L’œuvre mathématique et astronomique
de Bhāskarācārya

Le Siddhāntaśiromaṇi

L’arithmétique : *Līlāvatī*

Extraits

avec le commentaire *Aṅkāmṛtasāgarī* de
Gaṅgādhara

édition, traduction et commentaires
par
François Patte

Bhāskarācarya

Bhāskara II, dit Bhāskarācarya (le maître Bhāskara), est un mathématicien indien du xii[e] siècle.

> Ma naissance eut lieu en l'année mille trente-six des rois Śaka. Au cours de ma trente-sixième année, j'ai composé le *Siddhāntaśiromaṇi*.

C'est par cette strophe, qui se trouve à la fin de son œuvre, que nous savons l'année de naissance de Bhāskara et celle de l'achèvement de la composition de son ouvrage principal : le *Siddhāntaśiromaṇi*.

L'année 1036 de l'ère śaka correspond à l'année 1114 de notre ère.

Bhāskara nous donne, ensuite, d'autres renseignements sur lui :

> Il y eut à Vijjaḍaviḍa, ville située dans les monts Sahya, dont les sages habitants sont versés dans les trois *Veda*, un deux-fois-né, de la lignée des *Śāṇḍilya*, réceptacle de toutes les sciences : le vertueux Maheśvara, achèvement des hommes saints, diadème des astrologues.
>
> Né de ce dernier, l'intelligent poète Bhāskara, dont la clarté du style lui est acquise des deux lotus des pieds de son père, a fait un exposé du *Siddhānta* qui baratte les mauvaises idées, provoquant l'éveil des ignorants. Clair, il procure la joie aux subtils astronomes. Riche en formules et arguments évidents et justes, il est aisément intelligible aux savants.

La ville de Vijjaḍaviḍa n'existe plus, du moins sous ce nom, et elle n'a pas été, à ce jour, identifiée. Les monts Sahya, seuls, nous sont toujours connus, au nord de la Godāvarī, au nord d'Aurangabad, ils recèlent le site d'Ajanta.

À l'écart d'un village situé à l'ouest de ces monts, Pāṭṇādevī, on a découvert, au milieu du xix[e] siècle, une stèle, gravée dans le soubassement d'un temple, portant une inscription qui commémore l'inauguration d'une école fondée par le propre petit-fils de Bhāskara et consacrée à l'enseignement des œuvres de celui-ci.

Voici le début de cette inscription :

> Gloire au fortuné Bhāskarācārya dont les pieds sont révérés par les savants. D'une intelligence aiguë dans la doctrine des Bhāṭṭa, il est un connaisseur du *Sāṃkhya*, possède une pensée libre dans les *Tantra* et une intelligence irréprochable dans les *Veda*.
>
> Grand dans les arts manuels, les beaux-arts et tous les autres, il a sa propre maîtrise de la métrique. Il connaît les subtilités du *Vaiśeṣika*, est un maître faisant une riche lumière sur la doctrine des Prābhākara. Poète en poésie, il est semblable au dieu à l'œil triple dans les trois branches qui débutent par l'astronomie aux multiples attributs !

Malgré un style propre à ce genre de célébration, nous pouvons nous faire, grâce à celle-ci, une idée de ce qu'était l'éducation d'un lettré indien :

Philosophie, citée par trois de ses systèmes : la *Mīmāṃsā*, selon ses deux écoles — Bhāṭṭa et Prābhākara —, le *Sāṃkhya* et le *Vaiśeṣika*.

Connaissance parfaite des *Veda*, indispensable à la formation d'un paṇḍit.

Étude des traités de rituel : *Tantra*.

Connaissance des arts pratiques et des beaux-arts.

La liste se termine par le *jyotiḥśāstra* (l'enseignement sur les astres), désigné ici par une périphrase : les trois branches qui débutent par l'astronomie. Selon la *Bṛhatsaṃhitā*, les sciences astronomiques sont divisées en trois branches qui sont : la *saṃhitā* (présages), le *gaṇita* (astronomie) et la *horā* (astrologie).

L'inscription se poursuit avec une généalogie des Yādava de Devagiri, famille régnant sur la région, puis celle de la famille de Bhāskara, les *Śāṇḍilya*.

Elle se termine par la mention de la destination de cette école et un vœu de protection par les rois à venir des biens qui ont été octroyés pour sa fondation :

> Dans mon école, les œuvres composées par Bhāskara, à commencer par le *Siddhāntaśiromaṇi*, et d'autres, faites par ceux de sa famille, devront nécessairement être expliquées.

> Tous les dons, terrains et autres, quels qu'ils soient, accordés ici-bas à l'école par le glorieux Soïdeva Hemāḍi et d'autres, doivent être protégés par les rois à venir pour l'accroissement de leurs nombreux mérites religieux.

Œuvres Le principal ouvrage de Bhāskara s'appelle le *Siddhāntaśiromaṇi*, le diadème sur le *Siddhānta*.

Le mot *siddhānta* signifie la conclusion d'un raisonnement et a fini par désigner les œuvres mathématiques et astronomiques. Le *siddhānta* sur lequel Bhāskara pose un diadème est le *Sūryasiddhānta*, le *siddhānta* du soleil (*sūrya*). C'est une œuvre d'astronomie dont la date est incertaine — sans doute le viᵉ siècle — et l'auteur inconnu ; les indiens lui attribuaient un auteur divin : le dieu soleil lui-même.

C'est une œuvre traditionnellement divisée en quatre parties :

— La *Līlāvatī*, traité d'arithmétique.
— Le *Bījagaṇita*, traité d'algèbre.
— Le *Grahagaṇitādhyāya*, calculs astronomiques.
— Le *Golādhyāya*, traité des sphères.

Bhāskara a encore écrit un commentaire *(ṭīkā)* sur son *Siddhāntaśiromaṇi* : la *Mitākṣarā* ou *Vāsanābhāṣya* et un commentaire sur le *Śiṣyadhīvṛddhidatantra*, ouvrage d'un astronome du huitième siècle : Lalla.

Sa dernière œuvre connue est le *Karaṇakutūhala*, daté de 1183, c'est un traité sur le mouvement des planètes.

Nous ne savons ni le lieu, ni la date de sa mort.

La *Līlāvatī*, règles et exemples

Numération

Un, dix, cent, mille, myriade, lakh, million, crore, successivement ; arbuda, abja, kharva, nikharva, mahāpadma, śaṅku *; ensuite :* jaladhi, antya, madhya, parārdha *; tels sont les noms techniques, croissant par décuple, des rangs de la numération, élaborés par les anciens pour l'usage courant.*

Commentaire(s) p. 22

Explication(s) p. 22

Addition

L'addition ou la soustraction des chiffres doit être faite pour chacun selon son rang, dans l'ordre ou bien dans l'ordre inverse.

Commentaire(s) p. 23

Ô mon enfant Līlāvatī, très intelligente, dis ce que font deux, cinq, trente-deux, cent quatre-vingt-treize, dix-huit et dix joints ensemble ; et joints à cent ; et, aussi, les mêmes ôtés de dix mille, dis-le moi, si tu es qualifiée sur la voie exacte de l'addition et de la soustraction.

Commentaire(s) p. 23

Multiplication

On multipliera le dernier[1] *chiffre du multiplicande par le multiplicateur déplacé aussi pour l'avant-dernier et ceux du début. Ou bien, le multiplicande, en nombre égal à celui des parts du multiplicateur est au-dessous de chacune d'elles ; il est multiplié par ces parts et additionné.*
Ou bien, le multiplicande étant multiplié par un nombre par lequel le multiplicateur est divisé sans reste et par le quotient, on a le résultat. Ou bien il y aura une partition en entiers de deux manières, multipliée séparément par les rangs et additionnée. Ou

1. C'est-à-dire celui du rang le plus élevé.

bien le multiplicande, multiplié par le multiplicateur diminué ou augmenté d'un nombre arbitraire, est augmenté ou diminué du multiplicande multiplié par ce nombre arbitraire.

Commentaire(s) p. 25

Explication(s) p. 29

Ô mon enfant Līlāvatī ! dont les yeux sont inconstants comme ceux de la jeune gazelle, que soit dit combien sera le nombre mesuré par cinq, trois et un multiplié par douze, si tu es préparée, ma belle, à la multiplication par parts suivant une partition selon les rangs ou en entiers ; et ceux qui ont été multipliés, divisés par le multiplicateur, dis combien ils produisent.

Commentaire(s) p. 26 27 28 28 28 28 29

Division

Dans la division, le quotient sera spécifiquement ce par quoi le diviseur multiplié, à partir du dernier rang, se retire du dividende.
Ou bien, après avoir simplifié par un même certain nombre le diviseur et le dividende, quand cela est possible, on divisera.

Commentaire(s) p. 32

Ici, on pose les nombres qui ont été multipliés dans l'exemple précédent, pour lesquels les diviseurs sont leurs multiplicateurs.

Commentaire(s) p. 32

Explication(s) p. 33

Carré

Le produit de deux identiques est appelé carré. D'autre part, le carré du dernier doit être placé et, également, les autres chiffres multipliés par le dernier doublé, au-dessus l'un de l'autre ; et, de nouveau, après avoir délaissé le dernier et fait sortir le nombre.
Ou bien, le carré est le produit doublé de deux parts, ajouté à la somme des carrés de ces parts. Ou bien, le carré sera le produit du nombre diminué et du nombre augmenté d'une quantité arbitraire, ajouté au carré de la quantité choisie.

Commentaire(s) p. 33 35 36
Explication(s) p. 34 36

Mon cher, dis le carré de neuf et de quatorze, de trois cents diminués de trois, de dix mille augmentés de cinq, si tu connais la voie de la règle du carré.

Commentaire(s) p. 38 39
Explication(s) p. 40

Racine carrée

Après avoir ôté un carré du dernier impair, on doublera la racine, le pair étant divisé par ce double. Après avoir ôté le carré du quotient de l'impair le précédant, on posera le quotient doublé dans la ligne du résultat. Le pair étant divisé par la ligne du résultat, après avoir ôté le carré du quotient d'un autre impair, on posera le quotient doublé dans la ligne du résultat ; et ainsi à plusieurs reprises. La moitié de la ligne du résultat sera la racine.

Commentaire(s) p. 41
Explication(s) p. 41

Mon ami ! Reconnais les racines carrées respectives de quatre et aussi de neuf et des carrés calculés auparavant, si un accroissement de ton intelligence a été produit en cette matière.

Commentaire(s) p. 42 43 44
Explication(s) p. 43 44 45

Cube

Le produit de trois identiques est déclaré comme le cube. Le cube du dernier doit être posé, puis le carré du dernier multiplié trois fois par le premier, puis le carré du premier trois fois multiplié par le dernier, enfin le cube du premier ; tous, ajoutés selon la progression d'un rang, seront le cube.
Ensuite, après avoir déterminé comme dernier un couple de telles parts, cette opération doit être exécutée à plusieurs reprises dans la réalisation du carré et du cube ; ou encore, à partir du premier chiffre.

Ou bien, la quantité triplée est multipliée par ses deux parts et ajoutée à la somme des cubes de ses parts.
Le produit par lui-même du cube de la racine carrée sera le cube de la quantité carrée.

Commentaire(s) p. 45
Explication(s) p. 47

Mon ami ! Dis moi le cube de neuf ainsi que le cube du cube de trois et le cube du cube de cinq et ensuite donc la racine cubique d'après le cube, si tu as une intelligence intense à l'égard du cube.

Commentaire(s) p. 48 50 50 51 51
Explication(s) p. 50 50 51 51

Racine cubique

Le premier est un rang cube, puis deux sont des non-cubes et, à nouveau, de même. Après avoir ôté un cube du dernier rang cube, la racine est placée à part ; on divisera son précédent par le carré triplé de cette racine et on posera le quotient dans la ligne du résultat ; on ôtera le carré de celle-ci, multiplié par le dernier et triplé, du précédent et le cube du quotient, du précédent ; on a ainsi la racine cubique. Ensuite, y aurait-il encore une ligne de chiffres, on procèdera à nouveau de cette manière.

Commentaire(s) p. 51
Explication(s) p. 53

À ce propos, par la mention : « et par suite, aussi la racine cubique », dite auparavant[2]*, l'auteur produit un exemple pour cette formule.*

Commentaire(s) p. 53 55 55
Explication(s) p. 54 55

Opérations avec zéro

Dans une addition, zéro est égal à l'additif. Dans le carré, etc., il est zéro. Un nombre divisé par zéro sera « ce qui a pour diviseur

2. Dans l'exemple donné pour le calcul du cube

zéro » ; multiplié par zéro, c'est zéro et « ce qui a pour multiplicateur zéro » doit être présent à l'esprit, s'il y a une prescription de reste : zéro ayant été produit en tant que multiplicateur, si, à nouveau, zéro est diviseur, alors un nombre doit être simplement considéré comme inchangé, de la même manière exactement que diminué et augmenté de zéro.

Commentaire(s) p. 56

Dis combien fait : zéro ajouté à cinq, le carré, la racine, le cube, la racine cubique de zéro et cinq multiplié par zéro et dix divisé par zéro. Qu'est-ce qui, multiplié par zéro, ajouté à sa propre moitié et multiplié par trois puis divisé par zéro, est soixante-trois ?

Commentaire(s) p. 56
Explication(s) p. 58

Règle d'inversion

Un nombre étant donné, pour le calcul de la quantité d'origine, on fera d'un diviseur un multiplicateur, d'un multiplicateur un diviseur, d'un carré une racine, d'une racine un carré, d'une dette un avoir, d'un avoir une dette.
Et, s'il est ajouté ou ôté une partie propre, le diviseur sera le diviseur augmenté ou diminué du numérateur, quant au numérateur il sera inchangé ; le reste est comme dit dans cette règle d'inversion.

Commentaire(s) p. 60

Ô mon enfant au regard changeant ! Puisque tu connais l'opération d'inversion qui est sans faute, cette quantité qui est multipliée par trois, augmentée de trois de ses propres quarts, est ensuite divisée par sept puis, diminuée de son propre tiers, est multipliée par elle-même et diminuée de cinquante-deux, puis la racine étant augmentée de huit et divisée par dix, deux est produit, dis-la.

Commentaire(s) p. 61
Explication(s) p. 62

Règle de supposition

Une quantité arbitraire est multipliée, divisée, diminuée ou augmentée de parties comme cela est formulé dans l'énoncé du problème ; la donnée, multipliée par la quantité arbitraire et divisée par ce dernier résultat sera la quantité cherchée. Ainsi est énoncé le procédé de supposition.

Commentaire(s) p. 64

Quelle sera la quantité qui, multipliée par cinq, diminuée de son tiers, divisée par dix, augmentée du tiers, de la moitié et du quart de la quantité de départ, est soixante-dix diminué de deux.

Commentaire(s) p. 64
Explication(s) p. 65

Dis rapidement le compte de la totalité des lotus de ce bouquet de lotus sans tache par lequel sont respectivement honorés, du tiers, du cinquième et du sixième, le dieu à l'œil triple (Śiva), Hari et Sūrya, Āryā avec son quart et les pieds du maître avec les six lotus restant.

Commentaire(s) p. 66
Explication(s) p. 67

Ô belle aux yeux de biche ! Le cinquième d'un essaim d'abeilles est allé sur un kadamba*, le tiers sur un* śilīndhra *; une autre partie, différence des deux multipliée par trois, se balançant, est allée sur un* kuṭaja*. Une abeille, ô ma chérie, qu'un même instant frappe du parfum d'une* ketakī *et d'une* mālatī*, appelée par l'envoyé de sa bien-aimée, tournoie de-ci de-là dans le ciel ; dis le compte de ces abeilles*

Commentaire(s) p. 67
Explication(s) p. 69

Si ta grandeur s'y entend en śeṣajātiḥ*, dis le montant de la fortune de ce pèlerin qui en a offert la moitié à Prayāga et, du reste, deux parts sur neuf à Kāśī, le quart du reste pour des taxes sur le chemin et, du reste, six dixièmes à Gayā ; soixante-trois* niṣka *sont de reste et il est revenu à sa maison avec.*

Commentaire(s) p. 69

La quantité donnée doit être divisée par le produit des dénominateurs diminués de leur numérateurs lequel est divisé par le produit des dénominateurs.

Commentaire(s) p. 71
Explication(s) p. 71

Sommes et différences

La somme enlevée et ajoutée à la différence, divisée par deux, sont les deux quantités ; ce rappel des quantités d'origine a pour nom saṃkramaṇa.

Commentaire(s) p. 73

Dis-moi ces deux quantités desquelles la somme est cent un et la différence vingt-cinq, si, ô mon enfant ! tu connais le saṃkramaṇa.

Commentaire(s) p. 73
Explication(s) p. 73

La différence des carrés divisée par la différence des quantités est leur somme ; de là, on obtient les deux quantités selon ce qui a été enseigné exactement.

Commentaire(s) p. 74

Dis rapidement, ô expert en calcul ! les deux quantités desquelles la différence est huit et la différence de leurs carrés quatre cents.

Commentaire(s) p. 74
Explication(s) p. 74

Équations comportant des carrés et des racines carrées

Le carré d'une quantité arbitraire multiplié par huit, diminué de un, divisé par deux et divisé par la quantité arbitraire sera une quantité, son carré, divisé par deux et augmenté de un sera l'autre quantité. Ou bien, l'unité divisée par le double d'une quantité arbitraire ajoutée à la quantité arbitraire est la première, l'autre est l'unité. De ces deux quantités, la somme et la différence des carrés, diminuées de un, seront des carrés.

Commentaire(s) p. 75
Explication(s) p. 76

Mon ami ! Dis-moi deux quantités desquelles la différence et la somme des carrés diminuées de un sont productrices d'une racine, quand sont dans la peine même les experts dans le bīja-gaṇita *qui, désemparés, considérent ce calcul obscur enseigné de six manières !*

Commentaire(s) p. 76 78
Explication(s) p. 78 79

Le carré du carré d'une quantité choisie et son cube, tous deux multipliés par huit, le premier augmenté de un, seront les deux quantités. Il en est de même selon le calcul manifeste comme selon le calcul non-manifeste.

Commentaire(s) p. 80
Explication(s) p. 80

Ici aussi, on produit l'exemple énoncé précédemment.

Commentaire(s) p. 80
Explication(s) p. 81

La racine d'un nombre considéré — quantité qui a été diminuée ou augmentée de sa racine multipliée par un multiplicateur — ajouté au carré de la moitié du multiplicateur, est augmentée ou diminuée de la moitié du multiplicateur ; élevée au carré, elle devient la quantité cherchée par l'interrogateur.
Et quand cette quantité a été diminuée ou augmentée de parts, après avoir divisé la donnée et aussi le multiplicateur de la racine par l'unité diminuée ou augmentée des parts, la quantité doit être ensuite calculée avec ceux-ci, exactement comme cela a été dit auparavant.

Commentaire(s) p. 82
Explication(s) p. 83

Mon enfant ! J'ai vu sept fois la moitié de la racine d'un groupe de cygnes gagnant lentement la rive, fatigués par leur jeu et, se livrant une querelle amoureuse, un couple de cygnes reste dans l'eau ; dis la taille du groupe de cygnes.

Commentaire(s) p. 83
Explication(s) p. 84

Ajoutée à neuf fois sa racine, on aura douze cent quarante. Ô savant ! Veuille dire quelle est cette quantité.

Commentaire(s) p. 84
Explication(s) p. 85

À l'approche d'un nuage, dix fois la racine d'un groupe de cygnes s'en est allée vers le lac Mānasa après avoir pris son envol ; un huitième, quittant le bord de l'eau, est allé vers un bosquet de lotus terrestres et, mon enfant, sur l'eau aux filaments de lotus, adonnés au jeu de l'amour, on aperçoit trois couples de cygnes ; dis-moi le compte de la totalité du groupe.

Commentaire(s) p. 85
Explication(s) p. 86

Pārtha, en colère, décocha une multitude de flèches au cours d'une bataille afin de tuer Karṇa. Après avoir arrêté l'ensemble des traits de ce dernier avec la moitié des siens, ses chevaux avec quatre fois la racine, mis Śalya hors de combat avec six et, aussi, détruit son parasol, sa bannière et son arc avec trois, il lui coupa la tête d'une flèche ; combien sont-ils ces traits qu'Arjuna décocha ?

Commentaire(s) p. 87
Explication(s) p. 87

La racine de la moitié d'un essaim d'abeilles est allée sur une mālatī *et aussi les huit neuvièmes de la totalité ; une abeille vrombit à l'adresse d'un bourdon qui bruit seul dans la nuit, gourmant de pollen et prisonnier d'un lotus. Ô ma chérie, dis le compte des abeilles.*

Commentaire(s) p. 88
Explication(s) p. 88

La quantité qui, ajoutée à dix-huit fois sa racine et à son tiers, produit douze cents, reconnais-la rapidement, si tu possèdes de l'habileté sur l'ardoise.

Commentaire(s) p. 89
Explication(s) p. 90

Règle de trois

Le critère et la quantité voulue sont deux quantités de même classe placées au début et à la fin ; le fruit de ce critère, d'une autre nature, est au milieu ; ce dernier multiplié par la quantité voulue et divisé par le premier sera le fruit de la quantité voulue. Pour l'inverse, procédure inverse.

Commentaire(s) p. 90

Si deux pala *et demi de safran sont obtenus avec trois-septièmes d'un* niṣka*, dis-moi rapidement, ô le meilleur des commerçants, combien on aura avec neuf* niṣka *?*

Commentaire(s) p. 91
Explication(s) p. 91

Si, avec soixante-trois pala *de pur camphre, on obtient cent quatre* niṣka*, alors combien en obtient-on avec douze* pala *et un quart ? Ô mon ami, dis-le après avoir réfléchi !*

Commentaire(s) p. 92
Explication(s) p. 93

Si pour deux drachmes on obtient une khārī *et un huitième de grains de riz, combien en obtient-on pour soixante-dix* paṇa *? Que cela soit dit rapidement !*

Commentaire(s) p. 93
Explication(s) p. 93

Si un accroissement de la quantité voulue produit une diminution pour le fruit et si une diminution produit un accroissement, dans ce cas, les experts en calcul doivent connaître la règle de trois inverse.

Commentaire(s) p. 94

Quand le prix des êtres vivants est fondé sur l'âge ou quand, pour l'or, le poids dépend du nombre de carats et pour le fractionnement des tas de grains, on utilisera la règle de trois inverse.

Commentaire(s) p. 94

Si une femme de seize ans atteint une somme de trente-deux niṣka*, combien pour une de vingt ans ?*
Un bœuf de trait de deux ans, atteint une somme de quatre niṣka*, combien alors pour un animal de trait de six ans ?*

Commentaire(s) p. 94
Explication(s) p. 95

Si on obtient un gadyāṇaka *d'or à dix carats avec un* niṣka*, dis alors combien en mesure-t-on pour de l'or à quinze carats ?*

Commentaire(s) p. 95

Un tas de grains ayant été mesuré avec un récipient de sept, si on obtient cent mesures, combien en obtient-on alors avec un récipient de cinq.

Commentaire(s) p. 96
Explication(s) p. 96

Pour les règles de cinq, sept, neuf, etc. après avoir procédé à la transposition, d'un côté à l'autre, des fruits et des dénominateurs, le produit issu des quantités les plus nombreuses étant divisé par le produit des quantités les moins nombreuses, on a le résultat.

Commentaire(s) p. 96

Si en un mois, pour cent unités, on a un intérêt de cinq, dis combien on a pour seize, une année étant écoulée. De même, énonce la durée d'après le capital et les intérêts et, connaissant la durée et le fruit, dis, ô calculateur, le capital d'origine.

Commentaire(s) p. 96
Explication(s) p. 98

Si les intérêts pour cent unités pendant un mois et un tiers sont de cinq et un cinquième, que soit dit clairement combien ils seront pour soixante-deux unités augmentées d'un demi, pendant trois mois et un cinquième.

Commentaire(s) p. 101
Explication(s) p. 102

Si huit pièces d'étoffe tissées de soie, supérieures par leur apparence et multicolores, mesurant trois coudées de large et huit coudées de long, rapportent cent unités, dis, ô commerçant, si tu connais le négoce, combien rapporte une autre pièce d'étoffe de qualité semblable, de trois coudées et demi de long et d'une demie coudée de large.

Commentaire(s) p. 102
Explication(s) p. 103

Des planches qui ont douze doigts d'épaisseur, le carré de quatre doigts en largeur et quatorze coudées pour leur longueur : trente rapportent cent. Ces mêmes planches dont les largeur, épaisseur et longueur ont été diminuées de quatre, dis-moi, ô mon cher : quel montant rapportent-elles ?

Commentaire(s) p. 106
Explication(s) p. 106

Les planches qui ont les dimensions dites précédemment ont été installées à une distance d'une gavyūti. *Si, pour leur convoyage, la location de conducteurs de chariots est de huit drachmes, dis quel est le montant de la location pour ces autres décrites immédiatement après et qui ont été diminuées de quatre en dimensions et installées à une distance de six* gavyūti.

Commentaire(s) p. 107
Explication(s) p. 107

Pour des biens contre des biens aussi, il y a une règle analogue, après avoir échangé les dénominateurs et les deux prix.

Commentaire(s) p. 107

Si ici, on obtient trois cents mangues pour une drachme et au marché trente grenades de choix pour un paṇa, *dis rapidement, ô mon ami, combien de grenades on obtient dans un échange avec dix mangues.*

Commentaire(s) p. 108
Explication(s) p. 108

Transactions des mélanges
Calculs d'intérêts

Le critère est multiplié par le temps de référence et le taux est multiplié par la durée de la composition capital et intérêts ; puis les deux disposés séparément sont divisés par leur somme et multipliés par la composition : on aura le capital d'origine et les intérêts. Ou bien alors, le capital d'origine est calculé par la formule nommée « règle de supposition » et, ce dernier ôté de la composition, on aura les intérêts.

Commentaire(s) p. 110
Explication(s) p. 110

Si, en une année, un montant d'origine à cinq pour cent produit mille, intérêts compris, dis alors, respectivement, l'origine et les intérêts.

Commentaire(s) p. 111
Explication(s) p. 112

Leurs durées propres multipliées par les critères et divisées par les taux multipliés par leurs durées écoulées, ces [résultats] sont divisés par leur somme ; multipliés par le [montant] composé, on a respectivement le montant des parts prêtées.

Commentaire(s) p. 112
Explication(s) p. 113

Ô calculateur, cent niṣka *diminués de six ont été prêtés à cinq, trois et quatre pour cent en trois parts pendant sept, dix et cinq mois pour un même gain, dis le compte des parts et aussi le fruit pour ces trois parts.*

Commentaire(s) p. 114
Explication(s) p. 115

Si le taux mensuel d'une quantité inférieure est plus grand que le taux d'une quantité supérieure, la différence des deux quantités divisée par la différence des gains mensuels est la durée.

Commentaire(s) p. 115
Explication(s) p. 116

Une centaine d'unités sont prêtées à cinq pour cent et deux centaines à deux pour cent, le critère pour les fruits étant connu, au bout de quelle durée y aura-t-il un même accroissement ?

Commentaire(s) p. 116
Explication(s) p. 117

Les apports en capital, multipliés par la composition capital et intérêts et divisés par leur somme sont les gains respectifs.

Commentaire(s) p. 118
Explication(s) p. 118

Ô calculateur, trois cents unités ont été obtenues en commerçant avec les montants composés, apports et bénéfices, de trois personnes dont les capitaux initiaux étaient de cinquante augmenté de un, soixante-huit et quatre-vingt-dix diminué de cinq. Dis la richesse de chacun après répartition.

Commentaire(s) p. 118
Explication(s) p. 119

Remplissage d'un bassin

On divisera les dénominateurs par les numérateurs, puis on divisera l'unité par ces derniers résultats composés et on aura le temps de remplissage.

Ces canaux qui, séparément ouverts, emplissent un bassin en un jour, une demi-journée, un tiers et un sixième de journée, quand ils sont ouverts tous ensemble, dis-moi rapidement, ô mon cher ! quelle fraction de jour leur est alors nécessaire ?

Commentaire(s) p. 119
Explication(s) p. 120

Achat et vente

On divisera par les mesures les prix correspondants après les avoir multipliés par leur proportion respective ; après avoir multiplié par le montant composé et ces derniers et les proportions, on divisera par leur somme : on aura respectivement les prix et les mesures.

Commentaire(s) p. 120
Explication(s) p. 120

Holà commerçant ! Si, pour une drachme, on a trois mesures et demi de riz ou huit mesures de haricots, ayant accepté ces treize kākiṇī, *apporte rapidement une double part de riz ajoutée à une part de haricots : nous allons manger immédiatement car la caravane va partir sur le champ.*

Commentaire(s) p. 121
Explication(s) p. 122

Ô joie des commerçants ! Si pour un couple de niṣka *on obtient un* pala *de camphre supérieur et pour un huitième de drachme, un* pala *de santal et pour un huitième aussi, un demi-*pala *de bois d'Agar, donne-moi pour un* niṣka *de ces ingrédients, dans des proportions de un, seize et huit, car je veux fabriquer un encens.*

Commentaire(s) p. 123
Explication(s) p. 123

Une quantité choisie étant divisée par les restes du nombre de joyaux une fois diminués des dons faits autant de fois qu'il y a de personnes, on aura alors les comptes des valeurs. Si le produit des restes est divisé par chacun d'eux pris séparément, on obtient des valeurs non-fractionnaires.

Commentaire(s) p. 124

Quatre joailliers, dont la fortune s'élève à huit rubis, dix saphirs, une centaine de perles et cinq beaux diamants, s'étant mutuellement donné à chacun un joyau prélevé sur leur fortune personnelle au cours d'une rencontre amicale, obtiennent ainsi une même fortune ; dis-moi pour chacun, ô ma chère, la valeur de leurs joyaux.

Commentaire(s) p. 124
Explication(s) p. 125

Alliages

La quantité somme des produits du poids de l'or et de son titre, étant divisée par la somme des poids d'or, on obtient le titre de l'alliage d'or ; divisé par le poids d'or raffiné, on aura le titre ; divisé par le titre, le compte du poids de l'or raffiné.

Commentaire(s) p. 126

Explication(s) p. 126

Le poids, en māṣa*, de lingots d'or de titres treize, douze, onze et dix sont mesurés respectivement par dix, quatre, deux et quatre ; ceux-ci étant combinés, ô commerçant, toi qui connaît le calcul sur l'or, dis rapidement, quel sera le titre du lingot d'or. Si, par raffinage, lesdits vingt* māṣa *deviennent seize, quelle est alors la mesure du titre de cette richesse ? Si l'or est raffiné au titre de seize, combien alors de* māṣa *ces vingt-là produisent-ils ?*

Commentaire(s) p. 127

À partir du titre de l'alliage obtenu, multiplié par la somme [des poids] de l'or et diminué de la somme des produits [des poids] de l'or par leurs titres respectifs, le quotient par le compte du poids de l'or dont le titre est inconnu, sera la mesure du titre inconnu .

Commentaire(s) p. 128

Soit huit et deux māṣa *de titres dix et onze et six de titre inconnu : si on compose ceux-ci, de l'or au titre douze est obtenu, ô ma chère ! Dis la mesure du titre inconnu !*

Commentaire(s) p. 128

Explication(s) p. 128

Le titre issu de l'alliage, multiplié par la somme des poids de l'or, est diminué de la somme des produits des poids de l'or et des titres ; ce dernier résultat divisé par le reste de la différence entre le titre de l'or inconnu et le titre de l'alliage sera le poids de l'or que l'on ne connaît pas.

Commentaire(s) p. 128

Soit trois et un māṣa *de titres dix et quatorze ainsi qu'un certain poids de titre seize ; dans leur alliage un titre de douze est obtenu, combien y a-t-il alors de* māṣa *de titre seize ?*

Commentaire(s) p. 129
Explication(s) p. 129

Le titre le plus grand doit être diminué du titre de l'alliage de deux et le titre égal au titre de l'alliage de deux diminué du titre le plus petit, les deux restes, multipliés par un nombre arbitraire, seront les deux mesures des poids d'or, respectivement ceux des titres le plus petit et le plus grand.

Commentaire(s) p. 129
Explication(s) p. 130

Soit deux billes d'or dont les titres sont seize et dix ; dans leur alliage, ô ma chère, de l'or de titre douze est obtenu. Dis-moi la mesure des deux poids de ces deux ors.

Commentaire(s) p. 130

Progressions

La raison multipliée par la position diminuée de un et ajoutée au premier terme sera le montant du dernier ; ce résultat additionné au premier et divisé par deux sera le montant médian, lequel multiplié par la position sera le montant total et cela est appelé la somme de la progression.

Commentaire(s) p. 131

Quelqu'un, après avoir donné à des brahmanes quatre drachmes le premier jour, a entrepris de faire une donation avec un accroissement de cinq chaque jour. Ô mon ami ! Dis immédiatement combien de drachmes ont été données par cet homme en une quinzaine ?

Commentaire(s) p. 131
Explication(s) p. 131

Le montant divisé par la position est diminué du terme initial ; ceci divisé par la moitié de la position diminuée de un, sera l'accroissement.

Commentaire(s) p. 132

Ce roi qui a, tout d'abord, couvert deux yojana *en une journée, dis-nous, s'il te plait, avec quel accroissement de sa marche il a accompli par la suite son voyage pour ravir les éléphants de ses ennemis, cet intelligent roi ayant atteint en une semaine leur ville distante de quatre-vingt* yojana.

Commentaire(s) p. 132
Explication(s) p. 132

À partir du fruit de la progression multiplié par deux fois l'accroissement et additionné au carré de la différence entre la moitié de l'accroissement et le terme initial, ils appellent position la racine de ce résultat diminuée du terme initial, augmentée de la même part de l'accroissement et divisée par l'accroissement.

Commentaire(s) p. 133

Dis-nous rapidement en combien de jours trois cent soixante drachmes ont été versées à des brahmanes par celui qui, après avoir donné trois drachmes le premier jour, s'est engagé à donner un accroissement de deux drachmes par jour.

Commentaire(s) p. 133
Explication(s) p. 133

Une position impaire étant diminuée de un, on pose « multiplicateur », paire, étant divisée par deux, on pose « carré ». Le résultat issu de l'opération « multiplicateur-carré » exécutée à l'envers, à partir du dernier et jusqu'à épuisement de la position, est diminué de un, divisé par l'accroissement multiplicatif diminué de un et multiplié par le terme initial, ce sera le total pour un accroissement multiplicatif.

Commentaire(s) p. 134
Explication(s) p. 134

Combien de niṣka *a-t-il donné à un mendiant pendant un mois, celui qui a initialement donné un couple de* varāṭaka *et promis un accroissement du double chaque jour ?*

Commentaire(s) p. 135
Explication(s) p. 136

Commentaires et explications

Numération

Le premier est le rang de l'unité. Selon la règle : *« pour les chiffres le mouvement est à l'envers »*, celui qui est au début est celui qui se tient à la tête des chiffres mis en ligne. Quel que soit celui qui occupe le rang de l'unité, celui-là doit être compris comme compté une fois. Numération p. 4

Le deuxième est le rang de dix. Celui qui occupe le rang de dix est placé à gauche, à partir du rang de l'unité. Quel que soit celui qui occupe le rang de dix, il est compté dix fois.

Le troisième est le rang de cent ; le chiffre qui est là est compté cent fois. Le quatrième est le rang de mille ; le chiffre qui est là est compté mille fois. Le cinquième est le rang des myriades ; le chiffre qui est là est compté une myriade de fois. Ainsi sont les noms de tous les rangs et les chiffres placés à ceux-ci doivent être compris comme comptés dix fois le précédent à mesure qu'ils s'accroissent. C'est ainsi que le sixième est le rang des *lakh* ; le septième, le rang des millions ; le huitième, le rang des *crore* ; le neuvième, le rang d'*arbuda* ; le dixième, le rang d'*abja* ; le onzième, le rang de *kharva* ; le douzième, le rang de *nikharva* ; le treizième, le rang de *mahāpadma* ; le quatorzième, le rang de *śaṅku* ; le quinzième, le rang de *jaladhi* ; le seizième, le rang d'*antya* ; le dix-septième, le rang de *madhya* ; le dix-huitième, le rang de *parārdha*.

Ainsi l'adverbe *daśaguṇottaram* signifie : de sorte que les suivants soient décuplés. Le premier par rapport à celui qui occupe le rang de l'unité est compté dix fois ; le suivant de celui qui occupe le rang de dix, cent fois ; le suivant de celui qui occupe le rang de cent, dix fois cent ; le suivant de mille, dix fois mille ; le suivant de la myriade, dix fois une myriade ; le successeur est ainsi compté dix fois par rapport au prédécesseur.

Les noms, un, dix, cent, etc., *sthānānām* des dix-huit rangs *saṃkhyāyāḥ* de la numération ont été élaborés *pūrvaiḥ* par les sages afin d'éveiller les mathématiciens en vue des transactions courantes.

Telle est la convention relative à l'usage du traité.

« Pour les chiffres le mouvement est à l'envers » *: demi-*śloka *expliquant la différence entre le procédé de formation des noms de nombres dans la langue parlée et leur écriture. En sanskrit classique on accole le nombre de rang inférieur devant celui de rang supérieur, par exemple* dvā-daśa, dvā *deux,* daśa *dix : douze, ou bien* sapta-adhika-śata, Numération p. 4

sapta *sept,* adhika *en surplus,* śata *cent : cent sept et on écrit à l'envers par rapport à cette formation : 12, 107.*

*La citation complète de la strophe dont est extrait ce demi-*śloka *fait apparaître un autre sens. Voici cette strophe :*

aṅkeṣu śūnyavinyāsād vṛddhiḥ syāt tu daśādhikā |
tasmāj jñeyā viśeṣeṇa aṅkānāṃ vāmato gatiḥ ||
Parce qu'en plaçant zéro dans des nombres, il peut y avoir un accroissement du décuple, pour cette raison, on doit savoir que la voie des chiffres est particulièrement retorse.

