
 c , ou $f = 0$; donc on aura encore ou $k = 0$, ou $n = 0$,
& par conséquent la différentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$
se réduit encore à des logarithmes ou à des arcs de cercle
ou de sections coniques. Donc enfin si $4ln = mm$, on
peut toujours réduire $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ à la quadra-
ture d'une courbe du troisieme ordre , excepté lorsque
 $3c^2gb^2 - 2abceg^2 - 2ac^2fg^2 = a^2e^2g^2 - 2a^2ecfg +$
 $a^2c^2f^2$, auquel cas elle s'intégrera par des arcs de sections
coniques. C. Q. F. D.

CCXLII.

SCHOLIE 2. Si la proposée $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ étoit présentée sous la forme suivante $\frac{dx}{x\sqrt{(n+mx)} \cdot \sqrt{(a+bx+cx^2)}}$ qui est la même, on trouveroit encore les différentes transformations dont cette différentielle est susceptible, & les cas dans lesquels ces transformées sont réductibles à la rectification des sections coniques.

Si les racines de $a \pm bx + cx^2$ sont imaginaires, on transformera toujours la proposée en d'autres dans lesquels les facteurs du binôme sont réels. En effet les racines de $a \pm bx + cx^2$ ne sont imaginaires, que lorsque a & c sont positifs & que $4ac$ est $> bb$, puisque l'on a $xx \pm \frac{b}{2c} = \sqrt{\left\{ \frac{-4ac + bb}{4cc} \right\}}$. Je fais $x \pm \frac{b}{2c} = z$, j'aurai en quarrant $xx \pm \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} = zz$; donc $xx \pm \frac{bx}{c} + \frac{a}{c} = zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc}$. Mettant les valeurs de x & de dx dans la proposée, elle deviendra la suivante

$$\frac{dz}{z \pm \frac{b}{2c} \cdot \sqrt{(mz \pm \frac{mb}{2c} + n)} \cdot \sqrt{(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc})}} \quad \text{Je}$$

fais maintenant $z + \sqrt{(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc})} = u$, j'en tire

$$zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc} = uu - 2uz + zz; \text{ c'est-à-dire } \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc} = uu - 2uz. \text{ Donc } z = \frac{uu - \frac{a}{c} + \frac{bb}{4cc}}{2u}.$$

Soit pour abréger $\frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc} = qq$, on aura $z = \frac{uu - qq}{2u}$:

$$dz = \frac{u^2 du + qq du}{2u^2}, \text{ \& } \frac{dz}{\sqrt{(zz + qq)}} = \frac{du}{u}. \text{ On aura}$$

$$\text{donc } \frac{dz}{z + \frac{b}{2c} \cdot \sqrt{(zz + qq)} \sqrt{(mz + \frac{mb}{c} + n)}} = \frac{2du\sqrt{2u}}{(uu - qq + \frac{bu}{c}) \cdot \sqrt{(muu - mqq + \frac{mbu}{c} + 2nu)}}.$$

Je remarque que les racines de $uu - qq + \frac{bu}{c}$ sont réelles, aussi bien que celles de $muu - mqq + \frac{mbu}{c} + 2nu$, uu & qq étant de différens signes. Je suppose donc

$$\frac{1}{uu - qq + \frac{bu}{c}} = \frac{N}{u+k} + \frac{R}{u+s}, \text{ \& je fais pour abrégér}$$

$$+ \frac{mb}{c} + 2n = p. \text{ J'aurai donc la dernière différentielle}$$

$$\text{sous la forme suivante } \frac{2Ndu\sqrt{2u}}{(u+k)\sqrt{(mu^2 - mq^2 + pu)}} +$$

$$\frac{2Rdu\sqrt{2u}}{(u+s)\sqrt{(muu - mqq + pu)}} = \frac{4Nudu}{(u+k) \cdot \sqrt{2u} \cdot \sqrt{(mu^2 - mq^2 + pu)}} +$$

$$+ \frac{4Rudu}{(u+s) \cdot \sqrt{2u} \cdot \sqrt{(mu^2 - mq^2 + pu)}} : \text{ ces deux membres ont}$$

absolument la même forme, ainsi ce que l'on fera pour l'un, doit se pratiquer de même pour l'autre. Je divise

$$\frac{4Nudu}{(u+k) \cdot \sqrt{2u} \cdot \sqrt{(mu^2 - mq^2 + pu)}} \text{ par } u+k, \text{ ce qui me donne}$$

$$\frac{Pdu}{\sqrt{2u} \cdot \sqrt{(mu^2 - mq^2 + pu)}} + \frac{Kdu}{(u+k)\sqrt{mu^2 - mq^2 + pu}\sqrt{2u}},$$

différentielle dont la première partie est, comme on fait, dépendante des sections coniques. A l'égard de la seconde, je fais $u+k=x$, ce qui me donnera une transformée

$$\text{de la forme suivante } \frac{Kdx}{x \cdot \sqrt{(6+\alpha x)} \cdot \sqrt{(\alpha' + 6'x + \gamma xx)}} \text{ qui}$$

est précisément la même que la proposée, & dans laquelle les racines du binome sont réelles. C. Q. F. F.

CCXLIII.

REMARQUE. Donc quand il s'agira dans la suite d'une différentielle réductible à la quadrature des courbes du troisième ordre, il faudra toujours entendre celles qui ont pour équation $xyy = p + qx + rx^2 + sx^3$, le second membre ayant toutes les racines réelles.

CCXLIV.

Différentielle dont l'intégrale dépend de la rectification des sections coniques & de la quadrature précédente. THÉOREME I. L'intégrale des différentielles qui se rapportent à la suivante $\frac{dx}{x^q \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend d'arcs de sections coniques & de la quadrature d'une courbe du troisième ordre.

DÉMONSTRATION. Je prends $\frac{\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}{x^q}$ que je différentie : j'ai $d \left\{ \frac{\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}{x^q} \right\} = \frac{b dx + 2cx dx + 3fx^2 dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times \frac{x^q}{x^{2q}} - \frac{qx^{q-1} dx}{x^{2q}} \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}$, & réduisant ces deux membres au même dénominateur, ils deviennent

$$\frac{(b+2cx+3fx^2)x^q dx - 2qx^{q-1} dx (a+bx+cx^2+fx^3)}{x^{2q} \cdot 2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} =$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times \left\{ \frac{bx^{-q} + 2cx^{-q+1} + 3fx^{-q+2}}{-2bqx^{-q} - 2cqx^{-q+1} - 2fqx^{-q+2}} \right\} :$$

or cette quantité en ordonnant est égale à

$$\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times \left\{ \begin{aligned} &-2aqx^{-q-1} - 2bqx^{-q} - 2cqx^{-q+1} - 2fqx^{-q+2} \\ &+ bx^{-q} + 2cx^{-q+1} + 3fx^{-q+2} \end{aligned} \right\}.$$

En examinant cette différentielle, & donnant à l'indéterminée q différentes valeurs, on trouvera l'intégrale cherchée de la façon suivante.

1°. Si on fait $q = 1$, on a $\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times (-2ax^{-2} - bx^{-1} + fx) = \frac{adx}{-x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{bdx}{-2x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{f x dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}.$
Donc l'intégrale de $\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de celles de $\frac{dx}{2ax\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ & de $\frac{x dx}{2a\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$; c'est-à-dire (Lemme précédent) de la quadrature d'une courbe du troisième ordre, & (Art. CCXXIX.) de la rectification des sections coniques.

2°. Si on fait $q = 2$, on aura la différentielle suivante
 $\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times (-4ax^3 - 3bx^2 - 2cx - f) = \frac{2adx}{-x^3\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{3bdx}{-2x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{cdx}{-x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{f dx}{-2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}.$
Il suit de là que l'intégrale de $\frac{dx}{x^3\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de $\frac{2bdx}{-4ax^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$, de $\frac{cdx}{-2ax\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ & de $\frac{f dx}{-4a\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$; mais l'intégrale de $\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, & de $\frac{bdx}{-2ax\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$; donc l'intégrale en question dépend de la rectification des sections coniques & de $\left\{ \frac{3bb}{8aa} - \frac{3c}{4a} \right\} \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}.$

D'où l'on conclura que $\frac{dx}{x^3 \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ se rapporte uniquement à la rectification des sections coniques, toutes les fois qu'on a $bb = 2ac$.

Cas dans lesquels l'intégrale cherchée dépend uniquement des arcs de sections coniques.

En donnant ainsi successivement à q différentes valeurs, on trouvera qu'en général l'intégrale de $\frac{dx}{x^n \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ se rapporte à la rectification des sections coniques, & de plus à la quadrature d'un espace curviligne du troisième ordre, excepté les cas cependant où les coefficients a, b, c, f & l'exposant n sont tels que la différentielle $\frac{dx}{x \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ qui exprime cette quadrature, s'évanouit. Car alors la proposée se réduit uniquement à des arcs de sections coniques. *C. Q. F. D.*

CCXLV.

Différentielles qui dépendent de la précédente.

COROLLAIRE 1. Si dans la proposée b & $c = 0$, elle deviendra $\frac{dx}{x^n \sqrt{(a+fx^3)}}$. En ce cas elle se réduira toujours à des arcs de sections coniques. Car nous avons vu qu'elle dépend de $\frac{dx}{x \sqrt{(a+fx^3)}}$. Soit $x^3 = u$; $x = u^{\frac{1}{3}}$; $dx = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} du$. Substituant on a $\frac{dx}{x \sqrt{(a+fx^3)}} = \frac{du}{3u \sqrt{(a+fu)}}$. Je fais à présent $a+fu = zz$, j'en tire $du = \frac{2z dz}{f}$; $\sqrt{(a+fu)} = z$: ce qui me donne pour transformée $\frac{2 dz}{3(z^2 - a)}$, qui est comme on voit une fraction rationnelle. Par conséquent la proposée s'intègre par logarithmes, ou par des arcs de cercle. Donc elle dépend de la rectification du cercle ou de la parabole.

CCXLVI.

CCXLVI.

COROLL. 2. Si la proposée étoit $x^{\pm p} dx \cdot (a \pm bxx)^{\pm \frac{n}{2}}$, dans laquelle p & n représentaient des nombres entiers quelconques, on verroit qu'elle dépend des sections coniques. En effet faisons $a \pm bxx = z^2$, on en tirera $dx = \frac{2z dz}{2(bz^2 - ab)^{\frac{1}{2}}}$; $x^{\pm p} = \left(\frac{z^2 - a}{b}\right)^{\pm \frac{p}{2}}$; la transformée sera donc $\left(\frac{z^2 - a}{b}\right)^{\pm \frac{p}{2}} \times \frac{2z^{\pm p+1} dz}{2\sqrt{(bz^2 - ab)}}$ à laquelle par conséquent on pourra donner la forme suivante $z^{\pm q} dz \cdot (e \pm gz^2)^{\pm \frac{r}{2}}$, q marquant un nombre entier positif, & r aussi un nombre entier positif & impair. Maintenant je dis que cette quantité dépend des arcs de sections coniques, soit qu'on ait $+\frac{r}{2}$, ou $-\frac{r}{2}$.

Soit 1°. $z^{\pm q} dz \cdot (e \pm gz^2)^{\frac{r}{2}}$; je multiplie haut & bas par $(e \pm gz^2)^{\frac{1}{2}}$, ce qui me donne $\frac{z^{\pm q} dz \cdot (e \pm gz^2)^{\frac{r}{2} + \frac{1}{2}}}{(e \pm gz^2)^{\frac{1}{2}}}$; & comme r est un nombre entier impair, il n'y aura plus de radical au numérateur; par conséquent on aura une différentielle dont les différens termes seront de la forme suivante $\frac{z^{\pm h} dz}{(e \pm gz^2)^{\frac{1}{2}}}$, que l'on fait dépendre des sections coniques.

2°. Soit $z^{\pm q} dz \cdot (e \pm gz^2)^{-\frac{r}{2}}$; pour découvrir quelle est l'intégrale de cette quantité, je prends $\frac{z^m}{(a \pm bz^2)^{\frac{r}{2}}}$

que je différentie ; cette opération me donne

$$\frac{m z^{m-1} dz \times (a+bz^3)^{\frac{s}{2}} - \frac{s}{2} (a+bz^3)^{\frac{s-2}{2}} 3bz^{2+m} dz}{(a+bz^3)^s} =$$

$$\frac{m z^{m-1} dz}{(a+bz^3)^{\frac{s}{2}}} - \frac{3bsz^{m+2} dz}{2.(a+bz^3)^{\frac{s+2}{2}}}; \text{ par où l'on voit que l'in-}$$

tégrale de $\frac{m z^{m-1} dz}{(a+bz^3)^{\frac{s}{2}}}$ dépend de celle de $z^{m+2} dz$,

$(a+bz^3)^{-\left(\frac{s+2}{2}\right)}$. D'où il suit que l'intégrale de $z^{\pm q} dz \cdot (e+gz^3)^{-\frac{r}{2}}$ dépend de $z^{\pm q+3} dz \cdot$

$(e+gz^3)^{-\left(\frac{r+2}{2}\right)}$, & ainsi de suite. Donc quel que soit le signe qui affecte $\frac{r}{2}$, l'intégrale de $z^{\pm q} dz \times$

$(e+gz^3)^{\pm \frac{r}{2}}$ dépend de $\frac{z^{\pm k} dz}{(e+gz^3)^{\frac{r}{2}}}$, & par conséquent

elle se rapporte à la rectification des sections coniques.

CCXLVII.

REMARQUE. Si dans la différentielle précédente $z^{\pm q} dz \times (e+gz^3)^{\pm \frac{r}{2}}$, nous faisons $z = \frac{x}{u}$, nous aurons la transformée suivante $u^{\mp q-2+\frac{3r}{2}} du \cdot (g+eu^3)^{\pm \frac{r}{2}}$, d'où il suit que $u^{\pm \frac{n}{2}} du \cdot (g+eu^3)^{\pm \frac{r}{2}}$ se réduit aussi aux arcs de sections coniques, n & r étant des nombres entiers positifs.

CCXLVIII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. En réunissant ce que nous venons de dire, & ce que nous avons trouvé (Article CCXXVII.), on verra qu'en général $z^q dz \times (e + g z^m)^n$ dépend de la rectification des sections coniques, m étant $= 2$, ou $= 3$.

1°. Lorsque $m = 2$, q étant égal à la moitié d'un nombre entier positif ou négatif, & n étant égal à la moitié ou au tiers d'un nombre entier positif ou négatif; ou bien q étant encore égal à un nombre entier positif ou négatif, & n égal au quart d'un nombre entier positif ou négatif.

2°. Lorsque $m = 3$, q & n étant égaux à la moitié d'un nombre entier positif ou négatif. (Art. CCXLVI.).

CCXLIX.

D'après cela soit cherchée l'intégrale de $z^p dz \times (a + b z^r)^s$: je fais $a + b z^r = u^t$, ce qui me donne $dz = \frac{t}{r} u^{t-1} dt \times \left\{ \frac{u^t - a}{b} \right\}^{\frac{1-r}{r}}$, & $z^p = \left\{ \frac{u^t - a}{b} \right\}^{\frac{p}{r}}$; par conséquent en faisant ces substitutions, on a $z^p dz \times (a + b z^r)^s = \frac{t}{r} u^{ts+t-1} dt \cdot \left\{ \frac{u^t - a}{b} \right\}^{\frac{p+1-r}{r}}$ quantité réductible à des arcs de sections coniques; 1°. si $t = 2$; $2s + 1 = \pm \frac{n}{2}$, & $\frac{p+1-r}{r} = \pm \frac{q}{2}$, ou $\pm \frac{q}{3}$, n & q exprimant des nombres entiers; 2°. en supposant

toujours $t = 2$, & $2s + 1 = \pm n$, & $\frac{p+1-r}{r} = \pm \frac{q}{4}$.

3°. si $t = 3$, & $3s + 2 = \pm \frac{n}{2}$, & $\frac{p+1-r}{r} = \pm \frac{q}{2}$.

Ce qui est évident.

C C L.

Autre diffé-
rentielle dé-
pendante des
arcs de se-
ctions coni-
ques, & de
l'aire des
courbes du
3^e. ordre.

THÉOREME 2. L'intégrale de $(Kx+c)^p \times (f+gx)^{\frac{n}{2}} \times (a+bx+cx^2)^{\frac{m}{2}} dx$ (p, n, m exprimant des nombres entiers positifs ou négatifs) dépend de la rectification des sections coniques & de la quadrature d'une courbe du troisième ordre.

DÉMONSTRATION. Si ces nombres sont positifs, la proposée n'a aucune difficulté : on voit aisément qu'elle se réduit à la rectification des sections coniques.

Si p est un nombre entier négatif, faisons $f+gx = z$, on aura $dx = \frac{dz}{g}$ & après les substitutions ordinaires,

la transformée suivante $\left\{ \frac{Kz - Kf + gc}{g} \right\}^{-p} \times \frac{z^{\frac{n}{2}} dz}{g}$.

$\left\{ \frac{ag^2 + bgz - bgf + cz^2 - 2cfz + cf^2}{gg} \right\}^{\frac{m}{2}}$, & en abrégant l'ex-

pression de cette différentielle $\frac{z^{\frac{n}{2}} dz \cdot (zz + oz + q)^{\frac{m}{2}}}{(lz + i)^p}$. Je

multiplie haut & bas par $z^{\frac{n}{2}} \cdot (zz + oz + q)^{\frac{m}{2}}$, ce qui

me donnera $\frac{z^n dz \cdot (zz + oz + q)^m}{z^{\frac{n}{2}} \cdot (lz + i)^p \times (zz + oz + q)^{\frac{m}{2}}}$. On voit par là

que la proposée se change en une différentielle dont chaque

terme a la forme suivante $\frac{qz^k dz}{(hz + e)^p \times z^{\frac{r}{2}} (a + bz + dz^2)^{\frac{s}{2}}}$.

On divisera dans chacun d'eux z^k par $(hz + e)^p$, tant que cela se pourra faire, & chacune des parties du quotient étant multipliée par $\frac{dz}{z^{\frac{r}{2}} \times (\alpha + \epsilon z + \delta z z)^{\frac{s}{2}}}$ s'intégrera par des arcs de sections coniques.

Lorsqu'on sera parvenu à un reste dans lequel k sera $< p$, on multipliera le numérateur & le dénominateur de

la proposée par $z^{\frac{s}{2}}$, ce qui donnera $\frac{qz^k \times z^{\frac{s}{2}} dz}{(hz + e)^p \times z^{\frac{r+s}{2}} \times (\alpha + \epsilon z + \delta z z)^{\frac{s}{2}}}$,

& en supposant P & Q des fonctions de x rationnelles & sans diviseur, on donnera à cette dernière quantité la forme suivante, en se servant des regles expliquées pour

les fractions rationnelles $\frac{P dz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{(hz + e)^p \cdot (\alpha + \epsilon z + \delta z z)^{\frac{s}{2}}} +$

$\frac{Q dz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{z^{\frac{r+s}{2}} \cdot (\alpha + \epsilon z + \delta z z)^{\frac{s}{2}}}$. La seconde partie de cette dif-

férentielle devient $\frac{Q dz}{z^{\frac{r}{2}} \cdot (\alpha + \epsilon z + \delta z z)^{\frac{s}{2}}}$, qui s'integre

par des arcs de sections coniques, comme il est aisé de le voir sur le champ.

Pour intégrer la premiere $\frac{P dz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{(hz + e)^p \cdot (\alpha + \epsilon z + \delta z z)^{\frac{s}{2}}}$,

je suppose $\frac{z}{\alpha + \epsilon z + \delta z z} = y^{-1}$; ce qui donne $zy = \alpha + \epsilon z + \delta z z$, & $zz + \frac{\epsilon z - zy}{\delta} = -\frac{\alpha}{\delta}$; & en tirant la racine quarrée $z + \frac{\epsilon}{2\delta} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\delta^3} + \left(\frac{\epsilon - y}{2\delta}\right)^2}$;

ou bien $z = Ay + B \pm \sqrt{G + (Ay + B)^2}$, &

$$\frac{z^{\frac{s}{2}}}{(\alpha + \epsilon z + \delta z z)^{\frac{s}{2}}} = \frac{1}{y^{\frac{s}{2}}}. \text{ Substituant toutes ces valeurs}$$

dans la quantité à intégrer, on a $\frac{P dz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{(hz + e)^p \cdot (\alpha + \epsilon z + \gamma z z)^{\frac{s}{2}}}$

$$= \frac{P A dy \pm \frac{2 A^2 P y dy + 2 A B P dy}{2 \sqrt{G + (Ay + B)^2}}}{y^{\frac{s}{2}} \{Ahy + Bh + e \pm h \sqrt{G + (Ay + B)^2}\}^p}. \text{ J'opere d'abord}$$

sur le premier membre : ce qu'on fera sur ce membre se pourra pratiquer sur les autres. Je multiplie haut & bas par $\{Ahy + Bh + e \mp h \sqrt{G + (Ay + B)^2}\}^p$ ce qui me donne après la réduction

$$\frac{P A dy \cdot \{Ahy + Bh + e \mp h \sqrt{G + (Ay + B)^2}\}^p}{y^{\frac{s}{2}} \cdot (2Beh + ee - hhG + 2Ahey)^p} =$$

$$\frac{P A dy \cdot \{Ahy + Bh + e \mp h \sqrt{G + (Ay + B)^2}\}^p}{y^{\frac{s}{2}} \cdot (Ky + H)^p}. \text{ Or on}$$

voit que dans cette différentielle il y aura des termes tous rationels qui par conséquent n'auront aucune difficulté ; il y en aura d'autres qui seront affectés du radical $\sqrt{G + (Ay + B)^2}$: ceux-là on les multipliera haut & bas par ce radical, ce qui le transportera au dénominateur. D'où il suit évidemment que les termes les plus difficiles à intégrer seront de la forme suivante

$$\frac{y^{\pm \frac{n}{2}} dy}{(Ky + H)^p \times (M + Ny + Ryy)^{\frac{1}{2}}} \text{ (je néglige les constantes$$

au numérateur, ce qui est indifférent pour la justesse du calcul). p est par l'hypothèse un nombre entier. Si n étoit négatif, je ferois $y = \frac{1}{u}$, ce qui me donneroit

après les substitutions ordinaires $\frac{du \cdot u^{\frac{n}{2}-1+p}}{(K+Hu)^p \times \sqrt{(R+Nu+Mu^2)}}$.

D'où il suit qu'on pourra réduire la difficulté à l'intégra-

tion de $\frac{y^{\frac{n}{2}} dy}{(H+Ky)^p \cdot \sqrt{(M+Ny+Ryy)}}$, n & p étant des nombres entiers positifs.

Pour intégrer maintenant cette différentielle, de laquelle dépend l'intégrale entière de la proposée, je suppose $H + Ky = t$, d'où je tire $y = \frac{t-H}{K}$; $dy = \frac{dt}{K}$; donc on a la transformée suivante

$$\frac{\left\{ \frac{t-H}{K} \right\}^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{dt}{K}}{t^p \cdot \sqrt{\frac{MK^2 + H^2R - HNK + NKt - 2H Rt + R t^2}{K^2}}} =$$

$\frac{(a-bt)^{\frac{n}{2}} \times dt}{t^p \times \sqrt{(a' + b't + ctt)}}$. Cette quantité peut encore être

développée en plusieurs termes tels que $\frac{t^{\pm q} dt \times (a-bt)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(a' + b't + ctt)}}$.

