BnF Gallica

Nouveaux Éléments de géométrie (par Antoine Arnauld)...

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

{BnF Gallica

Arnauld, Antoine (1612-1694). Nouveaux Éléments de géométrie (par Antoine Arnauld).... 1667.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
utilisationcommerciale@bnf.fr.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Ex Antonii Arnaldi

V

+ 839.

MP
1953/52

G278

NOVVEAVX ELEMENS
DE
GEOMETRIE;
CONTENANT,

Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonſtrations des propoſitions les plus communes,

De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes ſont incommenſurables,

De nouvelles meſures de l'angle, dont on ne s'eſtoit point encore aviſé,

Et de nouvelles manieres de trouver & de demontrer la proportion des Lignes.

BIBLIOTHEQUE ROYALE

A PARIS,
Chez Charles Savreux, Libraire Juré, au pied de la Tour de Noſtre-Dame, à l'Enſeigne des trois Vertus.

M. DC. LXVII.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

PREFACE.

QUOIQUE j'aye quelque sorte de liberté de parler avantageusement de ces Nouveaux Elemens de Geometrie, puisque je n'y ay point d'autre part que celle de les avoir tirez des mains de l'Auteur pour les donner au public ; mon dessein n'est pas neanmoins d'en faire voir icy l'excellence, ny de les proposer au monde comme un ouvrage fort considerable. Je serois plustost porté à diminuer l'idée trop haute que quelques personnes en pourroient avoir, estant tres persuadé qu'il est beaucoup plus dangereux d'estimer trop ces sortes de choses, que de ne les pas estimer assez.

La nature de toutes les sciences humaines, & principalement de celles qui entrent peu dans le commerce de la vie, est d'estre mêlées d'utilitez & d'inutilitez : & je ne sçay si l'on ne peut point dire qu'elles sont toutes inutiles en elles mêmes, & qu'elles devroient passer pour un amusement entierement vain & indigne de personnes sages, si elles ne pouvoient servir d'instrumens & de prepa-

rations à d'autres connoissances vraiment utiles. Ainsy ceux qui s'y attachét pour elles mêmes comme à quelque chose de grand & de relevé n'en connoissent pas le vray usage, & cette ignorance est en eux un beaucoup plus grand défaut que s'ils ignoroient absolument ces sciences.

Ce n'est pas un grand mal que de n'estre pas Geometre; mais c'en est un considerable que de croire que la Geometrie est une chose fort estimable, & de s'estimer soy même pour s'estre rempli la teste de lignes, d'angles, de cercles, de proportions. C'est une ignorance tres blâmable que de ne pas sçavoir, que toutes ces speculations steriles ne contribuent rien à nous rendre heureux; qu'elles ne soulagent point nos miseres; qu'elles ne gueriſſent point nos maux; qu'elles ne nous peuvent donner aucun contentement réel & solide: que l'homme n'est point fait pour cela, & que bien loin que ces sciences luy donnent sujet de s'élever en luy même, elles sont au contraire des preuves de la bassesse de son esprit, puisqu'il est si vain & si vuide de vray bien, qu'il est capable de s'occuper tout entier à des choses si vaines & si inutiles.

Cependant on ne voit que trop par experience, que ces sortes de connoissances sont d'ordinaire jointes à l'ignorance de leur prix & de leur usage. On les recherche pour elles mêmes; on s'y applique comme à des choses fort importantes; on en fait sa principale profession; on se glorifie des découvertes que l'on y fait; on croit fort obliger le

monde si l'on veut bien luy en faire part ; & l'on s'imagine meriter par là un rang fort considerable entre les sçavans & les grands esprits.

Si cet Ouvrage n'a rien de ce qui merite la reputation de grand Geometre au jugement de ces personnes, en quoy il est tres juste de les en croire ; aumoins on peut dire avec verité que celuy qui l'a composé est exemt du defaut de la souhaitter, & que quoiqu'il estime beaucoup le genie de plusieurs personnes qui se mélent de cette science, il n'a qu'une estime tres mediocre pour la Geometrie en elle méme. Neanmoins comme il est impossible de se passer absolument d'une science qui sert de fondement à tant d'arts necessaires à la vie humaine, il peut y avoir quelque utilité à montrer aux hommes de quelle sorte ils en doivent user, & de leur rendre cette étude la plus avantageuse qu'il est possible.

C'est l'unique vuë qu'a eüe l'Auteur de ces nouveaux Elemens. Il n'a pas tant consideré la Geometrie, que l'usage qu'on en pouvoit faire ; & il a cru qu'en évitant ces défauts qui n'en sont pas inseparables, on s'en pouvoit tres utilement servir pour former les jeunes gens, non seulement à la justesse de l'esprit ; mais méme en quelque sorte à la pieté & au reglement des mœurs.

Pour comprendre les avantages qu'on en peut tirer, il faut considerer que dans les premieres années de l'enfance l'ame de l'homme est comme toute plongée & toute ensevelie dans les sens, &

qu'elle n'a que des perceptions obſcures & confuſes des objets qui font impreſſion ſur ſon corps. Elle ſort à la verité de cet état à meſure que ſes organes ſe dégagent & ſe fortifient par l'âge, & elle acquiert quelque liberté de former des penſées plus claires & plus diſtinctes, & même de les tirer les unes des autres, ce que l'on appelle raiſonnement. Mais l'amour des choſes ſenſibles & exterieures luy eſtant devenu comme naturel, & par la corruption de ſon origine & par l'accoûtumance qu'elle a contractée durant l'enfance, les choſes exterieures ſont toujours le principal objet de ſon plaiſir & de ſa pente. Ainſy non ſeulement les jeunes gens ne ſe plaiſent gueres que dans les choſes ſenſuelles; mais même entre les perſonnes avancées en âge il y en a peu qui ſoient capables de trouver du gouſt dans une verité purement ſpirituelle, & où les ſens n'ayent aucune part. Toute leur application eſt toûjours aux manieres agreables; ils n'ont de l'intelligence & de la delicateſſe que pour cela, & ils ne ſe ſervent de leur eſprit que pour étudier l'agréement & l'art de plaire, par les choſes qui flattent la concupiſcence & les ſens.

Il me ſeroit aiſé de montrer, que cette diſpoſition d'eſprit eſt non ſeulement un tres grand defaut, mais que c'eſt la ſource des plus grands deſordres & des plus grands vices. Il eſt vray qu'il n'y a que la grace & les exercices de pieté qui puiſſent la guerir veritablement: mais entre les exercices humains qui peuvent le plus ſervir à la diminuer,

& à disposer même l'esprit à recevoir les veritez chrestiennes avec moins d'opposition & de dégouſt, il semble qu'il n'y en ait gueres de plus propre que l'étude de la Geometrie. Car rien n'est plus capable de détacher l'ame de cette application aux sens, qu'une autre application à un objet qui n'a rien d'agreable selon les sens; & c'est ce qui se rencontre parfaitement dans cette science. Elle n'a rien du tout qui puisse favoriser tant soit peu la pente de l'ame vers les sens; son objet n'a aucune liaison avec la concupiscence; elle est incapable d'eloquence & d'agréement dans le langage; rien n'y excite les passions; elle n'a rien du tout d'aimable que la verité, & elle la presente à l'ame toute nuë & détachée de tout ce que l'on aime le plus dans les autres choses.

Que si les veritez qu'elle propose ne sont pas fort utiles ny fort importantes, si l'on en demeuroit là; il est neanmoins tres utile & tres important de s'accoûtumer à aimer la verité, à la gouster, à en sentir la beauté. Et Dieu se sert souvent de cette disposition d'esprit, pour nous faire entrer dans l'amour & dans la pratique des veritez qui conduisent au salut, pour nous faire voir l'illusion de tout ce qui plaist dans les choses sensibles & exterieures, & pour nous rendre justes & equitables dans toute la conduite de nostre vie; cet esprit d'equité consistant principalement dans le discernement & dans l'amour de la verité en toutes les affaires que nous traittons.

Mais la Geometrie ne sert pas seulement à détacher l'esprit des choses sensibles, & à inspirer le gouſt de la verité; elle apprend aussy à la reconnoistre & à ne se laisser pas tromper par quantité de maximes obscures & incertaines, qui servent de principes aux faux raisonnemens dont les discours des hommes sont tout remplis. Car si l'on y prend garde, ce qui nous jette ordinairement dans l'erreur & nous fait prendre le faux pour le vray, n'est pas le defaut de la liaison des consequences avec les principes, en quoy consiste ce qu'on appelle la forme des argumens, mais c'est l'obscurité des principes mêmes, qui n'estant pas exactement vrais, & n'estant pas aussy evidemment faux, presentent à l'esprit une lumiere confuse où la verité & la fausseté sont mêlées, ce qui cause à plusieurs un espece d'éblouïssement qui leur fait approuver ces principes sans les examiner davantage.

Il est vray que la Logique nous donne deux excellentes regles pour éviter cette illusion, qui sont de definir tous les mots equivoques, & de ne recevoir jamais que des principes clairs & certains. Mais ces regles ne suffisent pas pour nous garantir d'erreur. Premierement, parce qu'on se trompe souvent dans la notion même de l'evidence en prenant pour evident ce qui ne l'est pas. Et en second lieu, parce que quoiqu'on sçache ces regles, on n'est pas toûjours appliqué à les pratiquer. Il n'y a donc que la Geometrie qui remedie en effet à l'un & à l'autre de ces defauts. Car d'une part en four-

nissant

niſſant des principes vraiment clairs, elle nous donne le modelle de la clarté & de l'evidence pour diſcerner ceux qui l'ont de ceux qui ne l'ont pas: & de l'autre, comme elle ne ſe diſpenſe jamais de l'obſervation de ces deux regles, elle accoûtume l'eſprit à les pratiquer, & à eſtre toûjours en garde contre les equivoques des mots & contre les principes confus, qui ſont les deux ſources les plus communes des mauvais raiſonnemens.

Il ne faut pas diſſimuler neanmoins, que cette coûtume même de rejetter tout ce qui n'eſt pas entierement clair peut engager dans un défaut tres conſiderable, qui eſt de vouloir pratiquer cette exactitude en toute ſorte de matieres, & de contredire tout ce qui n'eſt pas propoſé avec l'evidence Geometrique. Cependant il y a une infinité de choſes dont on ne doit pas juger en cette maniere, & qui ne peuvent pas eſtre reduites à des demonſtrations methodiques. Et la raiſon en eſt, qu'elles ne dépendent pas d'un certain nombre de principes groſſiers & certains, comme les veritez Mathematiques; mais d'un grand nombre de preuves & de circonſtances qu'il faut que l'eſprit voye tout d'un coup, & qui n'eſtant pas convaincantes ſeparément, ne laiſſent pas de perſuader avec raiſon lors qu'elles ſont jointes & unies enſemble. La pluſpart des matieres morales & humaines ſont de ce nombre; & il y a même des veritez de la Religion qui ſe prouvent beaucoup mieux par la lumiere de pluſieurs principes qui s'entr'aident & ſe

soûtiennent les uns les autres, que par des raisonnemens semblables aux demonstrations Geometriques.

C'est donc sans doute un fort grand défaut que de ne faire pas distinction des matieres; d'exiger par tout cette suite methodique de propositions, que l'on voit dans la Geometrie; de faire difficulté sur tout, & de croire avoir droit de rejetter absolument un principe lors qu'on juge qu'il peut recevoir quelque exception en quelque rencontre.

Mais si ce défaut est assez ordinaire à quelques Geometres, il ne naist pas neanmoins de la Geotrie même. Cette science estant toute veritable ne peut pas autoriser une conduite qui n'est fondée que sur des principes d'erreur. Car il n'est pas vray qu'un principe qui ne prouve pas absolument ne prouve rien; & que ne prouvant pas tout seul, il ne prouve pas estant joint à d'autres. Il y a differens degrez de preuves. Il y en a dont on conclut la certitude, & d'autres dont on conclut l'apparence; & de plusieurs apparences jointes ensemble on conclut quelquefois une certitude à laquelle tous les esprits raisonnables se doivent rendre. Il n'est pas absolument certain que l'on doive voir le Soleil quelqu'un des jours de l'année qui vient, je le dois neanmoins croire; & je serois ridicule d'en douter, quoiqu'il soit impossible de le démontrer. La raison ne doit donc pas pretendre de démontrer Geometriquement ces choses; mais elle peut prouver Geometriquement que c'est une sottise

de ne les pas croire : Et c'eſt en cette maniere qu'on ſe peut ſervir de la Geometrie même dans ces ſortes de matieres, pour faire voir plus clairement la force de la vrayſemblance qui nous les doit faire croire.

Outre ces utilitez que l'on peut tirer de la Geometrie, on en peut encore remarquer deux autres qui ne ſont pas moins conſiderables. Il y a des veritez importantes pour la conduite de la vie & pour le ſalut, qui ne laiſſent pas d'eſtre difficiles à comprendre, & qui ont beſoin d'une attention penible ; Dieu ayant voulu, comme dit S. Auguſtin, que le pain de l'ame ſe gagnaſt avec quelque ſorte de travail auſſy bien que le pain du corps. Et il arrive de là que pluſieurs perſonnes s'en rebutent par une certaine pareſſe, ou plûtoſt par une delicateſſe d'eſprit qui leur donne du dégouſt de tout ce qui demande quelque effort & quelque ſorte de contention. Or l'étude de la Geometrie eſt encore un remede à ce défaut ; car en appliquant l'eſprit à des veritez abſtraittes & difficiles, elle luy rend faciles toutes celles qui demandent moins d'application ; comme en accoûtumant le corps à porter des fardeaux peſans, on fait qu'il ne ſent preſque plus le poids de ceux qui ſont plus legers.

Non ſeulement elle ouvre l'eſprit & le fortifie pour concevoir tout avec moins de peine ; mais elle fait auſſy qu'il devient plus étendu & plus capable de comprendre pluſieurs choſes à la fois. Car les veritez Geometriques ont cela de propre

qu'elles dépendent d'un long enchaisnement de principes qu'il faut suivre pour arriver à la conclusion ; & comme cette conclusion tire sa lumiere de ces principes il faut que l'esprit voye en méme temps, & ce qui éclaire & ce qui est éclairé, ce qu'il ne peut faire sans s'étendre & sans porter sa veuë plus loin que dans ses actions ordinaires.

Cette étendüe d'esprit, qui paroist dans la Geometrie, est non seulement tres utile pour tous les sujets qui ont besoin de raisonnement ; mais elle est aussy tres admirable en elle même ; & il n'y a gueres de qualité de nostre ame qui en fasse mieux voir la grandeur, & qui détruise davantage les imaginations basses & grossieres de ceux qui voudroient la faire passer pour une matiere. Car le moyen de s'imaginer qu'un corps, c'estadire, un estre où nous ne concevons qu'une étendüe figurée & mobile, puisse penetrer ce grand nombre de principes tout spirituels qu'il faut lier ensemble pour la preuve des propositions que la Geometrie nous demõtre, & qu'il porte méme sa veuë jusques dans l'infiny pour en asseurer ou en tirer plusieurs choses avec une certitude entiere. Elle nous fait voir par exemple, que la Diagonale & le costé d'un Quarré n'ont nulle mesure commune, c'estadire, que l'esprit voit que dans l'infinité des parties de differente grandeur qu'on y peut choisir, il n'y en a aucune qui puisse mesurer exactement l'une & l'autre de ces deux lignes.

On peut dire que toutes les propositions Geo-

metriques sont de même infinies en étendüe ; parceque l'on n'y conclut pas ce qu'on démõtre d'une seule ligne, d'un seul angle, d'un seul cercle, d'un seul triangle, mais de toutes les lignes, de tous les angles, de tous les cercles, de tous les triangles; & qu'ainsy l'esprit les renferme & les comprend tous en quelque sorte quelques infinis qu'ils soiẽt. Or que tout cela se puisse faire par le bouleversement d'une matiere, & qu'en la remuant elle devienne capable de comprendre des objets spirituels, & d'en comprendre même une infinité, c'est ce que personne ne sçauroit croire ny penser, pourveu qu'il veüille de bonne foy songer à ce qu'il dit.

Ce sont ces reflexions qui ont fait juger à l'Auteur de ces Elemens, qu'on pouvoit faire un bon usage de la Geometrie ; mais ce n'est pas neanmoins ce qui l'a porté à travailler à en faire de nouveaux, puisqu'on peut tirer tous ces avantages des livres ordinaires qui en traittent. Ils portent tous à aimer la verité ; ils apprennent à la discerner ; ils fortifient la raison ; ils étendent la veuë de l'esprit, & ils donnent lieu d'admirer la grandeur de l'ame de l'homme, & de reconnoistre qu'elle ne peut estre autre que spirituelle & immortelle. Ce qui luy a donc fait croire qu'il estoit utile de donner une nouvelle forme à cette science, est, qu'estant persuadé que c'estoit une chose fort avantageuse de s'accoûtumer à reduire ses penſées à un ordre naturel, cet ordre estant comme une lumiere qui les éclaircit toutes les unes

par les autres, il a toûjours eu quelque peine de ce que les Elemens d'Euclide eſtoient tellement confus & broüillez, que bien loin de pouvoir donner à l'eſprit l'idée & le gouſt du veritable ordre, ils ne pouvoient au contraire que l'accoûtumer au deſordre & à la confuſion.

Ce défaut luy paroiſſoit conſiderable dans une ſcience dont la principale utilité eſt de perfectionner la raiſon ; mais il n'euſt pas penſé neanmoins à y remedier ſans la rencontre que je vas dire qui l'y engagea inſenſiblement. Un des plus grands eſprits de ce ſiecle, & des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques, avoit fait en quelques jours un eſſay d'Elemens de Geometrie ; & comme il n'avoit pas cette veuë de l'ordre, il s'eſtoit contenté de changer pluſieurs des démonſtrations d'Euclide pour en ſubſtituer d'autres plus nettes & plus naturelles. Ce petit ouvrage eſtant tombé entre les mains de celuy qui a depuis compoſé ces Elemens, il s'étonna qu'un ſi grand eſprit n'euſt pas eſté frappé de la confuſion qu'il avoit laiſſée pour ce qui eſt de la methode, & cette penſée luy ouvrit en même temps une maniere naturelle de diſpoſer toute la Geometrie, les démonſtrations s'arrangerent d'elles mêmes dans ſon eſprit, & tout le corps de l'ouvrage que nous donnons maintenant au public ſe forma dans ſon idée.

Cela luy fit dire en riant à quelques uns de ſes amis, que s'il avoit le loiſir il luy ſeroit facile de

faire des Elemens de Geometrie mieux ordonnez que ceux que l'on luy avoit montrez ; mais ce n'estoit encore qu'un projet en l'air qu'il avoit peu d'esperance de pouvoir executer, quoique quelques personnes l'en priassent; parcequ'il auroit fait scrupule d'y employer un temps où il auroit esté en estat de faire quelque autre chose.

Il est arrivé neanmoins depuis que diverses rencontres luy ont donné le loisir dont il avoit besoin pour cela. Il fut une fois obligé par une indisposition de quitter ses occupations ordinaires, & il trouva son soulagement en se déchargeant d'une partie de ce qu'il avoit dans l'esprit sur cette matiere. Une autrefois il se trouva quatre ou cinq jours dans une maison de Campagne sans aucun livre, & il remplit encore ce vuide en composant quelque partie de ce Traitté. Enfin en ménageant ainsy quelques petits temps, il a achevé ce qu'il avoit dessein de faire de cet ouvrage, s'estant borné d'abord à la Geometrie des Plans comme pouvant suffire au commun du monde.

Quelques personnes se sont étonnez qu'en écrivant d'une matiere si étenduë, & qui a esté traitée par un si grand nombre d'habiles gens, il ne leust pour cela aucun livre de Geometrie, n'en ayant point même dans sa bibliotheque : mais il leur répondoit, que l'ordre le conduisoit tellement qu'il ne croyoit pas pouvoir rien oublier de considerable. Il ajoûtoit même que cet ordre ne servoit pas seulement à faciliter l'intelligence & à soulager la memoire ; mais qu'il don-

noit lieu de trouver des principes plus feconds, & des démonſtrations plus nettes que celles dont on ſe ſert d'ordinaire. Et en effet il n'y a preſque dans ces nouveaux Elemens que des démonſtrations toutes nouvelles, qui naiſſent d'elles mémes des principes qui y ſont établis, & qui comprennent un aſſez grand nombre de nouvelles propoſitions.

On voit aſſez par là qu'il n'eſtoit pas fort difficile à l'Auteur de la nouvelle Logique ou Art de penſer, qui avoit veu quelque choſe de cette Geometrie, de remarquer, comme il a fait dans la IVe Partie, les défauts de la methode d'Euclide, & d'avancer qu'on pourroit digerer la Geometrie dans un meilleur ordre. C'eſtoit deviner les choſes paſſées. Mais cette avance qu'il avoit faite, ſans ſe hazarder beaucoup, a depuis ſervy d'engagement à produire ce petit ouvrage, à quoy l'on n'auroit peuteſtre jamais penſé. Car tant de perſonnes ont demandé au Libraire une nouvelle Geometrie, qu'on n'a pas pû la refuſer aux inſtances qu'il a faites de leur part pour l'obtenir, n'eſtant pas juſte de ſe faire beaucoup prier pour ſi peu de choſe.

On s'eſt donc reſolu de la donner au public, & de le rendre juge de l'utilité qu'on en peut tirer. On croit ſeulement devoir avertir le monde qu'il y aura peuteſtre quelques perſonnes qui pourront trouver les IV. premiers Livres un peu difficiles, parcequ'on s'y eſt ſervy de démonſtrations d'Algebre, auſquelles on a quelque peine d'abord à s'accoûtumer.

s'accoûtumer. La raiſon qui a obligé d'en uſer ainſy eſt, que traittant des grandeurs en general entant que ce mot comprend toutes les eſpeces de quantité, on ne pouvoit pas ſe ſervir de figures pour aider l'imagination ; outre que l'on jugeoit qu'il eſtoit utile de ſe rompre d'abord à cette methode, qui eſt la plus feconde & la plus Geometrique ; mais ceux neanmoins à qui elle ſeroit trop de peine ont moyen de s'en exemter en commençant par le Ve Livre, & en ſuppoſant prouvées quelques propoſitions qui dépendent des quatre premiers. Ce remede eſt aiſé, & il ne les privera pas du fruit qu'ils pourront tirer de la methode de ces Elemens lors qu'en une ſeconde lecture ils les liront tous de ſuite.

Pour les autres jugemens qu'on peut faire de cet ouvrage, comme il eſt facile de les prévoir, il ſemble auſſy qu'on n'ait pas ſujet de s'en mettre en peine. Car s'il ſe trouve des perſonnes qui le mépriſent par des principes plus elevez, & par un éloignement de toutes ces ſortes de ſciences, peut-eſtre ne ſeront-ils pas fort éloignez du ſentiment de l'Auteur. S'il y en a qui le blaſment comme Geometres en y remarquant de veritables fautes ils ſeront encore d'accord avec luy, parcequ'il ſera toujours tout preſt de les corriger. Enfin ceux qui le reprendront comme Geometres, mais en ſe trompant, ne peuvent pas luy eſtre fort incommodes, parceque c'eſt une matiere où les veritez ſont ſi claires qu'elles n'ont gueres beſoin d'apologie contre les injuſtes acculations.

DEFINITIONS DE QUELQUES MOTS
dont on s'eſt ſervi dans ces Elemens ſans les definir, parcequ'ils ſont plûtoſt de Logique que de Geometrie.

AXIOME. On appelle ainſy une propoſition ſi claire qu'elle n'a pas beſoin de preuve : comme ; *Que le tout eſt plus grand que ſa partie.* Voir la Logique IV. Part. Chap. VI.

DEMANDE. On ſe ſert de ce mot quand on a quelque choſe à faire, qui eſt ſi facile qu'on n'a pas beſoin de preuve pour demontrer qu'on a fait ce que l'on vouloit faire: comme ; *Décrire un Cercle d'un intervale donné.*

DEFINITION. Ce qu'on appelle de ce nom en Geometrie eſt la determination d'un mot qui pourroit former diverſes idées, à une idée ſi claire & ſi diſtincte qu'elle revienne toujours dans l'eſprit lorſqu'on ſe ſert de ce mot: comme, *On appelle Parallelogramme une figure dont les coſtez oppoſez ſont paralleles.* Voyez la Logique I. Part. Ch. XI.

THEOREME. On nomme ainſy une propoſition dont il faut démontrer la verité : comme ; *Que le quarré de la baſe d'un angle droit eſt égal aux quarrez des deux coſtez.*

PROBLEME. C'eſt auſſy une propoſition qu'il faut démontrer ; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe, & prouver qu'on a fait ce qu'on avoit propoſé de faire : comme ; *Faire paſſer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.*

LEMME. C'eſt une propoſition qui n'eſt au lieu où elle eſt que pour ſervir de preuve à d'autres qui ſuivent. On en peut voir des exemples au commencement des Livres VI. X. & XI.

COROLLAIRE. C'eſt une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre precedente, on en peut voir un grand nombre dans le Livre IX.

Mais il faut remarquer, que pour mieux faire voir la depen-

dance qu'avoient plusieurs propositions d'une seule qui en estoit comme le principe & le fondement, on a quelquefois mis en Corollaire ce qu'on auroit pû mettre en Theoreme, si on avoit voulu.

Et pour la même raison, il y a de certains Theoremes à qui on a donné le nom de *Proposition fondamentale*, parceque toutes les propositions d'une certaine matiere en dependent. On en peut voir des exemples dans les Livres VI. VIII. X. XI.

Explication de quelques Notes.

Quoique ces notes soient expliquées chacune en son lieu, neanmoins on a cru les devoir encore mettre icy, afin de les faire mieux entendre

\+ *Plus* : ainsy 9 + 3, c'estadire ; neuf plus trois.

— *Moins* : ainsy 14 — 2, c'estadire ; quatorze moins deux.

= *Marque de l'egalité* ; ainsy 9 + 3 = 14 — 2. c'estadire ; neuf plus trois est égal à quatorze moins deux.

:: Ces quatre points entre deux termes devant, & deux termes apres marquent que ces quatre termes sont proportionnels ou arithmetiquement, ou geometriquement.

Ainsy, Arithmetiquement 7. 3 :: 13. 9.

Et Geometriquement 6. 2 :: 12. 4.

∴ Ces mêmes quatre points avec une ligne qui les coupe marquent la proportion continue ; ainsy ∴ 3. 9. 27. c'estadire, 3 est à 9, comme 9 est à 27.

Deux lettres ensemble comme *bd*, marquent quelquefois une grandeur de deux dimensions, comme un plan dont la longueur soit *b* & la largeur *d*. Mais d'autres fois ce n'est qu'une ligne dont ces deux lettres marquent les deux extremitez, ce qu'il est aisé de discerner par le sujet que l'on traitte.

Les livres sont divisez en nombrés par des chiffres qui sont en marge : & c'est seulement à cela qu'on a égard

dans les citations & les renvois à quelques points des livres precedens ; le premier chiffre, qui eſt romain marquant le livre ; & le ſecond qui eſt Arabe, marquant le nombre de ce livre. Ainſy V. 29. veut dire *le vingt-neuviéme nombre du livre cinquiéme.*

Que ſi l'endroit où l'on renvoie eſt du même livre, on cite quelquefois un tel Theorême, ou un tel Lemme, ou bien le nombre precedent avec cette marque 3. qui veut dire *ſupra* ; comme 3. 15. c'eſt à dire, *cy deſſus, nombre 15.*

TABLE

De ce qui eſt traitté dans chaque Livre.

On pourroit dire beaucoup de choſes ſur l'ordre qu'on a ſuivi dans ces Elemens, & pour faire voir qu'il eſt beaucoup plus naturel que celuy qu'on a jamais obſervé dans ces matieres. Mais on aime mieux en laiſſer le jugement à ceux qui les liront, & l'on ſe contente d'en repreſenter le plan en faiſant voir de ſuite ce qui eſt traitté dans chaque livre.

LIVRE PREMIER. *Des grandeurs en General, & des quatre Operations, Ajoûter, Soûſtraire, Multiplier, Diviſer entant qu'elles ſe peuvent appliquer à toutes ſortes de grandeurs.* Page 1

LIVRE II. *Des Proportions.* Page 22

LIVRE III. *Des Raiſons compoſées, d'où depend La proportion des grandeurs planes & ſolides.* Page 45

LIVRE IV. *Des Grandeurs commenſurables & incommenſurables.* Page 59

LIVRE V. *De l'Etenduë. De la ligne droitte & circulaire. Des droittes perpendiculaires & obliques.* Page 80

LIVRE VI. *Des Lignes paralleles.* Page 103

LIVRE VII. *Des Lignes terminées à une circonference*, où il eſt parlé, *Des Sinus, & de la proportion des arcs de divers cercles à leurs circonferences, & du paralleliſme des lignes circulaires.* Page 119

LIVRE VIII. *Des Angles rectilignes.* Page 142

LIVRE IX. *Des Angles qui ont leur ſommet hors le centre du cercle, dont les arcs ne laiſſent pas de les meſurer.* Page 159

LIVRE X. *Des Lignes proportionelles.* Page 168

LIVRE XI. *Des Lignes reciproques.* Page 208

LIVRE XII. *Des Figures en general conſiderées ſelon leurs angles & leurs coſtez.* Page 245

LIVRE XIII. *Des Triangles & Quadrilateres conſiderez ſelon leurs coſtez & leurs angles.* Page 263

LIVRE XIV. *Des Figures Planes conſiderées ſelon leur aire, c'eſt à dire ſelon la grandeur des ſurfaces qu'elles contiennent. Et premierement des Rectangles.* Page 281

LIVRE XV. *De la meſure de l'aire des Parallelogrammes, des Triangles & autres Polygones.* Page 305

SOLUTION

d'un Problême d'Arithmetique appellé

LES QUARREZ MAGIQUES. 325.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE. Nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlemens de Paris, Toulouze, Bordeaux, Dijon, Rouen, Aix, Rennes, Grenoble & Mets, Maistres des Requestes ordinaires de nostre Hostel, Baillifs, Senefchaux, Prevosts, leurs Lieutenans, & à tous autres de nos Justiciers & Officiers qu'il appartiendra : Salut. Nostre amé le Sieur Claude de Beaubourg, Avocat en Parlement, Nous a fait remontrer qu'il a entre les mains un Livre intitulé, NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE, *Contenant outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonstrations des propositions les plus communes, de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables : De nouvelles mesures de l'Angle dont on ne s'estoit point encore avisé : Et de nouvelles manieres de trouver & de démontrer la proportion des lignes, &c. par M. D. M. G. B.* Lequel Livre il est sollicité de donner au Public, s'il avoit nos Lettres de permission sur ce necessaires, lesquelles il nous a tres-humblement supplié de luy accorder. A CES CAUSES, Nous avons permis & permettons par ces Presentes à l'Exposant, de faire imprimer, vendre & debiter en tous les lieux de nostre obeïssance ledit Livre par tel Imprimeur ou Libraire qu'il voudra choisir ; & ce en un ou plusieurs Volumes, en telles marges, en tels caracteres, & autant de fois qu'il voudra, durant l'espace de sept années, à compter du jour qu'il sera achevé d'imprimer la premiere fois en vertu des Presentes. Et faisons tres expresses deffenses à tous Libraires, Imprimeurs, & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, de l'imprimer, faire imprimer, vendre ny debiter en aucun lieu de nostre obeïssance, sous pretexte d'augmentation, correction, changement de titre, fausses

marques ou autrement, en quelque sorte & maniere que ce soit, & mesme à tous Graveurs d'en contrefaire aucunes Figures, Fleurons, Vignettes, s'il y en a, ny d'en faire des extraits ou abregez : Et à tous Marchands estrangers, Libraires ou autres, d'en apporter ny distribuer en ce Royaume d'autre impression que de celles qui auront esté faites du consentement de l'Exposant, ou de ceux qui auront droit de luy en vertu des Presentes : le tout à peine de Trois mille livres d'amende, payables sans déport par chacun des contrevenans, & appliquables un tiers à Nous, un tiers à l'Hostel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant ; de confiscation des Exemplaires qui seront trouvez contrefaits en France ou ailleurs, & de tous dépens, dommages & interests ; à condition qu'il sera mis deux Exemplaires dudit Livre en nostre Bibliotheque publique, un en celle de nostre Chasteau du Louvre, appellée le Cabinet de nos Livres, & un en celle de nostre tres-cher & feal le Sieur Seguier, Chevalier, Chancelier de France, avant que de l'exposer en vente, à peine de nullité des Presentes ; lesquelles seront registrées gratuitement, & sans frais, dans le Registre de la Communauté des Marchands Libraires de nostre bonne Ville de Paris. Du contenu desquelles Nous voulons & vous mandons que vous faſſiez jouir pleinement & paisiblement l'Exposant, & ceux qui auront droit de luy, sans souffrir qu'il luy soit donné aucun trouble ny empeschement. Voulons aussi qu'en mettant au commencement ou à la fin dudit Livre autant des Presentes ou un Extrait d'icelles, elles soient tenuës pour deuëment signifiées, & que foy y soit ajoûtée, & aux copies collationnées par un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires, comme à l'original. MANDONS au premier nostre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'execution d'icelles tous Exploits necessaires, sans demander autre permission : CAR tel est nostre plaisir, Nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande, & autres Lettres à ce contraires. DONNE' à Paris le 19. jour de Juillet 1665, & de nostre regne le Vingt-troisiéme. *Signé*, Par

le Roy en son Conseil, PETITFIED: Et scellé de cire jaune sur simple queuë.

Regiſtré sur le Livre de la Communauté, suivant l'Arrest du Parlement en datte du 8. Avril 1653. le 22. Septembre 1665. Signé, PIGET, *Syndic.*

Mr de Beaubourg a cedé son droit du Privilege cy-dessus à Charles Savreux Libraire Juré à Paris, pour en joüir par luy tout le temps & aux clauses qu'il contient, suivant l'accord fait entr'eux.

Acheué d'imprimer pour la premiere fois le 22. de Janvier 1667.

Les Exemplaires ont esté fournis.

FAUTES A CORRIGER.

Page.	*Ligne.*	*Faute.*	*Corrigez.*
96	12	le moyen	la moitié
136	*penult.*	au dessus	au dessous
141	15	*même point, ajoutez*	*& du même côté*
189	11	*dans ce même*	*dans un même*
254	8	ainsi égales	aussi égales
261	*antepen.*	le diametre	le demy-diametre
282	15	& exterieur	ou exterieur
299	14	*divisée en 6, & en 2*	*en 6 & en 2*
306	18	quoy qu'elle soit en l'un	quoy qu'en l'un elle soit l'un

FAUTES DANS LES FIGURES.

Page 91. *La 1re figure de cette page devroit estre au 1er Theoreme de la page precedente.*

111. *Il devroit y avoir une figure pour le 5e.* Que si on connoît, on le peut *suppléer par ce qui est dit en la page 111.*

158. *Il y a des lettres manquées dans la figure.* Au dessus de B, qui est simple, il faut un petit b romain, & à costé un grand B italique.

* 158. *Il manque une ligne droite de c à d.* On la peut suppléer à la plume.

191. *Lettre mal placée.* Nulle ne doit estre à la fin des lignes. Mettez *b* au milieu de la ligne d'embas, & approchez *a* & *y* un peu plus près de *d*.

310. Dans la 1re figure mettre un *n* où il y a un *u*.

NOUVEAUX

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

DES GRANDEVRS EN GENERAL, ET DES QUATRE OPERATIONS, Ajoûter, Soustraire, Multiplier, Diviser, entant qu'elles se peuvent appliquer à toutes sortes de grandeurs.

SUPPOSITIONS GENERALES.

TOVTES les Sciences supposent des connoissances naturelles, & elles ne consistent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous sçavons naturellement. 1.

AINSI *quoy qu'il semble que ce soit contre le vray ordre des sciences de supposer dans les superieures, ce qui ne se doit traiter que dans les inferieures, comme qui supposeroit dans la Geometrie, ce qui ne s'apprendroit que dans l'Astronomie; neanmoins ce n'est point*

contre cét ordre que de supposer dans une science superieure ce qui regarde l'objet de l'inferieure, lors que nous ne supposons que ce qui se peut sçavoir par la seule lumiere naturelle sans l'ayde d'aucune science.

C'EST POURQUOY *ayant entrepris de traiter icy de la quantité ou grandeur en general, entant que ce mot comprend l'etenduë, le nombre, le temps, les degrez de vitesse, & generalement tout ce qui se peut augmenter en ajoûtant ou multipliant & diminuer en soustraiant, ou divisant, &c. je ne feray point de difficulté de supposer qu'on sçait de certaines choses qui semblent appartenir à la science des nombres qu'on appelle Arithmetique, ou à la science de l'etenduë qu'on appelle Geometrie : parce que je ne supposeray rien qu'on ne puisse sçavoir sans l'aide de l'Arithmetique ou de la Geometrie pour peu d'attention qu'on y fasse, ou qu'on y ait déja fait.*

PREMIERE SUPPOSITION.

I. IL suppose donc premierement qu'on sçache ajoûter & multiplier de petits nombres, comme que 4 & 5 font 9, que 3 fois 5 font 15, &c.

SECONDE SUPPOSITION.

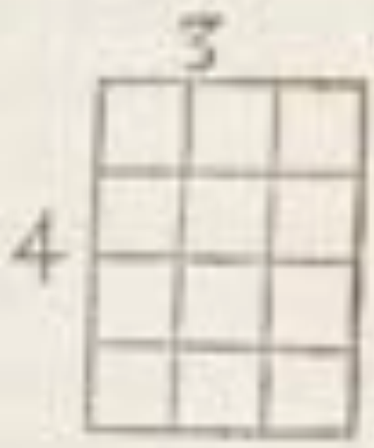
II. SECONDEMENT qu'on sçache que c'est la mesme chose dans la multiplication de commencer par lequel on veut des deux nombres que l'on multiplie : comme que 3 fois 5, est la mesme chose que 5 fois 3, que 4 fois 6, est la mesme chose que 6 fois 4.

TROISIEME SUPPOSITION.

IV. IL suppose en troisiéme lieu, que l'on sçache que ce qu'on appelle corps, espace, étenduë, (car tout cela signifie la mesme chose) a trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur. Et que quand on les considere toutes trois, c'est alors que cette sorte de grandeur s'appelle proprement corps ou Solide. Que quand on n'en considere que deux, sçavoir la longueur & la largeur, on l'appelle alors Surface. Et que quand on n'en considere qu'une, sçavoir la longueur, on l'appelle alors Ligne.

QUATRIEME SUPPOSITION.

IE suppose en quatriéme lieu, que la multiplication & la division se peuvent appliquer à toutes grandeurs, & non seulement aux nombres. Car par exemple dans l'étenduë on appelle multiplier la longueur par la largeur, lors qu'ayant un morceau de terre de 4 perches de longueur & 3 de largeur, on dit que ce morceau de terre a 12 perches de surface. Et au contraire, on appelle diviser, lors que sçachant par exemple quel est le contenu d'un morceau de terre, comme qu'il est de 12 perches, & sçachant aussi quelle en est la longueur, comme de 4 perches, on en cherche la largeur qui se trouvera estre de 3 perches. On pourroit encore donner une autre notion de la multiplication & de la division par rapport à l'unité. Mais celle-là suffit pour ce que nous avons à faire, & l'autre ne se pourroit bien expliquer qu'en supposant des choses dont nous ne parlerons que dans la suite. V.



CINQUIEME SUPPOSITION.

IE suppose en cinquiéme lieu, que l'on se puisse mettre dans l'esprit que ce qu'on appelle les trois dimensions dans les corps s'applique par accommodation à toutes les autres grandeurs, & meſme aux nombres. VI.

CAR on les considere quelquefois comme n'ayant qu'une dimension lors qu'on ne suppose point qu'on les

ait multipliez par une autre grandeur. Et alors on les peut appeller grandeurs lineaires : comme eſt par exemple le nombre de 7, qu'on ne conſidere que comme eſtant compoſé de ſept unitez.

ET quelquefois on les conſidere comme ayant deux dimenſions lors qu'on ſuppoſe qu'une grandeur eſt née de la multiplication de deux lineaires ; Et alors on les peut appeller grandeurs planes. Comme eſt par exemple le nombre de 12, lors qu'on le conſidere comme eſtant né de la multiplication de 3 par 4.

ET enfin on les conſidere comme ayant trois dimenſions lors qu'on ſuppoſe qu'une grandeur eſt née de la multiplication de trois grandeurs lineaires, ou d'une plane qui en a déja deux, par une lineaire. Et alors on peut appeller ces grandeurs ſolides. Comme eſt par exemple le nombre de 24, quand on le conſidere comme né de la multiplication de ces trois nombres 2.3.4, parce que 2 fois 3 font 6, & 4 fois 6 font 24.

SIXIEME SUPPOSITION.

VII. IL ſuppoſe enfin qu'on s'accoûtume à concevoir generalement les choſes en les marquant par des lettres ſans ſe mettre en peine de ce qu'elles ſignifient, puis qu'on ne s'en ſert que pour conclure que *b* eſt *b*, que *c* eſt *c*, ou ce qui eſt pris pour la meſme choſe en matiere de grandeur, ſur tout en general, que *b* eſt égal à *b*, & *c* à *c*, ou que *b* multiplié par *c* eſt égal à *b* multiplié par *c*, ou ſelon la 2e Suppoſition à *c* multiplié par *b*.

CETTE *remarque eſt de grande importance. Car on ne feroit que ſe brouiller ſi dans ces commencemens qui doivent eſtre tres ſimples on vouloit appliquer ce qu'on traite generalement à des exemples particuliers dont la connoiſſance dépendroit d'autres principes. Et de plus, l'une des plus grandes utilitez de ce traité, eſt d'accoûtumer l'eſprit à concevoir les choſes d'une maniere ſpirituelle ſans l'aide d'aucunes images ſenſibles, ce qui ſert beaucoup à nous rendre capables de la connoiſſance de Dieu & de noſtre ame.*

PRINCIPES GENERAVX.

Du Tout et des Parties.

TOUTE grandeur eſt conſiderée comme diviſible en ſes parties. VIII.

LA grandeur eſt appellée *tout* au regard de ſes parties. IX.

LORS qu'une partie de la grandeur eſt contenuë preciſément tant de fois dans ſon tout, comme 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c. elle s'appelle *partie aliquote*, ou ſimplement *aliquote*. X.

ON dit auſſi qu'elle en eſt *la meſure*; parce qu'elle la meſure juſtement eſtant priſe autant de fois qu'il faut. XI.

AINSI 3 eſt partie aliquote de 9, parce qu'il y eſt trois fois; 5, partie aliquote de 10, parce qu'il y eſt 4 fois.

QUAND les parties aliquotes d'une grandeur ſont autant de fois dans leur tout que les parties aliquotes d'une autre grandeur dans le leur, elles ſont appellées *aliquotes pareilles*. Ainſi 3 & 4, ſont les aliquotes pareilles de 9 & de 12, parce que 3 eſt autant de fois dans 9, que 4 dans 12, l'un & l'autre y eſtant 3 fois. XII.

LE tout eſt meſure à ſoy-même, parce que toute grandeur eſt contenuë une fois dans ſoy-même. XIII.

ON appelle *portion* toute partie aliquote ou non aliquote. Ainſi 4 eſt une portion de 13; 5 de 7. XIV.

AXIOMES.

De l'Egalité et Inegalité.

LE tout eſt plus grand que ſa partie. XV.

LE tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble. XVI.

LES grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles. XVII.

SI à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous ſont égaux. XVIII.

SI de grandeurs égales on en oſte d'égales, les reſtes ſeront égaux. XIX.

SI de grandeurs inégales on en oſte d'égales, les reſtes ſeront inégaux. XX.

XXI. Si à grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les tous seront inégaux.

XXII. LES aliquotes pareilles de grandeurs égales sont égales. Par exemple, si *b* est égal à *c*, le tiers de *b* sera égal au tiers de *c*, cela est manifeste.

XXIII. ET par la mesme raison deux grandeurs sont égales quand leurs aliquotes pareilles sont égales. Si le tiers de *b* est égal au tiers de *c*, *b* est égal à *c*, car *b* est égal à ses trois tiers, & *c* aux trois siens. Or si un tiers est égal à un tiers, les trois tiers sont égaux aux trois tiers: puis que ce n'est qu'ajoûter choses égales à choses égales. Donc, &c.

XXIV. ON peut marquer ainsi qu'une grandeur est égale à une autre, comme que *b* est égal à *c*, $b = c$.

DES QVATRE OPERATIONS, AIOVTER, &c.

ADDITION.

XXV. AJOÛTER ou *Addition* s'exprime ainsi *b*, plus *c*, & se marque ainsi $b + c$. Et le tout s'appelle *somme*.

SOUSTRACTION.

XXVI. SOUSTRAIRE ou *Soustraction* s'exprime ainsi *b*, moins *c*, & se marque ainsi $b - c$. Et cela s'appelle *reste* ou *difference*.

MULTIPLICATION.

XXVII. MULTIPLIER ou *Multiplication* s'exprime ainsi *b* en *c*, & se marque ainsi $b \times c$, ou plus brévement *bc*. Nous ne nous servirons que de ce dernier *bc*.

XXVIII. Où il faut remarquer qu'une grandeur marquée par un seul caractere comme *b*, ou *c*, s'appelle grandeur lineaire, selon la 5e Supposition. Que quand on les joint ensemble en mettant *bc*. cela ne veut pas dire que l'une soit ajoûtée à l'autre (ce qu'il faudroit marquer par $b + c$, *b* plus *c*,) mais que l'une est multipliée par l'autre, d'où naist ce qu'on appelle *produit*.

XXIX. QUE s'il n'y a eu que deux grandeurs lineaires qui ayent esté multipliées l'une par l'autre, *ce produit* s'appelle *grandeur plane* ou *plan*.

XXX. ET les deux grandeurs lineaires d'où ce plan a esté pro-

duit, s'appellent *ses deux dimensions* ou ses deux costez.

ET si c'est la mesme grandeur lineaire qui a esté multipliée par soy mesme, comme si *b* en *b* a fait *b b*, ce plan s'appelle *quarré*. Et cette grandeur lineaire *sa racine*. On marque quelquefois le quarré ainsi $b^{\square}$ c'est à dire *b* quarré, ou b^{2} c'est à dire *b* de deux dimensions. XXXI.

QUE si trois grandeurs lineaires sont multipliées l'une par l'autre, comme *b* en *c*, & *b c* en *d*, ce qui fait *b c d*, ou ce qui est la mesme chose si une grandeur plane, comme *b c* est multipliée par une lineaire comme par *d*, ce qui fait aussi *b c d*, ce produit s'appelle *solide*, ou une grandeur à 3 dimensions. XXXII.

ET si c'est une mesme grandeur qui est multipliée 2 fois par elle-mesme, comme *b* en *b*, & *b b* en *b*, ou ce qui est la mesme chose si un quarré comme *b b* est encore une fois multiplié par *b* sa racine, ce qui fait *b b b*, ce solide s'appelle *cube*, & *b* la racine de ce cube. XXXIII.

ON marque quelquefois le cube ainsi $b^{\square\square}$ c'est à dire *b* cube, ou b^{3} c'est à dire *b* de trois dimensions.

DIVISION.

DIVISER ou *Division* s'exprime ainsi, *b c* divisé par *p*, & se marque ainsi $\frac{bc}{p}$. Et ce qui en naist s'appelle *quotient*, & la grandeur de dessus, *grandeur à diviser*, & celle de dessous, *diviseur*. XXXIV.

C'EST presque toûjours une grandeur de plusieurs dimensions qu'on divise par une grandeur de moins de dimensions. Car la division est opposée à la multiplication, comme la soustraction à l'addition. D'où vient que la multiplication du diviseur & du quotient fait une grandeur égale à la grandeur à diviser; parce que la multiplication refait ce que la division avoit défait. Et d'où vient aussi par la mesme raison que si on veut multiplier une grandeur divisée par le diviseur même, on n'a qu'à oster le diviseur, & la grandeur à diviser demeurant seule, sera le produit. Ainsi le produit de $\frac{bc}{g}$ en *g* est *b c*.

LA division est de peu d'usage dans le traité de la grandeur en general, parce qu'on ne sçauroit d'ordinaire dé- XXXV.

terminer un quotient qu'en descendant à quelque espece de grandeur, comme l'etenduë ou le nombre.

Il n'y a qu'une rencontre où on le peut, qui est lors que le mesme caractere se trouve dans la grandeur à diviser & dans le diviseur. Car alors ostant ce caractere de l'un & de l'autre, ce qui restera sera le quotient.

Ainsi ayant $\frac{b}{b}$ le quotient sera c.
Ayant $\frac{b+d}{b+d}$ le quotient sera d.
Ayant $\frac{b+d}{b+d}$ le quotient sera $c\,d$.

DES GRANDEVRS INCOMPLEXES ET COMPLEXES.

XXXVI. OUTRE ce que nous avons remarqué que l'on pouvoit considerer les grandeurs comme n'ayant qu'une dimension, ou en ayant plusieurs : on peut encore considerer toutes ces sortes de grandeurs lineaires, planes, ou solides comme incomplexes, ou comme complexes.

XXXVII. IE les appelle *incomplexes* quand on considere une grandeur d'une ou de plusieurs dimensions à part, comme b, ou $c\,d$, ou $m\,n\,o$, sans y rien ajoûter ou en rien oster.

XXXVIII. ET je les appelle *complexes* quand on y en joint d'autres de mesme genre par un *plus* ou un *moins*, ou qu'on marque par un chiffre que la même grandeur se doit prendre plusieurs fois, comme $b + c$, ou $b + c + d$, ou $b + f - g$, ou $b\,c + f\,g$, ou $b\,c + f\,g, - m\,n$.

Ou par des chiffres $3\,b$.

Or comme il y a quelque difficulté un peu plus grande pour faire les operations dont nous venons de parler sur les grandeurs complexes, nous en donnerons les principes & les regles.

PRINCIPES POUR FAIRE LES QUATRE OPERATIONS SUR LES GRANDEURS COMPLEXES.

XXXIX. 1. CHAQUE grandeur incomplexe dont la complexe est composée se peut appeller *terme*.

XL. 2. LE plus & le moins sont appellez *signes*.

LE plus +, *signe affirmatif*, le moins —, *signe negatif*.

XLI. 3. PAR tout où n'est point le signe negatif, l'affirmatif est

est sous-entendu. Ainsi $b + c$, vaut $+ b + c$. Mais il seroit inutile de marquer le plus au commencement.

4. Le plus & le moins d'une même grandeur ou terme sont égaux à rien, ou valent zero. Car l'un ostant ce que l'autre a mis, il ne demeure rien. Ainsi $b - b$, ce n'est rien, $b + c - c$, ne vaut que b. Cela est aussi important que facile. XLII.

5. Lors que le même terme est plusieurs fois repeté dans une grandeur complexe, si c'est toûjours avec le mesme signe, soit affirmatif, soit negatif, on peut ne le mettre qu'une fois avec son même signe, en marquant par un chiffre combien il doit estre pris de fois. Ainsi pour $b + c + c + c$, on peut mettre b plus $3\,c$, ou $b + 3\,c$: au lieu de $b - g - g - g$, on peut mettre b moins $3\,g$, ou $b - 3\,g$. XLIII.

6. Mais si la même grandeur ou terme est avec des signes divers, on peut alors selon le principe 4, oster ce terme de la grandeur complexe autant de fois qu'il est avec un plus & avec un moins. Ainsi $b + c + c - c - c$, ne vaut que b, parce que c est autant de fois osté que mis, & ainsi il ne reste rien. Que s'il y avoit un *plus* davantage, comme $b + c + c - c$, alors il le faudroit laisser une fois avec *plus* $b + c$, & de même s'il y avoit un moins davantage. XLIV.

ADDITION
DES GRANDEURS COMPLEXES.

Pour ajoûter une grandeur complexe, comme $b + c$, à une autre grandeur ou complexe comme $m + c$, ou incomplexe comme m, il ne faut qu'y joindre la grandeur qu'on veut ajoûter & en conserver tous les signes, en observant toûjours que le signe affirmatif est sous-entendu où il n'y en a point. XLV.

A $b + c$. ajoûter $m + n$. } Somme $b + c + m + n$.

A $b + c$. ajoûter $m - n$. } Somme $b + c + m - n$.

Que s'il y a des chiffres, il les faut laisser comme on XLVI.

les trouve.

A $2b + 3c.$ } Somme $2b + 3c + 3m + 4n.$
ajoûter $3m + 4n.$ }

XLVII. LA ſomme eſtant trouvée, ſi le même terme s'y trouve pluſieurs fois, on peut pratiquer ce qui a eſté dit dans le principe 5 & 6. Ce qui ſoit dit une ſeule fois pour toutes les autres operations.

SOVSTRACTION
DES GRANDEURS COMPLEXES.

XLVIII. POUR ſouſtraire une grandeur complexe d'une autre grandeur ou complexe ouincomplexe, il ne faut que l'y joindre en changeant tous les ſignes de la grandeur qu'on ſouſtrait, & obſervant toûjours que le ſigne affirmatif eſt ſous-entendu où il n'y en a point.

De $b + c.$ } reſte $b + c - m - n.$
oſter $m + n.$ }

De $b + c.$ } reſte $b + c - m + n - o.$
oſter $m - n + o.$ }

XLIX. IL n'eſt pas difficile de juger pourquoy on change *le plus* ſous-entendu en *moins* dans le premier terme de la grandeur à ſouſtraire : car c'eſt en cela même que conſiſte la ſouſtraction. Mais d'abord on eſt ſurpris de ce qu'il faut changer les ſignes des autres termes de *plus* en *moins* & de *moins* en *plus*. Et neanmoins cela eſt aſſez facile à comprendre, ſi on conſidere que pour oſter *m moins p*, il ne faut pas oſter *m* tout ſeul, car ce ſeroit trop oſter de *p* (puiſque *m* eſt plus grand que *m* moins *p*) & ainſi ayant oſté *m* parce qu'on a trop oſté, il faut ajoûter *p* qui eſt ce qu'on a oſté de trop. D'où il s'enſuit qu'il faut changer le ſigne de *moins* qui eſtoit avant *p*, & qui faiſoit qu'en oſtant *m* on oſtoit trop, au ſigne de *plus* qui remet ce *p* qu'on avoit oſté de trop.

Et par la même raiſon il faut changer en *moins* le ſigne de *plus* qui eſtoit avant *n*, parce qu'on n'oſteroit pas aſſez ſi on oſtoit cet *n*; ce qui ſe fait en l'affectant du ſigne *moins* — *n*.

MVLTIPLICATION
DES GRANDEURS COMPLEXES.

L. Pour multiplier une grandeur complexe par une autre complexe ou incomplexe, il faut faire autant de multiplications particulieres que chaque terme de la grandeur complexe peut estre comparé avec chaque terme de l'autre grandeur.

De sorte que multipliant le nombre des termes d'une grandeur à multiplier, avec le nombre des termes de l'autre, on a le nombre des multiplications partiales qu'il faut faire pour avoir la multiplication totale, ou le produit total.

L I. Ainsi lors qu'une des deux grandeurs n'a qu'un terme & que l'autre en a deux, parce qu'une fois deux ne font que deux, il ne faudra faire que deux multiplications partiales de chacun des deux termes d'une grandeur par le terme unique de l'autre.

En $\begin{matrix} b. \\ c \dashv d. \end{matrix}\Big\}$ produit $cb \dashv db$.

L II. Lors que les deux grandeurs ont chacune deux termes, parce que deux fois deux sont 4, il faudra faire 4 multiplications partiales pour avoir le produit total.

En $\begin{matrix} b \dashv c. \\ p \dashv q. \end{matrix}\Big\}$ produit $pb \dashv pc \dashv qb \dashv qc$.

L III. Lors que chacune a trois termes, parce que trois fois trois sont neuf, il faudra faire neuf multiplications qu'on pourra disposer trois à trois en cette sorte;

En $\begin{matrix} b \dashv c \dashv d. \\ p \dashv q \dashv r. \end{matrix}\Big\}$ $\begin{matrix} pb \dashv pc \dashv pd. \\ \dashv qb \dashv qc \dashv qd. \\ \dashv rb \dashv rc \dashv rd. \end{matrix}$

& ainsi à l'infini.

L IV. La même chose se fait quand on multiplie des grandeurs planes par des grandeurs lineaires, d'où naissent des grandeurs solides.

En $\begin{matrix} bd \dashv pq. \\ f \dashv s. \end{matrix}\Big\}$ produit $sbd \dashv spq \dashv tbd \dashv tpq$.

LV. VOILA ce qu'il faut observer generalement dans toute multiplication des grandeurs complexes. Mais il y a une difficulté particuliere pour sçavoir quand il faut mettre les signes de *plus* ou de *moins* avant les produits des multiplications partiales. C'est ce qu'on apprendra par ces trois Regles.

PREMIERE REGLE.

LVI. PLUS en *plus* fait *plus*; c'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont chacun un *plus* exprimé ou sous-entendu, donne un produit qui doit avoir le signe de *plus*. Cela est sans difficulté, & les exemples qu'on a proposez le font assez voir.

SECONDE REGLE.

LVII. PLUS en *moins*, ou *moins* en *plus* donne *moins*. C'est à dire que la multiplication de deux termes dont l'un a *plus* & l'autre *moins*, donne un produit qui doit avoir le signe de *moins*.

En $p - q \overset{b}{\}} p\,b - q\,b$ parce que q a *moins* & b *plus* sous-ent.

LVIII. LA raison est que la multiplication partiale de p en b donne un produit plus grand que ne doit estre le total, parce que $p - q$ est moindre que p simplement. Et par consequent pour oster ce qu'on a mis de trop, il faut multiplier q en b, & l'oster de $p\,b$, ce qui donne $p\,b - q\,b$. Et pour le faire voir encore plus clairement, il faut marquer $p - q$ par une seule lettre, comme par x. car alors le produit de x en b, qui est $x\,b$. sera égal au produit de b en $p - q$, puis que $p - q$ est égal à x. Or le produit de b en p est égal au produit de b en $x + q$, puisque p est égal à $x + q$. Et il est clair que le produit de b en $x + q$. est $b\,x + b\,q$. Et par consequent le produit de $b\,p$ estant plus grand que $b\,x$ de $p\,q$, il faut oster $p\,q$, afin qu'il ne reste que la valeur $b\,x$, qui vaut b en $p - q$.

CELA peut estre encore demonstré d'une autre sorte.

PAR l'hypothese $p - q = x$. & $p = x + q$.

DONC c'est la même chose de multiplier b par x, que de le multiplier par $p - q$.

ET c'est aussi la même chose de multiplier b par p, que

de le multiplier par $x + q$, qui eſt égal à p; c'eſt à dire que $b\,p = b\,x + b\,q$.

ET par conſequent la premiere multiplication partiale donnant pour produit $b\,p$, qui eſt égal à $b\,x + b\,q$, comme la multiplication totale ne doit valoir que $b\,x$, il faut oſter $b\,q$ de $b\,p$, afin qu'il ne vaille que $b\,x$. Et c'eſt ce qu'on fait en mettant le ſigne negatif à la ſeconde multiplication partiale qui donne $p\,q$, & ainſi le produit de $\left\{\begin{matrix} p \\ -q \end{matrix}\right\}$ eſt $b\,p - b\,q$.

IL s'enſuit de là que le produit de $b + d$ par $b - d$ eſt égal au quarré de b, moins le quarré de d. LIX.

Car $\left\{\begin{matrix} b + d. \\ b - d. \end{matrix}\right\}$ $b\,b. (+ b\,d. - b\,d.) - d\,d.$

OR par le 5e principe $+ b\,d - b\,d$ ne valent rien, & par conſequent les oſtant comme ne faiſant rien, il reſte $b\,b - d\,d$.

TROISIEME REGLE.

MOINS en *moins* donne *plus*: c'eſt à dire que la multiplication de deux termes qui ont tous le ſigne de *moins* donne un produit qui doit avoir le ſigne de plus. LX.

$\left\{\begin{matrix} b - d. \\ p - q. \end{matrix}\right\}$ $b\,p - b\,q - p\,d + d\,q.$

CELA paroiſt bien étrange, & en effet il ne faut pas s'imaginer que cela puiſſe arriver autrement que par accident. Car de ſoy-même *moins* multiplié par *moins* ne peut donner que *moins*. Mais ce qui fait qu'on met plus, c'eſt que ces deux termes qui ſont tous deux avec *moins* eſtant multipliez par les termes qui ont *plus*, on fait par la 2e Regle deux multiplications negatives ou affectées de *moins*, dans leſquelles on a plus oſté qu'il ne faloit, de ſorte qu'on ne met un *plus* à la multiplication de ces deux termes affectez de *moins* que pour remplacer ce qu'on a oſté de trop. LXI.

POUR le faire entendre, ſuppoſons que $b - d$ ſoit égal à x, & $p - q$ égal à y; il s'enſuit de là que la multiplication totale ne doit valoir que $x\,y$.

OR la premiere multiplication qui eſt $b\,p$, vaut autant

que $x + d$ par $y + q$, puisque b vaut $x + d$, & p vaut $y + q$.

Et ainsi $b\,p = \begin{matrix} x + d. \\ y + q. \end{matrix} \Big\} y\,x + y\,d + q\,x + q\,d.$

De sorte qu'on met de trop $y\,d + q\,x + d\,q$.

Mais on fait en suite deux autres multiplications partiales toutes deux negatives, dont l'une est $-p\,d$, & l'autre $-b\,q$.

Or la premiere, qui est $p\,d$, est égale à $y + q$ par d, puis que $y + q = p$ c'est à dire que $p\,d = y\,d + d\,q$.

Et la seconde qui est $b\,q$, est égale à $x + d$ par q, puis que $x + d = b$ c'est à dire que $b\,q = x\,q + d\,q$.

Et par consequent ces deux multiplications ostent 4 choses, $y\,d. + x\,q. + d\,q. + d\,q.$

Or elles n'en doivent oster que trois, sçavoir $y\,d + x\,q + d\,q$. Et par consequent elles ostent de trop une fois $d\,q$ (qu'elles ostent deux fois) qui est le produit des deux termes affectez de *moins*. Et c'est ce qui oblige de mettre un *plus* à cette multiplication pour remplacer ce qu'on avoit osté de trop.

LXII. DE LA il s'ensuit que $b - d$ par $b - d$ vaut les deux quarrez $b\,b$ & $d\,d$ moins 2 fois $b\,d$.

Car $\begin{matrix} b - d \\ b - d \end{matrix} \Big\} bb - bd - bd + dd$ c'est à dire $bb + dd - 2\,bd$.

LXIII. C'EST sur cela aussi qu'est fondée une invention fort aisée de trouver les multiplications des nombres depuis 5 jusqu'à 10.

Il ne faut que baisser les 10 doigts, puis relever d'une main autant de doigts qu'il s'en faut que l'un des nombres qu'on veut multiplier n'aille jusqu'à 10, comme si ce nombre est 8, en relever 2, & de l'autre de même autant qu'il s'en faut que l'autre nombre n'aille jusqu'à dix, comme si ce nombre est 7, en relever 3: cela fait il faut conter autant de dixaines qu'il y a de doigts baissez, & multiplier les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, en ne les prenant que pour des unitez, & on aura le nombre qu'il faut.

La raiſon de cela eſt qu'on ne fait en cela que multiplier

10. —— 2.
par } 100 — 20 — 30 + 6. ſomme 56.
10. —— 3.

Car en baiſſant tous les doigts, on fait la premiere multiplication partiale qui donne dix dizaines.

En levant deux doigts d'une main on fait ce que doit faire la ſeconde multiplication partiale, qui eſt de + 10. par — 2, ce qui donne — 20 : car en levant deux doigts on oſte deux dizaines.

En levant 3 doigts de l'autre main on fait encore ce que doit faire la troiſiéme multiplication partiale, qui eſt de + 10 par — 3, ce qui donne — 30 : car en levant 3 doigts on oſte trois dizaines.

Et enfin en multipliant les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, on multiplie — 2 par — 3, ce qui donne + 6 par la raiſon que nous avons dite, qui eſt que les deux multiplications negatives ont oſté cela de trop. Car la premiere oſtant 2 fois 10, a oſté 2 fois 7 plus 2 fois 3. Et la ſeconde oſtant 3 fois 10, a oſté 3 fois 8, plus 3 fois 2. Et ainſi elles ont oſté deux fois 3 fois 2, qui n'en devoient eſtre oſtez qu'une fois.

Car 10 fois 10 eſt égal à

7 + 3.
par 8 + 2.

Ce qui fait 7 fois 8 + 8 fois 3 + 2 fois 7 + 2 fois 3.

Et ainſi 10 fois 10 n'eſt plus grand que 7 fois 8 (qui eſt ce que l'on cherche) que dés trois dernieres multiplications, 8 fois 3, 2 fois 7, 2 fois 3. Et ainſi cette derniere n'en doit eſtre oſtée qu'une fois, & ſi on l'a oſtée deux fois, il la faut remettre une fois : comme on fait auſſi en mettant *plus* à la multiplication de moins 3 par moins deux.

QUATRIEME REGLE.

QUAND les termes ſe trouvent avec des nombres, il faut multiplier les nombres par les nombres, & les termes par les termes pour en avoir les multiplications partiales, LXIV.

en gardant les regles precedentes pour ce qui eſt des *plus* & des *moins*.

$$\left.\begin{matrix}3\ b\\5\ d\end{matrix}\right\}\ 15\ b\,d. \qquad \left.\begin{matrix}3b.\\d.\end{matrix}\right\}\ 3\ b\,d.$$

$$\left.\begin{matrix}3\ b+2\ d\\4\ p+3\ q\end{matrix}\right\}\ 12\ b\,p+8\,p\,d+9\,b\,q+6\,d\,q.$$

THEOREME
POUR EXEMPLE DE LA MULTIPLICATION DES GRANDEURS COMPLEXES.