Cet aphorisme fait partie des nombreuses petites maximes de sagesse pratique dont la culture indienne regorge ; on les appelle subhāṣita *: bons mots.*

On a renoncé à traduire la plupart des termes désignant les rangs de la numération parce que leurs équivalents en français utilisent, dans leur expression même, la numération décimale de position : dix mille, cent mille... ce que ne font pas les mots sanskrits : ayuta, lakṣa...
Les mots lakh*, pour cent mille et* crore*, pour dix millions, sont des mots utilisés, dans ce sens, aujourd'hui en Inde. On les trouvent dans l'édition du Littré de 1872 ;* lakh *figure encore dans le Petit Larousse de 1968. Les éditions actuelles du Petit Robert n'ont pas repris ces termes.*

Addition

L'addition des chiffres doit être produite *yathāsthānam* selon leurs rangs respectifs, dans l'ordre[3], ou bien, elle doit être produite dans l'ordre inverse[4]. Celui qui occupe le rang de l'unité doit être joint à celui qui occupe le rang de l'unité ; celui qui occupe le rang de dix doit être joint à celui qui occupe le rang de dix ; celui qui occupe le rang de cent doit être joint à celui qui occupe le rang de cent. C'est l'addition dans l'ordre. Addition p. 4

Et l'addition dans l'ordre inverse : du rang de cent jusqu'au rang de l'unité. Telle est l'addition.

Dans la soustraction, *antaram* la suppression doit être effectuée pas à pas, comme précédemment.

aye bāle līlāvati matimati brūhi sahitān
dvipañcadvātriṃśattrinavatiśatāṣṭādaśa daśa |
śatopetān etān ayutaviyutāṃś cāpi vada me
yadi vyakte yuktivyavakalanamārge 'si kuśalā ||

3. C'est-à-dire dans l'ordre de la formation du nom des nombres : en commençant par le rang inférieur. C'est l'ordre de la langue parlée et celui que nous utilisons.

4. C'est-à-dire l'ordre inverse de la formation du nom des nombres : en commençant par le rang supérieur. C'est l'ordre de l'écriture.

Addition p. 4

Aye, au sens d'adresse gentille : Ô mon enfant ! Ô Līlāvatī ! **matimati** pourvue d'intelligence, **brūhi** dis la somme de ces nombres : deux, cinq, etc. et dis aussi **śatenopetān** quand ils sont additionnés à cent. C'est un exemple d'addition. Et un exemple de soustraction : dis **me** pour moi, les mêmes ôtés de dix mille, si tu es qualifiée sur la voie **vyakte** exacte **yuktivyavakalanayoḥ** de l'addition et de la soustraction.

Pour l'exemple d'addition, on pose : 2, 5, 32, 193, 18, 10, 100.
Ici, après l'addition de deux et cinq, qui occupent le rang de l'unité, sept est produit : 7.
Dans l'addition de ce sept, qui occupe le rang de l'unité, à trente-deux, après l'addition à deux, qui occupe le rang de l'unité, quarante moins un est produit : 39.
Addition de ce dernier à cent quatre-vingt-treize : 193.
39
Après l'addition de trois et neuf, qui occupent des rangs d'unités, douze est produit. Alors, deux est au rang de l'unité et un au rang des dizaines.
Après l'addition de un, trois et neuf, qui sont au rang de dix, treize est produit. Alors trois est au rang des dizaines et un au rang des centaines.
Après l'addition des deux « un », qui occupent le rang de cent, deux cent trente-deux est produit : 232.
Ici, pour ajouter dix-huit, on pose : 232.
18
Après l'addition de huit et deux, dix est produit. Zéro est au rang de l'unité et un au rang de dix. Après l'addition de un, un et trois, qui sont au rang de dix, cinq est produit : 250.
Là, pour ajouter dix on pose : 250.
10
On dit, à propos de la production de zéro, qui sera exposée : *« après l'addition de zéros, il y a seulement zéro. »* Après l'addition de un et cinq, au rang des dizaines, deux cent soixante est produit : 260.
Pour *« joints à cent »*, on pose : 260.
100
Il y a une somme de zéros au rang des unités et la somme de zéro et six au rang des dizaines ; après l'addition de un et deux, au rang de cent, trois cent soixante est produit : 360.

La somme est à établir aussi dans l'ordre inverse.

Maintenant, l'exemple de soustraction : *« les mêmes ôtés de dix mille. »* Addition p. 4
On pose de cette manière : 10 000.

360

Trois, qui occupe le rang de cent, est soustrait de zéro, qui occupe le rang de cent ; il reste : 9 700.

60

Six, qui occupe le rang de dix, est soustrait de zéro, qui occupe le rang de dix, il reste : 9 640.

Telle est la soustraction pour ce qui a été additionné.

Ou bien, on peut faire une soustraction un à un, selon les rangs aussi, de deux, cinq, etc. posés chacun à part.

On doit connaître l'addition dans les deux sens : direct et inverse ; la soustraction dans le sens inverse seulement[5].

Telles sont l'addition et la soustraction.

Multiplication

guṇyāntyam aṅkaṃ guṇakena hanyād
utsāritenaivam upāntyam ādīn |
guṇyas tv adho 'dho guṇakhaṇḍatulyas
taiḥ khaṇḍakaiḥ saṃguṇito yuto vā ||
bhakto guṇaḥ śudhyati yena tena
labdhyā ca guṇyo guṇitaḥ phalaṃ vā |
dvidhā bhaved rūpavibhāga evaṃ
sthānaiḥ pṛthag vā guṇitaḥ sametaḥ |
iṣṭonayuktena guṇena nighno
'bhīṣṭaghnaguṇyānvitavarjito vā ||

Le multiplicande est celui qui est multiplié ; on multiplie par celui-ci : le multiplicateur. Multiplication p. 4

hanyāt on multipliera le dernier chiffre du multiplicande, placé en dessous, par le multiplicateur situé au-dessus, selon le procès de *« jonction des vantaux d'échoppe »* ; on le multipliera successivement par les chiffres du multiplicateur, du dernier au premier. On multipliera, selon la même méthode de multiplication que pour le dernier chiffre, **upāntyam ādīn** tous les chiffres, placés en ligne au-dessous, jusqu'au premier, par le multiplicateur que l'on déplace pour chacun. Cette opération a pour nom : *« jonction des vantaux »*.

5. Cette précision est dans tous les manuscrits mais il n'y a aucune explication quant à l'exclusion de l'ordre direct qui est celui que nous pratiquons.

« guṇyas tv adho 'adhaḥ. » Ou bien, le multiplicande est posé **adho 'dhaḥ** à des places, en aussi grand nombre que **khaṇḍāni** des parts du multiplicateur qui ont été faites comme on le désire. Multiplié par ces parts du multiplicateur, faites comme on désire, et additionné, on a le résultat de la multiplication.

« bhakto guṇaḥ śudhyati. » Le multiplicateur, **bhaktaḥ** divisé **yena** par un nombre, **śudhyati** est sans reste ; le multiplicande est multiplié **tena** par ce diviseur qui a été considéré auparavant **ca** et aussi **labdhyā** par le résultat de la division ; on a ainsi le produit.

« dvidhā bhavet. » Ou bien la partition en entiers, qui consiste en la double opération, **evam** selon la méthode dite juste avant, sera ainsi de deux sortes : **vā** ou bien le multiplicande est multiplié séparément **sthānaiḥ** par les multiplicateurs un, dix, cent, etc. selon le nombre des rangs ; quand ils sont additionnés, on a le résultat de la multiplication. Ou bien – l'invariant **vā** a le sens de multiple – ce qui est distingué par les rangs du multiplicande : un, dix, cent, etc., multiplié par le multiplicateur, est le résultat de la multiplication.

Par ce vers, la double méthode de partition selon les rangs a été montrée.

« iṣṭona, etc. » Le multiplicateur est diminué **iṣṭena** d'un nombre créé selon son désir ; le multiplicande est multiplié par le multiplicateur de cette sorte[6] ; ensuite **anvitaḥ** une fois additionné au multiplicande qui a été multiplié par le nombre choisi, on a le produit.

Ou encore, le multiplicande multiplié par le multiplicateur augmenté d'un nombre arbitraire et ensuite, diminué du multiplicande qui a été multiplié par ce nombre arbitraire, on a le produit.

bāle bālakuraṅgalolanayane līlāvati procyatām
pañcatryekamitā divākaraguṇā aṅkāḥ kati syur yadi |
rūpasthānavibhāgakhaṇḍaguṇane kalyāsi kalyāṇini
chinnās tena guṇena te ca guṇitā jātāḥ kati syur vada ||

Bāle Ô toi dont la jeunesse est nouvelle ! Ici, enfant ne signifie pas nourrisson, car il y aurait, dans cette question, la conséquence indésirable de la non-apparition de l'idée de calcul, c'est la force de la jeunesse qui est figurée. Multiplication exemple p. 5

6. *i.e.* le multiplicateur diminué du nombre arbitrairement choisi.

– Ô Līlāvatī ! comment es-tu ?

– Celle dont les deux yeux sont **lole** timides, inconstants, comme ceux des gazelles **bālāḥ** qui sont jeunes : **bālakuraṅgalolanayanā**, cela au vocatif.

– Ô Līlāvatī ! toi qui es ainsi, **procyatām** qu'il soit dit...

– Qu'est-ce qui doit être dit ?

– L'auteur l'énonce : *« le nombre mesuré par cinq, trois et un multiplié* **divākaraḥ** *par douze, combien cela fait-il ? »* Et aussi, **kalyāṇini** : « ô toi qui a la plus haute apparence ! », ou : « toi, femme à la parole supérieure ! » si, **kalyā** tu es experte en multiplication par parts suivant une partition selon les rangs ou suivant une partition en entiers, dis alors combien cela fait, une fois multiplié selon ces méthodes.

Ensuite, ces mêmes nombres qui ont été multipliés, aussi nombreux qu'ils ont été produits, **chinnāḥ** divisés par ce multiplicateur même par lequel on a multiplié, combien sera-t-il obtenu ?

Le mot *« et »* fait comprendre le sens d'une interrogation relative à d'autres exemples. Ceux qui ont été produits, une fois qu'ils ont été multipliés, **chinnāḥ** sont divisés en retour par le même multiplicateur ; telle est la signification.

On pose : multiplicande : 135, multiplicateur : 12. Multiplication exemple p. 5

« On multipliera le dernier chiffre du multiplicande par le multiplicateur. » Cette multiplication qui a pour nom *« jonction des vantaux »*, professée par Śrīdharācārya, est ainsi qu'il suit : 12 .

135

Un est multiplié par douze : 12.

Ensuite, douze doit être placé au-dessus de l'avant-dernier chiffre, on pose :

12 .

1235

Trois est multiplié par douze, 36 est produit.

Ensuite, le multiplicateur, 12, doit être placé, par suite d'un glissement, au-dessus du cinq qui est au début. On pose : 12.

1265

3

Cinq est multiplié par douze, 60 est produit. Il y a alors disparition du multiplicateur parce qu'en l'absence de multiplicande, ce par quoi on a multiplié est totalement détruit, on pose : 1260.

36

Après une addition, à l'aide de la règle de la somme, 1 620 est produit.

Pour montrer la règle : *« Le multiplicande (...) au-dessous de chacune d'elles, etc. »*, l'auteur dit : *« ou bien les deux parts, de la partition en entiers du multiplicateur 12, sont 8 et 4. »* Multiplication exemple p. 5

Les deux multiplicandes, au-dessous de chacune d'elles, 135, étant multi-
135
pliés par les deux parts, selon la méthode qui précède : 1080, et addition-
540
nés, le résultat est produit : 1 620.

Pour montrer le sens de la formule *« le multiplicateur est divisé, etc. »* : Multiplication exemple p. 5
Le multiplicateur, 12, est divisé par trois, 4 est obtenu.
Le multiplicande étant multiplié par le diviseur 3 : 405, et aussi par le quotient, 4, ce même résultat : 1620, est produit.

De même, la partition en entiers est montrée de deux manières : *« ou bien il y aura la partition en entiers de deux manières, multipliée séparément par les rangs et additionnée. »* Multiplication exemple p. 5
Après avoir fait une partition selon les rangs, pour le multiplicateur : 10 et 2, le multiplicande étant multiplié séparément par ces deux rangs : 1350 et 270, et additionné, ce même 1620 est produit.
À cause du mot *« vā »* (ou bien) : deux parts, selon les rangs du multiplicande, 130 et 5, sont multipliées par le multiplicateur : 1560 et 60, et additionnées : 1620 est produit.

La partition selon les rangs doit être ainsi connue de deux manières.

Un exemple de partition en entiers, concernant le multiplicande aussi, doit être exécuté, comme pour le multiplicateur.
Les deux parts du multiplicande, 80 et 55, sont séparément multipliées par le multiplicateur : 960 et 660 ; additionnées, ce même 1620 est produit.

Le multiplicande est divisé par neuf, quinze est obtenu, 15 ; puis neuf est multiplié par le multiplicateur 12 : 108 ; le quotient 15 est à nouveau multiplié par ce dernier, ce même 1620 est produit.

Un exemple pour ceci : *« le multiplicateur diminué ou augmenté d'un nombre arbitraire. »* Multiplication exemple p. 5

Le multiplicande étant multiplié par le multiplicateur diminué de trois, 9 : 1215, et séparément multiplié par ce trois choisi : 405 ; additionnés, le même résultat, 1620, est produit.
Puis encore un exemple pour « *diminué etc.* » Le multiplicateur est augmenté d'un huit arbitraire : 20. Le multiplicande, étant multiplié par ce dernier : 2700, est diminué de l'entier huit choisi, qui a été multiplié : 1080, le reste produit est ce même 1620.

À ce sujet, quatre opérations, qui consistent en *kapāṭasaṃdhi*, *tatstha*, *rūpasthānavibhāga*[7], sont enseignées par le maître Śrīdhara. Ici même, les opérations de multiplication sont exposées de sept manières par le meilleur des maîtres, Bhāskara. La huitième, qui est l'opération *tatstha*, n'est pas dite : elle n'est pas honorée en raison de sa non-différence avec la procédure dont le nom est *kapāṭasaṃdhi*. Pour connaître cette similitude, il existe ceci à ce sujet : Multiplication exemple p. 5

« tasmiṃs tiṣṭhati yasmāt pratyutpannas tatas tatsthaḥ. »

« celui-ci étant stationnaire, c'est la raison pour laquelle la multiplication est alors tatstha.

tasmin le multiplicateur **tiṣṭhati** ne glissant pas depuis sa position d'origine, **yasmāt** pour cette raison, **pratyutpannaḥ** cette multiplication est celle dont le nom est *tatstha*.

Voici la distinction : dans celle qui a pour nom technique *kapāṭasaṃdhi*, le multiplicateur, placé au-dessus du multiplicande à la manière de la jonction des vantaux, multipliera les nombres du dernier au premier en glissant à chaque fois ; dans la méthode *tatstha*, en revanche, seulement posé à sa place, il multipliera les nombres du dernier au premier. Et cette multiplication *tatstha* est montrée séparément par le maître parce qu'elle est utile à la production du résultat dans le cas de chiffres posés sur une feuille et est bien connue dans le monde des mathématiciens originaires de différents pays et appointés par les rois et des marchands.

On a donc sept méthodes pour effectuer une multiplication.
La première porte le nom de « jonction des vantaux, kapāṭa-saṃdhi. *» Elle consiste à placer le multiplicande sous le multiplicateur, à l'inverse de notre méthode, et à multiplier successivement par le multiplicateur, que l'on fait glisser au-dessus de chacun, les chiffres* Multiplication p. 4

7. *kapāṭasaṃdhi* : jonction des vantaux, *tatstha* : qui se tient là, *rūpasthānavibhāga* : partition en entiers ou en rangs.

du multiplicande, en les remplaçant au fur et à mesure par le résultat. Les auteurs indiens attribuent ce procédé au mathématicien Śrīdhara dont voici la règle de multiplication extraite de son pāṭīgaṇita *:*

vinyasyādho guṇyaṃ kapāṭasaṃdhikrameṇa guṇarāśeḥ |
guṇayed vilomagatyānulomamārgeṇa vā kramaśaḥ ||
utsāryotsārya tataḥ kapāṭasaṃdhir bhaved idaṃ karaṇam |

Après avoir placé le multiplicande au-dessous, selon la méthode de jonction des vantaux, on multipliera, en mouvement inverse ou en sens direct, pas à pas, par le multiplicateur. Après l'avoir ensuite déplacé tour à tour, on aura l'action de jonction des vantaux.

Voici l'exemple de cette méthode donné dans le pāṭīgaṇita *; le commentateur donne beaucoup plus de détails que Gaṅgādhara.*
Soit à multiplier 1296 *par* 21. *(On a écrit en caractère gras le chiffre sur lequel porte la multiplication.)*

On pose : 21
1296

Le six qui se tient au rang des unités est multiplié par un : six. Six est posé à la place au-dessous du un.	21 129**6**6
Ensuite, six étant multiplié par deux : douze ; deux est posé à la place au-dessous de deux *(dizaine du multiplicateur)* ; le un, qui a été aussi produit, au-dessous de neuf.	21 12926 1
Ensuite, pour multiplier neuf, qui se trouve au rang des dizaines, le multiplicateur glisse.	21 12**9**26 1
Maintenant, l'état de multiplicande et de multiplicateur pour neuf et pour vingt et un est produit. Neuf est multiplié par un ; après addition avec le deux placé au-dessous de lui *(le* 1 *de* 21*)*, un est produit à cette place ; un est aussi ajouté au un qui est placé au-dessous de deux *(le* 2 *de* 21 *; il s'agit de la retenue faite à l'étape précédente)* : on a deux.	21 12**9**16 2
Neuf étant multiplié par deux, on pose, exactement comme avant, dix-huit au-dessous de lui. *(C'est-à-dire comme lorsqu'on a multiplié* 6 *par* 2 *: en remplaçant* 9 *par* 8 *et en posant le* 1 *de la retenue au-dessous du* 2 *qui le précède.)*	21 12816 12
L'addition à huit, du deux qui est placé au-dessous de lui, étant faite, zéro est produit à sa place ; le un aussi *(retenue de l'addition qui vient d'être faite)* est ajouté au un qui est placé sous le deux : on a deux.	21 12016 2
Ensuite, pour multiplier deux, qui est au rang des centaines, le multiplicateur glisse.	21 1**2**016 2
Maintenant, l'état de multiplicande et de multiplicateur pour deux et vingt et un est produit. Deux multiplié par un est encore deux. Après avoir additionné deux au chiffre qui est placé au-dessous de un, deux est produit.	21 1**2**216 2

Deux multiplié par deux est quatre, après addition avec le deux placé au-dessous, on a six.	21 16216
Ensuite, pour multiplier un, au rang des milliers[8], le multiplicateur glisse.	21 **1**6216
Maintenant, l'état de multiplicande et de multiplicateur pour un et pour vingt et un est produit ; alors, un multiplié par un est encore un, qui est ajouté à six, on a sept.	21 **1**7216

Un multiplié par deux : deux. Le multiplicande étant épuisé, le multiplicateur est effacé, le résultat est cela même : 27216.

On voit, sur cet exemple, que le glissement du multiplicateur sert à marquer, à chaque étape, sur quel chiffre porte la multiplication et permet d'effectuer les additions et de poser les retenues au bon endroit.

Le nom de « jonction des vantaux » provient, peut-être, de la manière dont on ferme les échoppes dans les rues en Inde : un panneau de bois, souvent décoré, est glissé dans des rainures situées en haut et en bas de l'ouverture à obturer.

Dans la seconde méthode, on décompose le multiplicateur en une somme d'entiers ; on multiplie le multiplicande par chacun d'eux et on additionne les résultats. Dans l'exemple qui va être donné, le multiplicateur 12 *est décomposé en* $8+4$ *et on effectue* $12 \times 135 = (8+4) \times 135$.

La troisième méthode consiste à effectuer deux multiplications successives ; par exemple on multiplie 135 *par* 4*, puis le résultat par* 3 *:*
$12 \times 135 = (4 \times 135) \times 3$.

La quatrième méthode est double car on l'applique au multiplicateur et au multiplicande ; elle utilise la numération décimale de position. La description qui en est donnée correspond exactement à l'écriture moderne des nombres en base 10*, par exemple :*
$234 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$.
Pour multiplier un nombre par 234*, on le multipliera par* 100 *et par* 2 *qui se trouve au rang des centaines, puis par* 10 *et par* 3 *qui se trouve au rang des dizaines et enfin par* 4 *; la somme des résultats donne le produit.*

La sixième méthode est également double ; c'est un procédé toujours utilisé en calcul mental : pour multiplier par 12*, on multiplie par* 10 *et par* 2 *le multiplicande et on ajoute les résultats ; on a donc ôté de* 12 *un nombre choisi selon son désir...*
Pour multiplier par 18*, on multiplie par* 20 *et par* 2 *et on retranche les résultats.*

---

8. Il s'agit du rang des milliers du multiplicande 1296. La disposition du calcul le fait apparaître comme dizaine de milliers.

Division

bhājyād dharaḥ śudhyati yadguṇaḥ syād
antyāt phalaṃ tat khalu bhāgahāre |
samena kenāpy apavartya hāra-
bhājyau bhajed vā sati saṃbhave tu ||

Haraḥ le diviseur, **yadguṇaḥ** multiplié, **antyāt** à partir du dernier rang, par un certain nombre possible, **śudhyati** se soustrait **bhājyāt** du nombre à diviser. Ce multiplicateur, qui a été créé par une supposition à propos du diviseur, **phalam** a pour nom technique quotient, **khalu** régulièrement dans la division. Division p. 5

À cause du mot « *antyāt* », on doit savoir que, comme dans la règle de la multiplication, le diviseur, glissant vers l'avant-dernier et les suivants aussi, est le diviseur des chiffres à diviser qui se tiennent sur une ligne et qu'à chaque étape du déplacement il y a obtention d'un chiffre ; dans le cas d'une impossibilité de résultat, il faut considérer que zéro seulement est obtenu et le déplacement n'est pas inutile.

« *samena kena.* » **tu** de plus, quand cela est possible en vue d'un allégement de l'opération, il est indiqué, dans ces conditions : « *ou bien on divisera* » de même. L'auteur expose le procédé d'allégement : **apavartya** après avoir simplifié **hārabhājyau** les deux nombres par un même nombre possible, on divisera.

atra pūrvodāharaṇe guṇitāṅkānāṃ svaguṇacchedānāṃ nyāsaḥ|

Voici le sens : **atra** dans l'exemple de division, il y a écriture, en guise de dividende, **guṇitāṅkānām** des nombres composés du résultat **pūrvodāharaṇe** dans l'exemple de multiplication et dont **chedā** les diviseurs sont précisément leurs multiplicateurs dans l'exemple de la multiplication ; ainsi, de cette manière, leurs multiplicateurs, là, sont ici en guise de diviseurs ; telle est la signification. Division p. 5

Dividende 1 620, diviseur 12.

Ici, après avoir posé le diviseur au-dessous du dernier chiffre, le diviseur, multiplié par un exactement, est retiré du dividende ; alors le multiplicateur un est obtenu, le reste est 420 et le diviseur est glissé.

Là, il est multiplié par trois et retiré ; trois, 3, est donc obtenu, le reste est soixante.

Alors le diviseur est glissé, multiplié par cinq, qui est possible et retiré ; donc cinq est obtenu et le dividende est sans reste.
De cette manière, le multiplicande de l'exemple précédent est obtenu : 135.

Un exemple du procédé d'allégement.
Ou bien, le dividende et le diviseur sont simplifiés par un même trois : 540 et 4.
Exactement comme avant, avec ce dividende et ce diviseur-là, après division, on a ce même nombre : 135.
Ou bien, le dividende et le diviseur sont simplifiés par quatre : 405 et 3.
Ayant posé ce dividende et ce diviseur précisément, après division, on a ce même nombre : 135.

Ainsi, suivant le développement de sa propre pensée, une simplification doit être effectuée, quand cela est possible, dans toutes les opérations.

On peut imaginer la disposition suivante pour le calcul d'une division, les étapes du calcul sont séparées par des traits verticaux et les restes successifs sont écrits au-dessus. Division p. 5

	420		60		00
1620	1620	420	420	60	60
12	$1 \times 12 = 12$	12	$3 \times 12 = 36$	12	$5 \times 12 = 60$
Quotients :	1		13		135

Carré

samadvighātaḥ kṛtir ucyate 'tha
sthāpyo 'ntyavargo dviguṇāntyanighnāḥ |
svasvopariṣṭāc ca tathāpare 'ṅkās
tyaktvāntyam utsārya punaś ca rāśim ||
khaṇḍadvayasyābhihatir dvinighnī
tatkhaṇḍavargaikyayutā kṛtir vā |
iṣṭonayugrāśivadhaḥ kṛtiḥ syād
iṣṭasya vargeṇa samanvito vā ||

Voici le sens : **ghātaḥ** la multiplication de deux nombres identiques ; quand il y a cette multiplication, le carré du nombre est réalisé et il est appelé **kṛtiḥ** par ceux qui connaissent la vraie nature du calcul. Carré p. 5

Atha annonce une autre procédure. Dans une série de plusieurs chiffres, le carré du dernier de cette série, selon l'opération susdite : *« le produit* *de deux identiques »*, qui ne sera pas détruit, doit être placé à un autre endroit ; ensuite, **apare 'ṅkāḥ** les chiffres commençant par l'avant-dernier, **nighnāḥ** multipliés par le dernier doublé, doivent être placés **svasvopariṣṭāt**. Voici ce qui est dit : l'avant-dernier chiffre est multiplié par le dernier doublé ; il sera placé au-dessus du carré du dernier précédemment posé, en ayant fait de celui-ci une dizaine, de telle sorte que lui-même se trouve en l'état de celui qui occupe le rang de l'unité, c'est-à-dire avec une position en excès du rang des unités.

Puis, **tyaktvā** après avoir considéré le dernier, qui n'a pas été détruit, comme détruit, l'opération : *« le carré du dernier doit être placé »* doit être effectuée et le placement *« au-dessus l'un de l'autre »*, sur la ligne du carré, doit être poursuivi. Et l'auteur indique ici l'opération caractéristique : *« utsārya punaś ca rāśim. »*

L'opération : *« multiplié par le dernier doublé »* ayant été effectuée, bien que le précédent dernier ait été laissé, sans être détruit, **utsārya** on y pensera à nouveau pour le doublement, après avoir fait un nombre de cette sorte[9] avec le deuxième dernier ; telle est la construction et, parce que cela sera dit à propos de l'opération du cube : *« après avoir ensuite déterminé comme dernier un couple de telles parties »*, cela n'est pas développé ici[10]. Le sens est donc celui-ci : lors du premier doublement, **tyaktvā** après avoir inscrit le dernier à une autre place, l'opération *« multipliés par le dernier doublé »* doit être effectuée ; ensuite, lors des doublements ultérieurs, après avoir à nouveau fait sortir ce nombre[11] pour la réalisation de ces opérations...[12]

Ce commentaire mérite quelques éclaircissements. Carré p. 5

La difficulté vient de l'explication des deux mots : tyaktvā, *racine* tyaj *:* abandonner *et* utsārya, ut-sṛ *au causatif :* faire sortir.

Au début de l'explication, le commentateur dit que l'on doit prendre le carré du dernier chiffre et il précise qu'il est non détruit*, cela contrairement à l'usage des opérations sur le sable, ou sur l'ardoise, qui veut que l'on remplace les chiffres par ceux du résultat au fur et à mesure de l'avancement du calcul.*

9. C'est-à-dire un nombre qualifié de « dernier ».
10. Voir la règle du cube et le commentaire où ce point de la méthode est expliqué.
11. C'est-à-dire le dernier inscrit à une autre place.
12. La phrase n'est pas achevée, le maître, qui veut expliquer le sens particulier qu'il donne au mot *utsārya* (faire sortir), laisse le disciple continuer : *on effectuera le doublement.*

Après la description des premières opérations à effectuer, vient l'explication du mot sva-svopariṣṭāt, sva-sva-upariṣṭāt, *répétition du pronom réfléchi* sva, *composé avec l'adverbe* upariṣṭāt, *au-dessus. Comment placer les résultats quand on effectue les étapes successives du calcul ?*

Plutôt que d'attribuer à l'adverbe upariṣṭāt *le simple sens de location physique :* au-dessus, *sens que l'on devait utiliser pour la disposition sur l'ardoise, il nous dit qu'il faut aussi entendre le sens* d'unité de rang supérieur *: il faut faire avec l'un, celui qu'on a déjà placé, une unité de rang supérieur à l'autre, celui que l'on place.*

Après l'explication sur la manière de disposer le calcul, il donne son interprétation de tyaktvā *: considérer le chiffre dont on vient de s'occuper,* « qui n'a pas été détruit, comme détruit », *c'est-à-dire le délaisser, en le mettant de côté, en vue de l'opération suivante : quand on a effectué les opérations voulues par la règle (élévation au carré, multiplication de l'avant-dernier par le dernier doublé) pour le dernier chiffre, on recommence ces mêmes opérations pour le chiffre suivant. C'est là qu'il interprète* utsārya *:* « on y pensera à nouveau », *c'est-à-dire : on le fera sortir, de l'endroit où on l'a mis de côté, pour fabriquer un nombre à deux chiffres (si on est à la deuxième étape, plus, si on est plus loin), qui prendra le nom de dernier, pour être doublé.*

Cela donne, pour l'exemple de l'élévation au carré de 297 *qui va suivre, le calcul suivant :*

On calcule d'abord le carré 4 *du dernier chiffre,* 2.	4
L'avant-dernier, 9, *est multiplié par le dernier doublé :* $2 \times 2 \times 9 = 36$. *Ce résultat est placé, en faisant du carré* 4 *une dizaine et, bien que ce ne soit pas dit, en faisant la somme.*	$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{4} \\ 76 \end{array}$
Après avoir mis 2 *de côté* (tyaktvā), *on recommence les opérations avec le chiffre suivant :* 9. *On calcule son carré et on le place au-dessus de* 76, *en faisant de celui-ci une dizaine.*	$\begin{array}{r} 81 \\ \underline{76} \\ 841 \end{array}$
C'est maintenant qu'il faut penser au 2 *qui a été mis de côté, pour le* « faire sortir » (utsārya), *et fabriquer avec lui* 29, *qui doit être doublé, puis multiplié par* 7, *lequel a pris le rang d'avant-dernier puisque* 9 *a pris celui de dernier.* $2 \times 29 \times 7 = 406$, *qui doit être placé en faisant du résultat précédent une dizaine.*	$\begin{array}{r} 406 \\ \underline{841} \\ 8816 \end{array}$
Enfin, on place le carré de 7 *et les opérations s'arrêtent ici, puisqu'il n'y a plus d'avant-dernier.*	$\begin{array}{r} 49 \\ \underline{8816} \\ 88209 \end{array}$

Le calcul effectué est le suivant :

$$\begin{aligned}(2 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7)^2 = \; & 2^2 \times 10^4 + 2 \times (2 \times 10^2) \times (9 \times 10) \\ & + 9^2 \times 10^2 + 2 \times [(2 \times 10 + 9) \times 10] \times 7 \\ & + 7^2\end{aligned}$$

L'auteur dit une troisième méthode : *« le produit de deux parts... »* Carré p. 5

Abhihatiḥ la multiplication mutuelle de deux parts, faites comme on le désire, du nombre proposé pour le carré – le résultat issu de cette opération est aussi désigné par multiplication – ce produit **dvinighnī** est doublé et, ensuite, **yutā** ajouté à la somme **vargadvayasya** des deux carrés respectifs des deux parts qui ont été faites comme on le désire ; on a alternativement le carré par une telle méthode.

Il dit une quatrième méthode : *« le produit du nombre diminué et du nombre augmenté d'une quantité arbitraire. »*

Une quantité arbitraire est imaginée par notre propre esprit sous la forme d'un nombre. Le nombre à élever au carré, placé à deux endroits, est augmenté et diminué de celle-ci. Leur produit mutuel, ajouté au carré du nombre choisi ainsi fabriqué, sera aussi le carré.

La troisième méthode est l'identité remarquable bien connue : $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Carré p. 5

Et la quatrième méthode est une autre identité remarquable : $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.
Si on veut calculer le carré de a et si b est le nombre imaginé, on a bien :

$$a^2 = (a+b)(a-b)+b^2.$$

Kriyākramakarī (commentaire du milieu XVI^e s.) Carré p. 5

Le nombre venu au dernier rang a la forme du multiplicande ; après l'avoir multiplié par le nombre qui lui est égal, sous la forme du multiplicateur, il est placé au-dessus de lui. Ceci est expliqué par **sthāpyo 'ntyavargaḥ**. *(Conformément à l'usage dans ces textes, c'est le résultat du calcul que l'on vient d'effectuer, à savoir le carré, qu'il faut placer et non pas le nombre sur lequel a porté le calcul.)*

Tous les chiffres qui se trouvent à l'avant-dernier rang aussi et les suivants, après les avoir multipliés par le chiffre du dernier rang doublé, doivent être placés chacun au-dessus de lui-même. *(Voilà une autre traduction possible de* ***svasvopariṣṭāt*** *: le réfléchi renvoie à un seul chiffre et la répétition, comme c'est souvent le cas en sanskrit, prend un sens distributif.)*

L'inexistence d'une exception dans le placement « chacun au-dessus de lui-même » pour les chiffres débutant par l'avant-dernier, multipliés par le dernier doublé, comme pour le chiffre du dernier rang élevé au carré, est montrée par le mot **tathā** (*aussi*). Ceci est également rendu clair par la répétition : **svasvopariṣṭāt**. La signification : « chiffres avant-dernier et les suivants » est donnée par le mot **apara** *(les autres)*.

Ainsi, après avoir placé, chacun au-dessus de lui-même, le carré du dernier chiffre, le chiffre avant-dernier et les suivants multipliés par le dernier chiffre doublé, après avoir aussi délaissé (*tyaktvā*) le nombre situé à la dernière place de la quantité à élever au carré, à nouveau, après avoir fait sortir (*utsārya*) les chiffres qui ont été posés, le carré du nombre à la dernière place dans l'avant-dernier, doit être placé au-dessus de lui et, aussi, les chiffres à l'avant-dernière place et les suivants de cet avant-dernier multipliés par le dernier doublé, doivent être placés chacun au-dessus de lui-même. On doit opérer ainsi jusqu'à l'achèvement complet pour l'ensemble des rangs de la quantité à élever au carré, cela est montré par ce mot : **punaḥ**.

L'auteur de la Kriyākramakarī *ne donne malheureusement aucune glose pour les mots* tyaktvā *et* utsārya *mais il se sert du mot utsārya pour indiquer le décalage des positions quand il traite l'exemple. Cette explication donne lieu à un calcul différent de celui de Gaṅgādhara, voici comment est calculé le carré de* 297 *à la suite de ce commentaire (dans le tableau ci-dessous, le nombre* 297*, écrit en gras, ne rentre pas dans les calculs, ses chiffres servent seulement de repère pour placer les résultats des calculs que l'on effectue sur eux ; les calculs se lisent de bas en haut) :*

Maintenant, trois cents diminué de trois : 297. Son dernier chiffre est 2 ; son carré, 4, doit être placé au-dessus de lui.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \mathbf{297} \end{array}$$

Maintenant, le dernier doublé est 4 ; les chiffres suivants, multipliés par ce dernier sont 388 ($= 4 \times 97$). Ils doivent être placés chacun au-dessus de lui-même après avoir ajouté le précédent : 788.

$$\begin{array}{r} 788 \\ \hline 388 \\ 4 \\ \mathbf{297} \end{array}$$

Maintenant, après avoir fait sortir *(utsārya)* celui-ci,

$$\begin{array}{r} 788 \\ \mathbf{297} \end{array}$$

le carré de l'avant-dernier chiffre, 81, se placera au-dessus de lui-même : 869.

$$\begin{array}{r} 869 \\ \hline 81 \\ 788 \\ \mathbf{297} \end{array}$$

Après avoir multiplié le chiffre qui reste (*c'est-à-dire* 7) par l'avant-dernier, 9, doublé 18 : 126 ($= 18 \times 7$) on le mettra au-dessus de lui-même : 8816.

$$\begin{array}{r} 8816 \\ \hline 126 \\ 869 \\ \mathbf{297} \end{array}$$

Après avoir fait sortir ce dernier,

$$\begin{array}{r} 8816 \\ \mathbf{297} \end{array}$$

on mettra au-dessus de lui-même le carré du chiffre qui reste : 88209.

$$\begin{array}{r} \underline{88209} \\ 49 \\ 8816 \\ \mathbf{297} \end{array}$$

Le calcul effectué est le suivant :

$$\begin{aligned}(2 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7)^2 = \;& 2^2 \times 10^4 + 2 \times (2 \times 10^2) \times [(9 \times 10) + 7] \\ &+ 9^2 \times 10^2 + 2 \times (9 \times 10) \times 7 \\ &+ 7^2\end{aligned}$$

La difficulté des algorithmes de calcul est d'obtenir, par un moyen simple, les positions correctes pour les chiffres du résultat – que l'on pense aux points qui assurent cette fonction dans notre propre algorithme de multiplication. Dans ces deux commentaires, ce but est atteint à partir d'interprétations différentes. Pour Gaṅgādhara, c'est le mot svasvopariṣṭāt *qui permet d'y parvenir, en faisant du résultat précédent une unité d'ordre supérieur à celui du résultat que l'on est en train de calculer ; pour la* Kriyākramakarī, *c'est, d'une part, le soin que l'on prend à placer au-dessus du chiffre sur lequel porte un calcul, le résultat de ce calcul : quand on calcule le carré de* 9, *le* 1 *de* 81 *doit être placé au-dessus de* 9, *quand on calcule le double produit par* 7, *le* 6 *de* 126 *doit être placé au-dessus du* 7, *d'autre part, l'usage de utsārya entre chaque cycle de calcul : on « fait sortir », on décale, le nombre que l'on vient d'obtenir, avant de recommencer les mêmes opérations pour les chiffres suivants.*

sakhe navānāṃ ca caturdaśānāṃ
brūhi trihīnasya śatatrayasya |
pañcottarasyāpy ayutasya vargaṃ
jānāsi ced vargavidhānamārgam ||

Sakhe ô mon cher ! **Cet** si tu connais **vargavidhānamārgam** le chemin qui accomplit le carré, alors, dis le carré de neuf, dis le carré de quatorze, dis le carré de trois cents, **trihīnasya** diminué de trois, et aussi celui de dix mille augmenté de cinq. Carré exemple p. 6

On pose : 9, 14, 297, 10 005.