Or 1°. Si q est positif, l'intégrale n'a aucune difficulté, & dépend de la rectification des sections coniques. 2°. Si on

a $\frac{dt \sqrt{a-bt}}{t^q \sqrt{(a' + b't + ctt)}}$, on multipliera le numérateur & le

dénominateur par $(a-bt)^{\frac{1}{2}}$, ce qui donnera deux termes tels que $\frac{dt}{t^q \sqrt{(a + 6t + 7tt + \lambda t^2)}}$ qui dépendent

(Art. CCXLIV.) de la quadrature d'un espace curviligne

du troisieme ordre. Donc la proposée dépend de la rectification des sections coniques, & de la quadrature d'une courbe du troisieme ordre. *C. Q. F. D.*

CCL I.

Différentiel-
les qui dépen-
dent de la
précédente.

COROLLAIRE. I. Du Théorème précédent il suit qu'on pourra intégrer le produit de $dx \cdot (e + fx)^{\frac{n}{2}} \cdot (g + kx)^{\frac{m}{2}} \cdot (a + bx + cxx)^{\frac{s}{2}}$ ($n, m, & s$ étant des nombres entiers positifs ou négatifs) par une fonction rationnelle de x , pourvu que le dénominateur de la fonction, si c'est une fraction, ait toutes ses racines réelles. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à multiplier la proposée haut & bas par $(g + kx)^{\frac{n}{2}}$, cette opération donnera $dx \cdot \left\{ \frac{e + fx}{g + kx} \right\}^{\frac{n}{2}} \cdot (g + kx)^{\frac{m+n}{2}} \times (a + bx + cxx)^{\frac{s}{2}}$. Soit maintenant $\frac{e + fx}{g + kx} = z$, on en tire $x = \frac{e - gz}{kz - f}$; $dx = \frac{(gf - ek)}{(kz - f)^2} dz$; on aura donc la transformée suivante $\frac{(gf - ek)}{(kz - f)^2} z^{\frac{n}{2}} dz \cdot \left\{ \frac{ke - fg}{kz - f} \right\}^{\frac{m+n}{2}} \times \frac{(a + ez + yzz)^{\frac{s}{2}}}{(kz - f)^s}$, qu'on voit bien se réduire à $z^{\frac{n}{2}} dz \cdot (a + ez + yzz)^{\frac{s}{2}}$ multipliée par une fonction rationnelle de z , & dépendante par conséquent du Théorème précédent.

CCL II.

COROLLAIRE 2. Si on avoit une fonction rationnelle de x multipliée par $dx \times (a + bx + cxx)^{\pm \frac{m}{2}} \times (e + fx$
+

$+ gxx) \pm \frac{n}{2}$, en supposant toujours que dans cette fonction, si elle est une fraction, on puisse partager le dénominateur en des quantités simples $(x+r)^d$, en multipliant la proposée haut & bas par $(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}$, on la développeroit en différens termes de la forme suivante

$$\frac{Kx dx}{(lx+n)^r \cdot (a+bx+cx^2)^{\frac{q+s}{2}} \cdot \left\{ \frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2} \right\}^{\frac{s}{2}}} =$$

par les regles des fractions rationnelles $\frac{Q dx}{(lx+n)^r \cdot \left\{ \frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2} \right\}^{\frac{s}{2}}}$

$+ \frac{P dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{q+s}{2}} \cdot \left\{ \frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2} \right\}^{\frac{s}{2}}}$, P & Q étant des fonctions de x rationnelles & sans diviseur.

Mais si on divise $e+fx+gxx$ par $a+bx+cx^2$, on aura au quotient une partie toute constante, & un reste tel que $\frac{\gamma x + \delta}{a+bx+cx^2}$. Je suppose donc $\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2} = \varphi + \frac{\gamma x + \delta}{a+bx+cx^2}$, & $\frac{\gamma x + \delta}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{z}$: cette supposition me donnera $(\gamma x + \delta)z = a+bx+cx^2$, & $xx + \frac{bx}{c} - \frac{\gamma zx}{c} = \frac{\delta z - a}{c}$; d'où on tire $x = \frac{-b+\gamma z}{2c}$

$$\pm \sqrt{\frac{\delta z}{c} - \frac{a}{c} + \left\{ \frac{b-\gamma z}{2c} \right\}^2} : dx = \frac{\gamma dz}{2c} + \frac{\delta dz + \frac{\gamma^2 x dz}{2c} - \frac{b\gamma dz}{2c}}{2c \sqrt{\frac{\delta z}{c} - \frac{a}{c} + \left\{ \frac{b-\gamma z}{2c} \right\}^2}}.$$

Substituant une des deux valeurs de x dans le premier membre de la proposée (ce qu'on fera sur l'un, doit aussi se pratiquer pour l'autre),

$$\frac{Q \gamma dz}{2c} + \frac{\left\{ \delta dz + \frac{\gamma^2 z dz}{2c} - \frac{b \gamma dz}{2c} \right\} \times Q}{2c \sqrt{\frac{\delta z - a}{c} + \left(\frac{b - \gamma z}{2c} \right)^2}}$$

il deviendra $\frac{\left\{ \frac{l \gamma z - b l}{2c} + l \sqrt{\frac{\delta z - a}{c} + \left(\frac{b - \gamma z}{2c} \right)^2} + n \right\}^r \times \left(\varphi + \frac{1}{z} \right)^{\frac{s}{2}}}{2c}$

Multipliant haut & bas par les valeurs de $(lx + n)^r$ & de $(\gamma x + \delta)z$ qui résultent de l'autre valeur de x , on aura une différentielle dont les différentes parties seront intégrables par le Corollaire précédent.

CCLIII.

Cas dans lesquels les différentielles précédentes se rapportent uniquement à des arcs de sections coniques.

SCHOLIE. Il est bon d'observer ici qu'il y a beaucoup de cas dans lesquels par la destruction de certains coefficients, les différentielles que nous avons vu se rapporter à des arcs de sections coniques & à la quadrature de courbes du troisième ordre, ne dépendront que de la rectification des sections coniques. En général toutes les différentielles telles que $\frac{dx}{(a + bx + cxx)^{\frac{q}{2}} \times (e + fx + gxx)^{\frac{s}{2}}}$

en dépendront uniquement. En voici la preuve qu'il faut s'attacher à bien suivre.

CCLIV.

Démonstration. PREMIERE PROPOSITION. $\frac{du}{\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu - uu}}$
 A, B, φ & m étant de signes quelconques, peut se réduire à l'intégration d'une différentielle

$\frac{dz}{z \sqrt{Mz + \frac{A}{\varphi} \times \sqrt{(\alpha + \epsilon z + \gamma z z)}}$, dans laquelle M est quelconque & α est positif.

DÉMONST. Soit pour le prouver $\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu - uu}}$
 = (en multipliant haut & bas par φ)

$\frac{\varphi du}{\varphi u \sqrt{(\varphi + \frac{u}{m})} \cdot \sqrt{(A + Bu - uu)}}$, si à cette quantité on

ajoute $\frac{\frac{u}{m} du}{\varphi u \sqrt{(\varphi + \frac{u}{m})} \cdot \sqrt{(\varphi A + Bu - uu)}}$, & qu'on l'en re-

tranche en même temps, ce qui, comme on voit, ne la changera pas, elle deviendra $\frac{\varphi du + \frac{u}{m} du}{\varphi u \sqrt{(\varphi + \frac{u}{m})} \cdot \sqrt{(A + Bu - uu)}}$

$\frac{\frac{u}{m} du}{\varphi u \sqrt{(\varphi + \frac{u}{m})} \cdot \sqrt{(A + Bu - uu)}}$ = (en réduisant)

$\frac{du \sqrt{(\varphi + \frac{u}{m})}}{\varphi u \cdot \sqrt{(A + Bu - uu)}} - \frac{du}{m \varphi \cdot \sqrt{(\varphi + \frac{u}{m})} \cdot \sqrt{(A + Bu - uu)}}$

La seconde partie de cette différentielle s'integre par des arcs de sections coniques. Pour voir ce que devient la

premiere je suppose $\frac{\varphi + \frac{u}{m}}{A + Bu - uu} = \frac{1}{Mz + \frac{A}{\varphi}} = \frac{1}{Mz + N}$, en

faisant $\frac{A}{\varphi} = N$; on aura $A + Bu - uu = \varphi Mz + \frac{Mu z}{m}$
 $+ N\varphi + \frac{uN}{m}$; donc $A - \varphi Mz - N\varphi = uu - Bu + \frac{Mz u}{m}$
 $+ \frac{Nu}{m}$; & achevant le quarré du second membre, &

prenant la racine quarrée des deux, on a $u - \frac{B}{2} +$

$$\begin{aligned}
\frac{Mz + N}{2m} &= \pm \sqrt{A - \varphi Mz - N\varphi + \left(\frac{Mz + N - Bm}{2m}\right)^2} \\
&= \pm \sqrt{A - \varphi Mz - \frac{A\varphi}{\varphi} + \frac{M^2 z^2 - 2BMmz + 2MNz + B^2 m^2 - 2BmN + N^2}{4m^2}} \\
&= \pm \sqrt{\left\{ \frac{M^2 z^2}{4m^2} - \varphi Mz + \left(\frac{2N - 2Bm}{4m^2}\right) Mz + \left(\frac{N - Bm}{2m}\right)^2 \right\}} : \text{donc enfin on trouve } u = \frac{B}{2} - \frac{Mz + N}{2m} \\
&\pm \sqrt{\left\{ \frac{M^2 z^2 + (2N - 2Bm) Mz - 4\varphi Mm^2 z + (N - Bm)^2}{4m^2} \right\}} : du = \\
&\frac{Mdz}{2m} \pm \frac{(M^2 z dz + NMdz - BMm dz - 2\varphi Mm^2 dz)}{2m \sqrt{M^2 z^2 + (2N - 2Bm) Mz - 4\varphi m^2 Mz + (N - Bm)^2}}.
\end{aligned}$$

Substituant dans la proposée une des deux valeurs de u , & multipliant le haut & le bas par l'autre valeur de u , comme on l'a déjà pratiqué, Art. CCLII. on aura une transformée qui se réduit à des arcs de sections coniques & à l'intégration de $\frac{dz}{2 \sqrt{Mz + N} \cdot \sqrt{\alpha + \epsilon z + \gamma z^2}}$, M étant de signe quelconque, & α positif. C. Q. F. D.

CCLV.

SECONDE PROPOSITION. $\frac{dx}{(a + bx + cxx)^{\frac{q}{2}} \cdot (e + fx + gxx)^{\frac{s}{2}}}$ s'integre par des arcs de sections coniques, lorsque $a + bx + cxx$ a ses racines réelles, ou ce qui est la même chose, lorsque bb est $> 4ac$. Car soient les deux facteurs réels de cette quantité $mx + n$, $rx + p$, on aura $\frac{dx}{(mx + n) \cdot (rx + p)^{\frac{q}{2}} \cdot (e + fx + gxx)^{\frac{s}{2}}}$. Soit $mx + n = z$, on en tire $dx = \frac{dz}{m}$; $x = \frac{z - n}{m}$, donc on a la

transformée $\frac{dz}{m} z^{\frac{q}{2}} \cdot \left\{ \frac{rz - rn + pm}{m} \right\}^{\frac{q}{2}} \cdot \left\{ \frac{em^2 + fmz - fmn + gz^2 - 2gnz + gn^2}{m^2} \right\}^{\frac{s}{2}} :$

faisons $z = \frac{1}{u}$, $dz = -\frac{du}{u^2}$, on trouvera

$$\frac{1}{u^{\frac{q}{2}}} \cdot \left\{ \frac{r - rnu + pmu}{m u^{\frac{q}{2}}} \right\}^{\frac{q}{2}} \cdot \frac{(em^2 u^2 + mfu - fmu^2 + g - 2gnu + gn^2 u^2)^{\frac{s}{2}}}{m^2 u^s}$$

$$= \frac{u^{q+s-2} du}{(Au + B)^{\frac{q}{2}} \cdot (C + Du + Euu)^{\frac{s}{2}}}, \text{ différentielle réductible}$$

aux sections coniques. (Art. CCXXXVI.)

CCLVI.

TROISIEME PROPOSITION. Dans la même hypothèse, si on écrit la proposée ainsi $\frac{dx}{(a + bx + cxx)^{\frac{q+s}{2}} \cdot \left\{ \frac{e + fx + gxx}{a + bx + cxx} \right\}^{\frac{s}{2}}}$,

on trouvera qu'elle se rapporte à la rectification des sections coniques, & à l'intégration de la différentielle

$$\frac{du}{u \sqrt{\left(\varphi + \frac{u}{m}\right) \cdot \sqrt{(A + Bu + uu)}}} \text{ Car soit } \frac{e + fx + gxx}{a + bx + cxx}$$

$$= \varphi + \frac{\gamma x + \delta}{a + bx + cxx}, \text{ \& } \frac{\gamma x + \delta}{a + bx + cxx} = \frac{u}{m}, \text{ on en tire}$$

$$a + bx + cxx = \frac{\gamma mx + \delta m}{u}, \text{ donc } x = -\frac{b}{2c} + \frac{\gamma m}{2cu}$$

$$\pm \sqrt{\left\{ \frac{\delta m}{cu} - \frac{a}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{b\gamma m}{2ccu} + \frac{\gamma^2 m^2}{4c^2 u^2} \right\}} = -\frac{b}{2c} + \frac{\gamma m}{2cu}$$

$$\pm \frac{1}{2cu} \sqrt{(4c\delta mu - 4acu^2 + bbu^2 - 2b\gamma mu + \gamma^2 m^2)}; \text{ donc}$$

$$\text{enfin } x = -\frac{bu + \gamma m}{2cu} \pm \frac{1}{2cu} \sqrt{\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} + \frac{4c\delta mu - 2b\gamma mu}{bb - 4ac} + uu}$$

D'ailleurs on aura $\frac{dx}{\left\{ \frac{\gamma x m + \delta m}{u} \right\}^{\frac{q+s}{2}} \cdot \left\{ \varphi + \frac{u}{m} \right\}^{\frac{s}{2}}}$

qu'on trouvera par la méthode de l'Article CCLII. dépendre de la rectification des sections coniques & de l'intégration de la différentielle suivante,

$$\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma^2 m^2 + 4 c \delta m u - 2 b \gamma m u}{b b - 4 a c} + u u}}. \text{ Donc}$$

il est évident que la proposée $\frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{q}{2}} \cdot (e + fx + gx^2)^{\frac{s}{2}}}$

dépend de la rectification des sections coniques, & de l'intégration de $\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu + uu}}$. Donc puisque

(Prop. Sec.) $\frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{q}{2}} \cdot (e + fx + gx^2)^{\frac{s}{2}}}$ dépend

dans le cas présent des sections coniques, il s'ensuit, ou que le coefficient de $\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu + uu}}$ est = 0,

tous les termes se détruisant dans ce coefficient, ou bien que si ce coefficient n'est pas = 0, $\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu + uu}}$

dépendra de la rectification des sections coniques, excepté peut-être un seul cas particulier, dans lequel le coefficient de cette différentielle seroit égal à zéro, en vertu d'un certain rapport entre a, b, c, e, f, g .

COROLLAIRE. Donc si tous les termes ne se détruisent pas dans le coefficient de (A)

$$\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{\left\{ \frac{\gamma^2 m^2 + 4c\delta mu - 2b\gamma mu}{bb - 4ac} + uu \right\}}}, \text{ il}$$

s'enfuit que (B) $\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{a + \epsilon u + uu}}$ dépendra tou-

jours de la rectification des sections coniques, en prenant b, a, c à volonté, pourvu que bb soit $> 4ac$. Car cette dernière différentielle peut toujours se réduire à la première. En effet on a $e + fx + gxx = (a + bx + cxx)$

$$\times \frac{g}{c} = \frac{gbx}{c} + fx - \frac{ga}{c} + e. \text{ Donc à cause de}$$

$$\frac{e + fx + gxx}{a + bx + cxx} = \varphi + \frac{\gamma x + \delta}{a + bx + cxx}, \text{ on aura } \varphi = \frac{g}{c}; \gamma =$$

$$-\frac{gb}{c} + f; \delta = -\frac{ga}{c} + e. \text{ D'ailleurs en comparant}$$

$$\text{les différentielles (A) \& (B), on trouve } a = \frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac},$$

$$\text{donc } \gamma^2 m^2 = a \times (bb - 4ac), \text{ ou } \gamma = \frac{\sqrt{a(bb - 4ac)}}{m}$$

$$= -\frac{gb}{c} + f; \epsilon = \frac{4c\delta m - 2b\gamma m}{bb - 4ac}, \text{ d'où l'on tire } 4c\delta m$$

$$= (bb - 4ac)\epsilon + 2b\gamma m : \text{ donc } \delta = \frac{(bb - 4ac)}{4cm}\epsilon +$$

$$\frac{b\gamma}{2c} = -\frac{ga}{c} + e.$$

Il ne pourroit tout au plus y avoir d'excepté qu'un cas

$$\text{où } \frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{a + \epsilon u + uu}} \text{ ne dépendroit pas de la}$$

rectification des sections coniques; ce seroit celui dans lequel il y auroit une certaine équation entre a, b, c, e, f, g , ou ce qui est la même chose entre φ, m, a, ϵ ; mais dans tous les autres cas l'intégration réussira.

CCLVII.

QUATRIEME PROPOSITION. Si $a + bx + cxx$ a ses racines imaginaires, on trouvera que la proposée

$\frac{dx}{(a + bx + cxx)^{\frac{1}{2}} \cdot (e + fx + gx^2)^{\frac{3}{2}}}$ dépend de la rectification des sections coniques & de l'intégration de

$$u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} - \frac{2b\gamma mu + 4c\delta mu}{bb - 4ac} - uu}$$

Car $a + bx + cxx$ a ses racines imaginaires dans le cas de $bb < 4ac$; il faudra donc écrire alors $-uu \cdot (4ac - bb)$; ce

qui donnera $\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{\left\{ \frac{\gamma^2 m^2 - 2b\gamma mu + 4c\delta mu}{4ac - bb} - uu \right\}}}$

différentielle qui est la même que la suivante

$$\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu - uu}}$$

Or 1°. si le coefficient de cette différentielle s'évanouit, ce sera une marque que la proposée dépend uniquement des sections coniques.

2°. Si les termes ne se détruisent pas dans ce coefficient, c'est une marque certaine qu'ils ne se détruisent pas non plus dans le cas de la troisième Proposition. Car ces deux cas sont précisément les mêmes, on n'a fait que mettre $4ac - bb$ pour $bb - 4ac$. Donc dans cette supposition on peut conclure que toute différentielle

$\frac{du}{u \sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{a + \xi u + uu}}$ s'intégrera par des arcs de

sections

sections coniques, au moins quand il n'y aura pas entre les coefficients $\alpha, \epsilon, m, \varphi$ une certaine équation. Or il est toujours possible d'empêcher que cette équation n'ait lieu; car $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu - uu}}$ se réduit (I. Prop.)

à l'intégration de $\frac{dz}{z\sqrt{Mz + \frac{A}{\varphi}} \cdot \sqrt{\alpha + \epsilon z + \gamma z^2}}$, dans

laquelle $\alpha = \frac{(N - Bm)^2}{2mm}$; $\epsilon = \frac{2N - Bm - \varphi}{M}$. Donc puisque M est indéterminée, il s'ensuit qu'on peut la supposer telle que l'équation dont il s'agit n'ait pas lieu. Donc il est évident que $\frac{dz}{z\sqrt{Mz + \frac{A}{\varphi}} \cdot \sqrt{\alpha + \epsilon z + \gamma z^2}}$ dépen-

dra de la rectification des sections coniques; donc aussi

$\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu - uu}}$; donc aussi

$\frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{q}{2}} \cdot (e + fx + gx^2)^{\frac{s}{2}}}$ lorsque $a + bx + cx^2$

a ses racines imaginaires. Mais nous avons vu (Prop. II.) que cette même différentielle dépend aussi de la rectification des sections coniques, quand $a + bx + cx^2$ a ses racines réelles; donc en général toute différentielle

$\frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{q}{2}} \cdot (e + fx + gx^2)^{\frac{s}{2}}}$ se réduit uniquement à

la rectification des sections coniques. C. Q. F. D.

CCLVIII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. On pourroit par une méthode semblable, s'assurer si toutes les différentielles que nous avons vu dépendre de la quadrature d'une courbe du troisieme ordre, ne se réduisent pas uniquement à des arcs de sections coniques. Il faut pour cela que le coefficient qui affecte la différentielle à laquelle leur intégration est liée en même temps, soit égal à zéro. Mais le calcul pour découvrir si ce coefficient est égal à zéro est très-long : nous ne nous y arrêterons pas ; il nous suffit d'avoir indiqué à nos lecteurs la méthode de le faire.

CCLIX.

PROBLEME. Trouver la quadrature de toutes les courbes du troisieme ordre.

Quadrature
des courbes
du troisieme
ordre.

SOLUTION. Une courbe du troisieme ordre étant donnée avec son équation, on changera les coordonnées, de maniere que son équation devienne une des quatre suivantes,

$$xyy - ey = ax^3 + bx^2 + ex + f$$

$$xy = ax^3 + bx^2 + ex + f$$

$$yy = ax^3 + bx^2 + ex + f$$

$$y = ax^3 + bx^2 + ex + f$$

que nous avons vu avoir été assignées par M. Newton pour toutes les lignes de cet ordre : on aura pour l'élément de l'aire $y dx$. Cette aire étant trouvée, il n'y

aura plus que des espaces rectilignes à ajouter ou à soustraire pour avoir l'aire rapportée aux coordonnées primitives, comme nous l'avons prouvé Art. CCXXXIX. Toute la difficulté se réduit donc à trouver l'intégrale de $y dx$, dans les quatre équations de M. Newton.

La premiere donne $y = \frac{e}{2x} \pm \frac{1}{2x} \sqrt{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + ee)}$; donc $y dx = \frac{e dx}{2x} \pm \frac{dx}{2x} \sqrt{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + ee)}$ qui s'integre par l'Art. CCLII.

La deuxieme & la quatrieme donnent $y dx = \frac{dx}{x} \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + f)$, & $y dx = dx (ax^3 + bx^2 + cx + f)$, qui s'integrent tout de suite par la regle fondamentale.

La troisieme enfin donne $y dx = dx \sqrt{(ax^3 + bx^2 + ex + f)}$, qui s'integre par des arcs de sections coniques, ainsi que nous l'avons vu plusieurs fois.

Donc toutes les lignes du troisieme ordre sont quarrables ou absolument ou par logarithmes, ou par des arcs de sections coniques, ou par la quadrature de la courbe dont l'équation est $xyy = a + bx + cxx + fx^3$, le second membre ayant toutes ses racines réelles. (Art. CCXLIII.)

C C L X.

REMARQUE 1. Nous venons de dire, que $y dx$ étoit l'élément de l'aire de toute courbe du troisieme ordre rapportée à l'une des quatre équations générales. Cependant il faut observer que souvent les coordonnées de ces courbes ne sont pas rectangles. Alors l'élément

de l'aire n'est pas ydx , mais ydx multipliée par le rapport du sinus de l'angle des coordonnées au sinus total ; & comme ce rapport est une quantité constante, l'intégration n'en devient pas plus difficile.

CCLXI.

REMARQUE 2. Toutes les différentielles dont nous avons recherché l'intégration dans l'article des fractions rationnelles, dans celui de la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole, & enfin dans ce dernier ci, s'intégreroient par les mêmes méthodes si on y mettoit x^n pour x , & $nx^{n-1}dx$ pour dx .

 CHAPITRE XVIII.

De la quadrature des courbes dont les équations ont trois termes.

CCLXII.

Formule
générale des
équations qui
contiennent
trois termes.