De 4 grandeurs deux eſtant égales & les deux autres inégales, le produit d'une égale plus une inégale par l'autre égale plus l'autre inégale, eſt égal au produit d'une égale par les trois autres, plus le produit des deux inégales.
Soient les 4 grandeurs *x. x. b. c.*
Il eſt clair que des 3 produits marquez dans le Theoreme

Le premier qui eſt $\left.\begin{matrix}x+b\\ \text{en } x+c\end{matrix}\right\}$ ce qui fait $x\,x.\ x\,b.\ x\,c.\ b\,c.$

Eſt égal au ſecõd qui eſt $\left.\begin{matrix}x+b+c.\\ \text{en } x.\end{matrix}\right\}$ ce qui fait $x\,x.\ x\,b.\ x\,c.$

Plus le troiſiéme $\left.\begin{matrix}b\\ \text{en } c\end{matrix}\right\}$ ce qui fait $b\,c.$

1. COROLLAIRE.

Trois grandeurs eſtant données comme *b. x. c.* le produit de la 1 plus la 2 par la 2 plus la 3, eſt égal au produit des 3 par la 2 plus le produit de la 1 par la derniere. C'eſt la meſme choſe.

2. COROLLAIRE.

Ce Theoreme fait voir ſur quoy eſt fondée cette regle d'Arithmetique pour la multiplication des nombres digites. On regarde de combien chacun eſt different de 10. On oſte du 1 la difference du 2, & ce qui reſte eſt pris pour dizaines, puis ayant multiplié les deux differences, le tout fait le produit de ces deux nombres digites.

Ainſi 7 fois 8 font 56, parce que la difference de 7 d'avec 10 eſt 3, & celle de 8, 2. Oſtant donc 2 de 7, reſte 5, ce qui me donne 50; & multipliant 2 par 3, c'eſt 6. Donc le tout eſt 56.

Mais

Mais voicy comment cela revient au Theoreme precedent.

2 est la difference de 8 d'avec 10 que je mets sous 7, & 3 la difference de 7 d'avec 10 que je mets sous 8. Puis ostant 2 de 7, reste 5 que je marque au costé gauche de 2. Et ostant 3 de 8, reste aussi 5 que je marque en suite de 3.

I'ay donc 4 nombres dont les extrêmes sont égaux. Et il faut remarquer;

1. Que les deux premiers d'embas sont égaux au premier d'enhaut, & les deux derniers au dernier d'enhaut.

2. Que les 3 premiers valent 10 necessairement, parce que le 3 est la difference du 2 d'enhaut d'avec 10, & les deux premiers d'embas valent le 2 d'enhaut.

Donc quand je dis 10 fois 5 ce qui fait 50, c'est la même chose que de multiplier les 3 premiers qui valent 10 par le dernier (5) qui est un des égaux.

Et quand je multiplie les deux differences, c'est multiplier les deux inégaux.

Donc ces deux produits doivent estre égaux au produit des deux premiers par les deux derniers, qui est la même chose que le produit des deux d'enhaut, qui est ce que l'on cherchoit.

DIVISION
DES GRANDEURS COMPLEXES.

ELLE n'a rien de particulier, & il ne faut que mettre la grandeur à diviser au dessus & le diviseur au dessous. LXV.

$$\frac{bd \rightarrow fg.}{e \rightarrow i.}$$

DES EQVATIONS.

TOUTE égalité entre deux grandeurs se peut appeller *équation*: mais pour l'ordinaire on donne ce nom à l'égalité de deux grandeurs complexes, comme $bp \rightarrow fg = mn \rightarrow ir$. LXVI.

Ou au moins dont l'une est complexe, comme $b \rightarrow c = d$.

Chacune de ces grandeurs égales peut estre appellée *membre de l'equation.*

LXVII. Il est souvent trés utile de trouver des equations, & l'un des plus grands secrets pour les trouver est de pouvoir donner à une même grandeur diverses dénominations, parce que souvent une dénomination en fait voir l'égalité avec une autre grandeur qu'une autre dénomination n'auroit pas fait voir.

Ainsi aiant une grandeur comme b partagée en deux portions, comme c & d, on peut nommer chaque portion ou par son propre caractere, comme c, ou par le caractere du tout moins l'autre partie. Car il est bien visible que b estant égal à $c + d$ chaque partie est égale au tout moins l'autre partie, & qu'ainsi $c = b - d$. Et $d = b - c$.

Or il y a beaucoup de rencontres où il est plus avantageux de nommer une partie du nom du tout moins l'autre partie que de luy donner un nom propre. Comme au contraire il est quelquefois plus utile de donner un nom propre à ce qui est marqué par une grandeur moins quelque chose, comme nous avons veu dans les regles de la multiplication.

THEOREME.

LXVIII. La plus importante observation touchant les Equations est celle-cy.

On peut transferer chaque terme d'un des membres d'une equation en l'autre sans en troubler l'égalité, pourveu qu'on en change les signes, c'est à dire que l'ostant d'un des membres où il estoit avec *plus*, on le mette dans l'autre avec *moins* ou au contraire. Par exemple,

$$b + d = f.$$

Ie puis transporter d en l'autre membre en changeant de signe & mettant

$$b = f - d.$$

Et si au contraire on avoit

$$b - d = g.$$

On pourroit mettre

$$b = g + d.$$

Que si on transportoit tous les termes d'un membre dans l'autre membre en les changeant chacun de signe, le membre où on auroit transporté tous les signes seroit égal à rien, comme seroit celuy d'où on les auroit transportez. Car si

$$b + d - f = p + q - r.$$

$$b + d - f - p - q + r = \text{à zero.}$$

Et si on ne laisse d'un costé qu'un terme avec un *moins*, cela fera que le membre où on aura transporté les autres termes sera égal à zero moins ce terme-là.

$$b + d = f - g.$$

$$b + d - f = -g.$$

C'est à dire sera moins que rien. Ce qui semble impossible à concevoir, quoy que cela ne soit pas sans exemple même dans le langage commun, puis qu'on dit d'un homme endebté qu'il s'en faut vingt mille escus qu'il n'ait un sou.

LA raison de tout cela n'est autre que les deux maximes de l'égalité. §. XIX.

Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous seront egaux.

Si de grandeurs égales on en oste d'égales, les restes seront égaux.

Car si $b - d = g$.

En ajoûtant d de costé & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour ajoûter d au membre où il est avec *moins*, je n'ay qu'à le retrancher, puis qu'aussi bien si je l'avois ajoûté en disant,

$b - d + d$.

$- d$ & $+ d$ ne feroient rien par le 4e principe.

Et pour ajoûter d à l'autre membre où il n'est point du tout, il faut que je l'y mette avec *plus* en disant $g + d$.

Et par consequent ce transport d'un terme d'un membre en un autre en changeant le *moins* en *plus* ne fait qu'ajoûter choses égales à choses égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

Et ſi j'avois $b + d = f$.

En retranchant d de coſté & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour retrancher d du membre où il eſt avec un *plus*, je n'ay qu'à l'oſter tout à fait, puis qu'on ne peut pas mieux le retrancher qu'en le ſupprimant.

Et pour le retrancher du membre où il n'eſtoit point du tout, il faut l'y mettre avec un *moins*, en diſant $f - d$.

Et par conſequent ce tranſport d'un terme d'un membre à un autre en changeant le *plus* en *moins*, ne fait qu'oſter choſes égales de choſes égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

EXEMPLES.

DE LA SOLUTION D'UN PROBLEME PAR EQUATIONS.

LXX. On feint qu'une Mule allant avec une Aſneſſe ſe plaignoit d'eſtre trop chargée, & que la Mule luy dit ; Si je t'avois donné un de mes ſacs, nous en aurions autant l'une que l'autre : & ſi tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toy.

On demande combien chacune portoit de ſacs. Et on le trouve ainſi.

Le nombre inconnu des ſacs de la Mule ſoit appellé A. & de l'Aſneſſe B.

Par la premiere hypotheſe

$A - 1 = B + 1$.

Donc ajoûtant 1 de part & d'autre

$A = B + 2$.

Par l'autre hypotheſe.

$A + 1$ eſt égal à deux fois B—1, c'eſt à dire à 2 B — 2.

Donc en mettant au lieu d'A, $B + 1$ qui luy eſt égal.

$B + 3 = 2B - 2$.

Donc ajoûtant 2 de part & d'autre

$B + 5 = 2B$.

Donc oſtant un B de part & d'autre

$5 = B$.

C'eſt à dire que B, le nombre des ſacs de l'Aſneſſe, eſt 5, & 7 celuy des ſacs de la Mule.

SECOND EXEMPLE.

AYANT rencontré des pauvres & leur voulant donner à chacun 5 sols, j'ay trouvé que j'en avois un de trop peu. Et ainsi ne leur en ayant donné qu'à chacun 4, il m'en est resté 6. Combien y avoit-il de pauvres, & combien avois-je de sols. LXXI.

Soit le nombre des pauvres appellé A.

Par l'hypothese

$5A - 1 = 4A + 6$.

Donc ajoûtant 1 de part & d'autre

$5A = 4A + 7$.

Donc ostant $4A$ de part & d'autre

$A = 7$.

Donc il y avoit 7 pauvres. Et j'avois 34 sols.

TROISIEME EXEMPLE.

N'AYANT que des Carolus de 10 deniers & des pieces de 3 blancs de 15 deniers, faire 20 sols en 20 pieces. LXXII.

Soient appellez le sol A.

Le Carolus $B = A - 2$ den.

La piece de trois blancs $C = A + 3$ den.

Multipliant B par la difference de C à A, c'est à dire prenant 3 B, & C par la difference de B à A, c'est à dire prenant 2 C.

Ie dis que $3B + 2C$ valent $5A$.

Car $3B = 3A - 6$ d.

Et $2C = 2A + 6$ d.

Or plus & moins valent zero. Donc, &c.

Or 4 fois 5 valent 20.

Donc 4 fois 3 B c'est à dire 12 B, & 4 fois 2 C, c'est à dire 8 C valent 20 A. Ce que l'on cherchoit.

Cette equation est le fondement d'une regle d'Arithmetique qu'on appelle la regle d'alliage.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SECOND.

DES PROPORTIONS.

DE LA COMPARAISON DES GRANDEVRS. DIFFERENCE ET RAISON.

DEFINITIONS ET DIVISIONS.

I. LEs grandeurs de meſme genre *s'appellent homogenes*, comme deux nombres, deux lignes, deux ſurfaces.

II. DE divers genres *eterogenes*, comme un nombre & une ligne, une ſurface & un ſolide.

III. QUAND on compare deux grandeurs homogenes enſemble, le premier terme de cette comparaiſon s'appelle *antecedent*: & le ſecond *conſequent*.

IV. On cette comparaiſon ſe peut faire en deux manieres.

La premiere eſt quand l'une eſtant plus grande que l'autre on regarde de combien la plus grande ſurpaſſe la plus petite, ce qui s'appelle *excés* ou *difference*: comme

de combien A surpasse B. Cette difference se peut exprimer ainsi A — B.

L'AUTRE est quand on considere la maniere dont une grandeur est contenuë dans une autre, ou en contient une autre, ce qui s'appelle *raison*. V.

CONTENIR & estre contenu ont un rapport si naturel & l'un s'entend si facilement par l'autre, que je ne parleray plus que d'estre contenu. VI.

LA maniere dont une grandeur est contenuë dans une autre que nous avons dit s'appeller raison, est encore de deux sortes. L'une est quand la grandeur ou quelqu'une de ses aliquotes est contenuë tant de fois precisément dans une autre, ce qui s'appelle *raison exacte*, ou *raison de nombre à nombre*, parce que tous les nombres ont entr'eux cette raison aiant tous au moins l'unité pour une de leurs aliquotes qui est contenuë precisément tant de fois dans tout autre nombre que ce soit. VII.

LES grandeurs qui ont entr'elles cette raison de nombre à nombre sont appellées *commensurables*, parce qu'elles ont quelque aliquote qui leur sert de mesure commune. VIII.

L'AUTRE maniere selon laquelle une grandeur est contenuë dans une autre, est quand il ne se trouve aucune aliquote dans l'une qui soit precisément tant de fois dans l'autre. De sorte que l'une & l'autre aiant une infinité d'aliquotes & de mesures, il n'y en a aucune neanmoins qui mesure precisément l'une & l'autre grandeur, mais celle qui mesure precisément la premiere ne mesurera jamais precisément la seconde, & celle qui mesure precisément la seconde ne mesure jamais precisément la premiere. Cette raison s'appelle *sourde*. IX.

ET les grandeurs qui n'ont entr'elles que cette sorte de raison s'appellent *incommensurables*, parce qu'elles n'ont entr'elles aucune mesure commune. X.

LA raison exacte ou de nombre à nombre se divise premierement en raison *d'égalité*, ou *d'inégalité*. XI.

LA raison d'égalité est fondée sur ce que l'une est contenuë precisément une fois dans l'autre. XII.

XIII. LA raison d'inégalité se divise en celle qu'on appelle *de plus grande inégalité*, qui est quand on commence par le plus grand terme en le comparant au plus petit, comme 3 à 2.

XIV. ET celle *de moindre inégalité*, qui est quand on commence par le plus petit terme en le comparant au plus grand, comme 2 à 3.

XV. QUE si ce ne sont que les mêmes termes dont l'ordre est seulement renversé, l'une de ces raisons est appellée *inverse* au regard de l'autre.

XVI. L'UNE & l'autre de ces raisons d'inégalité est *multiple* ou *non multiple*.

XVII. ON l'appelle *multiple* quand une grandeur entiere est contenuë plusieurs fois precisément dans une autre. Car alors celle qui contient est appellée multiple de celle qui est contenuë, & celle qui est contenuë *sous-multiple*. Et l'une & l'autre se subdivise à l'infini selon l'infinie varieté des nombres, double, triple, quadruple, &c. moitié, tiers, quart.

XVIII. LA raison non multiple est quand il n'y a que quelque aliquote de la grandeur, & non pas la grandeur entiere qui soit contenuë precisément dans l'autre grandeur. Et cette raison se subdivise encore à l'infini, & reçoit differens noms: mais le plus court est de les nommer selon les plus petits nombres ausquels elles se rapportent, comme de 3 à 5, de 7 à 13, &c.

DES PROPORTIONS.

DEFINITIONS ET DIVISIONS.

XIX. NOUS venons de dire que les comparaisons de deux grandeurs entr'elles s'appellent difference, ou raison.

Mais on peut comparer ensemble ces comparaisons mêmes, & c'est de là que vient ce qu'on appelle *proportion*.

XX. CAR l'égalité des differences ou des raisons s'appelle *proportion*: celle des differences *proportion Arithmetique*, & celle des raisons *proportion Geometrique*.

XXI. ON voit par là que chacune des deux differences, ou des

des deux raisons dont l'égalité fait la proportion demandant deux termes, chaque proportion en demande 4. dont le premier est un antecedent, le second son consequent : le troisiéme un antecedent, & le quatriéme son consequent. Ce qui se peut marquer ainsi *b. c :: f. g.*

XXII. Et de plus, le premier & le dernier terme s'appellent *les extrémes*, le 2 & le 3 ceux *du milieu*, ou *les moyens*.

XXIII. Neanmoins une mesme grandeur peut servir de consequent au premier antecedent, & d'antecedent au second consequent : & alors cette proportion est appellée *continuë*, & la grandeur qui est ainsi prise deux fois *moyenne proportionnelle*. Comme *b. c :: c. d.*

On peut marquer ainsi cette proportion continuë pour la distinguer de l'autre ∴ *b. c. d.*

XXIV. Que si cela se continuë plus loin que ces 3 premiers termes, cela s'appelle *progression*, ∴ *b. c. d. f. g*, &c.

PROPORTION ARITHMETIQVE.

XXV. Dans la proportion arithmetique la difference du premier antecedent à son consequent est égale à la difference du 2e antecedent à son consequent.

3. 7 :: 8. 12.

THEOREME.

XXVI. La plus considerable propriete de la proportion arithmetique est que les extrémes ajoûtez ensemble font une somme égale à celle des deux du milieu. Ce qu'il est aisé de montrer en reduisant les termes à une commune denomination : ce qui est un des plus grands secrets dans la Geometrie.

Car si *b* est arithmetiquement à *c* comme *m* à *n*. C'est à dire si la difference de *b* à *c* est égale à la difference de *m* à *n*, appellons cette difference *z*, & supposant que c'est *b* qui est plus grand que *c*, & *m* que *n*, *b* sera égal à *c* + *z*, & *m* à *n* + *z*, & ainsi la proportion se pourra reduire à ces termes,

c + *z*. *c* :: *n* + *z*. *n*.

Et par consequent l'addition des extrêmes donne *c* + *z* + *n*.

Et l'addition de ceux du milieu donne auſſi $c + n = z$.
Ce qui eſt la même choſe.

AVERTISSEMENT.

XXVII. *Ie ne diray rien davantage de la proportion arithmetique, parce qu'elle n'eſt pas de grand uſage, & que quand on parle abſolument de proportion on entend la Geometrique ; outre que tout ce qui ſe dit de la proportion Geometrique ſe peut appliquer à l'arithmetique, pourveu que l'on prenne garde que l'Addition & la Soustraction ſont dans la proportion arithmetique, ce que la Multiplication & la Diviſion ſont dans la Geometrique.*

DE LA PROPORTION GEOMETRIQVE.

DEFINITION.

XXVIII. LORS que la raiſon d'un antecedent à ſon conſequent eſt égale à celle d'un autre antecedent à un autre conſequent, cette égalité de raiſons, cõme nous avons déja dit, s'appelle *proportion Geometrique*, & abſolument *proportion*.

Et ces 4 termes, *proportionels*.

Et les deux extrêmes au regard des deux moyens, *reciproques*.

Et cela s'exprime ainſi,

b eſt à *c* comme *f* à *g*.

Ou *b* eſt à *c* en même raiſon que *f* à *g*.

Ou la raiſon de *b* à *c* eſt égale à la raiſon de *f* à *g*.

Et ſe marque ainſi,

b. c :: f. g.

Quand la proportion eſt continuë elle ſe peut marquer de même, en repetant deux fois le terme du milieu, qui s'appelle alors *moyen proportionel*.

b. c :: c. d.

Ou bien ainſi,

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ *b. c. d.*

I. DEFINITION DE L'EGALITE' DES RAISONS.

XXIX. VOICY la premiere notion de l'égalité de deux raiſons.

Deux raiſons ſont appellées égales quand les antecedens contiennent également les conſequens, ou ſont éga-

lement contenus dans les consequens.

Dans la raison d'égalité, contenir & estre contenu sont la même chose.

Mais dans les raisons d'inégalité cela est different. Car dans celles de plus grande inégalité les antecedens contiennent les consequens, parce que l'on compare le plus grand terme au plus petit.

Mais dans celles de plus petite inégalité, les antecedens sont contenus dans les consequens, parce que l'on compare le plus petit terme au plus grand.

AVERTISSEMENT.

CETTE *notion de l'égalité des raisons suffiroit, s'il estoit toujours aisé de juger si les antecedens sont également contenus dans les consequens. Mais parce que cela est souvent difficile, voicy des proportions naturellement connües qui serviront d'Axiomes pour le faire juger par le moyen d'une seconde definition qui ne sera qu'une explication de la premiere.* XXX.

PROPORTIONS NATVRELLEMENT CONNVES.

PREMIER AXIOME.

LE multiple d'une grandeur est à cette grandeur, comme le multiple pareil d'une autre grandeur est à cette autre grandeur. Et au contraire une grandeur est à son multiple comme une autre grandeur est à son multiple pareil. XXXI.

$$3B.\ B :: 3C.\ C.$$
$$B.\ 3B :: C.\ 3C.$$

SECOND AXIOME.

LES multiples pareils de deux grandeurs sont entr'eux comme ces grandeurs: & au contraire deux grandeurs sont entr'elles comme leurs multiples pareils. XXXII.

$$3B.\ 3C :: B.\ C.$$
$$B.\ C :: 3B.\ 3C.$$

TROISIEME AXIOME.

LES multiples differens de la même grandeur sont entr'eux, comme les multiples d'une autre grandeur pa- XXXIII.

reils aux premiers, chacun à chacun & dans le même ordre.

3 *B*. 5 *B* :: 3 *C*. 5 *C*.

QUATRIEME AXIOME.

XXXIV. LES multiples pareils de deux grandeurs sont entr'eux comme d'autres multiples pareils des mêmes grandeurs.

3 *B*. 3 *C* :: 5 *B*. 5 *C*.

AVERTISSEMENT.

XXXV. TOUT *ce que j'ay dit des multiples se peut dire des aliquotes, n'estant que la même chose sous un autre nom. Car toute grandeur est multiple de ses aliquotes, & aliquote de ses multiples.*

CINQUIEME AXIOME.

XXXVI. LES equimultiples de deux grandeurs demeurent equimultiples chacun de sa grandeur, si on ajoute ou l'on oste à l'un & à l'autre d'autres equimultiples de la grandeur de chacun.

5 *A*, & 5 *B* sont equimultiples l'un de *A* & l'autre de *B*, si l'on ajoûte à l'un 3 *A* & à l'autre 3 *B*. Il est visible que 5 *A* + 3 *A* & 5 *B* + 3 *B* seront encore equimultiples de *A* & de *B*.

Et de mesme 5 *A* — 3 *A* & 5 *B* — 3 *B*.

SIXIEME AXIOME.

XXXVII. DEUX raisons estant égales, les inverses le sont aussi.

Car une raison est inverse de soy-même quand on en a transposé les termes, & que de l'antecedent on en a fait le consequent. Or dans les raisons d'égalité cette transposition ne fait rien.

Mais en celles d'inégalité elle fait que la raison qui estoit de plus grande inégalité en comparant le plus grand terme au plus petit, ce qui faisoit que l'antecedent contenoit le consequent, devient de plus petite inégalité en comparant le plus petit terme au plus grand, ce qui fait que l'antecedent est contenu dans le consequent.

Or il est visible que contenir & estre contenu estant des termes relatifs & reciproques, les antecedens de deux raisons ne peuvent contenir également les consequens (ce

qui doit arriver quand deux raisons de plus grande inégalité sont égales) que les consequens ne soient également contenus dans les antecedens.

Et ainsi tout ce qui arrivera quand on transposera les termes de chacune de ces raisons ce qui est les rendre inverses, sera que les nouveaux antecedens seront également contenus dans les consequens : ce qui montre que ces raisons inverses sont encore égales.

SECONDE DEFINITION
DE L'EGALITE' DES RAISONS.

XXXVIII. Deux raisons sont appellées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antecedens sont chacunes également contenües dans chaque consequent.

Pour mieux comprendre cette definition qui est une des plus difficiles de la Geometrie, soient les 4 grandeurs qu'on veut montrer estre proportionnelles *b. c. f. d.*

Soient les aliquotes quelconques de *b*, premier antecedent, appellées *x*, & les aliquotes quelconques du second antecedent pareilles à celles du premier appellées *y*: en sorte que si *x* est ou la $\frac{1}{2}$ ou la $\frac{1}{3}$ ou la $\frac{1}{4}$ du premier antecedent, *y* soit aussi ou la $\frac{1}{2}$ ou la $\frac{1}{3}$ ou la $\frac{1}{4}$ du second. Il s'ensuit de là par le 1er Axiome que *b. x :: f. y*: & par le second, que *b. f :: x. y*.

Cela estant supposé, afin que selon cette definition les 4 grandeurs *b. c. f. g.* soient proportionnelles, il faut que *x* & *y* (aliquotes quelconques pareilles de *b* & d'*f*) soient également contenuës dans *c* & dans *g*. C'est à dire que si *x* est precisément tant de fois dans *c*, *y* soit aussi precisément autant de fois dans *g*. Et alors la raison de chaque antecedent à son consequent est de nombre à nombre.

Mais si *x* n'est jamais precisément tant de fois dans *c*, mais toûjours avec quelque residu, il faut qu'*y* soit aussi autant de fois dans *g*, mais avec quelque residu: & alors leur raison est sourde.

Ce qui semble etrange en cecy est que les deux antecedens ayant une infinité d'aliquotes pareilles, on puisse estre asseuré que si celles du premier ne sont jamais precisément tant de fois

dans son consequent, il en soit de même de celles du second antecedent au regard de son consequent. Mais on verra plus bas par une nouvelle demonstration des lignes proportionnelles, que non seulement cela peut estre, mais qu'on en est effectivement asseuré avec une entiere certitude lors que dans les lignes il n'y a qu'une raison sourde de l'antecedent au consequent.

PREMIER COROLLAIRE.

XXXIX. Quand x & y ne sont pas precisément tant de fois dans les consequens, mais qu'il reste quelque chose, le residu du premier consequent soit appellé r, & celuy du second, r.

Et alors les aliquotes quelconques pareilles d'x & d'y seront également contenuës dans r & r; d'où il s'ensuivra que

$$x.\ r :: y.\ r.$$

Car supposons que la 1re proportion soit reduite en ces termes selon les premieres aliquotes qu'on y a considerées,

$$b.\quad c :: f.\quad g.$$
$$\S x.\quad \S.x \dashv r :: \S y.\quad \S y \dashv r.$$

Ie dis que les aliquotes pareilles d'x & d'y seront également contenuës dans r, & r.

Soient par exemple $x \frac{5}{10}$ d'x, & $y \frac{5}{10}$ d'y. Si x est dans r 7 fois $\dashv r$, y doit aussi estre dans r 7 fois $\dashv r$, en sorte que cette seconde proportion sera telle.

$$x.\quad y :: y.\quad r.$$
$$10x.\quad 7.x \dashv r.\quad 10y.\quad 7y \dashv r.$$

Si cela n'estoit, la 1re proportion auroit esté fausse.

Car b valant $5x$, & chaque x. $10x$. b vaut $50x$, & par la même raison, f $50y$.

c valant $3x \dashv r$, & les $3x$ valant $30x$, & r, $7x \dashv r$, c vaut en tout $37x \dashv r$.

Et par consequent il faut que g vaille aussi $37y \dashv r$. autrement $x \frac{7}{10}$ de b, & $y \frac{7}{10}$ de f ne seroient pas également contenuës dans c, & dans f, & ainsi il faut que la 1re Proportion pour estre vraye se puisse reduire à ces nouveaux termes.

b. c :: f. g.
10x. 17x+r :: 30y. 17y+r.

Donc les aliquotes pareilles d'*x* & d'*y* sont également contenues dans *r* & *r*.

Donc *x. r : : y. r. Ce qu'il falloit démontrer.*

SECOND COROLLAIRE.

XL. On peut voir par là que la difference qu'il y a entre l'égalité des raisons de nombre à nombre, & celle des raisons sourdes, est que la premiere se montre positivement, & la seconde negativement, en ce qu'on n'y peut jamais trouver d'inégalité.

FONDEMENT DE CETTE SECONDE DEFINITION DE L'EGALITE' DES RAISONS.

CETTE seconde definition a pour fondement la premiere & les axiomes des proportions naturellement connuës, n'estant en effet qu'un moyen qui fait voir que les antecedens contiennent également les consequens, ou qu'ils en sont également contenus, en reduisant la proportion à quelqu'une de celles qui sont naturellement connues.

C'est ce que l'on fait en prenant les aliquotes pareilles des antecedens, & considerant si les unes sont autant de fois que les autres contenues dans les consequens. Car alors on fait les deux termes de la premiere raison multiples d'une même grandeur, & les deux termes de la seconde multiples aussi d'une autre grandeur: De sorte que si les antecedens sont equimultiples chacun de leur grandeur & les consequens de même, il s'ensuit que ces raisons * sont égales par le 5e Axiome.

C'est ce qu'on a déja veu dans le premier Corollaire, & on y a reconnu aussi que cela n'est pas seulement vray dans les raisons de nombre à nombre, mais aussi dans les raisons sourdes, autant que cela le peut estre, selon ce qui a esté dit dans le second Corollaire.

PREMIER THEOREME.

XLI. DEUX grandeurs qui ont même raison à une même

grandeur sont égales, & si elles sont égales elles ont même raison à une même grandeur.

Exemple. Si

$$b.\ d :: f.\ d.$$

Ie dis que b est égal à f. Car afin que b & f aient même raison à d, il faut que leurs aliquotes pareilles soient également contenuës en d. ℸ. 38. Ce qui ne peut estre qu'elles ne soient égales, estant clair que les plus grandes y seroient moins contenuës que les plus petites. Or deux grandeurs sont égales quand leurs aliquotes pareilles sont égales. I. 13.

Que si on suppose au contraire que b & f sont égales, il s'ensuivra qu'elles auront même raison à une même grandeur comme d. Car estant égales leurs aliquotes pareilles seront égales (I. 11.) & par consequent également contenuës dans d. Ce qui est la même chose qu'avoir même raison à d. ℸ. 38.

SECOND THEOREME.

XLII. LORS que deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, elles sont en même raison estant multipliées qu'avant qu'estre multipliées.

Ce n'est presque que le 2ᵉ Axiome. Mais on le peut encore prouver par la 2ᵉ Definition.

$$b.\ c :: f\,b.\ f\,c.$$

Soit x aliquote quelconque de b, $f\,x$ sera l'aliquote pareille de $f\,b$ (par I. 50 & 51.) Et par la même raison $f\,x$ sera dans $f\,c$ autant de fois qu'x sera dans c. Donc si par exemple b vaut $10\,x$, & c, $9\,x$, $f\,b$ vaudra $10\,f\,x$, & $f\,c$, $9\,f\,x$. Et ainsi la proportion sera la même que celle du 3ᵉ Axiome.

$$b.\ c :: f\,b.\ f\,c.$$
$$10\,x.\ 9\,x :: 10\,f\,x.\ 9\,f\,x.$$

Et quand il n'y auroit qu'une raison sourde de b à c, cela n'empescheroit pas la proportion. Car si x (aliquote quelconque de b) n'estoit jamais tant de fois dans c qu'avec quelque residu, $f\,x$ (aliquote quelconque pareille de $f\,b$) seroit autant de fois dans $f\,c$, mais toûjours aussi avec

quelque

quelque reſidu. Et par conſequent ces 4 grandeurs ſeroient proportionnelles ſelon ce qui a eſté dit §. 38. Et cette proportion ſe pourroit exprimer ainſi,

$$b. \quad c :: fb. \quad fc.$$
$$10x. \quad 9x+r :: 10fx. \quad 9fx+fr.$$

TROISIEME THEOREME.

Deux raiſons égales à une troiſiéme raiſon ſont égales entr'elles. XLIII.

$$\text{Si } \left.\begin{matrix} f. & g. \\ m. & n. \end{matrix}\right\} :: b. \ c.$$
$$f. \quad g \ :: \ m. \ n.$$

Car ſi toutes les aliquotes d'f & d'm ſont chacunes autant contenuës dans leurs conſequens g & n que toutes les aliquotes de b ſont contenuës dans ſon conſequent c, il eſt clair que toutes les aliquotes pareilles d'f & d'm ſeront auſſi entr'elles également contenuës dans leurs conſequens g & n. En quoy conſiſte la proportion §. 38. Cela ſe peut marquer ainſi,

$$\left.\begin{matrix} f. & g. \\ 1^{re}. & 1^{re}. \\ m. & n. \\ 2^{e}. & 2^{e}. \end{matrix}\right\} :: \begin{matrix} b. & c. \\ 1^{re}. & 1^{re}. \\ 2^{e}. & 2^{e}. \end{matrix}$$

Et ce ſera la même choſe dans les raiſons ſourdes, en ajoûtant ſeulement aux trois conſequens, *plus le reſidu*.

QUATRIEME THEOREME.

Deux grandeurs demeurent en même raiſon, quoy qu'on ajoûte à l'une & à l'autre, ou quoy qu'on en oſte, pourveu que ce qu'on ajoûte à la premiere, ou ce qu'on en oſte, ſoit à ce qu'on ajoûte à la ſeconde, ou à ce qu'on en oſte, comme la premiere eſt à la ſeconde. XLIV.

Soient les deux grandeurs b & c.

Soient ce qu'on ajoûte ou ce qu'on en oſte m & n qui ſoient en meſme raiſon que b eſt à c.

Il faut demontrer que $b+m. \quad c+n :: b. c.$

Par l'hypotheſe $b. c :: m. n.$

Soient priſes à diſcretion des aliquotes pareilles des

antecedens *b. m* qui soient également contenües dans les consequens *c. n.*

Soient par exemple *x*, la $\frac{1}{5}$ de *b*, qui soit dans *c* 3 fois $+ r$.

Et *y* la $\frac{1}{5}$ d'*m*, qui soit dans *n* 3 fois $+ r$.

Il est clair que $b + m$ contiendra $5x$, & $5y$: ce qui vaudra 5 aliquotes égales chacunes à $x + y$.

Et par la même raison $c + n$ contiendra $3x + r$ & $3y + r$: ce qui vaudra trois fois une portion égale à $x + y$, & un residu égal à $r + r$.

Donc toutes les aliquotes pareilles des antecedens $b + m$, & $c + n$, sont également contenuës dans les consequens *b* & *c*.

Donc par la 2e definition, $b + m. c + n :: b. c$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Que si on oste *m* & *n* de *b* & *c*, on montrera par la même voye que $b - m$ contient 5 fois une aliquote égale à $x - y$: & que $c - n$ contient 3 fois une portion égale à $x - y$, avec un residu égal à $r - r$.

CINQUIEME THEOREME.

XLV. LORS que 4 termes sont proportionnels ils le seront encore.

1. En transposant les termes de chaque raison, ce qui s'appelle *Permutando*.

2. En les prenant alternativement, c'est à dire en comparant les antecedens ensemble & les consequens ensemble : le 1er terme au 3e, & le 2e au 4e, ce qui s'appelle *Alternando*.

3. En comparant chaque antecedent plus son consequent avec son consequent, ce qui s'appelle *Componendo*.

4. En comparant chaque antecedent moins son consequent avec son consequent, ce qui s'appelle *Dividendo*.

Exemples. Si $b. c :: f. g.$

$5x. 3x :: 5y. 3y.$

Permutando $c. b :: g. f.$

$3x. 5x :: 3y. 5y.$

Alternando $b.\ f :: c.\ g.$

$5x.\ 5y. :: 3x.\ 3y.$

Componendo $b + c.\ c :: f + g.\ g.$

$5x + 3x.\ 3x :: 5y + 3y.\ 3y.$

Dividendo $b - c.\ c :: f - g.\ g.$

$5x - 3x.\ 3x :: 5y - 3y.\ 3y.$

Il ne faudroit point chercher d'autres preuves si toutes les raisons estoient de nombre à nombre ; mais à cause des raisons sourdes, il en faut chercher qui les comprennent.

PREUVE DE LA PERMUTATION.

IL *n'en faut point d'autre que le 6e Axiome.* §. 37. XLVI.

PREUVE DE L'ALTERNE.

IL faut prouver que si $b.\ c :: f.\ g.$ XLVII.

$b.\ f :: c.\ g.$

Soit x l'aliquote quelconque de b & 5 aliquote pareille de c devenu second antecedent. Il y aura proportion entre ces 4 grandeurs disposées en cette nouvelle maniere si x & 5 sont également contenües en f & g, or cela est.

Car x & z estant aliquotes pareilles de b & c, il s'ensuit (selon ce qui a esté dit §. 38) que

$b.\ c :: x.\ z.$

Or par l'Hipothese $b.\ c :: f.\ g.$

Donc $x.\ z :: f.\ g.$ (§ 45.)

Or cela estant, il faut que f & g soit equimultiples l'un d'x & l'autre de z, ou que si x n'est tant de fois dans f qu'avec residu, z aussi ne soit autant de fois dans g qu'avec residu. Comme si par exemple f valoit $7x + r$, g doit valoir aussi $7z + r$.

Que si quelqu'un vouloit contester une verité si claire on l'en pourroit convaincre en le reduisant à une absurdité visible en cette maniere.

Par le 1e Ax. $x.\ z :: 7x.\ 7z.$

Or par la fausse hypotese de cette personne

$x.\ z :: 7x + r.\ 7z.$

Donc par le 3e Theoreme § 45.

$7x.\ 7z :: 7x + r.\ 7z.$

Or deux grandeurs sont égales quand elles ont même

raiſon à une même grandeur § 43.

Il faudroit donc que $7x$ fût égal à $7x + r$, c'eſt à dire la partie au tout, ce qui eſt abſurde.

PREUVE DE LA COMPOSITION.

XLVIII. C'EST le 5e Axiome. Et on ne ſe doit pas mettre en peine du reſidu des raiſons ſourdes, puiſque s'il ne troubloit pas la proportion avant qu'on eût ajoûté chaque conſequent à ſon antecedent, il ne la doit pas troubler apres cette addition qui ne fait autre choſe ſinon que chaque antecedent eſt de nouveau une fois dans ſon conſequent, puiſque chaque conſequent ſe contient ſoy-meſme. Et ainſi ſi par le 3e Axiome il y a proportion entre

$$b. \quad c :: f. \quad g.$$
$$5x. \quad 3x+r. \quad 5y. \quad 3y+r.$$

Il y en doit avoir ſelon le 5e entre

$$5x+3x+r. \quad 3x+r :: 5y+3y+r. \quad 3y+r.$$

AUTRE PREUVE PAR LE IV. THEOREME.

PAR l'hypotheſe $b. c :: f. g.$
Donc *alternando* $b. f :: c. g.$
Donc par le 4e Theoreme

$$b+c. \quad f+g :: b. f :: c. g.$$

Donc par le 3e $b+c. \quad f+g :: c. g.$
Donc *alternando* $b+c. \quad c :: f+g. \quad g.$ *Ce qu'il falloit demonſtrer.*

PREUVE DE LA DIVISION.

XLIX. C'EST le meſme 5e Axiome, & c'eſt la meſme choſe dans les raiſons ſourdes.

$$5x-3x-r. \quad 3x+r :: 5y-3y-r. \quad 3y+r.$$

Car ce retranchement fait ſeulement que chaque antecedent ceſſe de contenir une fois ſon conſequent, puiſque le conſequent qu'on oſte de l'antecedent contenoit de part & d'autre une fois le conſequent.

AUTRE PREUVE PAR LE IV. THEOREME.

IL ne faut faire que ce qu'on a fait pour la *Compoſition*, en mettant par tout *moins* au lieu de *plus*.

SIXIEME THEOREME.

ESTANT données 3 grandeurs d'une part & 3 de l'autre, si la 1re d'une part est à la 2e comme la 1re de l'autre part est à la 2e, & la 1re d'une part à la 3e comme la 1re de l'autre part à la 3e, la 2e d'une part sera à la 3e comme la 2e de l'autre part à la 3e. L.

Soient les 3 grandeurs d'une part *b. c. d.*
Et les 3es de l'autre *m. n. o.*
Par l'Hypothese
b. c :: m. n.
Et *b. d :: m. o.*
Donc *alternando* l'un & l'autre

$$b.\ m :: \begin{cases} c.\ n. \\ d.\ o. \end{cases}$$

Donc par le 1er Theoreme.
c. n :: d. o.
Donc *alternando*.
c. d :: n. o. Ce qu'il faloit demonstrer.

SEPTIEME THEOREME.

AYANT plusieurs termes d'une part & autant de l'autre, si chacun d'une part est à chacun de l'autre en même raison, tous ceux d'une part seront à tous ceux de l'autre en la même raison : c'est à dire que plusieurs raisons estant égales, tous les antecedens seront à tous les consequens comme un antecedent quelconque à son consequent. LI.

Soient $\begin{cases} b.\ c.\ d. \\ m.\ n.\ p. \end{cases}$ en sorte que *b. m :: c. n :: d. p.*
Alternando b. c :: m. n.
Componendo b + c. c :: m + n. n.
Et *alternando b + c. m + n :: c. n.*
Voilà déja les deux premiers antecedens qui sont aux deux premiers consequens, comme l'antecedent *c* au consequent *n*.

Or *c. n :: d. p.* Donc *b + c. m + n :: d. p.*

Et *alternando b + c. d :: m + n. p.*

Donc *componendo b + c + d. d :: m + n + p. p.*

Et *alternando b + c + d. m + n + p :: d. p.*

Donc les 3 antecedens aux 3 consequens comme un antecedent à un consequent. Ce qu'il faloit demonstrer.

PROPRIETEZ DE LA PROPORTION GEOMETRIQVE,

QUAND LES TERMES D'UNE RAISON SONT MULTIPLIABLES PAR CEUX DE L'AUTRE.

AVERTISSEMENT.

1. 11. ON *croit ordinairement que les grandeurs de divers genres qu'on appelle heterogenes ne se peuvent pas multiplier. Cela ne me paroist pas vray, on a besoin d'explication. Car les nombres sont d'un autre genre que les autres grandeurs, comme l'estendue & le temps. Et neanmoins il est clair que les nombres multiplient toutes sortes de grandeurs, & que c'est une veritable multiplication quand je dis 6 toises fois 6 heures, puisque c'est prendre une toise ou une heure autant de fois qu'il y a d'unitez dans 6, en quoy consiste la multiplication.*

De plus ce qui ne se peut multiplier par la nature se peut multiplier par une fiction d'esprit par laquelle la verité se decouvre aussi certainement que par les multiplications réelles. Ainsi voulant sçavoir quel chemin fera en 20 heures celuy qui a fait 24 lieuës en 8 heures, je multiplie par une fiction d'esprit 20 heures par 24 lieuës, ce qui me donne un produit imaginaire d'heures & de lieuës de 240, qui estant divisé par 8 heures me donne 30 lieuës. On multiplie aussi par la même fiction d'esprit des surfaces par des surfaces, quoy que cela donne pour produit une estendue de 4 dimensions qui ne peut estre dans la nature. Et neanmoins on ne laisse pas de decouvrir beaucoup de veritez par ces sortes de multiplications.

Je sçay bien qu'on dit que c'est parce que ces produits imaginaires se peuvent reduire en lignes qui auront même raison entr'elles que ces produits. Mais il n'y a guere d'apparence que la verité de ces sortes de preuves dépendent de

ces lignes qui sont visiblement étrangeres à ces demonstrations.

Quoy qu'il en soit ne me voulant brouiller avec personne, chacun prendra ce que je m'en vais dire des proprietez des proportions considerées selon la multiplication des termes d'une raison par ceux de l'autre, selon l'opinion qu'il aura que les termes de certaines raisons sont ou ne sont pas multipliables les uns par les autres. Car ce n'est que dans cette supposition que tout ce que je m'en vais dire se doit entendre.

LA PRINCIPALE PROPRIETE' DE LA PROPORTION GEOMETRIQVE.

HUITIEME THEOREME.

LORS que 4 grandeurs sont en proportion Geometrique, si les termes de l'une des raisons sont multipliables par ceux de l'autre ou réellement ou par fiction d'esprit, le produit des extrémes est égal au produit des moyens. Cela se peut prouver en deux manieres. La 1re est par les aliquotes pareilles des antecedens également contenuës dans les conséquens. Car supposons comme nous avons déja fait que ces aliquotes soient telles. LV.

b. *c* :: *f.* *g.*
5*x.* 3*x* :: 5*y.* 3*y.*

La multiplication des extrémes est 5*x* par 3*y*, ce qui fait 15 fois *x* par *y*, c'est à dire 15 *xy*, & la multiplication des moyennes est 3*x* par 5*y*, ce qui fait aussi 15 fois *x* par *y*, c'est à dire 15 *xy*. Et par consequent ces deux multiplications se reduisent aux mêmes termes, & par consequent sont égales.

La mesme chose se peut montrer quand il y a du residu, mais avec plus de longueur & en faisant voir seulement qu'on n'y trouvera jamais d'inégalité.

Car supposons que les aliquotes pareilles des antecedens ne sont pas justement tant de fois dans les conseqüens, mais avec quelque residu que nous marquerons par *r* & *s*.

m. *n* :: *p.* *q.*
5*x.* 3*x* + *r* 5*y.* 3*y* + *s.*

La multiplication des extrémes sera $15xy + 5xr$. Et celle des moyens sera $15xy + 5yr$.

Il ne reste donc qu'à prouver que xr est égal à yr. Or cela se prouve par ce qui a esté dit dans les definitions des raisons égales, que les aliquotes de x sont également contenuës dans r le residu du premier consequent, que les pareilles aliquotes de y dans r residu du 2. consequent, de sorte qu'il se fait une nouvelle proportion.

$$x. \quad r :: y. \quad r.$$

Et ainsi l'égalité qu'on a trouvée dans la multiplication des extrémes & des moyens de la 1re proportion à ces deux residus prés, se trouvera encore icy à d'autres petits residus prés, sur lesquels on fera encore le même raisonnement, & ainsi à l'infini.

La seconde maniere de montrer cette égalité qui est plus claire pour les raisons sourdes, est prise du 1er Theoreme (43. *sup.*) Que deux grandeurs sont égales quand elles ont même raison à une même grandeur.

Car les produits des extrêmes & des moyens ont même raison aux produits des deux antecedens, c'est à dire que $bg. bf :: cf. bf.$ Ce qu'il est aisé de montrer en considerant ces proportions.

$b. \quad c :: f. \quad g.$ par l'hypothese.

Or $bf.$ $\begin{cases} bg :: f. \quad g. \\ cf :: b. \quad c. \end{cases}$ par 44 *sup.*

Donc $bg = cf$ par 43 *sup.*

Car par l'hypothese la raison de $f.g$ (qui est la même que celle de $bf. bg$) est égale à la raison de $b. c$ (qui est la même que celle de $bf. cf$) & par consequent bg & cf ont une même raison avec une même grandeur, sçavoir bf. Et par consequent bg, est égal à cf. par 43, ce qu'il falloit demonstrer.

NEUVIEME THEOREME.

LIII. LORS que quatres grandeurs sont tellement disposées que le produit des deux extrémes est égal au produit des deux moyens, ces quatres grandeurs sont proportionelles. C'est à dire que la premiere est à la seconde, comme

la

la troisiéme à la quatriéme.

Ainsi si de ces quatres grandeurs.

b. c. f. g.

Le produit de *b* par *g* est égal au produit de *c* par *f*, *b* sera à *c* comme *f* à *g*. c'est la converse de la proposition precedente, & qui se prouve de la même maniere.

Car puisque par l'hypothese *b g* est égal à *c f* ils doivent avoir même raison à une même grandeur sçavoir à *b. f* par 43 5.

Or la raison de *b f* à *b g* est celle de *f. g*, & la raison du même *b f* à *c f* (égale à *b. g*) est celle de *b. c*, donc la raison de *b c* est la même que celle de *f. g*.

COROLLAIRE PREMIER.

DE cette proposition il est aisé de juger de tous les changemens qu'on peut faire entre quatre termes proportionels sans qu'ils cessent d'estre proportionels. LVI.

Car tant que les deux extrémes, ou demeureront tous deux extrémes, ou deviendront tous deux moyens, ou, ce qui est la même chose, tant que les deux moyens demeureront tous deux moyens, ou deviendront tous deux extrémes, les termes demeureront toûjours proportionels, puis qu'il est clair que de quelqu'autre maniere qu'on les transpose, cela n'empeschera pas que le produit des extrémes ne soit égal au produit des moyens.

Et ainsi les termes peuvent demeurer proportionnels en huit manieres. Dont il y en a quatre où les extrêmes demeurent extrêmes, & les moyens moyens: Et quatre autres où les extrêmes deviennent moyens, & les moyens extrêmes.

Mais je les disposeray dans un autre ordre pour les raisons que nous dirons en suite: & je marqueray les termes par lettres, & selon qu'ils auront esté antecedens & consequens dans la premiere disposition, qui est le fondement des autres.

1.	1. Ant. *b.*	1. Conf. *c.* ::	2. Ant. *f.*	2. Conf. *g.*	Principale.
2.	2. Ant. *f.*	2. Conf. *g.* ::	1. Ant. *b.*	1. Conf. *c.*	Equivalente.
3.	1. Conf. *c.*	1. Ant. *b.* ::	2. Conf. *g.*	2. Ant. *f.*	Permutation.
4.	2. Conf. *g.*	2. Ant. *f.* ::	1. Conf. *c.*	1. Ant. *b.*	Equivalente.
5.	1. Ant. *b.*	2. Ant. *f.* ::	1. Conf. *c.*	2. Conf. *g.*	Alterne.
6.	1. Conf. *c.*	2. Conf. *g.* ::	1. Ant. *b.*	2. Ant. *f.*	Equivalente.
7.	2. Ant. *f.*	1. Ant. *b.* ::	2. Conf. *g.*	1. Conf. *c.*	Permutatiõ de l'Alterne
8.	2. Conf. *g.*	1. Conf. *c.* ::	2. Ant. *f.*	1. Ant. *b.*	Equivalente.

AVERTISSEMENT.

LVII. DE *ces huit dispositions où les mêmes termes se trouvent toûjours proportionels, les Geometres n'en considerent que trois.*

La 1e qui est le fondement des autres.

La 3e qui est ce qu'on a appellé cy-devant Permutation. §. 46.

Et la 5e qu'on a appellée Alterne. §. 46.

La 2e 4e 6e & 8e n'ont rien de considerable, parce qu'on n'y fait que transporter les raisons sans rien changer en leur termes.

Pour La 7e ce n'est que la permutation de l'Alterne, car elle est à La 5e ce que la 3e est à La 1re.

A ces deux changemens Permutation *&* Alterne, *ils ont ajouté la* Composition *&la* Division *dont il a esté parlé* §. 46.

Et ainſi tous ces changemens ſe peuvent reduire à 4, que nous avons déja prouvez generalement pour toutes ſortes de proportions, ſoit que les termes d'une raiſon ſoient multipliables par ceux de l'autre, ſoit qu'ils ne le ſoient pas. Mais nous le prouvons icy de nouveau quand ils ſont multipliables.

DIXIEME THEOREME.

LVIII. SI 4 termes ſont proportionels, ils le ſeront encore en changeant les antecedens en conſequens; C'eſt à dire en faiſant dans chaque raiſon que le terme qui en eſtoit antecedent en ſoit conſequent. Ce qui s'appelle *permuter, permutando.*

Si *b. c :: f. g.*
permutando c. b :: g. f.

Car les deux extrémes n'aiant fait que devenir tous deux moyens, le produit des moyens ſera toûjours égal au produit des deux extrémes. Ce qui eſt une marque infaillible de proportion par 56.

ONZIEME THEOREME.

LIX. SI 4 termes ſont proportionels, ils le ſeront encore en comparant l'antecedent d'une raiſon avec l'antecedent de l'autre, & le conſequent avec le conſequent: Ce qui s'appelle prendre les termes *alternativement alternando.*

Si *b. c :: f. g.*
alternando b. f :: c. g.

C'eſt par la même raiſon que la precedente.

DOUZIEME THEOREME.

LX. SI 4 termes ſont proportionels, ils le ſeront encore en joignant chaque antecedent à ſon conſequent, & *comparant* chacune de ſes ſommes avec chaque conſequent: Ce qui s'appelle *compoſer, componendo.*

Si *b. c :: f. g.*
componendo b + c. c :: f + g. g.

Car dans cette derniere diſpoſition le produit des extrémes ſera $b + c$ par g, c'eſt à dire $bg + cg$.

Et le produit des moyens ſera $f + g$ par c, c'eſt à dire $cf + cg$.

Or puique par l'hypoteſe *b. c :: f. g*, le pro-

duit des extrémes $b\,g$ est égal au produit des moyens $f\,c$. Et par consequent ce changement n'ayant fait autre chose qu'ajoûter à chaque produit la même grandeur $c\,g$.

$b\,g + c\,g$ sera égal à $f\,c + c\,g$.

TREIZIEME THEOREME.

LXI. SI 4 termes sont proportionels, ils le seront encore en retranchant chaque consequent de son antecedent, & comparant ce qui restera avec chaque consequent.

Si $b.\quad c :: f.\quad g.$

erit dividendo $b - c.\ c :: f - g.\ g.$

La preuve est la même que la precedente en changeant par tout *plus* en *moins*.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TROISIEME.

DES RAISONS COMPOSEES, D'OV DEPEND LA PROPORTION DES GRANDEVRS PLANES ET SOLIDES.

PREMIERE DEFINITION.

ON dit que plusieurs raisons ont esté *ajoûtées* ensemble lors qu'on multiplie les antecedens de ces raisons les uns par les autres, & les consequens de même. 1.

Ainsi pour ajoûter la raison de *b. c.*
à la raison de *f. g.*

Il ne faut que multiplier *b* par *f*, ce qui donne *b f* & *c* par *g* ce qui donne *c g*.

SECONDE DEFINITION.

LA raison qui naist de l'addition de plusieurs raisons s'appelle *raison composée de ces raisons*, & ces raisons dont elle est composée, *raisons composantes*. Ainsi la raison de *b f* à *c g* est composée des raisons de *b. c* & *f. g*. 11.

La même marque dont on se sert pour marquer qu'une raison est égale à une autre, peut aussi servir pour marquer

qu'une raiſon eſt compoſée de deux autres en cette maniere. *bf. eg :: b. e + f. g.*

III. PREMIER AVERTISSEMENT.

CE *que nous avons appellé* addition de raiſons *eſt appellé par d'autres* multiplication, *parce que cela ſe fait par la multiplication des antecedens & celle des conſequens. Mais quoy que l'on multiplie les termes ce n'eſt pas à dire que l'on multiplie les raiſons. Et le mot d'addition ſemble mieux convenir à celuy de raiſon compoſée. Car on dit plûtoſt qu'une choſe eſt compoſée de ſes parties ajoûtées enſemble. que de ſes dimenſions multipliées l'une par l'autre.*

IV. SECOND AVERTISSEMENT.

LA *notion que nous venons de donner de la raiſon compoſée, fait voir que cette raiſon ne convient proprement qu'aux grandeurs de pluſieurs dimenſions, comme aux plans & aux ſolides. Car de ce que la grandeur de chaque plan dépend de ſa longueur & de ſa largeur, il eſt viſible que pour avoir la raiſon d'un plan à un autre plan, il faut conſiderer non ſeulement quelle eſt la raiſon de la longueur de l'un à la longueur de l'autre, mais quelle eſt celle de la largeur à la largeur. Et ainſi il eſt clair que la raiſon d'un plan à un plan eſt compoſée de deux raiſons, de celle de la longueur à la longueur, & de celle de la Largeur à la Largeur. Neanmoins on ne laiſſe pas de reconnoiſtre des raiſons compoſées entre des grandeurs d'une ſeule dimenſion, mais ce n'eſt que par rapport à des plans ; & lors ces grandeurs lineaires ſont entr'elles, comme des plans qui ſont entr'eux en raiſon compoſée de leur longueur & de leur largeur.*

C'eſt pourquoy on peut ajoûter encore cette definition.

TROISIEME DEFINITION.

V. LA raiſon entre deux grandeurs lineaires eſt dite compoſée de pluſieurs raiſons, lors qu'elle eſt égale à la raiſon entre deux grandeurs de pluſieurs dimenſions compoſées de raiſons égales chacune à chacune à celles dont la raiſon entre ces deux grandeurs lineaires eſt dite compoſée. Ainſi la raiſon de *b* à *d* peut eſtre dite compoſée de la raiſon de *b* à *c* & de *c* à *d*, parce qu'elle eſt égale à la raiſon de *b c* à *c d* qui eſt effectivement compoſée (par la defini-

tion de la raiſon compoſée) des deux raiſons de $b.c$ & $c.d$.

$b.$ $c.$
$c.$ $d.$
$bc.$ $cd.$

PREMIER THEOREME.

DEUX raiſons compoſées ſont égales entr'elles lors que les raiſons compoſantes de l'une ſont égales aux raiſons compoſantes de l'autre chacune à chacune. VI.

Soient 4 raiſons égales entr'elles deux à deux.

$b.$ c : : $m.$ $n.$
$5x.$ $3x.$ $5\xi.$ 3ξ
$d.$ f : : $p.$ $q.$
$2y.$ $5y.$ $2\omega.$ $5\omega.$

Ie dis que la raiſon compoſée de bc & de df, qui eſt bd, cf, eſt égale à la raiſon compoſée de mn & de pq, qui eſt $mp. nq$. Et qu'ainſi

$bd.$ cf : : $mp.$ $nq.$

Cela ſemble clair de ſoy-même. Car ſi b longueur du 1er eſt à c longueur du 2e comme m longueur du 3e à n longueur du 4e. Et que d largeur du 1er ſoit à f largeur du 2e comme p largeur du 3e à q largeur du 4e; il ſemble évident que le premier doit eſtre au ſecond comme le ſecond au quatriéme.

Neanmoins on le peut encore prouver par les aliquotes pareilles ſelon que nous les avons marquées.

Car $bd.$ cf : : $mp.$ $nq.$
$10xy.$ $15xy.$ $10\xi\omega.$ $15\xi\omega.$

Et je penſe avoir aſſez fait voir dans le 2e Livre que la même choſe ſe trouveroit dans les raiſons ſourdes, quoy qu'avec plus de longueur. Donc, &c.

SECOND THEOREME.

TROIS grandeurs homogenes quelconques eſtant données, la raiſon de la 1re à la 3e eſt compoſée de la raiſon de la 1re à la 2e, plus de celle de la 2e à la 3e. Ce n'eſt que la même choſe que nous venons de montrer. VII.

Car ſoient

$b.$ $f.$ $p.$ { $b.$ ... $f.$; $f.$ ... $p.$

La raison de *b. p*, ne peut pas manquer d'estre composée de la raison de *b. f*, plus de la raison de *f. p*, puisque la même grandeur *f*, estant consequent d'une raison & antecedent de l'autre, & entrant ainsi dans la multiplication des antecedens & des consequens laisse les grandeurs extrêmes *b* & *p* en même raison, apres avoir esté multipliées par la même grandeur *f*, qu'avant qu'estre multipliées. Or estant multipliées, la raison de leurs produits est composée des deux raisons de la 1re à la 2e, & de la 2e à la 3e par la definition de la raison composée. Et par consequent elle en estoit composée avant cette multiplication.

Car par 11. 43. $bf. fp :: b.p.$
Or par la definition 1re $bf. fp :: b.f+f.p.$
Donc $b. p :: b.f+f.p.$
par la definition 3e.

TROISIEME THEOREME.

VIII. DES grandeurs homogenes quelconques estant données en quelque nombre que ce soit, la raison de la premiere à la derniere sera composée de la raison de la 1re à la 2e, & de la 2e à la 3e, & de la 3e à la 4e, & ainsi consecutivement jusqu'à la derniere. Car il est visible que toutes ces grandeurs, hors la premiere & la derniere, sont antecedens & consequens de toutes ces raisons: & ainsi tous ces antecedens estant multipliez les uns par les autres, & tous ces consequens de même, la raison du produit de ces antecedens au produit des consequens (qui est composée de toutes ces raisons selon la definition de la raison composée) est la même que celle de la premiere grandeur à la derniere: parce qu'il n'y a que ces deux-là qui mettent de la difference entre les deux produits.

COROLLAIRE.

IX. S'IL y a plusieurs termes d'une part & autant de l'autre, & que le 1er soit au 2e, le 2e au 3e, & le 3e au 4e, jusques à la fin en mesme raison de part & d'autre, le premier sera au dernier en même raison de part & d'autre.

Car par le precedent Theoreme la raison du 1er au dernier de part & d'autre est composée de nombre égal de raisons

raisons égales chacune à chacune de part & d'autre par l'hypothese : Donc ces deux raisons composées sont égales par le premier Theoreme.

QUATRIEME THEOREME.

S'il y a 3 grandeurs homogenes d'une part & 3 de l'autre, & que la 1re soit à la 2e d'une part en même raison que la 2e à la 3e de l'autre part, & la 2e à la 3e de la premiere part en même raison que la 1re à la 2e de l'autre ; la 1re sera à la 3e en même raison de part & d'autre. X.

Soient d'une part *b. c. d.*

Et de l'autre *m. n. o.*

Si *b. c* :: *n. o.*

c. d :: *m. n.*

Ie dis que

b. d :: *m. o.*

Car *b. d* :: *bc. cd.*

Et *m. o* :: *mn. no.*

Or par le 1er Theoreme,

bc. cd :: *mn. no.*

(Il faut seulement remarquer que *b* & *c* estant pris pour les longueurs du 1er & du 2e plan, c'est *n* & *o* qu'il faut prendre pour les longueurs du 3e & du 4e.)

Donc *b. d* :: *m. o.* *Ce qu'il falloit démontrer.*

QUATRIEME DEFINITION.

VNE raison composée de deux raisons égales, s'appelle *raison doublée* de chacune de ces raisons. XI.

CINQUIEME DEFINITION.

VNE raison composée de trois raisons égales, s'appelle *raison triplée* de chacune de ces raisons. XII.

AVERTISSEMENT.

Il ne faut pas confondre une raison doublée ou triplée avec une raison doublée ou triplée ; ce qui est tout different. Car la raison non couple n'est pas une raison double, quoy qu'elle soit doublée de la raison triple, parce que l'addition de deux raisons triples fait la raison non couple. XIII.

CINQUIEME THEOREME.

VNE raison composée de deux raisons égales dont l'une XIV.

est l'inverse de l'autre, est une raison d'égalité.

Soient *b. c :: f. g.*

La 2e raison sera inverse de la 1re en disposant les termes ainsy, *b. c :: g. f.*

Or la raison composée de ces deux raisons sera celle de *b g* à *c f.* Ce qui fait une raison d'égalité, parce que le produit des extrêmes d'une proportion (tel qu'est *b g* de la proportion *b. c :: f. g.*) est égal au produit des extrêmes de la même proportion, (tel qu'est *c f.*) par Liv. II. 54.

SIXIEME THEOREME.

XV. S'IL y a plusieurs termes en proportion continuelle, c'est à dire que le 1er soit au 2e comme le 2e au 3e, & le 3e au 4e, & le 4e au 5e, &c. ce qui s'appelle progression geometrique; la raison d'un terme à l'autre sera simple, ou doublée, ou triplée, ou quadruplée &c. selon les intervales qui seront entre les deux termes que l'on compare, & il y aura toûjours un intervale de plus que ne sera le nombre des termes interposez, entre les termes dont on cherche la raison.

Car si ce sont deux termes qui se suivent immediatement, il n'y aura qu'un intervale, & leur raison sera simple, c'est à dire la même qui regne dans toute la progression.

S'il y a un terme interposé, il y aura deux intervales, & la raison sera doublée de la raison simple de la progression. Car la raison de l'un des termes à l'autre sera composée de la raison du 1er terme à l'interposé, & de celle de l'interposé au 2e terme, (par 7) qui sont deux raisons égales par l'hypothese, & par consequent cette raison sera doublée (par 12.)

Que s'il y a deux termes interposez, il y aura trois intervales, & la raison sera triplée de la raison simple. Car (par 8) elle sera composée de ces trois raisons, sçavoir de celle du 1er terme des deux qu'on compare au 1er des interposez, & de celle du 1er des interposez au 2e des interposez, & de celle du 2e des interposez au dernier des deux

que l'on compare. Or ces trois raisons sont égales par l'hypothese, & une raison composée de trois raisons égales est appellée triplée de chacune. Donc, &c.

On prouvera de même tous les autres cas.

SEPTIEME THEOREME.

XVI. DANS une progression Geometrique de plusieurs termes la raison entre deux termes quelconques est égale à la raison de deux autres termes, entre lesquels il y a même intervale qu'entre les premiers.

Mais la raison de ceux entre lesquels il y a double intervale est doublée, & triple intervale triplée.

La 1re partie est claire par 4. & la 2e, suppose cette premiere, n'est qu'une suite de la proposition precedente.

HUITIEME THEOREME.

XVII. LA raison d'une grandeur de plusieurs dimensions à toute autre grandeur homogene d'autant de dimensions, est composée de toutes les raisons de chacune des dimensions d'une grandeur à chacune des dimensions de l'autre.

Ce n'est qu'une application de la definition de la raison composée. Car comparant chacune des dimensions d'une grandeur à chacune des dimensions de l'autre, on met tous les antecedens de ces raisons dans une des grandeurs, & tous les consequens dans l'autre. Or une grandeur de plusieurs dimensions est la même chose que le produit de ces dimensions multipliées l'une par l'autre. Et par consequent les grandeurs sont entr'elles comme le produit de leurs dimensions, c'est à dire, comme le produit des antecedens des raisons de chacune des dimensions de l'une à chacune des dimensions de l'autre, au produit des consequens de ces mêmes raisons. Ce qui est une raison composée de ces raisons par la definition même de la raison composée.

PREMIER COROLLAIRE.

XVIII. TOUTE grandeur plane est à une autre grandeur plane en raison composée des deux raisons de chacun des costez de l'une à chacun des costez de l'autre.

C'est la même chose que la precedente.

SECOND COROLLAIRE.

XIX. TOUTE grandeur solide est à une autre grandeur solide en raison composée des trois raisons de chacun des costez de l'une à chacun des costez de l'autre.

C'est la même chose que la proposition generale.

TROISIEME COROLLAIRE.

XX. LES grandeurs planes & solides ayant quelqu'une de leurs dimensions égale & l'autre inégale, sont entr'elles comme les inégales.

$$bf.\ bg :: f.\ g.$$
$$bfd.\ bfg :: d.\ g.$$
$$bfd.\ bmn :: fd.\ mn.$$

Cela est clair par liu. 11. 33. Et par le 1er & 2e Corollaire, joint à 13. *sup.*

QUATRIEME COROLLAIRE.

XXI. LES plans dont les deux dimensions ont même raison chacune de l'un à chacune de l'autre, sont en raison doublée de cette raison. Cela est clair par le 1er Corollaire & la definition de la raison doublée.

CINQUIEME COROLLAIRE.

XXII. LES solides dont les trois dimensions ont même raison chacune de l'un à chacune de l'autre, sont en raison triplée de cette raison.

Cela est encore clair par le 2e Corollaire, & la definition de la raison triplée.

SIXIEME COROLLAIRE.

XXIII. TOUS les quarrez & tous les cubes sont en raison les uns doublée, les autres triplée de la raison de leurs racines.

Car toutes les dimensions des quarrez & des cubes estant égales entr'elles, elles ne peuvent pas n'avoir pas chacune la même raison à chacune des dimensions des autres quarrez & des autres cubes.

SEPTIEME COROLLAIRE.

XXIV. SI 4 grandeurs sont proportionelles, leurs quarrez & leurs cubes le sont aussy.

Si $b.\ c :: f.\ g.$
$bb.\ cc :: ff.\ gg.$
$bbb.\ ccc :: fff.\ ggg.$

Car les quarrez estant en raison doublée de leurs racines, & les cubes en raison triplée, les raisons doublées & triplées de raisons égales doivent estre égales par le 1er Theoreme.

HUITIEME COROLLAIRE.

XXV. LE produit de deux grandeurs quelconques est moyen proportionnel entre les quarrez de chaque grandeur.

Soient les grandeurs b & c.