Leurs carrés sont un à un obtenus par l'opération *« le produit de deux identiques »* : 81, 196, 88 209, 100 100 025.

Cette méthode n'est pas développée, parce que cela a été précédemment exposé par la règle de la multiplication.

Pour la réalisation par la deuxième méthode : *« le carré du dernier doit être placé »*, on pose quatorze : 14.
Le carré du dernier est 1, calculé séparément par l'opération *« produit de deux identiques. »* On pose 1 à part.
Le suivant, 4, multiplié par deux fois le dernier, 2 : 8, doit être placé au-dessus, avec un excès de la position de l'unité : 18.
Et ensuite, après s'être représenté l'état de dernier pour le premier, le carré de celui-ci, 16, par : *« le carré du dernier doit être placé »*, sera posé avec un excès de position : 196. Le carré est obtenu.

De même, le deuxième exemple : 297.
Le carré du dernier, 2, est placé à part : 4.
Le suivant, 9, est multiplié par deux fois le dernier : 36 est produit et posé avec un excès de position : 76.
Le carré du dernier, 9, qui est le terme médian, est 81. On pose avec un excès de position : 841.
Le suivant, 7, est multiplié par le dernier, 29, doublé : 58 ; 406 est produit et placé avec un excès de position : 8 816.
Maintenant, le carré du dernier, 7, est 49 ; la somme, par excès de position est 88 209. Le carré est obtenu.

Troisième exemple : 10 005.
Le carré du dernier est 1. Le suivant, 0, est multiplié par deux fois le dernier : 2 ; 10 est obtenu par excès de position.
Le carré du premier zéro, qui le suit, est ajouté par excès de position : 100.
Le suivant, 0, est multiplié par le double du dernier : 20 ; 0 est produit. Par excès de position : 1 000.
Le carré du deuxième zéro, qui le suit, est 0 ; la somme, par excès de position, est 10 000. Le suivant est multiplié par le double du dernier : 200 ; 0 est produit. Il est additionné par excès de position : 100 000.
Le carré du troisième zéro, qui le suit, est ajouté par excès de position : 1 000 000. Le suivant, 5, est multiplié par deux fois le dernier : 2 000 ; 10 000 est obtenu ; ajouté par excès de position : 10 010 000.
Le carré du dernier, 25, est ajouté en excès de position : 100 100 025. Le carré est obtenu.

Maintenant l'auteur dit **vā** : une autre méthode. Par exemple 9. Carré
Les deux parts de neuf sont 5 et 4. Leur produit mutuel, 20, est doublé : 40. exemple p. 6

Les carrés de ces deux parts sont 25 et 16, leur somme est 41.
Le produit doublé est ajouté : 81 ; le même carré est produit.

De même le nombre arbitraire est 3.
Ce 9, diminué de trois : 6, est, séparément, augmenté de trois : 12 ; le produit des deux est 72.
Le carré 9 du nombre choisi, 3, est ajouté, le même carré est produit : 81.

Ainsi sont achevés, selon quatre méthodes, les développements sur le carré.

On ne donne ici que les calculs pour le troisième exemple : 10 005*, les calculs pour* 297 *ayant déjà été donnés.* Carré exemple p. 6

Le dernier est 1*, conformément à l'usage :* « pour les nombres le mouvement est l'envers ». *On en calcule le carré et on le place à part.*

$$1^2 = 1$$

On calcule le double produit du dernier et de celui qui le suit : le premier zéro. On place le résultat en le décalant d'un rang vers la droite.

$$2 \times 1 \times 0 = \begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ \hline 10 \end{array}$$

On calcule le carré du premier zéro que l'on place, toujours avec un décalage d'un rang vers la droite.

$$0^2 = \begin{array}{r} 10 \\ 0 \\ \hline 100 \end{array}$$

On fabrique alors le « nouveau dernier » en accolant au 1 *déjà mis de côté, le deuxième zéro dont on vient de calculer le carré :* 10*. On calcule le double produit du deuxième zéro et du « dernier » et on place le résultat en décalant d'un rang vers la droite.*

$$2 \times 10 \times 0 = \begin{array}{r} 100 \\ 0 \\ \hline 1000 \end{array}$$

On calcule le carré du deuxième zéro et on fabrique le « nouveau dernier » : 100.

$$0^2 = \begin{array}{r} 1000 \\ 0 \\ \hline 10000 \end{array}$$

Double produit du dernier ainsi fabriqué et du troisième zéro.

$$2 \times 100 \times 0 = \begin{array}{r} 10000 \\ 0 \\ \hline 100000 \end{array}$$

On calcule le carré du troisième zéro et on fabrique le « nouveau dernier » : 1 000.

$$0^2 = \begin{array}{r} 100000 \\ 0 \\ \hline 1000000 \end{array}$$

Double produit du « dernier » et du 5 *(lequel est le premier, selon la dénomination indienne).*

$$2 \times 1000 \times 5 = \begin{array}{r} 1000000 \\ 10000 \\ \hline 10010000 \end{array}$$

Il ne reste plus qu'à ajouter le carré de 5.

$$5^2 = \begin{array}{r} 10010000 \\ 25 \\ \hline 100100025 \end{array}$$

Racine carrée

tyaktvāntyād viṣamāt kṛtiṃ dviguṇayen mūlaṃ same taddhṛte
tyaktvā labdhakṛtiṃ tadādyaviṣamāl labdhaṃ dvinighnaṃ nyaset |
paṅktyāṃ paṅktihṛte same 'nyaviṣamāt tyaktvāptavargaṃ phalaṃ
paṅktyāṃ taddviguṇaṃ nyased iti muhuḥpaṅkter dalaṃ syāt padam ||

Par l'observation des mots *impair, etc.* dans la strophe de cette formule, on comprend : à partir du premier chiffre de la ligne des chiffres d'un carré, placée sur l'emplacement des opérations, jusqu'au dernier de la ligne, le premier est de rang impair, le second pair, le troisième impair, le quatrième pair, le cinquième impair. Racine carrée p. 6

Ayant déterminé de cette manière *« le dernier rang impair »*, même s'il y a un rang pair devant, il doit alors être seulement considéré comme impair avec le rang impair en plus.

Après avoir retiré du rang impair ainsi défini **kṛtim** un carré approprié – le carré d'un nombre compris entre un et neuf – puis, après avoir pris sa racine, on la doublera. Ensuite, on divisera le rang pair le précédant par cette racine doublée.

Le rang pair ayant été divisé par ce double, après avoir posé, sans le détruire, ce qui a été obtenu, on ôtera **kṛtim** le carré de ce quotient **tadādyaviṣamāt** de celui qui est le premier rang impair à partir du rang pair qui a été divisé et, une fois ôté, on posera ce quotient, non détruit et doublé, au début des chiffres doublés précédemment mentionnés. Ainsi se réalise le sens de : *« on posera dans la ligne du résultat. »*

Une division concernant le rang pair précédent doit être à nouveau effectuée par cette dernière ligne de résultats ; après cette division, on ôtera de celui qui est le rang impair de tête, le premier à partir du rang pair qui a été divisé, le carré **āptasya** du quotient qui a été placé à l'écart ; une fois ôté, on posera, doublé, dans la ligne du résultat, **phalam** le quotient placé à part.

dalam la moitié de cette ligne de résultats qui a été produite par une telle opération, **iti muhuḥ** jusqu'à ce que la ligne des chiffres du carré soit sans reste, **padaṃ syāt** est la racine.

Cet algorithme fait usage de la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *et montre la maîtrise que les mathématiciens indiens avaient de la numération décimale de position.* Racine carrée p. 6

On peut en voir le mécanisme sur l'exemple du calcul de la racine carrée de 196.

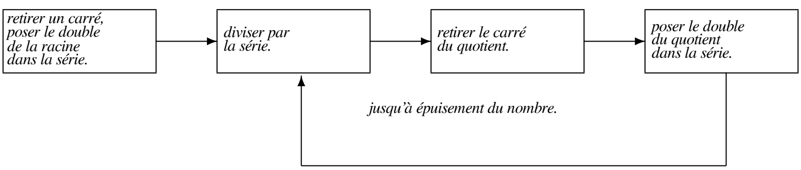
On écrit : $196 = 1^2 \times 10^2 + (2 \times 4 + 1) \times 10 + 6$*, ce qui est exactement :*

$$(1 \times 10 + 4)^2 = 1^2 \times 10^2 + 2 \times 4 \times 10 + (10 + 6)$$

On commence par retirer 1^2 *du dernier chiffre :* 1 *(« dernier », conformément à l'usage indien :* « pour les nombres, le mouvement est à l'envers »*), ce qui revient à retirer* 100*. En prenant la racine, on a alors le premier chiffre de la racine carrée. Il reste* 96*.* 9 *représente alors le double produit des chiffres du nombre* 14*, plus la retenue provenant de l'addition du carré de* 4*, deuxième chiffre du nombre* 14*. En le divisant par le double de la racine obtenue à la première étape, on obtient comme quotient le deuxième chiffre et comme reste, la retenue. Il ne reste plus qu'à achever l'opération en retirant le carré du quotient.*

Cette procédure peut être itérée pour de plus grands nombres. Bhāskara donne ainsi son algorithme : il retire d'abord un carré possible du « dernier » chiffre du nombre dont on cherche la racine. Une fois ce carré obtenu, il en double la racine et obtient ainsi, à la fois le double du premier chiffre de la racine cherchée et le nombre par lequel il faut diviser le rang suivant (précédent, selon l'expression indienne) pour obtenir le deuxième chiffre de la racine. La boucle est entièrement décrite, il ne reste plus qu'à l'effectuer pour chaque rang du nombre dont on cherche la racine. Pour les rangs pairs, on divise par la série des chiffres obtenus ; pour les rangs impairs, on retire le carré du quotient obtenu par la division précédente, « iti muhuḥ »*, dit la règle : « ainsi, constamment ». Il ne reste plus qu'à diviser par deux la série des chiffres obtenus.*

On peut résumer l'algorithme de la manière suivante :



mūlaṃ caturṇāṃ ca tathā navānāṃ
pūrvaṃ kṛtānāṃ ca sakhe kṛtīnām |
pṛthak pṛthag vargapadāni viddhi
buddher vivṛddhir yadi te 'tra jātā ||

Mon ami ! Si un accroissement de ton intelligence s'est produit **atra** dans le calcul de la racine carrée, alors sache, c'est-à-dire : dis, **padāni** les racines, une à une, de ces carrés. Racine carrée exemple p. 6

Dans l'attente de la question : *« desquels ? »*, l'auteur dit : *« la racine de quatre puis la racine de neuf »* et, de plus, *« des carrés calculés auparavant »* : de quatre-vingt-un et des suivants.

On pose : 4, 9, 81, 196, 88 209, 100 100 025.

Du fait de la possibilité d'un résultat compris entre un et neuf, parce qu'il n'y a qu'un seul rang impair pour les trois premiers carrés : 4, 9 et 81, les racines sont obtenues par la pensée : 2, 3, 9.

Quatrième exemple : 196.
Ici le nom technique des trois rangs doit être considéré : impair, pair et impair.
Le dernier impair est 1. Le carré 1 en est ôté.
Après avoir placé au-dessous du rang pair, 9, la racine de ce carré doublée, 2, on divisera le rang pair, 9, par la racine doublée, 2 : 4 est obtenu ; son carré est 16.
On ôtera 16 de celui qui est le premier rang impair à partir du rang pair qui a été divisé. Le reste est 0.
Après avoir posé dans la série le quotient 4 doublé, la série 28 est produite, sa moitié est 14 ; la racine du carrée est produite.

La première directive de la règle enjoint de grouper les chiffres du nombre dont on veut calculer la racine carrée par tranches de deux à partir de la droite (le premier chiffre, pour les Indiens). Le nombre de tranches obtenu donne le nombre de chiffres que comportera la racine. Pour 4, 9 *et* 81*, il n'y a qu'une tranche, donc la racine est un nombre inférieur à* 10.

Racine carrée exemple p. 6

Cela donne les calculs suivants. La deuxième ligne du tableau rend compte des calculs effectués, la troisième montre la construction de la série des chiffres à diviser par deux, à la fin, pour obtenir la racine carrée.

I	II	I	
196 $1^2 = 1$ 96	96 $2 \times \boxed{4} = 8$ 16	16 $4^2 = 16$ 00	
2		28	$\sqrt{196} = 28 \div 2 = 14$

Dans les colonnes marquées d'un I*, on soustrait d'un rang impair le carré du quotient obtenu dans la colonne précédente et on inscrit le double de ce quotient dans la série de la racine. Dans les colonnes marquées d'un* II*, on divise un rang pair par la série obtenue dans la colonne précédente. Le quotient est encadré pour plus de clarté.*

De même, l'exemple suivant est 88209.
Dans ce cas aussi, une fois faite la considération du pair et de l'impair, le dernier, huit, est de rang impair : 8.

Racine carrée exemple p. 6

Après avoir retranché de celui-ci un carré, que l'on détermine comme étant quatre, 4, la racine de ce carré, 2, est multipliée par deux : 4.
Une division concernant le rang pair précédent, que l'on reconnaît comme quarante-huit, est effectuée, le quotient est 9, le reste 12.
Deux (122) est le premier rang impair à partir de celui qui a été divisé, on ôtera de celui-ci le carré 81 du quotient 9. Le reste est 41.
Le quotient 9, doublé, 18, est posé dans la série : 58.
Le rang pair, désigné par zéro (410), étant divisé par la série 58, le quotient est sept : 7.
On ôtera complètement du premier rang impair : 49, le carré 49 de ce quotient.
On posera dans la série 58, le quotient 7, doublé, 14 : 594.
Ainsi, **dalam** la moitié de cette série est 297. La racine est produite.

Racine carrée exemple p. 6

I	II	I	II	I
88209 $2^2 = 4$ 48209	48209 $4 \times \boxed{9} = 36$ 12209	12209 $9^2 = 81$ 4109	4109 $58 \times \boxed{7} = 406$ 49	49 $7^2 = 49$ 00
$2 \times 2 = 4$		4 $2 \times \boxed{9} = 18$ 58		58 $2 \times \boxed{7} = 14$ 594

$\sqrt{88\,209} = 594 \div 2 = 297.$

La racine doit être aussi réalisée semblablement à partir du troisième exemple : 100100025.
Racine carrée exemple p. 6
Rang impair, rang pair, etc.
Le dernier, un, est de rang impair. Après avoir posé sa racine 1, doublée : 2, au-dessous de zéro qui est le rang pair précédent, une division est effectuée, le quotient est zéro.
Après avoir ôté son carré du rang impair le précédant et après avoir placé le quotient doublé, zéro aussi, dans la série, on a 20.
À partir du deuxième un, dans la division, le quotient est, de la même manière, à nouveau zéro.
Après avoir soustrait son carré, zéro, après avoir posé zéro doublé dans la série et après la division par deux cents concernant le rang impair précédent, on a un troisième zéro ; donc aussi, selon la méthode susdite, la série 2 000 est produite.

Après une division par deux mille, pour le rang pair précédent, dont la marque est deux, le quotient est 5 ; ayant soustrait sans reste son carré du rang impair précédent, cinq et après avoir posé le quotient cinq doublé dans la série, la série 20 010 est produite.
Sa moitié est la racine, 10 005.

Racine carrée exemple p. 6

I	II	I	II
100100025 $1^2 = 1$ 00100025	00100025 $2 \times \boxed{0} = 0$ 0100025	0100025 $0^2 = 0$ 100025	100025 $20 \times \boxed{0} = 0$ 100025
$2 \times 1 = 2$		20	
100025 $0^2 = 0$ 100025	100025 $200 \times \boxed{0} = 0$ 100025	100025 $0^2 = 0$ 100025	100025 $2000 \times \boxed{5} = 10000$ 25
200		2000	
25 $5^2 = 25$ 00			
20010	$\sqrt{100\,100\,025} = 20\,010 \div 2 = 10\,005$		

Cube

samatrighātaś ca ghanaḥ pradiṣṭaḥ
sthāpyo ghano ’ntyasya tato ’ntyavargaḥ |
āditrinighnas tata ādivargas
tryantyāhato ’thādighanaś ca sarve ||
sthānāntaratvena yutā ghanaḥ syāt
prakalpya tatkhaṇḍayugaṃ tato ’ntyam |
evaṃ muhur vargaghanaprasiddhāv
ādyaṅkato vā vidhir eṣa kāryaḥ ||
khaṇḍābhyāṃ vāhato rāśis
trighnaḥ khaṇḍaghanaikyayuk |
vargamūlaghanasvaghno
vargarāśer ghano bhavet ||

Le cube est enseigné par les anciens comme le résultat issu de **ghātaḥ** la multiplication mutuelle de trois nombres **samānām** égaux ; c’est ce qui est dit. Cube p. 6

Le nombre, posé en vue du cube, est écrit en trois endroits. D'entre ces trois, le nombre situé au-dessous est multiplié par celui du milieu et, ensuite, multiplié par celui du dessus. Le nombre ainsi issu d'une multiplication à deux reprises de nombres égaux est appelé cube. Ceci est une première méthode.

L'auteur dit le cube d'une autre manière : *« le cube du dernier doit être posé. »*

Le cube du dernier des chiffres posés en ligne est réalisé par l'opération *« le produit de trois identiques »* et placé à part. Ensuite, *« le carré du dernier, multiplié trois fois par le premier »* doit être établi ainsi qu'il suit : le carré de ce même dernier, qui n'a pas été détruit, est multiplié par le premier et, après, il est multiplié par trois et placé **sthānāntaratvena** *(selon la progression d'un rang)*. Le fait d'être **sthānāntaram** c'est-à-dire : ce dans quoi le rang même est **antaram** en excès ; le sens est : excès de position. Puis, après, **ādivargaḥ** le carré du premier nombre, **tryantyāhataḥ** triplé et multiplié par le dernier, doit être placé, comme précédemment, selon la progression d'un rang et, après, le cube de ce premier nombre doit être placé selon la progression d'un rang.

Ainsi, tous, d'abord le cube du dernier, puis le carré du dernier trois fois multiplié par le premier, puis le carré du premier trois fois multiplié par le dernier, puis le cube du premier, ces quatre nombres, **yutāḥ** sont additionnés selon la progression d'un rang ; on a alors le cube de ces deux chiffres.

Ensuite, *« en répétant de même, après avoir déterminé un couple de parts. »*

Après avoir fixé **antyam** : en qualité de dernier, le couple de chiffres dont la caractéristique est d'être dernier et premier, cette règle doit être appliquée ensuite de la même manière, **muhuḥ** à nouveau, après avoir fixé le troisième chiffre comme premier, parce qu'il n'y a dernier que par rapport à un premier.

À cette occasion, dans la méthode du carré aussi, après avoir additionné, selon l'excès des positions, le carré du dernier et aussi le premier multiplié par le double du dernier et aussi le carré du premier, puis, après avoir posé en qualité de dernier les deux chiffres dernier et premier, tous les deux, et ayant fixé comme premier le troisième chiffre, on doit réaliser le carré, à nouveau, selon sa règle. Telle est la deuxième méthode.

« evaṃ muhuḥ. » La règle susdite peut être appliquée de la même manière à partir du premier chiffre dans la réalisation du carré et dans celle du cube. Telle est la troisième méthode.

L'auteur dit une autre méthode : *« ou bien la quantité triplée est multipliée par ses deux parts. »*

Après avoir réparti en deux parts le nombre posé pour le cube, ce nombre est multiplié par ses deux parts et multiplié par trois puis ajouté à la somme des cubes des deux parts ; on aura alors le cube. Telle est la quatrième méthode.

L'auteur dit une autre méthode : *« le produit par lui-même du cube de la racine carrée. »*

Si le nombre posé pour le cube est producteur d'une racine carrée, il faut alors le considérer comme un nombre carré. Après avoir pensé à sa racine, le cube de cette racine **svaghnaḥ** est élevé au carré, *« ce sera le cube de la quantité carré. »* Telle est la cinquième méthode.

On a donc cinq méthodes pour calculer le cube d'un nombre. En réalité, les trois premières n'en forment qu'une seule. La deuxième et la troisième sont identiques quant à la procédure, qui est utilisée de gauche à droite (du dernier chiffre au premier, selon l'usage indien) dans la deuxième et de droite à gauche dans la troisième. La première s'applique aux nombres formés d'un seul chiffre et est nécessaire aux deux autres. Cube p. 6

La deuxième méthode envisage le nombre parcouru de gauche à droite : on calcule d'abord le cube du nombre formé par les deux premiers chiffres, puis on groupe ces deux chiffres et on calcule le cube du nombre formé par ce groupe et le troisième chiffre et ainsi de suite.

Cette méthode utilise, de façon répétée l'identité :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Par exemple, pour calculer le cube de 125*, on commence par calculer le cube de* 12 *:*

$12^3 = (10+2)^3 = 10^3 + 3 \times 10^2 \times 2 + 3 \times 10 \times 2^2 + 2^3.$

Les différentes puissances de 10 *ne sont évidemment pas écrites mais leur effet est marqué par la disposition du calcul, en se déplaçant d'un rang vers la droite à chaque étape, ce que Bhāskara appelle placer les résultats* « selon la progression d'un rang » (sthānāntaratva) *:*

$$\begin{array}{ccr}
1^3 & = & 1 \\
3 \times 1^2 \times 2 & = & 6 \\
3 \times 1 \times 2^2 & = & 12 \\
2^3 & = & 8 \\
\cline{3-3}
 & & 1728
\end{array}$$

Ensuite, on ajoute le dernier chiffre, 5 *:*
$125^3 = (120+5)^3 = 120^3 + 3\times 120^2 \times 5 + 3\times 120 \times 5^2 + 5^3$.
Ce qui donne :

$$\begin{array}{rcr} 12^3 & = & 1728 \\ 3\times 12^2 \times 5 & = & 2160 \\ 3\times 12 \times 5^2 & = & 900 \\ 5^3 & = & 125 \\ \hline & & 1953125 \end{array}$$

La différence entre la deuxième et la troisième méthode porte uniquement sur le sens de parcours du nombre : les opérations sont les mêmes mais on se déplace de droite à gauche dans le nombre et dans la disposition des résultats.

La quatrième méthode s'appuie toujours sur l'identité $(a+b)^3$*, écrite de cette manière :*

$$(a+b)^3 = 3ab(a+b) + a^3 + b^3$$

La cinquième méthode montre que le calcul sur les puissances ne posait aucun problème : si le nombre à élever au cube est un carré, $a = b^2$*, on calcule alors le cube de* b *et on élève le résultat au carré, ce qui revient à faire :* $(b^2)^3 = (b^3)^2$.

navaghanaṃ trighanasya ghanaṃ tathā
kathaya pañcaghanasya ghanaṃ ca me |
ghanapadaṃ ca tato hi ghanāt sakhe
yadi ghane 'sti ghanā bhavato matiḥ ||

Sakhe ô mon ami ! Dis **me** moi le cube de neuf, dis aussi le cube **trighanasya** de vingt-sept et dis encore le cube **pañcaghanasya** de cent vingt-cinq ; puis, après, **tato ghanāt ghanapadam** dis alors la racine cubique d'après le cube.

Cube
exemple p. 7

La formule de la racine cubique devant être dite, ceci est l'exemple pour la racine cubique. La formule qui va être dite est indiquée par la mention **hi**. Il n'y a pas d'inconvénient parce que les invariants ont des sens multiples.

On pose : 9, 27, 125.

Les cubes sont calculés à l'aide d'une opération précédente, selon la description en produit de trois nombres égaux : 729, 19 683, 1 953 125.

La deuxième méthode est montrée par un exemple. Dans celle-ci, à cause de la mention d'une répartition entre dernier et premier chiffre, on

a seulement cette possibilité dans un exemple sous la forme d'une série de chiffres, c'est pourquoi la donnée du deuxième exemple est 27.
Ici, selon : *« le cube du dernier doit être posé »*, le cube : 8, du dernier, deux (2), doit être posé.
Ensuite, le carré : 4, du dernier, 2, multiplié par le premier, 7 : 28, est triplé : 84 et ajouté par excès de position : 164.
Ensuite, le carré : 49, du premier, multiplié par trois : 147, est multiplié par le dernier, 2 : 294 et ajouté par excès de position : 1 934.
Enfin, le cube du premier, 7, est ajouté par excès de position.
Le cube est produit : 19 683.

Troisième exemple : 125.
Le cube : 1, du dernier, 1, doit être posé : 1.
Ensuite le carré : 1, du dernier, 1, multiplié par le premier, 2 : 2 et triplé : 6, est additionné par excès de position : 16.
Puis le carré : 4, du premier, 2, multiplié par trois : 12 et multiplié par le dernier, 1, est additionné par excès de position : 172.
Enfin le cube : 8, du premier, 2, est additionné par excès de position : 1 728.
De cette manière, le cube pour deux chiffres est réalisé.

« Après avoir déterminé un couple de parts », les deux chiffres doivent être fixés comme dernier et l'opération doit à nouveau être faite de la même manière. Dans ce cas, *« le cube du dernier doit être posé »* est déjà réalisé : 1 728.
Ensuite, le carré : 144, du dernier, 12, multiplié par le premier, 5 : 720 et multiplié par trois : 2 160, est ajouté par excès de position : 19 440.
Puis le carré : 25, du premier, 5, multiplié par trois : 75, et multiplié par le dernier, 12 : 900, est ajouté par excès de position : 195 300.
Enfin, le cube : 125, du premier, 5, est ajouté par excès de position, le cube est produit : 1 953 125.

Les calculs du cube de 27 *et celui de* 125 *sont les suivants :*

Cube exemple p. 7

Cube de 27	*Cube de* 125	
$2^3 = 8$	$1^3 = 1$	$12^3 = 1728$
$3 \times 2^2 \times 7 = 84$	$3 \times 1^2 \times 2 = 6$	$3 \times 12^2 \times 5 = 2160$
$3 \times 2 \times 7^2 = 294$	$3 \times 1 \times 2^2 = 12$	$3 \times 12 \times 5^2 = 900$
$7^3 = 343$	$2^3 = 8$	$5^3 = 125$
19683	1728	1953125

Un exemple d'un autre procédé. On pose : 27.
« *Evaṃ muhuḥ.* » Le cube du premier est 343.
Le carré du premier : 49, multiplié par le dernier et multiplié par trois, 294, est additionné par défaut de position : 3 283.
Le carré du dernier : 4, multiplié par le premier et triplé : 84, est additionné par défaut de position : 11 683.
Le cube du dernier : 8, est additionné par défaut de position : 19 683. Le même cube est obtenu.

Cube exemple p. 7

On calcule à nouveau le cube de 27*, mais en commençant par la droite du nombre, le premier chiffre selon la description indienne, ce qui fait que, dans la disposition des calculs, on se déplace aussi de droite à gauche, ce que le commentateur appelle le défaut de position.*

Cube exemple p. 7

$$\begin{array}{lcr}
7^3 & = & 343 \\
3 \times 2 \times 7^2 & = & 294 \\
3 \times 2^2 \times 7 & = & 84 \\
2^3 & = & 8 \\
\hline
 & & 19683
\end{array}$$

Maintenant, à cette occasion, à cause de la mention : « *pour la réalisation du carré et du cube* », un exemple de carré, en vue de la règle en sens inverse. On pose : 14.
« *Le carré du dernier doit être posé.* » Le carré du premier est 16.
Le premier doublé : 8, multiplié par l'autre : 8, est additionné par défaut de position : 96.

Cube exemple p. 7

Ensuite, le carré du dernier aussi est placé par défaut de position. Le carré est produit : 196.
Cela doit être compris de même par la pensée dans tous les exemples. Telle est la troisième méthode.

Le commentateur traite ici le calcul du carré en commençant par la droite, il reprend l'exemple du carré de 14 *déjà traité dans la section du carré :* Cube exemple p. 7

$$\begin{aligned} 4^2 \quad &= \ 16 \\ 2 \times 1 \times 2 &= \ \ 8 \\ 1^2 \quad &= 1 \\ \hline &\ 196 \end{aligned}$$

On pose 9 pour illustrer : *« la quantité triplée est multipliée par ses deux parts. »* Cube exemple p. 7
Le nombre est multiplié par ses deux parts 5 et 4 ; multiplié par l'un, 5 : 45 et multiplié par l'autre, 4 : 180 ; puis triplé : 540.
Les deux cubes de ces deux parts sont 125 et 64 ; la somme des deux est 189. Le nombre triplé est ajouté à ce dernier, le cube est produit : 729. Telle est la quatrième méthode.

Dans cette méthode, on décompose 9 *en* $5 + 4$ *et on applique la formule :* Cube exemple p. 7
$9^3 = (5 + 4) \times 5 \times 4 \times 3 + 5^3 + 4^3$.

On pose 9 pour l'exemple de : *« le cube de la racine carrée. »* Cube exemple p. 7
Celui-ci, parce qu'il est producteur d'une racine carrée, est un nombre carré, sa racine est 3.
Le cube de la racine est 27.
Ce dernier **svaghnaḥ** est multiplié **svena** par lui-même exactement, 27 : 729.
De cette manière, le cube de neuf, qui est un carré, est produit. Telle est la cinquième méthode.

Racine cubique

ādyaṃ ghanasthānam athā ghane dve
punas tathāntyād ghanato viśodhya |
ghanaṃ pṛthaksthaṃ padam asya kṛtyā

trighnyā tadādyaṃ vibhajet phalaṃ tu ||
paṅktyāṃ nyaset tatkṛtim antyanighnīṃ
trighnīṃ tyajet tatprathamāt phalasya |
ghanaṃ tadādyād ghanamūlam evaṃ
paṅktir bhaved evam ataḥ punaś ca ||

Dans une ligne de chiffres qui forment un cube, le premier rang a comme nom « *cube* ». **atha** les deux rangs qui suivent immédiatement ont pour nom « *non-cube* ». Le quatrième est à nouveau premier, soit un rang « *cube* » ; le cinquième et le sixième, deux rangs « *non-cubes* ». Ainsi, des marques doivent être faites pour les chiffres posés selon leur état de « *cube* » et de « *non-cube* ».

Racine cubique p. 7

Parce qu'il y a la mention : « *punas tathā* », on doit déterminer chacun, dans cette ligne, autant qu'elle le permet, jusqu'au dernier. Il y a autant de rangs de chiffres dans la racine qu'il y a de rangs « *cubes* » dénombrés dans cette ligne.

Ensuite, on doit soustraire, autant qu'il est possible, un cube du dernier **ghanataḥ** rang « *cube* ». La racine de ce cube doit être prise.

Ayant placé cette racine à part, **kṛtyā** par le carré triplé de celle-ci, qui n'a pas été détruite, on divisera **tadādyam** : **ādyam** le rang du chiffre qui est le dernier rang « *non-cube* » juste à côté **tad** du rang « *cube* ».

Une fois divisé, il y a destruction du diviseur. On écrira **phalam** le quotient, **tu** à nouveau, **paṅktyām** au début de la racine cubique précédemment obtenue et qui n'a pas été détruite.

tyajet on doit soustraire **tatkṛtim**, **kṛtim** le carré de ce quotient qui n'a pas été détruit, **antyanighnīm** multiplié par celui qui est le dernier dans sa propre ligne[13] et triplé, **tatprathamāt** du premier dont la position est « *non-cube* », premier à partir du chiffre qui a été divisé.

Et enfin, on retranchera du précédent – en fait, la position « *cube* » suivante – le cube de ce quotient précisément. De cette manière, on a la racine cubique.

ataḥ aussi, quand il y a un reste dans la ligne du cube, on aura la ligne de la racine par l'opération appliquée à nouveau, **evam** selon la méthode qui a été dite.

13. C'est-à-dire la série des chiffres de la racine cubique que l'on est en train de constituer à laquelle on vient justement d'ajouter le quotient calculé à l'étape précédente.

Cet algorithme est construit sur l'identité :

Racine cubique p. 7

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

La première opération consiste à découper le nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite ; le nombre de tranches donnera le nombre de chiffres à la racine. Ceci est justifié par le fait que le cube d'un nombre compris entre 0 *et* 9 *est compris entre* 0 *et* 999.

Le procédé est alors le suivant, en prenant le deuxième exemple que propose Bhāskara : 19683.

Comme on peut faire deux tranches, une complète : 683 *et une incomplète :* 19*, la racine comporte deux chiffres, donc :*

$$\begin{aligned} 19683 &= (10d+u)^3 \\ &= 10^3d^3 + 3\times 10^2d^2u + 3\times 10du^2 + u^3 \end{aligned}$$

Et il s'agit de déterminer d *et* u.

On soustrait de 19 *le plus grand cube possible :* 8*, on obtient ainsi* d^3*, la racine cubique a donc pour premier chiffre* 2*. On a alors :*

$$19683 - 8000 = 3\times 10^2d^2u + 3\times 10du^2 + u^3 = 11683$$

116 *représente alors le nombre de centaines produit par* $3\times 10^2d^2u$ *augmenté du nombre de centaines produit par* $3\times 10du^2+u^3$*. Donc, en divisant* 116 *par* $3d^2$*, ici* $3\times 2^2 = 12$*, on obtiendra le chiffre* u *des unités que l'on cherche plus un reste correspondant au nombre de centaines produit par* $3\times 10du^2+u^3$*. Il n'est pas possible de connaître ce reste a priori et il faut essayer des quotients successifs dans la division, le commentateur nous met en garde :* « la division doit être faite en considérant le travail qui reste »*, c'est-à-dire qu'il faut pouvoir encore soustraire* $3\times 10du^2+u^3$*. Ici, le quotient de* 116 *par* 12 *est normalement* 9 *mais il s'avère être trop grand en considérant les soustractions qui restent à faire, il faut prendre* 7*, ce qui revient à écrire :*

$11683 = (12\times 7+32)\times 10^2 + 83 = 3\times 10^2\times 2^2\times 7 + 3\times 10\times 2\times 7^2 + 7^3$

ou, en simplifiant de chaque côté par $3\times 4\times 7\times 10^2$ *:*

$32\times 10^2 + 83 = 3\times 10\times 2\times 7^2 + 7^3$.

La fin de la procédure revient à vérifier qu'en soustrayant $3\times 10\times 2\times 7^2$ *puis* 7^3 *il ne reste rien.*

On pose, en vue de la racine, les cubes précédents : 729, 19 683, 1 953 125.

Racine cubique exemple p. 7

Premier exemple : 729.

Après avoir réfléchi sur les possibilités présentes, étant donné qu'il y a ici un rang *« cube »* et un double rang *« non-cube »*, parce qu'il n'y a pas un rang de plus, la racine de ce nombre a un seul chiffre, et certes pas deux chiffres. La racine est obtenue par ce qui est l'opération inverse pour *« le produit de trois identiques »* exposé dans la formule opératoire du cube : 9.

Deuxième exemple : 19683.
Dans cet exemple, le premier, trois, est un rang *« cube »*, les deux suivants, huit et six, deux rangs *« non-cubes »*. Étant donné que neuf, seul, est à nouveau un rang *« cube »*, parce qu'il y a une impossibilité pour un nouveau rang *« cube »*, le dernier rang *« cube »* est dix-neuf.
Le cube 8 est soustrait, parce que c'est possible, de ce 19, dernier rang *« cube »* ; le reste est 11.
Après avoir posé à part, sans la détruire, sur le lieu des opérations, la racine 2, tirée de ce cube, son carré 4 est triplé : 12.
On divisera six (116), qui précède le rang *« cube »* 11, par ce dernier carré triplé. Mais ici, la division doit être faite en considérant le travail qui reste, c'est pourquoi, 7 est obtenu, le reste est 32.
On doit écrire ce quotient obtenu en alignement du chiffre tiré du cube déjà obtenu : 2.
On ôtera le carré, 49, de ce 7, multiplié par le dernier, 2 : 98 et triplé : 294, **tatprathamāt** du huit (328), le premier à partir du rang divisé ; le reste est 343.
On retirera le cube 343, du quotient 7, du trois placé au rang *« cube »*, qui est le nombre lui-même : 343. De cette manière il y a une soustraction sans reste.
La racine cubique se tient sur la ligne du résultat obtenue : 27.

Voici un tableau résumant les calculs.

Racine cubique exemple p. 7

I	II	III	I
19683 $2^3 = \underline{8}$ 11683	11683 $3 \times 2^2 \times \boxed{7} = \underline{84}$ 3283	3283 $3 \times 2 \times \boxed{7}^2 = \underline{294}$ 343	343 $7^3 = \underline{343}$ 000
2	27	$\sqrt[3]{19683} = 27$	

Dans la colonne I *on soustrait le cube du quotient calculé dans la colonne* II *qui précède ; au début, on soustrait le plus grand cube possible. Dans celle marquée d'un* II*, on divise par trois fois le carré de la racine cubique déjà obtenue ; dans la colonne* III*, on soustrait trois fois le produit de la racine cubique déjà obtenue et du carré du quotient obtenu en* II.

Troisième exemple : 1953125.

Racine cubique exemple p. 7

Il y a ici trois rangs « *cubes* », à savoir : cinq, trois et un ; donc, on doit penser à l'obtention de trois chiffres à la racine.
Soustraction d'un cube du dernier rang « *cube* », 1, d'où, aussi, la racine 1. Après l'avoir posée, sans la détruire, en vue de constituer la série, on divisera son précédent, 9, par son carré triplé : 3 ; le quotient est 2.
Après avoir posé le quotient dans la série : 12, on ôtera le carré, 4, de celui-ci, multiplié par le dernier, 1 : 4, et triplé : 12, **tatprathamāt** de cinq (35) ; le reste est 23.
Après avoir ôté le cube : 8, du quotient 2, **tadādyāt** de trois (233), rang cube médian, le reste est 225 ; la série tirée du cube est produite : 12.
On divisera le précédent, un (2 251), par le carré de cette série : 144, triplé : 432 ; le quotient est 5, le reste 91 et, après avoir posé le quotient dans la série : 125, après avoir soustrait le carré de ce quotient, 25, multiplié par le dernier, 12 : 300 et triplé : 900, **tatprathamāt** de deux (912), le reste est 12.
On ôtera le cube : 125, du quotient 5, de cinq, qui est le nombre lui-même. De cette manière, il y a une soustraction sans reste d'un nombre et la série de la racine est produite : 125.