Soit l'équation à trois termes $Ay^a x^q + By^r x^p + Cy^w x^s = 0$ (A, B, C représentent des coefficients quelconques) on propose de trouver l'aire $\int ydx$ de la courbe à laquelle appartient cette équation.

Je divise l'équation par $x^q y^w$, ce qui la change en $Ay^{a-w} + By^{r-w} x^{p-q} + Cx^{s-q} = 0$, & en faisant

$$\alpha - \omega = \lambda$$

$$r - \omega = \mu$$

$$p - q = \sigma$$

$$s - q = \tau$$

on aura $Ay^\lambda + By^\mu x^\sigma + Cx^\tau = 0$.

Cette équation représentera donc toutes les équations possibles à trois termes.

Je suppose à présent $y = x^r u$ (r & u sont indéterminées). J'aurai

$$y^\lambda = x^{r\lambda} u^\lambda$$

$$y^\mu = x^{r\mu} u^\mu$$

Transformation nécessaire pour préparer l'équation ; $y = x^r u$.

Donc on aura la transformée suivante $Ax^{r\lambda} u^\lambda + Bx^{r\mu + \sigma} u^\mu + Cx^\tau = 0$. Je divise par x^τ , & j'ai $Ax^{r\lambda - \tau} u^\lambda + Bx^{r\mu + \sigma - \tau} u^\mu + C = 0$. La même supposition de $y = x^r u$, nous donne $y dx = x^r u dx$. Donc si de l'équation précédente on peut tirer la valeur de x en u , on aura celle de $y dx$ en u & en du . Or on trouve la valeur de x en u dans tous les cas suivants.

CCLXIII.

Il est évident que, si $r\lambda - \tau = 0$, il n'y aura plus qu'un terme qui contiendra x & u , & qu'ainsi en divisant par une puissance de u , on aura la valeur cherchée. Il en sera de même, si $r\mu + \sigma - \tau = 0$. On la trouvera aussi fort aisément, si $r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(r\mu + \sigma - \tau)$; car alors on n'aura à résoudre qu'une équation fort simple du premier degré. Enfin on la trouvera encore, si $r\lambda - \tau$ est le double ou la moitié de $r\mu + \sigma - \tau$, puisqu'il ne s'agira dans ce cas que de résoudre une équation ordinaire du second degré.

Cas dans lesquels on trouve la valeur de x en u .

CCLXIV.

Ils sont au nombre de cinq pour les équations à trois termes. Voilà donc cinq cas dans lesquels on aura la valeur de x en u , en donnant à l'indéterminée r une des valeurs contenues dans les cinq équations suivantes.

$$1^{\circ}. r\lambda - \tau = 0$$

$$2^{\circ}. r\mu + \sigma - \tau = 0$$

$$3^{\circ}. r\lambda - \tau = r\mu + \sigma - \tau$$

$$4^{\circ}. r\lambda - \tau = 2(r\mu + \sigma - \tau)$$

$$5^{\circ}. r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(r\mu + \sigma - \tau).$$

Comme nous n'avons à la fois qu'une seule équation de condition, la valeur de r se présentera tout de suite. D'où il suit qu'on peut toujours réduire la quadrature d'une courbe dont l'équation a trois termes à l'intégration d'une quantité $x^r u dx$, dans laquelle on aura la valeur de x en u .

CCLXV.

Examen d'un de ces cinq cas précédents.

Pour le mieux faire sentir, nous allons détailler un des cinq cas précédents. Soit $r\lambda - \tau = 0$,

on en tire $r = \frac{\tau}{\lambda}$.

Donc $Ax^{r\lambda - \tau} u^\lambda + Bx^{r\mu + \sigma - \tau} u^\mu + C = 0$

devient $Au^\lambda + Bx^{\frac{\tau}{\lambda}\mu + \sigma - \tau} u^\mu + C = 0$; donc

$$x^{\frac{\tau\mu}{\lambda} + \sigma - \tau} = \frac{-Au^{\lambda - \mu} - Cu^{-\mu}}{B}, \text{ ou } x = -$$

$$\left\{ \frac{Au^{\lambda - \mu} + Cu^{-\mu}}{B} \right\}^{\frac{1}{\frac{\tau\mu}{\lambda} + \sigma - \tau}}; \text{ donc } dx =$$

$$\left\{ \frac{\lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda} \right\} x - \left\{ \frac{Au^{\lambda - \mu} + Cu^{-\mu}}{B} \right\}^{\frac{\lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda} - 1} x$$

$\left\{ \frac{\lambda - \mu \cdot Au^{\lambda - \mu - 1} du - \mu Cu^{-\mu - 1} du}{B} \right\}, \& x' =$
 $-\left\{ \frac{Au^{\lambda - \mu} + Cu^{-\mu}}{B} \right\} \frac{\tau}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda}.$ Faisant ces diffé-
 rentes substitutions, on aura $\int x' u dx = \frac{\lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda} \times$
 $\left\{ \frac{-Cu^{-\mu} - Au^{\lambda - \mu}}{B} \right\} \frac{\lambda + \tau}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda} \times (-\mu Cu^{-\mu} du$
 $+ \frac{\lambda A - \mu A}{B} \cdot u^{\lambda - \mu} du) = \left\{ \frac{\lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda} \right\} \times$
 $\frac{C\mu}{B} u^{\frac{-\tau\mu - \lambda\mu}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda}} du \times \left\{ \frac{-C - Au^{\lambda}}{B} \right\} \frac{\tau + \lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda} \times$
 $+ \left\{ \frac{\lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda} \right\} \times \frac{-\mu A + \lambda A}{B} \cdot u^{\frac{-\tau\mu - \lambda\mu}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda}} du \times$
 $\left\{ \frac{-C - Au^{\lambda}}{B} \right\} \frac{\tau + \lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda}.$ Or cette équation,
 comme on le voit, contient deux membres qui peuvent se
 représenter chacun en particulier par $u^m du \cdot (a + bu^n)^p.$

CCLXVI.

Pour trouver maintenant les cas dans lesquels la courbe est quarrable, il faut se rappeler ceux dans lesquels $u^m du (a + bu^n)^p$ est intégrable.

Recherche
 des cas dans
 lesquels la
 courbe de l'é-
 quation à trois
 termes est
 quarrable.

1°. $u^m du \cdot (a + bu^n)^p$ est intégrable (Art. XI.)
 toutes les fois que p est un nombre entier positif, n
 étant tout ce qu'on voudra. Il faut cependant en ex-
 cepter un cas; c'est celui dans lequel $\frac{m+1}{-n}$ est égal à
 un nombre entier positif, ou est plus petit que p . Alors
 nous avons démontré (Scholie Art. XII. & XIII.) qu'un

des termes contenoit une différentielle logarithmique. Donc la différentielle dépend alors de la quadrature de l'hyperbole.

2°. La même différentielle s'intègre (Art. LXXIX.) si $\frac{m+1}{n}$ est égal à un nombre entier positif, à moins que p ne soit égal à un nombre entier négatif plus petit que $\frac{m+1}{n}$. Dans ce cas (Art. LXXXIII.) il y aura un terme intégrable par logarithmes.

3°. Cette même différentielle s'intégrera (Art. LXXIX.) toutes les fois que $\frac{m+1}{-n} - p$ est un nombre entier positif. Il faut cependant en excepter aussi un cas ; c'est celui dans lequel p est égal à un nombre entier négatif. Car dans ce cas on a prouvé (Art. LXXXVI.) que l'intégrale de quelqu'un des termes dépend de la quadrature de l'hyperbole.

CCLXVII.

Examen de ceux dans lesquels l'intégrale dépend de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole.

Cherchons à présent les cas dans lesquels la formule des équations à trois termes peut s'intégrer par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole : nous avons déjà vu ceux dans lesquels p étant un nombre entier positif, elle dépend de la quadrature de l'hyperbole.

1°. $u^m du . (a + bu^n)^p$ est réductible en fractions rationnelles, si p est un nombre entier négatif, m & n étant fractionnaires. On fait que l'intégrale de $\frac{u^m du}{a + bu^n}$ dépend

dépend de celle de $\frac{u^m du}{a + bu^n}$. Or soit $m = \frac{q}{p}$, & $n =$

$\frac{r}{s}$, on a $\frac{u^m du}{a + bu^n} = \frac{u^{\frac{q}{p}} du}{a + bu^{\frac{r}{s}}}$. Je fais $u^{\frac{1}{s}} = z$, j'aurai

$u = z^s$; $du = sz^{s-1} dz$; $u^{\frac{q}{p}} = z^{\frac{qs}{p}}$: donc on aura la transformée suivante $\frac{sz^{\frac{qs}{p} + s - 1} dz}{a + bz^r}$. Soit encore $z^{\frac{1}{p}} = y$,

on a $z = y^p$; $dz = py^{p-1} dy$; donc la transformée fera $\frac{psy^{qs + ps - 1} dy}{a + by^{pr}}$, quantité qui est une simple fraction ration-

nelle, p, r, q, s étant des nombres entiers; & par conséquent intégrable par les méthodes que nous avons données pour ces fractions.

2°. $u^m du \cdot (a + bu^n)^p$ est intégrable par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, lorsque $\frac{m+1}{n} - 1$ est égal à un nombre entier négatif, quel que soit p . Pour s'en convaincre il n'y a qu'à faire $u^n = z$, on aura $u = z^{\frac{1}{n}}$;

$du = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1} dz$; $u^m = z^{\frac{m}{n}}$. Donc $u^m du \cdot (a + bu^n)^p$
 $= \frac{1}{n} z^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} - 1} dz \cdot (a + bz)^p$. Je fais ensuite $a + bz$

$= t$; $z = \frac{t-a}{b}$; $dz = \frac{dt}{b}$; $z^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} - 1} = \left\{ \frac{t-a}{b} \right\}^{\frac{m+1}{n} - 1}$;

ce qui donne en faisant les substitutions, $\left\{ \frac{t-a}{b} \right\}^{\frac{m+1}{n} - 1} \cdot \frac{t^p dt}{b^n}$, quantité que je dis être une fraction rationnelle.

lorsque $\frac{m+1}{n} - 1$ est un nombre entier négatif, quel que soit p . Si p est aussi un nombre entier, cette proposition ne souffre aucune difficulté; elle n'est pas moins vraie si p est un nombre fractionnaire. Car soit $\frac{m+1}{n} - 1 = -k$,

& $p = \frac{q}{r}$, on aura $\frac{t^{\frac{q}{r}} dt}{(t-Q)^k}$. Soit $t^{\frac{1}{r}} = u$, on en tire

$t = u^r$; $dt = r u^{r-1} du$; $t^{\frac{q}{r}} = u^q$: donc on a la transformée suivante $\frac{r u^{r+q-1} du}{(u^r - Q)^k}$ qui est une fraction rationnelle, r, q , & k étant des nombres entiers. C'est ce qu'on auroit pu voir sur le champ en rapprochant la proposée de l'Art. cxc.

3°. La même différentielle dépend de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, toutes les fois que $\frac{m+1}{n} - p - 1$ est égal à un nombre entier négatif, p étant tout ce qu'on voudra. Pour le prouver, faisons $u = \frac{1}{z}$, après les

substitutions qu'exige cette transformation, j'ai $u^m du = \frac{-dz}{z^{m+1}}$. Soit $z^n = t$, cette

supposition me donne $\frac{-dz}{z^{m+1}} \cdot \left\{a + \frac{b}{z^n}\right\}^p = -\frac{t^{\frac{1}{n}-1} dt}{\frac{m+1}{n}}$.

$\frac{(at+b)^p}{t^p} = -\frac{t^{\frac{m+1}{n}-p-1} dt}{n} \cdot (at+b)^p$. Soit

enfin $at+b=s$, on trouvera pour dernière transformée $\left\{\frac{b-s}{a}\right\}^{\frac{m+1}{n}-p-1} \cdot \frac{s^p ds}{an}$, quantité qu'on voit bien être une fraction rationnelle, si $\frac{m+1}{n} - p - 1$ est un nombre

entier négatif, & si p est un nombre entier. Mais si p exprime un nombre rompu, alors on réduira la proposée en fraction rationnelle, en suivant le calcul de l'article précédent.

4°. Si on fait $u^n = t$, on aura après les substitutions ordinaires $t^{\frac{m+1}{n}-1} dt \cdot (a+bt)^p$ pour transformée; laquelle en supposant $p = \frac{q}{2}$, & $\frac{m+1}{n} - 1 = \frac{r}{2}$ (q & r étant des nombres entiers impairs positifs ou négatifs) devient $t^{\frac{r}{2}} dt \cdot (a+bt)^{\frac{q}{2}}$.

Pour la réduire en fraction rationnelle, supposé que q soit un nombre positif, je la multiplie haut & bas par $(a+bt)^{\frac{q}{2}}$, ce qui me donne $\frac{t^{\frac{r}{2}} dt \cdot (a+bt)^q}{(a+bt)^{\frac{q}{2}}}$, différentielle aisément réductible en fraction rationnelle, Art. CLXXXVIII.

5°. La même chose aura encore lieu si $p = \frac{q}{2}$ & $\frac{m+1}{n} - p - 1 = \frac{r}{2}$; ce qu'il est aisé de voir en appliquant le calcul de l'article précédent à $\left\{ \frac{b-s}{a} \right\}^{\frac{m+1}{n}-p-1} \cdot \frac{s^p ds}{an}$.

6°. Soit enfin dans la proposée $u^m du \cdot (a+bu^n)^p$, $u^n = t^2$, on aura la transformée suivante $t^{\frac{2m+2}{n}-1} dt \cdot (a+bt^2)^p$, dépendante des fractions rationnelles, toutes les fois que $p = \frac{q}{2}$, & $\frac{2m+2}{n} - 1 = r$, r étant un nombre entier pair ou impair, positif ou négatif. Car on a $t^r dt \cdot (a+bt^2)^{\frac{q}{2}}$. Soit dans cette quantité $tt = z$,

M m ij

on en tire $t = z^{\frac{1}{2}}$, $t^r = z^{\frac{r}{2}}$: donc on a la transformée suivante $z^{\frac{r}{2} - \frac{1}{2}} dz \cdot (a + bz)^{\frac{r}{2}}$, qui est la même que celle du N°. 4.

CCLXVIII.

Moyen d'avoir les cas dans lesquels l'intégration dépend de la rectification des sections coniques. La quadrature de la courbe de notre équation à trois termes peut aussi se réduire à la rectification des sections coniques. On trouvera les cas susceptibles de cette réduction en faisant $u^n = t^2$, ou t^3 , ou t^4 , & en appliquant les transformées aux différentes formules que nous avons développées dans les Chapitres 14, 15, & 16 sur les différentielles dont l'intégrale dépend de la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole.

CCLXIX.

Application des principes précédens à la quadrature du folium. Appliquons présentement les principes que nous venons d'exposer, à un exemple. Soit demandée la quadrature de la courbe que les Géomètres ont nommée *folium*, & dont l'équation est $y^3 + gx^3 - axy = 0$. Je fais suivant ce qui a été prescrit plus haut $y = x^r z$, ce qui me donne en substituant cette valeur d'y dans l'équation précédente, $x^{3r} z^3 + gx^3 - ax^{r+1} z = 0$. Je divise par x^3 , l'équation devient $x^{3r-3} z^3 + g - ax^{r+1-3} z = 0$. Soit à présent selon la première condition $r + 1 - 3 = 0$, c'est-à-dire, $r = 2$, nous aurons $x^3 z^3 + g - az = 0$; donc $x^3 = \frac{az - g}{z^3}$. Maintenant

l'aire de la courbe $\int y dx$ est devenue par la supposition de $y = x^r z$, $\int x^r z dx$, & ensuite $\int x^2 z dx$. Mais l'équation $x^3 = \frac{az - g}{z^3}$, donne $x = \left\{ \frac{az - g}{z^3} \right\}^{\frac{1}{3}}$; $dx = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{a}{z^3} - \frac{g}{z^3} \right\}^{-\frac{2}{3}} \times \left\{ -\frac{1}{z^3} dz + \frac{3g dz}{z^4} \right\}$: on a aussi $x^2 = \left\{ \frac{a}{z^3} - \frac{g}{z^3} \right\}^{\frac{2}{3}}$. Donc en mettant les valeurs de x^2 & de dx dans l'aire de la courbe exprimée par $\int x^2 z dx$, on aura $\int x^2 z dx = \int -\frac{1}{2} \frac{a dz}{z^2} + \frac{3g dz}{2z} = \frac{1}{2} \frac{a}{z} - \frac{3g}{2z} \pm C$.

CHAPITRE XIX.

De la quadrature des courbes dont les équations contiennent quatre termes.

CCLXX.

Soit l'équation à quatre termes $Ay^a x^q + By^r x^p + Cy^w x^s + Dy^\phi x^k = 0$, je la divise par $x^q y^\phi$; ce qui me donne celle-ci, $Ay^{a-\phi} + By^{r-\phi} x^{p-q} + Cy^{w-\phi} x^{s-q} + Dx^{k-q} = 0$, & supposant,

$$\begin{aligned} a - \phi &= \lambda \\ r - \phi &= \mu \\ p - q &= \sigma \\ w - \phi &= \theta \\ s - q &= \rho \\ k - q &= \tau \end{aligned}$$

j'ai $Ay^\lambda + By^\mu x^\sigma + Cy^\theta x^\rho + Dx^\tau = 0$. Cette équation représente toutes les équations possibles à quatre termes. Formule des équations à quatre termes.

CCLXXI.

On se sert
encore de la
transforma-
tion $y = x^r u$.

Je fais à présent comme dans le Chapitre précédent $y = x^r u$, ce qui me donne la transformée suivante $Ax^{\lambda r} u^{\lambda} + Bx^{r\mu + \sigma} u^{\mu} + Cx^{r\theta + \rho} u^{\theta} + Dx^{\tau} = 0$, qui devient étant divisée par x^{τ} , $Ax^{\lambda r - \tau} u^{\lambda} + Bx^{r\mu + \sigma - \tau} u^{\mu} + Cx^{r\theta + \rho - \tau} u^{\theta} + D = 0$.

CCLXXII.

Cas dans les-
quels on a la
valeur de x
en u .

Si on cherche les cas dans lesquels on peut tirer de cette équation la valeur de x en u , on trouvera,

1°. Que si dans deux des quatre termes les exposans de x sont égaux à zéro, comme alors il n'y aura plus qu'un terme qui contienne x & u , il sera aisé d'avoir la valeur de x en u , en divisant par la puissance de u qui affecte x ; ce qui donne les trois conditions suivantes,

$$1. \quad r\lambda - \tau = 0, \text{ \& } r\mu + \sigma - \tau = 0$$

$$2. \quad r\lambda - \tau = 0, \text{ \& } r\theta + \rho - \tau = 0$$

$$3. \quad r\mu + \sigma - \tau = 0, \text{ \& } r\theta + \rho - \tau = 0$$

2°. Si dans l'un des trois termes affectés de x & de u , l'exposant de x est égal à zéro, & qu'il soit le même dans les deux autres, on aura la valeur de x en u , en divisant par les fonctions de u , qui multiplient x dans ces deux termes. Cette supposition donne encore trois conditions.

$$4. \quad r\lambda - \tau = 0, \text{ \& } r\mu + \sigma - \tau = \theta r + \rho - \tau$$

$$5. \quad r\mu + \sigma - \tau = 0, \text{ \& } r\lambda - \tau = \theta r + \rho - \tau$$

$$6. \quad \theta r + \rho - \tau = 0, \text{ \& } r\lambda - \tau = r\mu + \sigma - \tau$$

3°. Si dans l'un des termes l'exposant de x est zero , & que dans un des deux autres cet exposant soit ou le double ou la moitié de celui qu'a le même x dans le troisieme , on pourra encore alors avoir la valeur de x en u . Pour le faire mieux sentir , je représente le cas présent par $au^\lambda + bx^{2\beta}u^\mu + cx^\beta u^\theta + d' = 0$. J'ai par conséquent $bx^{2\beta}u^\mu + cx^\beta u^\theta = -au^\lambda - d'$, ou $x^{2\beta} + \frac{cx^\beta u^{\theta-\mu}}{b} = \frac{-au^{\lambda-\mu} - d'u^{-\mu}}{b}$. J'acheve le quarré dans le premier membre de cette équation , ce qui donne $x^{2\beta} + \frac{cx^\beta u^{\theta-\mu}}{b} + \frac{ccu^{2\theta-2\mu}}{4bb} = \frac{-au^{\lambda-\mu} - d'u^{-\mu}}{b} + \frac{ccu^{2\theta-2\mu}}{4bb}$, & en extrayant la racine quarrée , j'aurai la valeur de x en u . Cette troisieme supposition me donne les six conditions suivantes.

7. $r\lambda - \tau = 0$, & $r\mu + \sigma - \tau = 2(\theta r + \rho - \tau)$
8. $r\lambda - \tau = 0$, & $r\mu + \sigma - \tau = \frac{1}{2}(\theta r + \rho - \tau)$
9. $r\mu + \sigma - \tau = 0$, & $r\lambda - \tau = 2(\theta r + \rho - \tau)$
10. $r\mu + \sigma - \tau = 0$, & $r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(\theta r + \rho - \tau)$
11. $\theta r + \rho - \tau = 0$, & $r\lambda - \tau = 2(r\mu + \sigma - \tau)$
12. $\theta r + \rho - \tau = 0$, & $r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(r\mu + \sigma - \tau)$

4°. Si l'exposant de x est le même dans deux des trois termes affectés de x & de u , & en même temps double ou la moitié de l'exposant de x dans le troisieme , on tirera encore la valeur de x en u . Ce cas peut se représenter par $ax^{2\beta}u^\lambda + bx^{2\beta}u^\mu + cx^\beta u^\theta + d' = 0$; donc j'aurai $x^{2\beta} + \frac{cx^\beta u^\theta}{au^\lambda + bu^\mu} = -\frac{d'}{au^\lambda + bu^\mu}$. J'acheve le quarré , je prends ensuite la racine quarrée ,

ce qui me donnera, comme on voit, la valeur de x en u . Cette dernière combinaison fournit encore six conditions que voici :

$$13. r\lambda - \tau = r\mu + \sigma - \tau, \text{ \& } r\lambda - \tau = 2(\theta r + \rho - \tau)$$

$$14. r\lambda - \tau = r\mu + \sigma - \tau, \text{ \& } r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(\theta r + \rho - \tau)$$

$$15. r\lambda - \tau = \theta r + \rho - \tau, \text{ \& } r\lambda - \tau = 2(r\mu + \sigma - \tau)$$

$$16. r\lambda - \tau = \theta r + \rho - \tau, \text{ \& } r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(r\mu + \sigma - \tau)$$

$$17. r\mu + \sigma - \tau = \theta r + \rho - \tau, \text{ \& } r\mu + \sigma - \tau = 2(r\lambda - \tau)$$

$$18. r\mu + \sigma - \tau = \theta r + \rho - \tau, \text{ \& } r\mu + \sigma - \tau = \frac{1}{2}(r\lambda - \tau).$$

* Ils sont au nombre de dix-huit.

Voilà donc dix-huit cas dans lesquels on peut avoir la valeur de x en u , en déterminant r par le moyen des équations de condition.

CCLXXIII.

Différence essentielle entre les équations à trois termes, & celles qui en ont quatre.