$bb.\ bc :: bc.\ cc.$
Car $bb.\ bc :: b.\ c.$
Et $bc.\ cc :: b.\ c.$

C'est la même chose de dire que le produit de la toute & d'une partie est moyen proportionnel entre le quarré de la toute & le quarré de cette partie. Car il est visible que si la toute est x. & m. une partie $xx.\ xm :: xm.\ mm.$

NEUVIEME COROLLAIRE.

XXVI. EN toute progression Geometrique les quarrez de deux termes qui se suivent immediatement sont entr'eux comme le 1er terme à celuy qui suit le 2e.

Soient $\frac{1}{1}$ $b.\ c.\ d.\ f.\ g.$ en progression Geometrique.

Ie dis que $bb.\ cc :: b.\ d.$ ou $cc.\ dd :: c.\ f.$

Car par 12. la raison de $b.\ d.$ est doublée de celle de $b.\ c.$ Or par le 6e Corollaire les quarrez bb & cc sont aussi en raison doublée de celle de $b.\ c.$
Donc ils sont en même raison.

Cela se peut prouver encore d'une autre sorte.

Si $\frac{1}{1}$ $b.\ c.\ d.\ f.$
$bd. = cc.$
Or $bb.\ bd :: b.\ d.$
Donc $bb.\ cc :: b.\ d.$

DIXIEME COROLLAIRE.

XXVII. ON peut dire plus generalement que les quarrez de deux termes d'une progression geometrique sont entre

eux comme les termes de la même progression, entre lesquels il y a deux fois autant d'intervale qu'entre les termes dont on compare les quarrez. Cela est clair par 13.

ONZIEME COROLLAIRE.

XXVIII. EN toute progression Geometrique les cubes de deux termes qui se suivent immediatement sont entr'eux, comme deux termes entre lesquels il y a triple intervale.

Car les cubes sont en raison triplée de la raison de la progression, & les termes entre lesquels il y a triple intervale sont aussi en raison triple de cette même raison.

Cela se peut prouver aussi par 23. Corollaire 7.

Car si $\frac{a}{a}$. b. c. d. f.

par 23. bb. cc :: c. f.

Donc $bbf = ccc$.

Or bbb. bbf :: b. f.

Donc bbb. ccc :: b. f.

DOUZIEME COROLLAIRE.

XXIX. C'EST par là qu'on a trouvé comment il s'y faloit prendre pour doubler un cube donné.

Car ayant un cube donné comme bbb, il faut prendre f double de b, & si on peut trouver deux moyennes continuement proportionnelles entre b & f, comme seroient c & d. En sorte que soient $\frac{a}{a}$. b. c. d. f.

Le cube de c. premiere de ces moyennes proportionelles sera double du cube de b.

TREIZIEME COROLLAIRE.

XXX. ON peut dire generalement que les cubes de deux termes d'une progression Geometrique sont entr'eux, comme les termes de la même progression, entre lesquels il y a trois fois autant d'intervales, qu'entre les termes dont on compare les cubes.

IX. THEOREME. DEFINITION.

XXXI. DEUX grandeurs planes qui sont telles que les deux dimensions de l'une sont les extrêmes d'une proportion dont les deux dimensions de l'autre sont les moyens: ou (ce qui est la même chose) que l'une des dimensions de la 1re soit à l'une des dimensions de la 2e comme l'autre di-

mension de la 2e est à l'autre dimension de la 1re, sont appellées reciproques & sont toûjours égales.

Soient *b. g.* & *c. f.* je dis que si *b* est à *c*, comme *f* à *g.*

b. g :: c. f.

bg. est égal à *cf.*

Car par Liv. II. 35. le produit des extrêmes *b. g.* qui est le premier de ces deux plans, est égal au produit des moyens *c. f.* qui est le second de ces deux plans.

DIXIEME THEOREME.

LES grandeurs planes égales sont toûjours reciproques. XXXII.
C'est à dire les deux dimensions de l'une sont les extrémes de la proportion, dont les deux dimensions de l'autre sont les moyens.

Si *bg.* est égal à *ef.* je dis que

b. e :: f. g.

C'est la converse de la precedente, & qui se prouve aussi par la converse de la proprieté de la proportion Geometrique, Liv. II. 36.

ONZIEME THEOREME.

SI deux grandeurs solides sont telles que le produit de XXXIII.
deux dimensions de la 1re est au produit de deux dimensions de la 2e, comme la 3e dimension de la 2e est à la 3e dimension de la 1re, elles sont égales.

Soient *bcd.* & *mno.* Ie dis que ces solides sont égaux si

bc. mn :: o. d.

Car le produit des extrêmes *bcd.* qui est le 1er solide, sera égal au produit des moyens *mno.* qui est le 2e solide.

COMPARAISON DES RAISONS INEGALES, ET CE QVI FAIT QVE LES VNES SONT APPELLEES PLUS GRANDES QUE LES AUTRES.

IUSQUES icy nous avons consideré les raisons en les XXXIV.
comparant selon qu'elles sont égales les unes aux autres, soit une à une, ce qui fait la proportion; soit deux à une, ce qui en fait la composition.

Il reste maintenant à les comparer quand elles sont inégales: ou il n'y a qu'à montrer d'où l'on juge qu'une

raiſon eſt plus grande que l'autre.

C'eſt ce qui n'eſt pas peu embaraſſé. Mais voicy ce me ſemble la plus facile maniere de le concevoir.

DEFINITION.

XXXV. DE deux raiſons inégales celle qui approche davantage de la raiſon d'égalité ſoit appellée la plus grande, & celle qui s'en éloigne davantage la plus petite.

Ainſy la raiſon double eſt plus grande que la triple, ou la quadruple; parce que la raiſon de 2. à 1. approche plus de la raiſon d'égalité que celle de 3. à 1. ou de 4. à 1.

AVERTISSEMENT.

XXXVI. *MAIS cela ne ſuffit pas toûjours pour juger ſi une raiſon eſt plus grande qu'une autre, parce qu'il eſt ſouvent difficile de diſcerner qui eſt celle qui approche le plus de la raiſon d'égalité: Et on s'y pourra tromper, ſi on croit que celle-là en approche toûjours davantage entre les termes de laquelle la difference eſt plus petite. Car par là on jugeroit que la raiſon de 5 à 7 eſt plus grande que celle de 8 à 11. ce qui n'eſt pas. Il faut donc conſiderer la grandeur de cette difference, non abſolument, mais proportionellement, ou bien quelle partie le petit terme eſt du grand. Et ſelon cela on peut faire cette Regle.*

THEOREME.

XXXVII. LA raiſon dont le petit terme eſt à proportion une plus grande partie du grand terme approche plus de l'égalité, que celle où il en eſt une plus petite partie.

Soit *b* plus grand que *c.* & *m* que *n.*

Si *c* eſt le tiers de *b*, & que *n* ne ſoit que le quart de *m*, la raiſon de *b. c.* approchera plus de l'égalité, & par conſequent ſera plus grande que la raiſon de *m. n.* Car *b. c.* ne ſeront pas ſi éloignez d'eſtre égaux. Mais comme cela même n'eſt pas toûjours aiſé à ſçavoir, voicy une autre voye qui peut ſervir à ſortir de cette difficulté, quand les termes d'une raiſon ſont multipliables par ceux de l'autre.

PREMIER AXIOME.

XXXVIII. LORS que deux raiſons ont un terme commun, ou ce qui eſt la même choſe, lors que l'on compare deux grandeurs à une troiſiéme, il eſt alors tres certain que celle dont

dont la difference eſt moindre avec cette troiſiéme grandeur, a une plus grande raiſon à cette grandeur, que celle dont la difference eſt plus grande. Car on ne peut pas douter alors que la raiſon de celle dont la difference eſt moindre, n'approche plus de l'égalité. Cela eſt tres clair.

SECOND AXIOME.

DEUX raiſons eſtant égales à deux raiſons inégales chacune à chacune, celle qui eſt égale à la plus grande, eſt plus grande que celle qui eſt égale à la plus petite. Cela eſt encore évident. XXXIX.

PROBLEME.

DE deux raiſons inégales dont tous les termes ſont différens, juger quelle eſt la plus grande. XL.

Il faut trouver deux raiſons qui ayent un terme commun & qui ſoient égales à ces deux premieres, ce qui ſe fera ainſi.

Soient les deux raiſons dont on eſt en peine qui eſt la plus grande *b. c* & *m. n.*

Multipliant les conſequens l'un par l'autre, ce qui donne *c n.* & chaque antecedent par le conſequent de l'autre raiſon, ce qui donne pour la premiere raiſon *b n.* & pour la ſeconde *m c.*

On aura deux nouvelles raiſons égales aux deux premieres par 11. 44.

Car *b n.* *c n* :: *b.* *c.*

Et *m c.* *c n* :: *m.* *n.*

Comme donc ces deux raiſons *b n.* *c n.* & *m c.* *c n.* ont un terme commun, ſçavoir *c n.* comparant l'antecedent de chaque raiſon avec ce terme commun, ſi la difference de *b n.* à *c n.* eſt plus grande que la difference de *m c.* avec le même *c n.* la raiſon de *b n.* à *c n.* ſera la plus petite par le 1er Axiome. Et par conſequent celle de *b. c.* ſera plus petite que celle de *m. n.* par le 2e.

AVERTISSEMENT.

MAIS il n'eſt pas toûjours facile de diſcerner en toutes ſortes de grandeurs quelle eſt la plus grande difference de deux termes à un terme commun: au lieu que cela ſe peut toûjours XLI.

dans les nombres, ce qui fait qu'on en juge d'ordinaire dans les autres grandeurs par rapport aux nombres.

Et ainsi il sera bon de donner pour exemple dans les nombres celuy dont nous venons de parler.

EXEMPLE.

DANS LES NOMBRES.

XLII. Pour sçavoir si la raison de 5 à 7 est plus grande, ou plus petite que la raison de 8 à 11.

5 à 7.
8 à 11.

Ie multiplie les consequens, c'est à dire 7 par 11, ce qui me donne 77.

Puis l'antecedent d'une raison par le consequent de l'autre, ce qui me donne pour la premiere raison 5 par 11, c'est à dire 55.

Et pour la seconde raison 8 par 7, c'est à dire 56.

Et ainsi j'ay deux nouvelles raisons égales aux deux premieres chacune à chacune.

Car 5. 7 :: 55. 77.
8. 11 :: 56. 77.

Or il est visible que la difference de 55 à 77 est plus grande d'une unité que celle de 56 au mesme 77.

Donc la mesme raison de 55 à 77 est plus éloignée de la raison de l'égalité.

Donc elle est plus petite.

Donc la raison de 5 à 7, qui luy est égale, est aussi plus petite que la raison de 8 à 11, qui est égale à celle de 56 à 77.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QVATRIEME.

DES GRANDEVRS COMMENSVRABLES ET INCOMMENSVRABLES.

NOus *avons dit generalement qu'il y a deux sortes de raisons ; la raison de nombre à nombre, & la raison sourde ; & comme c'est par là que les grandeurs sont commensurables & incommensurables, la suite naturelle nous oblige de parler de ces sortes de grandeurs ; à quoy nous ajoûterons quelque chose de la proportion entre les diverses aliquotes d'une même grandeur.* 1.

PREMIER LEMME.

C'est la même chose de dire que deux grandeurs sont commensurables, & de dire qu'elles sont comme nombre à nombre. 11.

Car afin que *b* soit commensurable à *c*, il faut que quelque grandeur comme *x* soit precisément tant de fois dans *b* & precisément tant de fois dans *c* comme si elle est 9 fois dans *b* & 10 fois dans *c*.

Donc *b* eſt la même choſe que 9 *x*, & *c* la même choſe que 10 *x*.

Or 9 *x*. 10 *x* :: 9. 10.

Donc *b*. *c* :: 9. 10.

Donc *b* eſt à *c* comme nombre à nombre. Et de là il s'enſuit que c'eſt auſſi la même choſe de dire que deux grandeurs ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre, & de dire qu'elles ſont incommenſurables, puiſque ſi elles eſtoient commenſurables elles ſeroient comme nombre à nombre.

SECOND LEMME.

III. Si deux grandeurs n'eſtant pas comme nombre à nombre, leurs quarrez ou leurs cubes ſont comme nombre à nombre; on dit alors que ces grandeurs ſont incommenſurables en elles-mêmes, ou en longueur, ou lineairement; mais qu'elles ſont commenſurables en puiſſance.

Et il faut remarquer que le quarré eſt la 1re puiſſance, qui s'appelle ſimplement puiſſance : Le cube la 2e : Le quarré de quarré la 3e ; & ainſi à l'infini.

TROISIEME LEMME.

IV. Il ſuppoſe que l'on ſçait de l'arithmetique commune qu'une même raiſon ſe peut exprimer par une infinité de nombres, comme la raiſon double par 2. 1 par 6. 3. par 8. 4. par 12. 6. &c. La raiſon de 4 à 9 par 8. 18 :: 12. 27 :: 20. 45. &c.

Mais qu'on ne connoiſt diſtinctement & preciſément quelle eſt une raiſon, que quand on l'a reduite aux plus petits nombres par leſquels elle puiſſe eſtre exprimée, comme la raiſon de 12 à 6. à 2 & 1. & la raiſon de 20 à 45. à 4 & 9.

Soient donc appellez ces plus petits nombres par leſquels chaque raiſon puiſſe eſtre exprimée, *les expoſans de cette raiſon*.

QUATRIEME LEMME.

V. Il ſuppoſe auſſy que l'on ſçache que la multiplication d'un nombre par ſoy même eſt ce qu'on appelle *un nombre quarré*, & que la multiplication d'un nombre quarré par

la racine est ce qu'on appelle un nombre cube.

CINQUIEME LEMME.

LES nombres se peuvent considerer comme estant d'une dimension, ou de deux, ou de trois, ou de quatre, &c. V I.

On considere un nombre comme estant d'une seule dimension, lors qu'on regarde simplement ce qu'il contient d'unitez & qu'on le marque par une seule lettre, soit qu'il ait besoin pour estre écrit en chifre d'un seul ou de plusieurs characteres. Ainsi 72 marqué par une *s*, est un nombre d'une seule dimension.

On le considere comme ayant deux dimensions, lors qu'il est exprimé par deux lettres qui marquent deux nombres, qui se multipliant l'un l'autre font le nombre total qu'on veut exprimer. Ainsi *b* signifiant 2, & *p* 36, *b p.* signifie deux fois 36, ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 3 dimensions, lors qu'il est exprimé par 3 lettres, qui marquent 3 nombres, dont le 3e multiplie le produit des deux premiers. Ainsi *b* signifiant 2, *c* 3 & *m* 12: *b c m* signifie 2 fois 3 fois 12, c'est à dire, 6 fois 12; ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 4 dimensions, lors qu'il est exprimé par 4 lettres qui marquent 4 nombres, dont le 3e ayant multiplié le produit des deux premiers, le 4e multiplie le produit des 3 autres. Ainsi *b* signifiant 2, *c* 3, & *d* 4; *b c d c* signifie 2 fois 3 fois 4 fois 3. c'est à dire, 6 fois 4 fois 3; ou 24 fois 3, ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 5 dimensions lors qu'il est exprimé par 5 lettres.

De 6 quand par 6.

De 7 quand par 7.

De 8 quand par 8, &c.

Observant toûjours que les nombres marquez par ces lettres se multiplient les uns les autres en la maniere qui a esté expliquée en parlant de ceux qui ont 3 ou 4 dimensions.

SIXIEME LEMME.

CETTE maniere d'exprimer les nombres par lettres est V I I.

fort differente de celle où on les exprime par chiffres. Et en voicy les principales differences.

I. Dans les chiffres chaque nombre marqué par chaque chiffre s'ajoûte aux autres: mais icy chaque nombre marqué par chaque lettre multiplie les autres.

Si j'écris par exemple 26, le (2) estant dans les dixaines signifie vingt & l'autre caractere six, & le tout est vingt plus six, c'est à dire 26: mais supposant que *k* signifie vingt, & *f*, 6; *kf.* signifiera 20 fois 6, ou 6 fois 20, ce qui est la même chose; c'est à dire 120.

II. Dans les chiffres il y a beaucoup d'affaires à multiplier l'un par l'autre deux nombres qui ont chacun beaucoup de caracteres, comme 267 par 343, mais dans les lettres il n'y a rien de plus facile: car il ne faut que joindre les lettres de l'un des nombres aux lettres de l'autre, & la multiplication est toute faite, comme si l'un est *b c m* & l'autre *f d p*, le produit de ces deux nombres, quels qu'ils soient, est *b c m f d p*.

III. Dans les chiffres le rang où chaque chiffre est placé est ce qui en détermine la signification; de sorte qu'on ne peut troubler ce rang sans changer le nombre que les chiffres signifient. C'est pourquoy il y a bien de la difference entre 29 & 92.

Mais dans les lettres ce rang ne fait rien du tout, & pourveu que les mêmes lettres demeurent, quelque transposition qu'on en faisse, cela ne change rien dans la signification de chaque lettre, ny dans l'expression du nombre total. C'est pourquoy *b c d*, ou *d c b*, ou *d b c*, est toûjours la même chose: parce que ces lettres se multipliant, il n'importe de rien par où l'on commence la multiplication, n'y ayant point de difference entre 2 fois 3 fois 4, ou 3 fois 4 fois 2, ou 4 fois 3 fois 2. Et tout cela faisant toûjours 24.

IV. Chaque chiffre signifie un nombre particulier & determiné selon la place où il est. Car (2) à la place des dixaines ne signifie jamais que vingt, & 3 à la place des centaines ne signifie jamais que trois cent. Mais le grand &

ordinaire uſage des lettres eſt de ſignifier des nombres quelconques avec cette obſervation, que dans le même nombre, ou dans des nombres que l'on compare enſemble, les mêmes lettres ſignifient mêmes nombres quels qu'ils ſoient, & differentes lettres differens nombres. C'eſt pourquoy deux mêmes lettres comme *b b*, ou *c c*, ſignifient un nombre quarré, & 3 mêmes lettres comme *b b b* ou *c c c* des nombres cubiques.

SEPTIEME LEMME.

VIII. MAIS il y a encore une obſervation à faire ſur les nombres quarrez & cubiques.

C'eſt qu'un nombre eſt reconnu pour quarré non ſeulement quand il eſt exprimé par deux mêmes lettres comme *b b*, mais auſſi quand on peut partager en deux parts égales les lettres d'un nombre, en ſorte que les mêmes lettres ſe trouvent en l'une & en l'autre partie. Ainſi *b b c c*, ou *b b c c d d*. ſont des nombres quarrez, parce que l'un ſe peut partager en *b c* & *b c*, & l'autre en *b c d* & *b c d*. Car on a déja veu qu'il n'importoit de rien en quelque maniere que les lettres fuſſent rangées.

Vn nombre de même eſt cubique non ſeulement quand il eſt exprimé par les trois mêmes lettres comme *b b b*, mais auſſi quand les lettres qui le marquent peuvent eſtre diviſées en trois parts égales dont chacune contienne les mêmes lettres. Ainſi *b b b c c c*, ou *b b b c c c d d d* ſont deux nombres cubiques, parce que le premier ſe peut partager en *b c*, *b c* & *b c*, & l'autre en *b c d*, *b c d* & *b c d*.

COROLLAIRE.

IX. IL s'enſuit de là ſans autre preuve, que le produit de deux nombres quarrez eſt toûjours un nombre quarré qui a pour ſa racine le produit des deux racines des deux autres nombres quarrez. Ainſi *b b* en *c c* fait *b b c c*, qui a pour ſa racine *b c*. Et que le produit de deux nombres cubiques eſt toûjours un nombre cubique, qui a auſſi pour ſa racine le produit des deux racines des deux autres nombres cubiques.

HUITIEME LEMME.

x. Quoy que deux nombres n'ayent pas autant de dimensions l'un que l'autre, ils ne laissent pas de pouvoir estre comparez ensemble, parce que tous les nombres estant mesurez par l'unité ont toûjours raison l'un à l'autre.

Neanmoins il est souvent utile de pouvoir faire que le nombre qui auroit moins de dimensions que l'autre, en ait autant demeurant le même, & cela est aisé.

Car reservant la lettre (i) pour marquer l'unité il ne faut qu'augmenter les lettres du nombre qui en a moins que l'autre, d'autant d'i qu'il est necessaire pour faire qu'il y ait autant de lettres à l'un qu'à l'autre. Ainsi ayant à comparer *b* avec *b x*, ajoûtant un 1 à *b*, *b* 1, aura autant de dimensions que *b x*.

Et neanmoins *b* i sera le même nombre que *b*, parce que l'unité multipliant un nombre ne le change point; 4 fois un, ou une fois 4, estant la même chose que quatre.

Et quand on le multiplieroit 2, 3 & 4 fois par l'unité, ce seroit toûjours de même: comme il se voit en ce que l'unité prise une fois (ce qui peut estre marqué par un seul i.) est un nombre lineaire & multiplié par soy même, ce qui peut estre marqué par deux (ii) est un nombre quarré, quoy que ce soit toûjours un: Et marqué par trois (iii) un nombre cubique: Et par quatre (iiii) un nombre quarré de quarré: Et ainsi à l'infini. D'où il s'ensuit que comme un seul (i) n'apporte aucun changement au nombre auquel il est ajoûté, deux, trois, quatre i, n'en apportent point aussy.

Cette observation sera de grand usage dans les Theoremes suivans.

PREMIER THEOREME.

xi. DEUX nombres estant marquez par des lettres en la maniere qui vient d'estre expliquée, si l'un & l'autre est composé de lettres semblables à celles de l'autre, & de lettres dissemblables, ces nombres sont entr'eux en même raison que leurs lettres dissemblables. Ou bien les lettres qui sont semblables dans les deux nombres estant retranchées

chées de part & d'autre, les lettres dissemblables qui resteront marqueront la raison entre ces deux nombres reduite à de moindres termes. Ainsi

$$\begin{array}{llll} bc. & bd & :: & c. \quad d. \\ bcd. & bfg & :: & cd. \quad fg. \\ bbd. & bfg & :: & bd. \quad fg. \\ bxcxdx. & bycydy & :: & xxx.yyy. \end{array}$$

Que si l'un des nombres comprend toutes les lettres de l'autre & quelques lettres de plus, ajoûtant un (i) à celuy qui n'a point de lettre qui ne soit dans l'autre, ce sera ceci, & les lettres particulieres à l'autre nombre, qui marqueront la raison entre ces deux nombres.

$$\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{ll} b. & bx. \\ bi. & bx. \end{array}\right\} & :: i. \quad x. \\ \left\{\begin{array}{ll} bc. & bcxy \\ bci. & bcxy \end{array}\right\} & :: i. \quad xy. \end{array}$$

Ou si on veut on peut ajoûter autant d'*i* que l'autre nombre a plus de lettres que celuy-là.

$$\left\{\begin{array}{ll} bc. & bcxx \\ bcii. & bcxx \end{array}\right\} :: ii. \quad xx.$$

Tout cela n'est qu'une application particuliere aux nombres de ce qui a esté demonstré dans le Livre II. au regard de toutes sortes de grandeurs : Que deux grandeurs estant multipliées par une même, sont en même raison qu'elles estoient avant que d'estre multipliées. Car toute lettre marquant un nombre qui multiplie les nombres marquez par les autres lettres, la même lettre se trouvant en deux nombres, c'est un même nombre qui en multiplie d'autres : & par consequent ces autres sont en même raison avant & apres cette multiplication : Ou bien sans cette multiplication & avec cette multiplication. Donc le nombre xb doit estre au nombre xc, comme b à c, parce que b & c doivent estre en même raison, soit que l'un & l'autre soit multiplié par le même nombre x, soit que l'un & l'autre soit laissé seul sans estre multiplié par x.

Soit donc posé pour maxime, que retranchant dans

deux nombres les lettres qui se trouvent les mêmes en l'un qu'en l'autre, ce qui restera de l'un & de l'autre en marquera la raison.

Mais il faut remarquer qu'il n'en faut oster qu'autant de l'un que de l'autre. Car s'il y a deux *b* dans l'un, & un *b* seulement dans l'autre, comme si l'un est *b b c*, & l'autre *b f g*, il ne faudra oster qu'un seul *b* de celuy qui en a deux, parce qu'il n'y en a qu'un dans l'autre. C'est pourquoy

b b c. b f g :: b c. f g.

SECOND THEOREME.

XII. LES raisons de nombre à nombre sont égales en trois manieres.

PREMIERE MANIERE.

La 1re est quand les consequens sont equimultiples des antecedens, ou les antecedens des consequens.

b. b x :: c. c x.

Car ajoûtant *i* aux antecedens, ce qui ne les change point (car par le 8e Lemme *b i = b* & *c i = c*)

Or $\left.\begin{matrix} b\,i. & b\,x \\ c\,i. & c\,x \end{matrix}\right\}$ :: *i. x.*

Donc les deux raisons *b* & *b x*, *c* & *c x*, se reduisent à cette même raison *i. x.*

C'est la même chose quand ce sont les antecedens qui sont equimultiples des consequens.

b x. b :: c x. c.

SECONDE MANIERE.

La 2e est quand les termes d'une raison sont equimultiples des termes de l'autre, l'antecedent de l'antecedent, & le consequent du consequent.

b. c :: b x. c x.

Car ostant *x* des deux termes de la 2e raison, elle est la même que la premiere par le 1er Theoreme.

TROISIEME MANIERE.

La 3e est quand les termes d'une raison estant equimultiples de deux nombres, les termes de l'autre raison sont aussi equimultiples, quoy que differemment, des deux mêmes nombres disposez de la même sorte.

$bx.\ cx :: by.\ cy.$

Car oſtant x des deux premiers termes, & y des deux derniers, les deux raiſons ſe trouvent eſtre la même.

$$\left.\begin{matrix} bx. & cx \\ by. & cy \end{matrix}\right\} :: b.\ c.$$

AVERTISSEMENT.

IE *ne m'amuſe point à prouver que les raiſons de nombre à nombre ne peuvent eſtre égales qu'en ces trois manieres, parce qu'il ſuffit de pouvoir aſſeurer ſans crainte qu'il eſt impoſſible d'en trouver d'autres, ce qui ſeroit facile s'il y en avoit, n'y ayant rien que l'eſprit humain connoiſſe ſi clairement & ſi diſtinctement que les nombres.* XIII.

On peut même dire que ces trois manieres ſe reduiſent à une ſeule. Car dans les deux premieres ajoûtant l'unité aux termes qui ont moins de dimenſions, elles deviennent la même choſe que la derniere, comme il ſe voit par ces exemples.

I. $\left.\begin{matrix} b. & bx :: c. & cx. \\ bi. & bx :: ci. & cx. \end{matrix}\right\} :: b.\ x.$

II. $\left.\begin{matrix} b. & c :: bx. & cx. \\ bi. & ci :: bx. & cx. \end{matrix}\right\} :: b.\ c.$

III. $\left\{ bx.\ cx :: by.\ cy. \right\} :: b.\ c.$

TROISIEME THEOREME.

Deux raiſons de nombre à nombre eſtant égales, le produit des antecedens eſt au produit des conſequens comme deux nombres quarrez : ou, la raiſon du produit des antecedens au produit des conſequens a pour ſes expoſans des nombres quarrez. XIV.

PREMIERE PREUVE.

Si on reduit chaque raiſon aux moindres termes, elles ſe trouveront reduites aux mêmes nombres. Donc le produit des antecedens ſera la multiplication d'un nombre par ſoy même, ce qui fait un nombre quarré, & de même du produit des conſequens.

Deux raiſons égales $bx.\ cx :: by.\ cy.$
reduites aux moindres termes $b.\ c :: b.\ c.$
Donc le produit des antecedens eſt $bb.$
& celuy des conſequens $cc.$

SECONDE PREUVE.

Sans cette reduction on prouve la même chose en parcourant les 3 manieres dont les raisons de nombre à nombre sont égales.

PREMIERE MANIERE.

$b.\ bx :: c.\ cx.$

Ajoûtant l'unité aux deux antecedens.

$bi.\ bx :: ci.\ cx.$

Donc le produit { des antecedens $bici.$ / des consequens $bxcx.$

Donc ostant bc de l'un & de l'autre (selon le 1e Theoreme) reste pour l'un ii, qui est le quarré de l'unité, & pour l'autre, xx; qui est un autre quarré quelconque.

Que si les 4 termes estoient

$b.\ bxy :: c.\ cxy.$

ajoûtant l'unité $bi.\ bxy :: ci.\ cxy.$

le produit { des antecedens $bici.$ / des consequens $bxycxy.$

ostant bc de l'un & de l'autre, reste ii & $xyxy.$ & ce dernier est un nombre quarré par le 7e Lemme. *Ce qui soit remarqué une fois pour toutes.*

SECONDE MANIERE.

$b.\ c :: bx.\ cx.$

Ajoûtant l'unité aux deux premiers termes.

$bi.\ ci :: bx.\ cx.$

Donc le produit { des antecedens $bibx.$ / des consequens $cicx.$

Donc ostant $ix.$ de l'un & de l'autre, reste bb & $cc.$

TROISIEME MANIERE.

$bx.\ cx :: by.\ cy.$

le produit { des antecedens $bxby.$ / des consequens $bxcy.$

ostant xy de part & d'autre, reste bb & $cc.$

Donc deux raisons de nombre à nombre estant égales, la raison du produit des antecedens au produit des consequens a pour ses exposans des nombres quarrez. Ce qu'il falloit demonstrer.

QUATRIEME THEOREME.

TROIS raiſons de nombre à nombre eſtant égales, la raiſon du produit des 3 antecedens au produit des 3 conſequens a pour ſes expoſans des nombres cubiques. XV.

PREMIERE PREUVE.

Chacune des 3 raiſons égales eſtant reduite aux moindres termes, elles ſe trouvent reduites aux mêmes nombres.

$b x.\ c x :: b y.\ c y :: b z.\ c z$
$b.\ c :: b.\ c :: b.\ c.$

Donc le produit { des antecedens $b b b$. / des conſequens $c c c$.

SECONDE PREUVE.

Sans cette reduction en parcourant les 3 manieres.

PREMIERE MANIERE.

$b.\ b x :: c.\ c x :: d.\ d x.$

Ajoûtant l'unité aux antecedens

$b i.\ b x :: c i.\ c x :: d i.\ d x.$

Donc le produit { des antecedens $b i c i d i$. / des conſequens $b x c x d x$. $\S iii$.

Donc oſtant de part & d'autre $b c d$, reſte $\S xxx$.

SECONDE MANIERE, qui eſt meſlée de la Troiſiéme.

$b.\ c :: b x.\ c x :: b y.\ c y.$

ajoûtant l'unité aux deux premiers termes

$b i.\ c i :: b x.\ c x :: b y\ \ c y.$

Donc le produit { des antecedens $b i b x b y$. / des conſequens $c i c x c y$. $\S b b b$.

Donc oſtant de part & d'autre $i x y$, reſte $\S ccc$.

C'eſt la même choſe de la 3e maniere.

PROPOSITION FONDAMENTALE DES GRANDEVRS INCOMMENSVRABLES.

LA raiſon doublée ou triplée d'une raiſon de nombre à nombre, eſt auſſi une raiſon de nombre à nombre, qui a pour ſes expoſans des nombres quarrez ſi elle eſt doublée, & des nombres cubiques ſi elle eſt triplée. XVI.

D'où il s'enſuit qu'une raiſon ſimple n'eſt pas de nom-

bre à nombre, ſi la raiſon doublée ou triplée de cette raiſon, ou n'eſt pas de nombre à nombre, ou n'a pas pour ſes expoſans des nombres quarrez ou cubiques.

La premiere partie eſtant vraye, la derniere en eſt une ſuite neceſſaire, puis qu'il eſt toûjours permis de conclure de la negation du conſequent à la negation de l'antecedent.

Reſte donc à prouver la premiere, ce qui eſt facile par les deux Theoremes precedens.

Car une raiſon doublée n'eſt autre choſe qu'une raiſon compoſée de deux raiſons égales.

Or une raiſon compoſée de deux raiſons n'eſt autre choſe que la raiſon du produit des antecedens de ces deux raiſons au produit de deux conſequens par III. 1. & 5.

Donc une raiſon compoſée de deux raiſons égales de nombre à nombre (ce qui eſt la même choſe que la raiſon doublée d'une raiſon de nombre à nombre) n'eſt autre choſe que la raiſon du produit des antecedens de deux raiſons égales de nombre à nombre au produit des conſequens.

Or cette raiſon du produit des antecedens de deux raiſons égales de nombre à nombre au produit des conſequens, a pour ſes expoſans des nombres quarrez par le Theoreme 3e.

Donc toute raiſon doublée d'une raiſon de nombre à nombre a pour ſes expoſans des nombres quarrez.

On prouvera de la même ſorte par le 4e Theoreme que la raiſon triplée d'une raiſon de nombre à nombre a pour ſes expoſans des nombres cubiques; parce qu'une raiſon triplée n'eſt autre choſe qu'une raiſon compoſée de trois raiſons égales. Donc, &c.

PREMIER COROLLAIRE.

XVII. TROIS grandeurs eſtant continuellement proportionelles, la raiſon de la 1re à la 3e ne peut eſtre que de 3 ſortes.

1. Ou de nombre à nombre, ayant pour ſes expoſans des nombres quarrez.

2. Ou de nombre à nombre n'ayant pas pour ſes expoſans des nombres quarrez.

3. Ou sourde & non de nombre à nombre.

PREMIER CAS.

Si la raison de la 1re grandeur à la 3e est une raison de nombre à nombre qui a pour ses exposans des nombres quarrez, la 2e grandeur est aux deux autres comme est le produit des racines de ces deux nombres quarrez est à ces deux nombres quarrez. Et par consequent les 3 grandeurs sont commensurables. XVIII.

Soient $\frac{aa}{aa}$ $b.$ $c.$ $d.$

Soient $b.\ d :: \begin{cases} 4. & 9. \\ xx. & yy. \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \frac{aa}{aa} & b. \ c. \ d. \\ \frac{ab}{aa} & 4. \ 6. \ 9. \\ \frac{bb}{aa} & xx. \ xy. \ yy. \end{cases}$ par III. 25.

SECOND CAS.

Si la raison de la 1re grandeur à la 3e est une raison de nombre à nombre qui n'ait pas pour ses exposans des nombres quarrez, la moyenne grandeur est incommensurable en longueur, & commensurable en puissance à la 1re & à la derniere. XIX.

Soient $\frac{ab}{aa}$ $k.$ $l.$ $m.$

Soient $k.\ m :: 3.\ 4.$

La raison de k, m estant doublée de la raison k, l, ou composée des deux raisons égales k, l, & l, m, puisque 3 & 4, qui sont les exposans de cette raison doublée k, m, ne sont pas deux nombres quarrez, les deux raisons égales k, l, & l, m, dont cette raison est composée, ne peuvent estre des raisons de nombre à nombre par la seconde partie de la proposition fondamentale.

Donc k & l sont incommensurables, comme aussi l & m, par le 1er Lemme.

Mais $\begin{matrix} kk. & ll \\ ll. & mm \end{matrix} :: \begin{matrix} k. & m. \\ 3. & 4. \end{matrix}$

Donc $\begin{Bmatrix} kk. & ll \\ ll. & mm \end{Bmatrix}$ sont commensurables.

Donc $\begin{Bmatrix} k \ \& \ l \\ l \ \& \ k \end{Bmatrix}$ sont commensurables en puissance.

TROISIEME CAS.

XX. Si la raison de la 1re grandeur à la 3e n'eſt pas de nombre à nombre, la moyenne grandeur ſera incommenſurable aux deux autres, tant en longueur qu'en puiſſance.

Elle leur ſera incommenſurable en longueur par la même preuve que celle du 2e cas.

Et elle leur ſera incommenſurable en puiſſance, parce que le quarré de la 1re eſt au quarré de la ſeconde comme la 1re eſt à la 3e. Donc ſi la raiſon de la 1re à la 3e n'eſt pas de nombre à nombre, la raiſon du quarré de la 1re au quarré de la 2e ne ſera pas de nombre à nombre.

Donc la 1re & la 2e ſont incommenſurables en puiſſance. Et il eſt de même de la 2e comparée à la troiſiéme.

SECOND COROLLAIRE.

XXI. 4 grandeurs eſtans continuellement proportionelles, la raiſon de la 1re à la 4e ne pouvant eſtre que de 3 ſortes, comme il vient d'eſtre dit, voicy ce qui arrivera.

PREMIER CAS.

XXII. Si la raiſon de la 1re à la 4e eſt une raiſon de nombre à nombre qui ait pour ſes expoſans des nombres cubiques, les moyennes grandeurs ſeront aux extrémes, comme ſont aux nombres cubiques (qui ſont les expoſans de la raiſon de la 1re à la 4e grandeur) le quarré de la racine de ce 1er cube multiplié par la racine du 2e & le quarré de la racine du 2e multiplié par la racine du 1er.

Soient $\frac{\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ *b. c. d. f.*

Soient *b. f.* :: $\begin{cases} 8. & 27. \\ xxx. & yyy. \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \frac{\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot} & b. & c. & d. & f. \\ \frac{\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot} & 8. & 12. & 18. & 27. \\ \frac{\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot} & xxx. & xxy. & yyz. & yyy. \end{cases}$

SECOND CAS.

XXIII. Si la raiſon de la 1re à la 4e eſt une raiſon de nombre à nombre qui n'ait pas pour ſes expoſans des nombres cubiques, la 1re & la 2e grandeur ſont incommenſurables en longueur & commenſurables en ſeconde puiſſance, & il en eſt de même de la 2e & 3e, de la 3e & 4e.

Soient

Soient $\frac{m}{n}$ *k. l. m. n.*

Soient *k. n* :: 3. 4.

La raison *k. n* estant triplée de la raison *k. l*, ou composée des 3 raisons égales, $\left\{\begin{matrix} k.\ l. \\ l.\ m. \\ m.\ n. \end{matrix}\right.$ chacune de ces 3 raisons égales ne sçauroit estre de nombre à nombre (par la 2e partie de la proposition fondamentale) puisque la raison *k. n*, qui est composée des trois, ou triplée de chacune, a les nombres 3 & 4 pour ses exposans, qui ne sont pas des nombres cubiques.

Donc $\left\{\begin{matrix} k.\ l. \\ l.\ m. \\ m.\ n. \end{matrix}\right\}$ soit incommensurables en longueur.

Mais par 111.

$$\left\{\begin{matrix} kkk & lll \\ lll. & mmm \\ mmm. & nnn \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} k.\ n. \\ 3.\ 4. \end{matrix}\right.$$

Donc ces cubes deux à deux sont commensurables, puis qu'ils sont comme 3 à 4.

Donc $\left\{\begin{matrix} k.\ l \\ l.\ m \\ m.\ n \end{matrix}\right\}$ sont commensurables en seconde puissance.

TROISIEME CAS.

SI la raison de la 1re à la 4e grandeur n'est pas de nombre à nombre, la 1re & 2e, la 2e & 3e, la 3e & 4e, sont incommensurables tant en longueur qu'en seconde puissance. La raison du 2e cas prouve qu'elles le sont en longueur : & elles le sont en seconde puissance, parce que la raison du cube de la 1re au cube de la 2e, & ainsi des autres, est la même que la raison de la 1re grandeur à la 4e, que l'on suppose n'estre pas de nombre à nombre. XXIV.

TROISIEME COROLLAIRE.

SI deux grandeurs quarrées ou ne sont pas comme nombre à nombre, ou n'ont pas des nombres quarrez pour les exposans de leur raison, les racines en sont incommensurables. XXV.

Et de même si deux grandeurs cubiques ou ne sont pas comme nombre à nombre, ou n'ont pas pour les exposans de leur raison des nombres cubiques.

Car les quarrez sont en raison doublée de leurs racines, & les cubes en raison triplée, d'où le reste suit par la proposition fondamentale.

PROBLEME.

XXVI. RECONNOISTRE si un nombre donné est la racine d'un quarré égal à deux nombres quarrez.

Cela se peut reconnoistre par ces deux Regles.

PREMIERE REGLE.

TOUT nombre impair qui estant ajoûté à soy même moins un, fait un nombre quarré, est la racine d'un quarré égal à deux autres quarrez.

Soit ce nombre impair appellé b.

Soit $b - 1$ appellé b, de sorte que $b + 1$ soit égal à b.

Soit $b + b$ (ou $2b + 1$, qui est la même chose, & que nous supposons estre un nombre quarré) appellé cc.

Ie dis que $bb = bb + cc$.

Car b estant égal à $b + 1$, bb est égal au quarré de $b + 1$. c'est à dire, à $bb + 2b + 1$.

Or $2b + 1$ est égal à cc. par l'hypothese.

Donc $bb = bb + cc$. Ce qu'il falloit demonstrer.

Exemple. Soit le nombre proposé 41. 2 fois 41 moins un, c'est à dire 41 & 40 font 81, qui est le quarré de 9.

Donc le quarré de 41, qui est 1681, est égal à 81 (quarré de 9) & à 1600 (quarré de 40.)

SECONDE REGLE.

XXVII. AYANT trois nombres qui soient tels, selon la 1re Regle, que le quarré du premier soit égal au quarré des deux autres, tout multiple du premier aura aussi son quarré égal, aux deux quarrez des equimultiples des deux autres.

Exemple. 13. estant de ces impairs de la premiere regle, dont le quarré 169 est égal à 144 quarré de 12, plus à 25 quarré de 5, 39 qui est triple de 13 a son quarré égal au quarré de 36 triple de 12, & au quarré de 15 qui est triple de 5.

PREMIER COROLLAIRE. XXVII.

IL y a des nombres qui sont tout ensemble de la 1re & de la 2e regle. Et alors leur quarré est égal à deux quarrez selon la 1re regle, & à deux autres quarrez, selon la 2e.

Exemple. 25, selon la 1re regle, a son quarré égal au quarré de 24 & à celuy de 7.

Et le même 25 selon la 2e regle, comme quintuple de 5, a son quarré égal à celuy de 20, quintuple de 4, & à celuy de 15, quintuple de 3.

Tous les nombres de la 1re regle qui finissent par 5 sont aussi de la 2e, comme estant multiples de 5.

SECOND COROLLAIRE.

EN renversant la 1re regle on peut trouver tant de nombres que l'on voudra dont le quarré soit égal à deux autres quarrez. XXIX.

Car tout nombre quarré impair estant divisé en deux parties, dont l'une ne surpasse l'autre que de l'unité, le quarré de la plus grande partie est égal au quarré de la plus petite, plus le premier quarré impair. La preuve est la même que celle de la 1re regle.

TROISIEME COROLLAIRE.

ON peut encore se servir pour trouver ces quarrez, de la Table suivante, qui a 7 colonnes: qui contiennent, XXX.

La I. Vne progression Arithmetique de 4 en 4 commençant par 4.

II. Les nombres triangulaires de ceux de la 1re colonne. De sorte que les deux premiers de la 1re colonne valent le 2e de la seconde. les 3 premiers le 3e: les 4 premiers le 4e, &c.

III. Ces mêmes nombres plus un.

IV. Les nombres impairs à commencer par 3.

V. Les quarrez de ces nombres impairs de la 4e colonne.

VI. Les quarrez des nombres de la 2e colonne.

VII. Les quarrez des nombres de la 3e.

Cela fait on trouvera que chacun des quarrez qui sont dans la 5e colonne, est égal aux 2 nombres qui sont vis

à vis dans la 2e & dans la 3e colonne.

2. Que chacun des quarrez de la 7e colonne est égal aux deux quarrez qui sont vis à vis dans la 5 & 6e colonne. Ce que l'on vouloit principalement chercher.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
4	4	5	3	9	16	25
8	12	13	5	25	144	169
12	24	25	7	49	576	625
16	40	41	9	81	1600	1681
20	60	61	11	121	3600	3721
24	84	85	13	169	7056	7225
28	112	113	15	225	12544	12769
32	144	145	17	289	20736	21025
36	180	181	19	361	32400	32761
40	220	221	21	441	48400	48841

DE LA PROPORTION ENTRE LES DIFFERENTES ALIQUOTES D'UNE MÊME GRANDEUR.

PREMIER LEMME.

XXXI. IL suppose que l'on sçait qu'une aliquote, qui s'appelle une fraction dans les nombres, s'exprime par deux chiffres au dessus l'un de l'autre avec une raye entre-deux, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$. Et que celuy d'embas, qui marque combien de fois l'aliquote est contenuë dans son tout, est appellé dénominateur, & celuy d'enhaut numerateur, parce qu'il marque combien de fois on doit prendre l'aliquote marquée par celuy d'embas. Ainsi $\frac{2}{3}$ est un tiers, $\frac{3}{4}$ trois quarts, $\frac{5}{6}$ cinq sixiémes.

SECOND LEMME.

XXXII. UN tout est à chacune de ses aliquotes, comme le dénominateur de l'aliquote est à l'unité.

$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ :: 2. 1.
$\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$ :: 3. 1.
$\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}$ :: 4. 1.

TROISIEME LEMME.

XXXIII. L'ALIQUOTE prise autant de fois qu'elle est contenuë

de fois dans le tout, eſt égale au tout. Ce qui arrive toûjours quand le numerateur eſt le même nombre que le denominateur.

Ainſi $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{5}$ &c. ſont chacun le tout.

PREMIER THEOREME.

DEUX differentes aliquotes d'un même tout ſont en même raiſon que leurs denominateurs dans un ordre renverſé. C'eſt à dire que la premiere aliquote eſt à la ſeconde, comme le denominateur de la ſeconde eſt au denominateur de la premiere. XXXIV.

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ :: 4. 3.

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{7}$ :: 5. 7.

Soient x le tiers de 1, & y en ſoit le quart.

Ie dis que $\left.\begin{matrix} x. & y \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{matrix}\right\}$ :: 4. 3.

Car $\begin{matrix} x. & y \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{matrix}$ :: $\begin{matrix} 3x. & 3y. \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{1} \end{matrix}$

Or par le 3e Lemme $\left.\begin{matrix} 3x \text{ \& } 4y \\ \frac{3}{1} \text{ \& } \frac{3}{1} \end{matrix}\right\}$ ſont la même choſe.

Donc $\begin{matrix} x. & y \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{matrix}$ :: $\begin{matrix} 4y. & 3y. \\ \frac{4}{1} & \frac{3}{1} \end{matrix}$

Or $\left.\begin{matrix} 4y. & 3y \\ \frac{4}{1} & \frac{3}{1} \end{matrix}\right\}$ :: 4. 3.

Donc $\left.\begin{matrix} x. & y \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{matrix}\right\}$ :: 4. 3. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SECOND THEOREME.

SI on prend la moitié d'un tout & qu'on y ajoûte la moitié de la moitié, & de plus la moitié de cette nouvelle moitié, & ainſi à l'infiny, toutes ces moitiez enſemble font le tout. XXXV.

Mais ſi on prend le tiers d'un tout & qu'on y ajoûte le tiers de ce tiers, puis le tiers de ce tiers du tiers, & encore le tiers de ce nouveau tiers, & ainſi à l'infiny, tous ces tiers enſemble ſont la moitié.

Et tous les quarts pris de la même ſorte font un tiers.

Toutes les cinquiémes un quart.

Les ſixiémes un cinquiéme, & ainſi de ſuite.

Il ſera aiſé de juger par un ſeul cas de tous les autres.

Soit donc propoſé à montrer que tous les quarts de la grandeur b, c, conſiderée comme une ligne, pris de la ſorte qu'il vient d'eſtre dit, en valent le tiers.

Ie ſuppoſe que $b, x.$ ſoit le tiers de b, c. Si on diviſe ce tiers en quatre parties, les 3 premieres de ces parties que je ſuppoſe eſtre $b, e.$ ſeront le quart de b, c par le 1er Theoreme.

Car $\left.\begin{matrix} b, x. & b, e \\ \vdots & \vdots \end{matrix}\right\} :: 4. 3.$

Donc $e, x.$ eſt le $\frac{1}{4}$ de $b, c.$

Donc pour avoir le $\frac{1}{4}$ du quart, c'eſt à dire le quart de $b, c.$ il ne faut que diviſer $e, x.$ qui en eſt le tiers en quatre parties, & les 3 premieres que je ſuppoſe eſtre $e, d.$ ſeront le quart de $b, c.$

Et $d, x.$ ſera le tiers de $e, d.$

Donc pour avoir le $\frac{1}{4}$ de $e, d.$ qui eſt ce que l'on cherche, il ne faut que diviſer d, x en quatre parties, & les 3 premieres que je ſuppoſe eſtre d, f ſeront le quart de $e, d.$

Et il eſt aiſé de juger qu'agiſſant toûjours de la même ſorte, ces quarts de quarts approcheront toûjours du point x ſans qu'ils y arrivent jamais, qu'apres des ſubdiviſions infinies.

Donc tous ces quarts pris comme il a eſté dit, ne vaudront jamais qu'un tiers.

PREMIER COROLLAIRE.

XXXVI. ON voit par la ſolution du ſophiſme des anciens contre le mouvement,

Suppoſant, diſoient-ils, qu'Achille aille 10 fois plus viſte qu'une tortuë, ſi la tortuë a une lieuë d'avance, jamais Achile ne l'attrapera : car tandis qu'Achile fera la 1re lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de la 2e lieuë ; & tandis qu'Achile fera la $\frac{1}{10}$ de la 2e lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de cette $\frac{1}{10}$, & ainſi à l'infiny.

Tout cela ſuppoſé que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini faſſent un eſpace infini, au lieu qu'elles ne font toutes enſemble qu'une $\frac{1}{9}$ de lieuë, ſelon le Theoreme precedent.

Et c'eſt pourquoy Achile doit attraper la tortuë à la premiere $\frac{1}{10}$ de la 2e lieuë. Car allant 10 fois plus viſte que la tortuë, il doit avoir fait dix fois autant de chemin dans le même temps.

Donc pendant que la tortuë parcourra une $\frac{1}{10}$ de lieuë, Achile en doit parcourir $\frac{10}{10}$, ce qui fait juſtement la premiere lieuë qui en contient $\frac{10}{10}$, plus $\frac{1}{10}$ de la ſeconde lieuë.

SECOND COROLLAIRE.

Si un horloge a deux aiguilles, l'une des heures qui fait XXXVII. ſon tour en 12 heures, & l'autre des minutes qui fait le même tour en une heure, marquer tous les points auſquels ces deux aiguilles ſe rencontreront.

Ce ſera à ces heures icy. $1 \rightarrow \frac{1}{11}$ $2 \rightarrow \frac{2}{11}$ $3 \rightarrow \frac{3}{11}$ $4 \rightarrow \frac{4}{11}$ $5 \rightarrow \frac{5}{11}$ $6 \rightarrow \frac{6}{11}$ $7 \rightarrow \frac{7}{11}$ $8 \rightarrow \frac{8}{11}$ $9 \rightarrow \frac{9}{11}$ $10 \rightarrow \frac{10}{11}$ $11 \rightarrow \frac{11}{11}$. C'eſt à dire 12 heures.

La preuve en eſt aiſée à deviner par celle du 1er Corollaire.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE CINQVIEME.

DE L'ESTENDVE.

DE LA LIGNE DROITE ET CIRCVLAIRE. DES DROITES PERPENDICVLAIRES, ET OBLIQVES.

DEFINITIONS.

1. NOus *avons parlé jusques icy de la grandeur en general. Il faut maintenant descendre à ses especes.*

TOUTE grandeur est continüe, comme est l'étenduë, le temps, le mouvement : ou non continüe, comme le nombre.

La continüe est ou successive, comme le temps, le mouvement.

Ou permanente, qui s'appelle generalement *espace* ou *étenduë*.

Mais elle se considere ou selon toutes ses trois dimensions, longueur, largeur & profondeur, & alors elle s'appelle *corps* ou *solide*.

Ou selon deux seulement, longueur & largeur, & alors elle

elle s'appelle *surface* ou *superficie*, qui est ou plate, qui s'appelle *plan*, ou non plate qui s'appelle *surface courbe*.

Ou selon une seulement, qui est la longueur, & alors elle s'appelle *ligne*, qui est ou droite ou courbe.

L'extrémité de la ligne s'appelle *point*, qui doit estre conceu indivisible. Car s'il pouvoit estre partagé en deux, l'une de ces moitiez ne seroit pas à l'extrémité de la ligne.

Et par la même raison la ligne, qui est indivisible selon la largeur, parce qu'elle est considerée comme n'en ayant point, est l'extrémité de la surface.

Et la surface qui est aussi indivisible selon la profondeur, est l'extremité du corps.

PREMIER AVERTISSEMENT.

LES *idées d'une surface plate & d'une ligne droite sont si simples qu'on ne feroit qu'embrouiller ces termes en les voulant definir. On peut seulement en donner des exemples pour en fixer l'idée aux termes de chaque langue.* I I.

SECOND AVERTISSEMENT.

QUOY *qu'il n'y ait point au monde d'étendüe qui n'ait que longueur & largeur sans profondeur, ou longueur sans largeur ny profondeur, & encor moins de point, qui n'ait ny longueur, ny largeur, ny profondeur; ce que disent les Geometres des surfaces, des lignes & des points ne laisse pas d'estre vray, parce qu'il suffit pour cela que dans un corps qui est veritablement long, large, & profond, je puisse n'en considerer que la longueur & la largeur, sans faire attention à la profondeur, ou même la longueur seule sans m'arrester ny à la largeur, ny à la profondeur. Ainsy pour mesurer un champ, je ne m'amuse pas à creuser pour sçavoir si la terre y est bien profonde, mais je regarde seulement combien il est long & large: Et pour sçavoir combien il y a de Paris à Orleans, je ne mesure pas la largeur des chemins, mais seulement la longueur. Et de même ce qu'on appelle Point n'est que la ligne même, en tant qu'on n'y considere que la negation d'une plus longue étendüe.* I I I.

TROISIEME AVERTISSEMENT.

ON *doit commencer par la ligne comme par la plus simple étendüe: & de plus pour en rendre la consideration plus facile* IV.

lors que l'on compare plusieurs lignes ensemble, on les suppose toûjours dans ces premiers elemens comme estant posées, ou décrites sur un même plan, c'est à dire sur une même superficie plate: ce qu'il suffira d'avoir dit une fois pour toutes.

PREMIERE SECTION.

DE LA LIGNE DROITE.

v. Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en est tres claire d'elle même, & que tous les hommes conçoivent la même chose par ce mot. Mais il est bon de remarquer ce que nous concevons naturellement estre enfermé dans cette idée, ce que l'on pourra prendre si l'on veut pour sa definition.

La ligne droite est la plus courte estenduë entre deux points.

Et celle qui approche plus de la droite, est aussi la plus courte: ce qui a donné occasion à Archimede d'établir ce principe ou Axiome.

PREMIER AXIOME.

vi. Si deux lignes sur le même plan ont les extremitez communes & sont courbes ou creuses vers la même part, celle qui est contenüe est plus courte que celle qui la contient. I'ay dit courbes ou creuses, car cela n'est pas seulement vray des lignes courbes comme dans la I. figure, mais aussi des droites comme dans la II, lors que deux ou plusieurs lignes droites se joignant font un creux. Car alors deux ou plusieurs lignes droites sont considerées comme une seule ligne courbe qui seroit creuse vers ce costé là.

Mais il faut bien remarquer ces mots, (vers la même part) car cela ne seroit pas vray, si la même ligne courbe estoit creuse vers differens costez comme dans la III figure, ou si diverses lignes droites

considerées comme une seule ligne faisoient aussi des creux de differens costez comme dans la IV figure, car alors la contenante pourroit estre plus courte que la contentie.

SECOND AXIOME OU DEMANDE.

VII. AYANT deux points donnez on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

Et on n'y en peut mener qu'une.

Laquelle par consequent est l'unique & naturelle mesure de la distance entre ces deux points. L'instrument dont on se sert pour cela s'appelle *regle*.

TROISIEME AXIOME OU DEMANDE.

VIII. LA simplicité de la ligne droite fait qu'en ayant une posée on la peut prolonger de part & d'autre jusques à l'infini, c'est à dire tant que l'on veut.

D'où il s'ensuit que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Ou, que connoissant deux points dans une ligne droite, nous la connoissons toute.

Ou, que deux points estant donnez de position, toute la ligne droite est donnée.

QUATRIEME AXIOME.

IX. SI une ligne droite est immediatement couchée sur une autre en une de ses parties, elle le sera en toutes, pourveu que l'une & l'autre soit prolongée autant qu'il faudra, & elles ne feront proprement qu'une même ligne.

CINQUIEME AXIOME.

X. DEUX lignes droites ne se peuvent couper qu'en un point.

SIXIEME AXIOME.

XI. DEUX lignes droites qui estant prolongées vers un même costé s'approchent peu à peu, se couperont à la fin.

Euclide prend cette proposition pour un principe & avec raison : car elle a assez de clarté pour s'en contenter, & ce seroit perdre le temps inutilement que de se rompre la teste pour la prouver par un long circuit.

SECONDE SECTION.
DE LA LIGNE CIRCVLAIRE.
DEFINITIONS.

XII. LA ligne que décrit sur un plan l'une des extrémitez d'une ligne droite, son autre extrémité demeurant immobile, s'appelle *circulaire*, ou *circonference*.

XIII. ET l'espace que décrit toute la ligne s'appelle *cercle*.

XIV. LE point immobile, *centre*, qui ne peut pas n'estre point également distant de chaque point de la circonference, puisque c'est toûjours la même ligne qui a fait cette distance.

XV. ET ainsy il est bien clair que toutes les lignes du centre à la circonference sont égales.

XVI. CES lignes s'appellent *rayons* ou *demydiametres*.

XVII. LES lignes menées d'un point de la circonference à un autre s'appellent *cordes*.

XVIII. SI elles passent par le centre, elles s'appellent *diametres*, & elles coupent le cercle & la circonference en deux parties égales, qui s'appellent *demy-cercles* & *demycirconferences*.

XIX. LA partie de la circonference qui se trouve entre les extremitez d'une corde s'appelle *arc*. Mais lors que cette corde est moindre qu'un diametre, il y a deux portions de circonferences qui se terminent aux extremitez de cette corde. L'une plus grande que la demycirconference, & l'autre plus petite. Or quand on parle de l'arc d'une corde, si on n'ajoûte autre chose, on entend celuy qui n'est pas plus grand que la demycirconference. Ce qui soit bien remarqué.

XX. TOUTE circonference se conçoit divisée en 360. parties égales qui s'appellent *degrez*.

XXI. CHAQUE degré en 60 minutes premieres qu'on appelle simplement *minutes* : Chaque minute en 60 *secondes*, & chaque seconde en 60 *troisiemes* : & ainsi à l'infini.

PREMIER AXIOME OU DEMANDE.

ON demande qu'ayant un intervale donné, on puiſſe XXII.
décrire une circonference de cet intervale. Ce qu'on ne peut douter eſtre poſſible, puis qu'il ne faut pour cela que concevoir que la ligne qui joindra les deux points de cet intervale ſe remüe, l'une de ſes extremitez demeurant immobile.

La machine la plus ordinaire dont on ſe ſert pour la décrire ſur le papier s'appelle, *compas*, qui a deux jambes, qui eſtant ouvertes plus ou moins ſelon l'intervale donné, l'une demeurant immobile, l'autre décrit la circonference.

SECOND AXIOME OU DEMANDE.

OR comme il faut ſuppoſer dans cette operation que XXIII.
les deux jambes du compas gardent toûjours la même diſtance entr'elles, il n'eſt en rien plus difficile aprés avoir meſuré la longueur d'une ligne donnée par l'ouverture du compas, de ſe ſervir de cette même ouverture pour décrire ailleurs une ligne égale à celle-là, ou retrancher d'une autre ligne une portion qui ſoit égale à cette premiere. C'eſt pourquoy on peut hardiment mettre ce Probleme entre les demandes qui n'ont point beſoin d'eſtre prouvées.

Décrire une ligne égale à une ligne donnée, ſoit par le retranchement d'une autre ligne, ſoit par tout ailleurs.

TROISIEME AXIOME.

LA maniere dont l'on conçoit que ſe forme la ligne cir- XXIV.
culaire eſt ſi ſimple, qu'il eſt impoſſible de concevoir qu'elle ne ſoit pas par tout dans une entiere uniformité. Et de là il s'enſuit que les Theoremes ſuivans ſont naturellement connus.

Les circonferences qui ſont décrites d'un égal intervale ſont égales.

Et celles qui ſont décrites d'un plus petit intervale ſont plus petites.

Et d'un plus grand ſont plus grandes.

QUATRIEME AXIOME.

LES degrez de circonferences égales ſont égaux, puis XXV.
que ce ſont aliquotes pareilles de grandeurs égales. Et par

la même raison les degrez d'une petite circonference sont plus petits que les degrez d'une plus grande.

CINQUIEME AXIOME.

XXVI. DANS un même cercle les cordes qui soûtiennent des arcs égaux sont égales, & les arcs qui sont soûtenus par des cordes égales sont égaux. C'est une suite évidemment necessaire de l'entiere uniformité de la circonference. Il ne faut qu'attention pour en appercevoir la certitude.

Il en est de même dans deux cercles égaux que dans le même cercle.

SIXIEME AXIOME.

XXVII. TOUTES les lignes tirées du centre qui sont plus petites que les rayons du cercle, ont leur extremité au dedans du cercle : que si elles sont plus longues, elles l'ont au dehors ; si égales, dans la circonference même.

SEPTIEME AXIOME.

XXVIII. LORS qu'on a d'une ligne, l'une des extremitez donnée de position, & sa longueur, son autre extremité doit estre dans la circonference du cercle décrit par un intervale de cette longueur donnée.

TROISIEME SECTION.

DES LIGNES DROITES PERPENDICVLAIRES.

DEFINITIONS.

XXIX. NOUS avons déja dit qu'une ligne droite n'en peut couper une autre droite qu'en un point. Mais la coupant elle le peut faire en deux manieres.

La premiere est, en ne panchant point plus vers un costé de la ligne coupée, que vers l'autre.

Et alors elles sont dites se couper *perpendiculairement* & estre *perpendiculaires* l'une à l'autre.

La seconde, en panchant plus vers un costé que vers l'autre, & alors elles sont dites se couper *obliquement* & estre *obliques* l'une au regard de l'autre.

Mais il ne faut pas confondre l'obliquité qui convient à une ligne droite par rapport à une autre ligne, avec la curvité qui convient à la ligne par sa nature même, & constitue une espece de ligne opposée à la ligne droite.

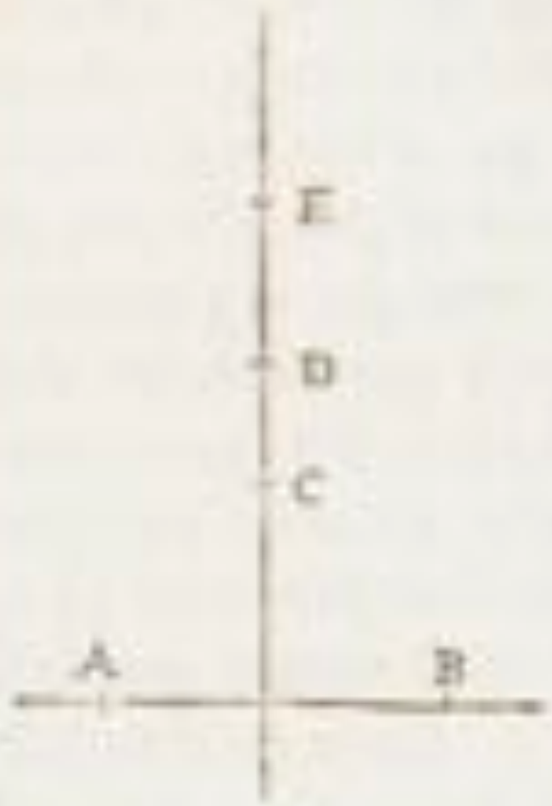
AVERTISSEMENT.

QUOY *que deux lignes qui se coupent, se coupent & soient coupées mutuellement, neanmoins afin qu'on ne les confonde par, nous appellerons l'une coupée & l'autre coupante.* XXX.

DEFINITION PLVS EXACTE DE LA PERPENDICULAIRE.

POUR former une notion plus distincte de deux lignes perpendiculaires, on les peut definir en cette sorte. XXXI.

Lors que deux points de la ligne coupée estans pris également distans de l'un des points de la ligne coupante, tout autre point de la ligne coupante se trouvera aussy estre également distant de ces deux points de la ligne coupée, la ligne coupante est perpendiculaire à la coupée, estant bien clair qu'elle ne peut alors incliner plus d'un costé que d'autre.



AXIOME. XXXII.

POUR montrer que tous les points de la ligne coupante sont également distans de deux de la ligne coupée, il suffit d'en avoir deux dans la ligne coupante dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Car de là il s'ensuivra que tous les autres le seront aussy.

IE *pretens que la seule consideration de la nature de la ligne droite fait voir la verité de cette proposition, & que sans cela il est impossible de garder dans la Geometrie l'ordre naturel des choses.*

Car 1. puisque la position de la ligne droite ne dépend que de deux points, & qu'en ayant donné deux points, elle est toute donnée, c'est à dire que la position de tous les autres points est determinée, il est visible que la position de ces deux points de la ligne coupante, dont on suppose que chacun est également distant de deux points de la ligne coupée, determine tous les autres à en estre aussy également distans.

2. S'il y en avoit quelqu'un qui approchast plus de l'un des points que de l'autre, la ligne seroit necessairement courbée de ce costé là.

3. Il n'y auroit point de raison pourquoy il s'approcheroit plutost d'un costé que de l'autre, ny pourquoy il s'approcheroit de tant plutost que de tant. Car la position de ces deux points donnez qui determine tous les autres points de la ligne, ne les peut determiner qu'à une égalité de distance, puis qu'ils n'ont pour eux mesmes que cette determination là.

4. Tous les Geometres semblent assez convenir de l'évidence de cette proposition, puisque dans la solution de tous les problemes qui regardent les perpendiculaires, ils ne font autre chose que chercher deux points dans la ligne coupante, dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Et ainsi quelque circuit qu'ils cherchent pour montrer que leur probleme est resolu par là, il est clair neanmoins que dans la nature des choses ce n'est que cela seul qui l'a resolu.

5. Quoy qu'il en soit, je soûtiens que quiconque voudra agir de bonne foy reconnoîtra que considerant les choses avec attention, il luy est impossible de concevoir que cela puisse estre autrement, & qu'il repugne à l'idée que nous avons naturellement de la ligne droite, que deux de ses points estans posez directement, comme nous avons dit, sur une autre ligne, quelqu'un des autres s'écarte ou à droit ou à gauche, & s'approche ainsy plus prés de l'un des costez de la ligne.