Voici les calculs du troisième exemple.

Racine cubique exemple p. 7

I	II	III
$1^3 = \begin{array}{r} 1953125 \\ 1 \\ \hline 953125 \end{array}$	$3 \times 1^2 \times \boxed{2} = \begin{array}{r} 953125 \\ 6 \\ \hline 353125 \end{array}$	$3 \times 1 \times \boxed{2}^2 = \begin{array}{r} 353125 \\ 12 \\ \hline 233125 \end{array}$
1	12	
$\boxed{2}^3 = \begin{array}{r} 233125 \\ 8 \\ \hline 225125 \end{array}$	$3 \times 12^2 \times \boxed{5} = \begin{array}{r} 225125 \\ 2160 \\ \hline 9125 \end{array}$	$3 \times 12 \times \boxed{5}^2 = \begin{array}{r} 9125 \\ 900 \\ \hline 125 \end{array}$
	125	
$\boxed{5}^3 = \begin{array}{r} 125 \\ 125 \\ \hline 000 \end{array}$	$\sqrt[3]{1953125} = 125.$	

On doit savoir que le carré et le cube ont un but pour la formation et l'habileté acquise par le disciple, parce qu'ils sont utiles dans les calculs astronomiques et ceux des pierres précieuses.

Racine cubique exemple p. 7

Ainsi est achevé le développement sur les huit opérations dans le commentaire *Gaṇitāmṛtasāgari* composé par l'astrologue Gaṅgādhara sur la *Līlāvatī*, traité de calcul de Bhāskara.

Opérations avec zéro

yoge khaṃ kṣepasamaṃ
vargādau khaṃ khabhājito rāśiḥ |
khaharaḥ syāt khaguṇaḥ khaṃ
khaguṇaś cintyaś ca śeṣavidhau ||
śūnye guṇake jāte
khaṃ hāraḥ cet punas tadā rāśiḥ |
avikṛta eva jñeyas
tathaiva khenonitaś ca yutaḥ ||

Yoge dans une addition avec un nombre, **kham** zéro est égal à l'additif – on appelle additif ce qui est ajouté – zéro est égal à ce nombre. *« Dans le carré, etc. »*, – à cause du « *etc.* » : dans la racine carrée, le cube et la racine cubique – zéro est encore zéro. Opérations avec zéro p. 7

Un nombre divisé par zéro est simplement inchangé, toutefois on doit garder à l'esprit, pour lui, l'appellation « qui a pour diviseur zéro ». Un nombre multiplié par zéro est **kham** zéro exactement. **ca** de nouveau, s'il y a une prescription de reste, un nombre multiplié par zéro, même s'il a atteint la nullité, est simplement inchangé et on doit garder à l'esprit le nom de « nombre qui a pour multiplicateur zéro » ; **cet** si, zéro étant multiplicateur, à nouveau, **kham** zéro lui-même **hāraḥ** est diviseur, un nombre doit être considéré comme simplement inchangé, de même qu'un nombre diminué de zéro et augmenté de zéro **tathaiva** est simplement inchangé.

khaṃ pañcayug bhavati kiṃ vada khasya vargaṃ
mūlaṃ ghanaṃ ghanapadaṃ khaguṇāś ca pañca |
khenoddhṛtā daśa ca kaḥ khaguṇo nijārdha-
yuktas tribhiś ca guṇitaḥ khahṛtas triṣaṣṭiḥ ||

Kham zéro ajouté à cinq, combien cela fait-il ? Dis-le. Dis le carré de zéro. Dis la racine carrée. Dis le cube. Dis la racine cubique. Cinq multiplié par zéro, combien cela fait-il ? Dis-le. Et dis dix divisé par zéro. De même, le nombre qui, multiplié par zéro, ajouté à sa propre moitié puis multiplié par trois et divisé par zéro produit soixante-trois, 63, quel est ce nombre ? Il y a une question pour toutes les opérations au moyen d'exemples. Opérations avec zéro exemple p. 8

On pose : 0.
Zéro ajouté à cinq est égal à l'additif 5 : 5 est produit.
Le carré de zéro est zéro exactement : 0 et la racine carrée de ce dernier est zéro : 0.
Le cube de zéro est zéro exactement : 0 et sa racine cubique est zéro exactement : 0.
Ce même cinq, multiplié par zéro est zéro exactement : 0. Maintenant dix divisé par zéro est simplement dix et son nom est : « dix qui a pour diviseur zéro ».

Maintenant, un nombre inconnu, son multiplicateur est zéro, on doit ajouter sa propre moitié, le multiplicateur est trois, le diviseur zéro et la donnée est soixante-trois, c'est pourquoi le calcul est fait selon la règle d'inversion qui sera dite : « *un diviseur doit être fait multiplicateur, un multiplicateur, diviseur, etc.* ».

Donnée : 63.
En fonction du diviseur, le multiplicateur est 0. Il ne faut pas oublier qu'on a « un nombre qui a pour multiplicateur zéro ». En raison de la multiplication par trois, il est divisé par trois : 21.
Le tiers exactement du nombre qui a dû être additionné avec sa propre moitié est la propre moitié du nombre : une diminution de ce tiers : 14.
Pour effectuer la diminution d'un tiers, il y a une règle qui sera dite : « *s'il y a augmentation ou diminution d'une partie aliquote* ».
L'unité avec sa moitié $\begin{array}{|c|c|}1 & 1\\ 1 & 2\\ \hline\end{array}$, sont réduites au même dénominateur : $\begin{array}{|c|c|}2 & 1\\ 2 & 2\\ \hline\end{array}$ et additionnées : $\begin{array}{|c|}3\\ 2\\ \hline\end{array}$; on divise par ceci. Ayant divisé ce qui a dû être multiplié, après avoir interverti le dénominateur et le numérateur, le quotient est 14 précisément.
Parce que c'est « un nombre qui a pour multiplicateur zéro », il faut le diviser par zéro : il est simplement inchangé en raison de : « *zéro ayant été produit en tant que multiplicateur, si à nouveau zéro est diviseur...* » Le nombre est produit : 14.

Ou encore, calcul par l'opération de supposition : le nombre choisi est 4.

On ne doit pas oublier qu'on a « un nombre qui a pour multiplicateur zéro ». Il est ajouté à sa propre moitié, 2 : 6, multiplié par trois : 18. Divisé par zéro, il est simplement inchangé, 18 est produit.
Maintenant l'achèvement de l'opération de supposition est fait à partir de la règle de proportion qui sera dite : « si l'origine de dix-huit est quatre, quelle sera alors l'origine de soixante-trois ? » Après avoir posé quatre multiplié par soixante-trois : 252, ayant divisé par dix-huit, le même quatorze, 14, est obtenu.

Il y a une grande utilité pour les propriétés de zéro, de même pour les propriétés des opérations inverses et pour les propriétés des opérations de supposition dans les calculs astronomiques, c'est pourquoi cette section fait savoir que cela doit être bien étudié.

Les seules difficultés de cette présentation des calculs faisant intervenir zéro concernent la multiplication et la division.

Opérations avec zéro p. 7

Pour la multiplication, le résultat est clair : c'est zéro, avec, toutefois, une réserve s'il y a des calculs qui doivent suivre : on doit, dans ce cas, garder le nombre tel quel et conserver en tête qu'il y a eu multiplication par zéro. Voici comment le commentateur Gaṇeśa démontre que la multiplication par zéro doit avoir pour résultat zéro :

« Dix, multiplié par trois, fait trente. Dix, multiplié par ce trois diminué de un, fait vingt exactement. Dix, multiplié par ce trois diminué de un, lui-même diminué de un, fait dix exactement. Dix, multiplié par ce trois diminué de un, lui-même diminué de un lui-même diminué de un, doit faire zéro, parce qu'un multiplicande, quand il est multiplié par un multiplicateur qui a été diminué de un, est diminué précisément d'un nombre égal au multiplicande. C'est pourquoi il est dit qu'un nombre multiplié par zéro est zéro. »

La possibilité de diviser par zéro est envisagée. La règle nous dit qu'un nombre divisé par zéro porte alors le nom de kha-haraḥ (ce qui a pour diviseur zéro) *et l'exemple nous montre que cela dépend aussi de l'ensemble des calculs au cours desquels on a pu rencontrer une multiplication ou une division par zéro.*

On peut résumer ainsi la conduite d'un calcul avec des multiplications ou des divisions par zéro : si un nombre est multiplié (divisé) par zéro, on le garde tel quel et, si par la suite, on a à diviser (multiplier) par zéro, alors la nouvelle opération annule la précédente.

Le commentaire de Gaṇeśa sur cette même règle de la Līlāvatī *est plus explicite :*

« Une opération de reste étant à faire, on ne doit pas oublier qu'il est « celui dont le multiplicateur est zéro ». Par exemple, zéro étant obtenu comme multiplicateur d'un nombre, s'il y a une autre opération pour ce nombre, alors, « un nombre multiplié par zéro sera zéro » ne doit pas être appliqué. Néanmoins, zéro doit être placé à côté de lui à la place du multiplicateur. Ensuite, une opération de reste étant effectuée, si, zéro, à nouveau, est diviseur, alors la destruction des deux, le multiplicateur zéro et le diviseur zéro, doit être accomplie en raison de leur égalité. S'il n'y a pas de diviseur zéro, alors l'auteur dit : le nombre multiplié par zéro sera zéro : « zéro étant produit comme multiplicateur, etc. »

Il reste à savoir dans quelles circonstances on rencontre des divisions par zéro... L'exemple donné, où il faut trouver un nombre qui donne soixante-trois après diverses opérations, dont une division par zéro, ne peut nous renseigner, il faut peut-être y voir une tentative pour intégrer zéro dans le système des nombres. Un des mots sanskrits pour désigner zéro est śūnyam *: le vide, la place vacante dans l'écriture des nombres, quand un chiffre manque à un certain rang, et Sūryadāsa dans le commentaire sur le* Bījagaṇita *de Bhāskara dit que zéro n'est pas un nombre par lui-même.*

Dans le Bījagaṇita *Bhāskara nous dit qu'un nombre divisé par zéro est* an-antaḥ *(sans limite), et que, dans ces circonstances, ajouter ou retrancher un nombre à une telle quantité ne la modifie pas. Ce qui tend à montrer qu'à son époque, et sans doute antérieurement, en Inde, on avait l'expérience de la division par de très petits nombres et une idée de la notion d'infini.*

Voici le détail des calculs de l'exemple. En appelant x le nombre à trouver, l'équation est la suivante :

$$\frac{\left(x \times 0 + \frac{x \times 0}{2}\right) \times 3}{0} = 63$$

Gaṅgādhara nous donne deux solutions, qui utilisent des règles énoncées dans les sections de la Līlāvatī *qui suivent ce chapitre sur zéro.*

La première méthode utilise la « règle d'inversion. Celle-ci consiste à remonter à l'envers les calculs décrits, en remplaçant chaque opération mentionnée par son opération inverse, jusqu'à ce qu'on arrive à l'inconnue : « Dans le cas d'une donnée, pour calculer le nombre demandé, un diviseur doit être fait multiplicateur ; un multiplicateur, diviseur ; un carré, racine ; une racine, carré ; un négatif, positif ; un positif, négatif. Dans le cas d'une augmentation ou d'une diminution d'une partie aliquote, le dénominateur augmenté ou diminué du numérateur doit être fait dénominateur, le numérateur, lui, est inchangé et la suite est comme cela est exposé dans cette règle d'inversion. »

La dernière opération mentionnée étant la division par zéro, il faut commencer par multiplier par zéro ; conformément à la règle de multiplication par zéro, on conserve donc 63 en lui donnant le nom de « 63 qui a pour multiplicateur zéro » $(63$-khaguṇaḥ), on obtient donc :

$\left(x \times 0 + \frac{x \times 0}{2}\right) \times 3 = 63$-*khaguṇaḥ*

Puis, on divise par 3 :

$x \times 0 + \frac{x \times 0}{2} = 21$-*khaguṇaḥ*

Ensuite, comme notre nombre inconnu a été augmenté de sa moitié, le commentateur nous explique que l'opération inverse est une diminution d'un tiers et nous en donne même la raison d'un autre point de vue : augmenter de la moitié consistant à multiplier par $\frac{3}{2}$, il faut donc diviser par $\frac{3}{2}$.

$x \times 0 = 21$-*khaguṇaḥ*-7-*khaguṇaḥ* $= 14$-*khaguṇaḥ*

Enfin, comme la première opération effectuée était une multiplication par zéro, il faut diviser par zéro et, comme on a un « khaguṇaḥ », le 14 *obtenu est inchangé et la solution du problème est donc* 14*.*

La deuxième méthode utilise l'opération de supposition, celle-ci consiste à effectuer tous les calculs avec un nombre arbitraire à la place de l'inconnue et à calculer celle-ci avec une règle de trois : « Un nombre choisi à plaisir est multiplié, divisé, augmenté ou diminué de parts, comme formulé dans l'énoncé du problème. La donnée multipliée par le nombre choisi et divisée par ce résultat est le nombre cherché. »

Le nombre arbitraire choisi est 4*. On le multiplie par zéro et, comme il reste des opérations à effectuer, on le conserve en lui donnant le nom « 4-khaguṇaḥ ».*

Puis on ajoute sa moitié, 2*, on obtient* 6 *que l'on multiplie par* 3*. Le résultat,* 18*, doit être alors divisé par zéro, mais comme à l'origine on a multiplié par zéro, cette opération est annulée et le résultat est donc* 18*.*

Il reste à achever le calcul par la règle de trois : si 4 *produit* 18 *à la suite de ces calculs, cela veut dire que* 4 *et* x*, d'une part, et* 18 *et* 63*, d'autre part, sont dans le même rapport de proportion :* $\frac{4}{x} = \frac{18}{63}$.

Donc : $x = \frac{4 \times 63}{18} = 14.$

Règle d'inversion

chedaṃ guṇaṃ guṇaṃ chedaṃ
vargaṃ mūlaṃ padaṃ kṛtim |
ṛṇaṃ svaṃ svam ṛṇaṃ kuryād
dṛśye rāśiprasiddhaye ||
atha svāṃśādhikone tu
lavāḍhyono haro haraḥ |
aṃśas tv avikṛtas tatra
vilome śeṣam uktavat ||

Ceci est la règle du calcul inverse qui, **dṛśye** un nombre étant donné, **prasiddhyartham** vise à connaître la quantité d'origine ; ce qui est énoncé **chedam** comme division, cela doit être effectué **guṇam** comme multiplication et ce qui est énoncé **guṇam** comme multiplication, cela doit être effectué comme division. Chaque fois qu'il y a un carré on prendra la racine, une racine, on prendra son carré. De même, **ṛṇam** ce qui est soustraction doit être fait **svam** addition et ce qui est avoir doit être fait dette. **atha** et, un nombre auquel on a ajouté ou ôté une partie propre étant donné, **haraḥ** le dénominateur étant augmenté ou diminué du numérateur est le dénominateur ; dans le cas d'une partie propre ajoutée, le dénominateur additionné avec cette partie est le dénominateur correct ; dans le cas d'une

Règle d'inversion p. 8

partie propre retranchée, le dénominateur diminué de cette partie, est le dénominateur correct. **aṃśas tv avikṛtaḥ** ; naturellement, on n'augmentera ni ne diminuera le numérateur de cette partie comme on augmente ou diminue du numérateur le dénominateur.

> **yas trighnas tribhir anvitaḥ svacaraṇair bhaktas tataḥ saptabhiḥ**
> **svatryaṃśena vivarjitaḥ svaguṇito hīno dvipañcāśatā |**
> **tanmūle 'ṣṭayute hṛte ca daśabhir jātaṃ dvayaṃ brūhi taṃ**
> **rāśiṃ vetsi hi cañcalākṣi vimalāṃ bāle vilomakriyām ||**

Règle d'inversion exemple p. 8

Yaḥ une certaine quantité **trighnaḥ** multipliée par trois est ensuite ajoutée à trois de ses propres quarts, puis divisée par sept ; le quotient est diminué de son propre tiers, le reste est ensuite **svaguṇitaḥ** élevé au carré puis diminué de cinquante-deux ; ensuite, la racine de ce dernier reste est ajoutée à huit et divisé par dix, le quotient est deux.

Ô mon enfant au regard changeant alors réponds : si tu connais l'opération d'inversion qui est sans défaut, après avoir examiné ce deux ainsi produit, dis la quantité d'origine au moyen de la règle de la formule susdite.

On pose : multiplicateur : 3 ; partie aliquote : $\begin{array}{|c|}3\\4\end{array}$; diviseur : 7 ; partie aliquote à dette : $\begin{array}{|c|}1\\3\end{array}$; carré ; en moins : 52 ; racine ; ajouté : 8 ; diviseur : 10 ; donnée : 2.

Opérations inverses pour cette donnée :
« *Du diviseur* 10 *un multiplicateur* » : 20.
Ajoutée à huit : diminuée de ce huit : 12.
S'il y a une racine, le carré : 144.
Adjonction de la quantité retranchée, 52 : 196.
Dans le cas d'un carré, la racine : 14.
S'il y a une partie propre à dette, le dénominateur doit être diminué du numérateur. Pour diminuer du numérateur, on pose : $\begin{array}{|c|c|}1&1\\1&3\end{array}$; après avoir réduit au même dénominateur : $\begin{array}{|c|c|}3&1\\3&3\end{array}$, la partie propre est ôtée : $\begin{array}{|c|}2\\3\end{array}$

Avec ce dernier résultat, après avoir posé l'unité comme dénominateur dans ce qui a été obtenu 14 — parce qu'il n'y a pas de dénominateur —, on doit appliquer la règle de division des fractions : multiplié par le dénominateur : 42, puis divisé par le numérateur, 21 est obtenu.
Parce qu'il y a eu division par sept, on doit multiplier par celui-ci : 147.
Parce qu'il y a eu addition à trois de ses propres quarts, c'est un avoir. Pour réduire au même dénominateur, on pose : $\begin{array}{|c|c|}1 & 3 \\ 1 & 4 \\ \hline\end{array}$; mêmes dénominateurs : $\begin{array}{|c|c|}4 & 3 \\ 4 & 4 \\ \hline\end{array}$ et additions des numérateurs : $\begin{array}{|c|}7 \\ 4 \\ \hline\end{array}$
En une opération semblable à la division des fractions avec cette dernière, le produit par quatre, 588, est divisé par sept : 84 ; si on divise par trois, parce qu'il y a eu multiplication par trois, la quantité d'origine que l'on attend est obtenue : 28.

En notant par x la quantité cherchée, la suite des opérations décrites est la suivante :

Règle d'inversion exemple p. 8

$$\left[\sqrt{\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]\right]^2-52}+8\right]\frac{1}{10}=2$$

La règle d'inversion prescrit d'effectuer l'inverse de chacune des opération ; elle ne précise pas qu'il faut commencer par la dernière opération donnée, mais le commentateur le fait. On obtient donc la succession d'opérations suivantes (on a mis en valeur l'opération en utilisant des caractères gras) :

— *Pour la division par* 10*, on multiplie la donnée par* 10 *:*

$$\sqrt{\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]\right]^2-52}+8=\mathbf{2\times 10=20}$$

— *Parce qu'on a ajouté* 8*, on retranche* 8 *:*

$$\sqrt{\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]\right]^2-52}=\mathbf{20-8=12}$$

— *Pour supprimer la racine, on élève au carré :*

$$\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]\right]^2-52=\mathbf{12^2=144}$$

— *Parce qu'on a retranché* 52*, on ajoute* 52 *:*

$$\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]\right]^2=\mathbf{144+52=196}$$

— *Pour annuler l'élévation au carré, on prend la racine :*

$$\sqrt{\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]\right]^2}=\sqrt{\mathbf{196}}=\mathbf{14}$$

Ici, le commentateur raccourcit la méthode du sūtra *: on part de l'égalité suivante, que l'on vient d'obtenir :*

$$\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]=14$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]=14$$

Il suffit de calculer $1-\dfrac{1}{3}$*, par réduction au même dénominateur :*

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\left[\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}\right]=14$$

et d'utiliser la division des fractions pour trouver :

$$\left(3x+\frac{3}{4}3x\right)\frac{1}{7}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{14}=\mathbf{21}$$

(voir à la fin de cette explication, la méthode prescrite par la règle de Bhāskara).

L'opération suivante suit la méthode du sūtra *: on multiplie par* 7 *:*

$$3x+\frac{3}{4}3x=\mathbf{7}\times\mathbf{21}=\mathbf{147}$$

Gaṅgādhara raccourcit à nouveau la procédure en utilisant une réduction au même dénominateur et la division des fractions :

$$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)3x=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}3x=147$$

$$3x=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\mathbf{147}=84$$

Il suffit maintenant de diviser par 3 *:*

$x=28.$

La méthode de la règle en cas « d'augmentation ou de diminution d'une partie propre » *est la suivante : supposons que l'on veuille trouver la valeur de la quantité* X*, quand on connaît la valeur de* X *augmentée de son tiers ; on a donc l'égalité suivante :*

$$X+\frac{1}{3}X=Y$$

Bhāskara nous dit : « le diviseur sera le diviseur augmenté du numérateur, quant au numérateur il sera inchangé » *; il faut donc calculer, à partir de la donnée* Y *:*

$$\frac{1}{3+1}Y=\frac{1}{4}Y$$

Puis il ajoute : « le reste est comme dit dans cette règle d'inversion » *; il faut donc comprendre que, puisque* X *a été augmentée d'une fraction d'elle-même, on doit diminuer la donnée* Y *de cette fraction d'elle-même que l'on vient de calculer :*

$X = Y - \frac{1}{4}Y.$

Le calcul suivant en donne la justification :

$$X + \frac{1}{3}X = \left(1 + \frac{1}{3}\right)X = \frac{3+1}{3}X = Y$$

et donc :

$$X = \frac{3}{3+1}Y = \frac{4Y - Y}{4} = Y - \frac{1}{4}Y.$$

Règle de supposition

uddeśakālāpavad iṣṭarāśiḥ
kṣuṇṇo hṛto 'ṃśai rahito yuto vā |
iṣṭāhataṃ dṛṣṭam anena bhaktaṃ
rāśir bhavet proktam itīṣṭakarma ||

Vā ou bien. **Iṣṭarāśiḥ** après avoir fixé dans son esprit une quantité, **uddeśakālāpavat — uddeśakaḥ** ce qui est opérant **ālāpaḥ** et énoncé dans la formule — c'est ainsi que l'on doit traiter la quantité choisie ; s'il y a un multiplicande, elle est simplement multiplicande dans cette opération, s'il y a formulation d'une division, elle doit être divisée ; si elle est augmentée **aṃśaiḥ** de parties, ou si elle est diminuée de parties, elle doit être augmentée et diminuée ; elle doit être traitée ainsi : comme cela est énoncé. Ensuite, la quantité donnée en étant divisée **anena** par ce qui a été calculé auparavant, après avoir été multiplié par la quantité choisie, sera **rāśiḥ** la vraie quantité d'origine. Le procédé de supposition **proktam** doit être connu ainsi. Règle de supposition p. 9

pañcaghnaḥ svatribhāgono
daśabhaktaḥ samanvitaḥ |
rāśitryaṃśārdhapādaiḥ syāt
ko rāśir dvyūnasaptatiḥ ||

Quelle est cette quantité qui, multipliée par cinq, diminuée de son propre tiers, ensuite divisée par dix, puis, étant augmentée du tiers, de la moitié et du quart **rāśeḥ** de la quantité d'origine, produit soixante-dix diminué de deux ? Telle est la question. Quelle sera la quantité qui… p. 9

On pose : multiplicateur : 5 ; son propre tiers en moins : $\begin{array}{|c|} 1 \\ 3 \\ \hline \end{array}$; diviseur :

10 ; parts de la quantité ajoutées : $\begin{array}{|c|c|c|} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$; donnée : 68.

Ici, la quantité arbitraire fixée en esprit est 3. Pour celle-ci, l'énoncé du problème est : *« multipliée par cinq, etc. »* ; le calcul doit être fait de cette manière.

La quantité choisie, 3, est multipliée par cinq : 15 ; diminué de son propre tiers, 5 : 10 ; divisé par dix, 1 est obtenu.

Ce dernier est augmenté des tiers, moitié et quart de la quantité choisie, 3 : $\begin{array}{|c|c|c|} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$, le premier encadrement étant divisé par le dénominateur, les fractions obtenues : $\begin{array}{|c|c|c|} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$, après réduction au même dénominateur : $\begin{array}{|c|c|c|} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$, sont additionnées : $\begin{array}{|c|} 13 \\ 4 \\ \hline \end{array}$

Ce qui a été divisé par dix, précédemment mentionné, est ajouté à ces parts : $\begin{array}{|c|c|} 1 & 13 \\ 1 & 4 \\ \hline \end{array}$; réduites au même dénominateur : $\begin{array}{|c|c|} 4 & 13 \\ 4 & 4 \\ \hline \end{array}$, et additionnées : $\begin{array}{|c|} 17 \\ 4 \\ \hline \end{array}$, la quantité $\begin{array}{|c|} 17 \\ 4 \\ \hline \end{array}$ est ainsi obtenue.

Alors, la donnée, 68, est multipliée par la quantité choisie, 3, le produit 204 est divisé **anena** par ce qui a été précédemment calculé. Après avoir posé, avec une inversion du numérateur et du dénominateur : $\begin{array}{|c|c|} 4 & 204 \\ 17 & 1 \\ \hline \end{array}$, il est produit $\begin{array}{|c|} 816 \\ 17 \\ \hline \end{array}$; en divisant par le dénominateur, le quotient est 48.

Ceci est la quantité attendue.

La méthode de résolution d'une équation, qui est proposée ici, consiste à effectuer la succession des calculs de l'équation avec un nombre arbitrairement choisi ; on trouve alors la solution de l'équation en utilisant le fait que le résultat trouvé avec le nombre arbitraire est proportionnel au résultat obtenu avec le nombre inconnu que l'on cherche. Dans l'exemple donné, à la suite de la règle, le commentateur choisi 3 *comme nombre*

Quelle sera la quantité qui… p. 9

arbitraire et trouve 48 à la suite des opérations ; comme la donnée du problème est 68, on a, si on note x l'inconnue de l'équation : $\frac{x}{3} = \frac{68}{48}$.

Il est alors facile de déterminer x : « la donnée, multipliée par la quantité arbitraire et divisée par ce dernier résultat sera la quantité cherchée ».

L'équation proposée dans l'exemple est celle-ci :

$$\frac{1}{10}\left(5x - \frac{5x}{3}\right) + \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 68$$

La solution apportée par Gaṅgādhara utilise comme nombre arbitraire 3 ; il exécute tout d'abord, pas à pas la première partie des calculs :

$$5 \times 3 = 15$$

$$15 - \frac{5 \times 3}{3} = 10$$

$$\frac{10}{10} = 1$$

Puis il additionne les trois fractions après les avoir multipliées par 3 :

$$\frac{3}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

Il additionne ce résultat au résultat de la première partie des calculs :

$$\frac{13}{4} + 1 = \frac{17}{4}$$

et termine en effectuant la règle de trois : $x = \frac{3 \times 68}{17} = 48.$

amalakamalarāśeḥ tryaṃśapañcāṃśaṣaṣṭaiḥ
trinayanaharisūryā yena turyeṇa cāryā |
gurupadam atha ṣaḍbhiḥ pūjitaṃ śeṣapadmaiḥ
sakalakamalasaṃkhyaṃ kṣipram ākhyāhi tasya ||

Ô mon ami ! Le dieu à l'œil triple est honoré avec le tiers de ce qui est **rāśiḥ** un bouquet de lotus immaculés, Hari est honoré avec le cinquième, Sūrya avec le sixième, **yena** par un dévot, et **Āryā** : Ambikā, la divinité de la parole, est honorée **turyeṇa** avec le quart de ce bouquet de lotus. Il reste six lotus de ce bouquet distribué de cette manière, part après part. Avec ces six lotus formant le reste – qui sont la donnée d'après le décompte – les pieds du maître ont été honorés. Connaissant cette donnée-là **ākhyāhi** dis, correctement et **kṣipram** avec célérité, le compte de la totalité des lotus **tasya** du bouquet.

Dis rapidement le compte de la totalité des lotus … p. 9

On pose :

1	1	1	1
3	5	6	4

; la donnée, 6, avec ces fractions, est l'expression de la question dans ce problème.

Après avoir imaginé 1, cette quantité est diminuée de ces fractions réduites au même dénominateur : $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ \hline \end{array}$, celle-ci est diminuée de ces fractions.
Des dénominateurs identiques sont produits par les opérations de réduction, telles qu'elles ont été enseignées : $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} 60 & 20 & 12 & 10 & 15 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 60 \\ \hline \end{array}$
La somme des quantités en moins est $\begin{array}{|c|} 57 \\ 60 \\ \hline \end{array}$. Après l'avoir soustrait de la quantité arbitraire, $\begin{array}{|c|} 60 \\ 60 \\ \hline \end{array}$, le reste est $\begin{array}{|c|} 3 \\ 60 \\ \hline \end{array}$
Puis, la donnée 6 est multipliée par la quantité arbitraire, 1 : 6 et divisée **anena** par le résultat obtenu avec la quantité arbitraire, $\begin{array}{|c|} 3 \\ 60 \\ \hline \end{array}$, c'est-à-dire multipliée après avoir interverti dénominateur et numérateur, $\begin{array}{|c|c|} 60 & 6 \\ 3 & 1 \\ \hline \end{array}$:

$$\begin{array}{|c|} 360 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

La division une fois effectuée, le compte de la totalité des lotus est produit : 120.

Le compte des fleurs du bouquet étant désigné par x, quand on lui retire les différentes parts dont on a honoré les divinités, il reste six lotus ; donc :

Dis rapidement le compte de la totalité des lotus … p. 9

$$x - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})x = 6$$

Gaṅgādhara choisit 1 comme quantité arbitraire ; on a donc :

$$1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = 1 - \frac{57}{60} = \frac{3}{60}$$

Il reste à appliquer la règle : $x = \dfrac{6 \times 1}{\frac{3}{60}} = \dfrac{360}{3} = 120.$

pañcāṃśo ’likulāt kadambam agamat tryaṃśaḥ śilīndhraṃ tayor
viśleṣas triguṇo mṛgākṣi kuṭajaṃ dolāyamāno ’paraḥ |
kānte ketakimālatīparimalaprāptaikakālaḥ priyā–
dūtāhūta itas tato bhramati khe bhṛṅgo ’lisaṃkhyāṃ vada ||

Le cinquième d'un essaim d'abeilles … p. 9

Un essaim d'abeilles : **alikulam** (comp. *ṣaṣṭhī tatpuruṣa*), une multitude d'abeilles. De cet essaim, la cinquième partie est allée sur un *kadamba* couvert de fleurs et, de cette multitude, **tryaṃśaḥ** le tiers est allé sur un *śilīndhra*, sorte d'herbe qui ressemble à la *māṃsī* dont les pousses sont caractérisées par leur parfum. Une autre part, autant que la différence **tayoḥ** du cinquième et du tiers et autant que cette différence multipliée par trois, **dolāyamānaḥ** se balançant, est allée sur un *kuṭaja* dont les fleurs étaient épanouies. De cette multitude, une seule abeille — indiquée par le singulier — se trouve dans un état tel que, pour elle, un même instant l'a amenée dans le parfum d'une *ketakī* et d'une *mālatī* (comp. *bahuvrīhi*) et, de plus, appelée par un messager de sa bien-aimée en proie au dépit, elle tournoie **khe** dans les airs **itas tataḥ** incertaine quant à son devoir.

Ô ma chérie ! Ayant considéré comme la donnée cette unique abeille, dis le compte des abeilles qui se trouvent dans cet essaim.

En ces termes, le poète peignant tous les signes de la venue de la pluie et disant l'appel de l'envoyé de la bien-aimée, décrit la fin de l'été pour la terre et pour les couple séparés.

On pose : $\begin{array}{|c|c|c|} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$, donnée 1. Ici, les deux cinquièmes sont la différence des deux parties dites auparavant : $\begin{array}{|c|} 2 \\ 15 \\ \hline \end{array}$, multipliée par trois. Au même dénominateur : $\begin{array}{|c|c|c|} 3 & 5 & 6 \\ 15 & 15 & 15 \\ \hline \end{array}$, la somme est $\begin{array}{|c|} 14 \\ 15 \\ \hline \end{array}$ Le nombre arbitraire est 1. Après avoir réduit au même dénominateur : $\begin{array}{|c|c|} 14 & 15 \\ 15 & 15 \\ \hline \end{array}$, et une fois la soustraction des fractions effectuée, il reste $\begin{array}{|c|} 1 \\ 15 \\ \hline \end{array}$ La donnée 1 est multipliée par le nombre arbitraire 1 ; une fois effectuée, comme auparavant, la division par ce dernier résultat le compte des abeilles dans l'essaim est produit : 15.

Si x est le nombre d'abeilles dans l'essaim, alors :

Le cinquième d'un essaim d'abeilles … p. 9

$$x = \frac{1}{5}x + \frac{1}{3} + 3(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x) + 1$$

Dans cet exemple le commentateur n'effectue pas les opérations pas à pas, mais choisit d'effectuer les opérations sur les fractions avant de chercher à résoudre le problème, ce qui revient à mettre x en facteur dans l'expression ci-dessus.
Il effectue d'abord : $3(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$, *puis :* $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$.

Puis il donne à x le valeur arbitraire 1 : $x - \frac{14}{15}x = 1 - \frac{14}{15} = \frac{15}{15} - \frac{14}{15} = \frac{1}{15}$.
Enfin il applique la règle : « la donnée, multipliée par la quantité arbitraire et divisée par ce dernier résultat sera la quantité cherchée » *:* $\dfrac{1 \times 1}{\frac{1}{15}} = 15$

svārdhaṃ prādāt prayāge navalavayugalaṃ yo 'vaśeṣāc ca kāśyāṃ
śeṣāṅghriṃ śulkahetoḥ pathi daśamalavān ṣaṭ ca śeṣād gayāyām |
śiṣṭā niṣkatriṣaṣṭir nijagṛham anayā tīrthapānthaḥ prayātas
tasya dravyapramāṇaṃ vada yadi bhavatā śeṣajātiḥ śrutāsti ||

Un certain pèlerin s'en est allé en pèlerinage en ayant pris beaucoup d'argent et il a donné la moitié de sa richesse à Prayāga ; il a donné deux neuvièmes de la moitié restante à Kāśī puis, il a donné **aṅghrim** le quart du reste pour des taxes **pathi** sur le chemin ; enfin, il a donné six dixièmes du reste à Gayā. Ayant ainsi dépensé, soixante-trois *niṣka* du montant de son viatique restent. Le pèlerin **prayātaḥ** a regagné sa maison natale **anayā** avec ces soixante-trois *niṣka* qui restent. Dis le montant de sa fortune **yadi tvayā śeṣajātiḥ śrutāsti** si tu le sais ; tel est le sens.

Si ta grandeur s'y entend en *śeṣajātiḥ*… p. 9

après avoir fixé l'unité 1 comme quantité arbitraire, sa moitié est $\begin{array}{|c|}1\\2\\\hline\end{array}$; une fois ôtée de l'unité, après réduction au même dénominateur, le reste est $\begin{array}{|c|}1\\2\\\hline\end{array}$

Séparément, les deux neuvièmes $\begin{array}{|c|}2\\9\\\hline\end{array}$ sont multipliés par le reste $\begin{array}{|c|}1\\2\\\hline\end{array}$, selon la règle de la *prabhāgajāti*, $\begin{array}{|c|}2\\18\\\hline\end{array}$, puis, simplifiés par moitié : $\begin{array}{|c|}1\\9\\\hline\end{array}$, et soustrait du reste précédent $\frac{1}{2}$, après réduction au même dénominateur, il reste : $\frac{7}{18}$

À nouveau, comme précédemment, ce reste est à son tour multiplié par un quart, $\frac{1}{4}$: $\frac{7}{72}$, soustrait du reste précédent $\frac{7}{18}$, le reste est $\frac{21}{72}$, simplifié par trois : $\frac{7}{24}$

À nouveau, les six dixièmes $\frac{6}{10}$ sont à leur tour multipliés par ce dernier reste, $\frac{42}{240}$ est produit. Cela est simplifié par six, $\frac{7}{40}$ est produit ; après avoir soustrait du reste précédent, $\frac{7}{24}$, le reste $\frac{28}{240}$ est simplifié par quatre : $\frac{7}{60}$

Telle est la méthode selon les données du problème. Après avoir ôté ces parties de la quantité arbitraire, ce $\frac{7}{60}$ est produit ; la donnée 63 est multipliée par la quantité choisie et divisée par ce dernier résultat, le quotient est ce même montant de richesse : 540.

Le produit des dénominateurs qui sont diminués **lavaiḥ** des numérateurs, tel est sa nature ; une multiplication mutuelle **ghataḥ** des dénominateurs : **chidghataḥ** (comp. *ṣaṣṭhītatpuruṣa*).

La quantité donnée… p. 10

– Par quoi la quantité **prakaṭākhyaḥ** donnée doit-elle être multipliée ?
– Par le produit des dénominateurs diminués des numérateurs.
– De quelle nature est ce dernier produit ?

– Divisé par le produit des dénominateurs.

On pose : $\begin{array}{|c|c|c|c|} \dot{1} & \dot{2} & \dot{1} & \dot{6} \\ 2 & 9 & 4 & 10 \\ \hline \end{array}$, donnée 63.