SCHOLIE. Mais il faut faire ici une remarque essentielle. Dans les équations à trois termes, comme il n'y avoit à la fois qu'une seule équation de condition, nous avons vu qu'on tiroit la valeur de x en u , en déterminant r , pourvu qu'une de nos cinq conditions eût lieu. Cela ne suffit pas pour les équations à quatre termes. Il y a toujours deux équations de condition à la fois. C'est ce qui fait que pour avoir la valeur de l'indéterminée r il doit se trouver un certain rapport entre les exposans λ, μ, σ , &c. Par exemple, la première condition $r\lambda - \tau = 0$, & $r\mu + \sigma - \tau = 0$, donne $r = \frac{\tau}{\lambda}$, & $r = \frac{\tau - \sigma}{\mu}$; ainsi pour pouvoir fixer ici la valeur de r , il faut que dans la proposée $\frac{\tau}{\lambda} = \frac{\tau - \sigma}{\mu}$. Il en est ainsi des autres.

CCLXXIV.

CCLXXIV.

J'en conclus qu'on ne peut réduire que dans certains cas, la quadrature des courbes dont les équations ont quatre termes à l'intégration d'une différentielle $x' u dx$, dans laquelle x soit donnée en u .

CCLXXV.

En suivant à peu près les mêmes procédés que nous avons pratiqués dans la première partie de ce Chapitre, on parviendra à déterminer dans le cas présent des équations à quatre termes les courbes qui sont quarrables ou absolument, ou par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, ou par la rectification de l'ellipse & de l'hyperbole; il n'y aura de difficulté que la longueur du calcul.

On trouve par la méthode du Chapitre précédent les cas d'intégration des équations à quatre termes.

C H A P I T R E X X.

Des différentielles qui renferment des logarithmes & des exponentielles.

CCLXXVI.

Nous avons déjà vu à la tête du Chapitre sur les fractions rationnelles une règle pour trouver l'intégrale des différentielles logarithmiques les plus simples. Mais il en est de très-complicées auxquelles on appliqueroit difficilement cette règle. Nous allons donner ici

1°. Sur l'intégration de celles qui contiennent des logarithmes.

une autre méthode fort utile dans beaucoup de cas. Cette méthode consiste à faire usage de substitutions, ce qui se présente d'autant plus naturellement que nous nous en sommes servi dans la différentiation de ces mêmes quantités.

CCLXXVII.

Usage des substitutions pour intégrer ces quantités. Soit proposé d'intégrer $\frac{dx}{x \ln x}$, je fais $\ln x = y$, donc $\frac{dx}{x} = dy$: donc la proposée devient $\frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est (Art. CXVII.) $\ln y$: remettant pour y sa valeur, on a $\ln \ln x$ pour l'intégrale cherchée.

Premier exemple.

On suppose ici & dans la suite la sous-tangente de la logarithmique = 1.

CCLXXVIII.

Second exemple. De même pour intégrer $m \cdot (\ln x)^{m-1} \frac{dx}{x}$, je ferai $\ln x = y$; cette supposition me donne $\frac{dx}{x} = dy$, $(\ln x)^{m-1} = y^{m-1}$; donc $m(\ln x)^{m-1} \frac{dx}{x} = m y^{m-1} dy$; or l'intégrale de ce second membre est, comme on sait, y^m ; donc l'intégrale cherchée est $(\ln x)^m$.

CCLXXIX.

Troisième exemple. Soit demandée l'intégrale de $m \cdot (\ln \ln x)^{m-1} \frac{dx}{x \ln x}$: je suppose $\ln x = y$, d'où je tire $\frac{dx}{x} = dy$, $\ln \ln x = \ln y$: on a donc la transformée suivante $m \cdot (\ln y)^{m-1} \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est (Article précédent) $(\ln y)^m$. Remettant

pour ly sa valeur, on a $\int m \cdot (l \cdot lx)^{m-1} \frac{dx}{x} = (l \cdot lx)^m$.

CCLXXX.

Si la proposée étoit $nm \cdot (lx^m)^{n-1} \frac{dx}{x}$, je ferois $x^m = y$, d'où je tire $dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$; $lx^m = ly$, & après ces substitutions j'ai la transformée $nm \cdot (ly)^{n-1} \frac{dy}{mx^m} = n \cdot (ly)^{n-1} \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est, comme nous venons de le voir $(ly)^n$. Remettant pour y sa valeur en x , on trouvera $(lx^m)^n$ pour l'intégrale cherchée.

Quatrième exemple.

CCLXXXI.

Soit enfin proposé d'intégrer $nm \{l \cdot (lx)^m\}^{n-1} \frac{dx}{x}$, je supposerai $lx = y$; donc $\frac{dx}{x} = dy$; $(lx)^m = y^m$; donc on a la transformée suivante $nm \cdot (ly^m)^{n-1} \frac{dy}{y}$, dont nous avons vu (Art. CCLXXX.) que l'intégrale est $(ly^m)^n$. Donc $\int nm \{l \cdot (lx)^m\}^{n-1} \frac{dx}{x} = \{l \cdot (lx)^m\}^n$.

Cinquième exemple.

CCLXXXII.

A l'égard des différentielles exponentielles, l'inverse de la règle que nous avons donnée pour les différentier servira pour les intégrer. Ainsi l'intégrale d'une différentielle exponentielle est cette quantité même divisée par la différence de son logarithme.

2°. Intégration des différentielles exponentielles.
Règle générale.

Appliquée à
des exemples.

En effet de ce que la différence de c^x est $c^x dx$, il s'enfuit que l'intégrale de $c^x dx$ est c^x . De même si on demande l'intégrale de $x^y dy/x + x^{y-1} y dx$, la règle précédente nous apprend qu'elle est x^y . Car la différence du logarithme de x^y est $dy/x + \frac{y dx}{x}$. Divisant $x^y dy/x + x^{y-1} y dx = x^y dy/x + \frac{x^y y dx}{x}$ par $dy/x + \frac{y dx}{x}$, on aura au quotient x^y . Donc, &c.

CCLXXXIII.

S'il s'agissoit de trouver l'intégrale de $x^{y^z} y^z x^{-1} dx + x^{y^z} y^z dz/x \cdot ly + x^{y^z} y^{z-1} z dy/x$, la règle générale nous donneroit x^{y^z} . En effet le logarithme de x^{y^z} est y^z/x , dont la différence est $y^z \frac{dx}{x} + y^z dz/x \cdot ly + y^{z-1} z dy/x$. Divisant la proposée par cette quantité, le quotient de la division fera x^{y^z} .

CCLXXXIV.

Usage des
substitutions
pour trouver
les mêmes in-
tégrales.

Premier
exemple.

On peut encore prendre les intégrales des différentielles exponentielles par le moyen des substitutions. Soit, par exemple, demandée l'intégrale de $c^x dx$; je suppose $c^x = y$, ce qui me donne en prenant les logarithmes de part & d'autre $x/c = ly$, ou $x = ly$ ($lc = 1$). Donc $dx = \frac{dy}{y}$. Substituant il me vient $\frac{y dy}{y} = dy$, dont l'intégrale est, comme on fait, y . Donc $\int c^x dx = c^x$.

CCLXXXV.

De même si on avoit $x' dy / x + \frac{x' y dx}{x}$, on feroit $x' = z$, d'où l'on tire l'équation logarithmique $y / x = lz$, & différentiant $\frac{y dx}{x} + dy / x = \frac{dz}{z}$. Après les substitutions on a pour transformée dz . Donc l'intégrale cherchée est x' , telle que nous l'avons trouvée par la règle générale.

Second exemple.

CCLXXXVI.

Soit enfin cherchée l'intégrale de $x'^z \times (y^z x^{-1} dx + y^z dz / x \cdot ly + z dy / x)$: on supposera comme ci-dessus $x'^z = u$; d'où l'on tire $y^z / x = lu$, & $y^z x^{-1} dx + y^z dz / x \cdot ly + y^{z-1} z dy / x = \frac{du}{u}$. Après les substitutions la proposée devient $\int du = u$; donc l'intégrale cherchée est x'^z . Il en sera ainsi des autres.

Troisième exemple.

CCLXXXVII.

Il y a encore une autre méthode générale pour trouver l'intégrale des différentielles, tant logarithmiques qu'exponentielles, de quelque degré qu'elles soient. Cette méthode consiste à prendre l'intégrale par parties, c'est-à-dire, terme à terme.

Autre méthode pour trouver les intégrales des différentielles logarithmiques & exponentielles.

En quoi elle consiste.

CCLXXXVIII.

Mais avant d'expliquer cette méthode, & d'en faire usage, il est nécessaire de mettre devant les yeux, par

Notion préparatoire.

anticipation, la regle suivante qui est fort simple.

La différentielle de xy est, comme on fait, $x dy + y dx$: celle de xyz est $xy dz + xz dy + yz dx$; & ainsi des autres.

Il suit de là évidemment que l'intégrale de $x dy$ est $xy - \int y dx$. Par la même raison celle de $xy dz + xz dy$ est $xyz - \int yz dx$. Cette proposition est claire, & la preuve en est fort aisée, en différentiant ces dernières quantités. Cette notion suffit pour entendre ce que nous allons dire.

CCLXXXIX.

Application
de la métho-
de de prendre
l'intégrale
par parties.

1°. Aux diffé-
rentielles lo-
garithmiques.

Soit demandée l'intégrale de $x dx \cdot lx$, je raisonne ainsi. Si lx étoit une constante, l'intégrale demandée seroit $\frac{x^2}{2}$, multipliée par cette constante. Mais lx est une variable; il manque donc un terme à la différentielle proposée, pour qu'elle soit complète, savoir la différence de lx multipliée par $\frac{x^2}{2}$, l'intégrale de $x dx \cdot lx$ est donc $\frac{x^2}{2} lx - \int \frac{x^2 dx}{2}$. Mais $\int \frac{x^2 dx}{2} = \frac{x^3}{6}$, donc $\int x dx \cdot lx = \frac{x^2}{2} lx - \frac{x^3}{6}$. Pour s'en convaincre il n'y a qu'à différentier cette intégrale, & l'on retrouvera la différentielle proposée.

En faisant le même raisonnement, on trouvera que

$$\int x^m lx \times dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot lx - \int \frac{x^m dx}{m+1} : \text{ or } \int \frac{x^m dx}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} ; \text{ donc } \int x^m dx \cdot lx = \frac{x^{m+1} lx}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} .$$

CCXC.

Enfin si la proposée étoit $x^m dx \cdot (lx)^n$, on trouveroit par la méthode précédente pour premier terme de l'intégrale $\frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot (lx)^n - \int \frac{nx^m dx}{m+1} \cdot (lx)^{n-1}$: mais $-\int \frac{nx^m dx}{m+1} \cdot (lx)^{n-1} = -\frac{nx^{m+1}}{(m+1)^2} \cdot (lx)^{n-1} + \int \frac{n \cdot (n-1)x^m}{(m+1)^2} \times (lx)^{n-2} dx$. J'opère sur le dernier terme, son intégrale est $\frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{m+1}}{(m+1)^3} \cdot (lx)^{n-2} - \int \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^m}{(m+1)^3} \cdot (lx)^{n-3} dx$. On trouvera ainsi de suite tant de termes qu'on voudra de cette intégrale : m & n représentent les nombres entiers qui peuvent être les exposans de x , & de la puissance de lx . Il est évident que quand n est un nombre entier positif, la suite précédente fera finie, & contiendra autant de termes plus un, qu'il y aura d'unités dans l'exposant n . Alors le dernier terme ne contient plus de logarithme, mais seulement x élevé à une certaine puissance.

CCXCI.

Ce dernier exemple peut servir de formule pour trouver les intégrales des différentielles logarithmiques lx à quelque degré qu'elles soient élevées. Car en suivant la méthode précédente, on trouve qu'en général $\int x^m dx \cdot (lx)^n$

$$(lx)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1} \times \left\{ (lx)^n - \frac{n(lx)^{n-1}}{m+1} + \frac{n \cdot (n-1)}{(m+1)^2} x^m dx \cdot (lx)^{n-2} \right.$$

Formule pour l'intégration des différentielles logarithmiques représentées par $x^m dx \cdot (lx)^n$.

$$\times (lx)^{n-2} - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{(m+1)^3} (lx)^{n-3} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(m+1)^4} (lx)^{n-4} - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{(m+1)^5} (lx)^{n-5} + \&c. \}.$$

CCXCII.

2°. Applica-
tion de la mê-
me méthode
aux différen-
tielles expo-
nentielles.

Appliquons maintenant cette même méthode aux diffé-
rentielles exponentielles. Soit proposé d'intégrer $c^{gz} dz/c$,
ou $c^{gz} dz$ (c étant supposé représenter un nombre dont
le logarithme est l'unité), on trouvera par la règle de

l'Art. CCLXXXII. $\int c^{gz} dz = \frac{c^{gz}}{g}.$

CCXCIII.

Si on demande maintenant l'intégrale de $zc^{gz} dz$,
cette intégrale se prendra par parties. $\int zc^{gz} dz =$
 $\frac{zc^{gz}}{g} - \int \frac{c^{gz} dz}{g}$, c'est-à-dire $\frac{zc^{gz}}{g} - \frac{c^{gz}}{gg}$. De même
 $\int z^2 c^{gz} dz = \frac{z^2 c^{gz}}{g} - \int \frac{2zc^{gz} dz}{g}$. Or l'intégrale
de ce dernier membre est $-\frac{2zc^{gz}}{gg} + \int \frac{2c^{gz} dz}{gg} =$
 $\frac{2c^{gz}}{gg}$; l'intégrale entière de $\int z^2 c^{gz} dz$ est donc $\frac{z^2 c^{gz}}{g}$
 $-\frac{2zc^{gz}}{gg} + \frac{2c^{gz}}{gg}.$

CCXCIV.

En général si on demandoit l'intégrale de $z^m c^{gz} dz/c$,
ou simplement $z^m c^{gz} dz$ (c étant toujours $= 1$), on
la

la prendroit par parties de la façon suivante , $\int z^m c^{gz} dz$
 $= \frac{z^m c^{gz}}{g} - \int \frac{m z^{m-1} c^{gz} dz}{g}$; voilà déjà le premier terme
 de l'intégrale cherchée : pour trouver le second , j'opere
 sur le membre affecté du signe $\int$. Or $-\int \frac{m z^{m-1} c^{gz} dz}{g}$
 $= -\frac{m z^{m-1} c^{gz}}{g g} + \int \frac{m \cdot (m-1) z^{m-2} c^{gz} dz}{g g}$. Or
 $\int \frac{m \cdot (m-1) z^{m-2} c^{gz} dz}{g g} = \frac{m \cdot (m-1) z^{m-2} c^{gz}}{g^2}$
 $\int \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) z^{m-3} c^{gz} dz}{g^2} = -\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) z^{m-3} c^{gz}}{g^3}$
 $+ \int \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) z^{m-4} c^{gz} dz}{g^3} =$
 $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) z^{m-4} c^{gz}}{g^4}$
 $\int \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4) z^{m-5} c^{gz} dz}{g^4}$.

Donc $\int z^m c^{gz} dz = c^{gz} \times \left\{ \frac{z^m}{g} - \frac{m z^{m-1}}{g g} + \frac{m(m-1) z^{m-2}}{g^2} \right.$
 $- \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) z^{m-3}}{g^3} + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) z^{m-4}}{g^4}$
 $- \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4) z^{m-5}}{g^5} + \&c. \left. \right\}$.

Formule d'in-
 tégration des
 différentielles
 exponentiel-
 les , repré-
 sentées par
 $z^m c^{gz} dz$,
 lc étant = 1.

Ces termes suffisent pour montrer la loi que suivent
 dans cette formule les exposans & les coefficients de z .
 On pourra continuer la serie tant qu'on voudra. Lorsque
 m exprimera un nombre entier positif, alors la suite sera
 finie, & l'intégrale de la proposée contiendra autant de
 termes plus un, qu'il y aura d'unités dans l'exposant m .

CCXCV.

On peut encore employer cette méthode pour trouver

O o

l'intégrale des différentielles qui contiennent des logarithmes de logarithmes, comme $x^m dx.l.lx$, $x^m dx.(l.lx)^n$ &c. & aussi les intégrales de différentielles exponentielles plus composées que les précédentes; mais comme ces cas arrivent très-rarement, nous ne nous y arrêterons pas.

CCXCVI.

On pourroit encore prendre l'intégrale des différentielles logarithmiques & exponentielles par approximation, en se servant des suites infinies dans lesquelles il n'entre ni quantité logarithmique, ni exponentielle; quoique cette méthode soit longue, pénible & de peu d'usage, nous donnerons plus bas la manière de s'en servir.

C H A P I T R E XXI.

Des différentielles affectées de plusieurs signes d'intégration.

C C X C V I I.

Observation
essentielle sur
l'expression
de ces sortes
de différen-
tielles.

L Orsqu'on a des quantités différentielles affectées de plusieurs signes d'intégration, il faut bien être en garde contre l'équivoque que peut faire naître leur expression. $\int dx \int u dx$, veut dire ou bien l'intégrale de $dx \int u dx$, ce que nous marquerons dorénavant ainsi $\int (dx \int u dx)$; ou bien l'intégrale de dx multipliée par l'intégrale

de $u dx$, ce que nous marquerons de la façon suivante $(\int dx) \cdot (\int u dx)$. Ces deux cas sont fort différens ; il faut éviter de les confondre.

Deux cas
différens pour
ces différen-
tielles.

Mais avant de chercher les moyens de les intégrer, il est bon de se rappeler la règle que nous avons indiquée (Art. CCLXXXVIII.) elle est nécessaire pour entendre ce que nous allons dire.

CCXCVIII.

P R E M I E R C A S.

Le premier cas est celui dans lequel on demande l'intégrale des différentielles telles que $dx \int u dx$. On inte-

Exposition du
premier cas.

gre dans ce premier cas, lorsque la différentielle sous le premier signe est une différentielle exacte. Soit par exem-

ple $\int \left\{ dx \int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} \right\}$. Je suppose $\frac{r}{\sqrt{2rx - xx}} = u$;

Procédé
qu'il faut sui-
vre pour inté-
grer.

ce qui me donne $\int \left\{ dx \int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} \right\} = \int (dx \int u dx)$.

L'intégrale de cette dernière quantité est, suivant ce que nous avons dit (Art. CCLXXXVIII.), $x \int u dx - \int u x dx$;

& en remettant pour u sa valeur, $x \int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} - \int \frac{x r dx}{\sqrt{2rx - xx}}$. La première partie de cette intégrale est le

produit de x , par un arc de cercle dont x est le sinus

verse. La seconde partie s'intègre aisément. Je l'écris

ainsi $\frac{rx dx - r r dx}{\sqrt{2rx - xx}} + \frac{r r dx}{\sqrt{2rx - xx}}$, dont l'intégrale est

$-r \sqrt{2rx - xx} + \int \frac{r r dx}{\sqrt{2rx - xx}}$. Or $\frac{r r dx}{\sqrt{2rx - xx}}$ est, comme

O o ij

on fait, l'élément d'un secteur de cercle, l'origine des coordonnées étant au sommet de l'axe.

Si l'on avoit $f(dx \cdot f dx \cdot f u dx)$, alors c'est comme si on avoit $f(dx \cdot x (f x f u dx - f u x dx))$, c'est-à-dire, $f(x dx \cdot f u dx) - f(dx \cdot f u x dx) = \frac{x^2}{2} f u dx - \int \frac{u x^2}{2} dx - x f u x dx - f u x x dx$, où l'on voit qu'il n'y a plus qu'un signe f à chaque membre.

CCXCIX.

Transforma-
tion qui sim-
plifie l'ex-
pression dans
ce même cas.

En général si l'on avoit $f(r dx f u dx)$, on simplifieroit l'expression en faisant $r dx = dz$. Car alors on auroit $f(dz f \frac{u dz}{r}) = z f \frac{u dz}{r} - \int \frac{z u dz}{r}$, qui ne contient plus qu'un seul signe d'intégration à chaque membre.

CCC.

SECOND CAS.

Examen du
second cas.

Comment on
trouve l'inté-
grale.

Ce second cas est, comme nous l'avons dit, celui dans lequel des intégrales sont multipliées les unes par les autres. Soit, par exemple, la proposée de la forme suivante $(f dx) \times \left\{ \int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} \right\}^3$, alors l'intégrale se prend par parties.

Différentielle
qui sert d'ex-
emple $u^3 dx$.

Je suppose $\int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} = u$, j'aurai $\frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} = du$, & $\left\{ \int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} \right\}^3 = u^3$. La quantité que je dois intégrer est donc $u^3 dx$. Or si on se rappelle ce que nous avons dit Art. CCLXXXVIII., on voit que $\int u^3 dx = u^3 x - \int 3 u u x du$, c'est-à-dire, en mettant pour du sa valeur,

$= u^3 x - \int \frac{3 u u r x dx}{\sqrt{2 r x - x x}}$, $u^3 x$ est une intégrale, & est le premier terme de l'intégrale cherchée. J'opere sur le second membre $-\int \frac{3 u u r x dx}{\sqrt{2 r x - x x}}$. Il est égal à $-\int 3 u u r \left\{ \frac{x dx - r dx}{\sqrt{2 r x - x x}} + \frac{r dx}{\sqrt{2 r x - x x}} \right\} = -\int 3 u u r \left\{ -d(\sqrt{2 r x - x x}) + du \right\} = \int -3 u u r du + 3 u u r d(\sqrt{2 r x - x x})$, dont l'intégrale est $-u^3 r + 3 u u r \sqrt{2 r x - x x} - \int 6 r u du \sqrt{2 r x - x x}$. Je prends ce dernier terme qui n'est pas intégré. Je le mets sous la forme suivante $-\int 6 r u \times \frac{r dx}{\sqrt{2 r x - x x}} \times \sqrt{2 r x - x x} = -\int 6 r r u dx$; or l'intégrale de $-6 r r u dx$ est $-6 r r u x + \int 6 r r x du$. Il me reste donc encore un terme avec le signe $\int$. Je mets dans ce terme pour du sa valeur, ce qui donne $\int 6 r r x du = \int 6 r r x \times \frac{r dx}{\sqrt{2 r x - x x}} = \int 6 r^3 \left\{ \frac{x dx - r dx + r dx}{\sqrt{2 r x - x x}} \right\} = -6 r^3 \sqrt{2 r x - x x} + 6 r^3 u$. Il ne me reste plus de quantités différentielles; j'ai donc l'intégrale entiere de $u^3 dx$; cette intégrale est

$$u^3 x + 3 r u^2 \sqrt{2 r x - x x} - r u^3 - 6 r^2 u x - 6 r^3 \sqrt{2 r x - x x} + 6 r^3 u \pm C.$$

Intégrale
de la différen-
tielle propo-
sée.

Il est aisé de se convaincre de la bonté de nos opérations : en différentiant cette intégrale, mettant pour du sa valeur, $\frac{r dx}{\sqrt{2 r x - x x}}$ & effaçant ce qui se détruit, on retrouvera $u^3 dx$. Il en sera de même des autres différentielles semblables.

C C C I.

Il y a encore une autre méthode pour intégrer les

Autre mé-
thode pour
avoir l'inté-
grale de la
même diffé-
rentielle.

Par le moyen
des quantités
exponentiel-
les.

différentielles de la définition précédente. Cette méthode consiste à se servir des sinus & cosinus exprimés par les quantités exponentielles. Comme cette méthode est fort utile dans certains cas, nous allons la développer ici en l'appliquant à la différentielle qui nous a servi de dernier exemple.

CCCCII.