Or il me semble tres inutile de chercher bien loin & par de longs détours des preuves d'une chose dont il nous est impossible de douter, pour peu que nous y voulions faire attention.

6. Ce qui doit faire rejetter le scrupule qu'on pourroit avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle même, c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses & employer des triangles pour demonstrer les proprietez des lignes, c'est à dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à la veritable methode.

Soit donc, de justice ou de grace, nous demandons qu'on nous accorde cette proposition, qui donne un moyen tres facile de

de demonſtrer les Problemes ſuivans ſans ſe ſervir des triangles comme fait Euclide.

PREMIER PROBLEME.

D'UN point donné hors une ligne donnée tirer une perpendiculaire ſur cette ligne: on ſuppoſe que cette ligne ſoit prolongée s'il en eſt beſoin, & que le point donné ne ſe puiſſe pas rencontrer dans la ligne prolongée, car alors il ne ſeroit pas proprement hors cette ligne. XXXIII.

Soit le point *k* & la ligne ς de *k* pris pour centre, décrire un cercle qui coupe ς, & par conſequent y marque deux points comme *m* & *n*, également diſtans de *k*, puiſque *m k*, & *n k* ſeront rayons du même cercle. Cela fait, décrivant deux cercles égaux d'*m* & d'*n* qui s'entrecoupent par tout ailleurs qu'en *k*, comme en *b*, la ligne qui joindra *b* & *k* ſera perpendiculaire à la ligne ς, ce qu'il falloit faire. Car *k* & *b* ſont chacun également diſtans des deux points de ς, *m* & *n*, & par conſequent tous les autres en ſeront auſſi également diſtans par la precedente, & ainſy la ligne ſera perpendiculaire par la definition.

SECOND PROBLEME.

D'UN point donné dans une ligne élever un perpendiculaire. XXXIV.

Soit le point *k* dans la ligne ς, qui eſtant pris pour centre, le cercle qu'on décrira coupera la ligne ς, prolongée s'il en eſt beſoin, en deux points comme *m* & *n*, qui ſeront également diſtans de *k*, l'interſection de deux cercles égaux qui auront *m* & *n* pour centre donnera

M

le point *b*, auquel il faudra mener la ligne du point *k* pour faire la perpendiculaire que l'on cherche.

C'eſt la meſme preuve que du precedent. Car *k* & *b* ſeront chacun également diſtans de *m* & *n*.

TROISIEME PROBLEME.

XXXV. COUPER une ligne donnée en deux parties égales.

Soit la ligne donnée *m n*, en tirant des deux extremitez *m*, *n*, pris pour centres deux cercles égaux qui s'entrecoupent en deux points comme *k* & *b*, où tirant des mêmes centres deux arcs de cercles égaux qui s'entrecoupent en un point comme en *k*, & deux autres arcs de cercles égaux ou inégaux aux premiers, mais égaux entr'eux, qui s'entrecoupent auſſy en autre point comme en *b*, la ligne *k b* prolongée autant qu'il ſera beſoin coupera la ligne *m n* en deux parties égales. Car ſi le point de la ſection eſt *z* comme il eſt dans la ligne *b*, *k* qui eſt perpendiculaire à la ligne *m n*, parce que *b* & *k* ſont également diſtans de *m* & *n*, *z* auſſi en ſera également diſtant, & par conſequent *m z* ſera égal à *z*, *n*. Ce qu'il falloit démonſtrer.

PREMIER THEOREME.

XXXVI. LA perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent eſtre menées d'un point à une ligne.

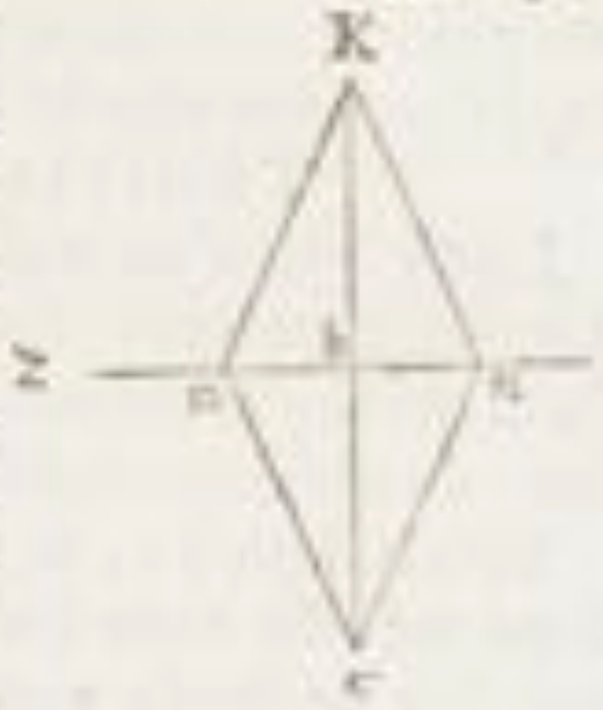
Soit le point k & la ligne *z*, ſur laquelle ayant mené de *k* la perpendiculaire *k b*, & l'ayant prolongée juſques en *c*, en faiſant *b c* égale à *k b*, ſi on tire de *k* d'autres lignes ſur la ligne *z* comme en *m* & *n*, je dis que *k b* eſt plus courte que *k m*, ou *k n*. Car ayant tiré les lignes *m c* & *n c*, je dis que *k m* eſt égale à *m c*, & *k n* à *n c*, puiſque la ligne *z* eſtant perpendiculaire à la ligne *k c*, le point *b* qui eſt commun à ces deux lignes ne peut eſtre comme il eſt éga-

lement distant de *k* & de *c*, que les autres points comme *m* & *n* ne soient aussi chacun également distans de *k* & de *c*.

Or cela estant, il est clair que la ligne *k b c* estant droitte est plus courte que les lignes *k m c*, qui ne sont pas une ligne droitte, & par consequent *k b*, qui est la moitié de *k b c*, est plus courte que *k m*, qui est la moitié de *k m c*.

SECOND THEOREME.

XXXVII. On ne peut élever du même point d'une ligne plus d'une perpendiculaire, ny en mener plus d'une d'un point à une ligne. Le premier est clair de soy-même : car ayant élevé du milieu de la ligne *m n*, la perpendiculaire *b k*, il est visible que si on en vouloit élever une autre du même point *b*, on ne la pourroit tirer que plus vers un costé que vers l'autre, ce qui est directement contraire à la notion de perpendiculaire.



La 2e partie est encore tres manifeste, & se peut neanmoins prouver de cette sorte. Soit mené de *k* sur *m n* la perpendiculaire *k b*, en sorte que *b* soit également distant de *m* & *n*, dont par consequent *k* doit estre aussy également distant : si on menoit de *k* une autre perpendiculaire à un autre point comme à *g*, il faudroit que *g* fust également distant de *m* & de *n*, puisque *k* qui seroit un des points de cette ligne en est également distant. Or cela est impossible, puisque si *g* estoit entre *b* & *m*, il seroit plus prés de *m* que de *n*, & s'il estoit entre *b* & *n*, il seroit plus prés de *n* que de *m*.

PREMIER COROLLAIRE.

XXXVIII. La perpendiculaire est la mesure d'un point hors d'une ligne à cette ligne, & de la ligne à ce point.

Car estant unique & la plus courte de toutes les lignes qui peuvent estre menées d'un point à une ligne, on n'en

pouvoir prendre aucune autre qui fust si propre à mesurer cette distance.

SECOND COROLLAIRE.

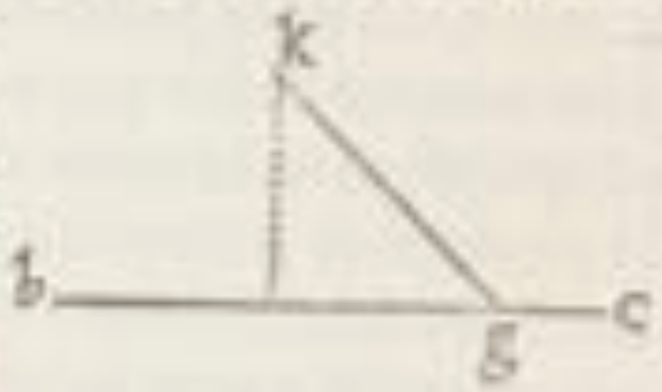
XXXIX. Deux differentes lignes estant perpendiculaires à une même ligne, il est impossible qu'elles se rencontrent, quoy que prolongées à l'infini.

Car si elles se rencontroient elles auroient un point commun, & ainsy il y auroit deux lignes menées d'un même point qui seroient perpendiculaires à une même ligne, ce qu'on a fait voir estre impossible.

TROISIEME COROLLAIRE.

XL. LORS que d'un point hors une ligne on a tiré une oblique sur cette ligne, si du même point on tire une perpendiculaire sur la même ligne, cette perpendiculaire tombera du costé que l'oblique est inclinée sur cette ligne.

Soit la ligne $b\,c$, & le point k dont ait esté tirée l'oblique $k\,g$ qui soit inclinée vers b, je dis qu'il est clair par ce qui a esté dit de la perpendiculaire, que si du même point k on en tire une sur $b\,c$, elle tombera entre b & g, & non pas entre g & c, car il est visible que si elle tomboit entre g & c, tant s'en faut qu'elle fust perpendiculaire, qu'elle seroit encore plus oblique que $k\,g$.

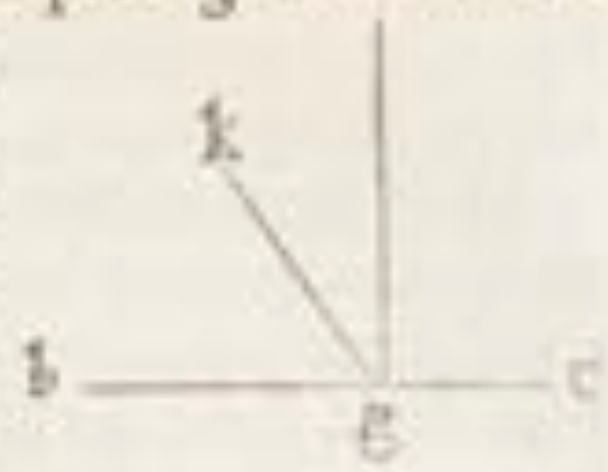


De plus ayant pris dans la ligne $b\,c$ deux points également distans de k, comme pourroit estre b & c (33. 8) le point où tombera la perpendiculaire doit estre également distant de ces deux points ($i\,b$), & au contraire celuy où tombe l'oblique doit estre plus éloigné du point vers lequel elle est inclinée, & par consequent la perpendiculaire doit tomber du costé vers lequel cette ligne est inclinée.

QUATRIEME COROLLAIRE.

XLI. SI d'un point où une oblique coupe une ligne on veut élever une perpendiculaire sur cette ligne, elle s'élevera du costé vers lequel cette oblique n'est pas inclinée.

Soit la ligne *b c* coupée par l'oblique *k g* inclinée vers *b*, si du point *g* on veut élever une perpendiculaire sur *b c*, elle s'élevera du costé de *c*, & non du costé de *b*; c'est à dire qu'elle se trouvera entre les lignes *k g* & *g c*, & non pas entre *k g* & *g b*. Car il est visible que si elle se trouvoit entre *k g* & *g b*, elle seroit encore plus inclinée que *k g*.

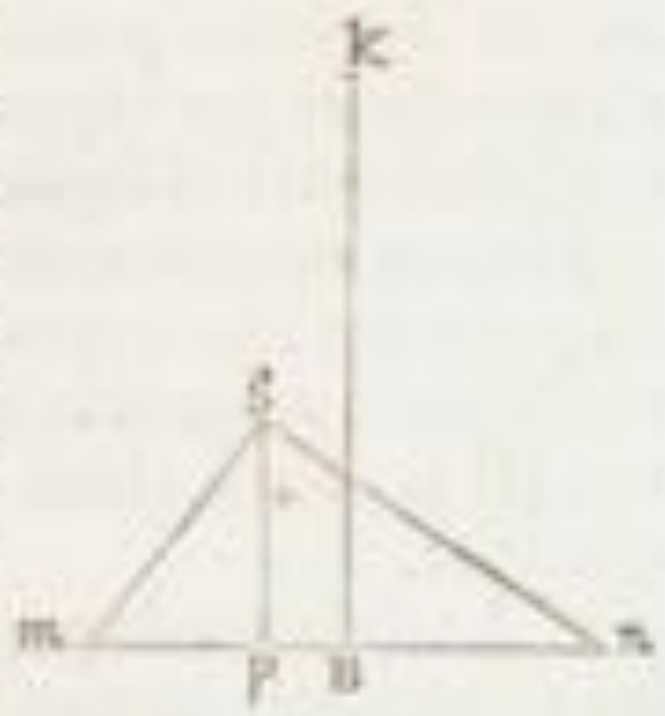


TROISIEME THEOREME.

XLII.

LA perpendiculaire indefinie qui coupe par la moitié la distance de deux points comprend tous les points du même plan dont chacun peut estre également distant de ces deux points.

Soient les points *m* & *n* joints par la ligne *m n*, & la perpendiculaire indefinie *k b*, qui la coupe par la moitié au point *b*, il est clair que tous les points de la ligne *k b* sont également distans de *m n*. Mais je dis de plus, qu'il n'y en peut avoir aucun autre hors cette ligne qui en soit également distant. Car il faudra qu'il soit à l'un des costez comme seroit *g*, d'où tirant une perpendiculaire sur *m n* (par 5.) elle la coupera en un autre point que *b*, comme seroit *p*. Or si *g* estoit également distant d'*m* & d'*n*, il faudroit que *p*, qui seroit un point de la perpendiculaire en fust aussy également distant, ce qui est visiblement impossible, comme on l'a déja veu.



QVATRIEME SECTION.

DES LIGNES DROITTES OBLIQVES.

EXPLICATION DE LA MANIERE DONT ON DOIT CONSIDERER LES LIGNES OBLIQUES POUR LES MIEUX COMPRENDRE.

NOus avons déja dit que lors qu'une ligne droitte en XLIII.

coupe une autre en penchant plus d'un coſté que de l'autre, elle s'appelle oblique au regard de cette ligne qu'elle coupe obliquement.

Mais pour mieux juger de la grandeur de ces obliques en les comparant les unes aux autres, il eſt bon de ne les conſiderer que ſelon le coſté ſelon lequel elles approchent plus de la ligne qu'elles coupent, qui eſt auſſi la façon la plus naturelle de conſiderer ces lignes.

De plus, nous ne regarderons les obliques que comme menées d'un certain point à la ligne qu'elles coupent, & comme terminées à cette ligne.

Cela eſtant ſuppoſé, ce que j'entens par l'obliquité d'une ligne ſur une autre eſt que cette ligne ſoit plus couchée ſur la ligne qu'elle coupe, que ne ſeroit la perpendiculaire menée du même point ſur la même ligne. De ſorte que c'eſt toûjours par rapport à cette perpendiculaire que je conſidere cette obliquité.

Mais ce rapport enferme deux choſes. 1. La diſtance du point qui eſt commun à l'oblique & à la perpendiculaire d'avec le point de la ligne où la perpendiculaire tombe, qui eſt la même choſe que la longueur de cette perpendiculaire.

2. La diſtance du point où l'oblique tombe, d'avec celuy où tombe la perpendiculaire, que j'appelle l'éloignement du perpendicule.

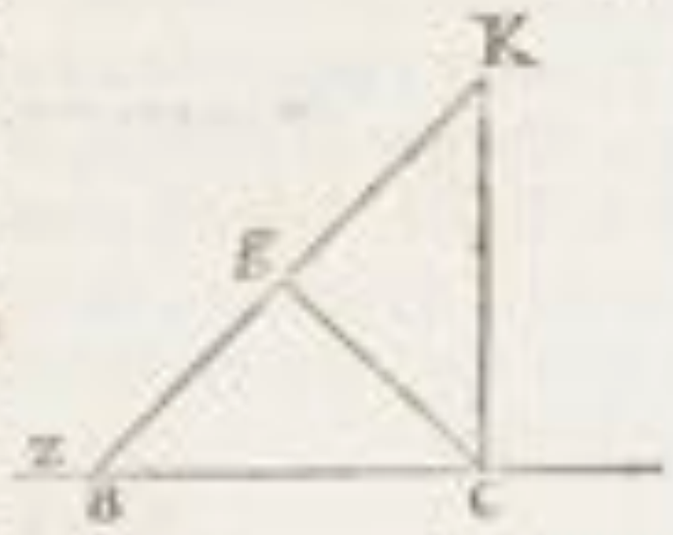
A quoy il faut ajoûter la diſtance du point d'où l'oblique eſt menée de celuy où elle coupe la ligne au regard de laquelle elle eſt appellée oblique: qui eſt la même choſe que la longueur de cette oblique.

Soit par exemple la ligne ξ indefinie, ſur laquelle on faſſe deſcendre du point k au point b l'oblique $k\,b$, & que de k on tire la perpendiculaire $k\,c$, les trois diſtances dont nous venons de parler ſont trois lignes, dont deux (ſçavoir la perpendiculaire $k\,c$, & l'éloignement du perpendicule $b\,c$) ſe coupent perpendiculairement, & la troiſiéme, qui eſt l'oblique $k\,b$, rencontre obliquement l'une & l'autre.

Et ainſi peut eſtre conſiderée tantoſt comme oblique de

l'une, tantoſt comme oblique de l'autre. Mais il faudra alors changer alternativement aux deux autres lignes les noms de perpendiculaire & d'éloignement du perpendicule. Car ſi je conſidere *k b* comme oblique ſur *b c*, *k c* eſt la perpendiculaire, & *b c* l'éloignement du perpendicule. Et au contraire ſi je conſidere *k b* comme oblique ſur *k c*, *b c* ſera la perpendiculaire, & *k c* l'éloignement du perpendicule.

On pourroit auſſy conſiderer *b c* & *k c* comme obliques ſur *k b*, (car comme les lignes ſont mutuellement perpendiculaires, elles ſont auſſi mutuellement obliques.) Mais pour ſuivre noſtre methode il faudroit alors mener une perpendiculaire du point *c* à la ligne *k b*, comme ſeroit *c g*. Et ainſi en conſiderant *b c* comme oblique ſur la ligne *b k*, la perpendiculaire ſeroit *c g*, & l'éloignement du perpendicule *g b*. Mais à moins que de faire cela, *k b* ſeule eſt conſiderée comme oblique, tantoſt au regard de l'une, tantoſt au regard de l'autre.



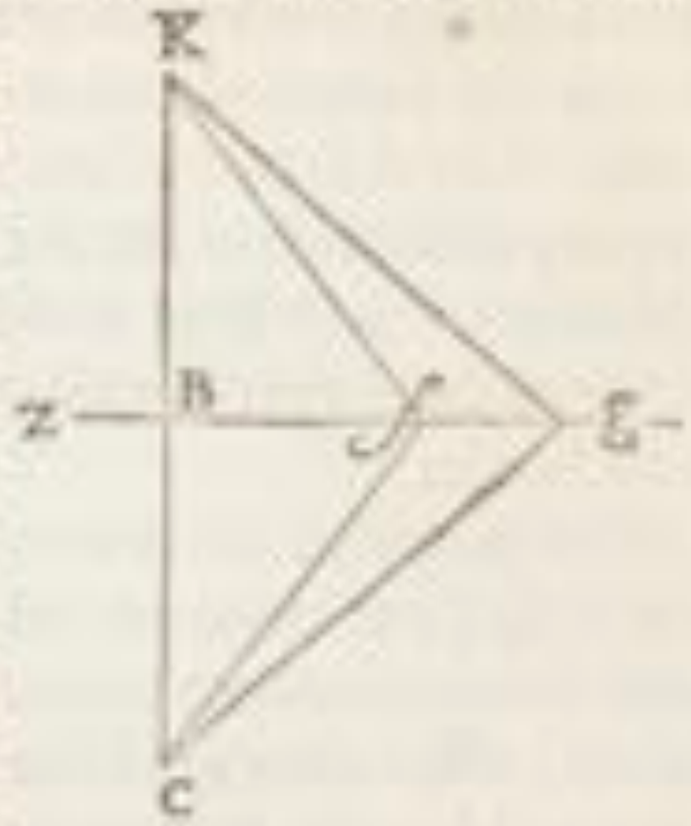
La conſideration de ces trois lignes, *k b* oblique, *k c* perpendiculaire, *b c* éloignement du perpendicule, nous fera comprendre pluſieurs choſes des lignes obliques qui n'ont pû encore eſtre expliquées que par des triangles, ce qui eſt un ordre tout renverſé. Et nous verrons d'une part que dans la comparaiſon des obliques, l'égalité en deux de ces lignes donne l'égalité dans la troiſiéme, & nous examinerons de l'autre quand il n'y a égalité que dans une, quelle eſt l'inégalité des deux autres.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

DE LA MESURE DES LIGNES OBLIQUES.

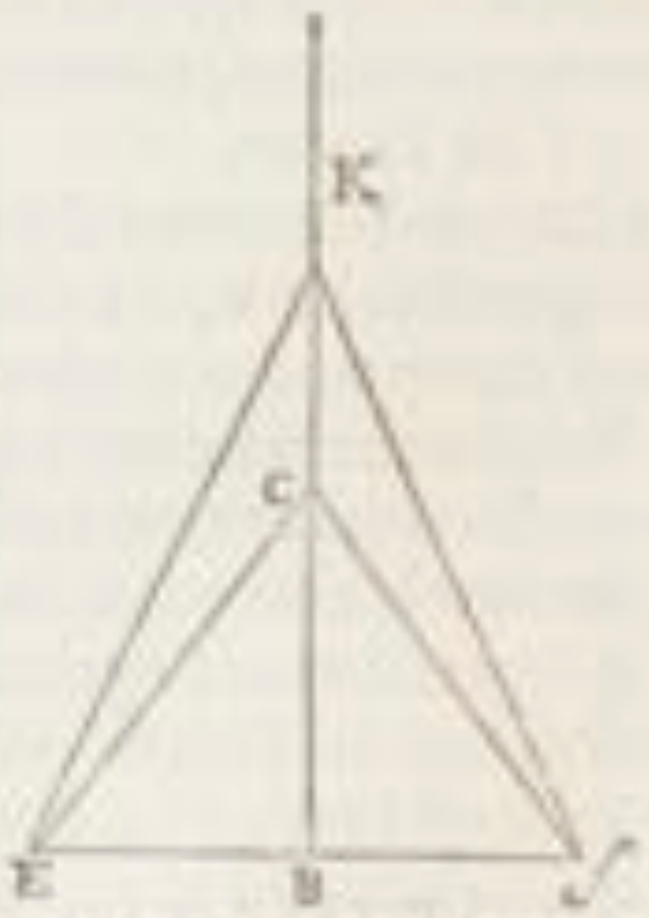
XLIV. Les lignes obliques menées du même point à une même ligne, ſont plus longues, plus elles ſont éloignées du perpendicule.

Soient du point *k* menées sur la ligne *z* la perpendiculaire *k b*, & les obliques *k f* & *k g*. Et soit prolongée *k b* jusques en *c*, en sorte que *b c* soit égale à *k b*. Et soient aussy menées les lignes *f c* & *g c*: je dis premierement que *z* estant perpendiculaire à *k b*, comme le point *b*, qui est commun à l'une & à l'autre est également distant de *k* & de *c*. Donc *k f* est égale à *f c*, & *k g* à *g c*. Or par le moyen d'Archimede Liv. I. *k f c* est plus courte que *k g c*. Donc *k f*, qui est la moitié de *k f c*, est plus courte que *k g*, qui est la moitié de *k g c*. Ce qu'il falloit demonstrer.



COROLLAIRE.

XLV. Il est visible que ce n'est que la même chose si l'on dit que de toutes les obliques qui seront menées au même point d'une même ligne de divers points d'une perpendiculaire à cette ligne pris du même costé, celles qui sont menées des points plus proches de la ligne où tombe l'oblique sont les plus courtes.

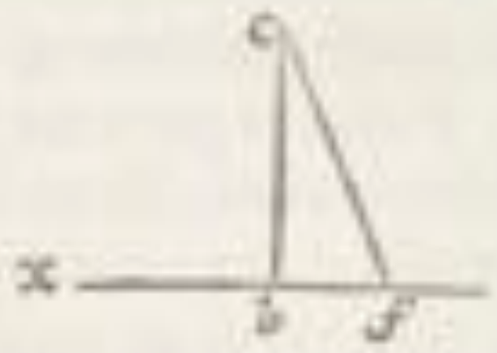


Car il ne faudra alors que tirer d'autres lignes des mêmes points de cette perpendiculaire vers un même point de l'autre costé de la ligne qui coupe cette perpendiculaire également distant de cette perpendiculaire. Si je veux montrer par exemple que la ligne *k f* est plus longue que *c f*, je n'ay qu'à prendre le point *e* autant distant de *b*, que *f* est aussy distant de *b*, & tirer les lignes *k e* & *c e*, & faire ensuite la demonstration precedente.

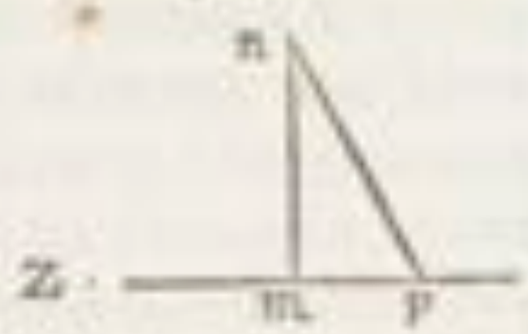
AVERTIS-

AVERTISSEMENT.

C'EST *La même chose pour juger de la grandeur de deux lignes obliques de les considerer comme menées du même point sur une même ligne, ou comme menées de deux points differens sur la même ligne, ou deux differentes lignes, pourveu que l'on suppose que chaque point est également distant de la ligne à laquelle on mene l'oblique. Car il est visible qu'il n'y a que cette distance qui y fasse quelque chose.* XLVI.



Il est vray qu'il faut supposer pour cela que si l'on a d'une part la ligne x, & de l'autre la ligne z, & qu'on eleve d'un point de chacune, comme de b & d'm, une perpendiculaire, & que dans chaque perpendiculaire on prenne un point comme c & n, qui soit de part & d'autre également distant du point de la section b & m; & qu'on prenne aussi dans chaque couple x & z un point comme f & p, également distant de part & d'autre du même point de la section b & m, les obliques cf & np sont égales.



Mais la verité de cette supposition est naturellement connuë, & si on la peut contester de paroles, comme les Pyrrhoniens ont fait voir qu'il n'y a rien qu'on ne puisse contester en cette maniere, il est certain au moins qu'il est impossible à tout esprit raisonnable d'en avoir interieurement le moindre doute, ce qui est la plus grande certitude qu'on doive desirer dans les sciences.

Neanmoins si on en veut estre convaincu par une preuve grossiere & materielle, on peut se servir de celle dont Euclide prouve que deux angles estant égaux, & ayant les costez égaux aux costez, la baze est égale à la baze; qui est qu'il faut mettre ces angles l'un dessus l'autre, en sorte que les extremitez des costez se trouvent ensemble: d'où il conclud que les bazes sont aussi couchées l'une sur l'autre, ce qu'on appelle en Latin congruere, & par consequent égales. Car on peut de même icy s'imaginer que la ligne z est couchée sur la ligne x, en sorte que

le point m *eſt immediatement ſur le point* b, *& la perpendiculaire ſur la perpendiculaire : D'où il arrivera neceſſairement que le point* n *ſera ſur le point* c, *& le point* p *ſur le point* f, *& qu'ainſi les obliques* n p *&* c f *ſeront couchées l'une ſur l'autre, & auſſy entierement égales.*

Voilà ce qui peut ſatisfaire ceux qui aiment mieux ſe ſervir dans la connoiſſance des choſes, de leur imagination que de leur intelligence : ce que je trouve fort mauvais, parce que l'eſprit ſe rend par là incapable de bien comprendre les choſes ſpirituelles, s'accoûtumant à ne recevoir pour vray que ce qu'il peut concevoir par des fantômes & des images corporelles : au lieu qu'il y a beaucoup de choſes que nous ſçavons tres certainement ſans que nous les puiſſions concevoir par l'imagination, comme quand je dis : Ie penſe, donc je ſuis, *nul fantôme ou image corporelle ne me peut ſervir à me faire concevoir ce que j'entends par ces mots ;* je penſe, je ſuis.

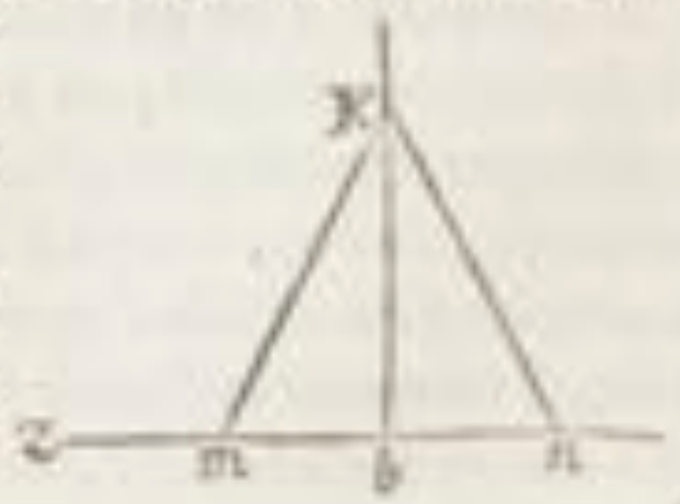
EGALITE' DANS LES LIGNES OBLIQUES.

XLVII. CETTE ſeule propoſition avec ſon corollaire & l'avertiſſement nous donne moyen de prouver facilement pluſieurs theoremes touchant les lignes obliques. Et voicy premierement ceux de l'égalité.

PREMIER THEOREME.

XLVIII. DES trois lignes que nous avons dit ſe devoir conſiderer dans les lignes obliques ; la perpendiculaire, l'éloignement du perpendicule, & l'oblique même ; deux ne peuvent eſtre égales que la troiſiéme ne le ſoit auſſy. Ainſy 1. S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques ſont égales.

Soient du point *k* de la ligne *k b*, qui coupe perpendiculairement la ligne x en *b*, menées les deux obliques *k m* & *k n*, la perpendiculaire eſtant la même, & par conſequent égale à ſoy même. Si *b m*, qui eſt l'éloignement du perpendicule de l'oblique *k m* eſt égal à *b n*, qui eſt l'éloignement du



perpendicule de l'oblique *k n*, *k m* & *k n* seront égales. Car les points *m* & *n* ne peuvent estre également distans de *b*, l'un des points de la perpendiculaire *k b*, qu'ils ne soient aussi également distans de tout autre point de cette perpendiculaire, & par consequent de *k*. Donc *k m* est égale à *k n*.

PREMIER COROLLAIRE.

XLIX. On ne peut mener d'un point à une ligne que deux lignes égales. Car on n'en peut mener qu'une seule perpendiculaire. Et pour les obliques, elles ne peuvent estre égales que les deux points où elles coupent cette ligne ne soient également distans du point où tombe la perpendiculaire. Or il ne peut y avoir que deux points, l'un d'un costé & l'autre de l'autre, qui soient également distans de ce point. Car tout autre en sera, ou plus proche ou plus éloigné, comme il est évident. Donc, &c.

SECOND COROLLAIRE.

Il est impossible qu'un même point soit également distant de trois points d'une ligne droite.

C'est la même chose que la precedente differemment énoncée.

SECOND THEOREME.

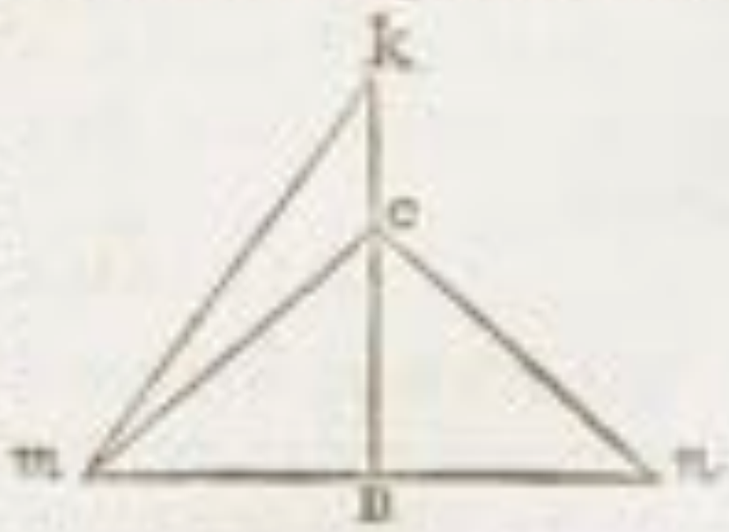
L. S'IL y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.

Soit fait comme devant. Si *k m* est égale à *k n*, *b m* sera égale à *b n*. Car si *m* estoit plus éloignée de *b* que n'est *n*, l'oblique *k m* seroit plus éloignée de la perpendiculaire, & par consequent plus longue par la proposition principale.

TROISIEME THEOREME.

LI. S'IL y a égalité dans l'oblique & dans l'éloignement du perpendiculaire, il y en a dans la perpendiculaire.

Car si la perpendiculaire de l'une estoit plus grande que la perpendiculaire de l'autre, c'est comme si des deux obliques qui se terminent en *m* & *n* l'une descendoit du point *k* de la



perpendiculaire *k b*, & l'autre du point *c* plus bas que *k* de cette même perpendiculaire *k b*, de sorte que l'une seroit *k m*, & l'autre *c n*.

Or si cela estoit, *c n* seroit plus petite que *k m*, par 44 & 45. *sup.* ce qui est contre l'hypothese.

QUATRIEME THEOREME.

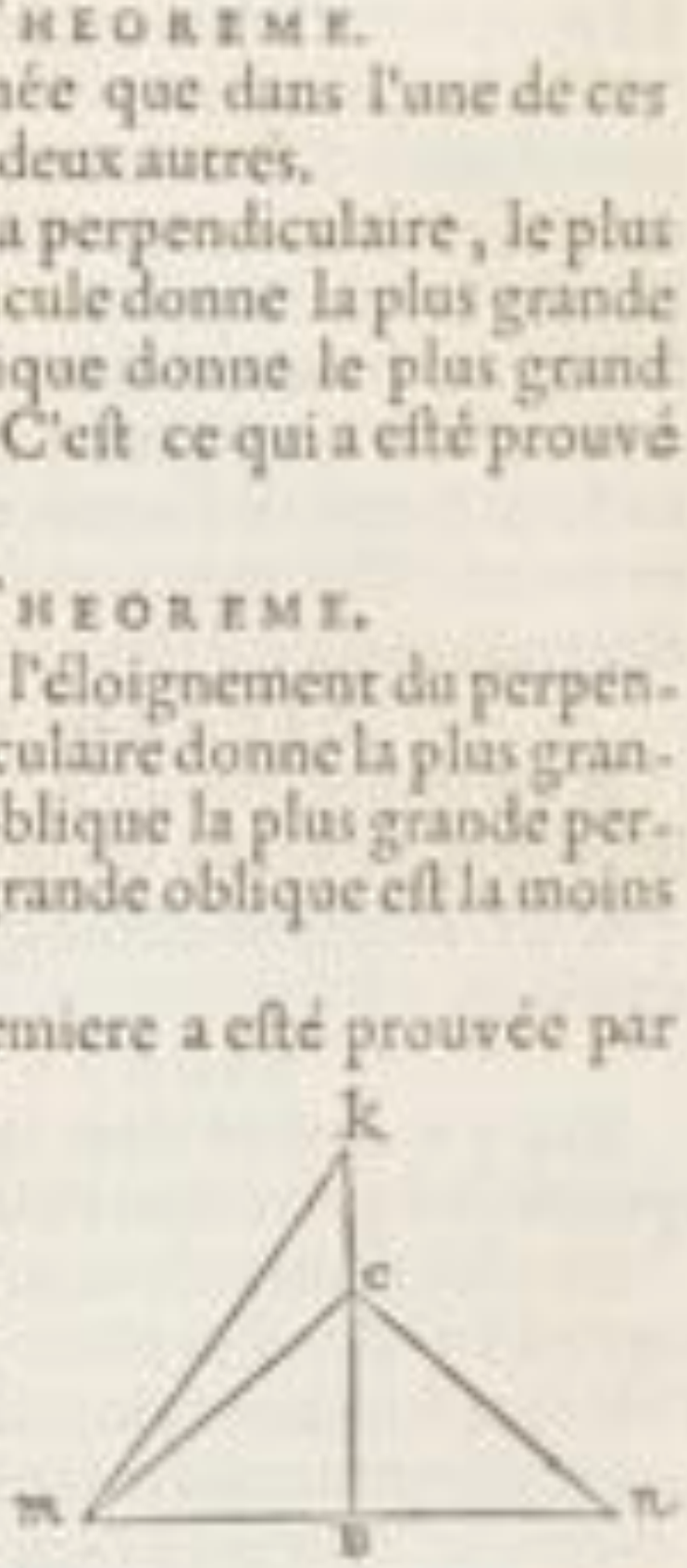
L. II. QUAND il n'y a égalité donnée que dans l'une de ces trois lignes, voicy ce qui est des deux autres.

1. S'il n'y a égalité que dans la perpendiculaire, le plus grand éloignement du perpendicule donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique donne le plus grand éloignement du perpendicule. C'est ce qui a esté prouvé dans la proposition principale.

CINQUIEME THEOREME.

L. III. 2. S'IL n'y a égalité que dans l'éloignement du perpendicule, la plus grande perpendiculaire donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique la plus grande perpendiculaire; & alors la plus grande oblique est la moins oblique.

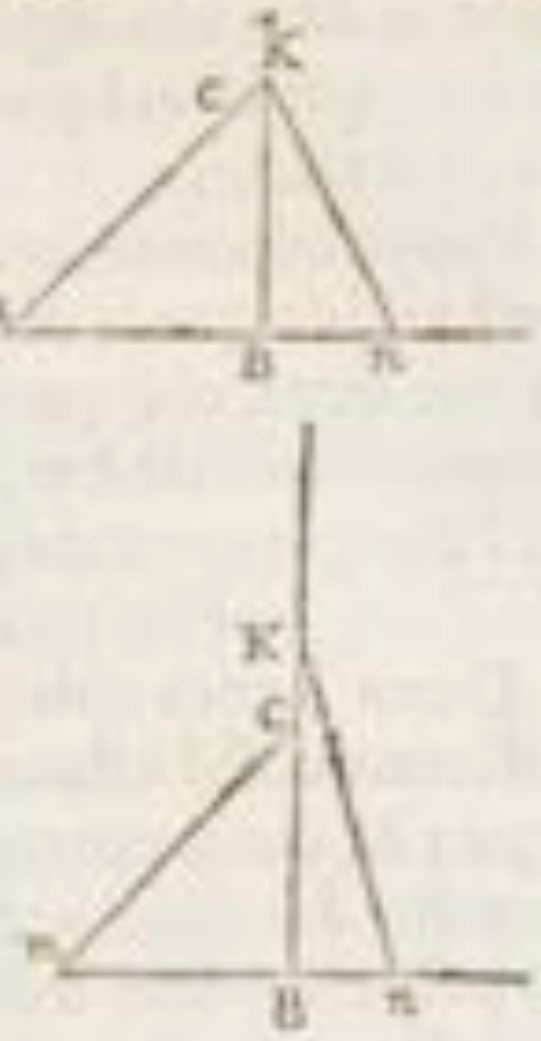
Il y a deux parties dont la premiere a esté prouvée par le corollaire de la proposition fondamentale; & pour l'autre, elle en est une suite évidente. Car si deux obliques se terminent au même point d'une ligne comme *k m*, & qu'elles soient menées de deux points differens de la même perpendiculaire, comme de *k* & de *c*, il est clair que *c m* est plus couchée sur *m b* que *k m*. Or c'est la même chose, si ayant pris *n* autant distant de *b* que l'est *m* on tire *c n* au lieu de *c m*.



SIXIEME THEOREME.

L. IV. S'IL n'y a égalité que dans la longueur des obliques, le plus grand éloignement du perpendicule donnera une moindre perpendiculaire, & une moindre perpendicu-

laire donnera un plus grand éloignement du perpendicule. Cela eſt clair par les theoremes precedens.



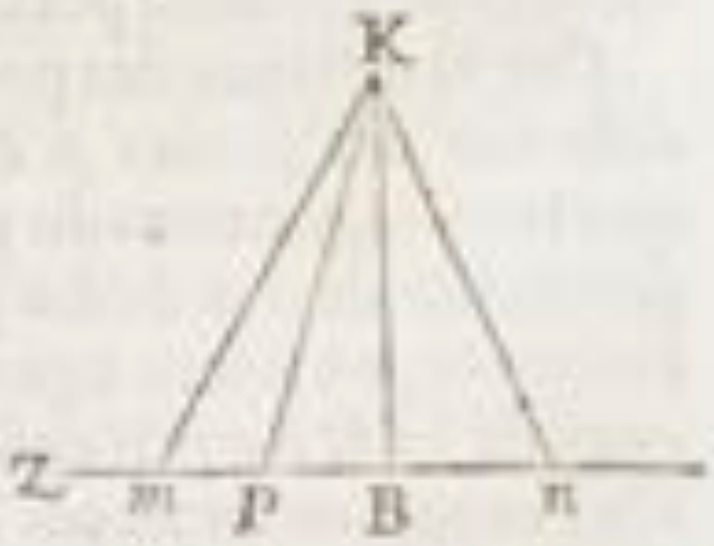
Car ſoit la perpendiculaire *k b* ſur la ligne *m n*, ſi on tire l'oblique *c m*, & qu'on prenne un autre point plus prés de *b*, comme *n*, il eſt viſible que *c n* ſeroit plus courte que *c m* par le 4e Theoreme, & par conſequent afin qu'on mene à *n* de quelque point de la ligne *k b* une oblique égale à *c m*, il faudra la tirer d'un point plus éloigné de *b* que n'eſt *c*, comme de *k*.

AVERTISSEMENT.

IL *ne doit rien de la diverſe obliquité qu'a la même ligne* L V.
ſur les deux lignes qui peuvent eſtre reciproquement conſiderées comme ſa perpendiculaire & ſon éloignement du perpendicule, comme k b *ſur* b c *&* k c *ſur* k c: *car cela eſt trop facile à juger par ce qui eſt dit.*

SEPTIEME THEOREME.

LORS que deux lignes obliques ſont menées d'un même point ſur une même ligne, la diſtance des deux points de ſection eſt égale à la diſtance du perpendicule de l'une plus ou moins la diſtance du perpendicule de l'autre. *Plus*, ſi les lignes ſont inclinées de different coſté; *moins*, ſi elles ſont inclinées du même coſté. L V I.



Soient menées du point *k* ſur la ligne *z* les deux obliques *k m* & *k n*, inclinées de different coſté, & une autre comme *k p*, inclinée du même coſté que *k m*; il eſt viſible que la perpendiculaire *k b* ſe trouvera entre *k m* & *k n*, mais au delà de *k m* & de *k p*: & ainſy la diſtance entre les points de la ſe-

ction m & n ſera égal à l'éloignement de la perpendicule de $k\,m$, qui eſt $m\,b$ plus l'éloignement du perpendicule de $k\,n$, qui eſt $b\,n$.

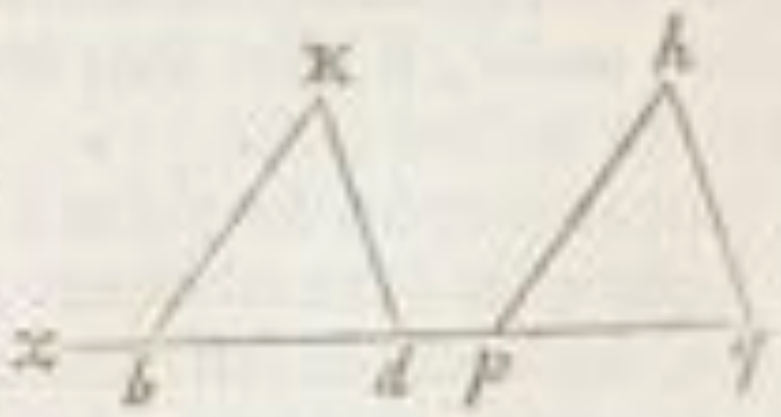
Mais ſi on conſidere $k\,m$, & $k\,p$, inclinée du même coſté, il eſt viſible que la diſtance d'm & p, points de la ſection de ces deux obliques, eſt moindre que l'éloignement du perpendicule de $k\,m$, qui eſt $m\,b$ de la longueur de $p\,b$, qui eſt l'éloignement du perpendicule de l'autre oblique $k\,p$.

HUITIEME THEOREME.

LVII. Deux lignes obliques inégales entr'elles & inclinées de different coſté eſtant menées du même point ſur la même ligne: & deux autres obliques, dont chacune eſt égale à chacune des deux premieres, eſtant auſſy menées d'un autre point ſur une même ligne, & y eſtant auſſy inclinées de different coſté, ſi la diſtance des points de ſection des deux premieres obliques eſt égale à la diſtance des points de ſection des deux dernieres, les deux points dont elles ſont menées ſont également diſtans de la ligne à laquelle elles ſont menées.

Soient ſur la ligne x menées du point k les deux obliques $k\,b$ & $k\,d$, & du point h deux autres obliques $h\,p$ & $h\,q$, en ſorte que $k\,b$ ſoit égale à $h\,p$, & $k\,d$ à $h\,q$, & que les points b & d ſoient autant diſtans que le ſont p & q; je dis que les points k & h ſont également diſtans de la ligne x; ou, ce qui eſt la même choſe, que les perpendiculaires menées de ces deux points ſont égales.

Car la diſtance des points b & d ne peut eſtre égale à la diſtance des points p & q que les éloignemens du perpendicule de $k\,b$ & $k\,d$ pris enſemble, ne ſoient égaux à ceux de $h\,p$ & $h\,q$ pris enſemble: ce qui ne ſeroit pas ſi k eſtoit plus éloigné de x que h. Car alors $k\,b$ eſtant égale à $h\,p$ auroit ſon éloigrement du perpendicule plus petit que ne l'auroit $h\,p$, puis qu'elle deſcendroit d'un point plus éloigné que ne deſcend $h\,p$,



(par 44. *supra*) de même *k d* auroit son éloignement du perpendicule plus petit que *b q*; Et ainsi les deux éloignemens du perpendicule de *k b* & de *k d* pris ensemble seroient plus petits que ceux de *b p* & *b q* pris ensemble.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SIXIEME.

DES LIGNES PARALLELES.

APRES *avoir parlé des lignes droittes qui se rencontrent, soit perpendiculairement, soit obliquement, on peut considerer dans les lignes une autre propriété toute opposée, qui est de ne se rencontrer jamais, & d'estre toûjours également distantes l'une de l'autre, & c'est ce qu'on appelle des lignes paralleles.* I.

DEVX NOTIONS DES LIGNES PARALLELES, L'UNE NEGATIVE ET L'AUTRE POSITIVE.

MAIS ces lignes peuvent estre considerées selon deux notions differentes, l'une negative & l'autre positive. II.

La negative est de ne se rencontrer jamais, quoy que prolongées à l'infini.

La positive, d'estre toûjours également distantes l'une

de l'autre, ce qui conſiſte en ce que tous les points de chacune ſont également diſtans de l'autre: c'eſt à dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre ligne, ſont égales. Et il eſt bien clair que la notion negative eſt une ſuite neceſſaire de la poſitive, ne ſe pouvant pas faire que deux lignes ſe rencontrent ſi elles demeurent toûjours également diſtantes l'une de l'autre.

C'eſt pourquoy c'eſt avoir tout fait que d'avoir trouvé des marques certaines par leſquelles on puiſſe reconnoître que deux lignes ſont paralleles ſelon la notion poſitive, c'eſt à dire qu'elles ſoient tellement diſpoſées, que les points de chacune ſoient également diſtans de l'autre, ce qui ſuppoſe toûjours qu'elles ſoient prolongées autant qu'il eſt neceſſaire, afin que des points de l'une on puiſſe tirer des perpendiculaires ſur l'autre.

C'eſt ce que nous trouverons facilement apres avoir établi quelques Lemmes.

AVERTISSEMENT
POUR LES LEMMES SUIVANS.

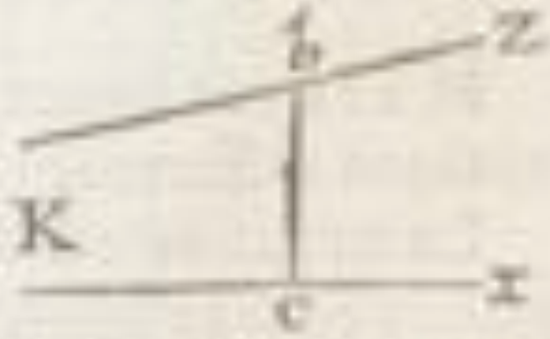
III. *LORS que dans les Lemmes ſuivans je compare diverſes lignes qui coupent les deux mêmes, je ſuppoſe toûjours deux choſes.*

L'une, que ces coupées, dont l'une ſera toûjours nommée x, & l'autre z, ou ne ſe joignent point, ou ſe joignent ſimplement ſans ſe traverſer: c'eſt à dire qu'on les conſidere toûjours comme n'ayant point changé de coſté au regard l'une de l'autre.

L'autre, que ces coupantes ſoient enfermées entre les coupées, & c'eſt auſſi ce que j'entens dans tout ce Livre quand je parle des lignes entre-paralleles.

PREMIER LEMME.

IV. QUAND les deux lignes x & z ſont coupées par *b c*, perpendiculaire ſur x, & oblique ſur z, il arrive trois choſes.



1. Que toutes les autres lignes menées de z perpendiculairement ſur x, ſont obliques ſur z.

2. Qu'elles ſont inclinées ſur z du même coſté que *c b* l'eſt

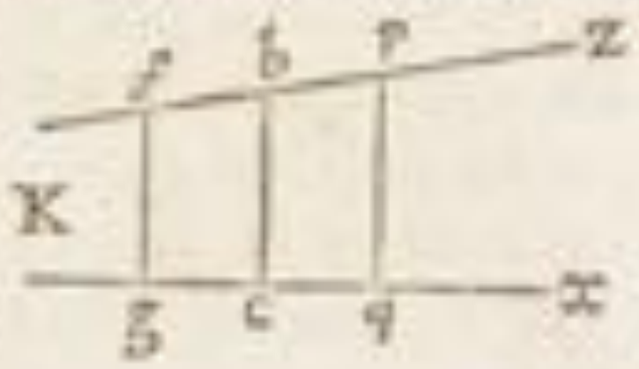
l'eſt auſſi ſur ϛ, lequel coſté j'appelleray *k*.

3. Que les perpendiculaires ſur ϛ ſont obliques ſur *x*, & inclinées ſur *x* du même coſté que *c b* l'eſt ſur ϛ, c'eſt à dire vers *k*.

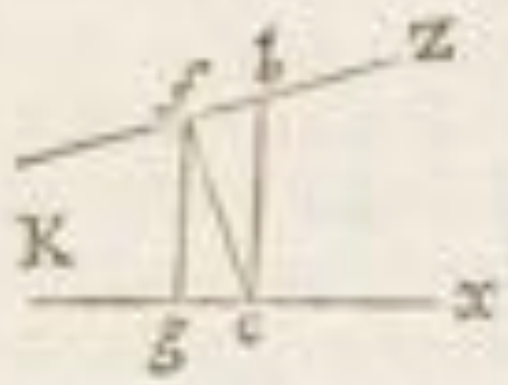
Les deux premieres parties ſe prouvent enſemble, & la preuve de ces deux premieres emporte celle de la 3ᵉ.

PREUVE DES DEUX PREMIERES PARTIES.

Soient pris deux points en la ligne ϛ, *f* & *p* aux deux coſtez de *b*, d'où ſoient menées *f g* & *p q* perpendiculairement ſur la ligne *x*, il faut prouver qu'elles ſeront obliques ſur ϛ, & inclinées vers *k*.

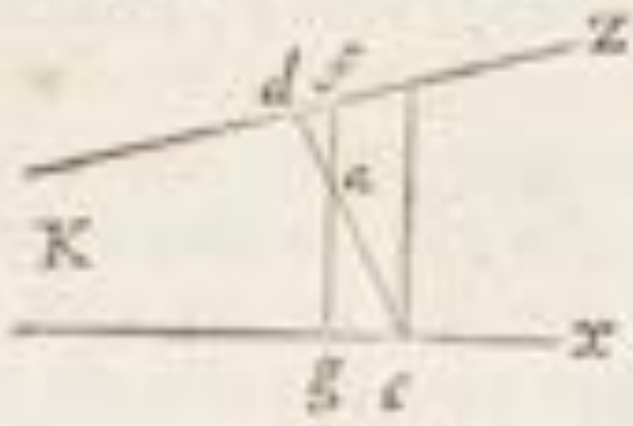


Soit tirée de *c* une perpendiculaire ſur ϛ, elle ſera vers *k*, & non pas vers *p*, par V. 40. Et ainſy le point où cette perpendiculaire tombera ſur ϛ ſera
ou le même point que *f*.
ou au delà de *f*.
ou entre *f* & *b*.

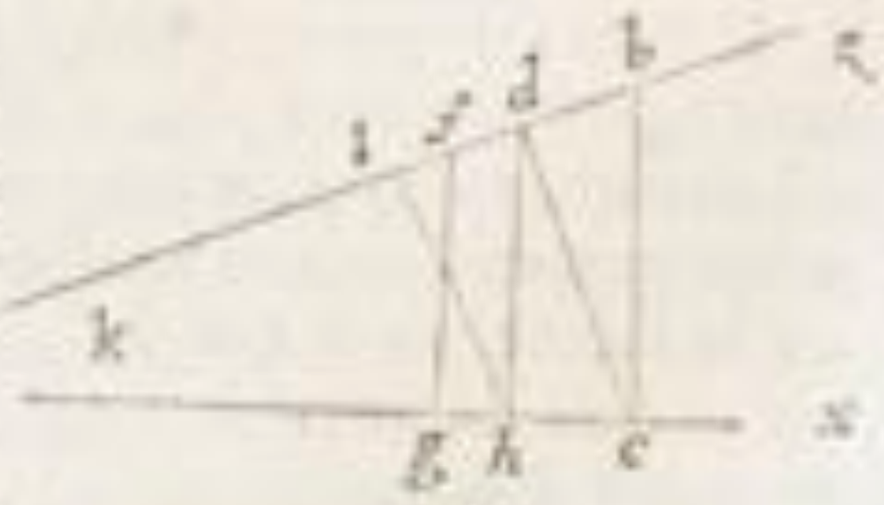


1. CAS. Si c'eſt le même point que *f*, *c f* eſtant perpendiculaire ſur la ligne ϛ, *g f* ſera oblique ſur ϛ, & inclinée vers *k*.

2. CAS. Si ce point eſt au delà de *f*, comme en *c d*, alors *c d* coupera *f g*. Que ce ſoit en *a*. Donc *a d* eſtant perpendiculaire ſur ϛ, *a f* (qui eſt la même choſe que *g f*) ſera oblique ſur ϛ, & inclinée vers *a d*, & par conſequent vers *k*.

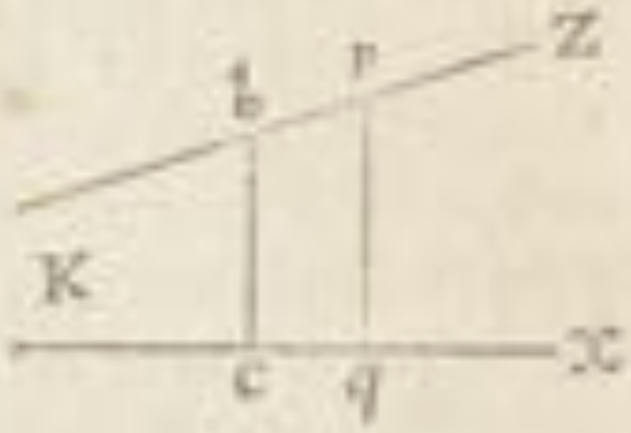


3. CAS. Si *d* eſt entre *f* & *b*, de *d* menant *d h* perpendiculaire ſur *x*, & de *b*, *b l* perpendiculaire ſur ϛ; ſi *b l* ſe termine ou à *f*, ou au delà de *f*, on prouvera de la même ſorte que dans le premier & dans le ſecond Cas, que *g f* eſt oblique ſur ϛ, & inclinée vers *k*.



Et si *b l* n'alloit pas jusques à *f*, on tireroit encore d'*l*, *l m* perpendiculaire sur *x*, & d'*m* une perpendiculaire sur ζ, jusques à ce qu'il y en ait une qui se termine à *f*, ou au delà d'*f*.

On prouve de la même sorte que *g p* est oblique sur ζ, & inclinée vers *k*, excepté qu'on élevera de *b* une perpendiculaire sur la ligne ζ, qui coupera la ligne *x*, au delà de *c*, par V. 41.



Et ainsy tombera ou à *q*.
ou au delà de *q*.
ou entre *c* & *q*.

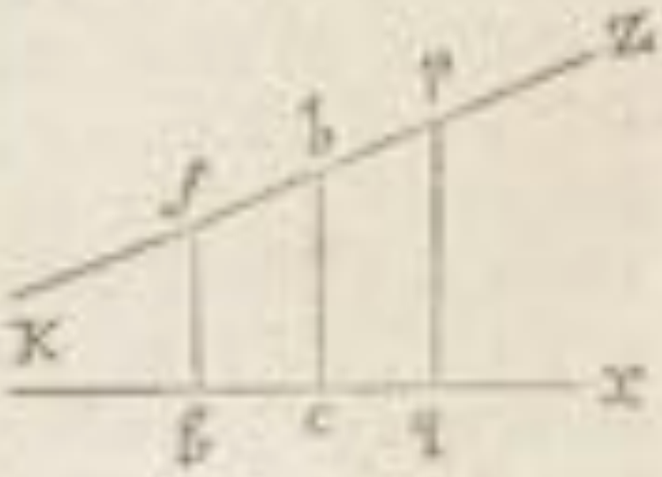
Ainsy en l'une ou l'autre de ces trois manieres, on prouvera que *p q* est oblique & inclinée vers *k*, comme on l'a prouvé de *f g*.

PREUVE DE LA TROISIEME PARTIE.

Elle est compriſe dans la preuve des deux premieres, estant clair que toutes les lignes qui ont esté perpendiculaires sur ζ, ont esté obliques sur *x*, & inclinées vers *k*.

SECOND LEMME.

V. Si les lignes *x* & ζ sont coupées par *b c*, perpendiculaire sur *x*, & oblique sur ζ, & inclinée vers *k*, toutes les lignes menées des points de ζ, perpendiculairement sur *x*, seront inégales, & les plus courtes seront celles qui seront vers *k*, c'est à dire vers le costé où la ligne *b c* est inclinée.

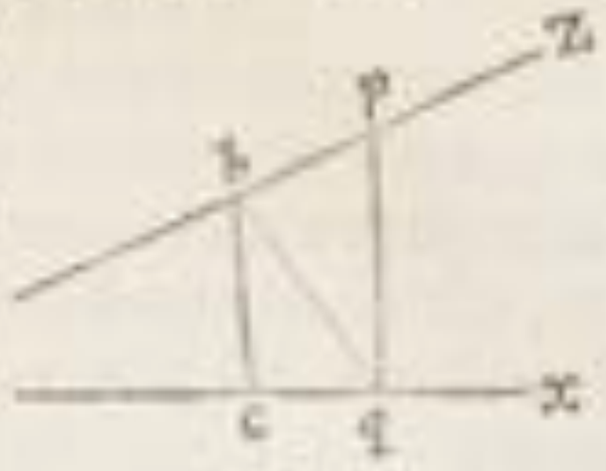


Il suffira de prouver que *b c* estant plus vers *k* que *p q*, sera necessairement plus courte que *p q*.

Soit menée de *q*, une perpendiculaire sur ζ, le point où cette perpendiculaire tombera, sera
ou le même point que *b*.
ou au delà du point *b*.
ou entre *b* & *p*.

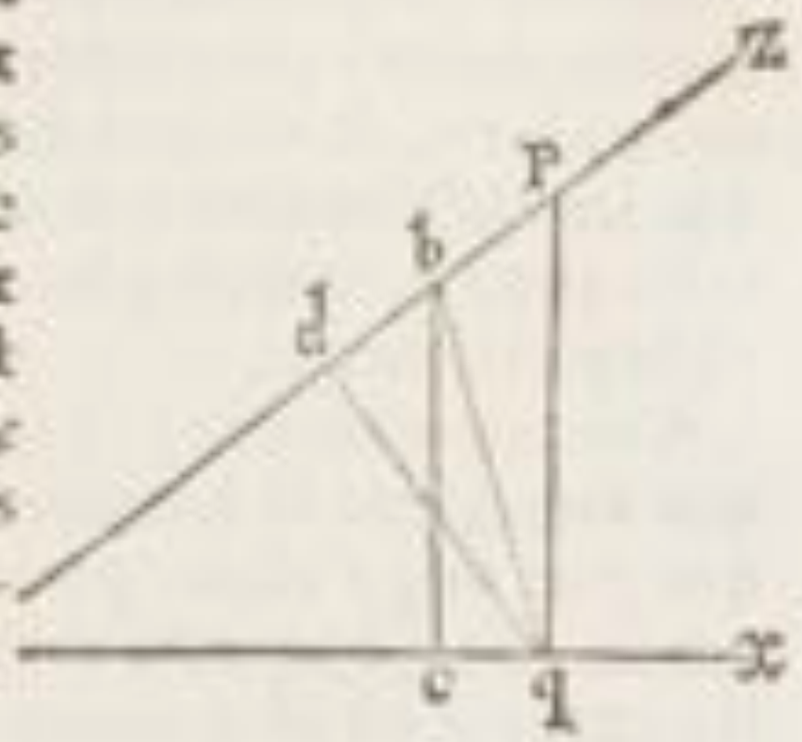
1. CAS. Si c'est le même point que *b*, *b c* estant perpendiculaire sur *x*, & *b q* oblique, *b c* sera plus courte que *b q*.

Or par la même raison $q\,b$ estant perpendiculaire sur z, & $p\,q$ oblique, $q\,b$ est plus courte que $q\,p$.

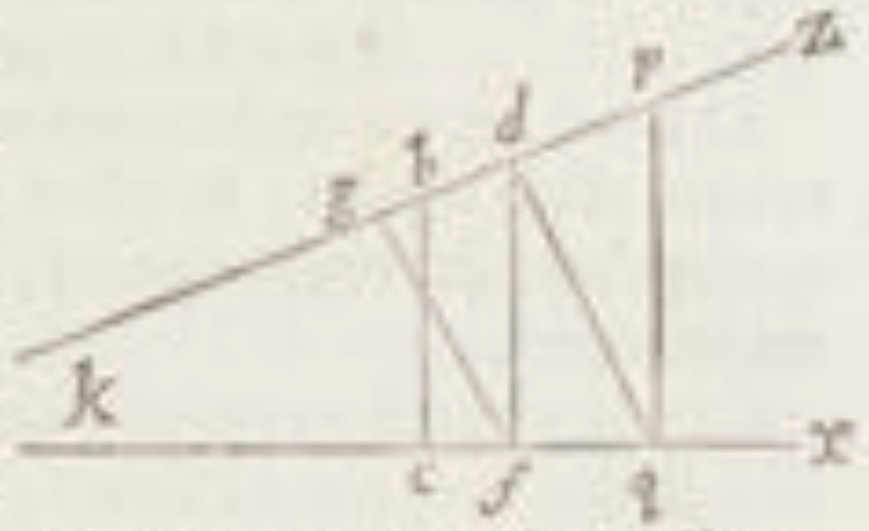


Donc si $b\,c$ est plus courte que $q\,b$, & $q\,b$ plus courte que $p\,q$, $b\,c$ doit estre plus courte que $p\,q$: Ce qu'il falloit demonstrer.

2. CAS. Si ce point est au delà de b, comme en $q\,d$, en tirant $q\,b$, $q\,b$ sera oblique, mais plus proche de la perpendiculaire $q\,d$, que $p\,q$, & par consequent plus courte que $p\,q$. Or $b\,c$ est plus courte que $q\,b$. Donc $b\,c$ est à plus forte raison plus courte que $p\,q$. Ce qu'il falloit demonstrer.



3. CAS. Si d se trouve entre b & p, de d on tirera $d\,f$ perpendiculaire sur x, & $d\,f$, $f\,g$, perpendiculaire sur z, & g se trouvant ou au point b, ou au delà du point b, on prouvera comme dans le premier & le second cas que $b\,c$ est plus courte que $d\,f$, laquelle par le premier cas est plus courte que $p\,q$, & par consequent $b\,c$ est plus courte que $p\,q$. Ce qu'il falloit demonstrer.



Que si $f\,g$ n'alloit pas jusques à b, on tireroit d'autres perpendiculaires sur x, & puis sur z, jusques à ce qu'il y en eust une qui allast jusques à b, ou au delà.

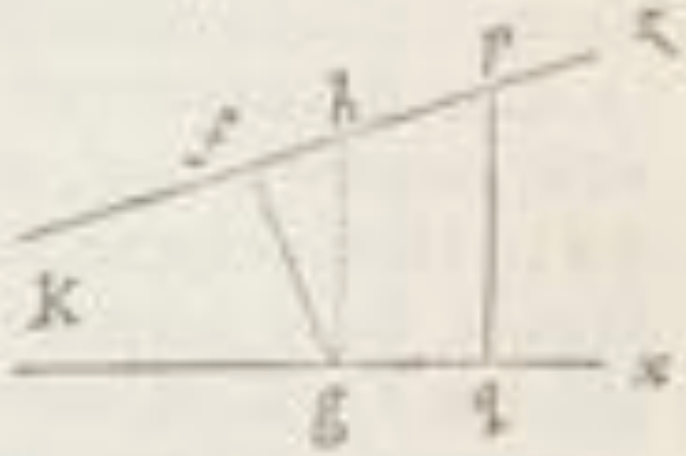
Donc de tous les points de z les perpendiculaires sur x sont inégales, & par consequent tous les points de z sont inégalement distans de x, lors qu'une même ligne est perpendiculaire sur x, & oblique sur z.