Règle alternative p. 10

Le produit des dénominateurs **chidghataḥ**, ceci est le diviseur : 720.
Les dénominateurs privés des numérateurs sont : 1, 7, 3, 4 ; leur produit, 84, est le dividende.
On pose : $\begin{array}{|c|} 84 \\ 720 \\ \hline \end{array}$ Il y a une simplification par douze : $\begin{array}{|c|} 7 \\ 60 \\ \hline \end{array}$, **prakaṭarāśiḥ**

la donnée $\begin{array}{|c|} 63 \\ 1 \\ \hline \end{array}$ doit être divisée par ce dernier résultat.

Après avoir interverti dénominateur et numérateur, on pose : $\begin{array}{|c|c|} 60 & 63 \\ 7 & 1 \\ \hline \end{array}$;

la multiplication étant effectuée, $\begin{array}{|c|} 3780 \\ 7 \\ \hline \end{array}$ est produit ; une fois la division faite, le quotient est le montant de la fortune : 540 *niṣka* d'or.

Si on note x le montant du viatique avant le départ, on a la succession d'opérations suivante : à Prayāga, le pèlerin dépense la moitié de sa fortune, il reste donc :

Règle alternative p. 10

$$r_1 = x - \frac{1}{2}x$$

À Kāśī, il offre les deux neuvièmes de ce qui lui reste, le nouveau reste est donc :

$$r_2 = r_1 - \frac{2}{9}r_1 = x - \frac{1}{2}x - \frac{2}{9}\big(x - \frac{1}{2}x\big)$$

Pour les octrois, il dépense un quart de ce qui lui reste, il arrive donc à Gayā avec :

$$r_3 = r_2 - \frac{1}{4}r_2 = x - \frac{1}{2}x - \frac{2}{9}\big(x - \frac{1}{2}x\big) - \frac{1}{4}\big[x - \frac{1}{2}x - \frac{2}{9}\big(x - \frac{1}{2}x\big)\big]$$

Et comme il en dépense encore les six dixièmes, il rentre chez lui avec :

$$\begin{aligned} r = r_3 - \frac{6}{10}r_3 = x - \frac{1}{2}x - \frac{2}{9}\big(x - \frac{1}{2}x\big) - \frac{1}{4}\big[x - \frac{1}{2}x - \frac{2}{9}\big(x - \frac{1}{2}x\big)\big] \\ - \frac{6}{10}\big[x - \frac{1}{2}x - \frac{2}{9}\big(x - \frac{1}{2}x\big) - \frac{1}{4}\big[x - \frac{1}{2}x - \frac{2}{9}\big(x - \frac{1}{2}x\big)\big]\big] \end{aligned}$$

Pour comprendre la première méthode utilisée pour résoudre ce problème, il faut ne considérer que la suite des opérations sur les fractions, le montant initial – désigné ici par x – ne jouant aucun rôle dans le calcul : ce qui importe vraiment c'est de connaître quelle part de ce montant représente le reste :

$$\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{2}{9}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})-\frac{1}{4}[\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{2}{9}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})] \\ -\frac{6}{10}[\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{2}{9}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})-\frac{1}{4}[\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{2}{9}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})]]$$

On peut remarquer que la séquence d'opérations $1-\frac{1}{2}$ *(mise en caractères gras) apparaît dans tous les termes de cette suite d'opérations et peut donc être mise en facteur :*

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{2}{9}-\frac{6}{10}+\frac{6}{10}\frac{2}{9}+\frac{6}{10}\frac{1}{4}-\frac{6}{10}\frac{1}{4}\frac{2}{9})$$

On peut, maintenant, mettre en valeur le groupement $1-\frac{2}{9}$ *:*

$$(1-\frac{1}{2})[\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}-\frac{1}{4}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}})-\frac{6}{10}[\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}-\frac{1}{4}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}})]]$$

La mise en facteur de ce groupement fait apparaître le groupement $1-\frac{1}{4}$*, que l'on peut aussi mettre en facteur :*

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{9})[\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}-\frac{6}{10}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}})]=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{9})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{6}{10}) \\ =\frac{(2-1)}{2}\frac{(9-2)}{9}\frac{(4-1)}{4}\frac{(10-6)}{10}=\frac{1\times 7\times 3\times 4}{2\times 9\times 4\times 10}$$

Cette fraction représente la part totale des dépenses du pélerin ; on a bien, au dénominateur, le produit des dénominateurs de chacune des fractions du problème et au numérateur le produit des numérateurs de ces mêmes fractions, chacun diminué de un. Comme il va falloir diviser par cette fraction, le numérateur et le dénominateur s'inverse et on obtient la formule donnée par Gaṅgādhara ; en réintroduisant l'inconnue — le montant du pécule initial — on a :

$$\frac{7}{60}x=\frac{1\times 7\times 3\times 4}{2\times 9\times 4\times 10}x=63$$

D'où : $x=63\times\frac{60}{7}=540$. *Le pèlerin avait donc* 540 niṣka *en partant.*

Cette règle, citée par Gaṅgādhara, ne fait pas partie des règles de la Līlāvatī *et aucun autre commentaire (en notre possession) sur ce passage ne la cite. On remarquera son efficacité et que, si sa justification n'est pas immédiate, elle est certainement dérivée de la méthode concernant la classe des fractions « en déductions de parties propres »* (bhāgāpavāhajāti)*, qui fait partie du chapitre de la* Līlāvatī *sur les fractions ; cette dernière méthode est, ici, la troisième méthode utilisée pour traiter le problème. On notera aussi la remarque de Gaṅgādhara à son sujet, à la fin de ce chapitre, qui montre que ces commentaires peuvent proposer d'autres méthodes et qu'ils incitent le disciple à faire preuve d'imagination pour résoudre les problèmes.*

Sommes et différences

yogo ’ntareṇonayuto ’rdhitas tau
rāśī smṛtaṃ saṃkramaṇākhyam etat ||

La somme et la différence de deux quantités inconnues étant connues, la connaissance des deux quantités d’origine à partir de cette connaissance, se nomme *saṃkramaṇa*. À cet effet, la somme des deux quantités est placée en deux endroits ; d’une part, elle est diminuée **antareṇa** de la différence des deux quantités, d’autre part, elle y est ajoutée ; ensuite, ces deux résultats sont divisés par deux : ce sont les deux quantités d’origine. **etat** ce calcul, **saṃkramaṇākhyaṃ smṛtam** : du fait d’une progression *(kramaṇa)* parfaite *(samyak)* sous la forme d’une addition et d’une soustraction mutuelle, ce qui était dissimulé est devenu apparent par le calcul, on a donc le nom *saṃkramaṇa*. Sommes et différences p. 10

yayor yogaḥ śataṃ saikaṃ
viyogaḥ pañcaviṃśatiḥ |
tau rāśī vada me vatsa
vetsi saṃkramaṇaṃ yadi ||

La somme **yayoḥ** de deux quantités inconnues étant effectuée, on a cent **saikam** augmenté de un ; et aussi, **viyogaḥ** la différence des deux, la soustraction du plus petit du plus grand ; dans cette dernière, le reste est vingt-cinq. Alors, *« ô mon enfant ! si tu connais le* saṃkramaṇa[14]*, dis alors ces deux quantités. »* Sommes et différences exemple p. 10

On pose la somme 101, la différence 25.
La somme est placée à deux endroits : 101 | 101. En premier, elle est diminuée de la différence : 76 ; à l’autre, elle est additionnée à la différence : 126 ; les deux sont divisés par deux : 38 et 63.
Les deux quantités, fusionnées dans le *saṃkramaṇa*, sont produites : 38 et 63.

La règle donnée ici est très simple : si on connaît la somme s et la différence d de deux quantités a et b, pour retrouver a, il suffit d’ajouter s et d et diviser le résultat par deux et, pour retrouver b, il faut retrancher d de s et de diviser aussi le résultat par deux : Sommes et différences exemple p. 10

$s = a + b$

$d = a - b$

14. Nous n’avons pas de nom pour ce calcul, pourtant très souvent employé en mathématiques ; Colebrooke traduit par « concurrence. »

d'où :
$s + d = (a + b) + (a - b) = 2a$
$s - d = (a + b) - (a - b) = 2b$
La disposition donnée par le commentaire — et qui n'est reprise par aucun manuscrit — est la suivante :

	101		101
$-$	25	$+$	25
	76		126
$\div 2$	38		63

rāśyor yayor viyogo 'ṣṭau
tatkṛtyoś ca catuḥśatī |
vivaraṃ brūhi tau rāśī
śīghraṃ gaṇitakovida ||

Ici la somme est inconnue ; la différence des deux quantités et la différence de leurs carrés sont connues. Dans un tel cas, la somme est le quotient de ce qui est **vargāntaram** le résultat de la différence des carrés, divisée par la différence des quantités ; de là, la somme étant connue, **proktavad eva** on trouve les deux quantités suivant l'opération : *« La somme enlevée et ajoutée à la différence. »* Sommes et différences p. 10

La différence **yayoḥ** des deux quantités inconnues est huit ; **ca** de plus, la différence des carrés – des deux qui sont **kṛtī** les deux carrés de ces deux quantités – est quatre cents. Ô expert en calcul ! dis rapidement ces deux quantités à partir de la différence des deux entiers. Sommes et différences exemple p. 10

On pose : différence des quantités : 8 ; différence des carrés : 400.
La différence des carrés, 400, divisée par la différence des quantités, 8, le quotient est la somme : 50.
Puis, comme susdit, la somme est placée à deux endroits : 50 | 50, diminuée et augmentée de la différence, 8 : 42 et 58, divisés par deux, les deux quantités, 21 et 29, sont produites.

Ainsi fini le *saṃkramaṇa* avec des carrés.

Cette application de la règle précédente repose sur l'identité remarquable :
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
Sommes et différences exemple p. 10

Si on connaît la différence des carrés de deux nombres et, également, leur différence, si on divise la différence des carrés par la différence des nombres, on dispose alors de la somme et on peut appliquer la règle précédente.
L'exemple traité est très simple :
$a^2 - b^2 = 400$
$a - b = 8$
$400 \div 8 = 50 = a + b$
Il suffit alors d'appliquer la règle saṃkramaṇa *:*

$$\begin{array}{rr|rr} & 50 & & 50 \\ - & 8 & + & 8 \\ \hline & 42 & & 58 \\ \hline \div 2 & 21 & & 29 \end{array}$$

Équations comportant des carrés et des racines carrées

iṣṭakṛtir aṣṭaguṇitā
vyekā dalitā vibhājiteṣṭena |
ekaḥ syād asya kṛtir
dalitā saikāparo rāśiḥ ||
rūpaṃ dviguṇeṣṭahṛtaṃ
seṣṭaṃ prathamo 'thavāparo rūpam |
kṛtiyutiviyutī vyeke
vargau syātāṃ yayo rāśyoḥ ||

Kṛtiḥ le carré d'une quantité arbitraire, celui-là même est multiplié par huit, puis **vyekā** diminué de un, puis **dalitā** divisé par deux et divisé par la quantité arbitraire, la première quantité est établie de cette manière ; le carré **asya** de cette première quantité, **dalitā** divisée par deux est **saikā** ajouté à un, l'autre quantité est établie. On obtient ainsi deux quantités. Éq. carrés et racines carrées p. 10

Ou bien, l'unité divisée par le double d'une quantité arbitraire et augmenté de cette quantité arbitraire est la première quantité, l'autre est simplement l'unité ; on a établit de cette manière deux quantités.

Ces deux quantités dont **kṛtiyutiviyutī** la somme des carrés et la différence des carrés, **vyeke** desquelles un est enlevé (comp. *bahuvrīhi*), étant de telle sorte **vargau syātām**, ce qui signifie : ces deux quantités seront productrices de racines.

Le premier couple de nombres proposé est le suivant, x étant la quantité arbitraire :

Éq. carrés et racines carrées p. 10

$$\frac{8x^2-1}{2x} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{8x^2-1}{2x}\right)^2+1$$

Le calcul est plus simple si on écrit :

$$\frac{8x^2-1}{2x} = 4x - \frac{1}{2x}$$

On a alors :

$$\left[\frac{1}{2}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^2+1\right]^2 \pm \left(4x-\frac{1}{2x}\right)^2 - 1 = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^4 \\ \textit{ou} \\ \frac{1}{4}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^4 + 2\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^2 \end{cases}$$

Le premier cas est visiblement un carré ; pour le deuxième, il suffit d'effectuer le calcul :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^4 + 2\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^2\left[\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^2+8\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^2\left(16x^2-4+\frac{1}{4x^2}+8\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)^2\left(4x+\frac{1}{2x}\right)^2 \end{aligned}$$

Le deuxième couple de valeurs est beaucoup plus simple :

$$\frac{1}{2x}+x \quad \textit{et} \quad 1$$

On a alors :

$$\left(\frac{1}{2x}+x\right)^2 \pm 1^2 - 1 = \begin{cases} \left(\frac{1}{2x}+x\right)^2 \\ \textit{ou} \\ \left(\frac{1}{2x}+x\right)^2 - 2 = \frac{1}{4x^2}+1+x^2-2 = \left(\frac{1}{2x}-x\right)^2 \end{cases}$$

rāśyor yayoḥ kṛtiviyogayutī nireke
mūlaprade pravada tau mama mitra yatra |
kliśyanti bījagaṇite paṭavo 'pi mūḍhāḥ
ṣoḍhoktagūḍhagaṇitaṃ paribhāvayantaḥ ||

Ô mon ami ! **Pravada** dis-moi brillamment deux quantités desquelles **kṛtiviyogaḥ** la différence des carrés et la somme des carrés, toutes deux privées de un sont deux quantités productrices d'une racine, quand les mathématiciens souffrent en appliquant le *bījagaṇita*.

Éq. carrés et racines carrées p. 11

– Mais ces derniers ne seront-ils pas judicieux ?

– Non ! Ici, même les forts en calcul sont désemparés !

– En faisant quoi ?

– **Paribhāvayantaḥ** en prenant en considération le *bījagaṇita* enseigné de six manières, ils ne seront pas judicieux ! Telle est la signification.

Ici, pour le premier calcul, la quantité arbitraire imaginée est $\begin{array}{|c|} 1 \\ 2 \\ \hline \end{array}$

Son carré $\begin{array}{|c|} 1 \\ 4 \\ \hline \end{array}$ est multiplié par huit : $\begin{array}{|c|} 8 \\ 4 \\ \hline \end{array}$, le quotient est 2. Celui-ci est diminué de un, 1 est produit ; puis, divisé par deux, $\begin{array}{|c|} 1 \\ 2 \\ \hline \end{array}$, divisé par la quantité arbitraire, $\begin{array}{|c|} 1 \\ 2 \\ \hline \end{array}$, la première quantité, 1, est produite selon :

« Ayant interverti le dénominateur et le numérateur ».

Le carré de cette dernière, 1, est divisé par deux : $\begin{array}{|c|} 1 \\ 2 \\ \hline \end{array}$, et ajouté à un selon l'opération des mêmes dénominateurs : $\begin{array}{|c|} 3 \\ 2 \\ \hline \end{array}$; ceci est l'autre quantité.

Ainsi sont produites, selon la formule susdite, deux quantités donnant une racine : $\begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ \hline \end{array}$

De même, ayant fixé un (1) comme quantité arbitraire : 1, les deux quantités produites par la méthode susdite sont : $\begin{array}{|c|c|} 7 & 57 \\ 2 & 8 \\ \hline \end{array}$

Maintenant, quand la quantité arbitraire est deux, alors, selon l'opération enseignée, les deux quantités sont : $\begin{array}{|c|c|} 31 & 993 \\ 4 & 32 \\ \hline \end{array}$

Soit les deux quantités du premier exemple : $\begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ \hline \end{array}$, leurs carrés sont :

$\begin{array}{|c|c|} 1 & 9 \\ 1 & 4 \\ \hline \end{array}$; réduits au même dénominateur : $\begin{array}{|c|c|} 4 & 9 \\ 4 & 4 \\ \hline \end{array}$, quand la différence est effectuée, il reste : $\begin{array}{|c|} 5 \\ 4 \\ \hline \end{array}$, quand la somme est effectuée, $\begin{array}{|c|} 13 \\ 4 \\ \hline \end{array}$ est produit. Ces deux quantités sont toutes deux privées de un ; ayant été réduites au même dénominateur, elles sont diminuées de un, $\begin{array}{|c|c|} 1 & 9 \\ 4 & 4 \\ \hline \end{array}$ sont produites, toutes deux productrices d'une racine.

On doit conjecturer de même dans tous les exemples.

Ici, nous n'avons pas à proprement parler, un exemple sous forme d'un problème à résoudre, aucune donnée numérique n'est proposée dans la formule elle-même, qui ne demande à l'élève que de s'exercer à produire des carrés en utilisant la règle précédente. Les quantités arbitraires choisies sont successivement $\frac{1}{2}$, 1 *et* 2. *Le commentateur ne vérifie le résultat que sur le premier nombre choisi.*

Éq. carrés et racines carrées p. 11

$\mathbf{\frac{1}{2}}$ **:** $\dfrac{8\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}{2\,\frac{1}{2}} = 2-1=1$, *pour la première quantité ; et :* $\dfrac{1^2}{2}+1=\dfrac{3}{2}$, *pour la deuxième.*

On a bien : $1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ *et :* $\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2-1=1$.

1 : $\dfrac{8\times 1^2-1}{2\times 1}=\dfrac{7}{2}$ *et* $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{2}\right)^2+1=\dfrac{49}{8}+1=\dfrac{57}{8}$.

Alors : $\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{57}{8}\right)^2-1=\frac{49}{4}+\frac{3249}{64}-1=\frac{4033}{64}-1=\frac{3969}{64}=\left(\frac{63}{8}\right)^2$

et : $\left(\frac{57}{8}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2-1=\frac{2465}{64}-1=\frac{2401}{64}=\left(\frac{49}{8}\right)^2$

2 : $\dfrac{8\times 2^2-1}{2\times 2}=\dfrac{31}{4}$ *et* $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{31}{4}\right)^2+1=\dfrac{961}{32}+1=\dfrac{993}{32}$.

Alors : $\left(\frac{31}{4}\right)^2+\left(\frac{993}{32}\right)^2-1=\frac{961}{16}+\frac{986049}{1024}-1=\frac{1047553}{1024}-1=\frac{1046529}{1024}=\left(\frac{1023}{32}\right)^2$

et : $\left(\frac{993}{32}\right)^2-\left(\frac{31}{4}\right)^2-1=\frac{985088}{1024}-1=\frac{984064}{1024}=\left(\frac{992}{32}\right)^2$

Maintenant, en suivant la deuxième méthode.

Éq. carrés et racines carrées p. 11

La quantité choisie est 1 ; l'unité est divisée par le double, 2, de celle-ci : $\begin{array}{|c|}1\\2\\\hline\end{array}$. Ceci est de plus ajouté à la quantité choisie, $\begin{array}{|c|}3\\2\\\hline\end{array}$ est produit, première quantité. La deuxième est l'unité même : 1, les deux quantités sont : $\begin{array}{|c|c|}3&1\\2&1\\\hline\end{array}$

Avec deux comme quantité choisie : $\begin{array}{|c|c|}9&1\\4&1\\\hline\end{array}$

Avec trois comme quantité choisie, les quantités produites sont : $\begin{array}{|c|c|}19&1\\6&1\\\hline\end{array}$

Avec un tiers, $\begin{array}{|c|}1\\3\\\hline\end{array}$, posé comme quantité choisie, les deux quantités produites sont : $\begin{array}{|c|c|}11&1\\6&1\\\hline\end{array}$

Dans tous les cas, on doit savoir que pour de telles quantités, la somme et la différence des carrés, privées de un, sont productrices de racines.

Gaṅgādhara propose maintenant quatre nombres pour illustrer la deuxième méthode de la règle, successivement : 1, 2, 3 et 1/3.

Éq. carrés et racines carrées p. 11

1 : *La première quantité est :* $\frac{1}{2} + 1$ *et la seconde est dans tous las cas* 1 *:*

$$(\frac{1}{2}+1)^2 \pm 1^2 - 1 = \begin{cases} (\frac{3}{2})^2 \\ (\frac{3}{2})^2 - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 \end{cases}$$

2 : $\frac{1}{4} + 2$ *:*

$$(\frac{1}{4}+2)^2 \pm 1^2 - 1 = \begin{cases} (\frac{9}{4})^2 \\ (\frac{9}{4})^2 - 2 = \frac{81-32}{16} = \frac{49}{16} = (\frac{7}{4})^2 \end{cases}$$

3 : $\frac{1}{6}+3$:

$$(\frac{1}{6}+3)^2 \pm 1^2 - 1 = \begin{cases} (\frac{19}{6})^2 \\ (\frac{19}{6})^2 - 2 = \frac{361-72}{36} = \frac{289}{36} = (\frac{17}{6})^2 \end{cases}$$

$\mathbf{\frac{1}{3}}$ **:** $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}$:

$$(\frac{3}{2}+\frac{1}{3})^2 \pm 1^2 - 1 = \begin{cases} (\frac{11}{6})^2 \\ (\frac{11}{6})^2 - 2 = \frac{121-72}{36} = \frac{49}{36} = (\frac{7}{6})^2 \end{cases}$$

iṣṭasya vargavargo
ghanaś ca tāv aṣṭasaṃguṇau prathamaḥ |
saiko rāśī syātām
evaṃ vyakte 'thavāvyakte ||

Vargavargaḥ le carré du carré **iṣṭasya** d'une quantité — telle est la signification — **ca** et aussi, le cube de la quantité choisie, **tau** tous les deux, multipliés par huit, sont les deux quantités. La première quantité est augmentée de un. Il y a un tel calcul, **vyakte** selon le calcul sur l'ardoise et le même, **athavā** sûrement, selon le calcul non-manifeste.

Éq. carrés et racines carrées p. 11

Dans la formule, Bhāskara dit : « (...) seront les deux quantités (...) ; il faut comprendre que la somme et la différence de leurs carrés diminuées de un seront des carrés, comme dans la règle précédente. La vérification est aisée ; les deux nombres proposés s'écrivent :

Éq. carrés et racines carrées p. 11

$$8x^4+1 \quad \text{et} \quad 8x^3$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(8x^4+1)^2 \pm (8x^3)^2 - 1 &= 64x^8+16x^4+1 \pm 64x^6 - 1 \\ &= 16x^4(4x^4 \pm 4x^2+1) \\ &= 16x^4(2x^2 \pm 1)^2\end{aligned}$$

Ici aussi, on produit l'exemple énoncé précédemment.

Le nombre choisi est $\boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}$, le carré de son carré est $\boxed{\begin{matrix}1\\16\end{matrix}}$. Celui-ci est

Éq. carrés et racines carrées p. 11

multiplié par huit : $\begin{array}{|c|}1\\2\\\hline\end{array}$ et ajouté à un : $\begin{array}{|c|}3\\2\\\hline\end{array}$; la première quantité est produite.

À nouveau le nombre choisi est $\begin{array}{|c|}1\\2\\\hline\end{array}$; son cube $\begin{array}{|c|}1\\8\\\hline\end{array}$ est multiplié par huit ; $\begin{array}{|c|}1\\1\\\hline\end{array}$ est produit. L'autre quantité est $\begin{array}{|c|}1\\1\\\hline\end{array}$. De cette façon on a les deux quantités : $\begin{array}{|c|c|}3&1\\2&1\\\hline\end{array}$

Maintenant, avec un comme nombre choisi, les deux quantités sont 9 et 8 ; avec deux, 129 et 64 ; avec trois 649 et 216.

$\frac{1}{2}$:

Éq. carrés et racines carrées p. 11

$$\Big(8(\frac{1}{2})^4+1\Big)^2 \pm \Big(8(\frac{1}{2})\Big)^3 - 1 = \begin{cases} (\frac{3}{2})^2 \\ (\frac{3}{2})^2 - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 \end{cases}$$

1 :

$$\Big(8\times 1^4+1\Big)^2 \pm \Big(8\times 1^3\Big)^2 - 1 = \begin{cases} 9^2+8^2-1 = 144 = 12^2 \\ 9^2-8^2-1 = 16 = 4^2 \end{cases}$$

2 :

$$\Big(8\times 2^4+1\Big)^2 \pm \Big(8\times 2^3\Big)^2 - 1 = \begin{cases} 129^2+64^2-1 = 16641+4096-1 \\ \qquad = 20736 = 144^2 \\ 129^2-64^2-1 = 12544 = 112^2 \end{cases}$$

3 :

$$\Big(8\times 3^4+1\Big)^2 \pm \Big(8\times 3^3\Big)^2 - 1 = \begin{cases} 649^2+216^2-1 = 421201+46656-1 \\ \qquad = 467856 = 684^2 \\ 649^2+216^2-1 = 374544 = 612^2 \end{cases}$$

guṇaghnamūlonayutasya rāśer
dṛṣṭasya yuktasya guṇārdhakṛtyā |
mūlaṃ guṇārdhena yutaṃ vihīnaṃ
vārgīkṛtaṃ praṣṭur abhīṣṭarāśiḥ ||
yadā lavaiś conayutaḥ sa rāśir
ekena bhāgonayutena bhaktvā |
dṛśyaṃ tathā mūlaguṇaṃ ca tābhyāṃ
sādhyas tataḥ proktavad eva rāśiḥ ||

Une quantité qui a été diminuée ou augmentée de sa propre racine multipliée par un nombre quelconque est considérée. La racine de celle-ci, augmentée du carré de la moitié du multiplicateur de la racine, doit être alors ajoutée à la moitié du multiplicateur, quand la quantité considérée a été diminuée de sa propre racine. Si la quantité considérée a été ajoutée à sa racine multipliée par un multiplicateur, on doit alors soustraire. Le carré de ce résultat est la quantité ; tel est ce qui est énoncé.

La racine d'un nombre considéré… p. 11

Un interrogateur cherche une certaine quantité : la racine de cette dernière a été multipliée par un certain nombre et la quantité a été diminuée ou augmentée de sa propre racine ainsi multipliée. Ceci fait, la quantité produite est appelée la quantité considéré *(dṛṣṭa)*. Ceci est la formule pour réaliser le calcul du nombre cherché à partir de cette dernière quantité.

La racine de la quantité considérée, cette dernière ajoutée au carré de la moitié du multiplicateur de la racine, doit être augmentée ou diminuée **guṇārdhena** de la moitié du multiplicateur de la racine selon la règle susdite et, ensuite, élevée au carré elle devient la quantité cherchée par l'interrogateur.

Voici le sens de : « Et quand cette quantité a été diminuée ou augmentée de parts ». Il y a en plus, dans ce cas, une opération particulière. Quand cette quantité cherchée, une fois diminuée ou augmentée de sa racine, a été aussi diminuée ou augmentée **lavaiḥ** de parties propres, alors, après avoir diminué ou augmenté l'unité des dites parties, on divisera la donnée par le nombre ainsi formé et on divisera de même le multiplicateur de la racine ; le nombre cherché doit alors être calculé selon la méthode précédemment enseignée — à savoir : « La racine d'un nombre considéré, ajouté au carré de la moitié du multiplicateur etc. » — au moyen du multiplicateur de la racine et de la donnée ainsi divisés.

Il s'agit de trouver un nombre quand on connaît le résultat de sa somme, ou de sa différence, avec un multiple de sa racine. Traduit avec notre formalisation, on cherche x^2, *solution de l'équation :*

$$x^2 \pm m\,x = a$$

La racine d'un nombre considéré… p. 11

m *est le multiplicateur de la racine du nombre cherché :* x^2, *et* a *le résultat :* dṛṣṭa, *le nombre « vu », d'où le nom de la section :* dṛṣṭamūla.

La solution donnée s'explique avec la formule du développement du carré d'une somme (ou d'une différence) :

$$\begin{aligned}\left(x \pm \frac{m}{2}\right)^2 &= x^2 \pm m\,x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \\ &= a + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \quad \textit{puisque :} \quad x^2 \pm m\,x = a\end{aligned}$$

Et donc :

$$x \pm \frac{m}{2} = \sqrt{a + \left(\frac{m}{2}\right)^2} \quad \textit{soit :} \quad x = \sqrt{a + \left(\frac{m}{2}\right)^2} \mp \frac{m}{2}$$

Il suffit alors de prendre le carré du nombre trouvé, puisque c'est sa racine qui a été multipliée par m.

La deuxième partie de la règle ajoute une contrainte supplémentaire : la quantité cherchée a été augmentée ou diminuée d'une fraction d'elle-même, c'est-à-dire qu'on cherche x^2 *solution de l'équation :*

$$x^2 \pm \frac{\alpha}{\beta}x^2 \pm m\,x = a$$

La solution proposée consiste à transformer l'équation pour se ramener au cas de la règle générale :

$$x^2 \pm \frac{\alpha}{\beta}x^2 \pm m\,x = x^2\left(1 \pm \frac{\alpha}{\beta}\right) \pm m\,x = a$$

En divisant l'équation par $1 \pm \dfrac{\alpha}{\beta}$, *on a à résoudre l'équation :*

$$x^2 \pm m'\,x = a' \quad \textit{avec} \quad m' = \frac{m}{1 \pm \frac{\alpha}{\beta}} \quad \textit{et} \quad a' = \frac{a}{1 \pm \frac{\alpha}{\beta}}$$

bāle marālakulamūladalāni sapta
tīre vilāsabharamantharagāṇy apaśyam |
kurvac ca kelikalahaṃ kalahaṃsayugmaṃ
śeṣaṃ jale vada marālakulapramāṇam ||

Ô mon enfant ! Ce qui est cherché, est un groupe de cygnes. Ce qui est en moins est montré, à savoir : j'ai vu autant que sept fois la moitié de la racine de cette troupe de cygnes qui gagnent lentement la rive de l'étang, fatigués par leur jeu ; le reste de cette troupe, un couple de cygnes

J'ai vu sept fois la moitié de la racine… p. 11

se livrant une querelle amoureuse dans l'eau, est la donnée ; dis-moi la taille du groupe de cygnes.

On pose : multiplicateur de la racine en moins $\begin{array}{|c|}7\\2\end{array}$, quantité considérée, 2.

Le carré de la moitié du multiplicateur, $\begin{array}{|c|}7\\4\end{array}$, est $\begin{array}{|c|}49\\16\end{array}$. La quantité considérée, ajoutée à ce dernier, produit $\begin{array}{|c|}81\\16\end{array}$. La racine de ce résultat, $\begin{array}{|c|}9\\4\end{array}$, est ajoutée à la moitié du multiplicateur, $\begin{array}{|c|}7\\4\end{array}$: $\begin{array}{|c|}16\\4\end{array}$, et divisé par le dénominateur, 4 est produit ; élevé au carré : 16. Ce dernier nombre est la quantité cherchée par l'interrogateur.

Sa racine est 4 ; après avoir ôté quatorze (14), soit sept fois la moitié de cette racine, il reste deux. Ainsi doit être compris le calcul.

Le nombre cherché est x^2, dont on ne considère que la racine positive : x. Formulé en terme d'équation, le problème posé est :

J'ai vu sept fois la moitié de la racine… p. 11

$$x^2 - \frac{7}{2}x = 2$$

Pour obtenir un carré au premier membre de l'équation, on ajoute le carré de $\frac{7}{2}$:

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = 2 + \frac{49}{16} = \frac{81}{16}$$

En prenant la racine carrée des deux membres, on obtient :

$$x - \frac{7}{4} = \frac{9}{4} \quad \textit{soit :} \quad x = \frac{16}{4} = 4$$

Il suffit alors d'élever au carré pour trouver la réponse au problème. Gaṅgādhara vérifie que la réponse est juste.

svapadair navabhir yuktaṃ
syāc catvāriṃśatādhikam |
śatadvādaśakaṃ vidvan
kaḥ sa rāśir nigadyatām ||

La quantité qui est considérée a été ajoutée à neuf fois sa propre racine, douze cent quarante est produit. Ô savant ! Veuille dire quelle est cette quantité.

Ajoutée à neuf fois sa racine… p. 12

On pose neuf fois la racine : 9 ; donnée : 1240.
La moitié du multiplicateur est $\begin{array}{|c|} 9 \\ 2 \\ \hline \end{array}$. La quantité considérée est additionnée avec le carré de cette moitié, $\begin{array}{|c|} 81 \\ 4 \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|} 5041 \\ 4 \\ \hline \end{array}$ est produit. La racine, $\begin{array}{|c|} 71 \\ 2 \\ \hline \end{array}$, de ce dernier résultat est diminuée de la moitié du multiplicateur $\begin{array}{|c|} 9 \\ 2 \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|} 62 \\ 2 \\ \hline \end{array}$ est produit. Une fois divisé par le dénominateur, 31 est produit. Le carré de ce dernier est 961 : ainsi est produite la quantité cherchée par l'interrogateur.

$$x^2 + 9x = 1\,240 \quad \textit{donc :} \quad x^2 + 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 1\,240 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

Ajoutée à neuf fois sa racine… p. 12

Ce qui donne :

$$\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{71}{2}\right)^2 \quad \textit{soit :} \quad x = \frac{71}{2} - \frac{9}{2} = 31; \quad x^2 = 961$$

yātaṃ haṃsakulasya mūladaśakaṃ meghāgame mānasaṃ
proḍḍīya sthalapadminīvanam agād aṣṭāṃśako 'mbhastaṭāt |
bāle bālamṛṇālaśālini jale kelikriyālālasaṃ
dṛṣṭaṃ haṃsayugatrayaṃ ca sakalāṃ yūthasya saṃkhyāṃ vada ||

Soit, quelque part sur les eaux de la Gaṅgā, **kulam** un groupe de cygnes ; de ce groupe autant que la racine, celle-ci multipliée par dix — dix fois la racine —, ayant aperçu la venue d'un nuage et s'étant envolée, est allée au lac Mānasa ; de plus, un huitième du groupe, quittant le bord de l'eau, a gagné un bosquet de lotus terrestres. Une fois partis, il reste trois couples de cygnes. Ainsi, il sont six, soit trois cygnes femelles, trois cygnes

À l'approche d'un nuage… p. 12

mâles. Cette sizaine, **kelikriyālālasam** inconstante sur les eaux aux filaments de lotus — ceci au locatif —, est la quantité considérée. Ô mon enfant, dis-moi alors le nombre des cygnes dans ce groupe.

On pose : la racine multipliée par dix en moins $\dot{10}$; la fraction $\begin{array}{|c|} 1 \\ 8 \\ \hline \end{array}$; la donnée 6.

On doit faire le calcul selon la méthode : « Et quand cette quantité a été diminuée ou augmentée de parts ». L'unité diminuée de la fraction est $\begin{array}{|c|} 7 \\ 8 \\ \hline \end{array}$; le multiplicateur de la racine, divisé par ce dernier résultat, produit $\begin{array}{|c|} 80 \\ 7 \\ \hline \end{array}$. Dans cet exemple, celui-ci prend le nom technique « multiplicateur de la racine ».

Ensuite, la donnée, 6, divisée par l'unité diminuée de la fraction, $\begin{array}{|c|} 8 \\ 7 \\ \hline \end{array}$, produit $\begin{array}{|c|} 48 \\ 7 \\ \hline \end{array}$. Ce dernier prend le nom technique de donnée.

Maintenant, on fait le calcul comme précédemment : la moitié du multiplicateur est $\begin{array}{|c|} 40 \\ 7 \\ \hline \end{array}$, son carré est $\begin{array}{|c|} 1600 \\ 49 \\ \hline \end{array}$; une fois la donnée additionnée, $\begin{array}{|c|} 1936 \\ 49 \\ \hline \end{array}$ est produit ; sa racine, $\begin{array}{|c|} 44 \\ 7 \\ \hline \end{array}$, est ajoutée à la moitié du multiplicateur, $\begin{array}{|c|} 40 \\ 7 \\ \hline \end{array}$: $\begin{array}{|c|} 84 \\ 7 \\ \hline \end{array}$; la division étant effectuée, 12 est produit ; élevé au carré, la quantité cherchée par l'interrogateur est produite : 144.

Cet exemple, et les suivants, font intervenir à la fois la racine du nombre cherché et une fraction de ce nombre ; nous noterons toujours le nombre cherché x^2. Sous forme d'équation le problème s'écrit :

À l'approche d'un nuage… p. 12

$$x^2 - 10x - \frac{1}{8}x^2 = 6 \quad \textit{soit :} \quad (1 - \frac{1}{8})x^2 - 10x = \frac{7}{8}x^2 - 10x = 6$$

ou encore : $x^2 - \frac{80}{7}x = \frac{48}{7}$

On est alors ramené à un problème du type précédent :

$$x^2 - \frac{80}{7}x + (\frac{40}{7})^2 = (x - \frac{40}{7})^2 = \frac{48}{7} + (\frac{40}{7})^2 = \frac{1\,936}{49} = (\frac{44}{7})^2$$

donc : $x = \frac{84}{7} = 12; \quad x^2 = 144$

pārthaḥ karṇavadhāya mārgaṇagaṇaṃ kruddho raṇe saṃdadhe
tasyārdhena nivārya taccharagaṇaṃ mūlaiś caturbhir hayān |
śalyaṃ ṣaḍbhir atheṣubhis tribhir api cchatraṃ dhvajaṃ kārmukaṃ
cicchedāsya śiraḥ śareṇa kati te yān arjunaḥ saṃdadhe ||

Pārtha : Arjuna, étant irrité, décocha **gaṇam** une multitude de flèches pour tuer Karṇa au cours d'une bataille. D'abord, après avoir arrêté l'ensemble des traits de ce dernier avec la moitié des siens, puis arrêté les quatre chevaux attelés à son char **catubhir mūlaiḥ** avec la racine de cette multitude multipliée par quatre, que fit-il avec celles qui restaient ? L'auteur le dit : il mit Śalya hors de combat avec six flèches puis, avec trois, il coupa trois choses : le parasol, la bannière et l'arc et, d'une seule flèche, il coupa la tête **asya** de Karṇa. Ainsi les données sont comptées par dix. Alors, ô mon ami, combien étaient les flèches qu'Arjuna a décochées ? Pārtha, en colère… p. 12

On pose : $\begin{array}{|c|}1\\2\end{array}$; la racine multipliée par quatre (4) ; la donnée : 10.