Soit proposée $(\int dx) \times \left\{ \int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} \right\}^3$; $\int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}}$ est l'expression d'un arc de cercle & par conséquent d'un angle, dont x est le sinus verse & r le rayon. Je nomme cet angle z , & je suppose le sinus total $= 1$; on aura $\int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} = zr$, donc $\left\{ \int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} \right\}^3 = z^3 r^3$, & $(\int dx) \times \left\{ \int \frac{r dx}{\sqrt{2rx - xx}} \right\}^3 = \int z^3 r^3 dx$. Soit cof. $rz = y$, on aura cof. $z = \frac{y}{r}$; x qui est le sinus verse $= r - y$, donc $x = r - r \text{ cof. } z$ or : cof. $z =$ (Introd. Art. XLVI.) $\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$; la différence de $\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$ est (Introd. Art. xxxiv.) $dz\sqrt{-1} \cdot \left\{ \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2} \right\}$, ou $dz \cdot \left\{ \frac{-e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}$; donc $dx = r dz$: $\left\{ \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}$, donc $\int z^3 r^3 dx = \int \frac{r^4 z^3 dz e^{z\sqrt{-1}} - r^4 z^3 dz e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \int \frac{r^4}{2\sqrt{-1}} \times \left\{ z^3 dz e^{z\sqrt{-1}} - z^3 dz e^{-z\sqrt{-1}} \right\}$. Pour avoir l'intégrale de cette quantité, je la compare avec la formule $\int z^3 e^{gz} dz$ de l'Article CCXCIV. Cette

comparaifon me donne pour le premier terme $g = \sqrt{-1}$, & pour le fecond, $g = -\sqrt{-1}$. L'intégrale eft donc $\int z^3 r^3 dx = \frac{r^4}{2\sqrt{-1}} \times$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{z^3 c^{z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} + \frac{3 z z c^{z\sqrt{-1}}}{1} + \frac{6 z c^{z\sqrt{-1}}}{-1\sqrt{-1}} - \frac{6 c^{z\sqrt{-1}}}{1} \\ & + \frac{z^3 c^{-z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} - \frac{3 z z c^{-z\sqrt{-1}}}{1} - \frac{6 z c^{-z\sqrt{-1}}}{1\sqrt{-1}} + \frac{6 c^{-z\sqrt{-1}}}{1} \end{aligned} \right\},$$

& en réuniffant chaque deux termes qui forment des

finus & des cofinus, on a $\int z^3 r^3 dx = -\frac{r^4 z^3}{2} \times$

$$\left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2} \right\} + 3 r^4 z^2 \left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}$$

$$+ 6 r^4 z \left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2} \right\} - 6 r^4 \left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= -r^4 z^3 \text{ cof. } z + 3 r^4 z z \text{ fin. } z + 6 r^4 z \text{ cof. } z - 6 r^4 \text{ fin. } z.$$

CCCIII.

Mais fi nos opérations font exactes, cette intégrale doit être la même que celle que nous avons trouvée pour la différentielle propofée (Art. ccc.). Pour réduire la dernière à celle-là, je remarque que $\text{cof. } z = 1 - \frac{x}{r}$, & $\text{fin. } z = \frac{1}{r} \sqrt{(2rx - xx)}$. Je mets dans l'intégrale trouvée ces valeurs de cof. & $\text{fin. } z$ ce qui me donne $-r^4 z^3 + r^3 z^3 x + 3 r^3 z^2 \sqrt{(2rx - xx)} + 6 r^4 z - 6 r^3 z x - 6 r^3 \sqrt{(2rx - xx)}$. Mais en comparant cette intégrale avec celle de l'Art. ccc. on trouve que $zr = u$. Donc enfin on a $\int r^3 z^3 dx = -ru^3 + u^3 x + 3 r u^2 \sqrt{(2rx - xx)} + 6 r^3 u - 6 r^2 u x - 6 r^3 \sqrt{(2rx - xx)} + C$, la même précifément que celle que nous a donnée l'autre méthode.

CCCIV.

Autre usage
de la même
méthode.

Si l'on avoit à intégrer $\int dz \cdot \text{cof. } pz \cdot \text{fin. } qz$, on se serviroit de la même méthode des quantités exponentielles. On

$$\text{auroit ici } \int dz \times \left\{ \frac{e^{pz\sqrt{-1}} + e^{-pz\sqrt{-1}}}{2} \right\} \times \left\{ \frac{e^{qz\sqrt{-1}} - e^{-qz\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\} \\ = \frac{e^{(p+q)z\sqrt{-1}} - e^{(-p-q)z\sqrt{-1}} - e^{(p-q)z\sqrt{-1}} + e^{(q-p)z\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}},$$

ce qui réduit la proposée à l'intégration de $\int dz \cdot e^{gz}$
Article CCXCII.

Ce seroit la même méthode qu'il faudroit suivre, si on avoit $\int dz \cdot \text{fin. } kz \cdot \text{cof. } rz \cdot \text{cof. } qz \cdot \text{fin. } sz$ &c. On voit par-là qu'elle est fort étendue & très-commode dans beaucoup de cas.

CCCV.

De même par le moyen des exponentielles imaginaires on intégreroit $z^n dz \cdot \text{fin. } qz^m, \text{cof. } pz^k$ &c. pourvu que n, m & k soient entiers & positifs.

On pourroit encore au lieu de $\int dz \times (\text{fin. } qz \cdot \text{cof. } pz)$ écrire (Art. XLVII. Introd.) $\int dz \times \left\{ \text{fin. } \frac{(q+p)z}{2} + \text{fin. } \frac{(q-p)z}{2} \right\}$. Or toutes ces différentielles sont faciles à intégrer, en considérant que $\int dz \text{ fin. } az = -\frac{\text{cof. } az}{a} + A$, & que $\int dz \text{ cof. } az = \frac{\text{fin. } az}{a} + A$, A étant une constante quelconque. Par-là on intégrera en général $dz \text{ fin. } qz \text{ cof. } pz \text{ cof. } rz, \text{ \&c.}$

CCCVI.

CCCVI.

REMARQUE 1. Quelques-unes des différentielles que nous venons de traiter, s'intégreront encore dans certains cas par une méthode particulière. Nous allons donner ici un essai de cette méthode, à cause de l'utilité dont elle peut être en beaucoup d'occasions. Que l'on ait à intégrer $\int \frac{q dq \sqrt{1-xx}}{\sqrt{1-qq}}$, $\frac{dq}{\sqrt{1-qq}}$ représentant la différence d'un angle dont q est le sinus & étant $= -\frac{adx}{\sqrt{1-xx}}$, a étant une constante quelconque & $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ la différence d'un angle dont x est le sinus.

Méthode
particulière
utile dans
certains cas.

1°. Au lieu de $\int \frac{q dq \sqrt{1-xx}}{\sqrt{1-qq}}$ je puis écrire $\int \left\{ \frac{xdx \sqrt{1-qq}}{\sqrt{1-xx}} + \frac{q dq \sqrt{1-xx}}{\sqrt{1-qq}} - \frac{xdx \sqrt{1-qq}}{\sqrt{1-xx}} \right\}$, dont l'intégrale est $-\sqrt{1-xx} \cdot \sqrt{1-qq} - \int \frac{xdx \sqrt{1-qq}}{\sqrt{1-xx}}$; première forme que peut avoir l'intégrale cherchée.

2°. Au lieu de $\int \frac{q dq \sqrt{1-xx}}{\sqrt{1-qq}}$, nous pouvons, en mettant pour $\frac{dq}{\sqrt{1-qq}}$ son égale $-\frac{adx}{\sqrt{1-xx}}$, écrire $\int -aq dx$, dont l'intégrale est (Art. CCLXXXVIII.) $-aqx + \int ax dq = \left\{ \text{en mettant pour } dq \text{ la valeur } -\frac{adx \sqrt{1-qq}}{\sqrt{1-xx}} \right\} - aqx - \int \frac{a^2 x dx \sqrt{1-qq}}{\sqrt{1-xx}}$; seconde forme que peut avoir l'intégrale cherchée.

J'ajoute à ces deux expressions des constantes convenables, je les compare ensuite l'une avec l'autre: cette comparaison me donnera, comme il est évident, la valeur de $\int \frac{xdx \sqrt{1-qq}}{\sqrt{1-xx}}$: je substituerai cette valeur dans l'une ou l'autre des deux expressions précédentes, & j'aurai l'intégrale complète de la proposée.

CCCVII.

Remarque
importante
sur les ex-
ponentielles
imaginaires.

REMARQUE 2. A l'occasion des exponentielles imaginaires dont nous nous sommes servis dans ce Chapitre, qu'il nous soit permis de rapporter ici une remarque que nous aurions dû placer dans le Chapitre troisième de l'introduction. Nous avons vu dans ce Chapitre que la différentielle d'un angle z dont x est le sinus $= \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$.

On a donc $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$: ou si au lieu de $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ on met ici $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$ qui lui est égale, on trouvera $x =$

$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; & si au lieu de $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ on écrit

$\frac{dx}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{xx-1}}$ qui lui est encore égale, on trouvera

$x = \frac{-e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ quantité de signe contraire.

Nous allons d'abord prouver cette proposition en faisant tout au long le calcul qui pourroit embarrasser à cause du changement des signes, ensuite nous leverons la difficulté que présente cette double expression du même sinus.

1°. $dz = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$ donne $z = \sqrt{-1} \times l(x + \sqrt{xx-1})$,
ou $\sqrt{-1} \times l\left\{\frac{x + \sqrt{xx-1}}{\sqrt{-1}}\right\}$ en ajoutant la constante
que donne la supposition de $x = 0$. Donc $\frac{z}{\sqrt{-1}} =$
 $l\left\{\frac{x + \sqrt{xx-1}}{\sqrt{-1}}\right\}$, ou $-z\sqrt{-1} = l\left\{\frac{x + \sqrt{xx-1}}{\sqrt{-1}}\right\}$:
donc $e^{-z\sqrt{-1}} \sqrt{-1} - x = \sqrt{xx-1}$, & en quar-
rant les deux membres, $-e^{-2z\sqrt{-1}} - 2x e^{-z\sqrt{-1}}$

$$\sqrt{-1} = -1; \text{ donc } 1 - c^{-2z\sqrt{-1}} = 2xc^{-z\sqrt{-1}} \\ \sqrt{-1}, \& x = \frac{1 - c^{-2z\sqrt{-1}}}{2c^{-z\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}; \text{ donc enfin } x = \\ \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

$$2^o. \text{ J'écris maintenant } dz = \frac{dx}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{(xx-1)}} \text{ ce qui me} \\ \text{donne } dz\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}; z\sqrt{-1} = l \left\{ \frac{x + \sqrt{(xx-1)}}{\sqrt{-1}} \right\}; \\ c^{z\sqrt{-1}}\sqrt{-1} - x = \sqrt{(xx-1)}; -c^{2z\sqrt{-1}} \\ - 2xc^{z\sqrt{-1}}\sqrt{-1} + 1 = 0; \frac{-c^{2z\sqrt{-1}} + 1}{2c^{z\sqrt{-1}}\sqrt{-1}} = x \\ \& \text{ enfin } x = \frac{-c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Voilà donc deux quantités de signes différens qui au premier coup d'œil semblent représenter également le sinus x de l'angle z . Cependant une seule de ces deux quantités peut être la vraie valeur de ce sinus, & il est facile de voir que cette quantité est la première $\frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Car lorsque z est très-petite & positive, cette première quantité est positive, comme elle le doit être, & la seconde $\frac{-c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ est négative. En effet $c^{z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1}$, & $c^{-z\sqrt{-1}} = 1 - z\sqrt{-1}$; donc $\frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1 + z\sqrt{-1} - 1 + z\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = z$; au lieu que $\frac{-c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{-1 - z\sqrt{-1} + 1 - z\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = -z$.

Afin de concevoir maintenant pourquoi l'on trouve
P p ij

deux valeurs à x , quoiqu'il n'y en ait qu'une qui soit la véritable, on remarquera que dans l'équation $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, le dénominateur $\sqrt{(1-xx)}$ est supposé positif; cependant comme $\sqrt{(1-xx)}$ a deux valeurs égales & de signes contraires $+\sqrt{(1-xx)}$ & $-\sqrt{(1-xx)}$, l'équation $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ représente les deux suivantes $dz = \frac{dx}{+\sqrt{(1-xx)}}$ qui est la vraie équation entre l'angle z & son sinus x , & $dz = \frac{dx}{-\sqrt{(1-xx)}}$ qui n'est pas la vraie équation entre cet angle & son sinus. La première de ces deux équations nous donne $x = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, vraie valeur du sinus, qui substituée dans l'équation $dz = \frac{dx}{+\sqrt{(1-xx)}}$ rendra $dz = dz$, comme cela doit être; la seconde des deux équations donne $x = \frac{e^{-z\sqrt{-1}} - e^{z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, qui n'est pas la valeur du sinus, mais qui substituée dans $dz = \frac{dx}{-\sqrt{(1-xx)}}$ rendra aussi $dz = dz$: ainsi les deux valeurs de x satisfont également à l'équation $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, quoiqu'une seule de ces valeurs représente réellement le sinus.

C'est par cette même raison de l'équivoque des signes $+$ & $-$ qui affectent les quantités radicales, qu'on a $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}} & = \frac{dx}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{(xx-1)}}$, quoique $\sqrt{-1}$ ne semble pas égale à $\frac{1}{\sqrt{-1}}$. Mais $\sqrt{-1}$ a les deux valeurs $\pm\sqrt{-1}$ & on trouvera $\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$, si on observe de prendre $\pm\sqrt{-1} = \frac{1}{\pm\sqrt{-1}}$.

Nous avons tiré cette remarque fort utile pour la théorie des quantités exponentielles & imaginaires, de l'Article CCLXVIII. du Traité sur différens points importans du système du monde.

CCCVIII.

Nous finirons cette premiere Partie qui contient à peu près tout ce que les Géometres ont trouvé sur l'intégration des différentielles à une changeante, par indiquer la méthode de leur appliquer les suites ou series infinies. Cette méthode nous donne par approximation l'intégrale de certaines différentielles qui ne sont pas intégrables algébriquement.

C H A P I T R E XXII.

*Des différentielles qui s'integrent par le moyen
des series ou suites infinies.*

NOus diviserons ce Chapitre en deux parties. Dans la premiere nous donnerons une idée abrégée de la théorie des series ou suites infinies ; la seconde contiendra leurs usages pour le Calcul intégral.

§. I.

Théorie des Suites.

CCCIX.

Définition
des Suites.

DÉFINITION. On entend par *serie infinie* une suite de termes disposés suivant un certain ordre , qui vont en augmentant ou en décroissant jusqu'à l'infini.

CCCCX.

Leur division
en conver-
gentes & di-
vergentes.

On distingue donc deux sortes de *series*. On nomme les unes *series convergentes*, & les autres *series divergentes*.

Les *series convergentes* sont celles dont les termes vont en diminuant à l'infini. Nous prouverons plus bas que ces series sont les seules vraies.

Les *series divergentes* sont celles dont les termes vont en augmentant à l'infini.

Application
des Suites.

Les series servent à trouver des diviseurs approchés des quantités qu'on ne peut diviser exactement ; elles donnent aussi par approximation les racines des quantités qui n'en ont point d'exactes.

CCCCXI.

Aux divisions
infinies.

PROBLEME 1. Etant donnée la fraction $\frac{a}{b \pm x}$ (dans laquelle a & b sont des quantités déterminées , & x une indéterminée) qui n'est pas divisible exactement par son dénominateur binome , la réduire en suite infinie.

SOLUTION. Je fais la division suivant les regles ordinaires de l'Algebre, de la maniere suivante.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Dividende.} & \text{Diviseur.} & \text{Q U O T I E N T.} \\
 a a : b \pm x & \left\{ \begin{array}{l} \frac{a a}{b} + \frac{a a x}{b b} + \frac{a^2 x^2}{b^2} + \frac{a^2 x^3}{b^3} + \frac{a^2 x^4}{b^4} + \frac{a^2 x^5}{b^5} + \frac{a^2 x^6}{b^6} + \frac{a^2 x^7}{b^7} \\ + \&c. \end{array} \right. & \\
 \\
 \begin{array}{r} - a a + \frac{a a x}{b} \\ \hline \circ + \frac{a a x}{b} \\ + \frac{a a x}{b} + \frac{a^2 x^2}{b^2} \\ \hline \circ + \frac{a^2 x^2}{b^2} \\ - \frac{a^2 x^2}{b^2} + \frac{a^2 x^3}{b^3} \\ \hline \circ + \frac{a^2 x^3}{b^3} \\ + \frac{a^2 x^3}{b^3} + \frac{a^2 x^4}{b^4} \\ \hline \circ + \frac{a^2 x^4}{b^4} \\ - \frac{a^2 x^4}{b^4} + \frac{a^2 x^5}{b^5} \\ \hline \circ + \frac{a^2 x^5}{b^5} \\ + \frac{a^2 x^5}{b^5} + \frac{a^2 x^6}{b^6} \\ \hline \circ + \frac{a^2 x^6}{b^6} \\ - \frac{a^2 x^6}{b^6} + \frac{a^2 x^7}{b^7} \\ \hline \circ + \frac{a^2 x^7}{b^7} \\ + \frac{a^2 x^7}{b^7} + \frac{a^2 x^8}{b^8} \\ \hline \circ + \frac{a^2 x^8}{b^8} \\ \&c. \end{array} & &
 \end{array}$$

Le quotient est donc la série suivante (A) $\frac{a a}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2} \mp \frac{a^2 x^2}{b^3} \mp \frac{a^2 x^3}{b^4} \mp \frac{a^2 x^4}{b^5} \mp \frac{a^2 x^5}{b^6} \mp \frac{a^2 x^6}{b^7} \mp \frac{a^2 x^7}{b^8} \mp \&c.$ qui peut se continuer autant qu'on voudra.

CCCXII.

Si x est le premier terme du diviseur, en sorte que la fraction donnée soit $\frac{a a}{x \pm b}$, alors le quotient de la division sera la suite infinie (B) $\frac{a a}{x} \mp \frac{a a b}{x^2} \mp \frac{a a b^2}{x^3} \mp \frac{a^2 b^3}{x^4} \mp \frac{a^2 b^4}{x^5} \mp \frac{a^2 b^5}{x^6} \mp \frac{a^2 b^6}{x^7} \mp \frac{a^2 b^7}{x^8} \mp \&c.$ Cette série se trouve de la même manière que la précédente.

CCCXIII.

Pour qu'une série soit convergente & vraie, le plus grand terme doit être le premier en diviseur.

THÉOREME I. Si dans la série A dans laquelle les exposans de x vont en croissant, x est fort petite en comparaison de b , en sorte que $\frac{x}{b}$ soit une fraction moindre que l'unité, cette série sera convergente & vraie, c'est-à-dire $= \frac{a a}{b \pm x}$.

DÉMONSTRATION. 1°. Cette suite sera convergente. Car dans l'hypothèse de $x < b$, les puissances $\frac{x}{b}$, $\frac{x x}{b b}$, $\frac{x^4}{b^4}$ &c. de la fraction $\frac{x}{b}$ forment une progression géométrique qui décroît à l'infini d'autant plus rapidement que $\frac{x}{b}$ est plus petite. Donc en faisant en sorte que les termes de la série A se reglent sur les puissances de $\frac{x}{b}$, ce qui est facile en lui donnant la forme suivante $\left\{ \frac{a a}{b} \mp \frac{a a x}{b b} \right\} \times \left\{ 1 \mp \frac{x^2}{b^2} \mp \frac{x^4}{b^4} \mp \frac{x^6}{b^6} \mp \&c. \right\}$, on voit que chaque terme sera beaucoup moindre que celui qui

qui le précède, & qu'ils décroîtront à l'infini. Donc (Art. CCCX.) la serie sera convergente.

2°. Je dis que cette suite A sera vraie, c'est-à dire, qu'elle nous redonnera la fraction $\frac{aa}{b \pm x}$ dont elle a pris naissance. Car, comme nous venons de le voir, la suite $A = \left\{ \frac{aa}{b} \mp \frac{aa x}{b^2} \right\} \times (F) \left\{ 1 + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^4}{b^4} + \frac{x^6}{b^6} + \&c. \right\}$; or F a tous ses termes en progression géométrique décroissante à l'infini, puisque par l'hypothese $x < b$. Donc la somme $= \frac{bb}{bb - xx}$ *; on a donc $A = \left\{ \frac{aa}{b} \mp \frac{aa x}{b^2} \right\} \times \frac{bb}{bb - xx} = \frac{a a b}{bb - xx} \mp \frac{a a x}{bb - xx} = aa \times \frac{b \mp x}{(b + x) \cdot (b - x)} = \frac{aa \times 1}{b \pm x}$. C. Q. F. P.

* Nota. Les regles des proportions connues sans doute par tous nos Lecteurs, nous apprennent qu'il est aisé d'avoir la somme d'une progression géométrique quelconque décroissante à l'infini. On peut la trouver par deux proportions; la premiere est que la différence des deux premiers termes est au premier terme, comme la différence du premier terme au dernier est à la somme de tous les termes qui précèdent le dernier. Or dans une progression géométrique décroissante à l'infini le dernier terme sera infiniment petit, & ne sera par conséquent point comparable aux deux premiers termes; le premier terme pourra donc être pris pour la différence du premier terme au dernier, & la somme de tous les termes qui précèdent le dernier pourra aussi être prise pour la somme de tous les termes. La proportion précédente deviendra donc celle-ci: La différence des deux premiers termes est au premier terme, comme le premier terme est à la somme de tous les termes. La seconde proportion est celle-ci: La somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est

à son conséquent. Or tous les termes sont antécédens hors le dernier, & tous les termes sont conséquens hors le premier. Mais la progression géométrique étant décroissante à l'infini, son dernier terme sera infiniment petit, & par conséquent pourra être regardé comme nul par rapport aux autres. On aura donc: La somme de tous les termes est à la somme de tous les termes moins le premier, comme un seul antécédent est à son conséquent.

Appliquons ces deux proportions à la progression présente; en nommant f la somme de tous les termes, on aura

$$1^\circ. 1 - \frac{x^2}{b^2} : 1 :: 1 : f = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{b^2}}.$$

$$\text{Donc } f = \frac{b^2}{b^2 - x^2}. \quad 2^\circ. \text{ On aura } f :$$

$$f - 1 :: 1 : \frac{x^2}{b^2}. \text{ Donc } (f - 1) \times 1 =$$

$$f \times \frac{x^2}{b^2}; \text{ donc } f \times 1 - f \times \frac{x^2}{b^2} = 1 ;$$

$$\text{donc } f = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{b^2}} = \frac{b^2}{b^2 - x^2}.$$

Q q

CCCXIV.

THÉOREME 2. Dans la serie (B) $\frac{aa}{x} + \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3} + \frac{aab^3}{x^4} + \frac{aab^4}{x^5} + \frac{aab^5}{x^6} + \frac{aab^6}{x^7} + \frac{aab^7}{x^8} + \&c.$ dans laquelle les exposans de x vont en décroissant, puisqu'elle est la même que la suivante $aa x^{-1} + aab x^{-2} + aab^2 x^{-3} + aab^3 x^{-4} + \&c.$, si x est plus grande que b , en sorte que la fraction $\frac{b}{x}$ soit moindre que l'unité, cette serie sera convergente, & donnera la vraie valeur de $\frac{aa}{x+b}$.

DÉMONSTRATION. 1°. Cette serie B sera convergente. Car en lui donnant la somme suivante $\left\{ \frac{aa}{x} + \frac{aab}{x^2} \right\} \times \left\{ 1 + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^4}{x^4} + \frac{b^6}{x^6} + \&c. \right\}$ ses termes sont ordonnés par rapport à la progression géométrique, $1, \frac{b^2}{x^2}, \frac{b^4}{x^4}, \&c.$ laquelle décroît d'autant plus vite que la fraction $\frac{b}{x}$ est plus petite. Donc cette serie alors sera convergente, & d'autant plus convergente que x sera plus grande par rapport à b .