COROLLAIRE.

C'EST visiblement la même chose de toutes les lignes perpendiculaires à z, & obliques sur x, comparées ensemble. VI.

TROISIEME LEMME.

VII. En comparant une perpendiculaire sur x, & oblique sur z, avec une perpendiculaire sur z & oblique sur x: si elles ne se croisent point, mais qu'elles soient toutes separées, elles sont necessairement inégales, & la plus courte est celle qui est plus vers le costé vers lequel elles sont inclinées.



Soit $f g$ perpendiculaire sur z, & oblique sur x, & $p q$ perpendiculaire sur x, & oblique sur z, & que leur inclination soit vers k, je dis que $f g$, qui est plus vers k est la plus courte.

Car en élevant de g, $g h$ perpendiculaire sur x, & oblique sur z, par le Lemme precedent $g h$ sera plus courte que $p q$: or $g f$ estant perpendiculaire sur z, elle est plus courte que $g h$, qui est oblique sur la même z, & par consequent $f g$ est plus courte que $p q$.

QUATRIEME LEMME.

VIII. Deux lignes enfermées ne se croisant point, ne sçauroient estre égales, & estre chacune perpendiculaire sur quelqu'une des enfermantes, qu'elles ne le soient sur toutes les deux.

Car si l'une estoit perpendiculaire sur x, & oblique sur z, elle seroit inégale à l'autre, ou par le second Lemme, si l'autre estoit aussy perpendiculaire sur x, ou par le troisiéme, si l'autre estoit perpendiculaire sur z. Il faut donc pour estre égales qu'elles soient perpendiculaires sur l'une & sur l'autre des enfermantes.

CINQUIEME LEMME.

IX. Si une ligne enfermée est perpendiculaire à l'une & à l'autre des enfermantes, toutes les lignes menées de quelque point que ce soit d'une enfermante perpendiculairement sur l'autre, seront égales à cette enfermée, & par consequent entr'elles.

Soit *b f* enfermée entre les lignes *z* & *x*, & perpendiculaire à l'une & à l'autre: & de *c* point quelconque de *z* soit menée *c g* perpendiculaire sur *x* : *b f* & *c g* seront égales, si on ne peut rien retrancher de *b f*, ny y rien ajoûter, que *b f* & *c g* ne soient inégales. Or cela est ainsy.

Car si de *p*, point quelconque au dessous de *b* dans *b f*, on tire *p c*, cette ligne *p c* coupera obliquement *b f*, puisque par l'hypothese *c b* (partie de 5) coupe perpendiculairement *b f*, & que d'un même point on ne peut tirer qu'une seule perpendiculaire à la même ligne.

Donc par le second Lemme *p f* (c'est à dire *b f* retranchée de quelque chose) & *c g* sont inégales.

Ce sera la même chose si on alongeoit *b f* de quoy que ce fust. Car si du point *b* au dessus de *b*, *b f* estant prolongée, on tiroit *b c*, cette ligne par la même raison couperoit obliquement *b f* prolongée.

Donc par le second Lemme *b f* prolongée seroit encore inégale à *c g*.

Donc on ne sçauroit rien retrancher de *b f*, ny y rien ajoûter, que *b f* & *c g* ne soient inégales.

Donc elles sont égales.

SIXIEME LEMME.

Si une ligne est perpendiculaire à deux lignes, toutes les lignes perpendiculaires à l'une de ces lignes seront perpendiculaires à toutes les deux. X.

Car s'il y en avoit une seule qui fust perpendiculaire sur l'une & oblique sur l'autre, il s'ensuivroit par le premier Lemme que toutes les autres lignes perpendiculaires à l'une de ces deux lignes seroient obliques sur l'autre.

Donc s'il y en a une seule qui soit perpendiculaire à toutes les deux, il faudra necessairement que toutes celles qui sont perpendiculaires à l'une des deux enfermantes, le soient à toutes les deux, & par consequent qu'elles soient toutes égales par le precedent Lemme.

SEPTIEME LEMME.

Deux lignes ne se traversant point, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, ou tous inéga- XI.

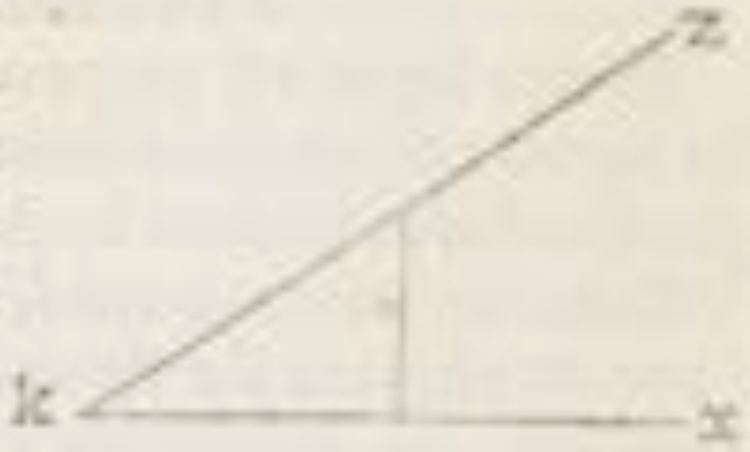
lement distans. Car menans d'un point de z, $b\,c$, perpendiculaire sur x, si $b\,c$ est aussy perpendiculaire sur z, de quelque point de z qu'on mene des perpendiculaires sur x, elles seront égales à $b\,c$ par le 5e Lemme ; & ce sera la même chose de quelque point d'x qu'on mene des perpendiculaires sur z.

Que si au contraire $b\,c$ est oblique sur z, toutes les perpendiculaires des points de z sur x seront inégales, & par consequent tous les points de z inégalement distans d'x. Et il en sera de même des perpendiculaires sur z, menées des points d'x, qui par la même raison seront toutes inégales entr'elles. Et par consequent aussy tous les points d'x seront inégalement distans de z.

Mais remarquez que je ne dis pas qu'un point d'x ne puisse estre aussy distant de z qu'un point de z est distant d'x, mais seulement que tous les points d'x sont inégalement distans de z, & tous les points de z inégalement distans d'x.

HUITIEME LEMME.

XII. Si deux lignes menées d'un même point sont inclinées l'une sur l'autre, tous les points de chacune sont inégalement distans de l'autre, & les plus courtes perpendiculaires des points de chacune sur l'autre seront celles qui sont les plus proches du point de la section.



Car on ne peut tirer d'un point de z une perpendiculaire sur x, qu'elle ne soit oblique sur z, par V. 37. Dont tout le reste suit par le second Lemme.

TROIS PROPOSITIONS FONDAMENTALES DES PARALLELES.

Ces Lemmes donnent trois marques certaines pour reconnoistre si deux lignes sont paralleles selon la notion positive, c'est à dire si tous les points de chacune sont également distans de l'autre ; ce qui sera les trois Propositions suivantes.

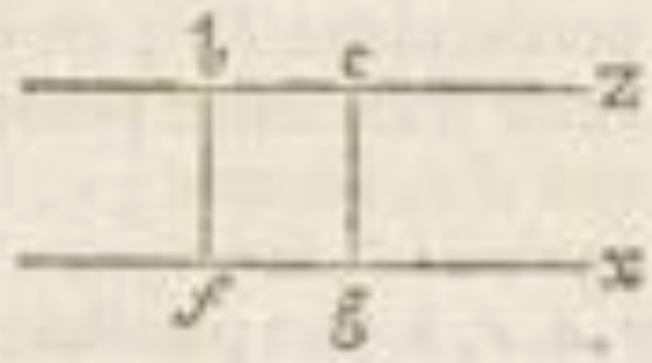
PREMIERE PROPOSITION.

XIII. Si deux lignes sont coupées par une ligne perpendiculaire à l'une & à l'autre, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, & par consequent elles sont paralleles. 5. & 6e Lemmes.

SECONDE PROPOSITION.

XIV. Si deux points d'une ligne sont également distans d'une autre ligne, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, & par consequent elles sont paralleles. 4. & 5e Lemmes.

Soient *b* & *c* deux points de la ligne *z* également distans de la ligne *x*; *b f* & *c g* perpendiculaires sur *x* seront égales.



Donc elles seront aussy perpendiculaires sur *z*, par le 4e Lemme.

Donc toutes les autres lignes menées des points de *z* perpendiculairement sur *x*, seront aussy perpendiculaires sur *z*, & égales à ces deux-là (par le 6e Lemme) Et il en sera de même de celles qu'on menera des points d'*x* perpendiculairement sur *z*.

TROISIEME PROPOSITION.

XV. Deux lignes ne se croisant point & estant enfermées entre deux lignes, ne sçauroient estre égales & estre perpendiculaires, l'une sur une des enfermantes & l'autre sur l'autre, qu'elles ne le soient chacune sur toutes les deux (par le 4e Lemme) & que par consequent ces lignes enfermantes ne soient paralleles (par le 6e Lemme.)

PREMIER COROLLAIRE.

XVI. Toutes les perpendiculaires entre deux paralleles sont égales: car c'est cela même qui les rend paralleles.

SECOND COROLLAIRE.

XVII. Les obliques entre paralleles sont plus longues que les perpendiculaires. Car chaque oblique est plus longue que sa perpendiculaire, & toutes les perpendiculaires sont égales.

PROBLEME.

XVIII. Mener par un point donné une parallele à une ligne donnée.

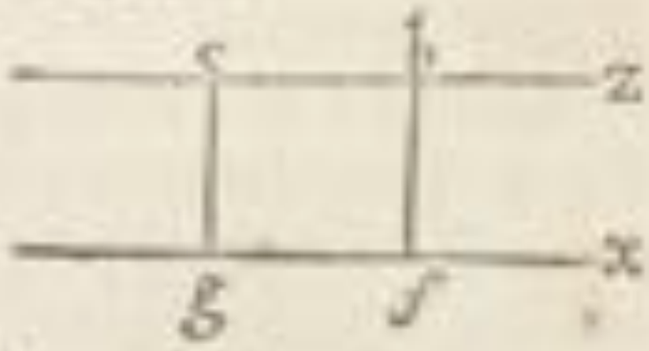
Soit la ligne donnée *x*, & le point donné *b*, on peut en diverses manieres mener par le point *b* une parallele à *x*.

PREMIERE MANIERE.

Du point *b* mener sur *x* la perpendiculaire *b f*, & mener par *b* une perpendiculaire sur *b f*, comme peut estre *m b*, elle sera parallelle à *x* (par la 1re proposition.)

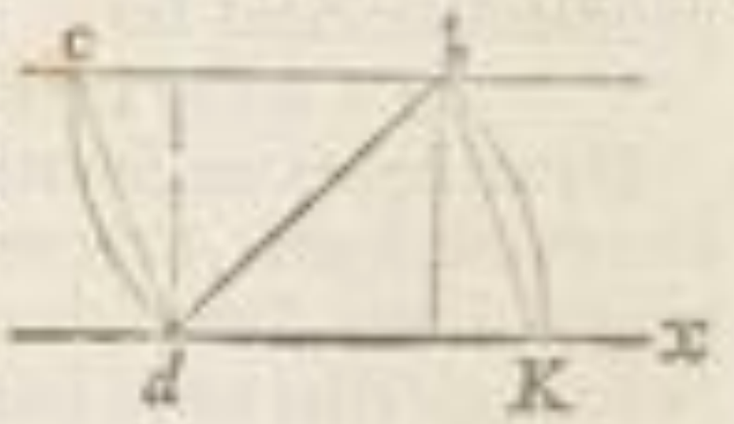
SECONDE MANIERE.

Ayant mené de *b* sur *x* la perpendiculaire *b f*, en élever une autre d'un autre point quelconque d'*x*, comme *g c*, la prenant égale à *b f*, & joignant les points *c*, *b*. *c*, *b*. sera parallele à *x*, par la 2e proposition.



TROISIEME MANIERE, PLUS COURTE ET PLUS FACILE.

Du point *b* tirer sur une oblique quelconque, comme *b d*. Du centre *d*, intervale *b d*, décrire l'arc *b k*, qui coupe *x* en *k*. Puis du centre *b*, intervale *b d*, décrire une portion de circonference dans laquelle on puisse prendre l'arc *d c*, égal à l'arc *b k*; la ligne *c b* sera parallele à *d k*, c'est à dire à *x*.



Car les deux arcs *b k*, & *d c*, estant égaux & de cercles égaux, les cordes de ces arcs seront égales.

De plus *b c*, & *d k*, sont égales aussy, parce que ce sont rayons de cercles égaux.

Donc *d b*, estant égale à elle même, les trois lignes d'une part *d b*, *d c*, *c b*, & les trois de l'autre *b d*, *b k*, *d k* sont égales chacune à chacune.

Donc le point *d* est autant éloigné de la ligne *c b*, que le point *b*, de la ligne *d k*, par V. 57.

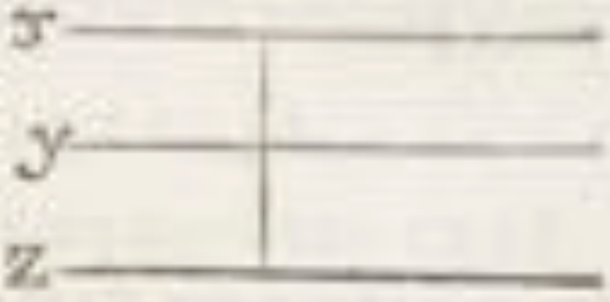
Donc les perpendiculaires de *d* sur *c b*, & de *b* sur *d k*, sont égales.

Donc *c b* & *d k* sont paralleles par la 3e proposition.

PREMIER THEOREME.

DEUX lignes ne ſçauroient eſtre paralleles à une troiſiéme, qu'elles ne le ſoient entr'elles. XIX.

Si x & z ſont chacune parallele à y, elles le ſont entr'elles. Car ſoit élevé d'un point d'x une perpendiculaire qui coupe y & z, elle coupera perpendiculairement y, parce que x & y ſont paralleles. Et eſtant perpendiculaire ſur y, elle le ſera auſſy ſur z, parce qu'y & z ſont paralleles.



Donc x & z auront une même perpendiculaire. Donc elles ſeront paralleles.

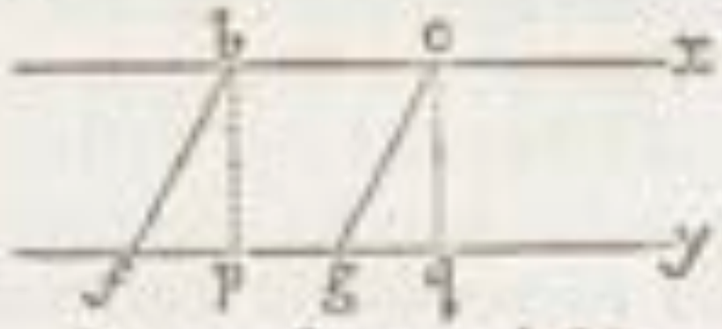
COROLLAIRE.

ON ne ſçauroit faire paſſer par le méme point deux differentes lignes qui ſoient paralleles à une même. Car il faudroit par le Theoreme precedent qu'elles fuſſent paralleles entr'elles, ce qui eſt abſurde, puis qu'elles auroient un point commun, & qu'il eſt de l'eſſence des paralleles de ne ſe rencontrer jamais. XX.

SECOND THEOREME.

LES également inclinées entre les mêmes paralleles ſont égales, & les égales ſont également inclinées. XXI.

Soient les paralleles x & y. Soient également inclinées entre ces paralleles bf & eg. Soient menées de b & de e les perpendiculaires bp & eq; ces perpendiculaires ſont égales. Donc afin que bf & eg ſoient également inclinées, il faut que les éloignemens du perpendicule fp & gq ſoient égaux: or cela eſtant, les obliques ſont égales par V. 48.



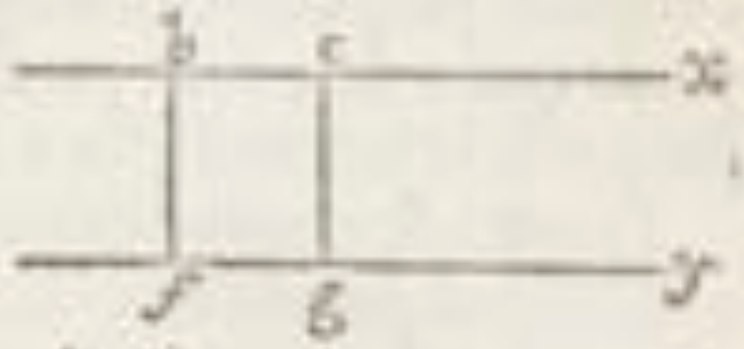
Et par la même raiſon les obliques bf & eg eſtant égales, & les perpendiculaires bp & eq égales auſſy, les éloignemens du perpendicule fp & gq ſeront égaux. Donc ces obliques égales ſeront également inclinées.

TROISIEME THEOREME.

XXII. LES plus inclinées entre les mêmes paralleles sont les plus longues, & les plus longues sont les plus inclinées, cela se prouve de la même sorte par V. 54.

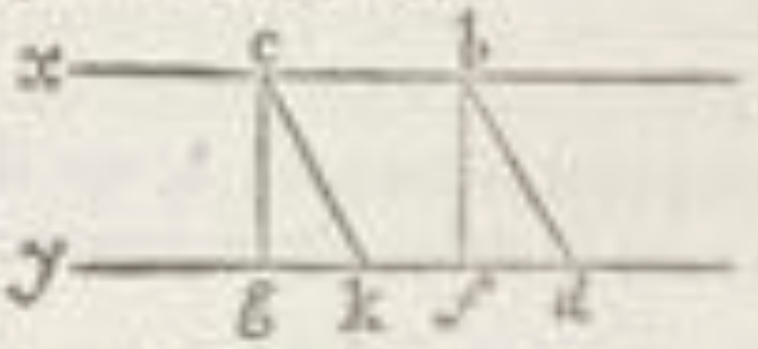
QUATRIEME THEORREME.

XXIII. LORS que deux perpendiculaires ou deux obliques également inclinées du même costé coupent des paralleles, les portions de ces paralleles comprises entre ces lignes sont égales.

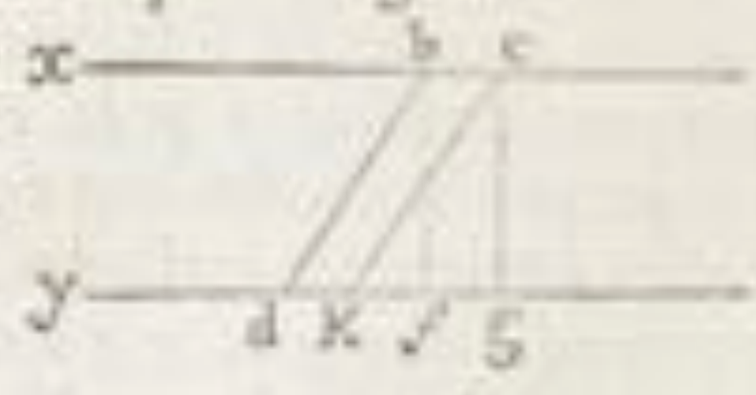


1. Cela est clair pour les perpendiculaires. Car *b c* & *f g* sont chacune perpendiculaire aux deux *b f* & *c g*, & par consequent égales par le cinquiéme Lemme.

2. Si ces deux coupantes sont également obliques du même costé comme *b d* & *c k*; je dis que *b c* & *d k* se trouveront aussy estre égales: car tirant les perpendiculaires *b f* & *c g*, par le 1er cas *b c* est égale à *f g*.



Or *d f* est égale à *k g*, parce que ces obliques sont supposées également inclinées. Donc ajoûtant *f k* à l'une & à l'autre, *d k* sera égale à *f k*. Donc *d k* est égale à *b c*, qui est égale à *f g*. Et il n'importe que les lignes fussent si proches que les éloignemens du perpendicule entreroient l'un dans l'autre comme en cette figure.

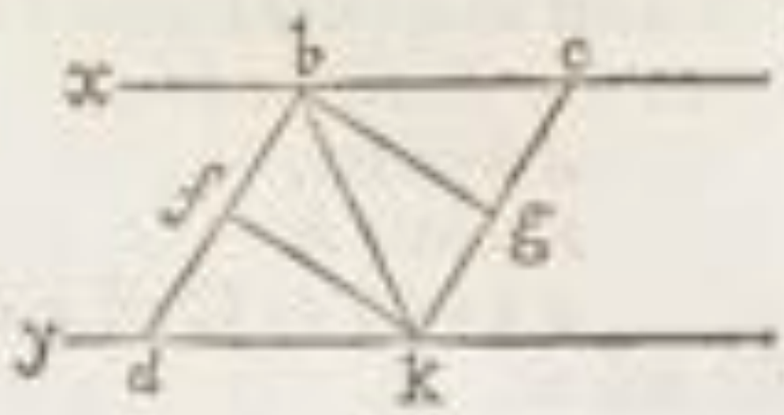


Car $b\,c = f\,g$.
$d\,f = k\,g$.
Donc ostant $k\,f$ de l'un & de l'autre,
$d\,k = f\,g$. & par consequent à $b\,c$.

CINQUIEME THEOREME.

XXIV. LES obliques également inclinées du même costé en-

tre paralleles, ſont paralleles elles mêmes.



Soit comme devant *b d* & *c k* également inclinées entre les paralleles *x* & *y*. Soit menée l'oblique *b k*.

b d = *k c*.

d k = *c b*.

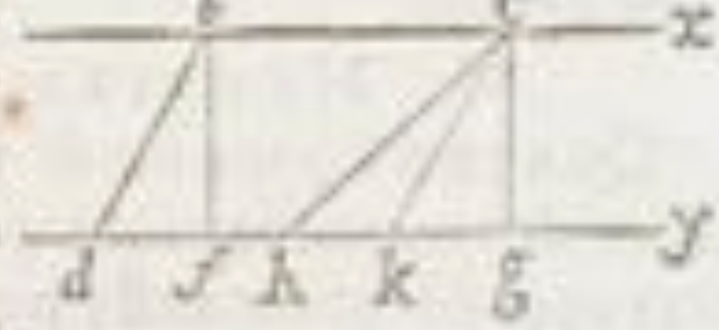
b k = *k b*. C'eſt à dire à ſoy même.

Donc par V. 57. les perpendiculaires de *k* ſur *b d* & de *b* ſur *c k* ſont égales. Donc les lignes *b d* & *c k* ſont paralleles par 15. 5.

SIXIEME THEOREME.

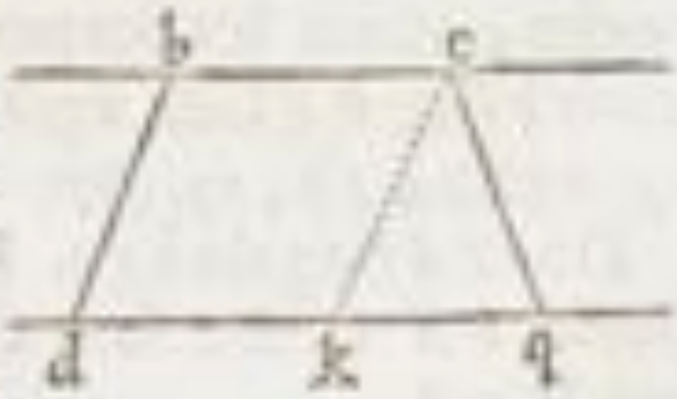
LES inégales entre paralleles quoy qu'inclinées du même coſté ne peuvent eſtre paralleles, non plus que les égales qui ſont inclinées de divers coſtez. Car XXV.

1. Suppoſons que *b d* & *c b* entre les paralleles *x* & *y* ſoient inégales. Soit tiré de *c*,



c k égale à *b d*, & inclinée du même coſté que *b d*; par le Theoréme precedent *b d* & *c k* ſont paralleles. Donc *b d* & *c b* ne peuvent pas eſtre paralleles, par 30. 5.

2. On prouvera de la même ſorte que *b d* & *c q* eſtant égales, mais inclinées de divers coſtez, ne ſçauroient eſtre paralleles, parce que *c k* égale auſſy à *b d*, mais inclinée du même coſté luy eſt parallele.

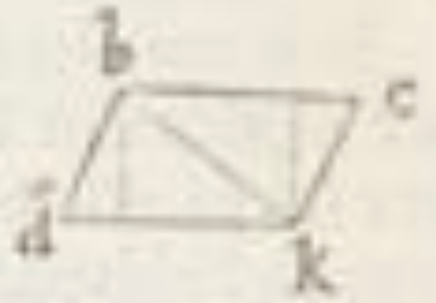


SEPTIEME THEOREME.

QUATRE lignes ne ſe joignant qu'aux extrémitez, ſi les oppoſées ſont égales elles ſont paralleles. XXVI.

Soient les quatre lignes $b\,c$, $d\,k$, $b\,d$, $c\,k$, ayant tiré l'oblique $b\,k$,

$d\,k = b\,c$.
$b\,d = c\,k$.
$b\,k = k\,b$. C'eſt à dire égale à ſoy même.



Donc par V. 57. les perpendiculaires de b ſur $d\,k$, & de k ſur $b\,c$, ſont égales. Donc $b\,c$ & $d\,k$ ſont paralleles par 15. 1.

HUITIEME THEOREME.

XXVII. QUATRE lignes ne ſe joignant qu'aux extrémitez, ſi les oppoſées ſont paralleles elles ſont égales.

Soit fait comme auparavant, $b\,c$ & $d\,k$ ſont paralleles. Donc $b\,d$ & $c\,k$ qui ſont entre ces paralleles ne ſçauroient eſtre elles mêmes paralleles qu'elles ne ſoient égales & inclinées du même coſté par le 6e Theoreme. Donc elles ſont égales, &c.

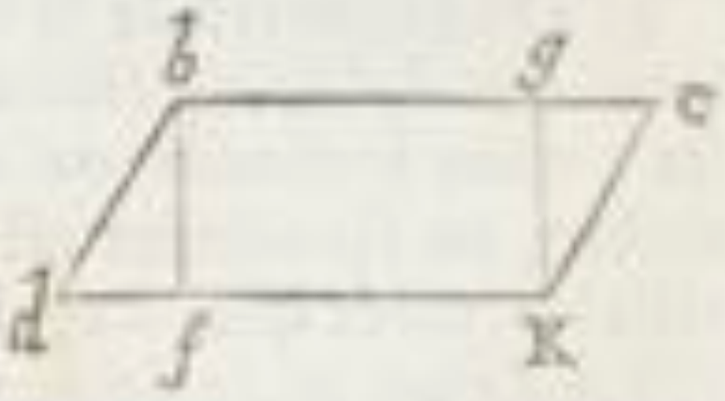
Mais eſtant égales & inclinées du même coſté, les portions des paralleles qui ſont compriſes entre ces lignes ſont égales par le 4e Theoreme. Donc $b\,c$ & $d\,k$ ſont égales.

NEUVIEME THEOREME.

XXVIII. QUATRE lignes ne ſe joignant qu'aux extrémitez, ſi deux des oppoſées ſont paralleles & égales, les deux autres oppoſées ſont auſſy paralleles & égales.

Si $b\,c$ & $d\,k$ ſont paralleles & égales, donc les perpendiculaires $b\,f$ & $k\,g$ ſont égales, & $b\,g$ égale à $f\,k$, 23. *ſup.*

Donc $d\,f$ égale à $g\,c$. 1. 19.
Donc $b\,d$ & $k\,c$ ſont égales, par V. 48.
Et paralleles par 24. *ſup.*



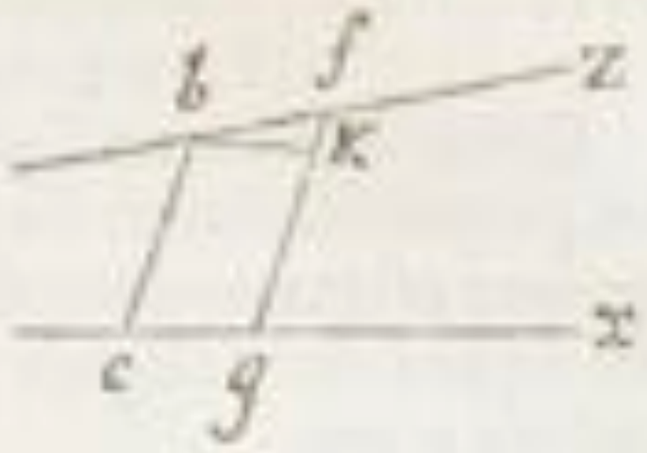
DIXIEME THEOREME.

XXIX. LES lignes qui enferment des paralleles égales, ſont paralleles elles mêmes. On le prouve de la même ſorte.

COROLLAIRE.

XXX. LES lignes qui enferment des paralleles inégales ne

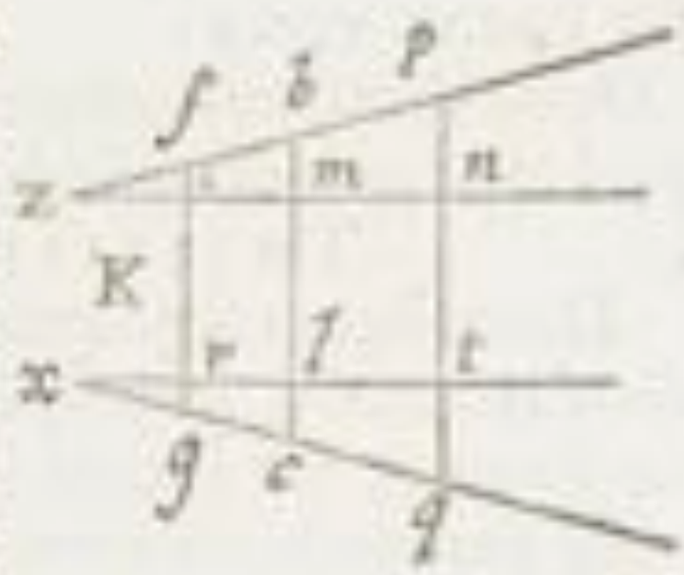
ſçauroient eſtre paralleles.



Car ſi les paralleles *b c* & *f g*, enfermées entre *x* & *z*, eſtoient inégales prenant *g k* égale à *b c*, la ligne *b k* par le Theoreme precedent eſt parallele à *x*. Donc *x* n'eſt pas parallele à *z*, par 19. *ſup.*

ONZIEME THEOREME.

QUAND une ligne en coupe deux obliquement, & qu'elle eſt inclinée ſur chacune du même coſté, toutes les paralleles à cette coupante enfermées entre ces deux mêmes lignes ſont inégales: & les plus courtes ſont celles qui ſont vers le coſté vers lequel cette premiere coupante eſtoit inclinée. XXXI.



Soit *x* & *z*, coupées l'une & l'autre obliquement par *b c*, inclinée vers *k*; je dis que *f g* & *p q*, paralleles à *b c*, & enfermées auſſy entre *x* & *z*, ſeront inégales, & *f g* plus proche de *k* ſera la plus courte, & *p q* la plus longue. Car ſoit menée *z n*, perpendiculaire ſur les trois paralleles, & *n t* de même perpendiculaire ſur toutes les trois, par le 8e Lemme, *f i* eſt plus courte que *b m*, & *b m*, que *p n*; & de même *r g* plus courte que *l c*, & *l c* que *t q*.

Or par 23. *ſup. i r*, *m l*, & *n t* ſont égales.

Donc (par I. 21.) *f g* eſt plus courte que *b c*; & *b c* que *p q*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREMIER COROLLAIRE.

IL s'enſuit de là, 1. Que deux lignes coupées par une ligne qui coupe toutes les deux obliquement, & qui eſt inclinée ſur chacune du même coſté, ne ſçauroient eſtre paralleles. XXXII.

SECOND COROLLAIRE.

2. QUE ces lignes ſe rapprochant toûjours vers le coſté vers lequel cette coupante eſt inclinée, eſtant prolongées XXXIII.

de ce coſté là, ſe rencontreront à la fin. V. 11.

DOUZIEME THEOREME.

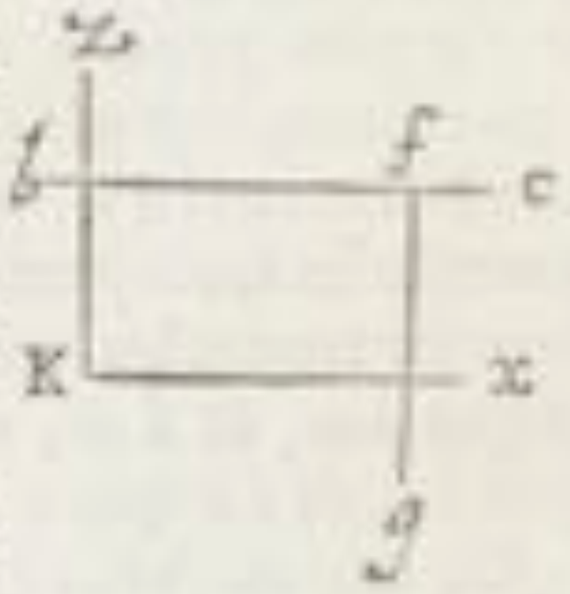
XXXIV. Deux differentes lignes ſe joignant en un même point, les perpendiculaires ſur chacune de ces lignes ſe rencontreront eſtant prolongées du coſté qui regarde la concavité que font ces lignes jointes à un même point.

Soient les deux lignes $k z$ & $k x$, dont $k z$ ſoit coupée en g, perpendiculairement par $f g$, & $k x$, coupée en c, perpendiculairement par $b c$, ſoient joints les points g & c; il eſt clair que $g c$ eſt oblique tant ſur $f g$ que ſur $b c$, & inclinée ſur l'une & ſur l'autre vers y:

Donc elles ſe rencontreront eſtant prolongées de ce coſté là par 33. *ſup.*

XXXV. TREIZIEME THEOREME.

Deux lignes ſe joignant perpendiculairement, les perpendiculaires ſur l'une & ſur l'autre ſe joindront auſſy perpendiculairement.



Soient $k z$ & $k x$ perpendiculaires, ſi $b c$ eſt perpendiculaire ſur $k z$, elle eſt parallele à $k x$, par 13. *ſup.*

Donc $g f$ ne peut eſtre perpendiculaire ſur $k x$, qu'elle ne le ſoit auſſy ſur $b c$.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SEPTIEME.

DES LIGNES TERMINEES A UNE CIRCONFERENCE,

Où il eſt parlé

DES SINVS,

ET DE LA PROPORTION DES ARCS DE DIVERS CERCLES A LEURS CIRCONFERENCES,

ET DV PARALLELISME DES LIGNES CIRCVLAIRES.

IVSQUES *icy nous avons conſideré les lignes droites entant qu'elles ſont terminées à d'autres lignes droites, ou qu'elles leur ſont paralleles. Nous les conſidererons maintenant entant qu'elles ſont terminées à quelque point d'une circonference.* 1.

On les peut diſtinguer par les diverſes ſituations du point d'où elles ſont menées à la circonference. Car ce point eſt

1. *Ou dans la circonference même,*
2. *Ou au dedans du cercle,*
3. *Ou au dehors.*

1. *Quand il eſt dans la circonference même, ce ſont les li-*

gnes qui sont menées d'un point de la circonference à un autre point de la même circonference ; Et ce sont celles que nous avons déja dit s'appeller des cordes.

2. *Quand le point est au dedans du cercle, si ce point est le centre, ce sont* des rayons. *Mais si ce n'est pas le centre, on les peut appeller* des secantes interieures.

3. *Et quand ce point est hors le cercle ; ou ces lignes entrent dans le cercle, le coupant dans sa convexité & estant terminées à sa concavité ; ou elles n'entrent point dans le cercle ; & alors elles sont telles, que si on les prolongeoit elles y entreroient, & tant celles là que celles qui y entrent, peuvent estre appellées* des secantes exterieures.

Ou bien, quoy que prolongées, elles n'entrent point dans le cercle ; & ce sont celles là que l'on dit toucher le cercle, & que l'on appelle pour cette raison des tangentes.

Mais parce que les deux derniers genres, hors la derniere espece du 3e, qui est des tangentes, peuvent estre compris dans les mêmes propositions, nous renfermerons tout cela en 3. sections, Dont

La 1. sera des cordes.

La 2. des secantes interieures & exterieures.

La 3. des tangentes.

Et nous y en adjoûterons une 4e, qui sera du parallelisme des lignes circulaires.

PREMIERE SECTION.

DES CORDES.

PREMIER THEOREME.

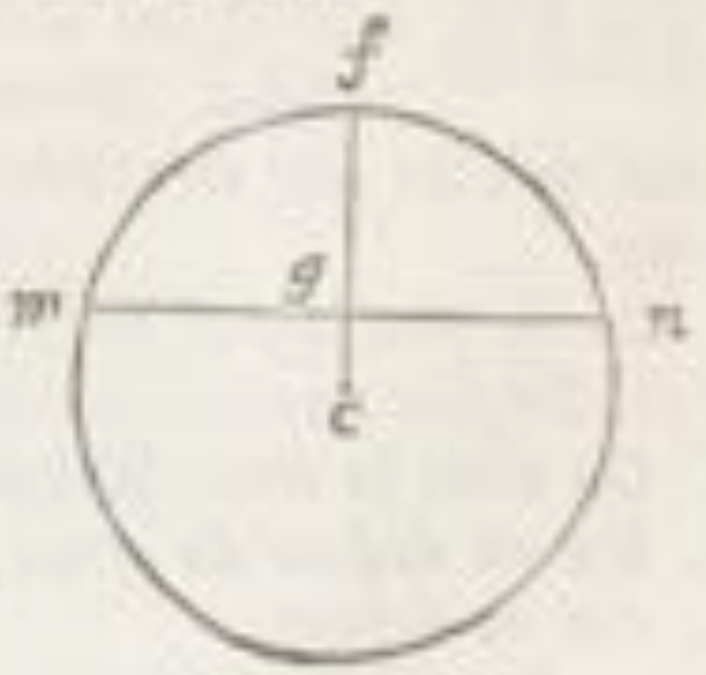
11. Les lignes droittes qui coupent les cordes peuvent avoir trois conditions.

La 1. De les couper perpendiculairement.

La 2. De les couper par la moitié.

La 3. De passer par le centre.

Or deux de ces conditions estant données, donnent la 3e.



C'est

C'eſt à dire :

1. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, elles paſſent par le centre.

2. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & qu'elles paſſent par le centre, elles les coupent par la moitié.

3. Si elles les coupent par la moitié & qu'elles paſſent par le centre, elles les coupent perpendiculairement.

Soit pour tous les cas le centre *c*, & la corde *m n*, coupée par *f g*.

PREUVE DU PREMIER CAS.

Si *f g*, eſtant perpendiculaire à *m n*, la coupe par la moitié, le point *g* eſt également diſtant des extrémitez de la coupée *m* & *n*. Donc *f g* eſtant prolongée doit contenir tous les points de ce plan également diſtans d'*m* & *n*, par V. 59. Or le centre eſt un de ces points : Donc il ſe doit trouver dans *f g* prolongée. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

Si *f g* coupe perpendiculairement *m n*, & qu'eſtant continuée elle paſſe par le centre, il y a un point dans cette ligne, ſçavoir le centre qui eſt également diſtant d'*m* & *n*. Donc tous les autres points de cette ligne *f g*, dont l'un eſt le point de la ſection, ſont également diſtans d'*m* & *n*. (par V. 31. 32.) Donc *m n* eſt la diviſée par la moitié.

PREUVE DU TROISIEME CAS.

Si *f g* diviſant *m n* par la moitié eſtant prolongée paſſe par le centre, il y aura deux points dans cette ligne, ſçavoir le point de la ſection, & le centre également diſtans d'*m* & *n*. Donc *f g* eſt perpendiculaire à *m n*, par V. 31.

PREMIER COROLLAIRE.

AYANT trois points d'une circonference, on a toute la circonference. III.

Car qui a un point de la circonference & le centre, l'a toute entiere, par V. 12.

Or qui a trois points de la circonference, en a le centre. Ce qui ſe prouve de cette ſorte.

Il eſt clair que ces trois points ne peuvent pas eſtre dans la même ligne droitte, parce que tous les points d'une circonference doivent eſtre également diſtans d'un même point, ſçavoir le centre, & qu'il eſt impoſſible que trois points d'une ligne droitte ſoient également diſtans d'un même point, par V. 47.

Ainſy joignant ces trois points deux à deux, on a trois cordes qui ſoûtiennent 3 arcs de cette circonference.

Donc le centre ſe trouvera dans l'interſection de deux lignes qui couperont perpendiculairement & par la moitié deux de ces 3 cordes.

Car par le precedent Theoreme chacune de ces perpendiculaires paſſe par le centre. Donc le centre eſt le point qui leur eſt commun. Et par là on voit combien il eſt facile de reſoudre ce Probleme.

PROBLEME.

Trouver la circonference qui paſſe par trois divers points donnez.

Il ne faut que faire ce qui a ſervi de preuve au Theoreme precedent, en remarquant que ſi ces trois points eſtoient dans la même ligne droitte, le Probleme ſeroit impoſſible; parce que les perpendiculaires eſtant paralleles ne ſe rencontreroient jamais: au lieu qu'il eſt toûjours poſſible quand ils ſont en deux differentes lignes, parce que les lignes qui les couperont perpendiculairement ſe rencontreront. VI. 34.

SECOND COROLLAIRE.

IV. DEUX circonferences ne peuvent avoir trois points communs, qu'elles ne les ayent tous. Car par le 1er Corollaire ces 3 points communs auront le même centre. Donc ces cercles ſeront concentriques. Or deux cercles eſtant concentriques, s'ils ont un rayon égal, tous les points des circonferences ſont enſemble: comme quand un cercle de bois convexe eſt emboité dans un autre cercle de bois qui eſt creux.

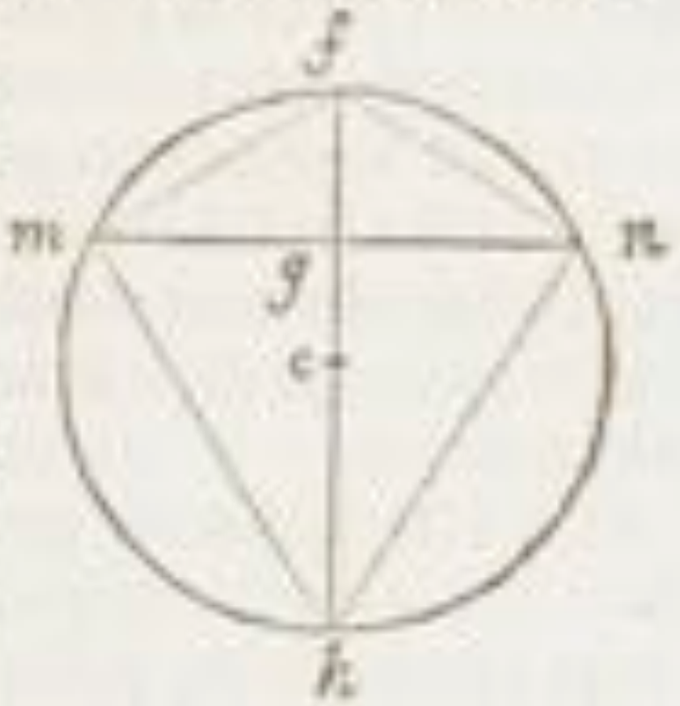
TROISIEME COROLLAIRE.

DEUX cercles ne se peuvent couper en plus de deux points. Car s'ils se coupoient en trois, leurs circonferences auroient 3 points communs, & par consequent les auroient tous, & ainsy ne se couperoient point. V.

SECOND THEOREME.

LES lignes qui coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, coupent aussy par la moitié les arcs grands & petits qui soûtiennent ces cordes de part & d'autre. VI.

Soit la corde *m n* coupée par *f h* perpendiculairement & par la moitié; je dis que chacun des arcs *m f n*, & *m h n*, sont coupez par la moitié, l'un en *f*, & l'autre en *h*. Car *f g* estant perpendiculaire à *m n*, & ayant un de ses points, sçavoir le point de section également distant d'*m* & *n*, tous ses autres points, comme *f h*, seront aussy également distans d'*m* & *n*. Donc tirant les cordes *f m* & *f n*, elles seront égales, & par consequent les arcs qu'elles soûtiennent seront égaux. Donc par la même raison ces cordes *h m* & *h n* seront égales, & les arcs qu'elles soûtiendront égaux. Donc les deux arcs *m f n*, & *m h n*, seront chacun partagez par la moitié par la ligne *f g*.



COROLLAIRE.

TOUT rayon perpendiculaire à un diametre coupe par la moitié la demy circonference qui soûtient ce diametre. Car y ayant un point dans ce rayon perpendiculaire à ce diametre également distant des extremitez de ce diametre, sçavoir le centre, tous les autres points de ce rayon seront aussy également distans des extrémitez de ce diametre. Donc le point où ce rayon coupe cette circonference en sera également distant. Donc cette circonference sera coupée par la moitié, par V. 26. VII.

TROISIEME THEOREME.

VIII. LA ligne qui paſſant par le centre coupe un arc par la moitié, coupe auſſy par la moitié & perpendiculairement la corde qui ſoûtient cet arc. Car il y a alors deux points dans la ligne qui coupe l'arc par la moitié, le centre & le point de ſection de l'arc dont chacun eſt également diſtant des deux extrémitez de la corde.

QUATRIEME THEOREME.

IX. LES cordes également diſtantes du centre dans le même cercle, ou dans cercles égaux, ſont égales; & les égales ſont également diſtantes du centre; & les plus proches du centre ſont les plus grandes.

Cela eſt clair des diametres qui ſont également proches du centre, puis qu'ils paſſent tous par le centre.

Et il eſt clair auſſy que tout diametre eſt plus grand que toute autre corde, puiſque tirant du centre deux rayons aux extrémitez de toute autre corde, ces deux rayons ſeront égaux au diametre & plus grands que cette corde. par V. 5.

Pour ce qui eſt des autres cordes: 1. Les également diſtantes du centre ſont égales. Car ſi *m n* & *f g* ſont également diſtantes du centre. Donc les perpendiculaires du centre à chacune ſont égales, puis que c'eſt ce qui meſure la diſtance de ces cordes d'avec le centre. V. 38.

Et de plus ces perpendiculaires les diviſent chacune par la moitié. Donc tirant les rayons *c n* & *c g*, *l n* & *h g* (qui ſont les moitiez de chacune de ces cordes) ſeront égales, par V. 50. parce que les obliques *c n* & *c g* ſont égales, & les perpendiculaires auſſy *c l* & *c h*. Donc les toutes *m n* & *f g* ſont égales. Ce qu'il falloit demonſtrer.

2. Les égales ſont également diſtantes du centre: car y ayant égalité entre les moitiez de ces cordes *l n* & *h g*, qui peuvent eſtre conſiderées comme les éloignemens du perpendicule, & entre les rayons *c n* & *c g*, qui ſont les obli-

ques, il faut qu'il y ait auſſy égalité entre les perpendiculaires du centre à ces cordes qu'elles diviſent par la moitié, (V. 51.) & qu'ainſy ces cordes ſoient également diſtantes du centre.

3. Les plus proches du centre ſont les plus longues, car ſi la corde *m n* eſt plus proche du centre que la corde *p q*, elle doit eſtre plus grande que la corde *p q*, parce que la perpendiculaire *c l* eſtant plus courte que la perpendiculaire *c r*, & les obliques *c n* & *c q* eſtant égales, l'éloignement du perpendicule *l n* doit eſtre plus grand que l'éloignement du perpendicule *r q*. (V. 54.) C'eſt à dire que la moitié d'*m n* eſt plus grande que la moitié de *p q*.

CINQUIEME THEOREME.

DANS les mêmes cercles ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes ſoûtiennent les plus grands arcs du coſté que ces arcs ſont plus petits que la demycirconference.

Soit *m n* plus grande que *p q*; je dis que l'arc *m n* eſt plus grand que *p q*. Car prolongeant la perpendiculaire *c l* juſques à ce qu'elle ſoit auſſy longue que la perpendiculaire *c r*, comme *c s*, & tirant la corde *b d*, qui ſoit perpendiculaire à *c s*, cette corde *b d* eſt égale à *p q*, par le Theoreme precedent. Et ces deux cordes *m n* & *b d* eſtant paralleles (par VI. 13.) ne ſe peuvent jamais rencontrer.

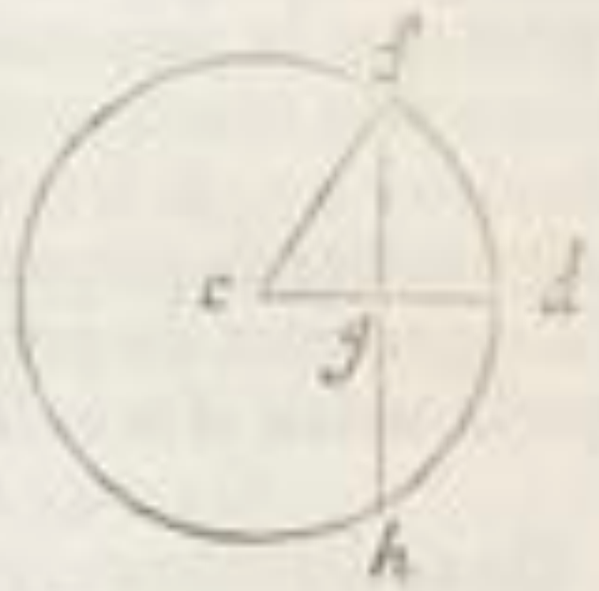
Donc l'arc *m n* ne pourra manquer de comprendre l'arc *b d*. Donc il ſera plus grand que l'arc *b d*, puiſque le tout eſt plus grand que ſa partie.

Donc l'arc *m n* eſt plus grand auſſy que l'arc *p q*, qui eſt égal à l'arc *b d*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

D'VNE AVTRE MESVRE DES ARCS, QVI SONT LES SINVS.

DEFINITIONS.

XI. QUAND un arc eſt moindre que la moitié de la demy-circonference, ou le quart de la circonference, la perpendiculaire de l'une des extrémitez de l'arc ſur le rayon où le diametre termine à l'autre extremité, s'appelle *le ſinus* de cet arc; & la partie du rayon ou diametre qui eſt depuis la rencontre de la perpendiculaire, ou ſinus, juſqu'à l'extrémité de l'arc, s'appelle *le ſinus verſe*.



Soit une circonference, dont le centre eſt *c*, & un arc moindre que la moitié de la demy circonference *f d*, ſoit tiré le rayon *c d*, & la perpendiculaire d'*f* ſur ce rayon *f g*; cette perpendiculaire *f g* eſt le *ſinus* de l'arc *f d*; & *g d* en eſt le *ſinus verſe*.

PREMIER LEMME.

XII. QUE ſi on continue *f g* juſqu'à *h*, autre point de la circonference, il eſt clair par le 1er Theoreme que *f h* eſt partagée par la moitié par *c d*, & qu'ainſy le ſinus *f g* eſt la moitié de la corde *f h*.

SECOND LEMME.

XIII. ET il eſt clair auſſy par le 2e Theoreme que l'arc *f d h*, ſoûtenu par la corde *f h*, eſt double de l'arc *f d*, dont *f g* eſt le ſinus.

D'où il s'enſuit qu'on peut encore definir le *ſinus*.

AUTRE DEFINITION DES SINUS.

XIV. LA moitié de la corde du double de l'arc.

Car *f g* eſt la moitié de la corde *f h*, laquelle corde *f g h* ſoûtient l'arc *f d h*, lequel eſt double de l'arc *f d*. Tout cela eſtant ſuppoſé ſoit.

SIXIEME THEOREME.

XV. DANS le même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs qui ont le ſinus égal ſont égaux; & les ſinus égaux donnent des arcs égaux; & les arcs qui ont les plus grands

finus, ſont les plus grands. Car par le 1er Lemme les finus égaux ſont moitiez de cordes égales. Or par le 2e Lemme ces cordes égales ſoûtiennent des arcs égaux qui ſont doubles des arcs qui ont pour finus ces finus égaux. Donc les arcs doubles de ceux là eſtant égaux, ceux là le ſont auſſy. La converſe ſe prouve de la même ſorte, ſans qu'il ſoit beſoin de s'y arreſter.

Et de même quand un finus eſt plus grand que l'autre, la corde dont le plus grand eſt la moitié, eſt plus grande auſſy que la corde dont le plus petit eſt la moitié. Donc cette plus grande corde ſoûtient un plus grand arc. Or l'arc qu'elle ſoûtient eſt double de celuy dont la moitié de cette plus grande corde eſt le finus. Donc l'arc dont la moitié de cette plus grande corde eſt le finus, eſt plus grand que l'arc qui a pour finus la moitié d'une plus petite corde. (Ce qu'il falloit demonſtrer.)

SEPTIEME THEOREME.

XV. QUAND les finus ſont égaux, les finus verſes le ſont auſſy, & les plus grands finus donnent les plus grands finus verſes.

Car les finus égaux ſont également diſtans du centre. Or cette diſtance du centre oſtée du rayon, ce qui reſte eſt le finus verſe. Donc cette diſtance eſtant égale, le finus verſe eſt égal.

Que ſi le finus eſt plus grand, cette diſtance eſt plus petite. Donc oſtant moins du rayon, ce qui reſte, qui eſt le finus verſe, eſt plus grand.

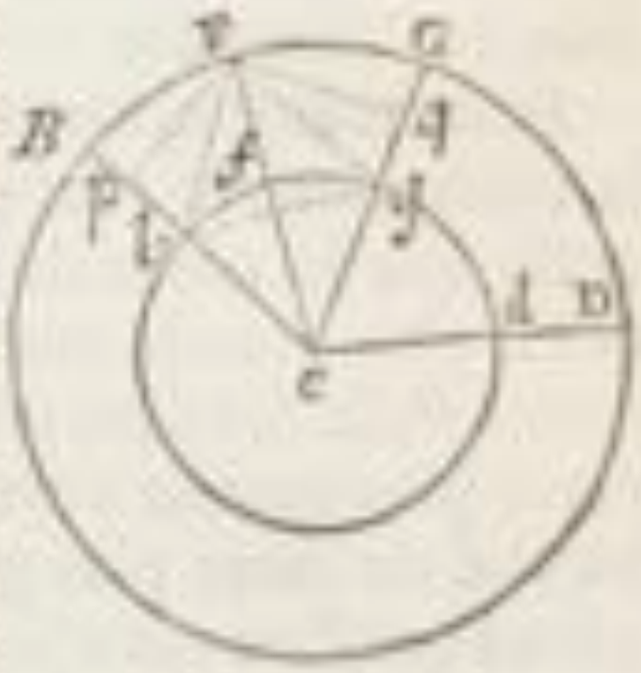
AVERTISSEMENT.

XVII. *LES finus ne meſurent proprement que les arcs moindres que la moitié de la demy circonference. Mais cela n'empeſche pas qu'on ne s'en puiſſe ſervir pour meſurer ceux qui ſont plus grands. Car ce qui manque à ces plus grands arcs pour faire La demy circonference, s'appelle le complement de ces plus grands arcs. Or ces complemens ſe meſurent par les finus, & il eſt aiſé de juger que ces complemens eſtant égaux, ces plus grands arcs ſont égaux auſſy. Mais qu'eſtant inégaux, celuy qui a le plus petit complement eſt le plus grand.*

HUITIEME THEOREME.

XVIII. QUAND pluſieurs circonferences ſont concentriques, & que du centre on tire des lignes indefinies, les arcs de toutes ces circonferences compris entre ces deux lignes ſont en même raiſon à leurs circonferences.

Soient au tour du centre *c* deux circonferences concentriques, & ſoient tirées les deux lignes *c B* & *c D*; je dis que l'arc *B D* de la plus grande, & *b d* de la plus petite, ſont proportionels à leurs circonferences.



Car les aliquotes quelconques de *B D* ſoient appellez *x*; je dis que ſi par tous les points de ſection on tire des lignes au centre, *b d* ſera diviſée par ces lignes en aliquotes pareilles.

Pour le prouver il ſuffit de conſiderer deux *x*, que je ſuppoſe eſtre *B F* & *F G*, tirant les lignes *F c* & *G c*; je dis que les arcs *b f* & *f g* ſont égaux entr'eux, auſſy bien que *B F* & *F G*. Car tirant d'*F* une perpendiculaire ſur *B c* & une autre ſur *G c*, les deux perpendiculaires *F p* & *F q* ſeront les ſinus d'arcs égaux, & par conſequent égales, & les ſinus verſes de ces arcs *B p* & *B q* ſeront auſſy égaux. Donc *p b* & *q g* ſeront auſſy égales.

Donc *F b* & *F g* ſont égales, parce que ce ſont des obliques dont les perpendiculaires *F p* & *F q* ſont égales, comme auſſy les éloignemens des perpendicules *p b* & *q g*. V. 48.

Donc dans la ligne *F c* il y a deux points, ſçavoir *F* & *c*, dont chacun eſt également diſtant de *b* & de *g*.

Donc *F c* coupe perpendiculairement & par la moitié la corde *b g*, & par conſequent auſſy l'arc *b f g*.

Donc l'arc *b f* eſt égal à l'arc *f g*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Or cela eſtant demonſtré, il eſt clair qu'on prouvera la même choſe de toutes les aliquotes de *B G* en les prenant deux à deux.

Donc

Donc *B G* eſtant diviſé en aliquotes quelconques, les lignes menées au centre par tous les points de ſection feront des aliquotes pareilles dans *b g*, leſquelles on pourra appeller *x*.

Or appliquant *x* pour meſurer le reſte de la grande circonference, ſi elle s'y trouve preciſement tant de fois menant des lignes par tous les points de ſection, *x* ſe trouvera auſſy preciſement tant de fois dans la petite circonference. Et ſi ce n'eſt dans la grande qu'avec quelque reſte, ce ne ſera auſſi dans la petite qu'avec quelque reſte.

Donc par la definition des grandeurs proportionnelles *B D* eſt à la grande circonference, comme *b d* à la petite, puiſque les aliquotes quelconques pareilles de *B D* & de *b d* ſont également contenuës dans les deux circonferences.

DEFINITION.

LES arcs qui ont même raiſon à leur circonference ſoient appellez proportionnellement égaux, ou d'autant de degrez l'un que l'autre. Surquoy il ſe faut ſouvenir que toute circonference grande ou petite eſt conſiderée comme diviſée en 360 parties, qu'on appelle degrez, & chaque degré en 60 minutes, & chaque minute en 60 ſecondes, & chaque ſeconde en 60 troiſiémes, & ainſy à l'infiny. XVIII.

Et comme on ne regarde point la grandeur abſoluë des portions d'une circonference, parce que cette grandeur nous eſt inconnuë, mais ſeulement la grandeur relative, c'eſt à dire par proportion à la circonference; on pourroit appeller les arcs qui ſont proportionellement égaux, parce qu'ils ſont d'autant de degrez ſimplement *égaux*: & appeller *tout-égaux* ceux qui le ſont tout enſemble proportionellement & abſolument comme ſont les arcs d'autant de degrez dans le même cercle.

NEUVIEME THEOREME.

QUAND les cercles ſont inégaux, les arcs proportionellement égaux ſont ſoûtenus par de plus grandes cordes, & ont de plus grands ſinus, dans les plus grands cercles. XIX.

Soient au tour du centre *c* deux circonferences concentriques, les arcs *B D* & *b d* compris entre les mêmes rayons *B C* & *D C* sont proportionellement égaux.

Or tirant les cordes *B D* & *b d* & les divisant par la moitié aussy bien que les arcs par la ligne *P c*, les arcs *B P* & *b p* sont aussy proportionellement égaux. Or *B F* & *b f*, perpendiculaires sur *P c*, sont les sinus de ces deux arcs.

Et par VI. 12. *B F* est plus grande que *b f*.

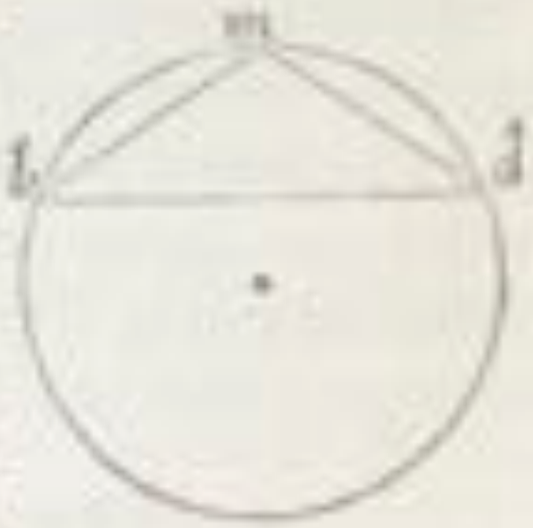
Donc les arcs égaux ont de plus grands sinus dans les plus grands cercles.

Et de même la corde *B D* est plus grande que *b d* (par VI. 31.) & aussy parce que *B F*, moitié de *B D*, est plus grande que *b f*, moitié de *b d*.

Donc les arcs *B D* & *b d* estant proportionellement égaux, celuy du plus grand cercle a une plus grande corde.

DIXIEME THEOREME.

XXI. LES cordes dans un même cercle ne sont point proportionelles aux arcs, mais les plus grands arcs (j'entens toûjours ceux qui ne sont pas plus grands que la demycirconference) ont de plus petites cordes à proportion que les plus petits. C'est à dire que la corde d'un arc, qui n'est que la moitié d'un plus grand arc, est plus grande que la moitié de la corde de ce plus grand arc.



La preuve en est bien facile. Car soit l'arc *b d* partagé en *m* par la moitié, *b m* égale à *d m* seront chacune la corde d'un arc qui n'est que la moitié de l'arc que soûtient la corde *b d*. Or ces deux cordes *b m* & *d m* sont plus grandes que *b d*. Donc estant égales, chacune est plus grande que la moitié de la corde *b d*.

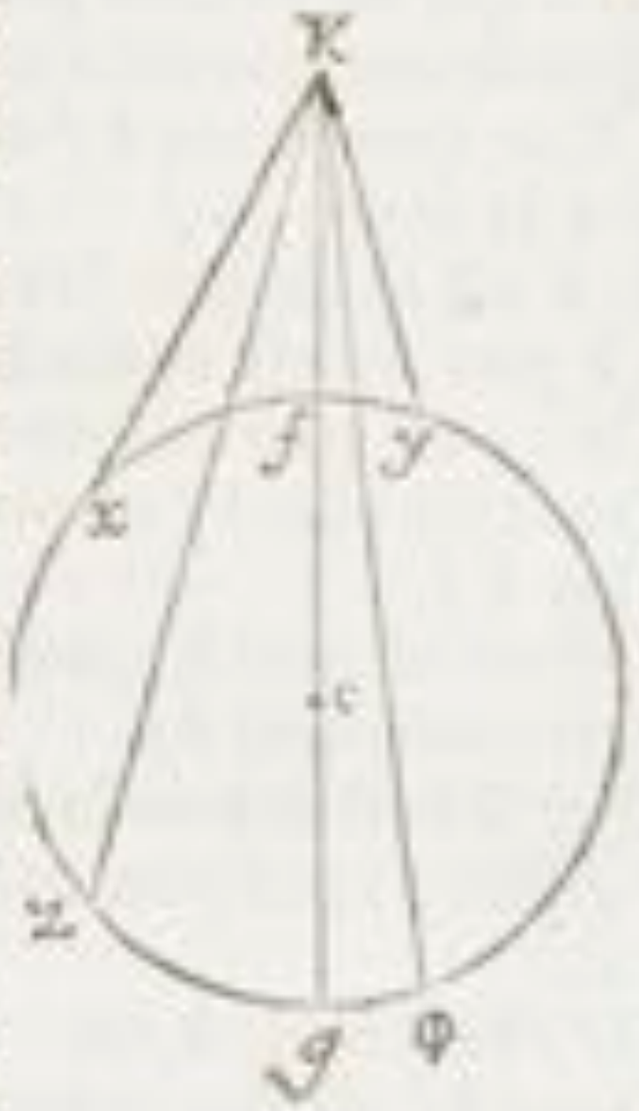
COROLLAIRE.

DE là il s'enſuit que plus les arcs ſont grands, plus la difference eſt grande entre la longueur de l'arc & celle de la corde; & qu'au contraire plus les arcs ſont petits plus cette difference diminuë. De ſorte qu'on peut prendre un ſi petit arc, que cette difference ſera plus petite que quelque ligne qu'on ait donnée. XXII.

SECONDE SECTION.

DES SECANTES INTERIEURES ET EXTERIEURES.

NOUS avons déja dit que les lignes menées à la circonference d'un point de dedans le cercle autre que le centre ſe pouvoient appeller *des ſecantes interieures.* XXIII.



Et que quand le point eſtoit hors le cercle, & qu'elles n'eſtoient point tangentes, on les pouvoit appeller des *ſecantes exterieures.*

Or pour abreger le diſcours dans l'expreſſion de ces lignes, ſoient toûjours appellez

Le centre — *c.*

Le point, ſoit dedans le cercle, ſoit hors le cercle, — *k.*

La ligne menée de ce point paſſant par le centre, — *k g.*

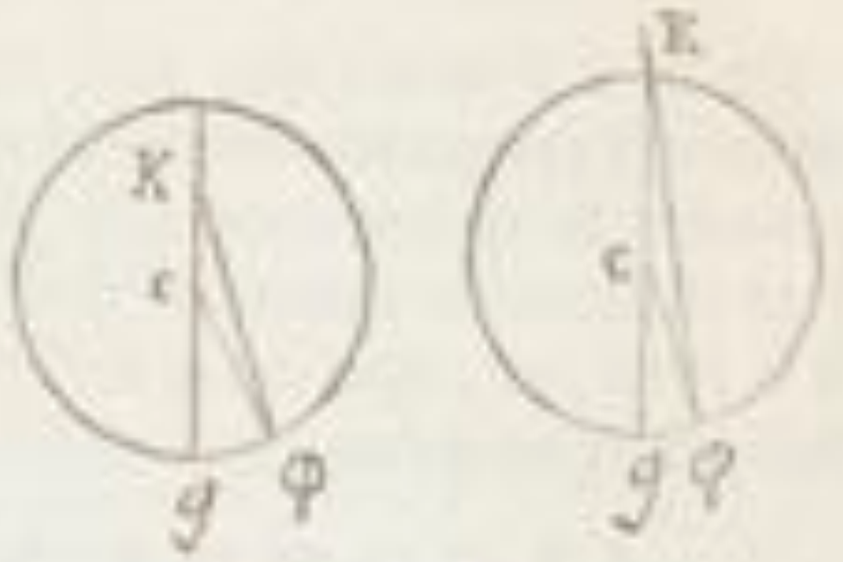
Celle qui ne paſſant point par le centre eſt dans la même ligne droite que celle qui y paſſe, — *k f.*

Les autres, — *k x.* — *k y.* — *k z.* — *k φ.*

Cela ſuppoſé ſoit.