Ici aussi, la racine 4 est divisée par l'unité diminuée de la fraction, $\begin{array}{|c|}1\\2\end{array}$, 8 est produit. De même, la donnée étant divisée, 20 est produit.
Maintenant le carré de la moitié 4 du multiplicateur 8 est 16 ; la donnée est ajoutée : 36 ; la racine, 6, est ajoutée à la moitié, 4, du multiplicateur : 10 ; élevé au carré, le nombre de flèches est produit : 100.

Dans son explication, Gaṅgādhara sépare bien ce qui est inconnu — la moitié des flèches et quatre fois la racine de leur nombre — de ce qui est connu : les flèches qui restent : six, trois et une. On a donc : Pārtha, en colère… p. 12

$x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 4x = 6+3+1$ *ou :* $(1-\frac{1}{2})x^2 - 4x = 10$ *ou encore :* $x^2 - 8x = 20$

On applique alors la même méthode que précédemment :

$$x^2 - 8x + 4^2 = (x-4)^2 = 10 + 16 = 36$$

ce qui donne : $x = 10; \quad x^2 = 100$

alikuladalamūlaṃ mālatīṃ yātam aṣṭau
nikhilanavamabhāgāś cālinī bhṛṅgam ekam |
niśi parimalalubdhaṃ padmamadhye niruddhaṃ
pratiraṇati raṇantaṃ brūhi kānte ’lisaṃkhyām ||

Dalamūlam la racine de la moitié de l’effectif d’un essaim d’abeilles d’un étang aux bouquets de lotus épanouis, est allée sur une *mālatī* et les huit neuvièmes de la totalité de cette multitude sont allés — cela étant suggéré par le mot **ca** — sur une *ketakī* en fleur à la saison des pluies. Maintenant, seule, une abeille, la donnée dans cet exemple, se tenant au-dessus d’un lotus fermé, **pratiraṇati** bourdonne **prati** en réponse à son amoureux, qui, par avidité pour le pollen, est emprisonné dans un lotus refermé ; l’esprit ravi par son attachement au pollen du lotus, **raṇantam** il bruit dans la nuit parce qu’il est captif et aussi à cause de sa séparation d’avec son aimée. Dis, ô ma chérie, le compte des abeilles dans cet essaim.

La racine de la moitié d’un essaim… p. 12

On pose : la moitié de la racine $\begin{array}{|c|}1\\2\end{array}$, la fraction $\begin{array}{|c|}8\\9\end{array}$, la donnée 1.

Du fait qu’il est dit : « de la moitié de la multitude », la moitié de la racine est posée parce qu’une fraction de la moitié d’une quantité est la moitié de la fraction de cette quantité. Puis avec un calcul comme le précédent, la moitié de la quantité est obtenue : 36. Celui-ci, multiplié par deux, produit la mesure de l’essaim d’abeilles : 72.

Les explications données par Gaṅgādhara ne permettent pas de reconstituer la méthode suivie pour aboutir à sa manière de poser le problème : « la racine de la moitié… » dit le texte de Bhāskara et Gaṅgādhara pose « la moitié de la racine ». Cela est néanmoins correct. On pose toujours x^2 pour le nombre cherché :

La racine de la moitié d’un essaim… p. 12

$$x^2 - \sqrt{\frac{x^2}{2}} - \frac{8}{9}x^2 = 2$$

On cherche alors à trouver la moitié du nombre d’abeilles ; en posant $y^2 = \frac{x^2}{2}$ l’équation devient :

$$2y^2 - y - \frac{8}{9}(2y^2) = 2 \quad \textit{et en simplifiant par 2 :} \quad y^2 - \frac{y}{2} - \frac{8}{9}y^2 = 1$$

Sous cette dernière forme, le multiplicateur de la racine est bien 1/2. On applique alors la méthode précedente à cette dernière équation :

$$y^2(1 - \frac{8}{9}) - \frac{y}{2} = 1 \quad \textit{ce qui donne :} \quad y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{81}{16} = 9 + \frac{81}{16}$$

ou : $\quad (y - \frac{9}{4})^2 = (\frac{15}{4})^2$

On trouve alors $y = 6$ *soit :* $y^2 = 36$ *et :* $\quad x^2 = 2y^2 = 72.$

D'autres commentateurs, Gaṇeśa (Buddhivilāsinī) *ou Munīśvara* (Līlāvatīvivṛtti)*, citent, à la suite de cette règle, un commentaire qu'ils semblent attribuer à Bhāskara :* « kila rāśinavāṃśāṣṭakaṃ rāśyardhamūlaṃ ca rāśer ṛṇaṃ rūpadvayaṃ dṛśyam | etad ṛṇaṃ dṛśyaṃ cārdhitaṃ rāśyardhasya bhāvatīti | *: assurément, huit parts sur neuf de la quantité et la racine de la moitié de la quantité sont au débit de la quantité, la quantité considérée est une double unité. Ce débit et la quantité considérée divisés par deux contribuent à la moitié de la quantité.*

yo rāśir aṣṭādaśabhiḥ svamūlai
rāśitribhāgena samanvitaś ca |
jātaṃ śatadvādaśakaṃ tam āśu
jānīhi pāṭyāṃ paṭutāsti te cet ||

La racine d'une quantité, multipliée par dix-huit, lui est ajoutée et le tiers de la quantité est aussi ajouté, de cette manière, douze cents sont produits. Si tu possèdes de l'habileté sur l'ardoise, ô toi ! Reconnais rapidement cette quantité. La quantité qui, ajoutée à dix-huit fois… p. 12

On pose : la racine multipliée par dix-huit (18) ; la fraction $\begin{array}{|c|} 1 \\ 3 \\ \hline \end{array}$; la donnée 1200.

Le multiplicateur de la racine, 18, est divisé par l'unité additionné de la fraction, $\begin{array}{|c|} 4 \\ 3 \\ \hline \end{array}$; il est produit : $\begin{array}{|c|} 27 \\ 2 \\ \hline \end{array}$; puis la donnée est divisée : 900.

Pour le premier des deux, $\begin{array}{|c|} 27 \\ 2 \\ \hline \end{array}$, le nom technique est « multiplicateur de la racine » et pour le deuxième, 900, « donnée ».

La moitié du multiplicateur est $\begin{array}{|c|} 27 \\ 4 \\ \hline \end{array}$ et son carré $\begin{array}{|c|} 729 \\ 16 \\ \hline \end{array}$; une fois ajoutée la donnée 900, il est produit $\begin{array}{|c|} 15\ 129 \\ 16 \\ \hline \end{array}$; la racine de ce dernier résultat,

123	, diminuée de la moitié du multiplicateur,	27	, produit 24 ; élevé
4		4	

au carré, la quantité cherchée est produite : 576.

Ceci doit être compris dans tous les cas.

$$x^2 + 18x + \frac{1}{3}x^2 = (1 + \frac{1}{3})x^2 + 18x = 1200 \quad \textit{soit :} \quad x^2 + \frac{27}{2}x = 900$$

$$x^2 + \frac{27}{2}x + (\frac{27}{4})^2 = (x + \frac{27}{4})^2 = 900 + \frac{729}{16} = \frac{15\,129}{16}$$

$$\textit{donc :} \quad x = \frac{123}{4} - \frac{27}{4} = 24; \quad x^2 = 576$$

La quantité qui, ajoutée à dix-huit fois… p. 12

Règle de trois

Règle de trois p. 13

pramāṇam icchā ca samānajātī
ādyantayos tatphalam anyajāti |
madhye tad icchāhatam ādihṛt syād
icchāphalaṃ vyastavidhir vilome ||

Trirāśika : ensemble de trois quantités[15] ; *trairāśika* : ce qui appartient au *trirāśika*, à savoir un calcul[16]. Parmi ces trois quantités, sont placées au début et à la fin les deux quantités qui sont **samānajātī** de même classe ; la première s'appelle la quantité-critère, l'autre, la quantité voulue. Entre ces deux, d'une autre classe, **tatphalam** est la quantité résultat : le fruit de ce critère (comp. *ṣaṣṭhītatpuruṣa*) ; ou bien **tatphalam** signifie résultat-critère (comp. *karmadhāraya*). Ce résultat multiplié par la quantité voulue et divisé par le critère posé au début est le résultat associé à la quantité voulue.

15. Pāṇini 2.1.51-52 et 5.4.154. Ces deux règles permettent au commentateur de donner le sens, sous forme de glose, du composé *tri-rāśi-ka* ; *tri-rāśi* est un composé *dvigu* qui exprime le sens « collection de » et comme tel, l'emploi du suffixe *ka* est justifié. Voir P-S. F. GSP p.165

16. Pāṇini 4.3.120. Cette règle, citée ici implicitement en remplaçant par le mot même *(trirāśika)* le pronom qui se trouve chez Pāṇini, justifie le passage de *tri* à *trai* pour exprimer la possession. Dans cette règle, Pāṇini prescrit un suffixe *aṇ* dans le sens de *« tasyedam »* (litt. ceci de celui-ci) après un mot au génitif : *trirāśikasya+aṇ* ; il y a alors amuïssement de la désinence de génitif : *trirāśika+aṇ*. L'indice *ṇ* indique la *vṛddhi*, accroissement, de la première syllabe : *trairāśika+a* ; il y a alors amuïssement du a final du thème devant *a* : *trairāśik+a*.

Vilome pour la règle de trois inverse, la règle d'inversion[17] dit : le résultat est multiplié par la première quantité et divisé par la quantité voulue.

Si avec trois-septièmes d'un *niṣka* on obtient deux *pala* et demi de safran, alors, ô le meilleur des commerçants ! combien de safran obtient-on avec neuf *niṣka* ? Dis-le immédiatement !

Si deux pala et demi de safran… p. 13

Dans ce cas les deux quantités de même classe sont les quantités mesurées en *niṣka*, par conséquent, du fait de sa qualité de prix-critère, trois-septièmes est la quantité-critère ; neuf est la quantité voulue. La quantité de safran, parce qu'elle est d'une autre classe et parce qu'elle est le fruit du critère, est la quantité placée au milieu.

On pose : $\begin{array}{|c|c|c|} 3 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$

La quantité du milieu est multipliée par la quantité voulue : $\begin{array}{|c|} 45 \\ 2 \\ \hline \end{array}$.

Elle est multipliée par la première quantité après avoir inversé dénominateur et numérateur : $\begin{array}{|c|} 315 \\ 6 \\ \hline \end{array}$.

Une fois divisé par le dénominateur, 52 *pala* de safran sont obtenus, il reste 3.

Parce qu'un *karṣa* est un quart de *pala*, le reste est multiplié par quatre et à nouveau divisé par le dénominateur ; on obtient 2 *karṣa*.

La règle de trois nous est présentée ici comme la recherche de la « quatrième proportionnelle » : les deux nombres donnés pour les prix sont dans le même rapport de proportion que les deux nombres mesurant les poids que l'on peut obtenir pour ces prix, seulement un des deux poids, le quatrième nombre, est inconnu et savoir que les deux rapports sont égaux permet de le calculer. On peut résumer le problème de la façon suivante :

Si deux pala et demi de safran… p. 13

Si	$3/7$ niṣka	*donne*	$2 + 1/2$ pala
alors	9 niṣka	*donneront*	x pala

Ou, en utilisant l'égalité des rapports :

$$\frac{3/7}{9} = \frac{2 + 1/2}{x}$$

17. Pour inverser une règle on « inverse » les opérations : une multiplication est remplacée par une division et vice versa.

De cette proportion, on déduit la valeur de x :

$$x = \frac{9 \times (2 + 1/2)}{3/7}$$

C'est exactement la formule que nous propose Bhāskara puisque $2 + 1/2 = 5/2$.

La transformation d'unité qui suit est tout à fait classique : $315/6 = 52 + 3/6$ et, pour ne pas présenter le résultat sous forme fractionnaire, on passe à une unité de poids plus petite, le karṣa*, qui vaut $1/4$ de* pala *; en multipliant le reste, $3/6$, par 4 on obtient $12/6$ de* karṣa*. Le poids de safran obtenu pour neuf* niṣka *est donc cinquante-deux* pala *et deux* karṣa*.*

On a, en sanskrit, des noms pour chacun des termes de la règle de trois : pramāṇa*, le « critère » ; si on suit l'exemple qui nous est donné, c'est le prix de référence pour lequel on obtient une quantité connue de safran ; cette quantité connue s'appelle* phala*, le « fruit ». La troisième quantité connue s'appelle* icchā*, le « désir » ; c'est, ici, la somme que l'on veut engager et pour laquelle on voudrait savoir quelle quantité du « fruit » on obtiendra.*

Si avec soixante-trois *pala* **prakṛṣṭasya** du meilleur camphre, on obtient cent *niṣka* augmentés de quatre, alors quelle quantité de monnaie obtient-on avec douze *pala* et un quart ? Si, avec soixante-trois pala… p. 13

On pose : 63, 104, $\begin{array}{|c|}49\\4\\\hline\end{array}$.

La quantité médiane est d'une autre classe en raison de sa qualité de monnaie et ce qui est de la nature du camphre est placé au début et à la fin. Le critère est au début en raison de sa nature de cause ; la quantité voulue est à la fin, parce qu'elle est une chose désirée.

La quantité médiane, multipliée par la quantité voulue, produit $\begin{array}{|c|}5\,096\\4\\\hline\end{array}$;

divisée par le critère — multipliée après inversion à cause de sa nature fractionnaire — : $\begin{array}{|c|}5\,096\\252\\\hline\end{array}$.

Une fois divisé, on obtient 20 *niṣka*, il reste $\begin{array}{|c|}56\\252\\\hline\end{array}$.

La drachme est la seizième partie du *niṣka*, une fois multiplié par seize, $\begin{array}{|c|}896\\252\\\hline\end{array}$, et la division faite, on obtient 3 drachmes, il reste $\begin{array}{|c|}140\\252\\\hline\end{array}$.

En vue d'obtenir des *paṇa*, qui sont la seizième partie de la drachme, on multiplie par seize, $\begin{array}{|c|}2\,240\\252\\\hline\end{array}$, 8 *paṇa* sont obtenus, il reste $\begin{array}{|c|}224\\252\\\hline\end{array}$.

Parce qu'un *paṇa* est composé de quatre *kākiṇī*, on multiplie par quatre : $\begin{array}{|c|}896\\252\\\hline\end{array}$; la division effectuée, 3 *kākiṇī* sont obtenues, il reste $\begin{array}{|c|}140\\252\\\hline\end{array}$.

Parce qu'une *kākiṇī* est composée de vingt *varāṭaka*, on multiplie par vingt : $\begin{array}{|c|}2\,800\\252\\\hline\end{array}$; la division effectuée, 11 *varāṭaka* sont obtenus, il reste $\begin{array}{|c|}28\\252\\\hline\end{array}$.

Si on simplifie par vingt-huit, on a une fraction de $\begin{array}{|c|}1\\9\\\hline\end{array}$ de *varāṭaka*.

Cet exemple est, en quelque sorte, le contraire du précédent : connaissant le prix de soixante-trois pala *de camphre, on demande quel sera le prix de douze* pala *et un quart. Le problème est résolu de la même manière, sans aucune difficulté, et la plus grande partie de l'exposé du commentateur consiste à convertir les unités monétaires en unités de plus en plus petites pour avoir un minimum de résultats fractionnaires. Il restera finalement 1/9 de la plus petite unité, le* varāṭaka.

Si, avec soixante-trois pala… p. 13

La construction littérale est facile à comprendre. Le critère et la quantité voulue sont transformés en *paṇa* pour opérer avec des quantités de même classe, parce qu'il a été dit : « *avec soixante-dix* paṇa ».

Si pour deux drachmes on obtient une khārī… p. 13

On pose : $\begin{array}{|c|c|c|}32 & 9 & 70\\1 & 8 & 1\\\hline\end{array}$.

Comme précédemment, sont obtenues 2 *khārī*, 7 *droṇa*, 1 *āḍhaka* et 2 *prastha*.

Cet exemple attire notre attention sur le fait qu'il y a lieu d'opérer avec des unités cohérentes : ici le critère (pramāṇa) *est exprimé en drachmes tandis que la « quantité voulue »*

Si pour deux drachmes on obtient une khārī… p. 13

(icchā) *est exprimée en* paṇa*, unité monétaire plus petite ; les drachmes sont donc transformées en* paṇa *: une drachme égale seize* paṇa *d'où le rapport 32/1 posé au début du tableau. Quant à 9/8, le fruit, c'est une* khārī *plus 1/8 de* khārī.
En appliquant la règle donnée, on obtient :

$$\frac{9 \times 70}{8 \times 32} = \frac{630}{256} = 2 + \frac{118}{256}$$

Le résultat est obtenu en khārī*, unité de mesure de grain, dont l'unité inférieure est le* droṇa*, seize fois plus petite ; en multipliant le reste fractionnaire par seize, on obtiendra le nombre de* droṇa *:*

$$\frac{16 \times 118}{256} = 7 + \frac{96}{256}$$

En multipliant ce dernier reste par quatre, on obtiendra celui-ci en āḍhaka *:*

$$\frac{4 \times 96}{256} = 1 + \frac{128}{256}$$

Puis, comme le prastha *est le quart de* āḍhaka*, en multipliant à nouveau par quatre le reste on obtient le résultat annoncé :*

$$\frac{4 \times 128}{256} = 2$$

2 khārī*, 7* droṇa*, 1* āḍhaka *et 2* prastha.

Lorsque, dans une règle de trois, une diminution pour le fruit est produite par un accroissement de la quantité voulue ou un accroissement du fruit par une diminution de la quantité voulue, **tatra** pour la vie courante, la règle de trois inverse doit être connue des experts en calcul.

Règle de trois inverse (circonstances) p. 13

Le prix des êtres vivants dont l'âge est avancé est diminué, pour ceux dont l'âge est plus petit il est augmenté. De même **haimane** pour la purification de l'or, quand il y a diminution du poids, il y a accroissement du nombre de carats et quand il y a accroissement du poids, il y a diminution du nombre de carats. Il y a une diminution du compte pour les tas de grains qui ont été mesurés avec une petite mesure, si on les mesure avec une mesure plus grande ou il y a un accroissement du compte pour ceux qui ont été mesurés avec une grande mesure, si on les mesure avec une plus petite mesure. Dans ces cas, et d'autres, on utilise la règle de trois inverse.

Règle de trois inverse (applications) p. 13

Si une femme de seize années atteint une somme de trente-deux *niṣka*, alors une de vingt ans, combien atteindra-t-elle ? Et si **ukṣā** un bœuf de

Si une femme de seize ans… p. 14

trait de deux ans atteint la somme de quatre *niṣka*, alors combien un animal de trait de six ans atteindra-t-il ?

Pour le premier exemple, on pose : 16, 32, 20.
Avec la méthode du renversement, la quantité médiane est multipliée par le critère : 512. Une fois divisé par la quantité voulue 20, sont obtenus : 25 *niṣka* et une fraction de $\begin{array}{|c|}3\\5\\\hline\end{array}$ de *niṣka*, après simplification par quatre.

Deuxième exemple. On pose : 2, 4, 6.
Ici aussi, la quantité médiane est multipliée par le critère : 8. Une fois divisé par la quantité voulue 6, sont obtenus : 1 *niṣka* et une fraction de $\begin{array}{|c|}1\\3\\\hline\end{array}$ de *niṣka* après simplification par deux.

Ici, la femme ou le bœuf étant avancés en âge, leur prix est diminué ; les deux étant de moindre âge, leur prix est augmenté. C'est pourquoi il y a usage de la règle inverse.

La règle de trois « inverse » correspond au cas où les quantités varient de manière inversement proportionnelle : une augmentation de l'âge de l'animal correspond à une diminution du prix ou un affinage moindre de l'or entraîne la possibilité d'acheter un poids plus important de ce métal pour une somme moins importante. Si on reprend

Si une femme de seize ans… p. 14

Si	*2 ans*	*donnent*	*1/4* niṣka
alors	*6 ans*	*donneront*	*1/x* niṣka

Soit en utilisant l'égalité des rapports :

$$\frac{2}{6} = \frac{1/4}{1/x}$$

ou :

$$x = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{8}{6} = 1 + \frac{1}{3}$$

Ce qui est bien la formule donnée par Bhāskara : le critère (2) est multiplié par le « fruit » (4) et divisé par la « quantité voulue » (6).

Un *gadyāṇaka* d'or à dix carats est obtenu avec un seul *niṣka*, dans ces conditions, combien en obtient-on à quinze carats ?

Si on obtient un *gadyāṇaka* d'or… p. 14

On pose : 10, 1, 15.

Suivant la méthode précédente, on obtient une fraction de $\begin{array}{|c|} 2 \\ 3 \\ \hline \end{array}$ de *gadyāṇaka*.

Ici aussi, s'il y a augmentation du nombre de carats, il y a diminution du poids de l'or pour une quantité voulue, s'il y a diminution du nombre de carats avec la même quantité voulue, il y a augmentation du poids pour cette quantité médiane ; la règle inverse est donc utilisée.

Un tas de grains … p. 14

Un tas de grains a été mesuré à l'aide d'une mesure qui est un récipient jaugeant sept *droṇa*, on obtient cent mesures ; si ce même tas est mesuré à l'aide d'une mesure qui est un récipient jaugeant cinq *droṇa*, combien y aura-t-il alors de mesures ?

Ici aussi, s'il y a augmentation de la capacité, il y aura diminution du compte pour quantité voulue et, s'il y a diminution de la capacité, il y aura augmentation du compte ; il y a donc un calcul avec la règle inverse.

On pose : 7, 100, 5. On obtient 140 mesures.

Un tas de grains … p. 14

Le nombre de mesures étant inversement proportionnel à la taille des récipients avec lesquels on effectue la mesure, on applique la règle de trois inverse en multipliant le « fruit », 100, par le « critère », 7, et on divise par la « quantité voulue », 5 :

$$\frac{7 \times 100}{5} = 140$$

Règles de cinq, sept, neuf et onze p. 14

Les quantités pour les règles de cinq, sept, neuf ou onze étant posées, on doit faire une transposition des fruits et aussi faire une transposition des dénominateurs qui se correspondent ; ensuite, le produit de la pile la plus abondante étant divisé par le produit de la pile la moins abondante, on obtient le résultat.

Le côté le moins abondant où le fruit a été apporté est ce qui s'appelle la pile la plus abondante.

Si en un mois, pour cent unités… p. 14

Si, un mois étant écoulé, pour cent unités prêtées avec accroissement, on a cinq unités — dont le nom technique est intérêts — dis quel intérêt il y a pour seize unités prêtées avec accroissement en fonction du cours du capital, une fois une année écoulée ? **Tathā** de même, énonce la durée, à partir d'un fruit et d'un capital d'origine connus. Ensuite, ô calculateur, ayant connaissance de la durée écoulée et du fruit que sont les intérêts, énonce le capital d'origine.

Ainsi, avec cinq compartiments se répondant les uns aux autres, le calcul d'un sixième — qui est inconnu — peut être connu.

On pose :

1	12
100	16
5	

Après avoir déplacé le fruit, 5, de l'autre côté :

1	12
100	16
	5

, le produit des piles de chaque côté donne : 100 et 960.

Le produit issu de la pile devenue la plus abondante après l'adjonction du fruit, est 960 ; étant divisé par le produit de la pile la moins abondante, 100, le quotient est l'intérêt : 9 unités et, après une simplification par vingt du reste, 60, une fraction d'unités de

3
5

.

Pour connaître la durée recherchée, on pose :

1	º
100	16
5	48
	5

Une fois la transposition des deux fruits faite, on pose :

1	º
100	16
48	5
5	

,

puis, transposition du dénominateur :

1	º
100	16
48	5
	5

, ces deux piles après produit donnent : 4 800 et 400.

Le produit de la pile la plus abondante, ayant pour partie importante le fruit, est divisé par la plus petite pile ; le quotient est la durée recherchée : 12 mois.

Pour connaître le capital on pose :

1	12
100	º
5	48
	5

Il y a permutation des fruits et transposition du dénominateur de l'autre côté, comme ceci :

1	12
100	º
48	5
	5

, les deux piles multipliées donnent : 4 800 et 300. Ayant divisé par la moins abondante, le quotient est le capital d'origine : 16 unités.

Les règles de cinq, sept, neuf et onze qui sont expliquées ici correspondent à ce que nous appelons des règles de trois composées : il s'agit en fait d'un problème de proportionnalité — comme la règle de trois — qui se résout à l'aide de plusieurs règles de trois successives. Ainsi pour le premier exemple donné : « si cent unités de capital placées pendant un mois rapportent cinq unités, combien rapporteront seize unités placées pendant un an », on a besoin de deux règles de trois : la première nous permet de savoir combien rapporteront seize unités placées pendant un mois :

Si en un mois, pour cent unités… p. 14

Si	100 *unités*	*donnent*	*5 unités*	*en un mois*
alors	16 *unités*	*donneront*	y	*en un mois*

Les intérêts étant directement proportionnels au capital on a donc l'égalité de rapports suivante :

$$\frac{y}{5} = \frac{16}{100} \quad \text{ou :} \quad y = \frac{5 \times 16}{100}$$

Les intérêts sont aussi directement proportionnels à la durée du placement, une deuxième règle de trois nous permet de résoudre le problème en faisant intervenir maintenant les autres données connues du problème ; pour simplifier nous conservons le résultat de la règle de trois précédente sous la forme « y » :

Si	1 *mois*	*pour* 16 *unités*	*rapporte*	y
alors	12 *mois*	*pour* 16 *unités*	*rapporteront*	x

Ce qui donne alors les rapports suivants :

$$\frac{x}{y} = \frac{12}{1} \quad \textit{ou :} \quad x = 12\,y = 12 \times \frac{5 \times 16}{100}$$

Le procédé de calcul enseigné par Bhāskara est extrêmement simple dans sa mise en œuvre : il met en parallèle les données de même type sur deux colonnes, la première colonne correspondant aux « anciennes » données, la deuxième aux « nouvelles », cette dernière comportant une case vide[18] *correspondant à la quantité cherchée puis il demande de transposer d'une colonne à l'autre « le fruit », c'est-à-dire la quantité produite dans le problème — ici les intérêts — et non la quantité cherchée ! Le résultat est obtenu en divisant le produit des éléments contenus dans la colonne où ils sont les plus nombreux — c'est-à-dire la colonne où on n'a pas laissé de case vide— par le produit des éléments contenus dans la colonne où ils sont les moins nombreux. Ce qui donne :*

$$\begin{array}{r|c|c|} \textit{Durée :} & 1 & 12 \\ \textit{Capital :} & 100 & 16 \\ \textit{Intérêts :} & 5 \longleftrightarrow & \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|} 1 & 12 \\ 100 & 16 \\ & 5 \\ \hline \end{array}$$

Et donc les intérêts sont égaux à : $\dfrac{12 \times 16 \times 5}{100} = \dfrac{48}{5}$

Les deux autres questions du problème se résolvent aussi à l'aide de deux règles de trois successives.

Connaissant le capital, les intérêts produits et la durée pour l'un des deux couples capital/intérêt, il faut trouver la durée pour l'autre couple :

Si	100 *unités*	*donnent*	5 *unités*	*en un mois*
alors	16 *unités*	*donneront*	y *unités*	*en un mois*

On retrouve les mêmes proportions que pour le problème précédent :

$$\frac{y}{5} = \frac{16}{100} \quad \text{ou :} \quad y = \frac{5 \times 16}{100}$$

Une deuxième règle de trois nous permet de calculer la durée nécessaire pour que 16 *unités produisent* $48/5$ *d'unités en intérêts :*

Si	y *unités*	*sont produites par* 16 *unités*	*en un mois*
alors	$\dfrac{48}{5}$ *unités*	*seront produites par* 16 *unités*	*en x mois*

Ce qui donne l'égalité de rapports suivante :

$$\frac{\frac{48}{5}}{y} = \frac{x}{1} \quad \textit{ou} \quad x = \frac{48}{5} \times \frac{100}{5 \times 16} = \frac{48 \times 100}{5 \times 5 \times 16}$$

On comprend, sur cet exemple, la deuxième prescription de Bhāskara : « on procédera à la transposition des dénominateurs » *; le dénominateur de la fraction* $\dfrac{48}{5}$*, qui se trouve elle-même au numérateur d'une fraction, devient un élément multiplicateur du dénominateur de la « grande » fraction. Si nous avions de même une fraction comme élément*

18. Dans le texte, nous avons noté cette place vide par ce signe : ० qui ressemble au zéro en écriture *devanāgarī* que les scribes utilisent à cet effet. Utiliser le zéro dans la traduction aurait rendu les opérations incompréhensibles !

du dénominateur de la « grande » fraction, son dénominateur deviendrait un élément multiplicateur du numérateur de la grande fraction :

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \times c} \quad et \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \times c}{b}$$

La disposition préconisée dans la Līlāvatī *est donc la suivante ; nous avons gardé le trait de fraction — que les Indiens ne notent pas — pour la disposition initiale mais une fois l'échange des dénominateurs effectué, nous ne pouvons le garder car il est sans signification :*

$$\begin{array}{l|c|c|} \textit{Durée :} & 1 & \\ \textit{Capital :} & 100 & 16 \\ \textit{Intérêts :} & 5 \longleftrightarrow & \frac{48}{5} \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 1 & \\ 100 & 16 \\ \frac{48}{5} \longleftrightarrow & 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 1 & \\ 100 & 16 \\ 48 & 5 \\ & {\scriptstyle 5} \\ \hline \end{array}$$

Cet exemple montre les ambiguïtés de la notation employée : Bhāskara nous dit : « le produit issu des quantités plus nombreuses étant divisé par le produit des quantités moins nombreuses... » *or, une fois l'échange des dénominateurs effectué, il y a le même nombre de quantités dans les deux colonnes ! Nous avons noté en utilisant une taille de caractère plus petite, le dénominateur* 5 *une fois changé de colonne. Le commentaire vient alors à notre secours :* « Là où le fruit, parmi les quantités moins nombreuses, a été déplacé est ce qui s'appelle le côté des quantités plus nombreuses. » *Le « fruit »,* $48/5$*, a été déplacé de la colonne de droite à celle de gauche, le nombre de mois cherché est donc obtenu en divisant le produit des éléments de la colonne de gauche par le produit de ceux de la colonne de droite :*

$$\frac{1 \times 100 \times 48}{16 \times 5 \times 5} = 12$$

Enfin le troisième problème nous demande de trouver le capital, connaissant la durée et les intérêts produits :

Si	100 *unités*	*produisent*	5 *unités*	*en un mois*
alors	100 *unités*	*produiront*	y *unités*	*en douze mois*

$$\frac{y}{5} = \frac{12}{1} \quad ou : \quad y = 5 \times 12$$

Si	100 *unités*	*produisent*	y *unités*	*en douze mois*
alors	x *unités*	*produiront*	$\frac{48}{5}$ *unités*	*en douze mois*

$$\frac{x}{100} = \frac{\frac{48}{5}}{y} \quad ou : \quad x = \frac{\frac{48}{5} \times 100}{5 \times 12} = \frac{48 \times 100}{5 \times 5 \times 12}$$

Selon la disposition indienne :

$$\begin{array}{r|c|c|}
\textit{Durée :} & 1 & 12 \\
\textit{Capital :} & 100 & \\
\textit{Intérêts :} & 5 \longleftrightarrow & \frac{48}{5} \\
\hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|}
1 & 12 \\
100 & \\
\frac{48}{5} & \longleftrightarrow 5 \\
\hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|}
1 & 12 \\
100 & \\
48 & 5 \\
 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

Il y a ici la même ambiguïté quant au nombre de termes de chaque colonnes, mais le « fruit » ayant été déplacé de la colonne de droite à celle de gauche, on doit diviser le produit des nombres situés dans la colonne de gauche par le produit de ceux situés dans la colonne de droite :

$$\frac{1 \times 100 \times 48}{12 \times 5 \times 5} = 16$$

Si pour cent *niṣka* donnés pendant un mois et un tiers, on en a cinq et un cinquième sous forme d'augmentation, que soit dit clairement selon cette méthode ce que sera cette augmentation pour soixante-deux augmenté d'un demi pendant trois mois et un cinquième.

Si les intérêts pour cent unités… p. 14

On pose, avec réduction au même dénominateur selon la classe *bhāgānubandha* :

$$\begin{array}{|c|c|}
\frac{4}{3} & \frac{16}{5} \\
100 & \frac{125}{2} \\
\frac{26}{5} & \\
\hline
\end{array}$$

et, une fois effectuée l'interversion du fruit et des dénominateurs, on pose :

$$\begin{array}{|c|c|}
4 & 16 \\
5 & 3 \\
100 & 125 \\
2 & 26 \\
5 & \\
\hline
\end{array}$$

Les deux piles sont multipliées : 20 000 et 156 000. La plus grande pile, avec fruit, est divisée par la plus petite, sans fruit : $\begin{array}{|c|} 156\,000 \\ 20\,000 \\ \hline \end{array}$.

Le quotient est de 7 unités et le reste, simplifié par quatre mille, est une fraction de l'unité : $\begin{array}{|c|}4\\5\\\hline\end{array}$.

Dans ce cas aussi, comme précédemment, le calcul du temps, des richesses etc., qui sont inconnus, doit être ainsi compris.

Si les intérêts pour cent unités… p. 14

Pour distinguer les fractions, nous avons utilisé des caractères plus petits et modifié les espacements dans la disposition de départ.

Les durées sont respectivement de un mois et un tiers, soit quatre tiers et trois mois et un cinquième, soit seize cinquièmes ; quant au deuxième montant il est de soixante-deux et un demi, soit cent vingt-cinq demis.

La méthode donnée nous fait faire successivement l'échange des « fruits », puis l'échange des dénominateurs ; en reprenant le schéma de notre précédent commentaire, on obtient :

$$\begin{array}{|c|c|}\frac{4}{3} & \frac{16}{5}\\ 100 & \frac{125}{2}\\ \frac{26}{5} \longleftrightarrow & \\ \hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|}\frac{4}{3}\longleftrightarrow & \frac{16}{5}\\ 100\longleftrightarrow & \frac{125}{2}\\ \longleftrightarrow & \frac{26}{5}\\ \hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|}4 & 16\\ 5 & 3\\ 100 & 125\\ 2 & 26\\ 5 & \\ \hline\end{array}$$

On peut encore voir ici l'ambiguïté de la notation, et le commentateur nous le rappelle, il faut diviser le produit des éléments de la colonne où le fruit a été déplacé, c'est-à-dire la colonne de droite, par le produit de ceux de la colonne d'où le fruit a été retiré :

$$\frac{16 \times 3 \times 125 \times 26}{4 \times 5 \times 100 \times 2 \times 5} = \frac{156\,000}{20\,000} = 7 + \frac{4}{5}$$

Si huit pièces d'étoffe tissées… p. 15

Il y a huit pièces d'étoffe tissées de soie, de trois coudées de large et huit coudées de long, supérieures par leurs apparences bien fabriquées, de qualité égale en poids et en dessins. Si ces huit pièces d'étoffe sont acquises pour cent *niṣka*, alors une seule pièce d'étoffe tissée de soie — possédant des dessins sur la longueur comme décrit précédemment — de trois coudées et demi de long et d'une demie coudée de large, **kiṃ labhate** pour combien est-elle acquise ? Si tu connais le négoce, ô commerçant, dis-le rapidement.

On pose :

3	1
1	2
8	7
1	2
8	1
1	1
100	
1	

Les fruits et dénominateurs une fois déplacés de l'autre côté, on pose :

3	1
2	1
8	7
2	1
8	1
1	1
º	100
1	º

Les deux piles sont multipliées comme précédemment : 768 et 700.
La pile qui a acquis le fruit est la plus abondante[19] ; celle-ci étant divisée par la moins abondante dont le fruit a été ôté[20], il est obtenu : *niṣka* 0. Dans un *niṣka*, il y a seize drachmes ; après avoir multiplié par seize, une fois divisé par le diviseur précédant, sont obtenus : drachmes, 14, *paṇa*, 9, *kākiṇī*, 1, *vārāṭaka*, 6 et, parce qu'une simplification est impossible, une fraction de

2
3

de *vārāṭaka*.

La règle de sept, comme la règle de cinq, est une règle de trois composée — de même que les règles de neuf et onze qui suivent — et la méthode pour les appliquer peut être

Si huit pièces d'étoffe tissées… p. 15

19. C'est-à-dire celle de droite, dont le produit est égal à 700.
20. C'est-à-dire celle de gauche, dont le produit est égal à 768.

expliquée en utilisant plusieurs règle de trois consécutives, leur nombre augmentant en fonction du nombre de quantités mises en jeu.
Pour expliquer la validité de la règle édictée par Bhāskara problème sous l'aspect de la proportionnalité : une grandeur est proportionnelle à un certain nombre d'autres et on cherche quelle valeur prendra cette grandeur si on fait varier la valeur des autres. Dans l'exemple que nous venons de voir, le prix des étoffes est proportionnel à la longueur, à la largeur et au nombre des pièces ; connaissant le prix pour un nombre donné de pièces ayant une longueur et une largeur fixées, on se demande quel sera le prix pour un autre nombre de pièces ayant une autre longueur et une autre largeur.
On peut présenter le problème sous la forme suivante :

	Prix	*Longueur*	*Largeur*	*Quantité*
Valeurs 1 :	a_1	b_1	c_1	d_1
Valeurs 2 :	y	b_2	c_2	d_2

Dans le problème posé, $a_1 = 100$, $b_1 = 8$, $c_1 = 3$ *et* $d_1 = 8$ *sont les anciennes valeurs pour lesquelles on connaît le prix et les nouvelles valeurs sont* $b_2 = 3\,1/2$, $c_2 = 1/2$ *et* $d_2 = 1$.
On procède pas à pas ; le prix et la longueur étant proportionnels, on peut écrire :

$$\frac{a_1}{y} = \frac{b_1}{b_2} \quad \textit{d'où} \quad y = a_1 \times \frac{b_2}{b_1}$$

Maintenant, le prix est aussi proportionnel à la largeur ; on part du tableau suivant où l'on cherche le nouveau prix compte tenu du prix y *que l'on vient de calculer :*

Prix	*Longueur*	*Largeur*	*Quantité*
y	b_2	c_1	d_1
z	b_2	c_2	d_2

$\frac{y}{z} = \frac{c_1}{c_2}$ *d'où :* $z = y \times \frac{c_2}{c_1}$
En remplaçant y *:* $z = a_1 \times \frac{b_2}{b_1} \times \frac{c_2}{c_1}$
Enfin, le prix est proportionnel au nombre de pièces ; en tenant compte de ce que nous avons déjà calculé, on a maintenant le tableau suivant :

Prix	*Longueur*	*Largeur*	*Quantité*
z	b_2	c_2	d_1
x	b_2	c_2	d_2

$\frac{z}{x} = \frac{d_1}{d_2}$ *d'où :* $x = z \times \frac{d_2}{d_1}$

*En remplaçant z : * $x = a_1 \times \dfrac{b_2}{b_1} \times \dfrac{c_2}{c1} \times \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{a_1 \times b_2 \times c_2 \times d_2}{b_1 \times c_1 \times d_1}$

On reconnaîtra dans la dernière fraction, le produit des éléments de la deuxième colonne, là où le fruit a été déplacé — a_1*, le prix — divisé par le produit des éléments de la première colonne, selon la méthode de Bhāskara.*

Nous avons expliqué plus haut pourquoi, toujours selon cette méthode, il fallait échanger les dénominateurs des fractions s'il y

Nous avons donné cette justification « moderne » en nous limitant à quatre grandeurs, ce qui correspond exactement à la règle de sept ; il est évident qu'on peut augmenter sans plus de difficultés le nombre de celles-ci et que les règles de neuf et onze qui suivent sont d'ores et déjà expliquées !