2°. La suite (B) sera vraie, c'est-à-dire $= \frac{aa}{x+b}$ dans le cas de $x > b$. Car on a, comme nous venons de le voir, $B = \left\{ \frac{aa}{x} + \frac{aab}{xx} \right\} \times (G) \left\{ 1 + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^4}{x^4} + \frac{b^6}{x^6} + \&c. \right\}$ Or dans cette suite b étant $< x$, G forme une progression géométrique décroissante à l'infini. Donc (N°. Art. CCCXIII.) sa somme $= \frac{xx}{xx - bb}$. Donc $B = \left\{ \frac{aa}{x} + \frac{aab}{xx} \right\} \times \frac{xx}{xx - bb} = \frac{aa x}{xx - bb} + \frac{aab}{xx - bb} = aa \times \frac{(x+b)}{(x-b) \cdot (x+b)} = \frac{aa \times 1}{x+b}$. C. Q. F. P.

CCCXV.

COROLLAIRE 1. Il faut conclure des deux Théorèmes précédens, que si dans la serie A , x étoit plus grande que b , & si dans la serie B , x étoit plus petite que b , ces series feroient divergentes ; auquel cas on prouveroit aisément que la serie A provenant de la fraction $\frac{a^a}{b \pm x}$, & la serie B qui vient de $\frac{a^a}{x \pm b}$, feroient d'une valeur infinie, au lieu que les fractions $\frac{a^a}{b \pm x}$, $\frac{a^a}{x \pm b}$ sont finies. Donc ces suites A & B donneroient faux. La raison en est simple & évidente. Car la vraie valeur d'une fraction est le quotient de la division, plus le reste divisé par le diviseur. Or il est aisé de voir que dans les series convergentes ce reste va toujours en diminuant, d'autant plus que la serie est plus convergente, en sorte qu'il devient si petit qu'on peut le regarder comme nul. Par exemple, dans la serie (A) (Art. CCCXI.) qui sera d'autant plus convergente, comme nous venons de le démontrer (Art. CCCXIII.), que x sera plus petite par rapport à b , supposons $x = 1$, $b = 10$, $a = 1$, si on s'en tient au sixieme terme du quotient $\frac{a^a x^6}{b^7}$, on aura pour reste $+$ $\frac{a^a x^7}{b^7}$ divisé par $b \pm x$; c'est-à-dire $+$ $\frac{1}{10000000 \times (10 \pm 1)}$, fraction qu'on voit bien être déjà fort petite. Si on prend encore un terme au quotient $+$ $\frac{a^a x^7}{b^8}$, le reste sera $+$ $\frac{1}{100000000 \times (10 \pm 1)}$, qui est beaucoup plus petit que le reste précédent, & toujours ainsi de suite. Si au lieu de supposer $b = 10$, on le suppose $= 100$, alors les restes,

Les series
convergentes
sont les seules
vraies.

Q q ij

comme on le voit, décroîtront beaucoup plus rapidement; enforte qu'après avoir pris un certain nombre de termes, on pourra regarder ces restes comme nuls, & le quotient comme la valeur exacte de la fraction. C'est le contraire dans les series divergentes; plus elles sont divergentes, plus le reste est grand: il va toujours en augmentant à mesure qu'on prend plus de termes au quotient. Supposons dans la serie A , qui dans ce cas sera divergente, $b = 1$, $a = 1$, $x = 10$: si on s'arrête au quatrieme terme $+\frac{a^2 x^3}{b^4}$, on aura pour reste $+\frac{a^2 x^4}{b^4}$ divisé par $b \pm x$, c'est-à-dire $+\frac{10000}{1 \times (1 \pm 10)}$ qu'on voit bien être déjà fort grand. Si on prend un cinquieme terme, le reste fera $+\frac{100000}{1 \times (1 \pm 10)}$, qui est plus grand que le précédent; & ainsi de suite.

Donc dans les series divergentes plus on prend de termes, plus on s'éloigne de la vraie valeur de la proposée. Donc les series convergentes sont seules bonnes.

CCCXVI.

Division des series convergentes, en croissantes ou ascendantes, & décroissantes ou descendantes.

COROLLAIRE 2. Il faut distinguer deux sortes de series convergentes. Les unes sont d'autant plus convergentes, que leur indéterminée est plus petite; & dans ces premieres qu'on nomme series *croissantes* ou *ascendantes* les exposans de cette indéterminée vont en croissant. Telle est la serie A (Art. CCCXI.). Les autres convergent d'autant plus que leur indéterminée est plus grande. Dans celles-là les exposans de l'indéterminée vont en décroissant, & elles se nomment series *décroissantes* ou

est $\frac{a^a}{b} \times (1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\&c.)$
 $= \frac{a^a}{b} \times (0+0+0+0+0+\&c.) = 0$; donc on
 auroit $\frac{a^a}{b+b} = 0$, ce qui est faux.

Donc en général dans le cas de $b = x$, la division infinie de la fraction $\frac{a^a}{b+b}$ ne nous donnera qu'un infini que nous connoissons déjà dans $\frac{a^a}{b-x}$; & nous donnera toujours faux dans $\frac{a^a}{b+x}$.

Donc toute fraction dont le dénominateur binome a ses deux termes égaux, ne pourra dans l'état où elle est alors, se réduire en suite infinie.

CCCXIX.

Ce qu'il faut
faire dans ce
cas.

SCHOLIE 2. Cependant il est une préparation par le moyen de laquelle on peut appliquer avec succès la méthode des suites aux fractions, dont le dénominateur binome sera composé de deux termes égaux; en supposant toutesfois qu'il est la somme de ces deux termes: car s'il en étoit la différence, alors le dénominateur étant zéro, la fraction seroit visiblement infinie. Cette préparation consiste à partager la somme des deux parties du dénominateur en deux autres parties inégales, dont la plus grande soit la première en diviseur. Car alors faisant la division, on aura (Art. CCCXVII.) une série convergente.

Application à
un exemple.

Par exemple dans la proposée $\frac{a^a}{b+b}$, on supposera $c = 2b + x$; & alors la fraction devient $\frac{a^a}{c-x}$, dont on voit bien que le dénominateur $c - x = 2b + x - x$, est le même que $b + b$. La série qui proviendra de la division

de cette dernière fraction sera toujours (Art. CCCXIII. N°.2.)
 $= \frac{a^a}{b+b}$; & elle se pourra varier en autant de vraies séries
qu'on donnera de valeurs différentes à x .

Si l'on prend $c = 2b - x$, la fraction $\frac{a^a}{b+b}$ devient
 $\frac{a^a}{c+x}$, dont la série faite par division infinie sera toujours
égale à $\frac{a^a}{b+b}$. Elle se peut encore varier en autant de séries
convergentes qu'on donnera de valeurs à x moindres que
 $2b - x$.

CCCXX.

Appliquons cette règle à un exemple numérique. Soit Second
exemple.
proposée la fraction $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ dont on voit que le dé-
nominateur a ses deux termes égaux. Si je divise cette
fraction dans l'état où elle est, je trouve pour quotient
 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$
 $= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \&c.$ série de laquelle le
R. P. Grandi conclut que $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + \&c.$ d'où il
tire une démonstration de la création. Cependant il ne lui
étoit pas difficile de voir que la valeur de la fraction $\frac{1}{1+1}$
n'est pas seulement le quotient $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \&c.$,
mais encore le reste $\frac{+1}{1+1} = \pm \frac{1}{2}$, ce qui ne nous ap-
prend rien de nouveau.

Si donc l'on veut avoir une suite convergente de même
valeur que la fraction $\frac{1}{1+1}$, il faut la mettre sous la forme
suivante $\frac{1}{3-1}$ qui lui est égale. La division de cette
fraction continuée à l'infini donne la suite $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$
 $+ \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \&c.$ dont les termes, comme on le voit,

forment une progression géométrique décroissante à l'infini.

Sa somme (N^a. de l'Art. CCCXIII.) est donc $= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}$
 $= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$

On pourra encore trouver une infinité d'autres suites toutes égales entre elles & égales à la fraction $\frac{1}{2}$, en prenant successivement pour son dénominateur $4 - 2$, $5 - 3$, $6 - 4$, &c. dont la somme $= 2$, & en observant que le plus grand terme soit le premier en diviseur.

CCCXI.

REMARQUE GÉNÉRALE. Ce que nous venons de dire sur les fractions qui ont un binome pour dénominateur, doit s'entendre aussi des fractions dont le dénominateur est un trinome, un quatinome & en général une grandeur quelconque; puisque, comme on fait, toute grandeur peut être réduite en binome, en regardant une partie de ses termes, comme le premier terme du binome, & l'autre partie, comme le second terme.

CCCXII.

Usage des
suites pour
l'extraction
des racines.

PROBLEME 2. Etant donnée la grandeur fourde ou irrationnelle $\sqrt{aa \pm xx}$, la débarrasser de son radical en la réduisant en suite infinie.

SOLUTION. Je fais l'extraction de la racine quarrée suivant la maniere ordinaire enseignée dans tous les Livres d'Algebre, & comme on le voit ici,

$$aa \pm xx$$

$$\begin{array}{l}
 aa \pm xx \left\{ \begin{array}{l} 2a \pm \frac{xx}{a} - \frac{x^4}{4a^3} \pm \frac{x^6}{8a^5} - \frac{5x^8}{64a^7} \pm \frac{7x^{10}}{128a^9} - \&c. \\ a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \pm \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} \pm \&c. \end{array} \right. \\
 \hline
 - \frac{aa \pm xx}{0 \pm xx} \\
 \hline
 \pm xx - \frac{x^4}{4aa} \\
 \hline
 0 - \frac{x^4}{4aa} \\
 \hline
 + \frac{x^4}{4aa} \pm \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
 \hline
 0 \pm \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
 \hline
 \pm \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{16a^6} \pm \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
 \hline
 0 - \frac{5x^8}{64a^6} \pm \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
 \hline
 + \frac{5x^8}{64a^6} \pm \frac{5x^{10}}{128a^8} - \frac{5x^{12}}{512a^{10}} \pm \frac{5x^{14}}{1024a^{12}} \\
 \hline
 0 \pm \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{512a^{10}} \pm \frac{5x^{14}}{1024a^{12}} \\
 \hline
 \pm \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{256a^{10}} \pm \frac{7x^{14}}{1024a^{12}} - \frac{7x^{16}}{2048a^{14}} \pm \frac{12x^{18}}{16384a^{16}} - \frac{49x^{20}}{64536a^{18}} \\
 \hline
 0 - \frac{21x^{12}}{512a^{10}} \pm \frac{12x^{14}}{1024a^{12}} - \frac{7x^{16}}{2048a^{14}} \pm \frac{12x^{18}}{16384a^{16}} - \frac{49x^{20}}{64536a^{18}} \\
 \hline
 \&c.
 \end{array}$$

Je prends la racine quarrée de aa qui est a . Je l'écris à droite de $aa \pm xx$ avec une barre entre deux. Je quarré a , son quarré est aa que je soustrais de $aa \pm xx$, il reste $\pm xx$. Je divise $\pm xx$ par $2a$, double du premier terme de la racine. J'ai pour second terme de cette racine $\pm \frac{xx}{2a}$. Je l'écris à côté du premier. Je multiplie $\pm \frac{xx}{2a}$ par $2a \pm \frac{xx}{2a}$, & j'en soustrais le produit $\pm xx + \frac{x^4}{4a^2}$ de $\pm xx$, ce qui se fait en l'écrivant avec des lignes contraires; le reste est $-\frac{x^4}{4a^2}$. Je le divise par le double

R r

des termes qui sont déjà à la racine, il me vient $-\frac{x^4}{8a^3}$ qui est le troisieme terme de la suite. Continuant ainsi l'opération, j'aurai autant de termes de la racine que je voudrai. Supposé que j'eusse résolu de finir ma suite à $-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}$: j'aurois pu négliger dans l'opération tous les termes tels que $\frac{5x^{14}}{1024a^{12}}$, &c. dans lesquels l'exposant de la puissance de x est plus grand que 12.

CCCXXIII.

Si la proposée est $\sqrt[3]{xx \pm aa}$, en faisant les mêmes opérations que ci-dessus on trouvera pour racine la serie suivante $x \pm \frac{aa}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} \pm \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7} \pm \frac{7a^{10}}{256x^9} - \frac{21a^{12}}{1024x^{11}} \pm \&c.$

CCCXXIV.

Pour, que la serie soit vraie le plus grand terme doit être le premier. **REMARQUE 1.** Si dans la grandeur fourde $\sqrt[3]{aa \pm xx}$, aa est le plus grand terme, il faudra se servir de la premiere suite qui dans ce cas sera convergente, vraie, & approchera d'aussi près que l'on voudra de la racine cherchée. Mais si xx est plus grand que aa , alors il faudra se servir de la seconde suite infinie.

On extraira de même par le moyen de suites infinies les racines cubiques, quatriemes, cinquiemes &c. des quantités qui n'en ont point de finies.

CCCXXV.

Moyen d'abrégier les opérations précédentes, **REMARQUE 2.** Il y a un moyen d'abrégier les opérations précédentes ; c'est de se servir du fameux Théorème de

M. Newton, pour élever un binome $p \pm q$ à une puissance quelconque m . Telle est, comme on fait, la formule de ce Théorème $p^m \pm m p^{m-1} q^1 + \frac{m \cdot (m-1) p^{m-2} q^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) p^{m-3} q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) p^{m-4} q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4) p^{m-5} q^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4) \cdot (m-5) p^{m-6} q^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \pm \&c.$

en se servant du Théorème de M. Newton pour l'élevation d'un binome à une puissance quelconque.

Si c'est une racine quarrée, ou cubique, ou quatrième &c. qu'on veut prendre, alors on fera $m = \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{4}$; & si la proposée est un quarré exact, ou un cube exact, &c. la suite s'arrêtera d'elle-même, le numérateur d'un des termes devenant zéro; sinon on la peut pousser aussi loin qu'on veut.

CCCXXVI.

Pour faire mieux sentir l'usage de cette formule, appliquons-la à l'exemple que nous avons traité (Art. CCCXXII.) $\sqrt{(aa \pm xx)}$. Comparant avec la formule, on a

$$p = aa$$

$$q = xx$$

$$m = \frac{1}{2}$$

mettant ces valeurs dans tous les termes de la formule, elle devient $a \pm \frac{1}{2} a^{-1} xx - \frac{1}{8} a^{-3} x^4 \pm \frac{1}{16} a^{-5} x^6 - \frac{5}{128} a^{-7} x^8 \pm \frac{7}{256} a^{-9} x^{10} - \frac{21}{1024} a^{-11} x^{12} \pm \&c.$ qui est précisément la même quantité que nous avons trouvée (Art. CCCXXII.) par une autre méthode.

CCCXXVII.

Par le moyen de cette même formule, on élève aussi un binome à une puissance négative entière ou rompie. Mais il faut toujours observer que le plus grand des deux termes soit le premier dans l'opération : autrement l'on auroit des séries fausses.

CCCXXVIII.

On réduit encore par le moyen de ce théorème, des nombres en suites infinies. Si j'ai, par exemple, à extraire la racine quarrée de $2 = (\text{Art. CCCXX.}) 3 - 1$, c'est-à-dire, à élever $3 - 1$ à la puissance $\frac{1}{2}$, je vois que $p = 3$, $q = -1$, $m = \frac{1}{2}$. Substituant donc ces valeurs dans la formule, elle devient $3^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}-1} 1^1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)}{1 \cdot 2} 3^{\frac{1}{2}-2} 1^2 - \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot (\frac{1}{2} - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 3^{\frac{1}{2}-3} 1^3 + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot (\frac{1}{2} - 2) \cdot (\frac{1}{2} - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 3^{\frac{1}{2}-4} 1^4 - \&c.$ En réduisant cette série, on aura la racine approchée de 2; & ainsi des autres.

On sent bien que la formule s'étend aux trinomes, quatrinnomes, toute quantité pouvant être regardée comme un binome (Art. CCCXXI.)

CCCXXIX.

REMARQUE 3. On fait sur les suites infinies les mêmes opérations que sur les quantités finies; elles sont

susceptibles entre elles & avec des grandeurs finies d'addition, de soustraction, de multiplication & de division. On les élève à des puissances quelconques dont l'exposant est entier, ou fractionnaire, positif ou négatif. Une des plus importantes opérations qu'on fasse sur les series, c'est de les sommer. Cette opération demande beaucoup d'adresse & de sagacité; mais on ne peut l'assujettir à aucune regle générale, & d'ailleurs cette matiere n'est point de notre sujet. Si l'on veut en voir quelques exemples, il n'y a qu'à consulter les Mémoires de l'Académie des Sciences, plusieurs entre autres de M. Nicole dans lesquels cet illustre Analyste fait usage de series qu'il parvient à sommer avec le plus heureux succès. On peut aussi consulter l'excellent & curieux Ouvrage de M. Jacques Bernoulli, qui a pour titre : *Tractatus de Seriebus infinitis, earumque summâ finitâ, &c.*

Je passe à l'application des suites au Calcul intégral.

§. I I.

Usage des suites pour le Calcul intégral.

CCCXXX.

PROBLEME I. Trouver par le moyen des suites l'intégrale des différentielles comprises sous la forme suivante $g x^m dx . (a + b x^n)^p$, dans laquelle p est un nombre quelconque, & dans laquelle a est plus grand que $b x^n$.

1°. Pour les différentielles binomes comprises dans la formule

$$g x^m dx x (a + b x^n)^p$$

SOLUTION. Je réduis en suite infinie $(a + b x^n)^p$;

ce que je fais par le moyen de la formule de M. Newton.

Comparant avec cette formule, je trouve $p=a$; $q=bx^n$;

$m=p$: la suite est donc ici $a^p + p a^{p-1} b^1 x^{1n} +$

$$\frac{p \cdot (p-1) a^{p-2} b^2 x^{2n}}{1 \cdot 2} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot a^{p-3} b^3 x^{3n}}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$

$$\frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) a^{p-4} b^4 x^{4n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4) a^{p-5} b^5 x^{5n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

+ &c.

Je multiplie chacun des termes de cette suite par

$g x^m dx$, elle devient $g a^p x^m dx + p g a^{p-1} b x^{m+n} dx$

$$+ \frac{p \cdot (p-1) \cdot g a^{p-2} b^2 x^{m+2n} dx}{1 \cdot 2} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$g a^{p-3} b^3 x^{m+3n} dx + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot g a^{p-4} b^4 x^{m+4n} dx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} g a^{p-5} b^5 x^{m+5n} dx.$$

Je prends (Art. II.) l'intégrale de chaque terme

$$\text{en particulier, j'ai } \frac{g a^p x^{m+1}}{m+1} + \frac{p g a^{p-1} b x^{m+n+1}}{m+n+1} +$$

$$\frac{p \cdot (p-1) \cdot g a^{p-2} b^2 x^{m+2n+1}}{1 \cdot 2 \cdot (m+2n+1)} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) g a^{p-3} b^3 x^{m+3n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+3n+1)}$$

$$+ \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) g a^{p-4} b^4 x^{m+4n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (m+4n+1)} +$$

$$\frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4) g a^{p-5} b^5 x^{m+5n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (m+5n+1)} + \&c.$$

Si on divise chaque terme par $g a^p x^{m+1}$, & qu'on multiplie toute la suite par cette même grandeur, elle

$$\text{devient } g a^p x^{m+1} \times \left\{ \frac{b^0 x^{0n}}{m+1} + \frac{p \cdot a^{-1} b x^n}{m+1+n} + \right.$$

$$\frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2 \cdot (m+1+2n)} a^{-2} b^2 x^{2n} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+1+3n)} a^{-3} b^3 x^{3n}$$

$$+ \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (m+1+4n)} a^{-4} b^4 x^{4n} +$$

$$\frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (m+1+5n)} a^{-5} b^5 x^{5n} + \&c. \} \\ = \int g x^m dx \cdot (a + b x^n)^p.$$

CCCCXXI.

Si $b x^n$ est $> a$, alors il faut mettre $b x^n$ le premier terme du binome qui devient pour lors $(b x^n + a)^p$. Je le réduis en serie qui est $b^p x^{np} + p b^{p-1} x^{np-1n} a^1 + \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2} b^{p-2} x^{np-2n} a^2 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^{p-3} x^{np-3n} a^3 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^{p-4} x^{np-4n} a^4 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} b^{p-5} x^{np-5n} a^5 + \&c.$

Je multiplie, comme ci-dessus, chaque terme de la suite par $g x^m dx$, elle devient $g b^p x^{m+np} dx + p g b^{p-1} x^{m+np-n} a^1 dx + \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2} g b^{p-2} x^{m+np-2n} a^2 dx + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} g b^{p-3} x^{m+np-3n} a^3 dx + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} g b^{p-4} x^{m+np-4n} a^4 dx + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} g b^{p-5} x^{m+np-5n} a^5 dx + \&c.$

Je prends l'intégrale de chaque terme en particulier; cette opération me donne $\frac{g b^p x^{m+np+1}}{m+np+1} + \frac{p g b^{p-1} x^{m+np-n+1} a^1}{m+np-n+1} + \frac{p \cdot (p-1) g b^{p-2} x^{m+np-2n+1} a^2}{1 \cdot 2 \cdot (m+np-2n+1)} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) g b^{p-3} x^{m+np-3n+1} a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+np-3n+1)} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) g b^{p-4} x^{m+np-4n+1} a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (m+np-4n+1)} + \&c.$

$$\frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4) g b^{p-5} x^{m+np-5n+1} a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (m+np-5n+1)} + \&c.$$

Divisant chaque terme de la suite par $g b^p x^{m+np+1}$ & la multipliant toute entiere par cette même grandeur, on a enfin

$$g b^p x^{m+np+1} \times \left\{ \frac{b^{-0} x^{-0n}}{m+np+1} + \frac{p b^{-1} x^{-na^1}}{m+np-n+1} + \frac{p \cdot (p-1) b^{-2} x^{-2n} a^2}{1 \cdot 2 \cdot (m+np-2n+1)} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot b^{-3} x^{-3n} a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+np-3n+1)} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) b^{-4} x^{-4n} a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (m+np-4n+1)} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4) b^{-5} x^{-5n} a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (m+np-5n+1)} + \&c. \right\}$$

$$= \int g x^m dx (b x^n + a)^p.$$

CCCXXXII.

2°. Pour les
différentielles
trinomes,
quadrinomes,
&c.

COROLLAIRE 1. Cette méthode s'étend aussi aux différentielles trinomes, quadrinomes, &c. Soit, par exemple, proposé d'intégrer $g x^m dx \cdot (a + b x^n + c x^{2n})^p$; je regarde $a + b x^n + c x^{2n}$ comme un binome dont le premier terme est a , & le second $b x^n + c x^{2n}$. Réduisant en serie on a $a^p + p a^{p-1} \cdot (b x^n + c x^{2n})^1 + \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2} a^{p-2} \cdot (b x^n + c x^{2n})^2 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{p-3} (b x^n + c x^{2n})^3 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{p-4} (b x^n + c x^{2n})^4 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{p-5} (b x^n + c x^{2n})^5 + \&c.$ Je multiplie chaque terme de cette suite par $g x^m dx$, elle devient $g a^p x^m dx + p g a^{p-1} x^m dx \cdot (b x^n + c x^{2n})^1 + \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2} g a^{p-2} x^m dx \cdot (b x^n + c x^{2n})^2 + \&c.$

$$(bx^n + cx^{2n})^2 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} g a^{p-3} x^m dx.$$

$$(bx^n + cx^{2n})^3 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} g a^{p-4} x^m dx.$$

$$(bx^n + cx^{2n})^4 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot (p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} g a^{p-5} x^m dx.$$

$(bx^n + cx^{2n})^5 + \&c.$ Or comme dans cette serie la quantité $bx^n + cx^{2n}$ est toujours élevée à une puissance dont l'exposant est un nombre entier, il est évident (Art. x.) qu'on pourra prendre l'intégrale de chaque terme en particulier. Cette opération nous donnera une suite infinie, qui étant sommée fera l'intégrale de $g x^m dx$, $(a + bx^n + cx^{2n})^p$.