PREMIER THEOREME.

XXIV. LA plus longue de ces lignes est *k g*. C'est à dire celle qui passe par le centre.



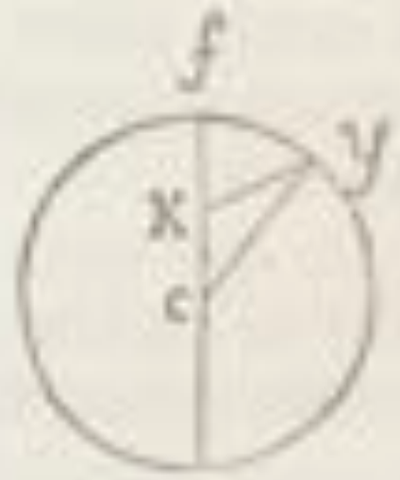
Car si on la veut comparer avec *k φ*, soit tiré le rayon *c φ*, qui est égal à *c g*.

k c, plus *c φ*, est plus grande que *k φ*, par V. 6.

Donc *k g*, est plus grande que *k φ*.

SECOND THEOREME.

XXV. LA plus courte de toutes ces lignes est *k f*. C'est à dire celle qui ne passant point par le centre est dans la même ligne droite que celle qui y passe.



Car comparant *k f* avec *k y*, & ayant tiré le rayon *c y*,

Si *k* est au dedans du cercle,

c k plus *k f* est égale à *c y*.

Or *c y* est plus courte que *c k* plus *k y*.

Donc *c k* plus *k f* est plus courte que *c k* plus *k y*.

Donc ostant *c k*, qui est commun, *k f* est plus courte que *k y*.

Que si *k* est dehors le cercle,

k f plus *f c*, est plus courte que *k y* plus *y c*.

Or *f c* est égale à *y c*.

Donc *k f* est plus courte que *k y*.

TROISIEME THEOREME.

XXVI. LES lignes menées de *k* à des points de la circonference également distans de *f* ou de *g* sont égales. Et il faut remarquer que deux points ne sçauroient estre également distans d'*f*, qu'ils ne soient aussy également distans de *g*. Mais on appelle également distans d'*f* ceux qui sont plus proches d'*f* que de *g*, & également distans de *g* ceux qui sont plus proches de *g* que d'*f*.

Soient les deux points également distans d'*f*, x & *x* la corde terminée par ces deux x & *x* est coupée perpendiculairement par la ligne *f c*, puisque *f* par l'hypothese est également distant d'x & *x*, & *c* aussy, parce que c'est le centre du cercle.

Donc tous les points de cette ligne sont également distans d'x & *x*. Donc le point *k*, qui en est un. Donc *k* x & *k x* sont égales.

C'est la même chose de deux points également distans de *g*.

QUATRIEME THEOREME.

Si du centre *k*, intervale *k f*, ou *k g*, on décrit un nouveau cercle, il touchera le premier cercle en un seul point, c'est à dire en *f*, ou en g, sans le couper. XXVII.

Car si *k f* est rayon du 2e cercle, comme cette ligne est la plus courte de toutes celles qui peuvent estre menées de *k* à la circonference du 1er cercle, toute autre ligne menée à la circonference du premier passera la circonference du second.

Et au contraire si *k g* est le rayon du 2e cercle, cette ligne estant la plus longue de toutes celles qui peuvent estre menées de *k* à la circonference du 1er cercle, toute autre ligne menée de *k* à la circonference du 1er cercle ne pourra pas aller jusqu'à la circonference du 2e.

CINQUIEME THEOREME.

Si du centre *k*, intervale plus grand que *k f*, & plus petit que *k g*, comme pourroit estre *k x*, on décrit un cercle, il coupera la circonference du premier au point x & *x*. C'est à dire à deux points également distans de *f*, (ou également distans de *g*, si on avoit pris un point pour determiner cet intervale plus proche de *g*,) & la partie de la circonference du 1er cercle entre x & *x*, dont le milieu est *f*, se- XXVIII.

ra au dedans du 2e cercle, au lieu que la partie de la même circonference du 1er cercle entre ces deux mêmes points x & x, dont g eſt le milieu, ſera au dehors du 2e cercle. Car par 4. 3. deux circonferences ne ſe peuvent couper en plus de deux points.

Or cela eſtant, le rayon du 2e cercle eſtant *k x*, toute ligne menée de *k* à la circonference du 1er cercle qui ſera égale à *k x*, ſe trouvera auſſy terminée à la circonference du 2e cercle.

Or par le 3e Theoreme cette ligne égale à *k x* eſt celle qui eſt terminée à un point de la circonference du 1er cercle, auſſy diſtant d'*f* de l'autre coſté qu'*x* en eſt diſtant de ſon coſté. Donc x & *x* ſeront les deux ſeuls points dans leſquels la 2e circonference coupera la 1re.

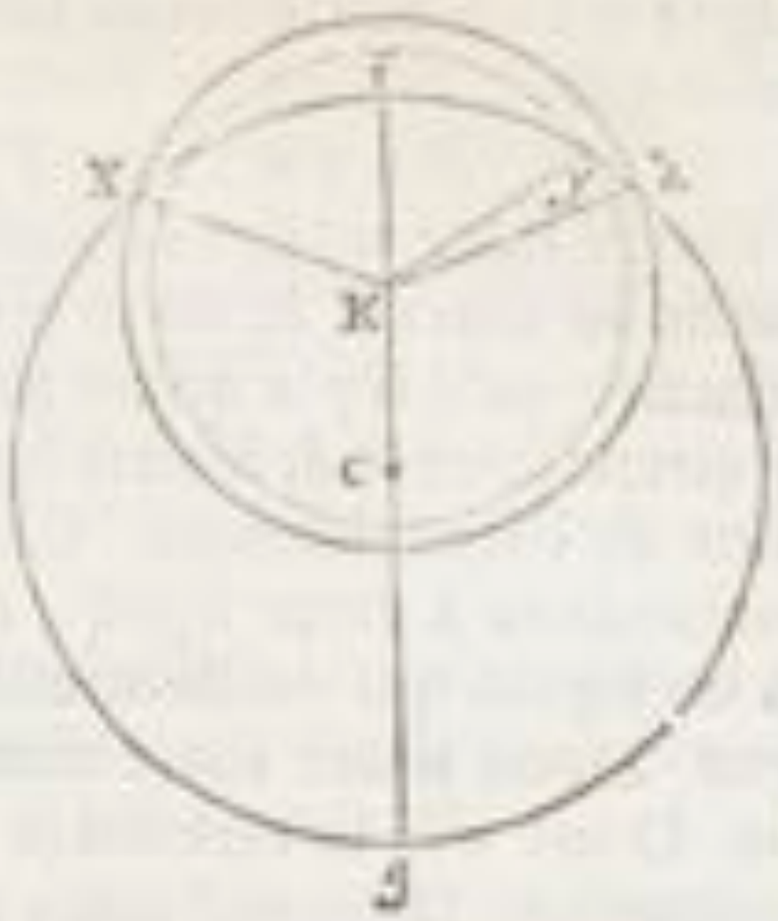
Or il eſt clair que le point *f* ſe trouvera au dedans du 2e cercle, parce que *k f* eſt plus courte que *k x*, qui en eſt le rayon. Donc tout ce qui eſt d'une part entre *f* & x, & de l'autre entre *f* & *x*, ſe trouvera auſſy au dedans du 2e cercle, puis qu'il faudroit que le 2e cercle euſt coupé le 1er en d'autres points qu'x & *x*, afin que quelqu'un des points plus proche d'*f* ſe trouvaſſent ou dans la circonference du 1er cercle, ou au dehors.

Et par la même raiſon le point *g* ſe trouvera au dehors du 2e cercle, parce que *k g* eſt plus longue que *k x*, qui en eſt le rayon: ce qui fait voir auſſy que tous les points de la 1re circonference plus proches de *g* qu'*x* ſe trouveront auſſy au dehors du 2e cercle.

SIXIEME THEOREME.

XXIX. DE toutes les lignes menées de *k*, celles qui ſont menées à des points plus proches d'*f* ſont les plus courtes, & celles qui ſont menées à des points plus proches de *g* ſont les plus longues.

Suppoſons par exemple que le point *y* eſt plus proche d'*f* que le point *x*; je dis que *k y* eſt plus courte que *k x*



Car si on décrit un cercle du centre k, intervale $k\,x$, par le Theoreme precedent tous les points de la circonference du 1er cercle plus proches d'f qu'x se trouveront au dedans du 2e cercle.

Or par l'hypotheſe, y eſt plus proche d'f, qu'x. Donc y eſt au dedans du 2e cercle. Donc $k\,y$ eſt plus courte que $k\,x$, qui eſt un rayon du 2e cercle.

Que ſi au contraire nous ſuppoſons que φ eſt plus proche de g que ζ; je dis que $k\,\varphi$ eſt plus longue que $k\,\zeta$. Car ſi on décrit un cercle du centre k, intervale $k\,\zeta$, par le Theoreme precedent tous les points de la circonference du 1er cercle plus proches de g que ζ, ſe trouveront au dehors du 2e cercle. Or par l'hypoteſe, φ eſt plus proche de g que ζ. Donc φ eſt au dehors du cercle. Donc $k\,\varphi$ eſt plus longue que $k\,\zeta$, qui eſt un rayon du 2e cercle.

PREMIER COROLLAIRE.

DE nul point autre que le centre on ne peut mener trois lignes égales à la circonference. Car les 3 points où ces trois lignes ſeroient terminées ne peuvent pas eſtre également diſtans du point f, ou du point g. Donc ſi l'un des 3 eſt plus proche ou plus éloigné du point f, la ligne qui y ſera terminée ſera plus courte ou plus longue que les deux autres. Donc, &c. XXX.

SECOND COROLLAIRE.

LE point d'où l'on peut mener trois lignes égales à la circonference, en eſt neceſſairement le centre.

TROISIEME SECTION.

DES TANGENTES.

Nous avons déja dit qu'on appelle *tangente* du cercle XXXI.

La ligne qui touche le cercle sans entrer dedans, quoy que prolongée.

PREMIER THEOREME.

TOUTE ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon touche le cercle, & ne le touche qu'en un seul point; c'estadire qu'il n'y a qu'un seul point qui soit commun à la circonference & à cette ligne; & ce point s'appelle le point de l'atouchement. Car puisque le rayon est perpendiculaire à cette ligne, c'est la plus courte de toutes les lignes qui puissent estre menées du centre à cette ligne. Donc toute autre menée du centre sera plus longue. Donc elle se terminera en un point hors de la circonference. Donc nul autre point que celuy où ce rayon coupe perpendiculairement cette ligne ne pourra estre commun à cette circonference & à cette ligne. Ce qu'il falloit demonstrer.

SECOND THEOREME.

XXXII. ON ne peut faire passer aucune ligne droite entre la tangente & la circonference, quoyqu'on en puisse faire passer une infinité de circulaires qui ne se rencontreront que dans le point de l'atouchement.

La 1re partie se prouve ainsy. Soit *cf* un rayon, *mf* la tangente: soit *b* un point quelconque au dessous de la tangente. Tirant de *b* une ligne à *f*, elle sera oblique sur *cf*, & inclinée vers *c*, parceque *mf* est perpendiculaire à *cf*. Donc la perpendiculaire de *c* à *bf*, sera plus courte que *cf*. Donc elle se terminera dans le cercle (V.27.) Donc une partie de *bf* sera au dedans du cercle. Donc on n'aura pas pû faire passer *bf* entre la tangente & la circonference.

La 2e partie se prouve ainsy. Soit *fc* prolongée à l'infini du coste de *c*: soient tous les divers points de cette ligne au dessus de *c* appellez *x*. Toutes les circonferences qui auront l'un de ces points que j'appelle *x* pour centre, & *xf* pour

dessous

x f pour rayon, auront *m f* pour tangente par le 1er theorême, & ne rencontreront, ny la circonference qui a *c* pour centre, ny les unes les autres, qu'en *f* (par 27. 3.) Donc toutes ces circonferences passeront sans se rencontrer entre la tangente & le premier cercle.

PREMIER PROBLEME.

DESCRIRE la tangente qui touche la circonference à un point donné. XXXIII.

Tirer un rayon de ce point donné, la perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon sera la tangente que l'on cherche.

SECOND PROBLEME.

D'UN point donné hors le cercle tirer des tangentes au cercle. XXXIV.

Soit le point *k* donné hors le cercle, dont le centre est *c*, & le rayon *c f*, je décris un autre cercle du même centre, intervalle *c k*, & puis ayant tiré la ligne *k c*, qui coupe en *f* la circonference du 1er cercle, je tire par le point *f* la corde du grand cercle *m n*, qui coupe perpendiculairement *k c*, ce qui fait que *m n* touche le 1er cercle en *f*.

Cela fait, du point *k* je prens dans le grand cercle de part & d'autre les deux arcs *k b*, *k d*, égaux chacun à l'arc *m n*; Et je dis que les cordes *k b*, *k d* touchent le 1er cercle, & qu'elles le touchent au point où les rayons du grand cercle *m c* & *n c* coupent ces cordes.

Car les trois arcs du grand cercle *m n*, *k b*, *k d* estant égaux, les trois cordes qui les soûtiennent sont égales aussy, & par consequent également distantes du centre par 4. *sup.* Or *m n* est distante du centre *c* de la longueur d'un rayon du 1er cercle.

Donc les deux autres cordes *k b*, *k d* sont aussy distantes du centre de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc ce rayon leur est perpendiculaire, puis qu'autre-

ment il ne mesureroit pas leur distance d'avec le centre.

Donc par le Theoreme precedent elles sont tangentes du premier cercle.

Et elles le touchent au point où elles sont coupées par les rayons du grand cercle *m c* & *n c*. Car le point *k* partageant par la moitié l'arc *m n*, le point *m* partage aussy par la moitié l'arc *k b*. Donc le rayon *m c* est perpendiculaire à la corde *k b*, parce que les deux points *m* & *c* sont chacun également distans de *k* & de *b*.

Donc si le point où le rayon *m c* coupe la corde *k b* est *b*, *b* sera aussy l'extrémité du rayon du 1er cercle, qui est perpendiculaire à la corde *k b*, puis qu'autrement il faudroit que de *c* on pust tirer sur *k b* deux perpendiculaires differentes, ce qui ne se peut.

PREMIER COROLLAIRE.

XXXV. D'UN point hors le cercle on peut tirer deux tangentes au cercle, & non plus.

Cela est clair par ce qui vient d'estre demonstré.

SECOND COROLLAIRE.

XXXVI. ON peut considerer les tangentes comme terminées au point de l'atouchement; & alors

Les tangentes, ou menées à un même cercle d'un même point, ou de divers points également distans du centre, ou menées à des cercles égaux de points également distans des centres de chacun, sont égales.

Car il est visible par la solution du 2e Probleme, que dans tous ces cas, ces tangentes sont moitié de cordes égales.

QVATRIEME SECTION.

DES CIRCONFERENCES PARALLELES.

PREMIER LEMME.

XXXVII. VNE ligne droite est perpendiculaire à une circonference, autant que la nature de l'une & de l'autre le peut souffrir, lorsqu'elle est perpendiculaire à la tangente au point de la section.

SECOND LEMME.

XXXVIII. D'où il s'ensuit, que toute ligne qui estant prolongée

passe par le centre, est perpendiculaire à la circonference.

TROISIEME LEMME.

LA distance d'un point à une circonference, se mesure par la plus courte ligne qui puisse estre menée de ce point à cette circonference. Or cette plus courte ligne est celle qui ne comprend point le centre, mais qui est dans la méme ligne droite que celle qui y passe. (5. 25.) XXXIX.

Et par consequent cette ligne est perpendiculaire à la circonference par les deux premiers Lemmes.

DEFINITION
DES CIRCONFERENCES PARALLELES.

DEUX circonferences sont paralleles, lorsque tous les points de chacune sont également distans de l'autre. XL.

C'estadire selon les precedens Lemmes, lorsque toutes les lignes droites, menées chacune des points de l'une perpendiculairement sur l'autre, sont égales.

PREMIER THEOREME.

TOUTES les circonferences concentriques (c'estadire qui ont un meme centre) sont paralleles. XLI.

Car tous les rayons de la plus grande circonference sont perpendiculaires à l'une & à l'autre. Donc ostant les rayons de la plus petite, ce qui restera entre les deux circonferences, sera égal, & en mesurera la distance. Donc tous les points de chacune seront également distans de l'autre. Donc elles sont paralleles.

SECOND THEOREME.

DEUX cercles non concentriques estant l'un dans l'autre, le diametre du plus grand qui passera par les deux centres, coupera chaque circonference par la moitié; & alors il arrivera 3. ou 4. choses considerables. XLII.

1. Les parties de ce diametre qui se trouveront d'un costé & d'autre entre les deux circonferences, c'estadire fm, & gn, sont perpendiculaires à l'une & à l'autre, &

mesurent *f m* le plus grand, & *g n* le plus petit éloignement de ces deux circonferences.

2. Nulle autre ligne que ces deux là qui se trouvent dans ce diametre qui passe par les deux centres, ne peut estre perpendiculaire à l'une & à l'autre circonference, toute autre ligne qui sera perpendiculaire à l'une des circonferences, estant oblique sur l'autre.

3. Tous les points d'une demycirconference d'une part sont inegalement distans de l'autre demycirconference de la mesme part.

4. Toutes les fois que deux points d'une circonference sont également distans de l'une ou l'autre des extremitez de son diametre, qui passe par les deux centres, ils sont aussy également distans de l'autre circonference.

Tout cela est si aisé à prouver par ce qui a esté dit dans la 2e Section, & par les trois Lemmes de celle-cy, que j'aime mieux le laisser à trouver pour exercer l'esprit, que de perdre du temps à le demonstrer.

COROLLAIRE.

XLIII. Il s'ensuit de là, qu'on peut remarquer trois differences entre le parallelisme des lignes droites, & celuy des lignes circulaires.

La 1re est, que la notion negative des paralleles droites, qui consiste à ne se rencontrer jamais quand on les prolongeroit à l'infini, n'a point de lieu dans les circulaires, qui peuvent bien ne se rencontrer jamais sans estre paralleles, de sorte que pour l'estre il faut que ce soit selon la notion positive, qui consiste en ce que les points de l'une sont toujours egalement distans de l'autre.

La 2e est, que deux lignes droites sont paralleles, quand une mesme ligne est perpendiculaire à l'une & à l'autre. Au lieu qu'il peut y avoir non seulement une ligne droite, mais deux, qui soient perpendiculaires à

l'une & à l'autre circonference, sans qu'elles soient paralleles, mais il n'y en peut pas avoir trois.

La 3e est, que deux lignes droites ne s'estant point croisées, il ne peut pas y avoir deux points de l'une egalement distans de l'autre, qu'elles ne soient paralleles. Au lieu que dans les circonferences non paralleles il peut y avoir une infinité de points dans chacune, qui soient deux à deux egalement distans de l'autre. Mais il n'y en peut avoir trois ensemble.

Le fondement de ces differences vient d'une part de ce que la ligne circulaire est bornée en elle mesme. Et de l'autre, de ce qu'il en faut avoir trois points pour en avoir la position; au lieu qu'il n'en faut que deux pour avoir celle de la ligne droite.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE HUITIEME.

DES ANGLES RECTILIGNES.

I. *APRES avoir parlé des lignes, c'eſt ſuivre l'ordre de la nature que de paſſer aux angles qui ſont plus compoſez que les lignes tenant quelque choſe des ſurfaces, comme nous allons voir.*

DEFINITION DE L'ANGLE RECTILIGNE.

II. *L'angle rectiligne* eſt une ſurface compriſe entre deux lignes droites qui ſe joignent en un point du coſté où elles s'approchent le plus, indefinie & indeterminée ſelon l'une de ſes dimenſions, qui eſt celle qui répond à la longueur des lignes qui la comprennent, & determinée ſelon l'autre par la partie proportionnelle d'une circonference dont le centre eſt au point où ces lignes ſe joignent.

AUTRES DEFINITIONS.

III. LES lignes qui comprennent l'angle s'appellent *ſes coſtez.*

IV. LE point où ces lignes ſe joignent s'appelle *ſon ſommet.*

V. SI l'on joint deux points de ces coſtez par une autre li-

gne, cette ligne s'appelle *la base* ou *La soustendante de l'angle*. Et l'on dit que cette ligne *soutient* l'angle, & que l'angle est *oppose* à cette ligne, ou est *soutenu* par cette ligne.

CETTE base s'appelle *corde* quand les costez de l'angle sont égaux, pource qu'alors ces costez de l'angle sont considerez comme rayons d'un cercle dont cette base est une corde. VI.

QUE si d'un des costez on peut faire descendre une perpendiculaire sur l'autre, cette base alors s'appelle le *sinus* de cet angle. VII.

CETTE partie proportionelle de la circonference qui mesure la grandeur de l'angle s'appelle *l'arc que comprend l'angle*. VIII.

PROPOSITION FONDAMENTALE
DE LA MESURE DES ANGLES.

LES arcs de toutes les circonferences qui ont pour centre le point où les costez de l'angle se coupent sont tous proportionels à leurs circonferences, & par consequent determinent tous la mesme grandeur de l'angle. IX.

La consequence est claire par la definition de l'angle, puisque nous avons dit que c'estoit une surface indeterminée selon une dimension, & qui n'estoit determinée selon l'autre que par une partie proportionelle des circonferences qui ont pour centre le point où ses costez se joignent.

Pour montrer donc que les arcs de ces circonferences determinent tous la mesme grandeur de l'angle, il ne faut que montrer que tous ces arcs sont proportionels à leurs circonferences.

Or c'est ce qui a déja esté prouvé, Livre VII. 10.

DE LA PREMIERE MESURE DE L'ANGLE
QUI EST L'ARC COMPRIS ENTRE SES COSTEZ.

IL s'ensuit de là que pour sçavoir la vraye grandeur d'un angle, il faut sçavoir la grandeur proportionelle de l'arc compris entre ses costez, c'est à dire de combien de degrez est cet arc. Car un degré n'est pas le nom d'une grandeur X.

absolue, mais proportionelle, puisque, comme nous avons déja dit, il signifie la trois cent soixantiéme partie de quelque circonference que ce soit, dont chacune en soy est plus grande ou plus petite selon que la circonference est plus grande ou plus petite: & il en est de mesme des minutes, des secondes, & des troisiémes. C'est pourquoy on peut appeller arcs égaux, selon qu'il a esté dit VII. 19. ceux qui sont d'autant de degrez, quoyqu'ils puissent estre inegaux selon leur grandeur absolue. Et égaux en toute maniere, ou *tout-égaux*, ceux qui sont d'autant de degrez & qui sont aussy égaux selon leur grandeur absolue, tels que sont les arcs d'autant de degrez dans les cercles égaux.

DE L'ANGLE DROIT.

XI. C'EST par là qu'on a divisé l'angle en *droit* & *non droit*, & le non droit, en *aigu* & *obtus*.

On appelle angle droit celuy qui a pour mesure la moitié de la demycirconference. D'où il s'ensuit,

1. Que tout angle droit a de l'autre costé sur la mesme ligne un autre angle qui luy est égal, puisque l'angle qui est de l'autre costé a pour mesure ce qui reste de la demycirconference, qui est la moitié.

2. Qu'un angle droit est la mesme chose qu'un angle de 90. degrez. Car la demycirconference en ayant 180. la moitié de cette demycirconference en a 90.

3. Que toute ligne perpendiculaire sur une ligne fait sur cette ligne deux angles droits, l'un d'un costé & l'autre de l'autre. Car elle partage en deux la demycirconference qui a pour centre le point de leur section, par VII. 17.

DE L'ANGLE AIGU.

XII. ON appelle angle *aigu* celuy qui est moindre qu'un droit, c'est à dire qui a pour mesure un arc moindre que la moitié de la demycirconferencc. D'où il s'enfuit

Que tout angle moindre que de 90. degrez est aigu.

DE L'ANGLE OBTUS.

XIII. ON appelle angle *obtus* celuy qui est plus grand que l'angle droit; c'est à dire qui a pour mesure un arc plus grand

grand que la moitié de la demycirconference. D'où il s'enfuit

Que tout angle plus grand que de 90. degrez eſt obtus.

PREMIER THEOREME.

TOUTE ligne qui en coupe une autre obliquement fait d'un coſté un angle aigu & de l'autre un obtus, & les deux enſemble vallent deux droits. Car cette ligne partage inegalement la demycirconference. Et partant fait deux angles inegaux. Mais elle ne la diviſe qu'en deux portions, & partant les deux portions priſes enſemble valent toute la demycirconference. XIV.

SECOND THEOREME.

LORSQUE pluſieurs lignes droites en rencontrent une en un même point, tous les angles que font toutes ces lignes entre elles & avec la rencontrée valent deux droits. Car ils comprennent tous enſemble la demycirconference, qui eſt la meſure de deux angles droits. XV.

DEFINITION.

L'ANGLE *aigu*, qui avec l'obtus vaut deux angles droits, s'appelle le *complement de l'angle obtus*. XVI.

TROISIEME THEOREME.

LORSQUE deux lignes ſe coupent en paſſant de part & d'autre, il eſt bien clair que ſi elles ſe coupent perpendiculairement elles font quatre angles égaux tous quatre entr'eux, c'eſt à dire tous quatre droits. XVII.

Mais ſi elles ſe coupent obliquement, elles en font deux aigus & deux obtus, dont l'aigu eſt oppoſé à l'aigu & l'obtus à l'obtus, & cela s'appelle eſtre oppoſé au ſommet. Et les oppoſez ſont égaux.

Car faiſant un cercle du point où ces deux lignes *b e* & *f g* ſe coupent, chacune coupera la circonference par la moitié, & par conſequent la moitié *b g e* eſt égale à la moitié *f b g*. Or ces deux moitiez ont

l'arc *b g* de commun, qui eſt l'arc d'un des angles obtus: & par conſequent oſtant cet arc, l'arc de l'aigu qui reſte d'une part ſera égal à l'arc de l'aigu qui reſte de l'autre. On prouvera la même choſe des deux angles obtus.

QUATRIEME THEOREME.

XVIII. LORSQUE pluſieurs lignes droites ſe rencontrent en un même point eſtant menées de toutes parts, tous les angles qu'elles font valent quatre droits. Car ils ont tous enſemble pour meſure une circonference entiere.

DES AUTRES MESURES DE L'ANGLE.

XIX. *Quoyque l'angle n'ait en effet de vraye & naturelle meſure que l'arc d'un cercle; neanmoins comme on ne connoiſt pas la longueur des lignes courbes, on eſt obligé d'avoir recours à d'autres meſures, mais toujours par rapport à celle-là.*

On les peut rapporter à trois qui ſont toutes priſes de la baſe conſiderée diverſement: ou comme *corde*: ou comme *ſinus*: ou ſimplement comme *baſe*.

DE LA SECONDE MESURE DE L'ANGLE QUI EST LA CORDE.

XX. Nous commencerons par la baſe conſiderée comme corde, ſurquoy il faut remarquer.

1. Que pour cela il faut que les coſtez de l'angle ſoient pris égaux. Car alors ils ſont conſiderez comme rayons d'un cercle dont le centre eſt au ſommet, & ainſy la ligne qui en joint les extremitez eſt la corde de l'arc de ce cercle qui meſure cet angle.

2. Les angles ainſy conſiderez peuvent eſtre appellez *iſoſceles*, c'eſtadire à jambes égales.

3. Deux angles iſoſceles comparez enſemble peuvent eſtre ou *equilateres* entre eux, ou *inequilateres*. c'eſtadire que leurs coſtez ſont rayons ou de cercles égaux, ou de cercles inégaux.

Cela ſuppoſé, pour bien comprendre toute cette me-

sure de l'angle, il ne faut que faire attention à ces Lemmes tirez des Livres V. & VII.

PREMIER LEMME.

DANS les cercles égaux les cordes egales soûtiennent des arcs tout égaux. Et les arcs égaux sont soûtenus par cordes égales. XXI.

SECOND LEMME.

DANS les cercles égaux les plus grandes cordes soûtiennent de plus grands arcs. Et les plus grands arcs sont soûtenus par les plus grandes cordes. VII. 10. XXII.

TROISIEME LEMME.

LES cercles estant inégaux les cordes égales soûtiennent des arcs de plus de degrez dans les plus petits cercles. VII. 20. XXIII.

QUATRIEME LEMME.

LES arcs d'un même nombre de degrez sont soûtenus par de plus grandes cordes dans les plus grands cercles. VII. 20. XXIV.

PREMIER THEOREME.

TROIS sortes d'égalitez peuvent estre considerées dans deux angles isosceles. XXV.

1. L'egalité des costez de l'un à ceux de l'autre, qui fait qu'on les appelle *equilateres entr'eux.*
2. L'égalité des cordes, qui les peut faire appeller *isocordes.*
3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux de ces égalitez estant données, donnent la troisième.

PREMIER CAS.

LES angles equilateres entr'eux & isocordes sont égaux. Car ils ont pour mesure des arcs tout-égaux, puisqu'estant equilateres ils sont mesurez par des arcs de cercles égaux, & que par le 1er Lemme les cordes égales de cercles égaux soûtiennent des arcs tout-égaux. XXVI.

SECOND CAS.

LES angles equilateres & égaux sont isocordes. C'est la converse du même premier Lemme. XXVII.

TROISIEME CAS.

XXVIII. LES angles isocordes & égaux sont équilateres entr'eux. Car il est aisé de voir par le 5e Lemme que les cordes égales ne peuvent soûtenir des arcs égaux, que dans les mêmes cercles, ou en des cercles égaux.

SECOND THEOREME.

XXIX. QUAND il n'y a égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrive.

PREMIER CAS.

N'y ayant égalité que dans les costez, les plus grandes cordes donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grandes cordes. C'est le 2e Lemme.

SECOND CAS.

XXX. N'Y ayant égalité que dans les cordes, les plus grands costez donnent les plus petits angles, & les plus petits angles ont les plus grands costez. C'est le 3e Lemme.

TROISIEME CAS.

XXXI. N'Y ayant égalité que dans la grandeur des angles, les plus grandes cordes donnent les plus grands costez, & les plus grands costez ont les plus grandes cordes. C'est le 4e Lemme.

PREMIER PROBLEME.

XXXII. COUPER en deux un angle donné. L'ayant pris isoscele, il ne faut qu'en couper la corde perpendiculairement & par la moitié, ce qui se fait de la même sorte. Car alors l'arc sera partagé par la moitié, par VII. 6.

SECOND PROBLEME.

XXXIII. AYANT un point donné dans une ligne donnée, en élever une qui faile sur cette ligne un angle égal à un donné. Soit l'angle donné. L'ayant fait isoscele en marquer la corde, puis du point donné dans la ligne pris pour centre, décrire d'un intervale égal aux costez de l'angle donné une portion de circonference, dans laquelle en commençant par le point où cette circonference coupera la ligne donnée, on prendra une corde égale à la corde de l'angle donné. La ligne menée du point donné à l'extremité de cette corde satisfera au Probleme. Car ces deux angles

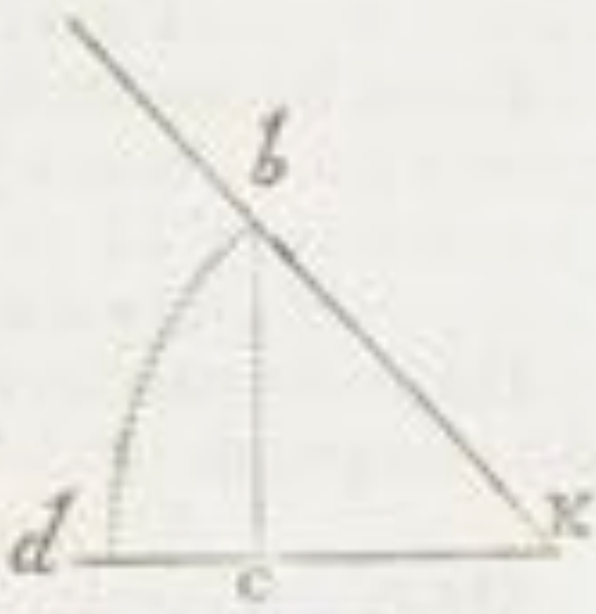
ſeront equilateres entr'eux & iſocordes, & par conſequent égaux par le 1er Theoreme.

DE LA TROISIEME MESURE DE L'ANGLE, QUI EST LE SINUS.

LE ſinus de l'arc qui meſure un angle peut eſtre appellé le ſinus de cet angle. D'où il s'enſuit, XXXIV.

1. QUE comme il n'y a que les arcs moindres que la moitié de la demycirconference qui ayent un ſinus, il n'y a auſſy que les angles aigus qui en ayent. Ce qui n'empeſche pas qu'on ne ſe puiſſe ſervir des ſinus pour comparer enſemble deux angles obtus, en meſurant par les ſinus les angles aigus qui ſont les complemens de ces obtus. Voyez VII. 17. XXXV.

2. IL s'enſuit que toute ligne menée d'un point de l'un des coſtez d'un angle aigu perpendiculairement ſur l'autre coſté, eſt le ſinus de l'arc qui meſure cet angle, & par conſequent le ſinus de cet angle. XXXVI.



Car ſoit *k* le ſommet d'un angle aigu, & que de *b*, point quelconque de l'un de ces coſtez, ſoit menée ſur l'autre la perpendiculaire *b c*. Je dis que *b c* eſt le ſinus de l'arc qui meſure cet angle. Car ayant prolongé *k c* juſques en *d*, en ſorte que *k d* ſoit égale à *k b*, ſi du centre *k*, intervale *k b*, on décrit un cercle, l'arc de ce cercle compris entre *d* & *b* ſera la meſure de cet angle. Or *b c* eſt le ſinus de cet arc, par VII. 11. Donc *b c* eſt le ſinus de l'arc qui meſure l'angle *k*, & par conſequent de l'angle *k*.

3. IL s'enſuit que le coſté du point duquel eſt menée la perpendiculaire ſur l'autre coſté depuis le ſommet juſques à ce point, comme *k b*, peut eſtre appellé le rayon de cet angle, parce qu'il eſt le rayon du cercle dont l'arc le meſure. Et l'autre coſté depuis le point où tombe la perpendiculaire ou *ſinus*, peut eſtre appellé *l'autre ſinus*, qui eſt toûjours égal au rayon moins le *ſinus verſe*. D'où il s'enſuit, XXXVII.

XXXVIII. 4. QUE la grandeur du sinus reglant toújours celle du sinus verse (comme il a esté montré VII. 16.) elle regle toújours aussy celle des *antisinus*, quoyque par rapport au rayon, puisque l'*antisinus* n'est autre chose que le rayon moins le *sinus verse*; de sorte que dans deux angles differens les rayons & les sinus ne sçauroient estre égaux que les antisinus ne le soient aussy.

Tout cela supposé, soient considerez les Lemmes suivans.

PREMIER LEMME.

XXXIX. QUAND on dit que deux angles qu'on veut mesurer par les sinus ont le rayon égal, c'est de même que si l'on disoit qu'ils sont mesurez par des arcs de cercles égaux; & s'ils ont le rayon inégal, par des arcs de cercles inégaux.

SECOND LEMME.

XL. DANS les cercles égaux les arcs égaux ont des sinus égaux, & les sinus égaux donnent des arcs égaux. VII. 15.

TROISIEME LEMME.

XLI. DANS les cercles égaux les plus grands arcs ont les plus grands sinus, & les plus grands sinus donnent les plus grands arcs. VII. 15.

QUATRIEME LEMME.

XLII. DANS des cercles inégaux les arcs estant égaux, ceux des plus grands cercles ont les plus grands sinus. VII. 18.

CINQUIEME LEMME.

XLIII. DANS des cercles inégaux les sinus estant égaux, ceux des plus grands cercles donnent des arcs proportionellement plus petits, c'estadire de moins de degrez. C'est une suitte claire du precedent.

PREMIER THEOREME.

XLIV. TROIS égalitez peuvent estre considerées dans les angles que l'on compare & que l'on mesure par les sinus.

1. L'égalité des rayons.
2. L'égalité des sinus.
3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux estant données donnent la 3e.

PREMIER CAS.

LES angles qui ont le rayon égal & le sinus égal sont égaux. 1er & 2e Lemme. XLV.

SECOND CAS.

LES angles égaux qui ont le rayon égal ont le sinus égal. 1er & 2e Lemme. XLVI.

TROISIEME CAS.

LES angles qui sont égaux & qui ont le sinus égal, ont le rayon égal. Car s'ils avoient le rayon inégal, ils seroient mesurez par des arcs de cercles inégaux : & par consequent (selon le 5e Lemme) les sinus égaux donneroient des arcs proportionellement inégaux, & ainsy les angles ne pourroient pas estre égaux. XLVII.

SECOND THEOREME.

N'Y ayant égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrivera. XLVIII.

PREMIER CAS.

N'Y ayant égalité que dans le rayon, les plus grands sinus donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grands sinus. 3e Lemme.

SECOND CAS.

N'Y ayant égalité que dans les sinus, le plus grand rayon donne le plus petit angle, & le plus petit angle a le plus grand rayon. 5e Lemme. XLIX.

TROISIEME CAS.

N'Y ayant égalité que dans les angles, le plus grand rayon donne le plus grand sinus, & le plus grand sinus donne le plus grand rayon. L.

DES ANGLES FAITS PAR LES LIGNES ENTRE PARALLELES.

COMME les perpendiculaires entre les paralleles font des angles droits sur l'une & sur l'autre, ce qui est toûjours la même chose, il n'y a que les angles que font les obliques à considerer. LI.

Mais ces obliques entre paralleles faisant d'une part un angle aigu & de l'autre un obtus, c'est l'aigu que l'on mesure premierement, & par l'aigu on connoist l'obtus. Et

ainſy quand nous parlerons d'angles égaux, nous entendrons les aigus, & les obtus par conſequence ſeulement.

Or dans la conſideration de ces angles aigus faits par des obliques entre paralleles,

L'oblique eſt le rayon de l'angle,

La perpendiculaire de l'extremité de l'oblique (qui eſt un point de l'une des paralleles) ſur l'autre parallele en eſt le ſinus.

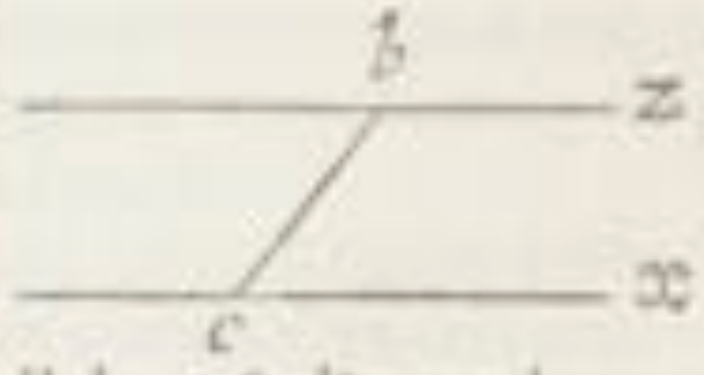
D'où il s'enſuit, que les ſinus qui meſurent les angles que font des obliques entre les mêmes paralleles ſont tous egaux, parceque les perpendiculaires entre les mêmes paralleles ſont égales.

Comme auſſy entre differentes paralleles, pourveu que les deux paralleles d'une part ſoient autant diſtantes l'une de l'autre, que celles de l'autre part. Et c'eſt ce qu'on peut appeller deux eſpaces paralleles égaux.

On peut tirer de là diverſes propoſitions importantes qui ne ſeront que des Corollaires du 1er ou du 2e Theoreme.

PREMIER COROLLAIRE.

LII. TOUTE oblique entre deux paralleles fait les angles alternes ſur ces paralleles égaux, c'eſtadire que l'aigu qui eſt d'une part eſt égal à l'aigu qui eſt de l'autre part, & par conſequent l'obtus à l'obtus.



Car ces angles alternes ont pour rayon cette même ligne oblique *b c*, & pour ſinus l'un la perpendiculaire de *b*, ſur la parallele *x*, & l'autre la perpendiculaire de *c*, ſur la parallele *z*. Or ces deux perpendiculaires ſont égales. Donc par 45. 5.

SECOND COROLLAIRE.

LIII. LES obliques égales entre les mêmes paralleles ſont les angles égaux : par la même raiſon.

TROISIEME COROLLAIRE.

LIV. LES obliques entre paralleles qui font les angles égaux ſont égales, 5. 47.

QUATRIEME

QUATRIEME COROLLAIRE.

LV. Les plus courtes lignes entre paralleles sont les plus grands angles ; par le 2e Theoreme. 2e Cas.

CINQUIEME COROLLAIRE.

LVI. Quand des lignes sont enfermées entre differentes lignes paralleles, on peut y considerer trois égalitez.

1. L'égalité des obliques.

2. L'égalité des angles.

3. L'égalité de la distance entre les unes & les autres de ces paralleles, ce qui fait que cette distance estant égale, les perpendiculaires entre ces differentes paralleles sont égales.

Or deux de ces égalitez estant données donnent la troisiéme.

1. CAS. Si les obliques sont égales, & les angles qu'ils font entre leurs paralleles égaux, les unes & les autres paralleles sont également distantes. Car ce sont des angles qui sont égaux, & qui ont les rayons égaux (sçavoir ces obliques) Donc leurs sinus sont égaux, par 46 5.

Or ils ont pour sinus les perpendiculaires entre leurs paralleles.

Donc ces perpendiculaires sont égales.

2. CAS. Si les obliques sont égales, & les paralleles de part & d'autre également distantes, les angles seront égaux, par 45. 5.

3. CAS. Si les paralleles de part & d'autre sont également distantes, & que les angles soient égaux, les obliques sont égales, 47. 5.

SIXIEME COROLLAIRE.

LVII. La même ligne coupant obliquement plusieurs paralleles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'est-à-dire qu'elle fait sur toutes les angles aigus égaux. C'est une suitte du premier Corollaire & de 13. 5.

Soient trois lignes paralleles x, y, z, coupées par la ligne B en e, en d, en f; l'angle aigu vers e, au dessus d'x, est égal à l'angle aigu de dessous, parce qu'ils sont opposez au sommet; & l'angle aigu de dessous est égal à

l'angle aigu vers *d*, au dessus d'*y*, parcequ'ils sont alternes, & ce dernier est égal à l'aigu de dessous *y*, parcequ'ils sont opposez au sommet. Et ce dernier a l'aigu vers *f*, au dessus de *z*, parce qu'ils sont alternes, & ainsy des autres. Donc tous les angles aigus

que fait une même ligne sur diverses paralleles qu'elles coupe sont égaux. Et de là il s'ensuit, que les obtus sont égaux aussy, parce que les aigus sont les complemens des obtus.

SEPTIEME COROLLAIRE.

LVIII. PLUSIEURS paralleles estant également distantes les unes des autres, c'est à dire la 1re de la 2e, & la 2e de la 3e, & la 3e de la 4e, &c.

Si une même ligne les coupe toutes, toutes les portions de cette ligne comprises entre deux de ces paralleles sont égales.

Car tous les angles aigus que fait cette ligne sur ces paralleles sont égaux. Et les sinus de ces angles, qui sont les perpendiculaires entre chaques deux paralleles, sont égaux aussy par l'hypotese.

Donc les rayons de ces angles qui sont les portions de cette ligne comprises entre chaques deux paralleles sont égales.

HUITIEME COROLLAIRE.

LIX. LORS que deux lignes sont menées d'un même point sur une autre ligne, c'est comme si ces lignes estoient entre paralleles.

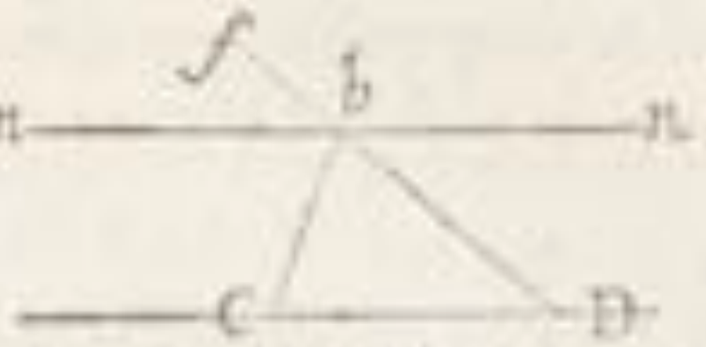
Car on peut par ce point tirer une parallele à la ligne que ces deux lignes coupent.

NEUVIEME COROLLAIRE.

LX. TOUT angle plus les deux angles que font ces costez sur la base sont égaux à deux droits.

Soient *b c* & *b d* les costez d'un angle, & *c d* la base,

par le precedent Corollaire, on peut mener par le point *b* la ligne *m n*, parallele à la base, sur laquelle parallele les costez de l'angle donné feront de nouveaux angles autour du donné, sçavoir l'angle *m b c*, & *n b d*. Or ces trois angles sont égaux à deux droits, par 15. 5. Et chacun des deux qui sont à costé de l'angle donné, est égal à un de la base, sçavoir à son alterne, par 51. 3.



Donc les deux de la base plus l'angle donné sont égaux à deux droits.

DIXIEME COROLLAIRE.

LXI. Si on prolonge un costé d'un angle vers le sommet de l'angle, comme si on prolongeoit *d b* jusques en *f*, l'angle que fait ce costé prolongé sur l'autre costé, comme l'angle *f b c*, est égal aux deux angles sur la base. Car cet angle qui est appellé exterieur plus l'angle du sommet, vallent deux droits. Or les deux angles sur la base plus l'angle du sommet vallent aussy deux droits. Ostant donc l'angle du sommet qui est commun, l'angle exterieur sera égal aux deux angles sur la base.

Ce sera la même chose si on prolonge la base. Car l'angle exterieur que fera la base prolongée sur un costé, sera égal aux deux interieurs opposez, c'est à dire à l'angle que fait l'autre costé sur la base plus l'angle du sommet.

ONZIEME COROLLAIRE.

LXII. Deux angles sont égaux, quand les angles que les costez de l'un font sur sa base, sont égaux à ceux que les costez de l'autre font sur la sienne.

DOUZIEME COROLLAIRE,
TROISIEME PROBLEME.

LXIII. D'un point donné hors une ligne donnée, mener une ligne qui face sur la donnée un angle donné.

D'un point quelconque de la ligne donnée en élever une qui face sur la donnée l'angle donné (par le 1e Probleme. 33.)

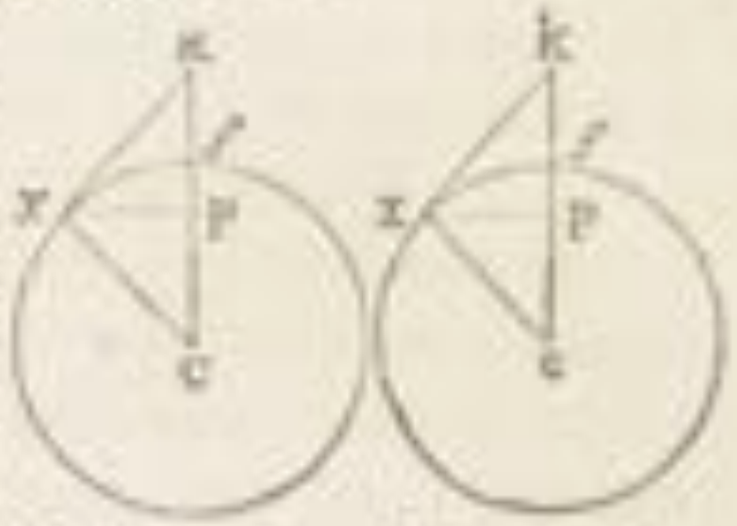
La parallele à cette ligne qui passera par le point donné & coupera la ligne donnée, satisfera au Probleme.

DE LA QUATRIEME MESURE DE L'ANGLE QUI EST GENERALEMENT LA BASE.

CETTE mesure est la plus imparfaite, & ne peut servir à mesurer les angles qu'en cas que les costez de deux angles non isosceles soient égaux chacun à chacun, ce qui fera deux Theoremes.

PREMIER THEOREME.

LXIII. Lors que deux angles non isosceles sont equilateres entr'eux; c'estadire que chacun des costez de l'un est égal à chacun des costez de l'autre; si la base est égale à la base, ces angles sont égaux.



C'est ce qui se prouve ainsy. Ou l'on peut faire tomber une perpendiculaire de l'extremité de l'un des costez de ces angles sur l'autre costé; ou on ne le peut, comme lors qu'ils sont obtus.

1. CAS. Si on le peut (comme lorsque les angles sont *k c x*) les perpendiculaires *x p* seront égales, par V. 57.

Or ces perpendiculaires sont les sinus de ces angles qui ont aussy le rayon égal, sçavoir *c x*. Donc ils sont égaux, par 45. 5.

2. CAS. Si on ne le peut (comme si ces angles estoient *c x k* des mêmes figures) alors la perpendiculaire *x p* menée du sommet même de chacun des angles, feroit voir que les deux angles que les costez de chacun de ces angles obtus font sur leur base, sont égaux chacun à chacun (c'est-adire l'angle *k* égal à l'angle *k*, & l'angle *c*, à l'angle *c*.) Donc les angles obtus *k c x* seront égaux, par 61. 5.

SECOND THEOREME.

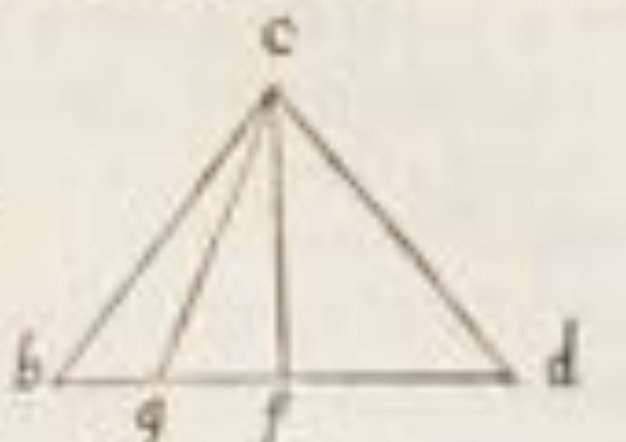
LXIV. Deux angles égaux estant equilateres entr'eux ont la base égale.

Ces angles égaux que l'on suppose equilateres sont,

1. Ou droits.
2. Ou aigus.
3. Ou obtus.

1. CAS. S'ils sont droits, comme *b f c*, & *m n p*, ils ont les bases *b c* & *m n* égales, par V. 48.

2. CAS. S'ils sont aigus, comme *b d c*, *n q m*, les perpendiculaires *c f* & *m p*, qui sont les sinus de ces angles, seront égales, par 56. 3.



Donc *f d* = *p q*. V. 48.
Donc *b f* = *n p*. I. 19.
Donc *c b* = *m n*. V. 48. Ce qu'il falloit demonstrer.

3. CAS. S'ils sont obtus, comme *b g c*, & *n o m*; les angles aigus *c g f*, *m o p*, complemens de ces obtus, seront egaux.

Donc les perpendiculaires *c f* & *m p*, qui sont les sinus de ces angles, seront égales par 3. 56.
Donc *g f* = *o p*.
Donc *b f* = *n p*. I. 18.
Donc *c b* = *m n*. V. 48. Ce qu'il falloit demonstrer.

OBSERVATION
TOUCHANT LA COMPARAISON
DE LA PREMIERE MESURE DES ANGLES
AVEC CES TROIS DERNIERES.

Nous avons déja dit qu'il n'y avoit que l'arc qui fust la mesure parfaite & naturelle de l'angle. Mais pour le mieux voir, il faut remarquer que les trois autres mesures montrent bien si un angle est égal à un angle, ou entre des angles inégaux quel est le plus grand ou quel est le plus petit. Mais il n'y a que l'arc qui donne la veritable proportion entre les angles inégaux. Car il est certain que si l'arc est triple ou quadruple, ou quintuple de l'arc, l'angle sera aussy triple, quadruple ou quintuple de l'angle. Mais cela ne se peut

pas dire des trois autres mesures, estant faux que si la corde est triple de la corde, lors même que les angles sont equilateres entr'eux, l'angle soit triple de l'angle, parceque les cordes ne sont pas proportionelles à leurs arcs, comme il a esté dit VII. 21. *Et c'est d'où vient la difficulté de la trisection de l'angle, parcequ'il ne suffit pas pour cela de couper la corde en trois : ce qui seroit facile, mais il faut couper l'arc en trois, ce qui ne se peut par la geometrie ordinaire, c'est-à-dire en n'y employant que des lignes droites & circulaires.*

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE NEVVIEME.

DES ANGLES QVI ONT LEVR SOMMET HORS LE CENTRE DU CERCLE, DONT LES ARCS NE LAISSENT PAS DE LES MESURER.

IL eſt bien aiſé de reconnoiſtre que les angles ne peuvent avoir pour veritable meſure que les arcs d'un cercle, & que toutes les autres meſures, comme les cordes, les ſinus, & les baſes, ne peuvent eſtre que ſubſidiaires de celle là, & que meme elles ne les meſurent qu'imparfaitement. 1.

Mais on a creu juſques icy qu'on ne pouvoit employer pour meſurer un angle que les arcs du cercle au centre duquel eſt le ſommet de cet angle. Et ainſy arrivant rarement que deux angles que l'on compare ayent leur ſommet au centre du meme cercle, on ne pouvoit preſque jamais employer la meſure des arcs dans la comparaiſon de pluſieurs angles, & on eſtoit obligé d'avoir recours à de longs circuits par la conference de pluſieurs triangles, ce qui obligeoit à conſiderer tant de lignes, qu'il eſtoit impoſſible que l'imagination n'en fuſt extremement fatiguée, qui eſt une des choſes qu'on doit éviter autant que l'on peut dans l'eſtude de la Geometrie.

Cependant il eſt vray qu'il n'y a point d'angle qu'on ne 11.

puisse mesurer par les arcs d'un cercle, en quelque endroit qu'en soit le sommet au regard du cercle: C'est à dire,

1. Soit qu'il soit dans la circonference du cercle.

2. Soit qu'il soit au dedans, quoy qu'ailleurs qu'au centre.

3. Soit mesme qu'il soit au dehors, pourveu que ses costez coupent ou touchent le cercle.

C'est ce que l'on verra par ce Livre, qui ne servira pas seulement à mesurer avec une merveilleuse facilité toutes sortes d'angles, mais donnera aussy par là de grandes ouvertures pour trouver beaucoup de nouvelles choses touchant la proportion des lignes.

Mais pour rendre les preuves plus courtes, il est bon de supposer quelques Lemmes, ou clairs d'eux mêmes, ou demonstrez dans le Livre precedent, afin d'y renvoyer quand on en aura besoin.

PREMIER LEMME. DEFINITION.

III. LORSQUE dans toutes ces sortes d'angles on dit qu'un tel arc du cercle auquel ils ont rapport leur sert de mesure, cela veut dire, que si ce même angle estoit au centre du cercle, il auroit cet arc, ou un autre qui luy seroit égal, pour sa mesure. Ou bien cela veut dire, qu'un angle qui seroit au centre de ce cercle, qui auroit cet arc pour mesure, seroit égal à l'angle hors le centre qu'on dit avoir cet arc pour sa mesure.

Et de là il s'enfuit, que dans ces sortes d'angles, aussy bien que dans ceux qui sont au centre du cercle, deux angles sont égaux quand ils ont pour mesure des arcs égaux, ou absolument quand ce sont des arcs du même cercle, ou de cercles égaux; ou proportionellement quand ce sont des arcs de cercles inégaux: l'arc du petit ayant la même raison à sa circonference, que l'arc du grand à la sienne: comme si l'on & l'autre estoit la dixième partie de sa circonference, c'est à dire de 36. degrez.

SECOND LEMME.

IV. TOUT angle qui a pour mesure la MOITIE' { de la demy circonference est *Droit.* / d'un arc moindre que la demy c. *Aigu.* / d'un arc plus grand que la demy c. *Obtus.*

Et

Et de là il s'enſuit, que quand on dit que deux angles, ou trois angles ſont égaux à deux droits, cela veut dire que ces deux angles, ou ces trois angles pris enſemble ont pour meſure la demycirconference, c'eſt à dire 180. degrez.

Et quand on dit que deux angles ſont égaux à un droit, cela veut dire que ces deux angles pris enſemble ont pour meſure la moitié de la demycirconference, c'eſt à dire 90. degrez.

TROISIEME LEMME.

QUAND un tout eſt partagé en pluſieurs portions, comme *A* en *b*, *c*, *d*; comme ces trois portions enſemble ſont le tout, les trois moitiez de ces portions, c'eſt à dire une moitié de chacune, ſont toutes enſemble la moitié du tout, de ſorte que ces trois expreſſions ſont la même choſe. V.

La moitié du tout.

La moitié des trois portions que comprend le tout.

Les trois moitiez de ces portions, c'eſt à dire une de chacune, ce qui s'entend toûjours, quoyqu'on ne le marque pas.

Et ainſy ſuppoſant qu'*A* ſoit une circonference, & que *b*, *c*, *d*, ſoient trois arcs qui la comprennent toute,

$\frac{1}{3}$ de l'arc *b*, $\frac{1}{3}$ de l'arc *c*, $\frac{1}{3}$ de l'arc *d* } ſont égales priſes enſemble à la conference, c'eſt à dire à la demycirconference, ou à 180. degrez.

Et ſuppoſant qu'*A* ſoit une demycirconference, & que *b* & *c* ſoient deux arcs qui la comprennent, deux moitiez de ces arcs, une de chacun, valent la moitié de la demycirconference. C'eſt à dire 90. degrez.

Et alors on peut exprimer la moitié de l'un de ces arcs en deux manieres, ou par ſon propre nom, comme la $\frac{1}{2}$ d'un tel arc, ou par la moitié du tout dont il eſt portion moins la moitié de l'autre arc.

Ainſy eſtant donné une demycirconference qui comprend les arcs *b* & *c*, la $\frac{1}{2}$ de l'arc *b* eſt la même choſe que la moitié de la demycirconference moins la $\frac{1}{2}$ de l'arc *c*.

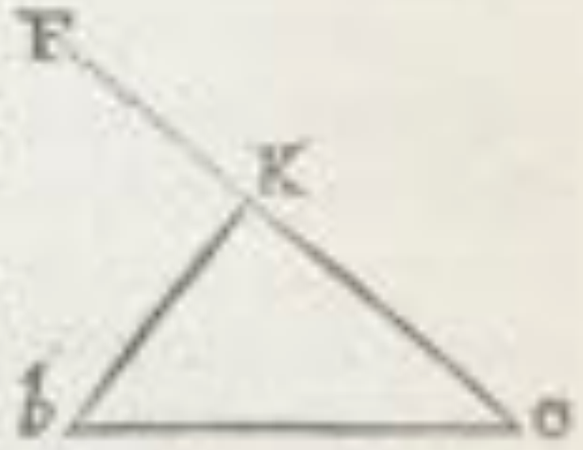
Enfin ſi un tout a deux portions, la moitié de la plus grande moins la moitié de la plus petite eſt la même cho-

se que la moitié du tout moins la petite entiere. Car si le tout a pour portions *b* & *c*, la moitié du tout est égale à la moitié de *b* plus la moitié de *c*. Il faut donc oster deux fois la moitié de *c* de la moitié du tout, pour rendre la moitié du tout égale à la moitié de *b*, dont on auroit osté la moitié de *c*.

QUATRIEME LEMME.

VI. ENFIN il se faut souvenir,

1. Que tout angle plus les deux que font ses costez sur sa base sont égaux à deux droits.



2. Que les deux angles sur la base d'un angle droit sont égaux à un droit.

3. Que si on prolonge un costé de l'angle vers le sommet, le nouvel angle que fait ce costé prolongé sur l'autre costé est égal aux deux angles qui sont sur la base du premier angle. Ainsy l'angle *f k b* est égal aux angles vers *b* & vers *c*.

LA PREMIERE SORTE D'ANGLES DONT LE SOMMET EST EN LA CIRCONFERENCE D'UN CERCLE DONNÉ.

DIVISION.

VII. LE sommet d'un angle ne se peut terminer en la circonference d'un cercle qu'en 3 manieres.

1. Quand l'un des costez est au dedans du cercle & l'autre au dehors

2. Quand tous les deux sont au dedans.

3. Quand ils sont tous deux au dehors du cercle. Mais parceque la premiere se subdivise en deux, on peut conter 4. genres de cette sorte d'angles.

Le 1. Quand l'un des costez est au dedans du cercle, & en est une corde, & que l'autre costé qui est au dehors touche le cercle.

Le 2. Quand l'un des costez estant aussy au dedans du

cercle celuy qui est au dehors coupe le cercle, & entre dedans le cercle lorsqu'on le prolonge de ce costé là : ou que ce n'est même qu'une corde prolongée hors le cercle.

Le 3. Quand tous les deux costez sont au dedans du cercle, & en sont deux cordes.

Le 4. Quand ils sont tous deux au dehors.

Mais parce qu'alors cette sorte d'angle ne peut avoir de rapport au cercle, que parce qu'il seroit égal à un angle qu'on luy opposeroit au sommet, qui seroit necessairement ou du 1er ou du 3e genre, il ne sera point necessaire de rien dire de ce 4e genre, puisqu'on en pourra juger par les autres.

Et ainsy il ne restera qu'à donner la mesure des trois premiers, ce que nous ferons par trois Theoremes tres clairs & tres faciles, & dont même les deux derniers ne seront qu'une suite du premier : & en même temps si feconds pour parler ainsy, qu'un tres grand nombre de propositions qui ne se prouvent dans la Geometrie ordinaire que par des voyes tres obscures & tres embarassées s'en deduiront sans peine, comme n'en estant que de simples Corollaires.

Mais pour cela il est necessaire de marquer la maniere dont on exprime les angles du 1er & du 3e genre dans la geometrie ordinaire. Car pour celuy du 2e, personne ne les a encore considerez.

PREMIER AVERTISSEMENT.

DEFINITIONS.

VIII. L'ANGLE du 1er genre, qui est celuy qui est compris entre une corde & une tangente, est appellé ordinairement *angle du segment*, *angulus segmenti*.

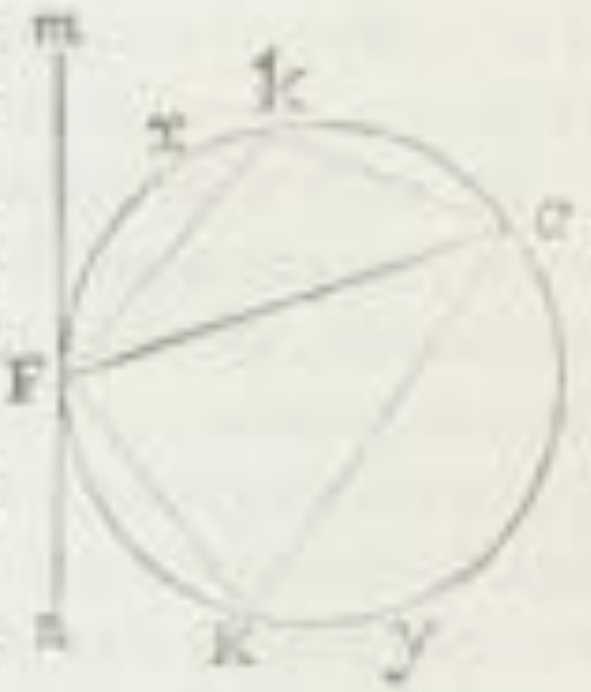
Et l'angle du 3e genre, qui est compris entre deux cordes qui se terminent d'une part à un même point de la circonference, *l'angle dans le segment*, *angulus in segmento*. Ce que pour mieux entendre, il faut remarquer, que toute corde partage le cercle en deux portions, qui sont appellées *segmens*, & que ces portions ou segmens sont égaux quand cette corde est un diametre, & alors on les appelle

des demycercles, & l'arc de chacun eſt une demycirconference.

Mais qu'ils ſont inégaux, quand c'eſt une autre corde que le diametre, l'un eſtant plus petit que le demycercle, & l'autre plus grand. De ſorte que pour abreger nous appellerons l'un le petit ſegment, & l'autre le grand ſegment.

Et de là il eſt clair que l'arc du petit ſegment eſt plus petit que la demycirconference, & que l'arc du grand ſegment eſt plus grand que la demycirconference.

Cela ſuppoſé, ſi on tire la corde *F G*, & au point *F* la tangente *m n*, *F x G* eſt le petit ſegment, & *F y G* le grand ſegment.



Et l'angle *G F m*, l'angle du petit ſegment, parceque la tangente *m F* eſt du coſté de ce ſegment là.

Et l'angle *G F n*, l'angle du grand ſegment.

Mais l'angle *F k G* eſt l'angle dans le petit ſegment.

Et l'angle *F K G*, l'angle dans le grand ſegment.

SECOND AVERTISSEMENT.

IX. ON peut encore remarquer qu'au regard de l'angle du ſegment, il faut que la corde qui diviſe les deux ſegmens ſoit décrite, parce qu'elle fait l'un des coſtez de l'angle. Mais que cela n'eſt pas neceſſaire au regard de l'angle dans le ſegment, parce que la corde n'eſt que la baſe de cet angle, & qu'elle eſt ſuffiſamment marquée par les deux poines de la circonference auſquels aboutiſſent les deux coſtez de l'angle, comme l'angle *F k G*, eſt ſuffiſamment marqué, quoyque la ligne *F G* ne ſoit que ſouſ-entendue & non tracée.

TROISIEME AVERTISSEMENT.

X. L'ANGLE dans le ſegment ſe peut exprimer en deux

manieres ; ou par rapport au segment dans lequel il eſt inſcrit, ſon ſommet ſe trouvant dans l'arc de ce ſegment ; ou par rapport à l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Et c'eſt en cette maniere qu'il vaut mieux l'exprimer, quand la corde qui joindroit les extremitez de ſes coſtez n'eſt pas marquée ; comme dans l'angle *F & G*, qui eſt appuyé ſur l'arc *F ꝛ G* ; & alors on dit ſimplement que c'eſt un angle inſcrit dans le cercle, ſans parler de ſegment.