La méthode de Bhāskara. Dans le texte, le commentateur — les scribes ? — a choisi de faire correspondre des fractions, même quand la quantité est mesurée par un nombre entier, en mettant comme dénominateur « un » dans ce dernier cas :

$$\begin{array}{l|c|c|}
\textit{Largeur :} & \frac{3}{1} & \frac{1}{2} \\
\textit{Longueur :} & \frac{8}{1} & \frac{7}{2} \\
\textit{Quantité :} & \frac{8}{1} & \frac{1}{1} \\
\textit{Prix :} & \frac{100}{1} \longleftrightarrow & \\
\hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|}
\frac{3}{1} \longleftrightarrow & \frac{1}{2} \\
\frac{8}{1} \longleftrightarrow & \frac{7}{2} \\
\frac{8}{1} \longleftrightarrow & \frac{1}{1} \\
 & \frac{100}{1} \\
\hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|}
3 & 1 \\
2 & 1 \\
8 & 7 \\
2 & 1 \\
8 & 1 \\
1 & 1 \\
 & 100 \\
\hline
\end{array}$$

On divise le produit des nombres de la colonne de droite par celui des nombres de la colonne de gauche :

$$\frac{1 \times 1 \times 7 \times 1 \times 1 \times 1 \times 100}{3 \times 2 \times 8 \times 2 \times 8 \times 1} = \frac{700}{768}$$

Comme toujours quand on a un nombre fractionnaire, on passe à l'unité inférieure ; le prix étant supposé être en niṣka*, on convertit en drachme en multipliant par* 16 *:*

$$\frac{16 \times 700}{768} = \frac{11\,200}{768} = 14 + \frac{448}{768}$$

On multiplie le reste par 16 *pour obtenir des* paṇa *:*

$$\frac{16 \times 448}{768} = \frac{7\,168}{768} = 9 + \frac{256}{768}$$

On multiplie le reste par 4 *pour obtenir des* kākiṇī *:*

$$\frac{4 \times 256}{768} = \frac{1\,024}{768} = 1 + \frac{256}{768}$$

On convertit le reste en varāṭaka *en multipliant par* 20 *:*

$$\frac{20 \times 256}{768} = \frac{5\,120}{768} = 6 + \frac{512}{768} = 6 + \frac{2}{3}$$

Ye des planches en bois ont douze doigts en épaisseur, **caturvargāṅgulāḥ** seize doigts en largeur et quatorze de ce qui a la nature d'une coudée, en longueur ; trente, ayant de telles caractéristiques, rectilignes et débarrassées des défauts tels que nœuds et trous, rapportent cent unités dans une vente à prix unique ; elles sont acquises pour cent *niṣka*, telle est la signification.

Des planches qui ont douze doigts…
p. 15

D'autre part, **etāḥ mitayaḥ** les mesures précisément énoncées auparavant sont diminuées de quatre en largeur, épaisseur et longueur **yeṣām** pour d'autres planches décrites comme précédemment, c'est-à-dire : huit doigts pour l'épaisseur, douze doigts pour la largeur et dix coudées pour la longueur ; quel prix obtiennent quatorze planches ayant de telles caractéristiques ? Par l'intermédiaire d'une question, l'auteur apporte une clarification : « Dis moi cela, ô mon cher ! »

On pose :

12	8
16	12
14	10
30	14
100	º

Ici, après avoir déplacé le fruit de l'autre côté et effectué les multiplications de chaque côté, les deux quantités 80 640 et 1 344 000 sont obtenues.

La division effectuée, on obtient 16 *niṣka* et une fraction de $\begin{array}{|c|}2\\3\end{array}$ de *niṣka*.

Cet exemple ajoute une grandeur par rapport au précédent : l'épaisseur des planches. Les mesures données sont entières, ce qui supprime la procédure d'échange des dénominateurs.

Des planches qui ont douze doigts…
p. 15

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|}
\textit{Épaisseur :} & 12 & 8 & & 12 & 8 \\
\textit{Largeur :} & 16 & 12 & & 16 & 12 \\
\textit{Longueur :} & 14 & 10 & \longrightarrow & 14 & 10 \\
\textit{Quantité :} & 30 & 14 & & 30 & 14 \\
\textit{Prix :} & 100 \longleftrightarrow & & & & 100
\end{array}$$

Le prix pour le deuxième lot de planches est donc :

$$\frac{100 \times 14 \times 10 \times 12 \times 8}{30 \times 14 \times 16 \times 12} = \frac{1\,344\,000}{80\,640} = 16 + \frac{5\,376}{8\,064} = 16 + \frac{2}{3}$$

Ye les planches décrites dans le précédent exemple sont prises comme critère. Si elles ont été installées **mātre** à une distance d'une *gavyūti* et si, pour leur convoyage, il y a huit drachmes pour la location des conducteurs de chariots, alors, ces autres planches qui ont été prises en tant que quantité voulue et décrites par des mesures diminuées de quatre par rapport aux mesures précédentes, quel sera **mitiḥ** le montant de la location du transport pour leur installation à une distance de six *gavyūti* ? Après avoir bien compris, dis-le !

Les planches qui ont les dimensions… p. 15

On pose :

12	8
16	12
14	10
30	14
1	6
8	º

Après avoir déplacé, comme précédemment, le fruit de l'autre côté et effectué de chaque côté la multiplication, si la pile la plus importante — parce qu'augmentée du fruit — est divisée par la plus petite — dû à sa privation du fruit —, 8 drachmes sont obtenues pour la location.

On reprend le même exemple que précédemment en ajoutant une grandeur : la distance sur laquelle on transporte ces planches.

Les planches qui ont les dimensions… p. 15

Épaisseur :	12	8		12	8
Largeur :	16	12		16	12
Longueur :	14	10	$\longrightarrow$	14	10
Quantité :	30	14		30	14
Distance :	1	6		1	6
Prix :	8 $\longleftrightarrow$				8

$$\frac{8 \times 6 \times 14 \times 10 \times 12 \times 8}{1 \times 30 \times 14 \times 16 \times 12} = 8$$

Ce qui est dans les magasins est **bhāṇḍa** une marchandise. Si on pratique une contrepartie pour cela, **bhāṇḍapratibhāṇḍake** dans un échange de biens, **viparyasya** après avoir fait l'échange **harān** des dénominateurs

Pour des biens contre des biens… p. 15

et aussi **mūlye** des deux prix pour les deux biens, **tathaiva** comme pour la règle de cinq, après avoir déplacé le fruit de l'autre côté et effectué la multiplication de chaque côté, la règle du début doit être appliquée.

Iha dans la ville fortunée de Jambūsara[21], **vipaṇau** sur un lieu de vente, sur un marché aux légumes, aux fruits etc., si pour une drachme on obtient trois cents mangues, riches en saveur et bien sucrées, et aussi, pour un *paṇa*, trente grenades **varāṇi** pourvues de grandes qualités de saveur et de maturité, alors pour nous dont l'intention est un troc avec des grenades parce que nous avons entendu qu'il y avait un défaut dans la vente des fruits, combien obtient-on de grenades dans un échange avec dix mangues ? Ô mon ami, dis-le rapidement !

Si ici, on obtient trois cents mangues… p. 15

On pose :

16	1
300	30
10	

Une transposition du fruit de l'autre côté et un échange des deux prix sont pratiqués :

1	16
300	30
	10

Les deux piles sont multipliées : 300 et 4 800. La division de la pile la plus abondante par la moins abondante étant effectuée, 16 grenades sont obtenues.

On remarque, tout d'abord, que le commentateur convertit les drachmes en paṇa *pour traiter l'exemple ; une drachme vaut seize* paṇa.

Nous avons affaire à une règle de cinq : étant donnés cinq nombres, trouver un sixième répondant à des règles de proportionnalité auxquelles sont soumises les grandeurs mesurées par ces nombres. Dans le troc, les règles sont différentes de ce que nous avons vu jusqu'ici pour les exemples précédents ; en effet, nous cherchons à savoir combien nous obtiendrons de grenades en échange de mangues : si le prix à l'unité des grenades augmente, nous obtiendrons moins de grenades en échange des mangues ; la grandeur « prix » varie ici de manière inversement proportionnelle à la grandeur « échange ». Ceci explique que les prix passent d'une colonne à l'autre dans la procédure décrite par Bhāskara.

Si ici, on obtient trois cents mangues… p. 15

21. La ville où est né le commentateur, Gaṅgādhara, comme il le dit dans le poème propitiatoire au début de son commentaire.

Plus précisément, reprenons les tableaux dont nous nous sommes servis pour la règle de sept :

	Échange	*Quantité*	*Prix*
Valeurs 1 :	10	300	16
Valeurs 2 :	y	30	1

La grandeur « échange » est proportionnelle à la grandeur « quantité » (obtenue lors de l'achat) ; on a donc :

$$\frac{10}{y} = \frac{300}{30} \quad \textit{d'où} \quad y = 10 \times \frac{30}{300} = z$$

Pour faire intervenir la grandeur « prix », nous partons maintenant du tableau suivant :

Échange	*Quantité*	*Prix*
z	30	16
x	30	1

Mais cette fois-ci, nous avons vu que la grandeur « échange » est inversement proportionnelle à la grandeur « prix », on a donc :

$$\frac{z}{x} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{16} \quad \textit{d'où} \quad z = 16\,z = \frac{16 \times 30 \times 10}{300} = \frac{4\,800}{300} = 16$$

Maintenant, avec la disposition de Bhāskara :

$$\begin{array}{l|c|c|} \textit{Prix :} & 16 & 1 \\ \textit{Quantité :} & 300 & 30 \\ \textit{Échange :} & 10 \longleftrightarrow & \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|} 16 \longleftrightarrow & 1 \\ 300 & 30 \\ & 10 \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|} 1 & 16 \\ 300 & 30 \\ & 10 \\ \hline \end{array}$$

En divisant le produit des nombres de la colonne de droite par celui des nombres de la colonne de gauche, on obtient le résultat :

$$\frac{16 \times 30 \times 10}{300} = \frac{4\,800}{300} = 16$$

Transaction des mélanges
Calculs d'intérêts

Un montant, appelé critère, est multiplié par la durée unité de référence, puis le taux est multiplié par la durée écoulée voulue ; **te** les deux calculs placés séparément après avoir été multipliés par le montant composé, doivent être divisés par leur somme : les montants obtenus sont le montant d'origine et les intérêts, à savoir, le montant d'origine d'après le critère et le montant des intérêts d'après le taux. Règle générale p. 16

« *Yadvā* » : indication d'une autre méthode. Selon la méthode exposée dans l'exemple, le montant d'origine est [obtenu] par la formule de la règle de supposition et ôté du montant composé, le reste représente les intérêts.

Le montant pris comme « critère », pour autant qu'on en puisse juger par les exemples qui suivent, est 100 *; comme de nos jours, les intérêts sont calculés en pourcentage, la différence est la durée « unité de référence » qui est d'un mois, ce qui nous révèle une pratique de prêts à intérêts particulièrement élevés.* Règle générale p. 16

Cette règle a pour but de séparer, par un calcul, le capital de départ et le montant des intérêts quand on connaît le taux, la durée et le montant global, capital et intérêts — le montant composé (miśra) *—, obtenu au bout de cette durée.*

Le principe opératoire est, comme toujours chez Bhāskara, très simple : on multiplie le montant critère par le temps de référence, on multiplie le taux (sans le « pour cent ») par la durée puis on multiplie le montant composé par chacun des deux nombres obtenus et on divise ces résultats par la somme des deux premiers produits ; on obtient ainsi deux nombres, l'un représente le montant initialement prêté, l'autre le montant des intérêts produits pendant la période donnée. Gaṅgādhara nous donne un moyen mnémotechnique pour distinguer les deux : « le montant d'origine est obtenu du critère et le montant des intérêts d'après le fruit (le taux d'intérêt). »

Si on appelle C le capital prêté, t, le taux d'intérêt, et d, la durée du prêt, les intérêts produits sont donc égaux à :

$$I = C \times \frac{t}{100} \times d$$

La quantité composée (miśra) *est alors égale à :*

$$M = C + I = C + C \times \frac{t}{100} \times d = (100 + t \times d) \times \frac{C}{100}$$

La dernière égalité nous permet de retrouver facilement le capital d'origine si on connaît le montant composé :

$$C = \frac{100M}{100 + t \times d}$$

On reconnaît la règle donnée par Bhāskara pour effectuer ce calcul : le critère, 100*, est multiplié par le temps de référence* 1 *(mois) et le fruit t est multiplié par la durée d : $t \times d$.*

Le capital d'origine est bien le produit du montant composé, M, multiplié par le résultat de la première opération et divisé par la somme des deux résultats.
Connaissant le capital prêté et le montant composé, on peut maintenant calculer le montant des intérêts produits :

$$I = M - C = M - \frac{100M}{100 + t \times d} = \frac{M(100 + t \times d) - 100M}{100 + t \times d} = \frac{M \times t \times d}{100 + t \times d}$$

On reconnaît, dans la dernière égalité, la formule donnée pour calculer directement les intérêts à partir du montant composé.

Pañcakena selon l'usage qui est ainsi : pour cent unités dont l'accroissement est de cinq chaque mois, **abde** une année étant écoulée, **sakalāntaraṃ mūlam** on a la somme de l'accroissement et du montant d'origine ; si mille unités sont acquises, dis alors quel est le montant d'origine, quels sont les intérêts.

Si, en une année, un montant d'origine… p. 16

On pose 1, 100, 5, 12, 1000.
Ici, le montant critère, 100, est multiplié par la durée de référence, 1 mois : 100. Le taux, mentionné pour le critère, 5, est multiplié par la durée écoulée voulue, 12 : 60. La somme de ces deux placés séparément est le diviseur : 160. La première quantité, 100, est multipliée par le montant composé : 100 000 ; une fois divisée par le diviseur 160, le montant d'origine est obtenu : 625. La deuxième quantité, 60, est multipliée par le montant composé : 60 000 ; une fois divisée par le diviseur 160, le montant des intérêts est obtenu : 375.

Et maintenant, suivant la méthode de supposition il en est ainsi : une quantité arbitraire, 1, est postulée ; ayant considéré celle-ci même comme le montant d'origine, on exécute par la pensée une règle de cinq : « si, pendant un mois, le fruit pour cent est cinq, quel est-il alors pendant une année, pour la quantité choisie 1 ? »

On pose :

1	12
100	1
5	

Selon un procédé de calcul précédent[22], le fruit est obtenu :

3
5

; ce sont

22. Il s'agit ici des procédés développés dans le chapitre précédent, les règles de supposition, et, dans le cas présent, de la règle de cinq.

les intérêts pour une unité pendant une année révolue. Ceux-ci sont composés avec l'unité postulée en tant que montant d'origine : $\begin{array}{|c|}8\\5\\\hline\end{array}$. Maintenant, la donnée, 1000, doit être multipliée par l'unité arbitraire choisie et divisée par le fruit de cette quantité arbitraire $\begin{array}{|c|}8\\5\\\hline\end{array}$; le montant d'origine est obtenu : 625. Ce dernier étant ôté du montant composé, le reste représente les intérêts : 375.

La première méthode donnée par le commentateur applique à la lettre la règle donnée par Bhāskara : il suffit, dans notre commentaire précédent de remplacer M par $1\ 000$, t par 5 et d par 12 puisque le taux est un taux mensuel et que le prêt a une durée d'un an. Si, en une année, un montant d'origine… p. 16

Gaṅgādhara donne une deuxième méthode qui s'appuie sur deux procédés exposés précédemment : la règle de supposition, qui prescrit d'effectuer les calculs en donnant à l'inconnue une valeur arbitraire, le résultat cherché étant obtenu par une règle de trois et une règle de cinq puisque nous avons ici quatre quantités connues : la durée de référence, 1 mois ; le taux mensuel, 5, pour le montant de référence 100 ; la quantité choisie pour appliquer la règle de supposition est 1 et nous en cherchons une cinquième qui leur est proportionnelle.

Partant de la disposition adoptée dans ce traité : $\begin{array}{|c|c|}1 & 12\\100 & 1\\5 & \\\hline\end{array}$*, on déplace le fruit, 5, de la colonne de gauche dans celle de droite :* $\begin{array}{|c|c|}1 & 12\\100 & 1\\ & 5\\\hline\end{array}$*, et on divise le produit des éléments de la colonne de droite par le produit de ceux de la colonne de gauche :* $\dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{5}$.
Ceci correspond aux montant des intérêts pour la quantité arbitraire choisie, 1 ; si on les y ajoute, on obtient : $\dfrac{3}{5} + 1 = \dfrac{8}{5}$.
Il ne reste qu'à appliquer la règle de supposition :

$$\frac{1000 \times 1}{\frac{8}{5}} = \frac{1000 \times 5}{8} = 625$$

Ce résultat est le capital prêté, il suffit de l'ôter du montant composé pour obtenir le montant des intérêts produits.

Svakālāḥ les durées des critères doivent être multipliées **pramāṇaiḥ** par les montants critères ; **te** les quantités ainsi formées doivent être di- Leurs durées propres multipliées… p. 16

visées par leurs propres taux multipliés par leurs durées écoulées respectives ; après cela, leur somme est le diviseur et le montant composé est le multiplicateur. Ainsi, à partir de ces quantités, par l'action d'une multiplication et d'une division, les parts qui ont été prêtées sont respectivement produites.

Il s'agit ici de trouver chacune des parts d'une somme globale qui a été prêtée en plusieurs fois à des taux différents et pendant des durées différentes. Le montant des intérêts rapportés par chacune de ces parts est le même.

Leurs durées propres multipliées… p. 16

Si on appelle T *le montant total*[23] *de la somme prêtée et* A, B, C, *chacune des parts prêtées respectivement aux taux* t_A, t_B, t_C, *pendant des durées* d_A, d_B *et* d_C, *l'intérêt commun* I *est donc égal à :*

$$I = A \times \frac{t_A}{100} \times d_A = B \times \frac{t_B}{100} \times d_B = C \times \frac{t_C}{100} \times d_C$$

Ce qui nous permet de calculer chacune des parts en fonction de l'intérêt qu'elles produisent :

$$A = I \times \frac{100}{t_A \times d_A}\,; \quad B = I \times \frac{100}{t_B \times d_B}\,; \quad C = I \times \frac{100}{t_C \times d_C}$$

Nous savons que la somme des parties A, B, *et* C *est le capital total :*

$$\begin{aligned} T = A + B + C &= I \times \frac{100}{t_A \times d_A} + I \times \frac{100}{t_B \times d_B} + I \times \frac{100}{t_C \times d_C} \\ &= I \underbrace{\left[\frac{100}{t_A \times d_A} + \frac{100}{t_B \times d_B} + \frac{100}{t_C \times d_C} \right]}_{S} \end{aligned}$$

Si nous appelons, comme nous l'avons fait, S *la somme des fractions*[24]*, l'intérêt commun* I *est donc égal à :*

$$I = \frac{T}{S}$$

En reportant cette valeur dans les formules qui donnent chacune des parties en fonction de l'intérêt :

$$A = \frac{100}{t_A \times d_A} \times \frac{T}{S}\,; \quad B = \frac{100}{t_B \times d_B} \times \frac{T}{S}\,; \quad C = \frac{100}{t_C \times d_C} \times \frac{T}{S}$$

on obtient la formule donnée par Bhāskara : chacune des parties est égale au critère, 100*, divisé par le produit du taux auquel elle est prêtée et de la durée, multiplié par le montant total,* T*, divisé par la somme de toutes les fractions correspondant à chacune des parties.*

23. C'est ce montant total qui est appelé, dans cette règle, « montant composé » *(vimiśra)* ; ce terme désignait dans la règle précédente, le montant prêté augmenté des intérêts.

24. Une réduction au même dénominateur ici, rendrait la formule illisible.

Une somme a été prêtée trois fois, par un certain créancier à un certain débiteur, de la manière suivante : une [part] a été prêtée à cinq pour cent, pour laquelle sept mois se sont écoulés ; une part a été prêtée à trois pour cent, dix mois se sont écoulés pour elle ; de même, une part a été prêtée à quatre pour cent, pour cette dernière, cinq mois se sont écoulés.

Ô calculateur, cent *niṣka* diminués de six… p. 16

Ainsi, avec ces trois parts, une triade a été prêtée, chacune des parts du montant étant donnée à des moments différents et prêtée avec des accroissements inégaux ; la totalité de la somme originelle prêtée est de cent *niṣka* diminués de six et, pour ces trois quantités, l'intérêt rapporté est le même pendant lesdits mois, c'est-à-dire que le fruit produit est identique pour la première, celle du milieu et la dernière de ces quantités, aussi longtemps qu'elles ont été prêtées. Dans ces conditions, ô mathématicien ! Dis respectivement les mesures des sommes qui composent les parts et aussi le montant de l'accroissement égal.

On pose :

1| 7	1| 10	1| 5
100	100	100
5	3	4

La somme originelle composée est de 94 et les durées respectives : 1, 1, 1, sont multipliées par les montants critères : 100, 100, 100. Les taux : 5, 3, 4, sont multipliés par les durées écoulées : 7, 10, 5 ; sont produits : 35, 30, 20. Les quantités précédentes sont divisées —

100	100	100
35	30	20

— la somme de ces dernières, placées séparément, est, après avoir été simplifiée comme il convient :

235
21

. Les trois quantités précédemment mentionnées, sont multipliées par la somme composée 94 :

9400	9400	9400
35	30	20

Après avoir divisé par leur somme — *le dénominateur et le numérateur ayant été intervertis* etc. — les parts de la somme originelle sont obtenues séparément et dans l'ordre : 24, 28, 42.

De celles-ci, il est possible de déduire le montant des intérêts, par des calculs séparés fondés sur une règle de cinq, de la manière suivante : on pose

1	7
100	24
5	

Si l'accroissement pour cent pendant un mois est cinq, combien a-t-on alors pour vingt-quatre pendant sept mois ? De même aussi pour les trois parts, après avoir exécuté en pensée trois règles de cinq, les intérêts sont les mêmes pour les trois parts, le montant en est :

42	42	42
5	5	5

. Huit unités et deux cinquième d'unité.

Le commentateur suit pas à pas la méthode de la règle. Les durées et montants critères sont tous les mêmes : 1 mois et 100 unités, leur produit est donc 100. Le produit des taux par les durées correspondant à chacune des parts A, B et C sont respectivement 35, 30 et 20, d'où les fractions $\frac{100}{35}$, $\frac{100}{30}$ et $\frac{100}{20}$, dont on fait la somme comme le prescrit la règle : $\frac{235}{21}$. On a donc :

$$A = \frac{100}{35} \times 94 \times \frac{21}{235} = 24\,;B = \frac{100}{30} \times 94 \times \frac{21}{235} = 28\,;C = \frac{100}{20} \times 94 \times \frac{21}{235} = 42$$

Ô calculateur, cent *niṣka* diminués de six… p. 16

Le problème posé en exemple demande aussi de calculer le montant commun des intérêts. La règle est muette sur ce point et Gaṅgādhara propose d'utiliser une règle de cinq pour chacune des parts. Les calculs ne sont posés que pour la première part, voici ceux correspondant aux deux autres parts :

1	10
100	28
3	

,

1	5
100	42
4	

. En appliquant la méthode de la règle de cinq, on trouve bien le résultat indiqué.

Étant donnée cette question : « quand deux quantités sont prêtées pendant la même durée — la plus petite quantité avec un taux plus grand et la plus grande quantité avec un taux plus petit — quand aura-t-on un même gain pour ces deux quantités ? », la différence des deux montants d'origine divisée par la différence des gains mensuels est la durée nécessaire à un même accroissement.

Si le taux mensuel d'une quantité… p. 16

Parce qu'il y a en soi l'impossibilité d'un accroissement égal s'il y a un taux plus grand pour la plus grande quantité et un taux plus petit pour la plus petite, il est dit clairement dans cette formule : *« Si le taux mensuel d'une quantité inférieure est plus grand »* etc.

Cette règle, de même que l'exemple qui l'accompagne, ne semblent pas appartenir à la Līlāvatī*. On peut relever plusieurs raisons : seul le commentaire de Gaṅgādhara en fait état parmi tous les commentaires que nous avons consultés ; des manuscrits de ce commentaire, qui habituellement ne citent que le début des strophes, en font une citation intégrale ; la métrique* (āryā) *est, la plupart du temps erronnée et, pour l'exemple, la deuxième partie diffère totalement dans certains manuscrits, même si le sens en est identique.*

Si le taux mensuel d'une quantité… p. 16

Le problème posé est le suivant : étant données deux sommes, une plus grande et une plus petite, prêtées à des taux différents, la plus grande avec un intérêt plus petit que celui de la plus petite, quand obtiendrons-nous une même somme pour le capital et les intérêts cumulés ?

Gaṅgādhara fait remarquer que cela ne peut avoir lieu que dans le cas précisé par la règle : si la plus grande somme est prêtée à un taux tel que son rapport mensuel est supérieur à celui de la plus petite, il n'y a effectivement aucune possibilité d'obtenir un jour le même montant, capital et intérêts cumulés, pour les deux prêts.

On appelle A la quantité la plus grande prêtée au taux t_A et B, la quantité la plus petite prêtée au taux t_B. On a donc $A > B$ et, de plus, le rapport mensuel de A : $A \times \frac{t_A}{100}$, est inférieur à celui de B. On cherche le temps au bout duquel les sommes de chacune de ces deux quantités et des intérêts qu'elles produisent chacune pendant cette durée d deviennent égales, soit :

$$A + A \times \frac{t_A}{100} \times d = B + B \times \frac{t_B}{100} \times d$$

Égalité que l'on peut encore écrire :

$$A - B = B \times \frac{t_B}{100} \times d - A \times \frac{t_A}{100} \times d = \left[B \times \frac{t_B}{100} - A \times \frac{t_A}{100}\right] \times d$$

On obtient alors d :

$$d = \frac{A - B}{B \times \frac{t_B}{100} - A \times \frac{t_A}{100}}$$

Ce qui est bien la formule annoncée par la règle : $B \times \frac{t_B}{100}$ étant le montant des intérêts produits par la quantité B en un mois et de même pour A.

On voit bien sur cette formule la nécessité d'avoir un rapport mensuel plus faible pour la plus grande quantité : sinon la durée serait mesurée par un nombre négatif… ce qui serait difficile à interpréter !

Une centaine d'unités sont prêtées avec un accroissement de cinq pour cent et deux centaines avec un accroissement de deux pour cent ; dans ces conditions, si les gains pour les deux montants d'origine sont produits pendant une même durée, au bout de combien de temps y a-t-il le même montant pour ces deux quantités ?

Une centaine d'unités… p. 17

On pose :

1	1
100	200
5	2

Ici la différence des montants d'origine est 100. En rapport avec les deux taux, le gain mensuel est d'une part 5, d'autre part 4 ; la division étant faite par la différence – 1 – des deux, une durée de 100 mois est nécessaire pour la production d'un même montant.
On exécute maintenant deux règles de cinq : si pendant un mois on obtient cinq pour cent combien alors obtiendra-t-on pour cent, pendant cent mois ?
On pose :

1	100
100	100
5	

Selon la méthode, telle qu'elle a été enseignée, le montant des intérêts est 500.
Deuxième règle de cinq. Si pendant un mois, le taux est deux pour cent, alors combien obtiendra-t-on pour deux cents, en cent mois ?
On pose :

1	100
100	200
2	

Le gain obtenu pour ces mois est 400. Deux quantités égales sont obtenues qui sont les sommes des montants d'origine et des intérêts :

600
600

On doit toujours procéder ainsi.

Gaṅgādhara applique d'abord la règle pour calculer la durée nécessaire à l'obtention d'une même somme cumulée : intérêts et capital.
La somme la plus grande, 200, prêtée à 2 pour cent, rapporte 4 en un mois et la somme la plus petite, 100, prêtée à 5 pour cent, rapporte 5 en un mois. On applique la règle :

Une centaine d'unités… p. 17

$$d = \frac{200 - 100}{5 - 4} = 100$$

Puis il compléte le règle car, s'il nous est dit comment calculer la durée nécessaire à l'obtention d'un même montant pour les deux sommes, on ne nous dit pas comment se servir de ce résultat pour calculer la somme obtenue.

La méthode proposée consiste en deux règles de cinq qui permettent de calculer le rapport de chaque montant prêté. Selon la disposition adoptée pour calculer les règles de cinq, on déplace, dans le cas du plus petit montant, le 5 de la colonne de gauche dans la colonne de droite puis on divise le produit des nombres de la colonne de droite par le produit des nombres de la colonne de gauche, on obtient :

$$\frac{100 \times 100 \times 5}{1 \times 100} = 500$$

On fait de même avec le plus grand montant et on obtient :

$$\frac{100 \times 200 \times 2}{1 \times 100} = 400$$

Le montant des intérêts obtenus en 100 mois ajouté aux montant des capitaux prêtés — 100 dans le premier cas, 200 dans le deuxième — donne la même somme : 600.

Prakṣepakāḥ — c'est-à-dire : elles sont ajoutées — plusieurs quantités. Après les avoir ajoutées, on entreprend d'autres transactions. Le gain qui provient de l'apport doit être connu comme la quantité composée. Ces apports, posés séparément, sont multipliés par la quantité composée et divisés par la somme des apports, les gains respectifs sont produits.

Les apports en capital… p. 17

Il s'agit ici d'une simple règle de proportion : si plusieurs personnes s'associent pour faire du commerce, chacune apportant son capital propre, l'augmentation du capital de chacun est directement proportionnelle à l'augmentation du capital global et le facteur de proportionnalité est le rapport entre le capital global final et le capital global initial.

Les apports en capital… p. 17

Trois cents unités ont été obtenus, **vāṇijyāt** une fois faites des opérations commerciales, **miśradhanaiḥ**, c'est-à-dire : après avoir rassemblé leurs capitaux respectifs, par des commerçants, dont les capitaux initiaux étaient ainsi : cinquante unités augmentées de une pour l'un, soixante augmentées de huit pour un autre, quatre-vingt-dix diminuées de cinq pour le dernier. Dis les parts des capitaux de chacun, après avoir fait une répartition conformément à leur apport initial respectif.

Ô calculateur, trois cents unités… p. 17

On pose : 51, 68, 85; montant composé obtenu : 300; somme des apports : 204.

Les apports assemblés : 51, 68, 85, sont multipliés par le montant composé, 300, et divisés par leur somme, les montants suivant les parts respectives sont produits : 75, 100, 125.

Ces derniers sont diminués des montants initiaux, les gains sont : 24, 32, 40.

Ou bien, le montant composé, 300, diminué du montant initial, 204 est la somme de tous les gains : 96. Les parts de gains sont calculées comme précédemment, à partir de ce dernier montant composé, avec apports initiaux : 24, 32, 40.

Ou bien, en imaginant des règles de trois séparées : si pour un montant d'origine de 204, la part initiale est 51, quelle sera-t-elle pour le montant obtenu 300 ? Par le calcul, ces mêmes quantités sont produites : 75, 100, 125.

Dans tous les cas, un exemple doit être considéré de cette manière.

La première méthode est une application directe de la règle : chaque apport augmente dans une proportion égale au rapport des capitaux initiaux et finaux : $\frac{300}{204}$.

Ô calculateur, trois cents unités… p. 17

Pour la deuxième méthode, on calcule le gain global — la différence des capitaux — et chaque gain est alors calculé proportionnellement à la part de chacun dans le capital initial :

$$96 \times \frac{51}{204} = 24\,; \quad 96 \times \frac{68}{204} = 32\,; \quad 96 \times \frac{85}{204} = 40$$

Le calcul utilisant une règle de trois est identique à la première méthode.

Remplissage d'un bassin

Dans un bassin bien étanche, il y a quatre canaux d'alimentation et ceux-ci, étant ouverts séparément, emplissent un bassin de la manière suivante : le premier en un jour, le deuxième en une demi-journée, le troisième en un tiers de journée et le quatrième en un sixième de journée ; s'ils sont ouverts tous ensemble, en quelle fraction de journée le remplissent-ils alors ?

Ces canaux qui, séparément ouverts… p. 17

On pose : $\begin{array}{|c|c|c|c|} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$.

Les dénominateurs sont divisés par les numérateurs, de cette manière : $\begin{array}{|c|c|c|c|} 2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$. Leur somme est $\begin{array}{|c|} 12 \\ 1 \\ \hline \end{array}$. L'unité est divisée selon la formule : « après avoir interverti dénominateur et numérateur » ; le quotient est le temps de remplissage du bassin, la fraction de journée est $\boxed{\begin{array}{c}1\\12\end{array}}$,

soit cinq *ghaṭī*.

Le temps de remplissage d'un bassin est inversement proportionnel au débit de la fontaine qui l'alimente : les unités de mesure de référence sont ici, la journée pour le temps et la capacité d'un certain bassin pour le volume d'eau ; si une fontaine remplit le bassin en une demi-journée, elle remplira deux bassins en une journée, son débit (le volume fourni pendant une unité de temps) est donc égal à deux. S'il y a plusieurs fontaines, il suffit donc d'additionner leurs débits pour avoir la quantité d'eau fournie par l'ensemble des fontaines, le temps de remplissage de notre bassin de référence est alors l'inverse de ce débit.

Ces canaux qui, séparément ouverts… p. 17

Ce sont ces opérations que nous propose la règle : inverser les rapports qui mesurent le temps (« on divisera les dénominateurs par les numérateurs... »), on obtient les débits des différentes fontaines ; on additionne ces débits et on inverse le résultat (« on divisera l'unité par ces derniers résultats composés ») pour calculer le temps.

Une ghaṭī *— le terme désigne une cruche à eau — est une mesure de temps de vingt-quatre minutes.*

On notera le « flou » de cette règle : on ne nous donne aucune unité ni aucun domaine d'application, ce qui en fait une règle extrêmement flexible à appliquer, son domaine étant de l'ordre des quantités qui varient de manière inversement proportionnelle l'une par rapport à l'autre.

Achat et vente

Après avoir multiplié chaque prix par la proportion qui le concerne, on divisera ensuite par les mesures et enfin, en vue de la répartition, on effectuera séparément leur somme. Ensuite, ayant multiplié les résultats, placés séparément, par la quantité composée, on divisera par la somme ; on obtient les prix. De là, après avoir aussi multiplié par la quantité composée les parts telles qu'elles sont placées, on divisera par la somme ; on obtient les mesures. Ainsi sont acquis dans l'ordre : les prix d'après les prix correspondants — selon la méthode enseignée —, les mesures, d'après les proportions.

On divisera par les mesures… p. 17

Cette règle, un peu obscure dans sa formulation, est un problème de « partages inégaux » : on veut partager un nombre proportionnellement à des nombres qu'il nous faut d'abord déterminer. Les nombres à partager sont, dans les deux exemples qui suivent, une somme d'argent et la quantité de marchandises acquise avec cette somme ; quant aux nombres par rapport auxquels on partage, il faut les déterminer en fonction du prix du « marché »—

On divisera par les mesures… p. 17

trois mesures et demi de riz pour une drachme ou un pala *de camphre pour deux* niṣka *— proportionnellement à la somme que l'acheteur veut engager.*
Pour partager une somme S proportionnellement à des nombres a, b et c, il faut trouver trois nombres x, y et z dont la somme est égale à S et qui satisfont aux égalités :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Une propriété des suites de rapports égaux permet d'écrire :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{S}{a+b+c}$$

On obtient alors :

$$x = \frac{aS}{a+b+c}\,; \quad y = \frac{bS}{a+b+c}\,; \quad z = \frac{cS}{a+b+c}$$

On a bien alors la deuxième partie de la règle : « après avoir multiplié par le montant composé et ces derniers et les proportions, on divisera par leur somme », le « montant composé » étant ici représenté par S.
Quant à la première partie de la règle, elle nous permet de déterminer les nombres a, b et c car, l'usage commercial étant de donner les prix d'une denrée en fonction d'une unité de mesure, il faut d'abord calculer le prix de chaque ingrédient en fonction de la quantité relative entrant dans un mélange : un et deux dans le premier exemple, un, seize et huit dans le deuxième.

Holà commerçant ! Pour une drachme, on obtient trois mesures et demi de riz et, pour une drachme, huit mesures de haricots ; ayant alors pris ces treize *kākiṇī* que je te donne, apporte rapidement deux portions de riz ajoutées à une portion de haricots car nous allons manger rapidement et, de plus, **sārthaḥ** notre communauté va partir immédiatement.