CCCXXXIII.

Ce fera le même procédé si on a un quatrïnome, en un mot une grandeur composée d'un nombre quelconque de termes. Car regardant un des termes de cette grandeur comme le premier membre du binome, & tous les autres termes comme le second membre, on la reduira en une suite infinie, dont on pourra toujours prendre l'intégrale terme à terme.

CCCXXXIV.

COROLLAIRE 2. Il suit de là que la quadrature d'un espace quelconque, & la rectification d'une courbe quelconque, peuvent toujours être représentées par des suites formées suivant les regles précédentes. Nous nous

^{3º.} Application de la méthode des suites à la rectification & à la quadrature du cercle.

contenterons d'appliquer ce principe à la quadrature du cercle & aux logarithmes.

CCCXXXV.

PROBLEME 2. Trouver l'expression de la rectification ou de la quadrature du cercle en suites infinies.

SOLUTION. Soit la portion de cercle $A FH$ dont le diamètre $= 2a$, $AB = x$, BC ou $FK = dx$; on aura $BF = \sqrt{(2ax - xx)}$. Soit l'arc AF dont l'élément est FH : on trouvera par la formule de l'Art. xci. FH , élément de cet arc AF , $= \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$.

Pour intégrer cette différentielle, je la réduis en suite, en multipliant $a dx$ par $(2ax - xx)$ élevé à la puissance $-\frac{1}{2}$ par le moyen de la formule de M. Newton expliquée (Art. cccxxv.). Comparant la proposée $(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$ avec la formule $(p+q)^m$, on trouve

$$p = 2ax$$

$$q = -xx$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$\text{J'ai donc } \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{a}{2ax} \cdot dx + \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}}} \\ + \frac{3x^{\frac{3}{2}} dx}{2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{5}{2}} dx}{2 \cdot 8 \cdot \frac{5}{2} a^{\frac{5}{2}}} + \frac{105x^{\frac{7}{2}} dx}{2 \cdot 16 \cdot \frac{7}{2} a^{\frac{7}{2}}} + \&c.$$

$$\text{L'intégrale de cette suite prise terme à terme est } \frac{a}{2ax^{\frac{1}{2}}} \\ + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{4 \cdot 5 \cdot \frac{3}{2} a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 8 \cdot \frac{5}{2} a^{\frac{5}{2}}} + \frac{105x^{\frac{9}{2}}}{9 \cdot 16 \cdot \frac{7}{2} a^{\frac{7}{2}}} +$$

&c. Cette suite fera d'autant plus convergente (Art. cccxiii.) que x sera plus petite par rapport à $2a$. Par

exemple, elle le fera suffisamment, si $x = \frac{a}{2}$, c'est-à-dire, si l'arc AF est de 60 degrés ; & alors après avoir pris l'intégrale, il faudroit la multiplier par 6 pour avoir la circonférence entière.

CCCXXXVI.

Voici une autre maniere de trouver par les series la rectification du cercle. Soit la tangente AB de l'arc AD , Fig. 9.
Introduction. que je suppose de 30 degrés ; cherchons la valeur de son élément Dd . Soit le rayon $= 1$, $AB = x$, $Bb = dx$: CB sera $= \sqrt{1 + xx}$. On trouvera (Art. XLIII. Introduction) que $Dd = \frac{dx}{1 + xx}$.

Je réduis cette différentielle en suite par une division infinie. La suite que me donne cette opération est $\frac{x^0 dx}{1} - \frac{x^1 dx}{1} + \frac{x^2 dx}{1} - \frac{x^3 dx}{1} + \frac{x^4 dx}{1} - \frac{x^5 dx}{1} + \&c.$

Prenant l'intégrale terme à terme, j'ai $x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{7} x^7 - \frac{1}{8} x^8 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{10} x^{10} + \&c.$

Lorsque l'arc devient de 45 degrés, alors la tangente est égale au rayon : donc $x = 1$; la serie est donc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \&c.$; & en la multipliant par 8 elle exprimera la valeur de la circonférence.

CCCXXXVII.

On trouveroit de même l'expression en suite de la quadrature du cercle, en intégrant par cette méthode $dx \sqrt{2ax - xx}$; $dx \sqrt{aa - xx}$, &c. nous ne nous arrêterons pas à ce détail. Il nous suffit d'avoir montré la voie qu'il faut suivre. Je passe aux logarithmes.

Sf ij

CCCXXXVIII.

4°. Applica-
tion de la mê-
me méthode
aux Logari-
thmes.

PROBLEME 3. Trouver par le moyen des suites le logarithme d'une quantité quelconque.

SOLUTION. L'équation de la logarithmique est comme nous l'avons vu (Art. XVIII. Introduction) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, c'est-à-dire, que la différence du logarithme d'une grandeur quelconque y , est $\frac{dy}{y}$: donc le logarithme de cette grandeur $y = \int \frac{dy}{y}$. Une suite égale à $\int \frac{dy}{y}$ fera donc le logarithme cherché de y .

Je vois bien que je ne puis réduire en suite $\frac{dy}{y}$ sous cette forme. Je lui en donne une autre en faisant $y = 1 + z$; je suppose ici que y est un nombre plus grand que l'unité. J'ai $dy = dz$, & $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{1+z}$, que je puis réduire en serie par une division infinie. Cette suite est $\frac{dz}{1} - \frac{z dz}{1} + \frac{z^2 dz}{1} - \frac{z^3 dz}{1} + \frac{z^4 dz}{1} - \frac{z^5 dz}{1} + \&c.$; dont l'intégrale est $z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{6} z^6 + \&c.$ C'est la formule pour trouver le logarithme d'un nombre plus grand que l'unité.

Lorsque le nombre représenté par y sera moindre que l'unité, alors on supposera $y = 1 - z$; & on aura $\frac{dy}{y} = \frac{-dz}{1-z}$, dont l'intégrale en suite est $-z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{6} z^6 - \&c.$ C'est la formule pour trouver le logarithme d'un nombre moindre que l'unité.

CCCXXXIX.

Lorsqu'on demandera le logarithme d'un nombre plus

grand que l'unité, de 9 par exemple, on pourroit se servir de la premiere formule, en faisant $z = 8$; ce qui donne $1 + z = 1 + 8 = 9$. Mais comme les termes de cette formule vont en augmentant, il vaut mieux se servir de la seconde formule dont les termes iront en décroissant très-rapidement.

Pour cela il faut se rappeler ce que nous avons dit (Art. IV.) que $\log x = \log 1 - \log \frac{1}{x} = 0 - \log \frac{1}{x} = -\log \frac{1}{x}$; on aura $\log 9 = -\log \frac{1}{9}$. Donc en faisant $z = \frac{8}{9}$, on aura $1 - z = 1 - \frac{8}{9} = \frac{2}{9} = \frac{2}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$; & en changeant les signes de la seconde formule, on aura le logarithme cherché de 9.

Il est donc aisé d'avoir par la formule précédente le logarithme de tout nombre, soit plus grand, soit plus petit que 10.

CCCXL.

REMARQUE 1. On voit bien que les fractions rationnelles qu'on ne pourra intégrer algébriquement par les regles exposées dans le Chapitre X., s'intégreront par approximation en les réduisant en suites par des divisions infinies, & en prenant terme à terme l'intégrale de ces suites : nous n'entrerons point ici dans ce détail, qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul.

5°. Aux fractions rationnelles.

CCCL.

REMARQUE 2. GÉNÉRALE. De ce que la methode des suites ne donne l'intégrale des différentielles auxquelles

on l'applique, que par approximation, il s'enfuit qu'on ne doit s'en servir que lorsque les méthodes d'intégrer exactement nous manquent; encore faut-il avoir grand soin que les suites soient le plus convergentes qu'il sera possible. Par ce moyen l'approximation différera infiniment peu de la vraie valeur cherchée.

FIN DE LA PREMIERE PARTIE.

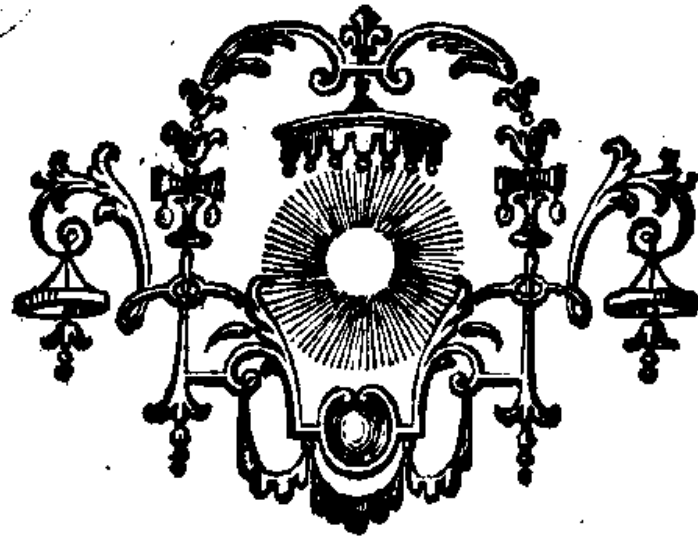


Fig. 1.

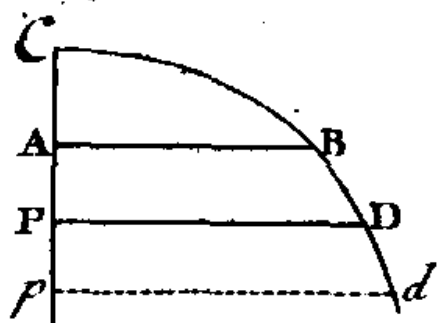


Fig. 2.

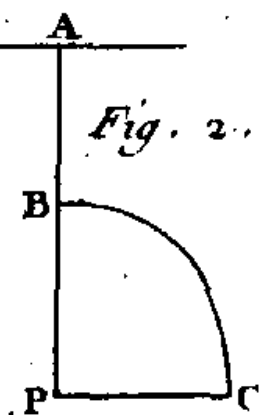


Fig. 3.

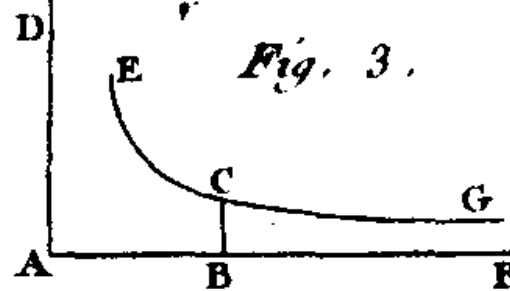


Fig. 4.

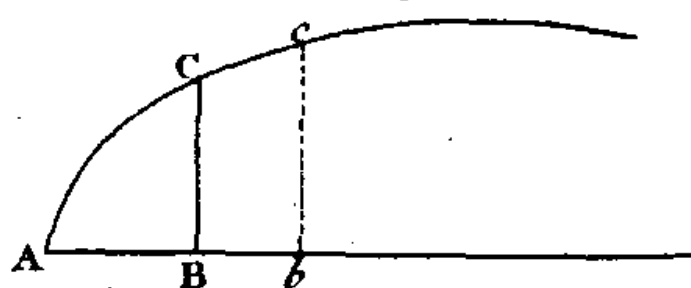


Fig. 5.

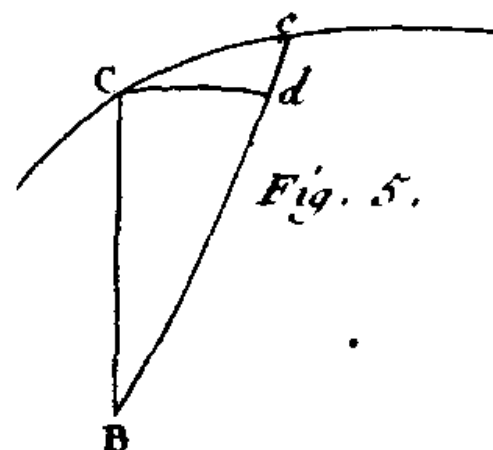


Fig. 6.

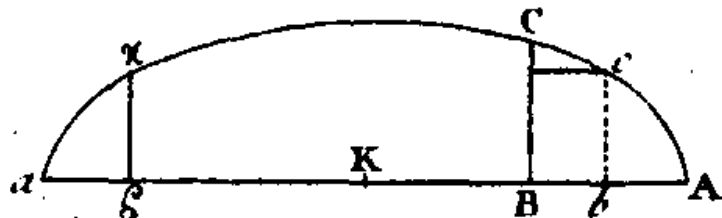


Fig. 7.

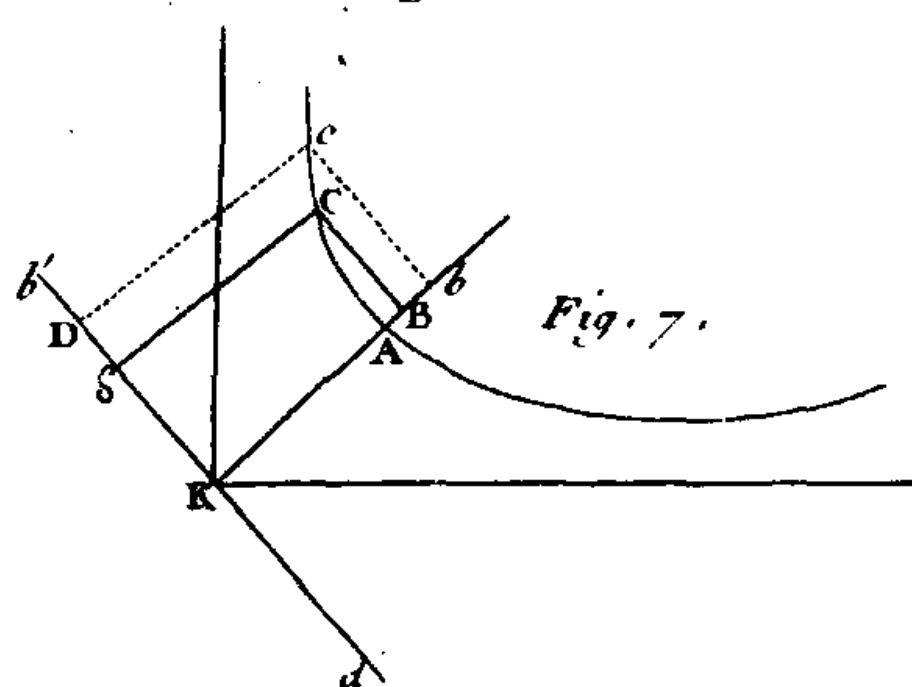


Fig. 9.

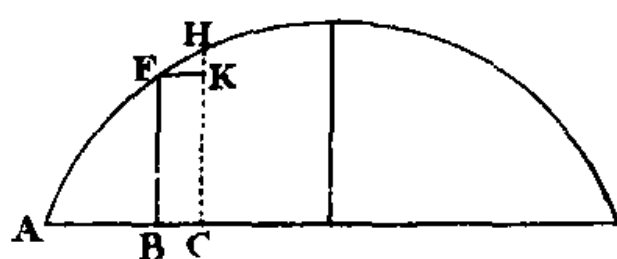
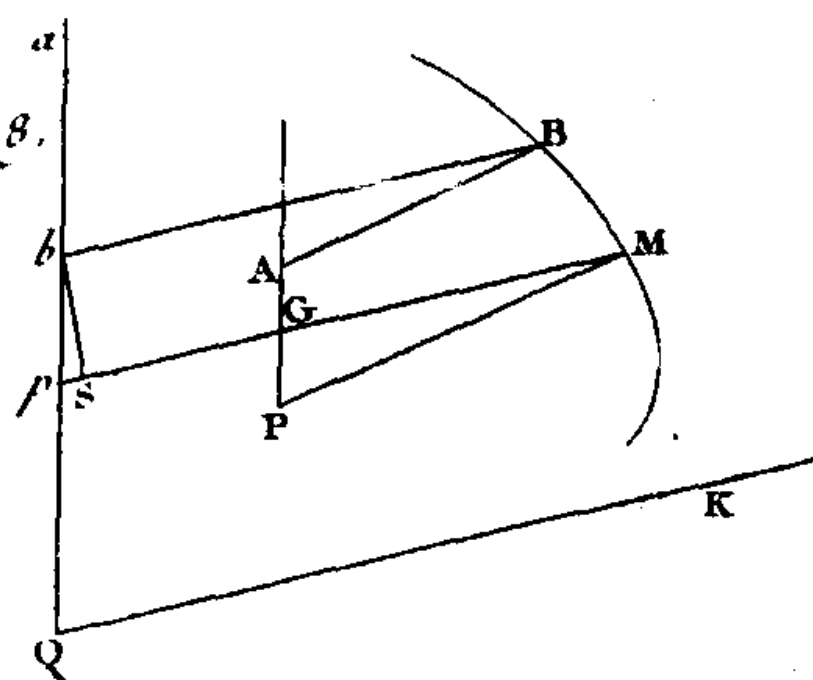


Fig. 8.



T A B L E

D E S M A T I E R E S

Contenues dans l'Introduction.

C H A P I T R E I.

*Définition du sujet , Division de l'Ouvrage , &
Explication de quelques Signes dont on se
servira dans la suite.*

- | | | |
|------|--|--------------|
| I. | C E que c'est que le Calcul intégral , | Page 1 |
| II. | Division de l'Ouvrage , | 2 |
| III. | Explication de quelques signes dont on se servira dans ce Traité , | <i>ibid.</i> |

C H A P I T R E II.

Calcul différentiel des Quantités logarithmiques.

- | | | |
|--------|---|--------------|
| V. | Définition des logarithmes , | 5 |
| VII. | Maniere de dresser une table de logarithmes , | 6 |
| VIII. | Quels sont ceux dont se servent les Géomètres , | <i>ibid.</i> |
| IX. | Définition de la logarithmique , | 7 |
| XI. | Maniere de trouver son équation , | <i>ibid.</i> |
| XII. | Démonstration de quelques propriétés principales de cette courbe , | 8 |
| XVI. | Quels sont les logarithmes de Neper , | 11 |
| | Pourquoi on les nomme hyperboliques , | <i>ibid.</i> |
| XVIII. | Règle fondamentale du Calcul différentiel des logarithmes , | 12 |
| XIX. | Solution d'une difficulté , | 13 |
| XX. | Autre maniere de trouver certaines différentielles logarithmiques , | 14 |

C H A P I T R E III.

Calcul différentiel des Quantités exponentielles.

- | | | |
|-------|---|--------------|
| XXV. | Définition des quantités exponentielles , | 15 |
| XXVI. | Elles sont de différens degrés , | 16 |
| XXIX. | D'une équation exponentielle on en tire une logarithmique , | 17 |
| | Et d'une logarithmique une exponentielle , | 18 |
| XXX. | Explication de cette expression $y = e^x$, | <i>ibid.</i> |

328 TABLE DES MATIERES.

XXXI. Règle générale pour différentier les exponentielles ,	19
XXXII. Appliquée à des exemples ,	20
XXXIII. Autre méthode pour différentier ces mêmes quantités ,	<i>ibid.</i>
XXXIV. Nouvel exemple de la première méthode ,	<i>ibid.</i>
Autre exemple de la seconde méthode ,	21

CHAPITRE IV.

Propositions sur les Sinus , Cosinus , Tangentes , & Secantes.

XXXVI. Intégration de quelques différentielles , nécessaire pour la suite ,	22
XXXIX. Propositions sur les sinus &c. démontrées synthétiquement ,	23
XLI. Autres sur les sinus &c. démontrées analytiquement ,	<i>ibid.</i>
XLV. Théorèmes sur la même matière , dans lesquels on fait usage des quantités exponentielles ,	26
XLVI. Usage des propositions précédentes ,	27
LI. On en tire une méthode fort simple , pour trouver les sinus & cosinus d'arcs multiples d'un arc donné ,	29
LXI. Lemme qui prépare au Théorème de M. Cotes sur la division des arcs de cercle ,	35
LXIII. Démonstration de ce théorème ,	38
LXV. Application du théorème précédent à des cas particuliers ,	39

CHAPITRE V.

Sur les Imaginaires.

LXX. Expression générale qu'on peut donner à toute quantité imaginaire d'une forme quelconque ,	41
LXXI. Conséquence du théorème précédent ,	45
LXXII. Application à quelques exemples ,	<i>ibid.</i>
LXXX. Toute racine imaginaire d'une équation quelconque peut se représenter par $A + B\sqrt{-1}$.	52
LXXXII. Toute équation ayant des racines imaginaires est réductible en facteurs trinomes réels ,	56
LXXXIV. D'où est tirée la théorie précédente ,	58

CHAPITRE VI.

Démonstration de quelques propositions supposées plus haut , & d'autres nécessaires dans ce Traité.

LXXXV. Toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle ,	58
LXXXVII. Les racines imaginaires vont toujours en nombre pair ,	59
LXXXVIII. Solution de quelques Problèmes nécessaires ,	60

Fin de la Table des Matières contenues dans l'Introduction.

TABLE

TABLE

DES MATIERES

Contenues dans la Première Partie.

CHAPITRE I.

*Exposition & application de la règle fondamentale
de tout le Calcul intégral.*

I.	É Noncé de la règle fondamentale,	63
II.	Son application 1°. à un exemple général incomplexé,	64
III.	Cas unique qui peut faire quelque difficulté,	<i>ibid.</i>
	Solution de ce cas,	<i>ibid.</i>
V.	2°. Application à des différentielles complexes,	65
VI.	3°. Aux fractions,	<i>ibid.</i>
VIII.	4°. Aux différentielles affectées de signes quelconques,	66
	Sous quelle condition,	<i>ibid.</i>
X.	Autre cas dans lequel on intègre par la règle fondamentale,	67
XI.	Formule pour ce dernier cas,	68
XII.	Difficulté qui peut s'y trouver quelquefois,	69
XIII.	Solution de cette difficulté,	<i>ibid.</i>
XIV.	Démonstration de cette Solution,	<i>ibid.</i>

CHAPITRE II.

*Méthode pour faciliter l'intégration d'un grand
nombre de différentielles par le moyen de
différentes transformations.*

XVI.	Première transformation,	71
	Conditions suivant lesquelles elle a lieu,	<i>ibid.</i>
	En quoi elle consiste,	<i>ibid.</i>
XVII.	Premier exemple,	<i>ibid.</i>
XVIII.	Second exemple,	72
XIX.	Règle générale pour un assez grand nombre de cas,	73
XX.	Formule pour la 1 ^{re} transformation $x^m \cdot x^{n-1} dx \cdot (a + bx^n)^p$,	<i>ibid.</i>
XXI.	Démonstration de cette formule,	<i>ibid.</i>

	Premier cas, $r =$ un nombre entier positif,	74
XXII.	Application du premier cas à un exemple,	<i>ibid.</i>
XXIII.	Second cas, ou $r = 0$,	75
XXIV.	Examen de quelques cas particuliers,	<i>ibid.</i>
XXVII.	Autre manière de se servir de la transformation précédente,	76
	Premier exemple,	<i>ibid.</i>
XXVIII.	Second exemple,	77
XXIX.	Troisième exemple,	<i>ibid.</i>
XXX.	Quatrième exemple,	<i>ibid.</i>
XXXII.	Seconde transformation appliquée à un exemple,	78
XXXIII.	Autre manière d'intégrer la différentielle qui vient de servir d'exemple,	79
XXXIV.	Troisième transformation appliquée au même exemple,	<i>ibid.</i>
XXXV.	Second exemple de la seconde transformation,	80
XXXVI.	Quatrième transformation,	<i>ibid.</i>
	Premier exemple,	<i>ibid.</i>
XXXVII.	Second exemple,	81
XXXVIII.	Cinquième transformation : premier exemple,	<i>ibid.</i>
XXXIX.	Second exemple un peu différent du premier,	82
XL.	Cas plus compliqués que les précédens dans lesquels notre première transformation réussit,	<i>ibid.</i>
XLI.	Deux formules qui comprennent ces cas,	83
	Première formule,	<i>ibid.</i>
	Seconde formule,	<i>ibid.</i>
XLII.	Sixième transformation appliquée à un exemple,	84
XLIII.	Septième transformation. Exemple,	<i>ibid.</i>
XLIV.	Observation utile sur cette dernière transformation,	85
XLV.	Réflexions générales sur les transformations que nous venons d'expliquer,	86

CHAPITRE III.