QUATRIEME AVERTISSEMENT.

X.

IL eſt aiſé de voir que l'angle inſcrit dans un ſegment eſt toûjours appuyé ſur l'arc du ſegment oppoſé. Et qu'ainſy l'angle dans le grand ſegment eſt appuyé ſur l'arc du petit ſegment : & au contraire l'angle dans le petit ſegment eſt appuyé ſur l'arc du grand.

CINQUIEME AVERTISSEMENT.

XI.

ENFIN il faut remarquer, que quand on parle des arcs que ſoutiennent les coſtez d'un angle inſcrit dans le cercle, on doit entendre les deux qui ſont à coſté l'un de l'autre, & tout à fait ſeparez l'un de l'autre, & qui avec celuy ſur lequel l'arc inſcrit eſt appuyé comprennent toute la circonference.

PREMIER THEOREME,

FONDAMENTAL DE TOUS LES AUTRES.

XIII.

TOUT angle compris entre une tangente & une corde, a pour meſure la moitié de l'arc ſoûtenu par cette corde du coſté de la tangente.

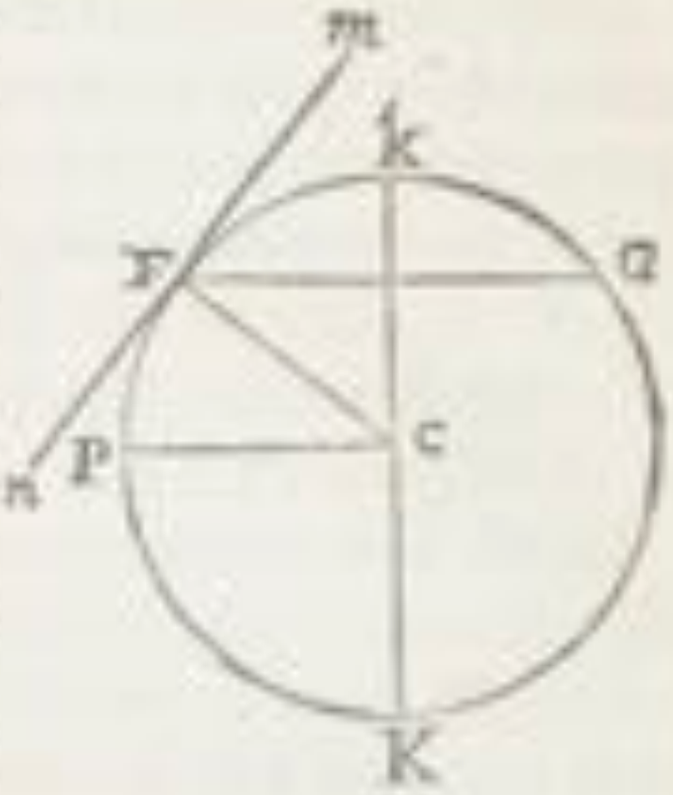
Et parceque cet angle eſt auſſy appellé l'angle du ſegment vers lequel eſt cette tangente, ſelon cela on doit dire, qu'il a pour meſure la moitié de l'arc de ce ſegment là. De ſorte que ſi c'eſt l'angle du petit ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment, & ſi c'eſt l'angle du grand ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

Ce Theoreme eſt le fondement de la meſure des angles par des arcs de cercles hors le centre deſquels eſt leur ſommet ; & la preuve en eſt tres facile.

Soit la corde *F G* & la ligne *m n* qui touche le cercle,

dont le centre eſt au point *c*, l'angle *m F G* eſt l'angle du petit ſegment, & *n F G* l'angle du grand.

Soit tiré le diametre *k K* perpendiculaire à *F G*; & le rayon *c F*; & *P c* perpendiculaire au diametre *K k*, & par conſequent parallele à *F G*, le diametre *k K* coupera par la moitié les arcs du grand & du petit ſegment. D'où il s'enſuit que l'angle au centre *F c k* a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment. Et que l'angle au contraire *F c K* a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.



De ſorte que le Theoreme ſera demonſtré (par le 1er Lemme) ſi on peut faire voir, que l'angle du petit ſegment *m F G* eſt égal à l'angle au centre *F c K*. Or cela eſt facile. Car *c P* & *F G* eſtant paralleles, les angles alternes que fait ſur l'une & ſur l'autre le rayon de l'atouchement (c'eſtadire les angles *P c F*, & *c F G*) ſont égaux.

Or l'angle *m F c* (qui comprend l'angle du ſegment & l'angle *c F G*) eſt droit: & par conſequent égal à l'angle *P c k*, qui eſt droit auſſy, & qui comprend les deux angles *F c k* & *P c F*. Donc oſtant de part & d'autre les angles *c F G* & *P c F* (que l'on vient de faire voir eſtre égaux) l'angle du ſegment demeurera égal à l'angle *F c k*, qui a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment.

Donc l'angle du petit ſegment *m F G*, a auſſy pour meſure la moitié de cet arc du petit ſegment. Ce qu'il falloit demonſtrer.

On fera voir de même que l'angle du grand ſegment *n F G* eſt égal à l'angle au centre *F c K*, qui a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

Car l'angle du grand ſegment comprend l'angle droit *n F c* & l'angle *c F G*. Or l'angle au centre *F c K* comprend auſſy l'angle droit *P c K* & l'angle *P c F*.

Or les angles *c F G* & *P c F* ſont égaux, comme il vient

d'eſtre dit. Donc eſtant ajoûtez chacun à un droit, ils rendent égaux l'angle du ſegment & l'angle au centre, qui a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

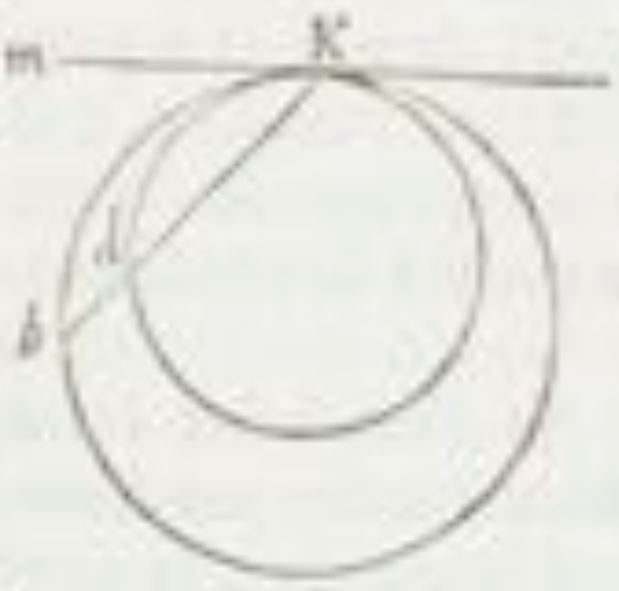
Donc (par le 1er Lemme) l'angle du grand ſegment a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

PREMIER COROLLAIRE.

L'ANGLE du demycercle eſt droit. XIV.
Celuy du petit ſegment eſt aigu.
Celuy du grand, obtus.
Cela eſt clair par le 2e Lemme.

SECOND COROLLAIRE.

LORSQUE deux cercles dont l'un eſt dans l'autre ſe touchent, toutes les cordes menées du point de l'attouchement à la circonference du plus grand cercle ſoûtiennent des arcs proportionellement égaux dans les deux cercles: c'eſtadire que la ligne entiere(*k b*) ſoûtient dans le grand cercle un arc égal à celuy que ſoûtient dans le petit (*k d*) partie de cette même ligne. XV.



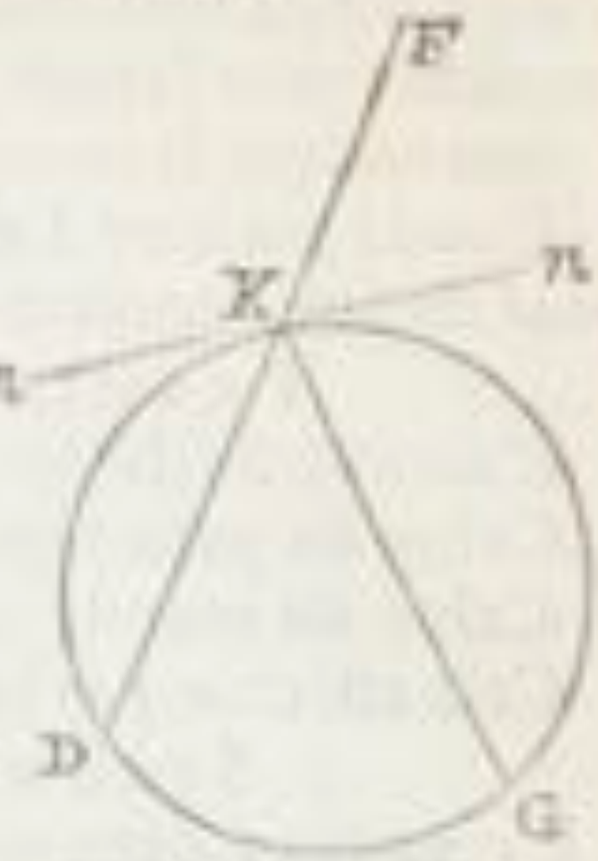
Car les angles *m k b* & *m k d* ſont le même angle. Or l'un a pour meſure la moitié de l'arc *k b*, & l'autre la moitié de l'arc *k d*. Donc ces deux arcs ſont proportionellement égaux.

SECOND THEOREME.

TOUT angle dont le ſommet eſt en la circonference, & qui eſt compris entre une corde & la partie d'une autre corde prolongée hors le cercle du coſté qu'elle eſt hors le cercle, a pour meſure la moitié des deux arcs qui ſont à coſté du ſommet de cet angle, & qui ſont ſoûtenus par les deux cordes, dont l'une eſt le coſté de l'angle, & l'autre en fait l'autre coſté par ſa partie prolongée hors le cercle. XVI.

Soient les deux cordes *K D* & *K G*, dont *K G* ſoit prolongée en *F* hors le cercle; je dis que l'angle *F K G* a

pour mesure la moitié des deux arcs *K D* & *K G*.



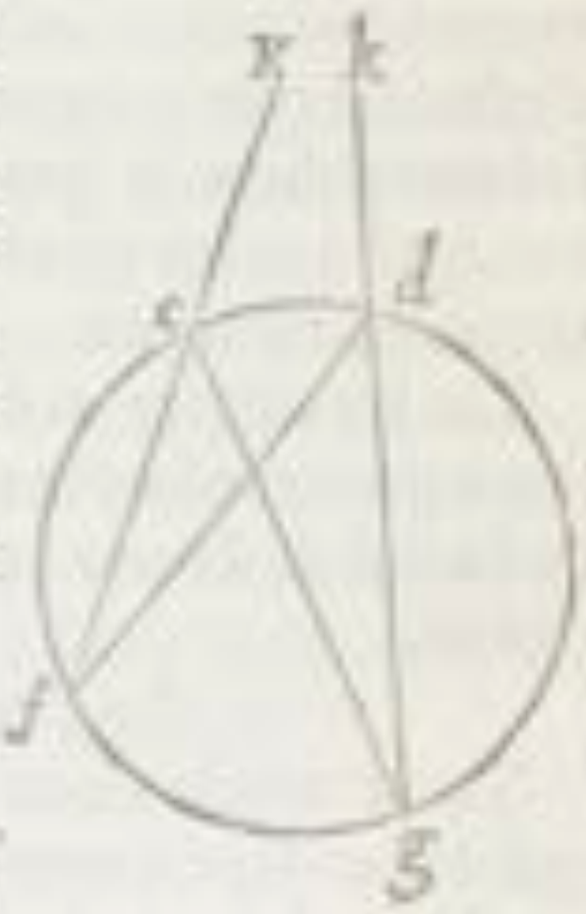
Car soit tirée par le point *K* la tangente *m n*, l'angle *F K G* comprend les deux angles *F K n* & *n K G*. Or l'angle *F K n* est égal à l'angle *m K D*, parcequ'il luy est opposé au sommet. Donc l'angle *F K G* est égal aux deux angles *n K G* & *m K D*.

Or par le 1er Theoreme *n K G* a pour mesure la moitié de l'arc *K G*, & *m K D* a pour mesure la moitié de l'arc *K D*.

Donc l'angle *F K G*, qui est égal à tous les deux, a pour mesure l'une & l'autre moitié de ces deux arcs. C'estadire la moitié de ces deux arcs, par le 3e Lemme.

COROLLAIRE.

XVII. Si l'on joint les extremitez de deux cordes par deux autres cordes qui se croisent, & que l'on prolonge hors le cercle les deux premieres cordes, les angles que le prolongement de chacune fera sur les cordes qui se croisent, seront égaux.



Soient les deux premieres cordes *e f* & *d g*.

Les deux qui se croisent, *f d* & *g e*.

Les prolongemens, *K e* & *k d*.

Je dis que les angles *K e g* & *k d f* sont égaux.

Car par le precedent Theoreme l'un & l'autre a pour mesure la moitié des arcs *f e*, *e d*, *d g*.

TROISIEME THEOREME.

XVIII. TOUT angle inscrit au cercle, c'estadire compris entre deux cordes qui ne se joignent qu'en la circonference, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

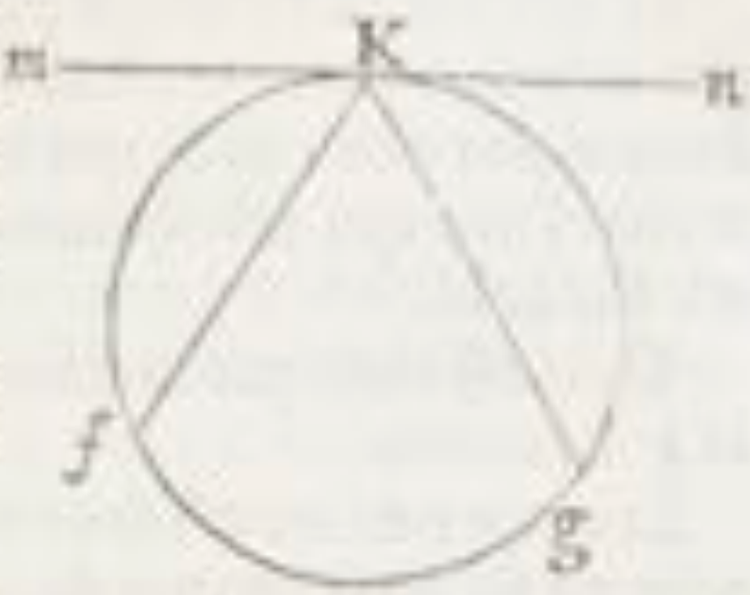
Et

Et parce qu'on appelle auſſy ces angles (angles dans le ſegment) ſelon cela

Tout angle dans un ſegment a pour meſure la moitié de l'arc du ſegment oppoſé. Voyez le 4e Avertiſſement.

La preuve en eſt tres facile par le 1er Theoreme.

Soit l'angle *f k g*. Je dis qu'il a pour meſure la moitié de l'arc *f g*.



Soit menée par le ſommet *k* la tangente *m n*, l'angle inſcrit *f k g*, plus les deux qui ſont à coſté *f k m*, & *g k n*, valent deux droits.

Donc ils ont pour meſure la demy circonference, par le 2e Lemme.

Donc ils ont pour meſure les trois moitiez des arcs *f g*, *k f*, *k g* (par le 3e Lemme) parce que ces trois arcs comprennent toute la circonference.

Or l'un de ces trois angles, ſçavoir *f k m*, a pour meſure la moitié de l'arc *k f*, & l'autre, ſçavoir *g k n*, a pour meſure la moitié de l'arc *k g*. Donc il reſte pour la meſure du 3e, qui eſt l'angle inſcrit la moitié du 3e arc, qui eſt *f g*.

On peut encore prouver la meſme choſe par le 2e Theoreme. Car ſi on prolonge *f k* juſques à *b*, les angles *f k g* & *g k b* valent deux droits, & par conſequent ont pour meſure la moitié de la circonference, & par conſequent auſſy les trois moitiez des trois arcs *k f*, *k g*, *f g*.

Or l'angle *b k g* a pour la meſure la moitié des deux arcs *k f* & *k g*, par le 1er Theoreme.

Reſte donc pour la meſure de l'angle inſcrit la moitié du troiſiéme arc, qui eſt *f g*.

PREMIER COROLLAIRE.

IL paroiſt par là, que ſi on oſte de la circonference en- XIX.

tiere, c'eſt à dire de 360. degrez, les deux arcs que ſoutiennent les coſtez de l'angle inſcrit, la moitié de ce qui reſtera ſera la meſure de l'angle inſcrit, comme ſi l'un de ces arcs eſt de 100 degrez, & l'autre de 44, oſtant 144 de 360, reſtera 216, dont la moitié eſt 108 pour la meſure de l'angle inſcrit.

SECOND COROLLAIRE.

XX. Il paroiſt auſſy qu'on peut dire encore: Que tout angle inſcrit a pour meſure la demycirconference moins la moitié des deux arcs qui ſont ſoutenus par ces coſtez: ou moins l'arc qui eſt ſoutenu par l'un de ſes coſtez quand il eſt Iſoſcele.

Cela eſt clair par la demonſtration precedente, & par le 3e Lemme.

Et cette meſure eſt ſouvent plus commode que l'autre, comme ſi l'on ſçait que des arcs que ſoutiennent les coſtez de l'angle inſcrit l'un eſt de 100 degrez & l'autre de 44, en oſtant 50 & 22, qui font 72, de 180, ce qui reſtera qui eſt 108 eſt la meſure de cet angle inſcrit.

Et cela eſt encore plus facile, quand l'angle inſcrit eſt Iſoſcele, comme ſi l'un & l'autre de ſes coſtez ſoutient un arc de 36 degrez: car oſtant 36 de 180, ce qui reſte, qui eſt 144, eſt la meſure de cet angle inſcrit.

TROISIEME COROLLAIRE.

XXI. Tous les angles inſcrits dans le même ſegment, ou appuyez ſur le même arc, ou ſur des arcs égaux, ſont égaux. Car ils ont la moitié du même arc ou de deux arcs égaux pour meſure. Donc ils ſont égaux par le 1er Lemme.

Et il eſt clair auſſy (par le 1er & le 2e Corollaire) que des angles inſcrits ſont égaux quand les arcs que ſoutiennent les deux coſtez de l'un pris enſemble ſont égaux aux arcs que ſoutiennent les deux coſtez de l'autre, & qu'ils ne peuvent eſtre égaux que cela ne ſoit.

Que ſi au contraire des angles inſcrits ſont ſuppoſez égaux, il faut qu'ils ſoient appuyez ſur des arcs égaux, ou abſolument, ſi c'eſt dans le même cercle ou en des cercles égaux que ces angles ſoient inſcrits, ou proportionelle-

ment, si c'est dans des cercles inégaux. Ce qu'il faut aussy supposer dans la 1re partie de ce Corollaire. Car les arcs proportionellement égaux font autant pour l'égalité des angles, que s'ils l'estoient.

QUATRIEME COROLLAIRE.

XXII. Si deux angles inscrits en divers cercles sont égaux, & qu'ils soient soutenus par des cordes égales, les cercles dans lesquels ils sont inscrits sont égaux.

Car les angles inscrits en divers cercles ne sçauroient estre égaux, qu'ils ne soient appuyez sur des arcs proportionellement égaux, & des arcs de divers cercles proportionellement égaux ne sçauroient estre soutenus par des cordes égales que les cercles ne soient égaux. Donc, &c.

CINQUIEME COROLLAIRE.

XXIII. Lorsque deux cercles dont l'un est au dedans de l'autre se touchent, si du point de l'attouchement on mene deux lignes jusques à la circonference du plus grand, les arcs de l'une & de l'autre circonference compris entre ces deux lignes seront proportionellement égaux. Car le même angle sera mesuré par la moitié de l'un & de l'autre de ces arcs.

SIXIEME COROLLAIRE.

XXIV. Si un cercle a pour centre un point de la circonference d'un autre cercle, & que de ce point on tire deux lignes qui coupent l'une & l'autre circonference, l'arc de celle qui a ce point pour centre compris entre ces deux lignes est proportionellement égal à la moitié de l'arc de celle dans laquelle est ce point. Car le même angle a pour mesure le premier arc entier & la moitié de l'autre.

SEPTIEME COROLLAIRE.

XXV. Si l'angle inscrit & l'angle au centre sont appuyez sur le même arc, l'angle au centre est double de l'angle inscrit. Car l'inscrit a pour mesure la moitié de l'arc, qui entier

est la mesure de l'angle au centre.

HUITIEME COROLLAIRE.

XXVI. Tous les angles dans un segment sont égaux à l'angle du segment opposé. Et ainsy l'angle dans le grand segment est égal à l'angle du petit segment ; & l'angle dans le petit segment égal à l'angle du grand.

Car l'angle du grand segment est appuyé sur l'arc du petit. Donc il a pour mesure la moitié de l'arc du petit, qui est aussy la mesure de l'angle du petit segment.

NEUVIEME COROLLAIRE.

XXVII. L'ANGLE dans le demycercle est droit.
Dans le grand segment, aigu.
Dans le petit, obtus.
Cela est clair par le 2e Lemme.

DIXIEME COROLLAIRE.

XXVIII. LES angles inscrits en deux segmens opposez sont égaux à deux droits. Car les arcs des deux segmens comprennent toute la circonference. Donc la moitié de l'un qui est la mesure de l'un de ces angles plus la moitié de l'autre qui est la mesure de l'autre angle, valent la demycirconference (par le 3e Lemme). Donc pris ensemble ils ont pour mesure la demycirconference. Donc ils valent deux droits.

ONZIEME COROLLAIRE.

XXIX. SI quatre cordes ne se joignent qu'aux extremitez, ils font quatre angles inscrits dont les opposez sont égaux à deux droits. C'est la même chose que le precedent.

DOUZIEME COROLLAIRE.

XXX. L'ANGLE aigu qui est dans le grand segment est le complement de l'obtus qui est dans le petit. Cela est clair, puisque les deux ensemble valent deux droits.

TREIZIEME COROLLAIRE.

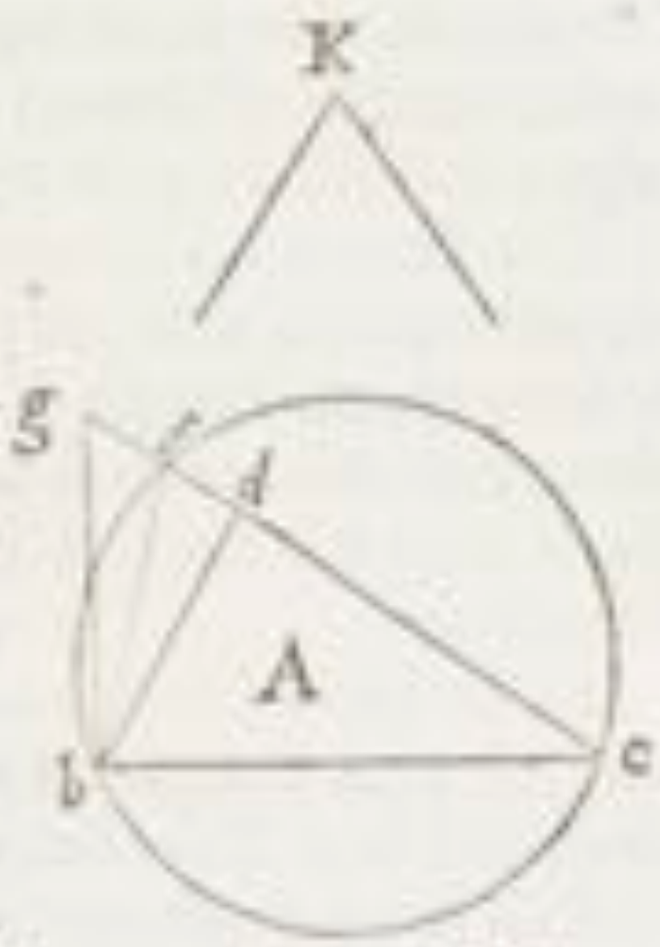
XXXI. LA moitié de la base d'un angle inscrit est son sinus, s'il est capable d'en avoir, c'estadire s'il est aigu : ou de son complement, s'il est obtus. Car le sinus est la moitié de la corde du double de l'arc. Or la base d'un angle inscrit est la corde d'un arc qui est double de celuy qui mesure l'an-

gle inscrit. Donc la moitié de cette corde est son sinus, s'il est aigu : ou s'il est obtus, le sinus de son complement, c'est à dire de l'angle aigu qui estant inscrit dans le segment oppose a aussy cette corde pour sa base.

QUATORZIEME COROLLAIRE.

ON dit qu'un segment est capable d'un tel angle quand tous les angles dans ce segment sont égaux à cet angle. XXXII.

Et quand cela est, il est impossible qu'un angle de cette grandeur ait pour base la corde de ce segment que son sommet ne se trouve dans un des points de l'arc du segment.



Supposons par exemple que le segment A soit capable de l'angle *k* ; je dis que tout angle égal à l'angle *k*, qui aura *b c* pour base, aura son sommet dans un des points de l'arc du segment A.

Car s'il l'avoit au dedans du cercle comme en *d*, prolongeant *c d* jusques en *f*, point de la circonference, & tirant la ligne *b f*, l'angle *b f c* sera égal à l'angle *k* par l'hypotese. Or l'angle *b d c*, par le 4e Lemme, est egal à l'angle *b f c* plus l'angle *f b d*. Donc il est plus grand que le seul angle *b f c*. Donc il est plus grand que l'angle *k*.

Et si le sommet estoit hors du segment comme en *g*, tirant une ligne de *b* au point où *c g* coupe le cercle comme à *f*, on prouvera que l'angle *b f c*, égal à *k*, sera plus grand que l'angle *b g c*, parce qu'il sera égal à *b g c* plus *g b f*, par le 4e Lemme.

Donc l'angle qui a *b c* pour base ne peut estre égal à *k* qui est l'angle dont le segment *A* est capable, qu'il n'ait son sommet dans la circonference, puisque s'il l'avoit au dedans il seroit plus grand, & s'il l'avoit au dehors il seroit plus petit.

QUINZIEME COROLLAIRE.

XXXIII. Si on fait le diametre d'un cercle de l'hypothenuſe d'un angle droit, le ſommet de cet angle droit ſe trouvera dans la circonference du cercle.

Car chaque demycercle eſt capable de cet angle droit. Donc par le Corollaire precedent nul angle droit ne peut avoir pour l'hypothenuſe la corde du demycercle qui eſt le diametre, que ſon ſommet ne ſe trouve en un des points de la demycirconference.

SEIZIEME COROLLAIRE.

XXXIV. Si du ſommet d'un angle on tire une ligne au milieu de la baſe, & que cette ligne ſoit égale à la moitié de cette baſe, l'angle eſt droit : mais ſi elle eſt plus longue, il eſt aigu, & ſi elle eſt plus courte, il eſt obtus.

Car faiſant un demycercle qui ait pour centre le point du milieu de la baſe, & pour intervale la moitié de la baſe, le ſommet de l'angle ſe trouvera dans un des points de la demycirconference ſi la ligne tirée du ſommet au milieu de la baſe eſt égale à la moitié de la baſe. Donc l'angle ſera droit.

Et le ſommet ſe trouvera au dehors du demycercle ſi elle eſt plus longue. Donc l'angle ſera plus petit qu'un droit par le 9e Corollaire, & par conſequent aigu.

Et il ſe trouvera au dedans du demycercle ſi elle eſt plus courte. Donc l'angle ſera plus grand qu'un droit par le 9e Corollaire. Donc obtus.

DIX-SEPTIEME COROLLAIRE.

XXXV. QUAND deux cordes égales ſe coupent, chaque partie de l'une eſt égale à chaque partie de l'autre.

Soient les cordes égales *B c* & *m n*, qui ſe coupent en *o*, les arcs *b n c* & *m c n* ſont égaux, parce qu'ils ſont ſoutenus par des cordes égales. Donc oſtant de ces deux arcs l'arc *n c*, qui leur eſt commun, les arcs *B n* & *m c* demeurent égaux. Donc tirant la ligne *n c*, les angles inſcrits

n c B & *c n m* sont égaux, parce qu'ils sont appuyez sur des arcs égaux. Donc les deux lignes *o n* & *o c* sont égales, parce qu'estant menées d'un même point elles font des angles égaux sur la même base. Et on prouvera de même en tirant la ligne *B m* que *o m* & *o B* sont égales. Donc chaque partie de l'une de ces cordes est égale à chaque partie de l'autre.

PROBLEMES.

I.

TROUVER l'angle droit dont on a l'hypothenuse & la distance du sommet à l'hypothenuse. XXXVI.

Elever de l'extremité de l'hypothenuse une perpendiculaire égale à cette distance, & tirer par l'autre extremité de cette perpendiculaire une parallele à l'hypothenuse.

L'un des deux points où cette parallele coupera le cercle qui aura l'hypothenuse pour diametre, ou le point de l'attouchement, si elle le touche, sera le sommet de cet angle droit qui en determinera les costez.

Car la distance estant donnée de ce sommet à l'hypothenuse, il ne se peut trouver ailleurs (d'un costé) qu'en quelqu'un des points de cette parallele; & parceque cet angle est supposé droit, il faut par le 11. Corollaire qu'il se trouve aussy en quelqu'un des points de la demycirconference. Donc en un des points où elle la coupe, ou en celuy auquel elle le touche.

SECOND PROBLEME.

D'UN point hors le cercle tirer les tangentes au cercle & montrer qu'on n'en peut tirer que deux, & qu'elles sont égales. XXXVII.

Soit *k* le point hors le cercle, & *c* le centre du cercle, joindre ces points par une ligne. Décrire le cercle qui aura cette ligne pour diametre & qui coupera le premier en deux points comme *f* & *g*; *k f*, & *k g*, feront les deux tangentes tirées du

point *k* au premier cercle.

Car l'angle que l'une & l'autre fait avec le rayon du 1er cercle eſt droit, parce qu'il eſt dans un demy cercle.

Et il ne peut y avoir que ces deux lignes tirées du point *k* qui touchent le cercle, parce que le ſommet de l'angle droit, qui doit avoir pour coſtez la tangente tirée de *k* & un rayon du 1er cercle doit eſtre en un point commun aux circonferences des deux cercles, puiſqu'il doit eſtre dans la circonference du premier, à cauſe qu'un rayon du premier en eſt un des coſtez; & dans celle du ſecond, à cauſe que tous les angles droits qui ont le diametre du ſecond cercle pour hypothenuſe doivent avoir leur ſommet dans la circonference de ce ſecond cercle (par le 13e Corollaire.)

Or il n'y a que les points *f* & *g* qui ſoient communs aux deux cercles. Donc on ne peut tirer de *k* que les deux tangentes *kf* & *kg*.

Et il eſt clair qu'elles ſont égales, puiſque chacune ſoûtient des arcs égaux dans la circonference du nouveau cercle.

TROISIEME PROBLEME.

XXXVIII. COUPER un ſegment dans un cercle donné qui ſoit capable d'un angle donné.

Ayant tiré une tangente au cercle, la corde qui fera avec cette tangente au point de l'atouchement un angle égal à l'angle donné, ſatisfera au Probleme. Car le ſegment du coſté oppoſé à celuy de l'angle égal au donné qui fait cette corde avec la tangente, ſera capable de l'angle donné, par le 5. & 10e Cotollaire.

QUATRIEME PROBLEME.

XXXIX. TROUVER le cercle dont le ſegment terminé par une ligne donnée ſoit capable d'un angle donné.

Soit la ligne donnée *bd*, & l'angle donné *k*; ſoit tirée *bf* qui faſſe ſur *bd* un angle égal à l'angle *k*.

Soit

Soit élevé du point *b* une perpendiculaire à *b f*, & qu'il y ait une autre perpendiculaire à *b d* qui coupe *b d* par la moitié ; le point *c*, où je suppose que ces deux perpendiculaires se rencontreront sera le centre du cercle, qui aura *c b* ou *c d* pour intervale, & pour tangente *f b*.

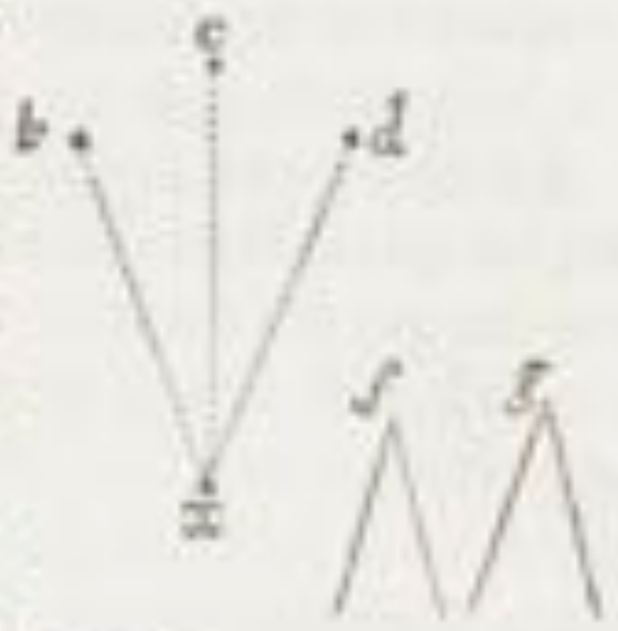
Donc le segment opposé à celuy vers lequel est *f b* sera capable d'un angle égal à l'angle *f b d*, par le 5e Corollaire, parceque l'un sera l'angle du segment, & l'autre l'angle dans le segment opposé.

CINQUIEME PROBLEME.

CONNOISSANT quelle est la distance de trois points l'un de l'autre, comme de *b*, *c*, *d*, & ne sçachant d'un 4e comme *x*, sinon de quel costé il est, à l'égard de ces trois-là, & quelle est la grandeur de l'angle compris entre ces lignes *x b* & *x c*, & de celuy qui est compris entre ces lignes *x c* & *x d* trouver ce 4e point. XL.

Les lignes *b c* & *c d* sont données par l'hypothese.

Et les angles donnez soient *f* & *g*.



Trouver par le Probleme precedent le cercle dont le segment terminé par *b c*, tourné vers *x*, soit capable de l'angle *f*.

Et trouver de mesme un autre cercle dont le segment terminé par *c d* & tourné vers *x*, soit capable de l'angle *g*.

Ces deux cercles se couperont en deux points, dont l'un sera *c* par la construction, & l'autre *x* : ce qui se prouve ainsy.

Les deux angles *b x c*, & *c x d*, dont la grandeur est connüe, ont leur sommet au même point.

Or par le 10e Corollaire l'angle égal à *f* ayant *b c* pour base ne peut avoir son sommet ailleurs que dans un des points de l'arc du segment qu'on a trouvé estre capable de

l'angle *f*. Et par la même raison l'angle égal à *g* ayant *cd* pour base ne peut auſſy avoir ſon ſommet que dans un des points de l'arc du ſegment qu'on a trouvé eſtre capable de l'angle *g*. Donc il faut que ce point qui eſt le ſommet de tous les deux angles ſoit commun à tous les deux cercles. Donc il faut que ce ſoit l'un des deux points où ils ſe coupent. Or il eſt bien viſible que ce n'eſt pas le point *c*. Donc l'autre point où ils ſe coupent eſt le point *x* que l'on cherchoit.

II.

DES ANGLES
DONT LE SOMMET EST AU DEDANS DU CERCLE ET AILLEURS QU'AU CENTRE.

XLI. QUAND le ſommet d'un angle eſt au dedans du cercle, mais ailleurs qu'au centre, comme peut eſtre l'angle *k*, ſes coſtez doivent toûjours eſtre conſiderez comme terminez par la circonference, comme au point *f* & *g*; & de plus il les faut auſſi prolonger au delà du ſommet juſques à la circonference de l'autre part, en prolongeant par exemple *fk* juſques en *e*, & *gk* juſques en *d*.

Et ainſy ces angles ſe reduiſent aux angles qui ſe font dans la ſection de deux cordes qui ſe coupent au dedans du cercle, où il ſe fait quatre angles dont les oppoſez ſont égaux, & qui ſont chacun appuyé ſur l'un des quatre arcs, auſquels cette circonference ſe trouve diviſée par ces deux cordes.

Voicy donc le Theoreme qui nous apprendra la meſure de ces angles.

QUATRIEME THEOREME.

XLII. TOUT angle fait par la ſection de deux cordes qui ſe coupent au dedans du cercle, a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé plus la moitié de l'arc oppoſé.

Soient les deux cordes *ef* & *dg* qui ſe coupent en *k*. Prenons lequel on voudra des quatre angles qu'elles font

en se coupant, comme *f k g*; je dis qu'il aura pour sa mesure la moitié de l'arc *f g* plus la moitié de l'arc opposé *d e*.

Soient joints les points *d f*, l'angle *f k g* est égal aux deux angles vers *d* & vers *f* (par le 4e Lemme.)

Or l'angle vers *d* a pour mesure la moitié de l'arc *f g* sur lequel il est appuyé, & l'angle vers *f* la moitié de l'arc *e d*, par la même raison.

Donc l'angle *f k g* qui leur est égal, a pour sa mesure les moitiez de ces deux mêmes arcs : ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

QUAND deux cordes égales moindres que des diametres se coupent, elles divisent la circonference en quatre arcs, dont il y en a deux opposez qui sont égaux, & deux autres inégaux ; & alors les angles qui sont appuyez sur chacun de ces arcs égaux ont pour mesure cet arc entier. XLIII.

Car les opposez estant égaux, un entier est la même chose que la moitié de l'un plus la moitié de l'autre.

Je ne prouve point ce qui est supposé dans ce Corollaire, parce que c'est une suite visible de ce qui a esté demonstré, *sup.* 35.

III.

DES ANGLES DONT LE SOMMET EST HORS LE CERCLE QUE LEURS COSTEZ COUPENT OU TOUCHENT.

LES costez d'un angle dont le sommet est hors le cercle peuvent, XLIV.

Ou le couper tous deux.

Ou le toucher tous deux.

Ou l'un le couper & l'autre le toucher.

Mais quand ils le coupent, on les considere toûjours comme entrans dans le cercle selon sa convexité, & estant terminez par la circonference au dedans du cercle selon sa concavité.

C'eſt pourquoy ces angles ſont toûjours conſiderez comme eſtant appuyez ſur deux arcs du cercle, l'un concave & l'autre convexe.

Quand les deux coſtez le coupent, l'arc concave eſt celuy qui eſt compris entre les deux points, où les deux coſtez ſont terminez au dedans du cercle. Et le convexe eſt celuy qui eſt compris entre les deux points par où il entre dans le cercle.

Quand tous les deux coſtez touchent le cercle, l'un & l'autre eſt compris entre les deux points de l'attouchement, mais l'un eſt concave au regard de l'angle, & l'autre convexe.

Et quand l'un touche & l'autre coupe le cercle, le concave eſt compris entre le point de l'attouchement & celuy où ſe termine l'autre coſté; & le convexe entre le point de l'attouchement & celuy où l'autre coſté entre dans le cercle.

Il eſtoit neceſſaire de bien expliquer ces deux ſortes d'arcs, parceque de là depend la meſure de ces angles ſelon ce Theoreme.

CINQUIEME THEOREME.

XLV. LORS que le ſommet d'un angle eſt hors le cercle, ſoit que ces deux coſtez coupent le cercle, ou que tous deux le touchent, ou que l'un le coupe & l'autre le touche, il a pour meſure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe.

PREUVE DANS LE PREMIER CAS.

Soit l'angle *fkg*, dont le coſté *kf* coupe le cercle en *e*, & *kg* en *d*, l'arc concave eſt *fg*, & le convexe *ed*. Il faut donc prouver que cet angle a pour meſure la moitié de l'arc *fg* moins la moitié de l'arc *ed*, & on le prouve ainſy.

Soit tirée la ligne *fd*. Par le 4e Lemme l'angle *fdg* eſt égal à l'angle *fkg* plus l'angle *kfd*.

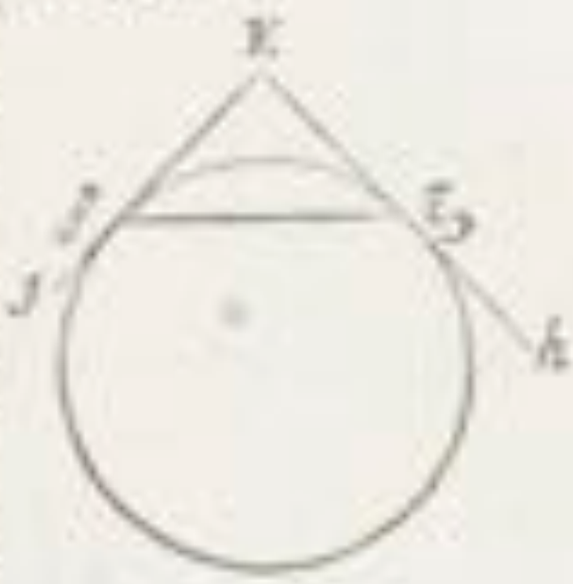
Donc l'angle *k* eſt égal à l'angle *f d g* moins l'angle *k f d*. Donc il doit avoir pour meſure la meſure de l'angle *f d g* moins la meſure de l'angle *k f d*.

Or la meſure de l'angle *f d g* eſt la moitié de l'arc concave *f g*, ſur lequel il eſt appuyé, & la meſure de l'angle *k f d* eſt la moitié de l'arc convexe *d e*.

Donc l'angle *k* a pour meſure la moitié de l'arc concave *f g*, moins la moitié de l'arc convexe *d e*

PREUVE DU SECOND CAS.

Soit l'angle *k*, dont les coſtez *k f* & *k g* touchent le cercle, & ſoit *k g* prolongée juſques en *h*.



L'angle *f g h* eſt égal à l'angle *k* plus l'angle *k f g*. Donc l'angle *k* eſt égal à l'angle *f g h*, moins l'angle *k f g*.

Or l'angle *f g h* a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment *f g*, & l'angle *k f g* a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment *f g*. Donc l'angle *k* a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment, qui eſt l'arc concave moins l'arc du petit ſegment, qui eſt l'arc convexe.

La preuve du troiſiéme Cas eſt ſemblable à ces deux là, tenant quelque choſe de l'un & de l'autre. Il vaut mieux la laiſſer trouver.

AVERTISSEMENT.

Outre cette meſure qui eſt generale à toutes ces ſortes d'angles, il y en a qui ſont particulieres à quelques uns qu'il eſt bon de marquer par des Theoremes particuliers.

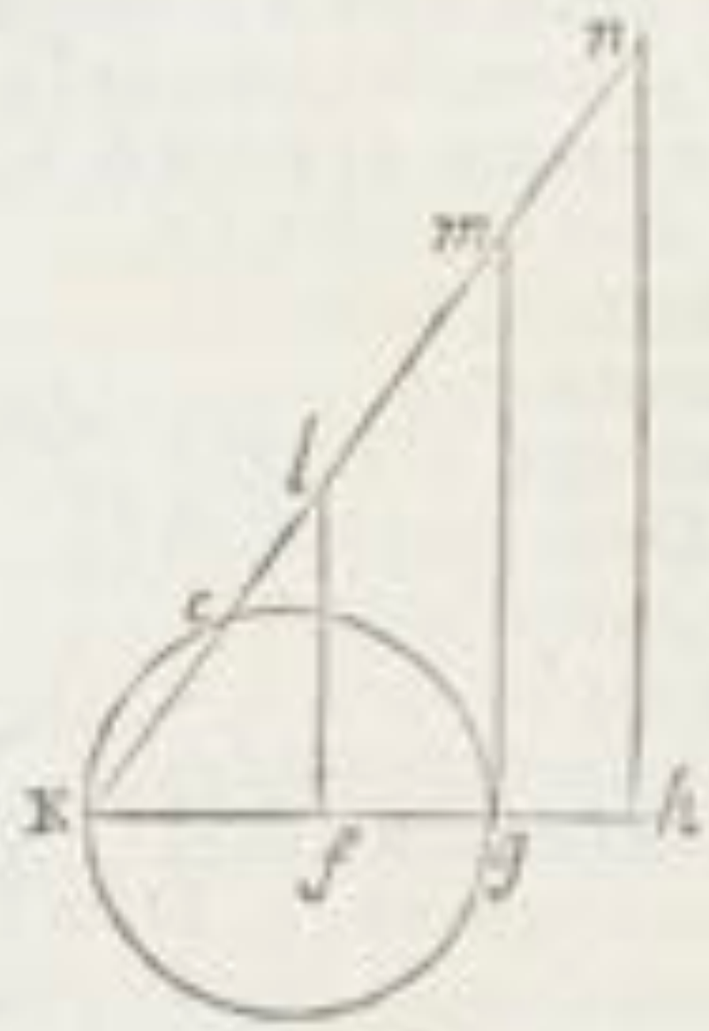
SIXIEME THEOREME.

XLVI. UN angle ayant ſon ſommet hors le cercle, ſi l'un de ſes coſtez qui coupe le cercle ſe termine à l'extremité d'un diametre auquel l'autre coſté eſt perpendiculaire, ſoit en coupant le cercle, ſoit en le touchant, ſoit même eſtant hors le cercle ce diametre y eſtant prolongé, en tous ces

cas cet angle a pour sa mesure la moitié de l'arc que soûtient la partie de son costé non perpendiculaire au diametre.

Il ne sera pas inutile de donner ce Theoreme pour exemple des diverses voyes que les principes qu'on a établis peuvent fournir pour demonstrer une même chose.

PREMIERE DEMONSTRATION.



XLVII. Soit le diametre *k g* prolongé jusques à *h*. Soit de *k* tirée une ligne indefinie qui coupe le cercle en *c*.

Soit de divers points de cette ligne hors le cercle comme de *l*, *m*, *n*, tirées sur le diametre les perpendiculaires *l f*, *m g*, *n b*. J'ay à prouver que chacun de ces angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'arc *k c*. Ce qu'on peut faire en cette maniere.

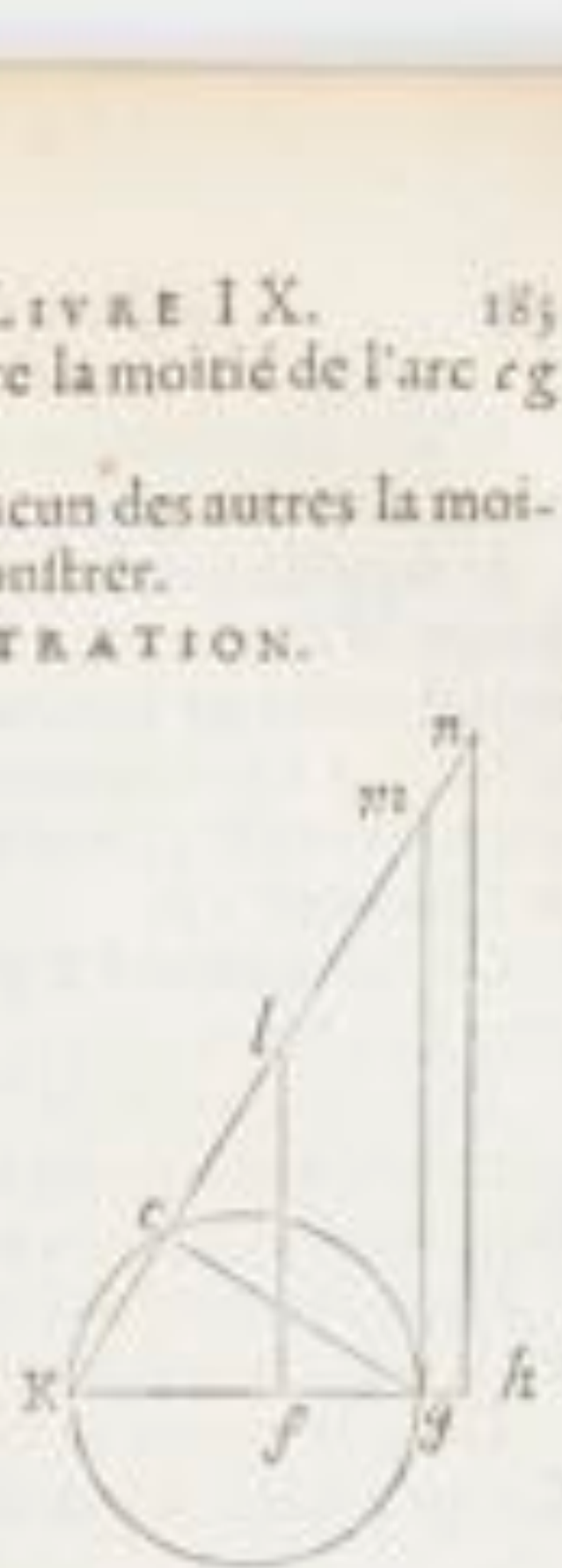
Chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, plus l'angle vers *k*, valent un angle droit par le 4e Lemme, parce que ce sont les angles sur la base d'un angle droit. Donc chacun de ces angles plus l'angle vers *k* ont pour mesure la demycirconference. Donc ils ont aussy pour mesure, par le 3e Lemme, les deux moitiez des deux arcs *k c* & *c g*, qui comprennent la demycirconference.

Or l'angle vers *k* a pour sa mesure la moitié de l'arc *e g* sur lequel il est appuyé.

Reste donc pour la mesure de chacun des autres la moitié de l'arc *k e*. Ce qu'il faloit demontrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

XLVIII.



SOIT encore tirée la ligne *e g*, l'angle *k e g* est droit, parce qu'il est dans le demycercle. Donc l'angle *e g k* est égal à chacun des angles vers *l m n*, puisque chacun de ces angles plus l'angle vers *k* sont aussy égaux à un droit.

Or l'angle *e g k* a pour mesure la moitié de l'arc *k e* sur lequel il est appuyé.

Donc la moitié de cet arc *k e* est aussy la mesure de chacun des angles vers *l*, *m*, *n*.

TROISIEME DEMONSTRATION.

XLIX.

SOIT tirée la ligne *e d* qui coupe perpendiculairement le diametre, ce qui fera que les arcs *k e* & *k d* seront égaux. Et la ligne *e d* estant parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, les angles que font ces paralleles sur la même ligne aux points *e*, *l*, *m*, *n*, sont égaux.

Or l'angle *k e d* a pour sa mesure la moitié de l'arc *k d* égal à l'arc *k e*. Donc chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'un ou l'autre de ces deux arcs qui sont égaux, *k d* & *k e*. Donc on peut dire qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc *k e*. Ce qu'il faloit demonstrer.

QUATRIEME DEMONSTRATION.

L. C'EST l'application de la demonſtration du Theoreme general à ce cas particulier.

Je ſuppoſe que la perpendiculaire *L f* coupe le cercle en *p* & en *q*. Par la demonſtration du Theoreme general, l'angle *K L q* a pour meſure la moitié de ſon arc concave *K q*, moins la moitié de ſon arc convexe *c p*.

Or l'arc concave *K q* eſt égal aux deux arcs *K c*, & *c p*.

Donc la moitié de l'arc *K q* eſt la même choſe que la moitié de l'arc *K c*, plus la moitié de l'arc *c p*, par le 3e Lemme.

Donc la moitié de l'arc *K q*, moins la moitié de l'arc *c p*, eſt la même choſe que la moitié de l'arc *k c*.

Donc la moitié de l'arc *k c* eſt la meſure de l'angle *k L q*. Ce qu'il faloit demonſtrer.

DES ANGLES DONT LES DEUX COSTEZ TOUCHENT LE CERCLE.

LI. IL eſt bon d'en dire quelque choſe en particulier outre ce qu'on en a dit en general.

On les peut appeller des angles circonſcripts.

Et voicy une nouvelle maniere de les meſurer.

SEPTIEME THEOREME.

LII. L'ANGLE circonſcript au cercle, c'eſt à dire dont les deux coſtez touchent le cercle, a pour meſure la demy circonference moins l'arc convexe ſur lequel il eſt appuyé.

PREMIERE DEMONSTRATION.

Soit l'angle *b k d*, à qui ſoit donné pour baſe la ligne qui joint les deux points d'attouchement *b d*, l'angle *k* plus les deux angles ſur ſa baſe ſont égaux à deux droits, c'eſt à dire ont pour meſure pris enſemble la demy circonference.

Or les deux angles ſur la baſe ont chacun pour meſure la

la moitié de l'arc convexe *b d*, par le 2e Theoreme.

Donc la mesure des deux est cet arc convexe.

Donc ostant cet arc convexe de la demycirconference, ce qui restera sera la mesure de l'angle *k* circonscrit au cercle: ce qu'il falloit demonstrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

Par la demonstration generale l'angle *k* a pour mesure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe. Or ces deux arcs comprennent toute la circonference. Donc par le 3e Lemme la moitié de toute la circonference moins l'arc convexe entier, est la mesme chose que la moitié de l'arc concave moins la moitié du convexe.

PREMIER COROLLAIRE.

LIII. Deux angles circonscripts sont égaux quand ils sont appuyez sur des arcs convexes d'autant de degrez, & le plus grand est celuy qui est appuyé sur un arc de moins de degrez.

Car de 180 degrez qui en oste un nombre égal, ce qui reste est égal, & plus le nombre qu'on en oste est petit, plus ce qui reste est grand. Donc, &c.

SECOND COROLLAIRE.

LIV. Si un angle circonscript est appuyé sur un arc convexe qui soit soûtenu par le costé d'un angle inscrit isoscele, l'angle inscript & le circonscript sont égaux.

Car ostant cet arc de la demycirconference, ce qui restera sera la mesure du circonscript par 51. 3. & de l'inscript par 20. 3.

TROISIEME COROLLAIRE.

LV. Il est bon de considerer toûjours les costez de l'angle circonscript comme terminez au point de l'attouchemẽt. Et selon cela il faut dire que tout angle circonscript est isoscelle: car les deux tangentes au cercle menées du mes-

me point sont toûjours égales, par le 2e Probleme.

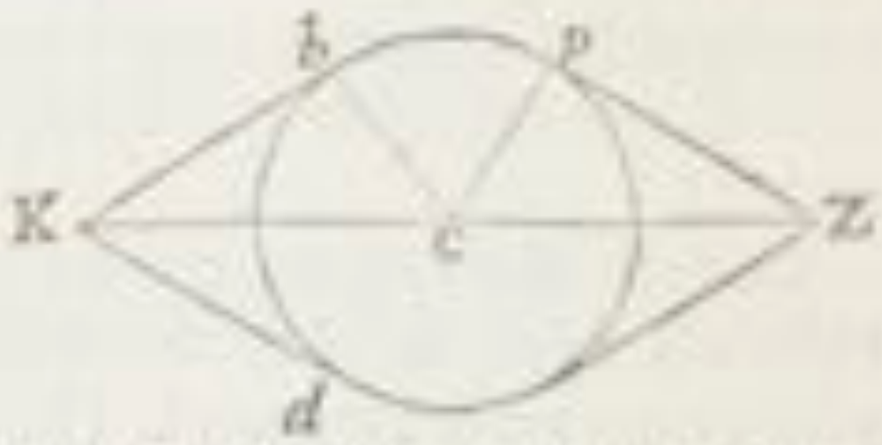
QUATRIEME COROLLAIRE.

LVI. LA ligne menée du sommet de l'angle circonscript au centre le divise toûjours par la moitié. Et l'on peut appeller ces deux moitiez de l'angle circonscript des demyangles circonscripts.

Car si on tire deux rayons au point de l'attouchement, on ne pourra considerer ces deux demyangles qu'on ne voye sans peine que les costez de l'un sont égaux aux costez de l'autre, & que les rayons du même cercle, & par consequent égaux, en sont les sinus. Donc ils sont égaux.

CINQUIEME COROLLAIRE.

LVII. LES angles circonscripts au même cercle sont égaux quand les tangentes de l'un sont égales aux tangentes de l'autre.



Soient *k b* tangente de l'angle *k* égale à *z p*, tangente de l'angle *z*. Je dis que les angles *k* & *z* sont égaux. Car tirant les lignes du centre *k c* & *z c*, & les rayons *c b* & *c p*, les angles *k b c* & *z p c* sont égaux, parce qu'ils sont tous deux droits.

Et les costez de l'un sont égaux aux costez de l'autre, puisque par l'hypothese *k b* est égale à *z p*, & que *c b* & *c p* sont les rayons du même cercle.

Donc les bases de ces angles *k c* & *z c* sont égales.

Donc les angles *b k c* & *p z c* sont égaux, les costez de l'un estant égaux aux costez de l'autre, & ayant les deux rayons pour leurs sinus.

Or ces deux angles *b k c* & *p z c* sont chacun la moitié de chaque angle circonscript, par le Corollaire precedent.

Donc les angles circonscripts sont égaux: ce qu'il falloit demonstrer.

SIXIEME COROLLAIRE.

LES angles circonscripts au même cercle sont égaux quand leur sommet est également éloigné du centre, & les plus petits sont ceux dõt le sommet en est plus éloigné. LVIII.

Cela est facile à prouver par les demy angles circonscripts, & je le laisse à trouver à ceux qui commencent pour faire essay de leurs forces.

RECAPITULATION DE LA MESURE DES ANGLES.

LE sommet de l'angle est LIX.

- Dans le cercle
  - au centre. 1.
  - hors le centre. 2.
- Dans la circonf.
  - l'un des costez au dedans, & l'autre au dehors,
    - le touchant. 3.
    - le coupant. 4.
  - tous deux au dedans du cercle. 5.
- Hors le cercle.
  - Les deux costez le coupant. 6.
  - Les deux le touchant. 7.
  - L'un le touchant & l'autre le coupant. 8.

Et parmy ces angles, l'un des costez coupant le cercle & estant terminé à l'extremité du diametre auquel l'autre costé est perpendiculaire. 9.

ONT POUR MESURE

1. L'arc sur lequel il est appuyé. VIII. 10.

2. La moitié de l'arc sur lequel il est appuyé plus la moitié de l'arc oppose. IX. 38.

3. La moitié de l'arc que soutient le costé qui est au dedans du cercle. IX. 13.

4. La moitié de l'arc que soutient le costé qui est au dedans du cercle, plus la moitié de celuy que soutient le prolongement du costé qui est hors le cercle. IX. 15.

5. La moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. IX. 18.

6. 7. 8. La moitié de l'arc concave sur lequel il est appuyé moins la moitié de l'arc convexe. IX. 41.

7. La demycirconference moins l'arc convexe sur lequel il est appuyé. IX. 41.

9. La moitié de l'arc soutenüe par la partie du costé non perpendiculaire au diametre. IX. 43.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DIXIEME.

DES LIGNES PROPORTIONELLES.

I. *LA proportion des lignes dépend de deux choses, des paralleles & des angles, & ainsy elle n'a pas pû se bien traitter qu'après l'explication de l'une & l'autre. Et mesme pour en bien comprendre tout le mystere, il faut reprendre beaucoup de choses des paralleles que nous proposerons en forme de Lemmes.*

PREMIER LEMME. DEFINITION.

II. UN espace compris d'une part entre deux paralleles & indefiny de l'autre, soit appellé espace parallele.

SECOND LEMME. DEFINITION.

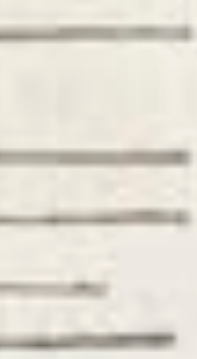
III. COMME on ne considere dans ces espaces que la distance entre les paralleles, leur grandeur dépend de cette distance qui est mesurée par les perpendiculaires comprises entre ces paralleles, que nous appellerons pour cette raison les perpendiculaires des espaces.

Et dela il s'ensuit que ces espaces sont égaux quand les perpendiculaires de l'un sont égales aux perpendiculaires de l'autre.

TROISIEME LEMME. DEFINITION.

IV. ON dit qu'une ligne est dans un espace parallele quand

elle eſt terminée par les paralleles qui le terminent, comme la ligne *b* eſt dans l'eſpace *A*.



On dit qu'une ligne eſt parallele à un eſpace quand elle l'eſt aux lignes qui le terminent, comme la ligne *b* eſt parallele à l'eſpace *A*.

QUATRIEME LEMME.

L'INCLINATION d'une ligne dans un eſpace ſe conſidere par l'angle aigu qu'elle fait ſur l'une & l'autre parallele le faiſant toûjours égal. V.

D'où il s'enſuit que deux lignes ſont également inclinées dans le même eſpace, ou dans deux eſpaces differens quand les angles aigus que fait l'une ſont égaux aux angles aigus que fait l'autre.

Et que la moins inclinée eſt celle qui fait ſon angle aigu moins aigu & plus approchant du droit.

CINQUIEME LEMME IMPORTANT.

LORSQUE deux ou pluſieurs lignes ſont menées d'un même point ſur la même ligne, elles ſont cenſées eſtre dans ce même eſpace parallele. Car il ne faut alors que concevoir une ligne menée par ce point commun, qui ſoit parallele à celle qui les termine. D'où il s'enſuit que les coſtez d'un angle terminez par une baſe ſont toûjours cenſez eſtre dans le même eſpace parallele. VI.

SIXIEME LEMME.

DEUX angles ſoient appellez ſemblables lors qu'eſtans égaux les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun. VII.

Et on eſt aſſeuré que cela eſt, 1. quand on ſçait qu'ils ſont égaux, & qu'un des angles ſur la baſe de l'un eſt égal à l'un des angles ſur la baſe de l'autre: car de là il s'enſuit que l'autre eſt égal auſſy.

2. Lors qu'eſtant égaux ils ſont de plus Iſoſceles. VIII. 59.

SEPTIEME LEMME.

QUAND les ſommets de deux angles ſont également diſtans chacun de ſa baſe (prolongée s'il eſt beſoin) ces VIII.

deux angles peuvent estre compris dans le même espace parallele. Car mettant ces deux bases sur une même ligne, la ligne qui passera par les deux sommets sera parallele à celle qui comprendra les deux bases.

HUITIEME LEMME.

IX. DANS le même espace parallele, ou dans les espaces paralleles égaux, toutes les également inclinées sont égales, & toutes les égales sont également inclinées. VIII. 54.

Et au contraire les espaces paralleles sont égaux quand les également inclinées y sont égales. Car de là il est certain que les perpendiculaires le sont aussy. VIII. 56.

NEUVIEME LEMME.

X. LORS qu'une même ligne est coupée par plusieurs lignes toutes paralleles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les paralleles qui les renferment. VIII. 57.

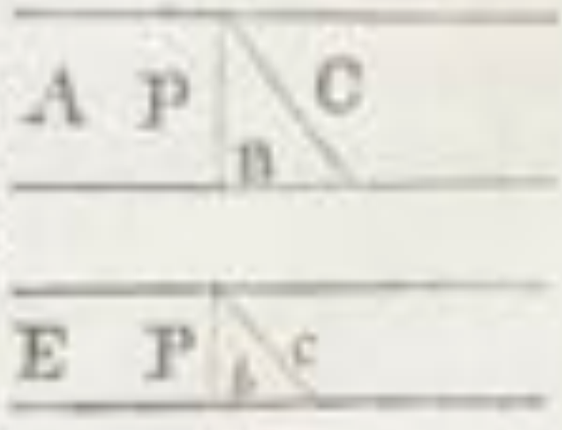
DIXIEME LEMME.

XI. LORS qu'il y a proportion entre quatre lignes, on dit que deux de ces lignes sont proportionelles aux deux autres lignes quand les deux antecedens de la proportion se trouvent dans les deux premieres, & les deux consequens dans les deux dernieres. D'où il s'enfuit aussy qu'*Alternando*, on peut prendre aussy les deux premieres pour les deux termes d'une raison, & les deux dernieres pour les deux termes de l'autre.

PROPOSITION FONDAMENTALE
DES LIGNES PROPORTIONELLES.

XII. LORS que deux lignes sont également inclinées en deux differens espaces paralleles, elles sont entr'elles comme les perpendiculaires de ces espaces, & leurs éloignemens du perpendicule sont aussy en même raison.

Soient deux espaces A & E.
Soient appellées dans l'espace *A*.
La perpendiculaire, *P*.
L'oblique, *C*.
L'éloignemẽt du perpendicule *B*.
Et soient de même appellées dans



l'espace, *E*.
La perpendiculaire *p*.
L'oblique *c*.
L'éloignement du perpendicule *b*. Je dis que

P p :: C c :: B b.

Et en voila la preuve tres naturelle, dont je ne croy pas que jamais personne se soit avisé.

Soit *p* divisée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. & ces aliquotes quelconques de *p* soient appellées *x*.

Si on tire par tout les points de cette division telle qu'elle soit des paralleles à l'espace *A*, cet espace sera divisé en autant de petits espaces paralleles qu'*x* sera dans *p*, & ces petits espaces seront égaux par le 1e Lemme, parce qu'ils auront tous *x* pour perpendiculaire.

Et de là il s'enfuit que *C* sera auſſy divisé en aliquotes pareilles à celles de *P*, parce que les portions de *C*, qui se trouvent entre chacun de ces petits espaces égaux y estant également inclinées par le 9. Lemme, y sont égales par le 8.

Soient donc les aliquotes de *C* pareilles à celles de *P* appellées *y*.

Que si de tous les poines de division de *C* on tire des paralleles à *P* (qui seront par consequent perpendiculaires à l'espace) elles couperont encore *B* en aliquotes pareilles, parce que chaque *y* se trouvant également inclinée en chacun de ces nouveaux petits espaces, ils seront égaux par le 9e Lemme. Et par consequent les portions de *B* qui seront toutes perpendiculaires dans ces espaces égaux, seront égales. (Et cela même seroit vray quand elles n'y seroient pas perpendiculaires, pourveu qu'elles y fussent également inclinées. Ce qu'il faut remarquer pour une autre occasion.)

Cela estant fait, prenant *x* pour mesurer *p* de l'espace *E*, où elle s'y trouvera precisement tant de fois, ou tant de fois plus quelque reste, c'est à dire plus une portion moindre qu'*x*. Et ainsy tirant des lignes paralleles à l'espace *F* par tous les points de la division de *p* mesurée par *x*, l'es-

pace *E* se trouvera divisé en autant de petits espaces égaux entr'eux, & égaux à ceux qui ont eu la même *x* pour perpendiculaire dans l'espace *A*, qu'*x* se sera trouvé dans *p*, si ce n'est qu'il y en aura un plus petit, si *x* ne s'y est trouvée que tant de fois plus quelque reste. Car le petit espace où sera compris ce reste sera plus petit que les autres.