Si, pour une drachme… p. 18

On pose : drachme 1, mesures de riz $\begin{array}{|c|}7\\2\\\hline\end{array}$; drachme 1, mesure de haricots 8 ; montant composé treize *kākiṇī*, parce qu'elles sont la soixante-quatrième partie de la drachme : $\begin{array}{|c|}13\\64\\\hline\end{array}$; portion de riz 2 ; portion de haricots 1.

Maintenant le calcul.
Ici, les deux prix des mesures, 1 et 1, sont multipliés par les deux portions des mesures 2 et 1, on obtient 2 et 1 ; puis divisés par les deux mesures, $\begin{array}{|c|c|}7&8\\2&1\\\hline\end{array}$, sont produits : $\begin{array}{|c|c|}4&1\\7&8\\\hline\end{array}$; leur somme est le diviseur : $\begin{array}{|c|}39\\56\\\hline\end{array}$

Ces [résultats] mêmes $\begin{array}{|c|c|} 4 & 1 \\ 7 & 8 \\ \hline \end{array}$ étant multipliés par le montant composé $\begin{array}{|c|} 13 \\ 64 \\ \hline \end{array}$: $\begin{array}{|c|c|} 52 & 13 \\ 448 & 512 \\ \hline \end{array}$, et divisés par la somme $\begin{array}{|c|} 39 \\ 56 \\ \hline \end{array}$, les prix du riz et des haricots : $\begin{array}{|c|c|} 1 & 7 \\ 6 & 192 \\ \hline \end{array}$ sont produits.

Les deux parts de riz et de haricots, $\begin{array}{|c|c|} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline \end{array}$, multipliées par la quantité composée $\begin{array}{|c|} 13 \\ 64 \\ \hline \end{array}$, sont produits : $\begin{array}{|c|c|} 13 & 13 \\ 32 & 64 \\ \hline \end{array}$; quand on a divisé par la somme, les parts de riz et de haricots sont obtenues : $\begin{array}{|c|c|} 17 & 7 \\ 24 & 24 \\ \hline \end{array}$

Maintenant, le prix du riz, précédemment obtenu, est multiplié par quatre puis par seize ; une fois la division par le dénominateur effectuée, sont obtenus : 10 *kākiṇī*, 13 *varāṭaka* et une fraction de *varāṭaka* : $\begin{array}{|c|} 1 \\ 3 \\ \hline \end{array}$. Pour le prix des haricots, une fois la division par le dénominateur faite, sont obtenus 2 *kākiṇī*, 6 *varāṭaka* et une fraction de $\begin{array}{|c|} 2 \\ 3 \\ \hline \end{array}$

Si pour une drachme on obtient trois mesures et demi de riz, une mesure de riz vaut donc $\frac{2}{7}$ de drachme ; de même pour le prix des haricots : une mesure vaut $\frac{1}{8}$ de drachme. Deux mesures de riz et une mesure de haricots valent donc : $\frac{4}{7}+\frac{1}{8}$, en drachme. Notre acheteur veut dépenser 13 kākiṇī *pour acquérir un mélange composé de riz et de haricots dans un rapport de deux à un. Une drachme valant soixante-quatre* kākiṇī*, le rapport : $\frac{\frac{13}{64}}{\frac{4}{7}+\frac{1}{8}}$ représente la proportion qu'il peut obtenir d'un tel mélange ; si on multiplie ce rapport par le prix de deux mesures de riz, on obtient le prix du riz dans le mélange et, de même, si on multiplie ce rapport par deux — puisqu'il y a deux mesures de riz pour une de haricots — on obtient la part — volume ou poids — du riz dans le mélange acheté. On peut vérifier les calculs à la fin : une* kākiṇī *valant vingt* varāṭaka*, la somme du prix du riz et de celui des haricots fait bien treize* kākiṇī.

Si, pour une drachme… p. 18

Ô joie des commerçants ! Pour deux *niṣka*, on obtient un *pala* du meilleur camphre, et pour un huitième de drachme, un *pala* de santal et pour un huitième de drachme aussi, un demi-*pala* de bois d'Agar ; connaissant ainsi leur prix, donne-moi, pour un *niṣka*, **tān** du camphre, du santal et du bois d'Agar, dans les proportions de un, seize et huit, car je désire fabriquer un encens.

Si pour un couple de *niṣka*… p. 18

On pose : $\begin{array}{|c|c|c|} 1 & 16 & 8 \\ 32 & 1 & 1 \\ & 8 & 8 \end{array}$, montant composé 16.

Chaque prix : $\begin{array}{|c|c|c|} 32 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{array}$, est multiplié par chacune des proportions 1, 16 et 8 : $\begin{array}{|c|c|c|} 32 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$, puis divisé par les mesures, $\begin{array}{|c|c|c|} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$: $\begin{array}{|c|c|c|} 32 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$. Leur somme est le diviseur : 36.

À nouveau, ces derniers, placés séparément, sont multipliés par le montant composé 16 : 512, 32, 32 et divisés par la somme ; les prix des portions de camphre etc. sont obtenus : $\begin{array}{|c|c|c|} 14 & 8 & 8 \\ 2 & 9 & 9 \\ 9 & & \end{array}$

Maintenant, les proportions 1, 16 et 8 sont multipliées par le montant composé : 16, 256 et 128 et divisées par la somme 36 ; les [poids] en *pala* du camphre etc. sont obtenus : $\begin{array}{|c|c|c|} 4 & 64 & 32 \\ 9 & 9 & 9 \end{array}$

Comme précédemment, le calcul des prix en drachmes etc., de même que pour le poids aussi, le calcul en *pala*, *karṣa*, etc. doivent être connus.

Pour le calcul, le commentateur exprime tous les prix en drachmes ; un niṣka *valant seize drachmes, on obtient bien trente-deux pour le prix du camphre et seize pour la somme que l'acheteur accepte de donner : le « montant composé ».*

Si pour un couple de *niṣka*… p. 18

Pour la disposition initiale des calculs, le commentateur met sur la première ligne de *son tableau, les proportions du mélange qu'il désire obtenir avec, au-dessous, le prix du marché de l'unité de poids.*

La notation ne permet pas de distinguer les valeurs entières des prix (32) des valeurs fractionnaires (1/8) et donne l'illusion que le tableau comporte trois lignes.

On notera aussi que le tableau donnant les résultats, les prix de chaque ingrédient par colonne, ne présente pas ces résultats de manière logique. Ainsi, la première colonne, le prix camphre : $\begin{array}{|c|} 14 \\ 2 \\ 9 \\ \hline \end{array}$*, est le résultat de la division* $\dfrac{512}{36} = 14 + \dfrac{2}{9}$*. De même, les deux dernières colonnes donnent les prix du santal et du bois d'Agar, soit le résultat de la division :* $\dfrac{32}{36} = \dfrac{8}{9}$*. Le tableau devrait être écrit :* $\begin{array}{|c|c|c|} 14 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 \\ \hline \end{array}$

Comme dans l'exemple précédent, on établit le prix de chacune des parts en multipliant chaque prix « du marché » par le nombre qui mesure la proportion que l'on désire acquérir, puis en divisant par les mesures données comme référence pour chaque ingrédient — un pala *pour le camphre et le santal, un demi-*pala *pour le bois d'Agar —; la somme est alors le prix que l'on aurait à payer si on achetait les quantités données en référence. En multipliant chaque part que l'on veut acquérir par le rapport entre le prix offert, seize drachmes, et le le prix de référence, trente-six drachmes, on obtient le prix de chaque ingrédient.*

En multipliant par ce même rapport chaque nombre mesurant les proportions, on obtient le poids de chaque composant du parfum.

Voici la signification. **Narāḥ** de riches personnes; le nombre de dons est multiplié par le nombre de celles-ci et les nombres de joyaux doivent être diminués de ce résultat; une quantité arbitraire sera alors divisée par chacun des restes, on obtient les comptes des valeurs.

Une quantité choisie… p. 18

Mais ces comptes de valeur, parce que dépendant d'un nombre arbitraire, sont parfois entiers ou non-entiers, à cause du caractère fractionnaire des restes.

Il est dit : « **athavā** » pour calculer des valeurs entières. Le produit de ces restes pris séparément — la quantité obtenue une fois qu'ils ont été multipliés l'un par l'autre — étant divisé par chacun des restes, on obtient des valeurs entières.

La fortune de l'une de ces riches personnes est de huit rubis, d'une autre, de dix saphirs, d'une autre, de cent perles, d'une autre, de cinq diamants; au cours d'une rencontre amicale, ces quatre-là — quatre amis —

Quatre joailliers… p. 18

dont la fortune est ainsi comptée, s'étant **mithaḥ** mutuellement donné, sur leur fortune propre, un rubis etc. à chacun, obtiennent une fortune identique, dis-moi alors pour chacun, ô ma chère à la belle intelligence, la valeur de leurs diamants etc.

On pose : rubis 8, saphirs 10, perles 100, diamants 5, personnes 4.

Puisque un est donné à chacun, le nombre de don, 1, est multiplié par le nombre de personnes 4 ; on obtient le nombre de dons : 4. Les nombres de joyaux sont diminués de ce dernier résultat, les restes sont : rubis 4, saphirs 6, perles 96, diamants 1 ; une quantité arbitraire étant divisée par ceux-ci, on aura les valeurs.
La quantité arbitraire imaginée, 50, est divisée séparément, des valeurs fractionnaires sont produites : rubis $\begin{array}{|c|}12\\2\\4\\\hline\end{array}$, saphirs $\begin{array}{|c|}8\\1\\3\\\hline\end{array}$, perles $\begin{array}{|c|}25\\48\\\hline\end{array}$, diamants $\begin{array}{|c|}50\\0\\\hline\end{array}$

À cause du caractère fractionnaire de ces derniers, pour obtenir des nombres non-fractionnaires, une quantité arbitraire est imaginée avec discernement : 96. Ainsi, des valeurs entières sont obtenues : rubis 24, saphirs 16, perles 1, diamants 96. Une fois les dons réciproques effectués, les fortunes identiques sont ainsi produites : 233.
Ou bien, pour calculer des valeurs entières par elles-mêmes, le produit des restes, 2 304, étant divisé séparément par les restes, on obtient des valeurs entières : 576, 384, 24, 2 304. À cause du don mutuel de un à chacun, les fortunes identiques sont produites : 5 592.

Appelons A, B, C et D ces quatre joailliers et r, s, p et d le nombre de rubis, saphirs, perles et diamants. Après l'échange des dons, la fortune de chacun s'élève à sa fortune initiale diminuée de trois et augmentée d'une unité de chacun des autres joyaux : Quatre joailliers… p. 18

A	*possède :*	$5r + 1s + 1p + 1d$
B		$1r + 7s + 1p + 1d$
C		$1r + 1s + 97p + 1d$
D		$1r + 1s + 1p + 2d$

Chacun possède maintenant la même fortune ; si on soustrait la fortune de B de celle de A, celle de C de celle de B et celle de D de celle de C, on obtient la suite d'égalité suivante :

$$4r = 6s = 96p = 1d$$

Où l'on reconnaît la suite de nombres : $4,\ 6,\ 96,\ 1$, *obtenue en appliquant la première prescription de la règle.*

Il est maintenant impossible de savoir le prix de chaque pierre sans connaître au moins le prix de l'une d'entre elles ; c'est ce que nous indique la règle en préconisant de choisir arbitrairement un nombre que l'on divisera par chacun des nombres de la suite obtenue. Cela revient à choisir un prix pour le diamant ; le commentateur choisit 50 *:*

$$r = \frac{50}{4} = 12 + \frac{2}{4}\,; \quad s = \frac{50}{6} = 8 + \frac{1}{3}\,; \quad p = \frac{96}{50} = \frac{25}{48}\,; \quad d = \frac{50}{1} = 50$$

On remarquera la notation employée qui ne représente pas des fractions, sauf pour le troisième tableau, mais le quotient de la division par 50 *sur la première ligne et le reste — fractionnaire pour les deux premiers — au-dessous et le dernier. Un seul manuscrit (-ka) choisit une représentation par des fractions.*

La règle nous enseigne comment n'obtenir que des valeurs entières — ce qui n'est pas le cas si on choisit 50 *—, mais, avant d'appliquer la règle telle qu'elle est énoncée, le commentateur nous dit qu'il est possible d'y parvenir en choisissant judicieusement le nombre arbitraire, et il choisit* 96 *qui est le plus petit multiple commun aux nombres* $4,\ 6,$ *et* 96 *; ceci semble indiquer que, même si aucun développement arithmétique de cette notion n'est apparente, ni ici, ni dans le chapitre sur la réduction des fractions, cette notion était connue des mathématiciens indiens.*

La règle nous dit de choisir comme nombre arbitraire, le produit de tous les nombres de la suite, ce qui est évidemment un moyen simple de construire un multiple commun et donc d'obtenir des entiers comme résultat.

Alliages

Soit des poids d'or respectivement de finesses diverses, ces poids d'or pur, multipliés par leurs titres respectifs — **suvarṇavarṇāhatiḥ** — la quantité qui est leur somme étant divisée **svarṇaikyena** par le poids de l'alliage de ces ors, est le titre de l'alliage d'or. La quantité somme… p. 19

Maintenant, dans le cas d'un raffinage, de même, la quantité somme des produits des poids d'or par leurs titres étant divisée par le poids de l'or raffiné est le titre de l'or raffiné ; et aussi, étant divisée par le titre de l'or raffiné, on a le poids total de l'or raffiné.

Dans cette partie, nous avons traduit, par commodité, le mot sanskrit « varṇa » *qui désigne la pureté de l'or par « titre » ou « carat ». Il semble que le* « varṇa » *soit plutôt une* La quantité somme… p. 19

sorte de titre, d'après les règle qui suivent; aujourd'hui le titre d'un alliage est le rapport entre le poids de métal pur — l'or dans ce qui suit — et le poids de l'alliage qui le contient. C'est donc un nombre inférieur à un, ce qui n'est pas le cas dans les exemples donnés mais l'usage qui en est fait est le même : si on désigne par t *le titre, par* P_o *le poids de l'or pur et par* P_a *le poids de l'alliage, le rapport entre ces trois nombres est le suivant :*

$$P_o = t \times P_a$$

La règle précédente nous donne trois usages de cette formule. Si on veut connaître le titre d'un alliage de trois lingots (par exemple), chacun d'un titre différent, en multipliant le poids de chaque lingot par son titre, on obtient le poids d'or pur que chaque lingot contient; la somme de ces produits est le poids d'or pur contenu dans l'ensemble des trois lingots. Si on divise cette somme par le poids total du lingot obtenu par l'alliage des trois — la somme des poids des trois lingots — on obtient le titre de l'alliage. Soit trois lingots de titres respectifs t_1*,* t_2 *et* t_3 *et de poids* P_1*,* P_2 *et* P_3*, le poids d'or pur contenu dans chacun est :*

$$P_{o1} = t_1 \times P_1\,; \quad P_{o2} = t_2 \times P_2\,; \quad P_{o3} = t_3 \times P_3$$

Le titre de l'alliage est donc :

$$t = \frac{P_{o1} + P_{o2} + P_{o3}}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2 + t_3 \times P_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

Si, maintenant, on raffine ce nouveau lingot, alliage des trois, il s'en suit une perte de poids, mais le poids de l'or contenu est toujours le même; désignant par P_r *le poids après raffinage, le titre de l'or obtenu est donc :*

$$t_r = \frac{t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2 + t_3 \times P_3}{P_r}$$

Si on veut connaître le poids de l'or après raffinage, la même formule est donnée sous cette forme :

$$P_r = \frac{t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2 + t_3 \times P_3}{t_r}$$

Viśva treize, **ārka** douze, **rudra** onze, dix, c'est bien connu; des quantités d'or, dont les titres sont ainsi énoncés, ont respectivement des poids en *māṣa* formulés de cette manière : **diś** dix, **veda** quatre, **locane** deux et **yuga** quatre.

Le poids, en *māṣa*… p. 19

Voici la signification. Dix *māṣa* d'or à treize carats, quatre *māṣa* à douze carats, deux *māṣa* à onze carats et quatre *māṣa* à dix carats; de telles quantités d'or **āvartiteṣu** étant combinées en une seule, quel est le titre de l'or résultant ? Ô toi qui connais le calcul sur l'or, dis-le rapidement.

Signification de la deuxième strophe. Maintenant, lesdits vingt *māṣa*, s'il y a un raffinage et si seize *māṣa* sont obtenus, quel sera alors le titre ?

Et aussi, par le raffinage de cette quantité, si on obtient seize carats, que deviennent alors, par suite de la diminution, ces vingt *māṣa* ?

On pose :

13	12	11	10
10	4	2	4

Le produit des poids de l'or : 10, 4, 2 et 4, et des titres : 13, 12, 11 et 10, est obtenu : 130, 48, 22 et 40 ; leur somme est 240, une fois la division par la somme des poids d'or effectuée, le titre de l'alliage est obtenu : 12.
Si, après raffinage, ces derniers lingots ont un poids de seize *māṣa*, quel sera leur titre ? 15 carats sont obtenus avec seize parts.
Si ce même or a un titre de seize, alors quel est le poids en *māṣa* ? 15 *māṣa* sont obtenus.

Le titre issu de l'alliage est multiplié par la somme des poids de l'or et cela même doit être diminué de la somme des produits des poids de l'or et des titres ; à partir de ce dernier résultat, on a le titre inconnu, quotient du compte de poids **agnijam** de l'or dont le titre est inconnu.

À partir du titre… p. 19

Vasumāṣam huit *māṣa* d'or de titre dix et **netramāṣam** deux *māṣa* **īśavarṇam** de titre onze et six *māṣa* dont le titre n'est pas connu ; par un alliage, un titre de douze est obtenu, dis la valeur du titre inconnu.

Soit huit et deux *māṣa*… p. 19

On pose :

10	11	0
8	2	6

La somme des poids d'or 8, 2 et 6, est 16 ; le titre issu de l'alliage, 12, est multiplié : 192. Les deux produits des poids d'or et de leurs titres sont 80 et 22, la somme est 102. Le produit obtenu est diminué de cette dernière, il reste 90. Le quotient par le compte, 6, du poids de l'or de titre inconnu est effectué : le titre inconnu est produit : 15.

On connaît le poids total de l'alliage des trois ors : $8+2+6$ *et son titre :* 12. *La quantité d'or pur contenu dans l'alliage est donc son poids multiplié par son titre :* $16 \times 12 = 192$. *Comme on connaît le poids d'or pur contenu dans deux des lingots :* $8 \times 10 = 80$ *et* $2 \times 11 = 22$, *le poids d'or pur contenu dans le troisième lingot est donc :* $192 - 102 = 90$. *Le poids de ce dernier lingot étant six, son titre est donc* $90/6 = 15$.

Soit huit et deux *māṣa*… p. 19

Le titre issu de l'alliage est multiplié par la somme des poids de l'or et cela même **viyojitaḥ** doit être diminué de la somme des produits des poids de l'or et des titres puis divisé **viśleṣeṇa** par la différence du titre de l'or inconnu et du titre de l'alliage, on obtient le poids **agnijam** — né du feu — de l'or.

Le titre issu de l'alliage… p. 19

Agnija, en vérité, est l'or comme cela a été dit par Bhaṭṭa Halāyudha : « Un nom du feu est *hiraṇyaretas* : celui dont la semence est l'or ; ainsi ce qui est issu du feu doit être l'or. »

Trois — évalués par *guṇa* — *māṣa*, de titre dix ; ensuite, un — évalué par *candra* — *māṣa*, quatorze — évalués *indra* — carats ; ensuite, un certain poids inconnu **ṣoḍaśakasya** de titre seize. Dans l'alliage de trois telles quantités, de l'or de titre douze est obtenu, combien avait-on de *māṣa* de titre seize ? La question est ainsi posée.

Soit trois et un *māṣa* … p. 19

On pose :

10	14	16
3	1	0

, titre de l'alliage obtenu : 12.

Le titre issu de l'alliage, 12, multiplié par la somme des poids d'or, 4 est 48. **Viyojitaḥ** il est diminué de 44, somme de ces deux : les titres multipliés par leur poids d'or respectifs 30 et 14, il reste 4 ; puis, quand la division par la différence 4 des deux — le titre de la quantité d'or inconnue, 16, et le titre de l'alliage, 12 —, est effectuée, le poids de l'or inconnu est obtenu : 1 *māṣa*.

Le problème est de trouver le poids d'un lingot de titre connu, qui entre dans un alliage avec deux autres lingots dont on connaît le poids et le titre ; on connaît également le titre de l'alliage.

Soit trois et un *māṣa* … p. 19

La méthode est la même que pour les problèmes précédents : évaluer la mesure de la quantité d'or pur ; celle-ci est la même si on la calcule pour le lingot final : $(3+1+x)\times 12$ *ou si on la calcule à partir de chaque lingot :* $3 \times 10 + 1 \times 14 + x \times 16$.

De cette égalité on tire : $(16-12)\,x = 4 \times 12 - 30 - 14 = 4$ *(*x *est le poids inconnu).*

Quand l'alliage de deux poids inconnus de deux ors est effectué, alors le titre qui est celui de l'alliage issu des deux ors a pour nom technique : « titre *sādhya* ». **Analpaḥ** le titre le plus grand d'entre les deux doit être diminué du titre *sādhya*, puis, le titre *sādhya* doit être diminué du titre le plus petit. Les deux restes, multipliés par une quantité arbitraire, sont

Le titre le plus grand… p. 20

les deux poids qui mesurent respectivement le poids de l'or de titre le plus petit et de titre le plus grand.

Dans cette règle on ne connaît que les titres de deux lingots et le titre de l'alliage ; celui-ci étant la moyenne pondérée des deux titres, sa valeur se trouve être nécessairement comprise entre les deux, d'où le « croisement » : on diminue le titre le plus grand du titre de l'alliage, on retire du titre de l'alliage le plus petit.

Le titre le plus grand… p. 20

Les poids sont inconnus mais suivent la loi qui lie les titres et les poids ; soit P_1 le poids de l'or de titre t_1 et P_2 le poids de l'or de titre t_2 et supposons $t_1 > t_2$, le titre t_s de l'alliage est, nous l'avons vu :

$$t_s = \frac{t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2}{P_1 + P_2}$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2 = t_s \times (P_1 + P_2) \quad \text{ou} \quad (t_1 - t_s) \times P_1 = (t_s - t_2) \times P_2$$

Le rapport des deux poids est constant et le poids P_2 est proportionnel à la différence $t_1 - t_s$ tandis que le poids P_1 est proportionnel à l'autre différence $t_s - t_2$ avec le même facteur de proportionnalité, d'où le nombre arbitraire qui multiplie les deux différences.

Soit deux billes **hāṭakasya** d'or, l'une de titre seize et l'autre de titre dix ; **yutau** si on fait un alliage des deux, de l'or de titre douze est produit. Ô ma chère ! dis-moi **māne** les deux poids de chacune des deux billes.

Soit deux billes d'or… p. 20

On pose les deux titres : 16 et 10 ; le titre *sādhya* : 12.

Le titre **analpaḥ** le plus grand, 16, est diminué du titre *sādhya*, 12 ; il reste 4. Puis, le titre *sādhya*, 12, est diminué du titre le plus petit, 10 ; il reste 2. Ces deux restes, 4 et 2, sont les mesures respectivement du poids le plus petit et du plus grand. Si ces deux mesures sont, dans l'ordre, multipliées par un, on obtient :

16	10
2	4

, multipliés par deux :

16	10
4	8

, réduits de moitié :

16	10
1	2

Ce calcul sur l'or doit être toujours ainsi conjecturé.

Progressions

Vyekaḥ celui duquel un est ôté (comp. *bahuvrīhi*) ; **cayaḥ** l'accroissement qui est multiplié par la position diminuée d'une unité étant ensuite ajouté **mukhena** au montant initial est le montant du dernier. Et de plus, **tat** ce qui a été ajouté **mukhena** au montant initial et **dalitam** divisé par deux est le montant médian. Ce montant médian multiplié par la position, est le montant total. Ce dernier a pour nom « somme de la progression » ; cela est dit par les savants.

Somme d'une progression arithmétique p. 20

Yaḥ un bienfaiteur. Après avoir donné quatre drachmes à des brahmanes le premier jour, combien de drachmes ont été données en une quinzaine par celui qui a entrepris de faire une donation avec un accroissement de cinq par jour ? Dis-le, ô mon ami.

Quelqu'un, après avoir donné à des brahmanes… p. 20

On pose 4 drachmes initiales, accroissement 5, position 15.
L'accroissement est multiplié par la position diminuée de un, 14 : 70 ; ajouté au montant initial : 74, c'est le montant final.
Ce dernier est, de plus, augmenté du montant initial : 78 et divisé par deux, le montant médian est obtenu : 39.
Et ce résultat est multiplié par la position : 585 ; ceci est le montant total : la somme de la progression.

Avec cette règle, on aborde l'étude des progressions arithmétiques, les suites de nombres dont la différence entre deux termes consécutifs est une constante : la raison. Le mot technique sanskrit pour raison est caya *(collection, accumulation).*
Trois calculs nous sont donnés, connaissant le terme de départ (a)*, la raison* (r) *et le nombres de termes, « la position »* (n) *:*

Quelqu'un, après avoir donné à des brahmanes… p. 20

— *le dernier terme :* $a + (n-1)\,r$
— *le terme médian :* $\frac{1}{2}\big(a + (n-1)\,r + a\big) = \frac{1}{2}\big(2a + (n-1)\,r\big)$
— *la somme de tous les termes :* $S = \frac{1}{2}\big(2a + (n-1)\,r\big) \times n$

Le commentaire ne nous donne aucune justification pour ces calculs ; le tableau suivant permet de comprendre comment les obtenir :

position :	1	2	$\cdots$	n
termes :	a	$a+r$	$\cdots$	$a+(n-1)\,r$
	$a+(n-1)\,r$	$a+(n-2)\,r$	$\cdots$	a
$2S$	$2a+(n-1)\,r$	$+\,2a+(n-1)\,r$	$\cdots$	$+\,2a+(n-1)\,r$

La deuxième ligne donne la succession des termes de la suite ; la troisième ligne réécrit ces mêmes termes dans l'ordre inverse : en faisant la somme, en colonne, des deuxième et

troisième lignes, on voit que le résultat est constant pour chaque colonne, donc le double de la somme de tous les termes de la suite est égal à n-fois ce terme constant, ce qui justifie la formule donnée pour la somme.
Quant au terme médian, c'est la moyenne entre le premier et le dernier terme de la suite.

Le montant total est divisé par la position et ensuite diminué du terme initial ; ainsi divisé par la moitié de la position diminuée de un, on a l'accroissement.

Calcul de la raison p. 20

Yo janānām iśaḥ un roi a couvert deux *yojana* **prathamam** le premier jour ; ce roi avisé, en une semaine et après une route de quatre-vingt *yojana*, a atteint la ville de ses ennemis pour ravir leurs éléphants. Dis-nous alors, s'il te plait, avec quel accroissement de sa marche après ce premier jour, il a accompli ce périple.

Ce roi qui a, tout d'abord… p. 21

On pose : terme initial 2, accroissement º, position 7, total 80.
Le total 80 est divisé par la position : $\begin{array}{|c|}80\\7\\\hline\end{array}$; puis diminué du terme initial, 2, au même dénominateur, $\begin{array}{|c|}14\\7\\\hline\end{array}$: $\begin{array}{|c|}66\\7\\\hline\end{array}$ il est divisé par la moitié, 3, de la position diminuée de l'unité, 6, selon la règle des divisions qui ne tombent pas juste : $\begin{array}{|c|}66\\21\\\hline\end{array}$; après simplification, le quotient, $\begin{array}{|c|}22\\7\\\hline\end{array}$, est l'accroissement : un total de trois *yojana* et un septième.

Avec cette règle, on calcule la raison (r) si on connaît la somme (S), le terme initial (a)et le nombre de termes (n) :

Ce roi qui a, tout d'abord… p. 21

$$2S = \big(2a + (n-1)\,r\big) \times n$$

puis : $\dfrac{2S}{n} = 2a + (n-1)\,r$ *puis :* $\dfrac{2S}{n} - 2a = (n-1)\,r$

enfin : $\dfrac{2}{n-1}\Big(\dfrac{S}{n} - a\Big) = r$

« Le montant divisé par la position est diminué du terme initial ; ceci divisé par la moitié de la position diminuée de un, sera l'accroissement. »

Avec les données du problème : $S = 80, \quad n = 7, \quad a = 2$

$$\frac{2}{7-1}\big(\frac{80}{7} - 2\big) = \frac{22}{7}$$

À partir du total de la progression multiplié par l'accroissement et par deux, additionné ensuite au carré de la différence entre la moitié de l'accroissement et le terme initial, ceux qui connaissent le calcul appellent position la racine de ce résultat diminuée du terme initial, ajoutée à la moitié de l'accroissement et divisée par celui-ci.

Calcul du dernier terme p. 21

Yo un donateur, après avoir donné trois drachmes à des brahmanes le premier jour, a promis de donner chaque jour un accroissement de deux drachmes ; trois cent soixante drachmes ont été données par ce donateur, dis alors combien de jours il a fallu.

Dis-nous rapidement en combien de jours… p. 21

On pose : terme initial 3, accroissement 2, position ♀, fruit 360.
Le fruit de la progression 360, est multiplié par l'accroissement 2 : 720 puis multiplié **locanābyām** par 2 : 1440 et ajouté au carré 4 de la différence entre la moitié, 1, de l'accroissement et du terme initial 3 : 1444 ; la racine de ce dernier résultat, 38, diminuée du terme initial 3 est 35 ; augmentée de la part précédente de l'accroissement, 1 et divisée par l'accroissement 2, la position est produite : 18.

Il s'agit ici de calculer le nombre de termes de la progression (n) *quand on connaît la somme des termes (« le fruit »)* (S)*, la raison* (r)*, et le premier terme* (a)*.*
Le problème, ici, est beaucoup plus compliqué que dans les calculs précédents parce que, dans la formule qui permet de calculer la somme des termes de la progression, le nombre des termes est au carré : $S = \frac{1}{2}\big(2a + (n-1)\,r\big) \times n.$
La règle demande de mulitiplier cette somme par deux fois la raison et de lui ajouter le carré de la différence entre le premier terme et la moitié de la raison, ce qui produit, dans tous les cas, un carré :

Dis-nous rapidement en combien de jours… p. 21

$$\begin{aligned}
2Sr + \left(a - \frac{r}{2}\right)^2 &= \big(2a + (n-1)\,r\big)\,nr + \left(a - \frac{r}{2}\right)^2 \\
&= 2anr + n(n-1)\,r^2 + a^2 - ar + \frac{r^2}{4} \\
&= r^2\left(n^2 - n + \frac{1}{4}\right) + ar\big(2n-1\big) + a^2 \\
&= r^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + 2ar\left(n - \frac{1}{2}\right) + a^2 \\
&= \left(r\big(n - \frac{1}{2}\big) + a\right)^2
\end{aligned}$$

La suite de la règle décrit comment obtenir n *;*
— *on prend la racine :* $r\left(n - \frac{1}{2}\right) + a,$

— *on soustrait a :* $\quad r\left(n-\dfrac{1}{2}\right)=rn-\dfrac{r}{2},$

— *on ajoute la moitié de la raison :* $\quad rn$

— *et on divise par la raison, ce qui donne le nombre de termes.*

Quand le nombre de la position est impair, alors, **vyekam** après avoir fait la soustraction de un, on posera le mot « multiplicateur ». Si la position est paire, une fois divisée par deux, on posera le mot « carré ». Ayant effectué de cette manière cette opération, dont la fin est l'épuisement de la position, on obtient une ligne de mots : « multiplicateur-carré ». Ensuite, avec le nombre qui est l'accroissement du double etc., quand est effectuée cette opération qui est produite par les multiplicateur et les carrés, **vyastam** à l'envers — du dernier au premier —, le résultat qui est produit est encore diminué de un et divisé par le multiplicateur privé de un, puis multiplié par la position initiale ; on obtient alors **gaṇitam** le fruit total pour un accroissement multiplicatif.

Exponentiation, somme d'une suite géométrique p. 21

Après les progressions arithmétiques, sont abordées les progressions géométriques, suites de nombres dont chaque terme se déduit du précédent par une multiplication par un nombre fixe, la raison.

Exponentiation, somme d'une suite géométrique p. 21

La règle donne le moyen de calculer la somme des termes d'une telle suite, connaissant le premier terme, le nombre de termes et la raison.

Ce calcul impliquant le calcul d'une puissance, qui peut être élevée, d'un nombre, la première partie de la règle donne un moyen pour calculer cette puissance en n'utilisant que des multiplications par la raison et des élévations au carré.

Voici ce procédé appliqué au nombre 30 *(voir l'exemple qui suit) :* 30 *est pair, on le divise par* 2 *et on pose « carré » sur une ligne ;* 15 *est impair, on lui soustrait* 1 *et on pose « multiplicateur » sur la ligne. Le procédé se poursuit « jusqu'à épuisement du nombre », c'est-à-dire jusqu'à obtenir* 1*. Le tableau suivant montre la succession des opérations pour* 30 *:*

30	*15*	*14*	*7*	*6*	*3*	*2*	*1*
c	*m*	*c*	*m*	*c*	*m*	*c*	

Pour calculer r^{30} *(dans l'exemple,* $r = 2$*), on applique à* r *les opérations de multiplication et d'élévation au carré dans l'ordre où elles apparaissent sur la ligne, en commençant par la fin. Pour faciliter la lecture, nous présentons les calculs verticalement :*

$$\begin{array}{c|l}
c & r^2 \\
m & r^2 \times r \\
c & (r^2 \times r)^2 \\
m & (r^2 \times r)^2 \times r \\
c & \left((r^2 \times r)^2 \times r\right)^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} m & \left(\left((r^2 \times r)^2 \times r\right)^2\right) \times r \\ c & \left(\left(\left((r^2 \times r)^2 \times r\right)^2\right) \times r\right)^2 = \left(\left((r^2 \times r)^2 \times r\right)^2\right)^2 \times r^2 \\ & \qquad = \left((r^2 \times r)^2 \times r\right)^4 \times r^2 \\ & \qquad = (r^2 \times r)^8 \times r^4 \times r^2 \\ & \qquad = r^{16} \times r^8 \times r^4 \times r^2 \end{array}$$

On voit que les opérations effectuées se limitent à une succession de multiplication par la raison et par des élévations au carré.

Sur la dernière ligne, nous avons développé la dernière opération, ce qui met en valeur le procédé utilisé dans l'algorithme de décomposition du nombre 30 *:* $30 = 16 + 8 + 4 + 2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2$ *; c'est son écriture binaire.*

Cette méthode de calcul d'une puissance est utilisée en informatique sous le nom d'« exponentiation rapide ».

L'exemple choisi (30) *ne met pas en valeur le fait qu'il faille exécuter les opérations « multiplicateur-carré » en commençant par la fin de la ligne, puisqu'on obtient une décomposition symétrique ; il suffit de décomposer* 37*, par exemple, pour voir que le sens de lecture de la ligne obtenue est important ; on obtient avec* 37 *: m-c-c-m-c-c-c.*

La formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique de raison r *et de premier terme* a*, écrite avec nos notations modernes, est celle-ci,* n *étant le nombre de termes :*

$$S = a\,\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Pūrvam le premier jour, un couple de *varāṭaka* a été donné, **yena** par un donateur, puis un accroissement du double chaque jour a été promis comme donation ; combien de *niṣka* a-t-il donné à un mendiant pendant un mois complet ?

Combien de *niṣka* a-t-il donné… p. 21

On pose : terme initial : 2, accroissement : le multiplicateur deux, 2, position : 30.

La position paire étant divisée par deux, 15 : « carré ». Maintenant l'impair est diminué de un, 14 : « multiplicateur ». Puis, le pair est divisé par deux, 7 : « carré ». L'impair est diminué de un, 6 : « multiplicateur ». Le pair est divisé par deux, 3 : « carré ». L'impair est diminué de un, 2 : « multiplicateur ». Le pair est divisé par deux, 1 : « carré ». On a obtenu l'épuisement de la position.

De cette manière, la ligne de mots : carré, multiplicateur, carré, multiplicateur, carré, multiplicateur, carré a été produite.

On accomplit maintenant, à partir du dernier dans l'ordre inverse, l'opération « multiplicateur-carré » : l'accroissement multiplicatif est 2, son carré

est 4. Puis il y a multiplication par l'accroissement 2 : 8 est produit. Ensuite le carré de ce dernier est 64. À nouveau multiplié par l'accroissement multiplicatif 2 : 128. Son carré est 16 384. Multiplié à nouveau par l'accroissement multiplicatif 2 : 32 768. À nouveau son carré : 1 073 741 824. Ce résultat est diminué de un : 1 073 741 823 ; divisé par l'accroissement multiplicatif diminué de un, 1, le même est produit. Multiplié ensuite par le terme initial, 2, le total est obtenu : 2 147 483 646 *varāṭaka*.
Maintenant la division par le nombre de *varāṭaka* dans un *niṣka* — 20 480 — étant effectuée, le quotient est un lakh, quarante mille huit cent et cinquante-sept[25], 104 857 *niṣka*, il reste 9 drachmes, 9 *paṇa*, 2 *kākiṇī* et 6 *varāṭaka*.

La raison de cette progression géométrique est 2 ($r = 2$) et le nombre de ses termes 30 ; on commence donc par calculer 2^{30} par la méthode de l'exponentiation rapide (le tableau suivant se lit de droite à gauche en commençant par la ligne inférieure) :

Combien de *niṣka* a-t-il donné… p. 21

c	m	c	
$32\,768^2 = 1\,073\,741\,824$	$2 \times 16\,384 = 32\,768$	$128^2 = 16\,384$	$\dots$

	m	c	m	c
$\dots$	$2 \times 64 = 128$	$8^2 = 64$	$2 \times 4 = 8$	$2^2 = 4$

Puis on applique la formule qui donne la somme de la progression géométrique :

$$S = 2\,\frac{2^{30} - 1}{2 - 1} = 2 \times 1\,073\,741\,823 = 2\,147\,483\,646$$

25. Ce qui est une mauvaise lecture de la valeur numérale — exacte — qui suit... Tous les manuscrits donnent la même lecture.