De l'addition des constantes, pour rendre les intégrales complètes.

XLVI.	Nécessité d'ajouter une constante à l'intégrale trouvée,	<i>ibid.</i>
XLVII.	Toute intégrale peut se représenter par la surface d'une courbe,	87
XLVIII.	Méthode qui apprend à reconnoître quand l'intégrale est complète, & quand elle ne l'est pas, à trouver la constante qui la rendra complète,	88
XLIX.	Premier exemple,	<i>ibid.</i>
L.	Second exemple,	<i>ibid.</i>
LI.	Démonstration générale de cette méthode,	<i>ibid.</i>
LII.	Appliquée à la différentielle qui sert de second exemple,	89
LIII.	Exception à la règle,	90
LIV.	Cas où l'intégrale est négative,	91

CHAPITRE IV.

Définitions & notions préparatoires à l'intégration des différentielles binomes, trinomes, &c.

LXVII.	Définition des différentielles binomes, trinomes, &c.	93
LIX.	Elles peuvent avoir deux formes identiques,	94
	Méthode pour ôter de dessous le signe une grandeur qui y est,	
	& vice versa,	ibid.
	Procédé de cette méthode,	95
	1°. Lorsqu'il s'agit de mettre sous le signe une grandeur qui n'y	
	est pas,	ibid.
LX.	2°. D'ôter de dessous le signe une quantité qui s'y trouve,	ibid.
LXI.	Cas où l'exposant de la puissance est fractionnaire,	ibid.
LXII.	Cas où il est négatif,	96
LXIII.	Usages de la méthode précédente,	ibid.
	1°. Pour rendre les exposans de nos formules de positifs négatifs,	ibid.
LXIV.	2°. Pour ramener beaucoup de différentielles aux formules	
	précédentes,	ibid.
	Application à des binomes,	97
LXV.	Application à des trinomes,	ibid.
LXVII.	Troisième usage de la même méthode,	98

CHAPITRE V.

Première partie de la méthode pour intégrer les différentielles binomes comprises dans la formule

$gx^m dx \cdot (a + bx^n)^p$, ou $gx^{m+np} dx \cdot (b + ax^{-n})^p$,
dans laquelle p est un nombre quelconque.

LXIX.	Elle contient les différentielles binomes qui s'intègrent	
	algébriquement,	100
	Procédé de la méthode,	ibid.
LXX.	Appliqué à la formule $gx^m dx \cdot (a + bx^n)^p$,	101
LXXIII.	Moyen d'abrégier l'expression de l'intégrale de la formule,	103
	Première formule ($\downarrow$), de l'intégrale des différentielles	
	binomes qu'on peut ramener à $gx^m dx \cdot (a + bx^n)^p$,	104
LXXVI.	Seconde formule (ω) de l'intégrale des binomes,	106
LXXVIII.	La seconde forme $gx^{m+np} dx \cdot (b + ax^{-n})^p$, de la	
	formule des binomes donne aussi deux formules d'intégration,	107

CHAPITRE VI.

*Observations sur les deux formules d'intégration
(ψ) & (ω) de la première partie de la
méthode des binomes.*

- LXXXIX. Cas dans lequel $r \left(\frac{m+1}{-n} - p \right)$ est un nombre entier positif,
n'a point de difficulté, 107
Cas plus difficile quand $s \left(\frac{m+1}{-n} \right)$ est un nombre entier
positif, expliqué d'abord pour la première formule ψ , 108
LXXX. 1°. Lorsque s étant un nombre entier positif, r n'en est pas un, *ibid.*
LXXXI. Dans ce cas la première formule (ψ) ne peut servir, 109
Mais alors la seule règle fondamentale donne l'intégrale, *ibid.*
LXXXII. 2°. Quand r & s sont tous deux entiers positifs, *ibid.*
Premier cas $r < s$ n'a aucune difficulté, 110
LXXXIII. Second cas $r > s$ plus difficile, *ibid.*
L'intégrale de quelqu'un des termes dépendra de la quadrature
de l'hyperbole, 111
LXXXIV. Cas de $s =$ un nombre entier positif expliqué pour la seconde
formule (ω) de l'intégrale des binomes, *ibid.*
Ce qu'il faut faire alors, *ibid.*
1°. s étant un nombre entier positif, & r ne l'étant pas, *ibid.*
LXXXV. 2°. r & s étant tous deux entiers positifs, 112

CHAPITRE VII.

*Seconde partie de la méthode des différentielles
binomes comprises dans la formule*

$$g x^m dx \cdot (a + b x^n)^p.$$

- LXXXVII. Contient les différentielles qui s'intègrent en supposant la
quadrature ou la rectification d'une courbe, 113
Elle donne aussi deux formules d'intégration, *ibid.*
LXXXVIII. Première formule (Δ) de la seconde partie de la
méthode,
Répondante à la formule (ψ) de la première partie, 114
Seconde formule (χ) de la seconde partie de la
méthode,
Répondante à la formule (ω) de la première partie, 115

LXXXIX.	On regarde une différentielle comme l'élément de la quadrature ou de la rectification d'une courbe ,	116
	Et c'est d'ordinaire aux sections coniques qu'on les applique ,	<i>ibid.</i>
XC.	Les formules (Δ) & (X) indiquent les différentielles qui sont dans ce cas ,	<i>ibid.</i>
	Méthode pour trouver les élémens des sections coniques ,	117
XCI.	1°. Ceux de leur rectification ,	<i>ibid.</i>
	Formule pour cette rectification ,	<i>ibid.</i>
XCII.	Usage de cette formule pour construire une table de ces élémens ,	<i>ibid.</i>
XCIII.	2°. Ceux de leur quadrature ,	119
	Il faut distinguer deux cas ,	<i>ibid.</i>
	1°. Courbes dont les ordonnées sont parallèles ,	<i>ibid.</i>
	Formule pour ce cas ,	120
	2°. Courbes dont les ordonnées partent du même point ,	<i>ibid.</i>
	Formule pour ce second cas ,	<i>ibid.</i>
	Usage des deux formules précédentes ,	<i>ibid.</i>
XCIV.	Observations sur les tables précédentes ,	122
XCVI.	Application des formules (Δ) & (X) de la seconde partie de la méthode ,	123
	1°. De la formule (Δ) ,	<i>ibid.</i>
	Premier exemple ,	<i>ibid.</i>
XCVII.	Second exemple ,	124
XCIX.	2°. Application de la formule (X) ,	125
	Défaut de la seconde partie de la méthode ,	<i>ibid.</i>

CHAPITRE VIII.

Examen des différentielles qui , suivant la seconde partie de la méthode des binomes , dépendent de la quadrature ou de la rectification du cercle.

C.	$x^m dx . (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$ m étant un nombre pair négatif , est intégrable absolument ,	126
	Démonstration de cette proposition ,	<i>ibid.</i>
CI.	Autre manière de s'en assurer ,	127
CII.	Contradiction apparente ,	<i>ibid.</i>
CIII.	Manière de la lever ,	128
CIV.	Examen 1°. des quantités qui se rapportent à la quadrature du cercle exprimée par $\int dx \sqrt{rr - xx}$,	129
CV.	2°. Des différentielles dépendantes de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{dx}{\sqrt{xx - rr}}$,	130
	Solution d'une contradiction apparente ,	131
CVI.	3°. Des différentielles dont l'intégrale est liée avec la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{rr dx}{x \sqrt{xx - rr}}$,	<i>ibid.</i>
CVII.	4°. Enfin des différentielles dépendantes de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{rr dx}{rr + xx}$,	132

CVIII. Réflexion importante sur l'usage qu'on doit faire de ce qui précède, 133

CHAPITRE IX.

Application de la Méthode des Binomes aux différentielles trinomes représentées par la formule

$$g x^m dx . (a + b x^n + c x^{2n})^p, \text{ ou } \\ g x^{m+2np} dx . (c + b x^{-n} + c x^{-2n})^p.$$

- CXI. 1°. Pour les différentielles trinomes qui s'intègrent algébriquement ;
Le procédé est à peu près le même que pour les binomes, 134
CXV. 2°. Pour les différentielles trinomes dépendantes de la quadrature
ou de la rectification des sections coniques, 138

CHAPITRE X.

Règles du Calcul intégral des fractions rationnelles.

- CXVII. Règle générale pour trouver l'intégrale des différentielles
logarithmiques, 139
Appliquée à des exemples, 140
CXIX. Addition de la constante pour compléter l'intégrale, 140
CXXI. Définition des fractions rationnelles, *ibid.*
CXXIII. Exposition de la méthode de M. Bernoulli pour les intégrer, 141
CXXVI. Examen de cette méthode, 145
Ses défauts, *ibid.*
CXXVII. Trois cas à distinguer dans l'intégration des fractions rationnelles, *ibid.*
CXXVIII. Premier cas où le dénominateur a ses racines toutes réelles, 146
1°. Réelles égales, *ibid.*
Inconvénient de la méthode de M. Bernoulli dans ce cas, *ibid.*
CXXX. 2°. Racines réelles inégales, 147
CXXXI. 3°. Racines réelles en partie égales & en partie inégales, *ibid.*
La méthode de M. Bernoulli est encore défectueuse dans ce cas, *ibid.*
CXXXIII. Exposition d'une autre méthode pour le cas des racines
réelles inégales, 148
CXXXVI. Démonstration de la méthode de M. Bernoulli, 151
CXXXVII. Application de notre dernière méthode au cas des racines
réelles, en partie égales & en partie inégales, 152
CXLI. Explication d'un passage de M. Newton, 154
CXLIII. Exposition de la méthode de M. Côtes pour déterminer les
coefficients du numérateur des fractions rationnelles, 156
1°. Lorsque les racines du dénominateur sont réelles & inégales, 157
CXLV. Application de cette méthode à quelques exemples, 160
Premier exemple, *ibid.*

CXLVI.	Second exemple ,	161
CXLVII.	Troisième exemple ,	<i>ibid.</i>
CXLVIII.	1°. Lorsque les racines du dénominateur sont en partie égales & en partie inégales ,	162
CXLIX.	Application à un exemple ,	164
CL.	Cas où l'on abrége la méthode du Problème précédent ,	<i>ibid.</i>
CLL.	Autre exemple ,	165
CLIII.	Second cas où le dénominateur a ses racines imaginaires , Inconvénient de la méthode de M. Bernoulli dans ce cas ,	<i>ibid.</i> 166
CLIV.	Dans ce cas on y substitue notre méthode du Problème 1 ,	167
CLVII.	Usage de la méthode de M. Cotes dans le cas des racines imaginaires pour déterminer les coefficients du numérateur ,	168
CLX.	Application des formules du Problème 7 à un exemple ,	171
CLXI.	Troisième cas , lorsque les racines du dénominateur sont en partie réelles & en partie imaginaires ,	173
	Usage de la méthode de M. Cotes dans ce cas ,	174
CLXII.	Application à un exemple ,	<i>ibid.</i>
CLXIV.	Les numérateurs des fractions rationnelles étant déterminés par les méthodes précédentes , comment on trouve les dénominateurs	176

CHAPITRE XI.

Examen des cas où le dénominateur est $bx^{2m} + gx^m + f$, ou $x^n + a^n$, dans lesquels on abrége la méthode générale.

CLXVI.	1°. Comment on a le dénominateur de ces fractions ,	177
CLXVIII.	2°. Comment on trouve les numérateurs ,	179
	1°. Quand le dénominateur est $1 + x^\lambda$,	<i>ibid.</i>
CLXXI.	2°. Lorsque le dénominateur est $1 + 2x^\lambda + x^{2\lambda}$,	182

CHAPITRE XII.

Manière de trouver algébriquement dans certains cas les facteurs de $x^n + a^n$ & de $x^{2m} + px^m + q$.

CLXXIII.	Recherche des facteurs de $x^n + a^n$,	184
	1°. n étant un nombre de la progression géométrique 1 . 2 . 4 . 8 . 16 &c.	<i>ibid.</i>
CLXXIV.	Application à un exemple.	186
CLXXVIII.	2°. n étant un nombre simplement pair ,	188
CLXXIX.	Application à plusieurs exemples ,	189
	Premier exemple ,	<i>ibid.</i>
CLXXX.	Second exemple ,	<i>ibid.</i>

- CLXXXII. Les facteurs de $x^{2m} + px^m + q$ se trouvent par les mêmes
procédés que ceux de $x^n + a^n$, 191
CLXXXIII. Observations particulières sur ce qui précède, *ibid.*

CHAPITRE XIII.

Des différentielles qui peuvent se ramener à des fractions rationnelles.

- CLXXXVI. Examen des différentielles les plus générales qui peuvent se
transformer en fractions rationnelles, 193
CXCIX. Conclusion de ce qui regarde les fractions rationnelles, 197
Quels sont les Auteurs qui ont écrit sur cette matière, *ibid.*

CHAPITRE XIV.

Des différentielles qui se rapportent à la rectification de l'ellipse ou de l'hyperbole.

- CC. Quels sont les Géomètres qui ont écrit sur cette matière, 198
CCI. 1°. Élément de la rectification d'une ellipse dont le grand axe
est $2a$ & p le paramètre, *ibid.*
CCII. Différentielle qui en dépend immédiatement, 199
CCVI. 2°. Élément d'une hyperbole dont le premier axe est $2a$, & le
paramètre p , 202
Différentielle qui en dépend immédiatement, 203
CCVII. Élément de l'hyperbole par rapport à son second axe, *ibid.*
Donne la même différentielle que la précédente, *ibid.*
CCVIII. Différentielle qui dépend de la rectification de l'hyperbole équilatère, 204
CCIX. Autre différentielle qui se ramène à la rectification de l'hyperbole, *ibid.*

CHAPITRE XV.

Des différentielles dont l'intégration dépend à la fois de la rectification de l'ellipse & de celle de l'hyperbole.

- CCX. Premier exemple de ces différentielles, 205
CCXII. Reflexion sur le fréquent usage des transformations enseignées au
commencement de ce Traité, 207
CCXIII. Autres différentielles qui sont dans le cas des précédentes, 208
CCXIV. Troisième exemple, 213
CCXV. Quatrième exemple, 215

CHAPITRE

CHAPITRE XVI.

Suite des deux Chapitres précédens sur les différentielles dont l'intégration dépend de la rectification des sections coniques.

CCXIX.	Application aux exemples les plus généraux,	219
	Premier exemple,	<i>ibid.</i>
CCXXII.	Différentielles qui dépendent de la précédente,	222
CCXXVI.	Différentielle qui dépend de la rectification de l'hyperbole seule,	224
CCXXVII.	Second exemple,	225
CCXXVIII.	Autres différentielles dont l'intégrale suit de celle de notre second exemple,	227
CCXXXII.	Troisième exemple,	229
CCXXXIII.	Quatrième exemple,	<i>ibid.</i>
CCXXXV.	Conséquences qu'on en peut tirer,	233

CHAPITRE XVII.

Des différentielles dont l'intégration dépend de la quadrature des courbes du troisième ordre.

CCXXXVII.	Définition des courbes du troisième ordre,	234
CCXXXVIII.	Leur formule générale,	235
	Quels sont les Géomètres qui ont écrit sur cette matière,	<i>ibid.</i>
	Quatre équations auxquelles se ramènent toutes celles des courbes du troisième ordre,	<i>ibid.</i>
CCXXXIX.	La quadrature de toutes les courbes du troisième ordre se réduit toujours à celle d'une des quatre équations précédentes,	236
CCXL.	Différentielle qui dépend de la quadrature d'une courbe du troisième ordre, dont l'équation est $uyy = k + lu + mu^2 + nu^3$,	237
CCXLI.	Cas unique dans lequel la démonstration précédente peut faire quelque difficulté,	239
	Solution de cette difficulté,	240
CCXLIV.	Différentielle dont l'intégrale dépend de la rectification des sections coniques & de la quadrature précédente,	246
	Cas dans lesquels l'intégrale cherchée dépend uniquement des arcs de sections coniques,	248
CCXLV.	Différentielles qui dépendent de la précédente,	<i>ibid.</i>
CCL.	Autre différentielle dépendante des arcs de sections coniques, & de l'aire de courbes du troisième ordre,	252
CCLI.	Différentielles qui dépendent de la précédente,	256
CCLIII.	Cas dans lesquels les différentielles précédentes se rapportent uniquement à des arcs de sections coniques,	258
CCLIV.	Démonstration de ces cas,	<i>ibid.</i>
CCLIX.	Quadrature des courbes du troisième ordre,	266

C H A P I T R E X V I I I.

*De la quadrature des courbes dont les équations
ont trois termes.*

- CCLXII. Formule générale des équations qui contiennent trois termes, 268
Transformation nécessaire pour préparer l'équation, $y = x^r u$, 269
CCLXIII. Cas dans lesquels on trouve la valeur de x en u , *ibid.*
CCLXIV. Ils sont au nombre de cinq pour les équations à trois termes, 270
CCLXV. Examen d'un des cinq cas précédents, *ibid.*
CCLXVI. Recherche des cas dans lesquels la courbe de l'équation à
trois termes est quarrable, 271
CCLXVII. Examen de ceux dans lesquels l'intégrale dépend de la
quadrature du cercle ou de l'hyperbole, 272
CCLXVIII. Moyen d'avoir les cas dans lesquels l'intégration dépend de la
rectification des sections coniques, 276
CCLXIX. Application des principes précédents à la quadrature du *folium*. *ibid.*

C H A P I T R E X I X.

*De la quadrature des courbes dont les équations
ont quatre termes.*

- CCLXX. Formule des équations à quatre termes, 277
CCLXXI. On se sert encore de la transformation $y = x^r u$, 278
CCLXXII. Cas dans lesquels on a la valeur de x en u , *ibid.*
Ils sont au nombre de dix-huit, 280
CCLXXIII. Différence essentielle entre les équations à trois termes &
celles qui en ont quatre, *ibid.*
CCLXXV. On trouve par la méthode du Chapitre précédent les cas
d'intégration des équations à quatre termes, 281

C H A P I T R E X X.

*Des différentielles qui renferment des logarithmes
& des exponentielles.*

- CCLXXVI. 1°. Sur l'intégration de celles qui contiennent des logarithmes, *ibid.*
CCLXXVII. Usage des substitutions pour intégrer ces quantités, 282
Premier exemple, *ibid.*
CCLXXVIII. Second exemple, *ibid.*
CCLXXIX. Troisième exemple, *ibid.*
CCLXXX. Quatrième exemple, 283
CCLXXXI. Cinquième exemple, *ibid.*

CCLXXXII.	1°. Intégration des différentielles exponentielles ,	
	Regle générale. Appliquée à des exemples ,	<i>ibid.</i>
CCLXXXIV.	Usage des substitutions pour trouver les mêmes intégrales ,	284
	Premier exemple ,	<i>ibid.</i>
CCLXXXV.	Second exemple ,	285
CCLXXXVI.	Troisième exemple ,	<i>ibid.</i>
CCLXXXVII.	Autre méthode pour trouver les intégrales des différentielles logarithmiques & exponentielles ,	<i>ibid.</i>
	En quoi elle consiste ,	
CCLXXXVIII.	Notion préparatoire ,	<i>ibid.</i>
CCLXXXIX.	Application de la méthode de prendre l'intégrale par parties ,	
	1°. Aux différentielles logarithmiques ,	286
CCXCI.	Formule pour l'intégration des différentielles logarithmiques représentées par $x^m dx \cdot (lx)^n$,	287
CCXCII.	2°. Application de la même méthode aux différentielles exponentielles ,	288
CCXCIV.	Formule d'intégration des différentielles exponentielles représentées par $z^m e^{lz} dz$, lc étant = 1 ,	289

CHAPITRE XXI.

Des différentielles affectées de plusieurs signes d'intégration.

CCXCVII.	Observation essentielle sur l'expression de ces sortes de différentielles ,	290
	Deux différens cas à y distinguer ,	291
CCXCVIII.	Exposition du premier cas ,	<i>ibid.</i>
	Procédé qu'il faut suivre pour intégrer ,	<i>ibid.</i>
CCXCIX.	Transformation qui simplifie l'expression dans ce même cas .	292
CCC.	Examen du second cas ,	
	Comment on trouve l'intégrale ,	<i>ibid.</i>
	Différentielle qui sert d'exemple $u^i dx$,	<i>ibid.</i>
	Son intégrale ,	293
CCCI.	Autre méthode pour avoir la même intégrale ,	
	Par le moyen des quantités exponentielles ,	<i>ibid.</i>
CCCIV.	Autre usage de la même méthode ,	296
CCCVI.	Méthode particulière , utile dans certains cas ,	297
CCCVII.	Remarque importante sur les exponentielles imaginaires ,	298

CHAPITRE XXII.

Des différentielles qui s'intègrent par le moyen des series ou suites infinies.

§. I. Théorie des Suites.

CCCIX.	Définition des Suites ,	302
CCCX.	Leur division en convergentes & divergentes ,	<i>ibid.</i>

340 TABLE DES MATIERES.

CCCXI.	Application des Suites aux divisions infinies,	302
CCCXIII.	Pour qu'une suite soit convergente & vraie, le plus grand terme doit être le premier en diviseur,	304
CCCXV.	Les series convergentes sont les seules vraies,	307
CCCXVI.	Division des series convergentes en <i>croissantes</i> ou <i>ascendantes</i> , & <i>décroissantes</i> ou <i>descendantes</i> ,	308
CCCXVIII.	Embarras dans le cas où le dénominateur a ses termes égaux,	309
CCCXIX.	Ce qu'il faut faire dans ce cas,	310
	Application à un exemple,	<i>ibid.</i>
CCCXX.	Second exemple,	310
CCCXXII.	Usage des suites pour l'extraction des racines,	312
CCCXXIV.	Pour que la serie soit vraie, le plus grand terme doit être le premier,	314
CCCXXV.	Moyen d'abrégier les opérations précédentes, en se servant du Théorème de M. Newton pour l'élévation d'un binome à une puissance quelconque,	<i>ibid.</i>

§. II. Usage des Suites pour le Calcul intégral.

CCCXXX.	1°. Pour les différentielles binomes comprises dans la formule	
	$g x^m dx \cdot (a + b x^n)^p$,	317
CCCXXXII.	2°. Pour les différentielles trinomes, quatinomes, &c.	320
CCCXXXIV.	3°. Application de la méthode des Suites à la rectification, ou à la quadrature du cercle,	321
CCCXXXVIII.	4°. Application de la même méthode aux logarithmes,	324
CCCXL.	5°. Aux fractions rationnelles,	325

Fin de la Table des Matieres contenues dans la Premiere Partie.