Et de là il s'ensuit que *c* estant aussy inclinée dans *E* que *C* dans *A*, les portions de *c* comprises dans ces espaces égaux à ceux d'*A* seront égales aux portions de *C*, & ainsy se pourront aussy appeller *y*, & s'il y avoit eu en *p* un reste moindre qu'*x*, il y auroit aussy eu en *c* un reste moindre qu'*y*.

Donc par la definition des grandeurs proportionelles,

$$P\,p :: C\,c.$$

puisque *x* & *y*, aliquotes quelconques pareilles des deux antecedens *P* & *C*, sont egalement contenües dans les deux consequens *p* & *c*, si dans l'un sans reste, dans l'autre sans reste: si dans l'un avec reste, dans l'autre avec reste.

On prouvera la même chose de *B* & de *b*. Car si *c* estant mesurée & divisée par *y*, on tire des paralleles à *p* (qui seront perpendiculaires à l'espace) par tous les points de la division, *b* sera divisée en autant de parties que *c*, & ces parties seront égales aux parties de *B*, que nous avons nommées *z*: si ce n'est qu'il y en aura une moindre que *z*, s'il y a eu un reste dans *c* moindre qu'*y*.

Donc les aliquotes pareilles de *C* & de *B* seront également contenües dans *c* & *b*.

Donc $C\,c :: B\,b$.

Donc $P\,p :: C\,c :: B\,b$. Ce qu'il falloit demonstrer.

PREMIER THEOREME.

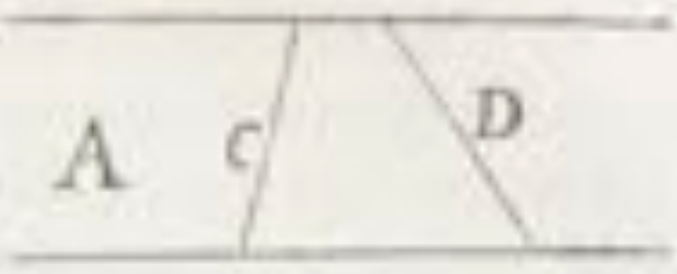
XIII. Si deux lignes inégalement inclinées dans le même espace le font autant chacune, que chacune de deux autres le font dans un autre espace, les également inclinées font en même raison.

Soient

Soient les espaces *A* & *E*.

Soit *C* autant inclinée dans l'espace *A* que *c* dans l'espace *E*.

Et *D* autant inclinée dans l'espace *A*, que *d* dans l'espace *E*.



Je dis que *C c* :: *D d*.

Car par la proposition precedente *C* est à *c*, comme la perpendiculaire d'*A* à la perpendiculaire d'*E*.

Or *D* est aussy à *d*, comme ces deux mêmes perpendiculaires.

Donc *C c* :: *D d*.

On le peut aussy prouver immédiatement & par soy même sans avoir recours aux perpendiculaires par la même voye dont on s'est servi dans la Proposition precedente, & que je ne repete point, parce qu'il est tres facile de la trouver.

PREMIER COROLLAIRE.

PLUSIEURS lignes estant diverse-ment inclinées dans le même espace parallele, si elles sont toutes coupées par des paralleles à cet espace, elles le sont proportionellement, c'est à dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la 1re, ou la 2e, ou la 3e &c. comme chaque autre toute à la même partie 1re, ou 2e, ou 3e &c. XIV.

C'est une suitte manifeste du precedent Theoreme, puisque d'une part toutes les toutes sont dans le même espace, qui est l'espace total. Toutes les premieres parties dans le 1er espace partial, les 2des dans le 2e, & ainsy des autres. Et que de l'autre chaque toute & chacune de ses parties sont également inclinées chacune dans son espace par le 9e Lemme. Donc la 1re toute est à sa 1re partie comme la seconde toute à sa 1re partie.

SECOND COROLLAIRE.

XV. Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionellement par toutes les lignes paralleles à celle qui les termine.

C'est la même chose que le precedent Corollaire, puisque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles se trouveront toutes dans le même espace parallele, & par consequent les paralleles à cet espace les doivent toutes couper proportionellement.

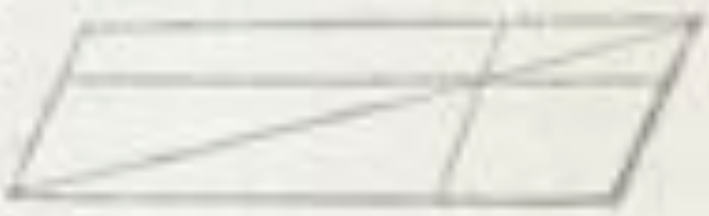
TROISIEME COROLLAIRE.

XVI. Si deux lignes comprises dans un même espace se coupent, elles sont coupées proportionellement. C'estadire que les parties de l'une sont proportionelles aux parties de l'autre, outre que la toute est à la toute comme chaque partie à la même partie.

C'est encore la même chose que le 1er Corollaire, puisque menant une parallele à l'espace par le point de la section, ce seront deux lignes dans le même espace total qui sont coupées par une parallele à cet espace, & qui par consequent le doivent estre proportionellement.

QUATRIEME COROLLAIRE.

XVII. Si quatre lignes dont les opposées sont paralleles se joignent aux extremitez, elles font deux espaces paralleles, l'un d'un sens & l'autre de l'autre sens, & la ligne tirée de coin en coin s'appelle diagonale.



Que si d'un point quelconque de cette diagonale on tire deux lignes comprises chacune dans chacun de ces deux

espaces, les parties de l'une de ces lignes seront proportionelles aux parties de l'autre.

Car les deux parties de chacune sont proportionelles aux deux parties de la diagonale, par le Corollaire precedent, parceque chacune de ces lignes & la diagonale sont comprises dans le même espace parallele & s'y coupent. Donc les parties de chacune estant en même raison que celles de la diagonale, les parties de l'une doivent aussy estre en même raison que les parties de l'autre, puisque deux raisons égales à une 3e sont égales entr'elles.

SECOND THEOREME.

LORSQUE deux angles sont semblables (c'estadire selon le sixième Lemme, lorsqu'estant égaux les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun) ces costez sont proportionels aux costez, & la base à la base, & la hauteur à la hauteur. C'estadire que les costez de ces deux angles également inclinez chacun sur sa base seront en même raison que les deux autres costez & que les deux bases, & que les distances de chaque sommet à chaque base: ce que j'appelle la hauteur de chaque angle. XVIII.

Soient les deux angles nommez *A* & *E*.
Soit le grand costé d'*A* nommé *C*.
Le petit *D*.
La base *B*.
La hauteur *H*.
Et dans l'angle *E*.
Le grand costé *c*.
Le petit *d*.
La base *b*.
La hauteur *h*.

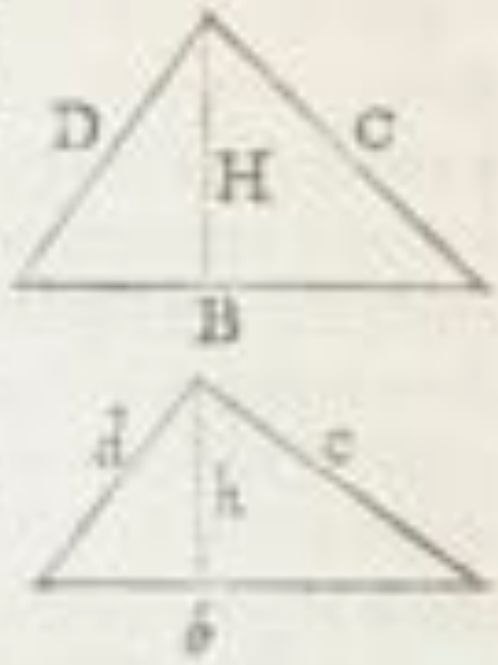
Je dis que *C c* :: *D d* :: *B b* :: *H h*.

On le peut prouver facilement de la même sorte qu'on a prouvé la Proposition fondamentale, c'estpourquoy je ne le repete point.

Mais on le peut encore de cette autre sorte.

Par le 5e Lemme.

1°. *C* & *D* sont censées estre dans le même espace parallele, & de même *c* & *d*.



Et de plus par l'hypothese *C* & *c* sont également inclinées chacune dans son espace, & de même *D* & *d*.

Donc par la Proposition fondamentale, & par le 1er Theoreme,

C c :: *H h*.

D d :: *H h*.

C c :: *D d*. & *alternando C D* :: *c d*.

2°. Par le 5e Lemme, *C* & *B* sont dans le même espace parallele & de même *c* & *b*, & de plus *C* & *c* sont également inclinées chacune dans son espace & de même *B* & *b*.

Donc par le 1er Theoreme,

C c :: *B b*. & *alternando C B* :: *c b*.

3°. Par le même 5e Lemme, *D* & *B* sont dans le même espace parallele, & de même *d* & *b*.

Et de plus, *D* & *B* sont également inclinées chacune dans son espace, & de même *d* & *b*.

Donc par le 1er Theoreme,

D d :: *B b*. & *alternando D B* :: *d b*.

Donc $\left.\begin{matrix} C\ c \\ D\ d \end{matrix}\right\}$ :: *B b*. Ce qu'il falloit demonstrer.

PREMIER COROLLAIRE.

XIX. DEUX angles Isosceles estant égaux, ils sont semblables, & par consequent les costez sont aux costez comme la base à la base, & la hauteur à la hauteur. Car deux angles estant Isosceles, ils ne peuvent estre égaux que les angles sur la base de l'un ne soient égaux aux angles sur la base de l'autre. VIII. 60.

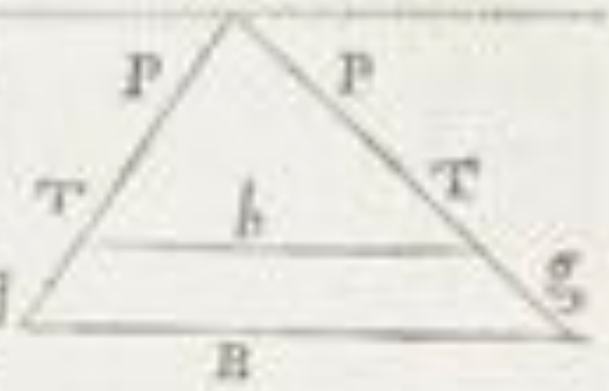
SECOND COROLLAIRE.

XX. SI un angle a deux bases paralleles, il s'y trouvera diverses sortes de proportions de grand usage.

Mais pour le mieux faire entendre, il faut considerer que

les costez de cet angle selon la derniere base comprennent ses costez selon la premiere, & c'est pourquoy nous appellerons les uns *routes*, & les autres les premieres ou dernieres parties de chacune de ces routes. Soient donc nommées

Les deux routes T. & *T*.
Les deux premieres parties p. & *p*.
Les deux dernieres q. & *g*.
La derniere base & la 1re B. & *b*.



De plus tirant par le sommet une q parallele aux deux bases, il se trouvera trois espaces paralleles.

Le total entre le sommet & B, que j'appelleray *a*.
Le premier partial entre le sommet & *b*, A.
Le second partial entre *b* & B, *E*.
Cela estant par le 9e Lemme,

T est autant inclinée dans *a*, que p dans A, & q dans *E*.
Et de même *T* autant inclinée dans *a*, que *p* dans A, & *g* dans *E*.
Donc par le 1er Theoreme,

1. T p :: *T p* & *alternando*. T *T* :: p *p*.
2. T q :: *T g*. T *T* :: q *g*.
3. p q :: *p g*. p *p* :: q *g*.

4. Par le 2e Theoreme chaque toute & sa premiere partie sont en même raison que la derniere base & la premiere.

T p :: B *b*. T B :: p *b*.
T p :: B *b*. *T* B :: *p b*.

Car cet angle qui a deux bases paralleles doit estre consideré comme si c'estoient deux angles égaux, dont l'un eust pour costez & pour bases T. *T*. B. & l'autre p. *p*. *b*. & ainsy les deux angles sur la base de l'un estant égaux aux deux angles sur la base de l'autre chacun à chacun, les costez de l'un sont proportionels aux costez de l'autre, & les bases aussy. Et par consequent T p :: *T p* :: B *b*.

TROISIEME COROLLAIRE.

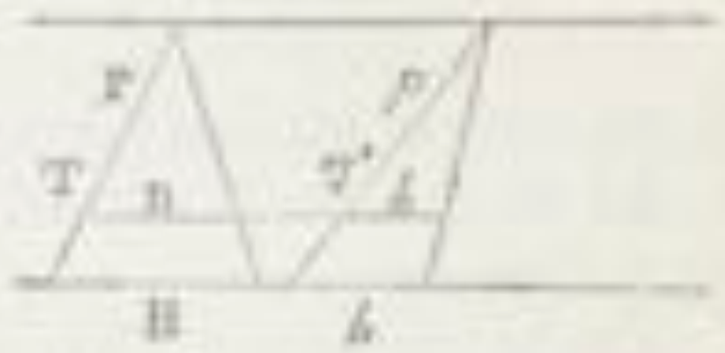
LORSQUE deux angles ont leur sommet également distant de leur base, & que par consequent ils peuvent estre compris dans le même espace parallele (selon le 7e Lemme) XXI.

si l'on donne à ces deux angles de nouvelles bases paralleles aux anciennes, & dont chacune en soit également distante, ces deux nouvelles bases seront proportionelles aux deux anciennes.

Supposons que les deux bases de ces deux angles, lesquelles j'appelleray B & *B*, soient sur la même ligne, la ligne qui joindra les sommets sera parallele à cette ligne. D'où il s'ensuit,

1°. Que considerant dans chacun de ces angles un seul costé, dont j'appelleray l'un T & l'autre *T*, ce seront deux lignes dans le même espace parallele.

2°. Que les deux nouvelles bases, que j'appelleray b & *b*, estant paralleles aux anciennes, & en devant estre chacune également distantes, se trouveront necessairement dans la même ligne parallele à l'espace.



Donc par le 1er Corollaire du 1er Theoreme : cette ligne parallele à l'espace coupe proportionellement T & *T*, & ainsy appellant p la premiere partie de T & *p* la premiere partie de *T*, T p :: *T p*.

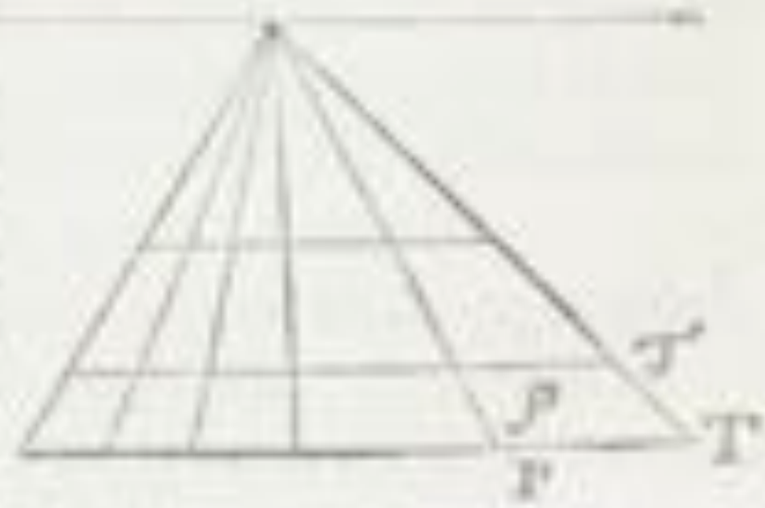
Or par le Corollaire precedent chacun de ces angles ayant deux bases paralleles $\begin{cases} T\ p :: B\ b. \\ T\ p :: B\ b. \end{cases}$

Donc les deux raisons de B b & de *B b* sont égales, puisque chacune est égale à chacune des deux raisons T p & *T p* qui sont égales entr'elles. Donc

B b :: *B b*. Donc *alternando* B *B* :: b *b*.

QUATRIEME COROLLAIRE.

XXII. Si d'un même point on tire plusieurs lignes à la même ligne comprises entre la premiere & la derniere, & qu'on tire des paralleles à celle là qui soient aussy comprises entre la premiere



& la derniere de ces lignes tirées du même point, toutes ces paralleles seront coupées proportionellement, c'est-à-dire que chaque toute & sa premiere partie seront en même raison que chaque autre toute & sa 1re partie, & ainsy du reste.

Il suffit d'examiner deux de ces paralleles, comme est la derniere, que j'appelleray T, & sa premiere partie p, & une autre que j'appelleray $\mathcal{T}$, & sa premiere partie ρ, & ainsy il faut prouver que

$$T\ p :: \mathcal{T}\ \rho.$$

Et pour cela il ne faut que considerer, 1°. Que ces lignes tirées d'un même point font divers angles, que la premiere & la derniere font l'angle total, qui a toutes les paralleles entieres pour ses diverses bases. Que la premiere & la 2e font le premier angle partial, qui a toutes les premieres parties de ces paralleles pour ses diverses bases, & ainsy du reste.

2°. Que tous ces angles sont dans le même espace parallele, parcequ'on peut tirer une ligne par leur sommet commun qui sera parallele à la derniere base de l'angle total.

Donc T estant la derniere base de l'angle, & p la derniere base du 1er angle partial, laquelle est partie de la ligne T & ρ, dont $\mathcal{T}$ est une autre base de l'angle total, & ρ une autre base du 1er angle partial, seront aussy sur une même ligne parallele à l'espace, puisque ρ est partie de $\mathcal{T}$.

Donc par le Corollaire precedent les deux dernieres bases de ces deux angles T & p seront en même raison que leurs deux autres bases $\mathcal{T}$ & ρ. Donc

$$T\ p :: \mathcal{T}\ \rho.$$

Donc par la même raison chaque parallele & sa 1re partie seront en même raison que chaque autre parallele & sa 1re partie.

Et on prouvera la même chose avec la même facilité de chacune des autres parties, en comparant toûjours ensemble celles qui sont renfermées entre les deux mêmes lignes.

CINQUIEME COROLLAIRE.

XXIII. Si l'une de ces paralleles renfermées entre la 1re & la derniere de pluſieurs lignes tirées du même point, & diviſée par ces lignes en parties aliquotes, c'eſtadire en un certain nombre de parties égales, toutes les autres ſont diviſées par les mêmes lignes en aliquotes pareilles.

C'eſt une ſuitte manifeſte du precedent Corollaire. Car ſi chaque partie de l'une de ces paralleles en eſt par exemple la dixiéme partie, il faut que chaque partie de chaque autre parallele en ſoit auſſy la dixiéme partie, puiſque chaque parallele & chacune de ſes parties ſont en même raiſon que chaque autre parallele, & chacune de ſes parties ſemblables.

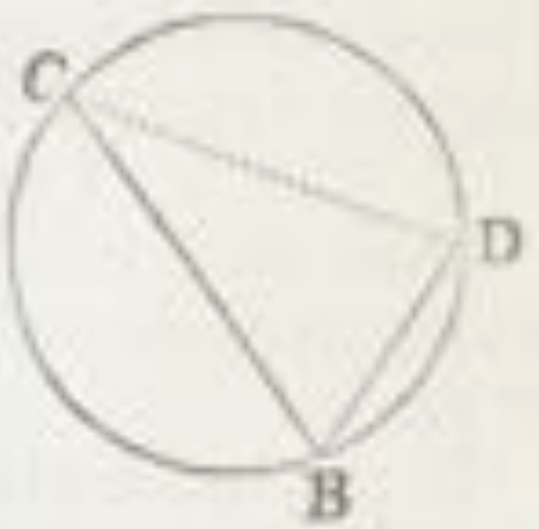
SIXIEME COROLLAIRE.

XXIV. Si un angle a pluſieurs baſes paralleles, toutes les lignes tirées du ſommet qui couperont ces baſes, les couperont proportionellement. D'où il s'enſuit qu'en quelques aliquotes que l'une de ces baſes paralleles ſoit diviſée, toutes les autres le ſeront en aliquotes pareilles.

Ce n'eſt que les deux precedens Corollaires un peu autrement énoncez.

SEPTIEME COROLLAIRE.

XXV. Les deux cordes d'un cercle ſont proportionelles aux deux cordes d'un autre cercle, ſi les arcs que ſoutiennent les unes ſont proportionellement égaux aux arcs que ſoutiennent les autres, chacun à chacun.



Soient conſiderées les deux cordes d'un cercle, comme jointes & faiſant un angle inſcript: telles que ſont *b c* & *b d* d'une part; & *B C* & *B D* de l'autre. (Car ſi elles ne faiſoient pas d'angle inſcript dans chaque cercle, il ne faudroit qu'en prendre d'égales à celles-là qui en faiſent, puiſque ſoutenant des arcs égaux dans chaque

chaque cercle, par V. 16. ce ſera la même choſe pour juger de la proportion.) Cela ſuppoſé,

L'angle *c b d* inſcrit dans le premier cercle eſt égal à l'angle *C B D* inſcrit dans le ſecond cercle, par IX. 21.

Et les angles que font les coſtez *b c* & *b d* ſur la baſe *d c*, ſont égaux aux angles que font les coſtez *B C* & *B D* ſur la baſe *D C*, chacun à chacun, par IX. 11.

Donc par le 2e Theoreme,

b c. B C :: b d. B D :: d c. D C.

HUITIEME COROLLAIRE.

SI deux cordes de divers cercles ſoutiennent des arcs proportionellement égaux, (c'eſtadire d'autant de degrez) elles ſont proportionelles aux diametres de ces cercles. XXVI.

C'eſt une ſuitte du precedent. Car les diametres ſoutiennent des arcs proportionellement égaux dans chaque cercle, puiſqu'ils en ſoutiennent la demycirconference. C'eſt donc la même preuve & encore plus facile.

NEUVIEME COROLLAIRE.

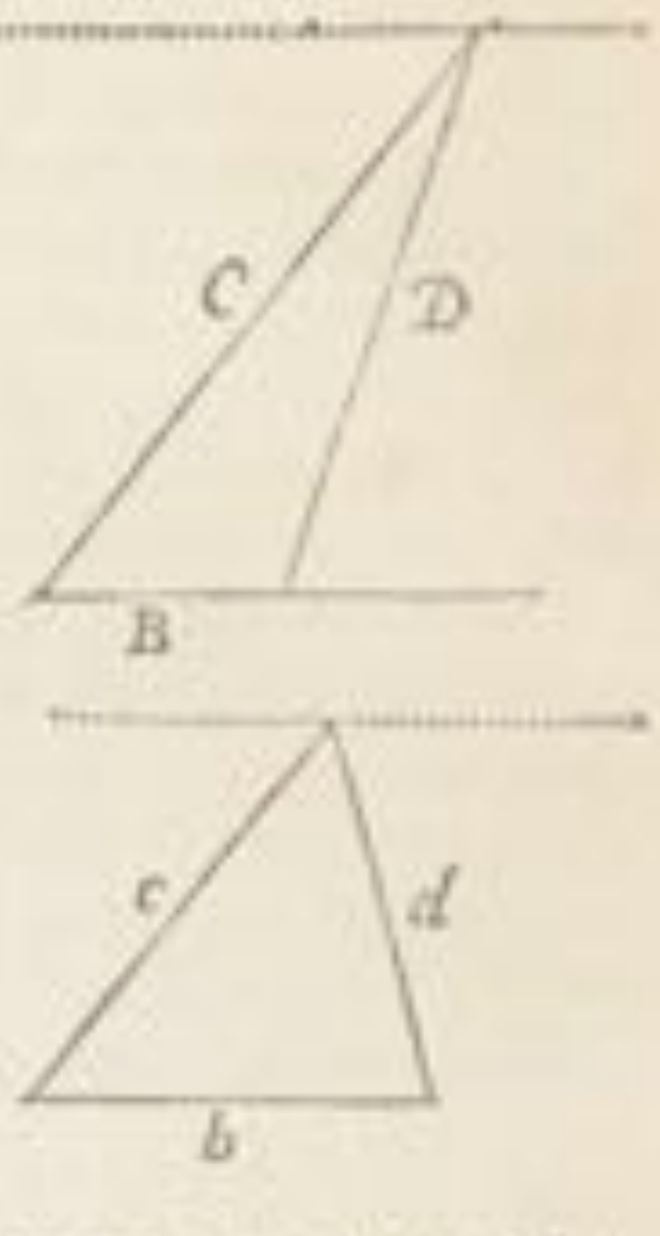
SI deux cordes égales de divers cercles ſoutiennent chacune autant de degrez, les cercles ſont égaux. Car par le precedent Corollaire elles ſont en même raiſon que les diametres des cercles. Donc ſi elles ſont égales, les diametres ſont égaux. Donc les cercles ſont égaux. XXVII.

TROISIEME THEOREME.

DEUX Angles quoyqu'inégaux ont neanmoins leurs coſtez proportionels, lorſque le coſté de l'un ſur ſa baſe fait un angle égal à celuy que fait auſſy ſur ſa baſe l'un des coſtez de l'autre, & que l'autre coſté du premier angle faiſant ſur ſa baſe un angle obtus, & l'autre coſté du ſecond angle faiſant un angle aigu ſur la ſienne, l'aigu eſt le complement de l'obtus, en ſorte que tous les deux enſemble valent deux angles droits. XXVIII.

Cette derniere condition ſe peut encore exprimer en une autre maniere, qui eſt que ces deux coſtez, l'un d'un angle & l'autre de l'autre, faſſent chacun ſur ſa baſe le même angle aigu, mais que l'un le faſſe au dehors de la baſe & l'autre au dedans.

Cette derniere expreſſion fait entrer plus facilement dans la demonſtration de ce Theoreme.



Soient les deux angles, dont l'un ait pour coſtez *C* & *D*, & pour baſe *B*. Et l'autre pour coſtez *c* & *d*, & pour baſe *b*.

Je ſuppoſe, 1°. Que les angles que les coſtez *C* & *c* font chacun ſur leur baſe ſont égaux.

2°. Que le coſté *D* fait un angle obtus ſur la baſe *B*, & *d* un angle aigu ſur la baſe *b*, mais que cet aigu eſt égal au complement de cet obtus. D'où il s'enſuit,

Que l'angle aigu que *D* fait ſur la baſe en dehors en la concevant prolongée, eſt égal à l'angle aigu que *d* fait ſur la ſienne en dedans.

Cela eſtant, je dis que *C*. *c* :: *D*. *d*.

Car ſoient faits des deux angles deux eſpaces paralleles en prolongeant les baſes *B* & *b* autant qu'il eſt neceſſaire, & tirant par chacun des ſommets des paralleles à ces baſes. Et celuy de ces eſpaces dans lequel ſont *C* & *D* ſoit appellé *A*, & l'autre *E*.

Par l'hypotheſe l'angle aigu que fait *C* dans l'eſpace *A* eſt égal à l'angle aigu que fait *c* dans l'eſpace *E*.

Donc par le 4e Lemme *C* & *c* ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace.

De même par l'hypotheſe l'angle aigu que fait *D* dans l'eſpace *A* (ſur la baſe *B* prolongée) eſt égal à l'angle aigu que fait *d* dans l'eſpace *E*.

Donc par le 4e Lemme *D* & *d* sont également inclinées chacune dans son espace, & il n'importe que *D* soit autrement tournée au regard de *c*, car cela ne change en rien l'inclination de chacune dans son espace. Donc par le 1er Theoreme,

C. c :: D. d. & alternando C. D :: c. d.

AUTRE DEMONSTRATION. XXXI.

Si on tire une ligne du sommet sur la base *B* prolongée égale à *D*, l'angle aigu que fera cette ligne que j'appelleray *P* sur *B* prolongée sera égal au complement de l'obtus que fait *D* sur *B*, & par consequent à l'aigu que fait *d* sur *c*.

Donc les deux angles dont l'un a pour ses costez *C* & *P*, & l'autre *c* & *d*, sont semblables par le 6e Lemme.

Donc *C. c :: P. d.*

Or par la construction *P* est égale à *D*. Donc

C. c :: D. d.

AVERTISSEMENT.

Cette derniere demonstration, quoyque moins bonne que la premiere, a cela d'utile qu'elle fait voir plus clairement la difference qu'il y a entre ce 3e Theoreme & le 2e, qui est que dans le 2e non seulement les costez d'un triangle sont proportionels à ceux de l'autre, mais aussy la base; au lieu que dans celuy-cy il n'y a que les costez de proportionels, estant bien clair que la base B, *sur laquelle est l'angle obtus, doit estre plus petite à proportion que la base* b. XXXII.

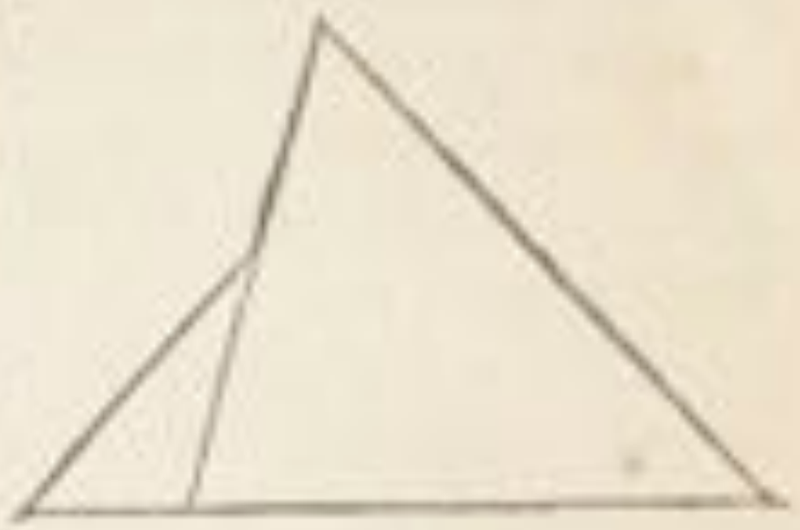
Car appellant T *la base* B, *prolongée jusques à* P, *il est clair que l'angle qui a pour costez* C, *&* P *&* T *pour base est semblable à l'angle qui a pour costez* c *&* d, *&* b *pour base.*

Donc par le 2e Theoreme $\left.\begin{matrix} C.c \\ P.d \end{matrix}\right\}$ :: T.b.

Or B *n'est que partie de* P, *donc il n'y a pas la même raison de* B *à* b, *que de* C *à* c.

PREMIER COROLLAIRE.

UNE ligne que j'appelleray la coupante estant inclinée sur une autre que j'appelleray la coupée, si de l'extremité XXXIII.



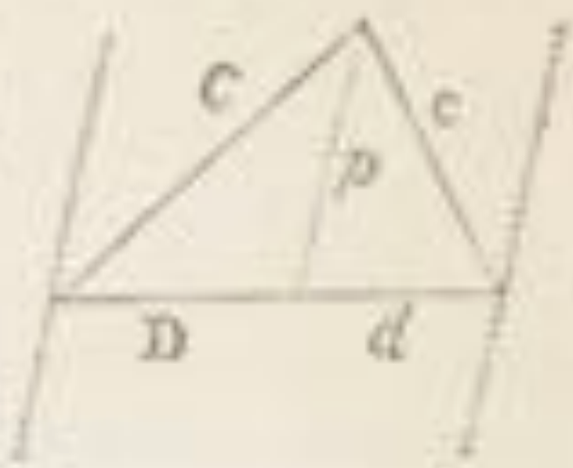
& d'un autre point de cette coupante on tire deux lignes de part & d'autre qui faſſent des angles égaux ſur la coupée, la coupante entiere ſera à ſa partie vers la coupée comme la ligne tirée de ſon extremité à l'autre ligne tirée de ſon autre point.

J'en laiſſe à trouver la demonſtration, qui n'eſt qu'une application du precedent Theoreme.

SECOND COROLLAIRE.

XXXII. Si un angle a diverſes baſes diverſement inclinées ſur ſes coſtez, la ligne qui diviſera cet angle par la moitié fera que les deux parties de chaque baſe ſeront proportionelles aux deux coſtez de cet angle ſelon cette baſe. Il ſuffira de le demonſtrer en une ſeule baſe.

Soit un angle diviſé par la moitié par la ligne *p*. Soit l'un de ces coſtez appellé *C* & l'autre *c*, la partie de la baſe qui joint *C* appellée *D*, & l'autre *d*.



Si on tire par les extremitez de la baſe des paralleles à *p*, il y aura deux eſpaces paralleles.

Celuy dans lequel ſont *C* & *D* ſoit appellé *A*, & l'autre *B*, par le 9e Lemme *D* & *d* ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace.

Et par l'hypotheſe *C* & *c* ſont auſſy également inclinées chacune dans le ſien, puiſque les angles aigus que chacune fait ſur *p* ſont égaux.

Donc par le premier Theoreme,

C. c :: D. d. & alternando C. D :: c. d.

TROISIEME COROLLAIRE.

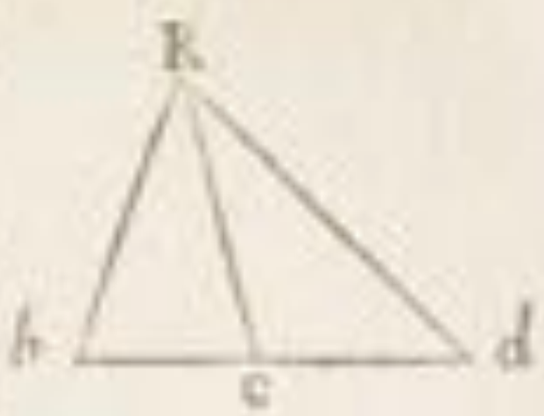
XXXIII. Si la ligne qui diviſe un angle en diviſe auſſy la baſe proportionellement aux coſtez, c'eſtadire en ſorte que les deux coſtez de l'angle ſoient en même raiſon que les deux

parties de la base, l'angle est divisé par la moitié.

C'est la converse du precedent Corollaire qui se prouve en cette maniere.

Soit l'angle *b k d* divisé par *k c*, en sorte que

b c. c d :: k b. k d.



Si nous supposons que ce même angle est divisé par la moitié par *k x*, il s'ensuit par le precedent Corollaire que

b x. x d :: k b. k d.

Donc *b x. x d :: b c. c d.*

Donc *componendo b d. x d :: b d. c d.*

Donc les points *x* & *c* ne sçauroient estre que le même point, & *k x* & *k c* la même ligne. Donc *k c* divise l'angle par la moitié. Ce qu'il falloit demonstrer.

PREMIER PROBLEME.

TROUVER une 4e proportionelle. C'est à dire ayant la 1re, la 2e & la 3e, de 4 lignes proportionelles trouver la 4e. XXXIV.

Ou ayant les deux premiers termes d'une raison, & l'antecedent de la 2e, en trouver le consequent.

Le moyen le plus facile est de se servir pour cela du premier Corollaire du second Theoreme. (13. 5.) Et ainsy donnant les mêmes noms aux trois données & à la 4e, qui est à trouver, j'appelleray

La 1re	*p.*
La 2^e^	*q.*
La 3^e^	*r.*
Et la 4e à trouver.	*s.*

Cela estant, il faut

1°. Mettre *p* & *q* sur une même ligne.

2°. Faire un angle de *p* la 3e avec *p* la 1re.

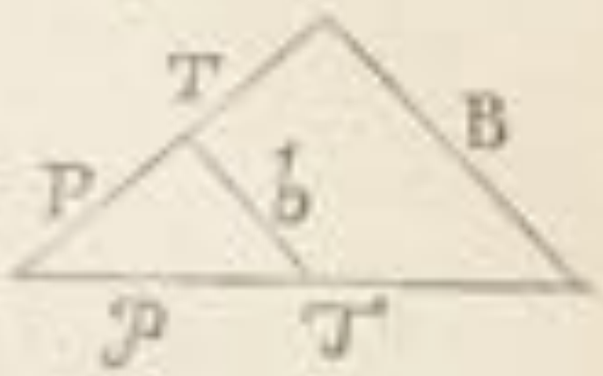
3°. Joindre par *b* les extremitez de la 1re & de la 3e.

4°. Prolonger indefiniment *p* la 3e.

5°. De l'extremité de *q* la 2e tirer *B* parallele à *b*, jusqu'à la rencontre de *p* prolongée.

Le prolongement de p jusqu'à la rencontre de B sera la 4e que l'on cherche. Car il eſt clair par le Corollaire ſuſdit (13. 5.) que $P.q :: p.q$.

XXXV. On peut encore faire la même choſe d'une autre maniere, qui eſt de renfermer la plus petite des deux premieres données dans la plus grande: & alors la plus grande s'appellera T, & la plus petite qui en eſt partie p.



Mais il faut prendre garde ſi la premiere des données eſt la plus petite ou la plus grande. Car ſi c'eſt la plus grande, il faudra commencer par T, & la 3e ſera auſſy T. Et alors pour trouver p, qui ſera la 4e que l'on cherche, apres avoir joint par B les extremitez de T & de T. b parallele à B eſtant tirée de l'extremité de p ſur T donnera p. Car il eſt encor clair par le même Corollaire que

$$T.p :: T.p.$$

Que ſi la 1re des deux données eſt la plus petite, la 3e ſera p, & la 4e à trouver ſera T. De ſorte qu'apres avoir joint par b les extremitez de p & p, il faudra prolonger p, & tirant de l'extremité de T ſur le prolongement de p, b parallele à b, on aura T pour la 4e à trouver. Car par le même Corollaire (13. 5.) *permutando*

$$p.T :: p.T.$$

COROLLAIRE.

XXXVI. TROUVER une 3e proportionelle, c'eſtadire faire que l'une des deux données ſoit moyenne proportionelle entre l'autre donnée & la trouvée. C'eſt la même choſe que le precedent, excepté qu'une ſeule des deux données tient lieu de la 2e & de la 3e.

SECOND PROBLEME.

XXXVII. TROUVER la ligne qui ſoit à une ligne donnée en raiſon donnée.

Soit la ligne donnée p, la raiſon donnée $m.n$, la ligne que l'on cherche x. Ainſy il faut trouver

$$x.p :: m.n.$$

Or pour cela il ne faut que transporter les termes en commençant par *n*, & les mettant ainsy,

n. m :: p. x.

& puis trouver *x* par le Probleme precedent. Ce qu'estant fait on aura ce que l'on cherche, parce que si

n. m :: p. x.

permutando

x. p :: m. n. Ce qu'il falloit demonstrer.

TROISIEME PROBLEME.

DIVISER une ligne donnée en quelques aliquotes que XXXVIII. l'on voudra.

Soit *D* la ligne à diviser, tirer au dessous ou au dessus une parallele indefinie que j'appelleray *P*. Prendre dans *P* autant de parties égales qu'on veut en avoir en la division de *D*, & prendre garde qu'elles soient notablement plus grandes ou plus petites que ne peuvent estre celles de *D*; puis des deux points entre lesquels sont comprises toutes les parties égales qu'on a prises dans *P*, tirer deux lignes par les extremitez de *D*, jusques à ce qu'elles se joignent: toutes les lignes tirées de ce point là à tous les points de la division de *P* qui couperont *D*, la diviseront en autant de parties égales qu'on en aura pris dans *P*.

La preuve en est cy-dessus dans le 5e Corollaire du 1er Theoreme. (22. 5.)

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE ONZIEME.

DES LIGNES RECIPROQUES.

CE livre cy sera encore de la proportion des lignes, & contiendra plusieurs choses nouvelles que l'on jugera peutestre plus belles & plus generales, que tout ce qu'on a trouvé jusques icy sur cette matiere des proportions, en ne se servant que des lignes droittes & des cercles.

Pour les mieux faire entendre nous proposerons quelques Lemmes qui feront voir aussy en quoy est different ce que l'on traitte dans ce livre de ce qui vient d'estre traitté dans le livre precedent.

PREMIER LEMME.

1. QUAND il y a proportion entre 4 lignes, on y doit remarquer en les comparant deux à deux, deux rapports fort differens.

L'un est celuy qui fait dire que les unes sont proportionelles aux autres.

Et l'autre, que les unes sont reciproques aux autres.

Car si on compare ou la 1re & la 3e avec la 2e & la 4e; c'est à dire

c'eſtadire les deux antecedens avec les deux conſequens;

Ou les deux premieres avec les deux dernieres, c'eſtadire le 1er antecedent & ſon conſequent avec le 2e antecedent & ſon conſequent; on dit alors que les unes ſont *proportionelles* aux autres.

Mais ſi on compare la 1re & la 4e avec la 2e & la 3e, c'eſtadire les extrêmes avec les moyens, on dit alors que les unes ſont *reciproques* aux autres.

Tout ce que nous avons dit dans le Livre precedent ne regarde que le premier rapport.

Et tout ce que nous dirons dans celuy-cy ne regarde preſque que le ſecond, & c'eſtpourquoy nous l'avons intitulé des lignes reciproques.

SECOND LEMME.

UNE ſeule ligne peut eſtre ditte reciproque à deux lignes, & deux lignes eſtre reciproques à une ſeule. Mais c'eſt lors ſeulement que cette ligne que l'on compare ſeule avec deux autres eſt moyenne proportionelle entre ces deux autres. Car alors elle en vaut deux, parcequ'elle fait deux termes de la proportion. Le premier & le dernier quand on commence par elle: comme ſi je dis, une ligne de 6 pieds eſt à une de 4 comme une de 9 à une de 6: ou le 2e & le 3e quand on la met au milieu, comme ſi je dis 4. 6 :: 6. 9. Et il faut remarquer que quoique cette derniere diſpoſition ſoit la plus ordinaire, il y a neanmoins des rencontres où il eſt utile de ſe ſervir de la premiere, comme on pourra voir à la fin de ce Livre. II.

TROISIEME LEMME.

LORSQU'UN angle a deux baſes, & que les deux angles ſur une baſe ſont égaux aux deux angles ſur l'autre baſe chacun à chacun, cela peut arriver en deux manieres. III.

La premiere eſt quand l'angle que l'une des baſes fait ſur un coſté eſt égal à l'angle que l'autre baſe fait ſur le même coſté. (J'appelle le même coſté la même ligne droite tirée du ſommet, quoique conſiderée ſelon les diverſes baſes elle tienne lieu de deux coſtez.)

Or il eſt viſible que cela ne peut eſtre que quand les

bases de cet angle sont paralleles, comme l'on a veu X. 13.

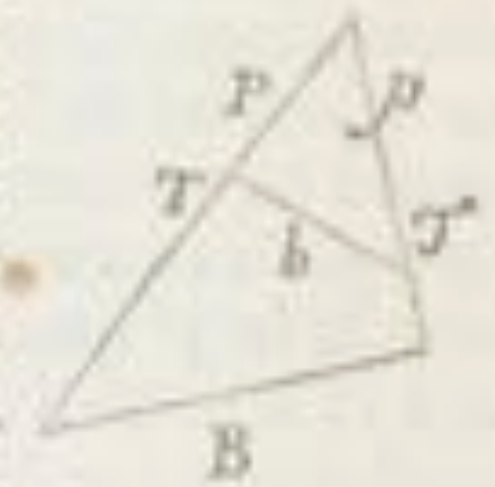
La seconde maniere est quand l'angle qu'une base fait sur un costé est égal à l'angle que l'autre base fait sur l'autre costé. Et alors on peut appeller ces bases *antiparalleles*, pour marquer leur effet oppose à celuy des bases paralleles. Ce sont ces sortes de bases qui feront presque toutes les preuves dans tout ce Livre.

QUATRIEME LEMME.

IV. LES bases paralleles d'un même angle ne peuvent estre disposées que d'une seule maniere, qui est d'estre toutes separées l'une de l'autre. Car c'est le propre des paralleles de ne se pouvoir jamais joindre. Mais les antiparalleles peuvent estre disposées en trois manieres differentes.

PREMIERE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

V. LA premiere ressemble à celle des paralleles, les deux antiparalleles estant aussy toutes separées, & alors il est visible que les costez de cet angle selon la derniere base que nous appellerons B, comprennent les costez de ce même angle selon la premiere base que nous appellerons b: & ainsy les unes sont *toutes*, & les autres leurs premieres parties, c'estadire leur partie la plus proche du sommet (& remarquez que dans tout ce Livre ce sera toûjours celle là que nous entendrons par le nom de partie, ou de 1re partie)



C'estpourquoy comme dans l'autre Livre nous appellerons toûjours les deux toutes T. *T*.
& leurs parties p. *p*.
de sorte que p de caractere romain sera toûjours la partie de T du même caractere romain: Et *p* de caractere italien sera toûjours la partie de *T* de caractere italien.

Or afin que les bases B & b soient antiparalleles, il est clair qu'il faut;

Que l'angle que T premiere toute fait sur B, soit égal à l'angle que *p* partie de la seconde toute fait sur b. Et que l'angle que *T* seconde toute fait sur B soit égal à l'an-

gle que p partie de la premiere toute fait sur b.

SECONDE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

La seconde est quand elles se croisent. Et alors ce ne sont pas les deux toutes qui sont les costez au regard d'une base, & les deux parties qui le sont au regard de l'autre, comme dans la premiere disposition. VI.

Mais les costez au regard de chaque base sont une toute & la partie de l'autre toute Et ainsy pour distinguer les deux bases nous appellerons B celle qui se trouve terminée par l'extremité de T, & l'autre b.

Or afin que les bases soient antiparalleles dans cette disposition, il est clair qu'il faut que les angles que les deux toutes font, l'une sur B & l'autre sur b, soient égaux; Et que ceux que les deux parties font l'une sur B & l'autre sur b soient égaux aussy.

TROISIEME DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

La troisième est quand les deux bases se joignent en un même point de l'un des costez. Et alors comme ce costé n'est point partagé, & que seul il tient lieu d'une toute & de sa partie, nous l'appellerons *M*, appellant à l'ordinaire la derniere base *B*, la premiere *b*, le costé partagé T, & sa partie p. VII.

Or afin que les bases *B* & *b* soient antiparalleles, il faut que l'angle que T fait sur *B* soit égal à l'angle que *M* fait sur *b*, & que l'angle que *M* fait sur *B* (qui comprend celuy qu'elle fait sur *b*) soit égal à l'angle que p fait sur *b*.

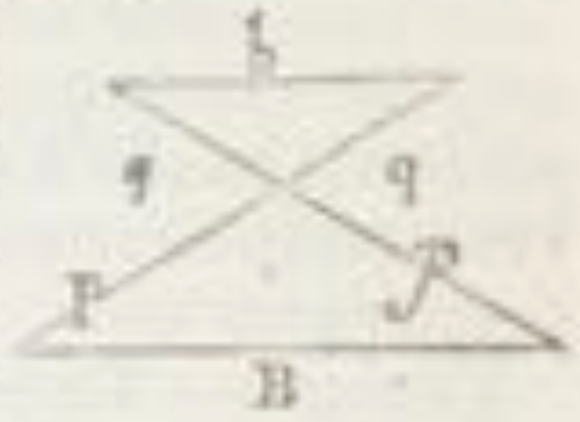
CINQUIEME LEMME. VIII.

LORSQUE deux lignes se coupant font 4 angles qui sont deux à deux opposez au sommet, & par consequent égaux, on peut donner des bases à deux de ces angles opposez au sommet qui soient telles que ces angles soient semblables,

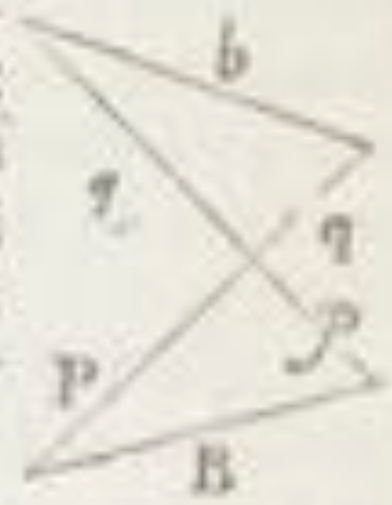
c'eſtadire, que les deux angles ſur la baſe de l'un ſoient égaux aux deux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun. Mais cela peut arriver en deux manieres que pour mieux faire entendre p & q de caractere romain marqueront les deux parties d'une même ligne, & *p* & *q* de caractere italien les deux parties de l'autre ligne. Et de plus, comme chaque angle doit avoir pour ſes coſtez la partie d'une ligne & la partie d'une autre ligne, p & *p* ſeront les coſtez d'un angle, & q & *q* les coſtez de l'autre.

Soit enfin appellée *B* la baſe de l'angle qui a p & *p* pour ſes coſtez, & *b* celle de l'angle qui a *q* & q pour ſes coſtez. Cela eſtant, voicy les deux manieres dont ces angles oppoſez au ſommet peuvent eſtre ſemblables.

La 1re eſt quand ce ſont les angles alternes qui ſont égaux ſur les deux baſes. C'eſtadire quand ce ſont les deux parties d'une même ligne, comme p & q, qui ſont des angles égaux p ſur *B*, & q ſur *b*, & ainſy des deux autres, & alors il eſt clair que ces deux baſes doivent eſtre paralleles.



IX. La 2e eſt quand ce ſont les angles de proche en proche qui ſont égaux ſur les deux baſes: de ſorte que ce ſont p & *q*, parties l'une d'une ligne & l'autre de l'autre, qui ſont les angles égaux p ſur *B*, & *q* ſur *b*, & *p* & q qui ſont auſſy les angles égaux *p* ſur *B*, & q ſur *b*.



Ce ſont encore ces baſes que nous appellerons *antiparalleles*, pour marquer leur effet contraire à celuy des paralleles.

SIXIEME LEMME.

X. COMME lorſqu'un angle a deux baſes paralleles, on peut & on doit conſiderer ces coſtez ſelon une baſe dans un eſpace parallele, & ſes autres coſtez ſelon l'autre baſe dans un autre eſpace parallele. Il en eſt de même quand les baſes ſont antiparalleles, avec cette difference,

Que quand les bases sont paralleles une seule ligne tirée par le sommet fait trois espaces paralleles. Le 1er compris entre le sommet & la derniere base. Le 2e entre le sommet & la 1re base. Le 3e entre les deux bases.

Mais quand elles sont antiparalleles, ce 3e espace ne peut pas estre parallele. Et pour les deux autres on ne les peut concevoir qu'en s'imaginant deux lignes differentes tirées par le sommet, l'une parallele à *B*, & l'autre parallele à *b*. Car *B* & *b* n'estant pas paralleles entr'elles, il est visible qu'une seule ligne ne peut pas estre parallele à l'une & à l'autre; mais il suffit de s'imaginer ces lignes tirées par le sommet, sans qu'il soit necessaire de les decrire.

Et ainsy nous devons toûjours nous imaginer dans ces angles qui ont deux bases antiparalleles deux espaces paralleles. L'un que j'appelleray *A*, compris entre le sommet & *B*. Et l'autre que j'appelleray *E*, compris entre le sommet & *b*.

XI.

XII.

XIII.

Et de plus il faut remarquer,

Que dans la 1re disposition des bases antiparalleles les deux toutes T & *T* sont dans l'espace *A*, & les deux parties p & *p* dans l'espace *E*.

Que dans la seconde, qui est quand les bases se croisent, T & *p* sont dans l'espace *A*; & *T* & p dans l'espace *E*.

Que dans la 3e, qui est quand elles se joignent en un seul point d'un costé, *M* se trouve dans l'un & l'autre espace. Car l'espace *A* comprend T & *M*: Et l'espace *E*. *M* & p.

SEPTIEME LEMME.

XIV.

Il en est de même quand les angles opposez au sommet ont leurs bases antiparalleles.

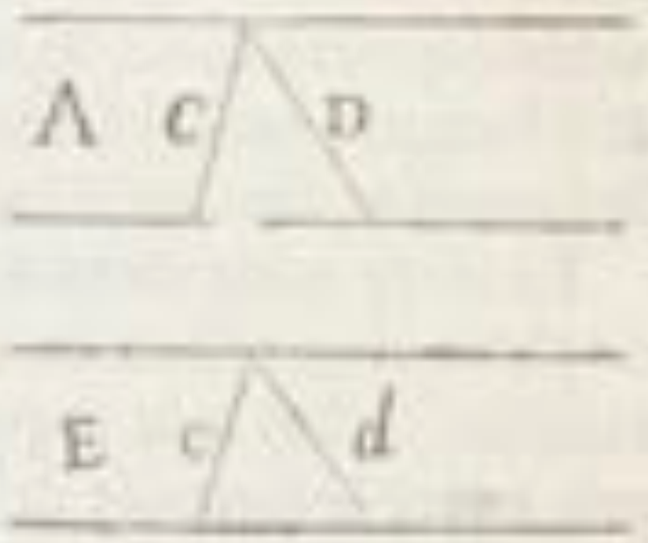
Car il se faut imaginer deux lignes tirées par le sommet commun, dont l'une soit parallele à *B* & l'autre à *b*; &

ainsy l'on aura deux espaces paralleles, l'un compris entre le sommet & *B* (dans lequel sont p & *p*) que nous appellerons *A*. Et l'autre compris entre ce même sommet & *b* (dans lequel sont q & *q*) que nous appellerons *E*.

HUITIEME LEMME.

XV. TOUT ce qu'on aura à prouver dans ce Livre le sera par le 1er Theoreme du Livre precedent, que je repeteray encore icy, afin qu'on l'ait plus present dans l'esprit.

Si deux lignes (comme *C* & *D*) sont dans un même espace parallele, comme est l'espace *A*.



Et que deux autres lignes comme (*c* & *d*) soient dans un autre espace parallele, comme est l'espace *E*.

Si *C* & *c* sont également inclinées, *C* dans *A*, & *c* dans *E*, & que *D* & *d*, soient aussy également inclinées *D* dans *A* & *d* dans *E*, les deux également inclinées entr'elles sont proportionelles aux deux qui le sont aussy entr'elles.

C. c :: D. d. & alternando C. D :: c. d.

NEUVIEME LEMME.

XVI. POUR ne se point brouiller en disposant les termes, il est bon de s'astraindre à donner toûjours pour 1er & 2e termes de la proportion les également inclinées dans les deux differens espaces paralleles, & de même au regard du 3e & du 4e. Et pour 1er & 3e termes, celles qui sont dans le même espace parallele. Et de même au regard du 2e & du 4e. Sauf à les disposer apres autrement, *Alternando*.

I. PROPOSITION FONDAMENTALE

DES RECIPROQUES.

XVII. LORSQU'UN même angle a deux bases antiparalleles, une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. C'est à dire que

T. p :: T. p. ou *T. T :: p. p.*

PREMIERE PREUVE DANS LA PREMIERE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

XVIII.

Dans cette disposition les deux toutes T & T sont dans l'espace *A*, & les deux parties p & *p* sont dans l'espace *E*. (par 11. 5.)

Or par 5. 5. T & *p* sont également inclinées, T dans *A*, & *p* dans *E*. & T & p également inclinées, T dans *A*, & p dans *E*.

Donc (par 15. 5.) T. *p* :: T. p.

Or T & sa partie p sont les extremes de la proportion, dont T & *p* sa partie sont les moyens.

Donc une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie.

SECONDE PREUVE DANS LA SECONDE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

XIX.

Dans cette 2e disposition T & *p* (partie de l'autre toute) sont dans l'espace *A*, & T & p dans l'espace *E*. (par 12. 5.)

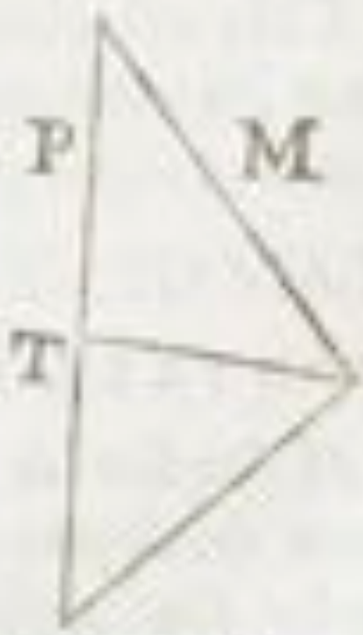
Or (par 5. 5.) T & T sont également inclinées, T dans *A*, & T dans *E*. Et de même p & *p* également inclinées, p dans *A* & *p* dans *E*.

Donc (par 15. 5.) T. T :: *p*. p.

Je reserve la 3e disposition pour un Corollaire à part.

COROLLAIRE.

XX.



Quand un angle a deux bases antiparalleles dans la 3e disposition, qui est quand elles se joignent à un seul point d'un costé, ce costé est moyenne proportionelle entre l'autre costé entier & la partie : C'est à dire que

$$T.M :: M.p.$$

Car (par 13. 5.) dans cette disposition *M* est dans l'un & l'autre espace, parceque T & *M* sont dans l'espace *A*, & *M* & p dans l'espace *E*.

Or (par 5. 5.) T & *M* sont également inclinées, T dans l'espace *A*, & *M* dans l'espace *E*.

Et *M* & p sont également inclinées, *M* dans l'espace *A* & p dans l'espace *E*.

Donc (par 15. 5.) *T*. *M* :: *M*. p.

II. PROPOSITION FONDAMENTALE DES RECIPROQUES.

XXI. QUAND deux lignes se coupant font deux angles opposez au sommet qui ont des bases *antiparalleles*, les parties de l'une de ces lignes qui se coupent en ce sommet sont reciproques aux parties de l'autre. (*Voyez la figure du n.* 9.)

Car (par 14. 5.) p & *p* sont dans l'espace *A*, & q & *q* sont dans l'espace *E*.

Or (par 9. 5.) p & *q* sont également inclinées, p dans *A*, & *q* dans *E*.

Et *p* & q également inclinées, *p* dans *A* & q dans *E*.

Donc (par 15. 5.)

p. *q* :: *p*. q.

Or p & q sont les parties de la même ligne: & *p* & *q* sont les parties de l'autre ligne.

Donc les parties d'une ligne sont reciproques aux parties de l'autre.

COROLLAIRE.

XXII. Si une de ces lignes qui en se coupant font des angles opposez au sommet, qui ont des bases *antiparalleles*, est divisée par la moitié, une seule de ces moitiez est moyenne proportionelle entre les parties de l'autre ligne.

Cela est clair, puisque c'est la même chose de donner pour les moyens de cette proportion les deux moitiez de la même ligne, ou une seule moitié prise deux fois.

PLAN GENERAL DE CE QUE L'ON PRETEND MONTRER DANS LA SUITTE DE CE LIVRE.

XXIII. *Il s'ensuit de tout ce que nous venons de dire, que pour avoir des lignes qui soient reciproques à d'autres, entre lesquelles soit aussy les moyennes proportionnelles, il ne faut qu'avoir vu un angle qui ait deux bases antiparalleles, ou deux*

deux angles oppoſez au ſommet qui ayent auſſy deux baſes antiparalleles.

L'un donnera des toutes & une de leurs parties qui ſont reciproques à d'autres toutes & à une de leurs parties ; ou même à une ſeule ligne qui ſera moyenne proportionelle entre ces toutes & une de leurs parties.

L'autre donnera des parties d'une ligne qui ſeront reciproques aux parties de l'autre, & même à une ſeule ligne qui ſera leur moyenne proportionelle.

Mais tout cela eſt peu de choſe ſi on n'a les voies generales pour trouver ces baſes antiparalleles.

Or je penſe avoir trouvé tout ce qui ſe peut trouver ſur cela en n'employant que les lignes droittes & les cercles.

Car 1. J'ay reconnu qu'il n'y a point de voie generale pour XXIV. *couper tout d'un coup les coſtez d'un angle, ou les coſtez de deux angles oppoſez au ſommet par des baſes antiparalleles, qu'en y employant la circonference d'un cercle, & c'eſt pourquoy on ne peut trouver ſans cela de moyenne proportionelle entre deux lignes données.*

2. J'ay remarqué que les 4. lignes, dont deux par ce moyen XXV. *ſont reciproques à deux autres, ont toûjours un point commun, qui eſt,*

1. Ou le ſommet de deux angles qui ſe touchent (ce qui n'eſt qu'un cas aſſez particulier, & qui n'eſt pas dans l'analogie des autres.)

2. Ou le ſommet d'un angle qui a deux baſes antiparalleles.

3. Ou le ſommet de deux angles oppoſez à ce ſommet, qui ont auſſy deux baſes antiparalleles.

Or c'eſt, ſi je ne me trompe, avoir tout trouvé que d'avoir XXVI. *conſidere que ce point commun ne peut eſtre au regard du cercle dont on a beſoin que,*

1. Ou dans la circonference.

2. Ou hors le cercle.

3. Ou dans le cercle.

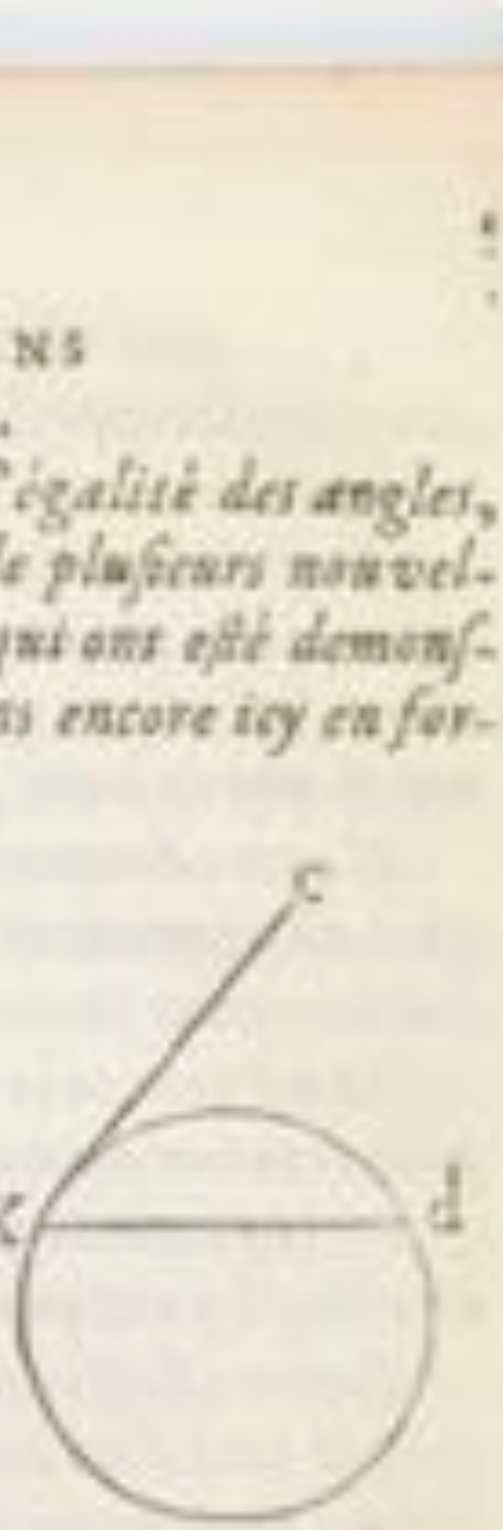
Et de pouvoir enſuite determiner tout ce que cela doit faire: c'eſt adire comment il ſe fait en tous ces cas là des baſes antiparalleles. Car tout ſe reduit là.

AVERTISSEMENT.

XXVII. *Comme nous avons besoin pour prouver l'egalité des angles, qui fait que des bases sont antiparalleles de plusieurs nouvelles maximes touchant l'egalité des angles qui ont eté demonstrées dans le Livre IX. nous les proposerons encore icy en forme de Lemmes, afin qu'en y renvoyant, nous nous dispensions de dire souvent les mêmes choses.*

DIXIEME LEMME.

XXVIII. L'ANGLE du segment (qui est celuy qui est compris entre une tangente & une corde) a pour mesure la moitié de l'arc que soutient cette corde du costé de la tangente; ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié de l'arc *k d*. IX. 13.



ONZIEME LEMME.

XXIX. TOUT angle inscript au cercle a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. D'où il s'enfuit que deux angles inscripts au cercle sont égaux quand ils sont appuyez sur le même arc, ou sur des arcs égaux.

Ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié de l'arc *c d*. IX. 18.

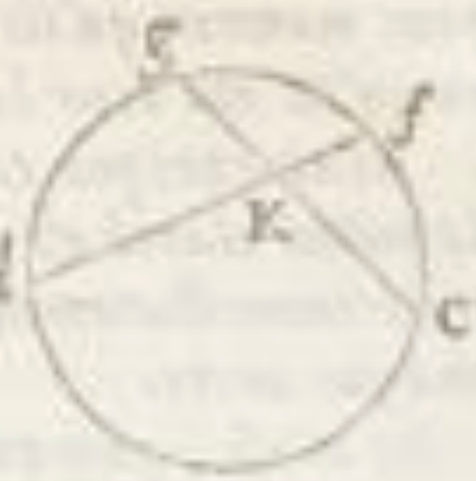
DOUZIEME LEMME.

XXX. TOUT angle dont le sommet est dans la circonference, & qui a pour costez une corde, & une ligne hors le cercle qui le coupe, a pour mesure la moitié de l'arc qui soutient le costé qui est une corde, plus la moitié de celuy que soutient le prolongement de l'autre costé qui est au dehors du cercle.

Ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié des arcs *k d* & *k f*. IX. 16.

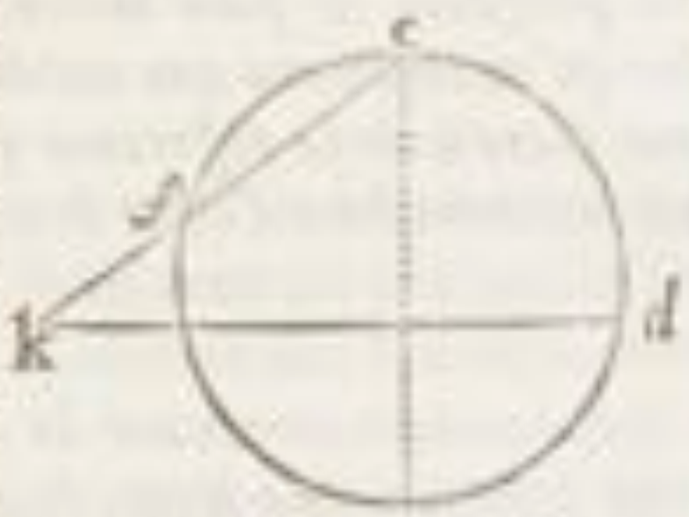
TREIZIEME LEMME.

TOUT angle qui se fait par la section de deux cordes qui se coupent au dedans du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc opposé. Ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié des arcs opposez *d c* & *g f*. IX. 42. XXXI.



QUATORZIEME LEMME.

TOUT angle dont le sommet est hors le cercle, & dont un costé coupant le cercle est terminé à l'extremité du diametre sur lequel l'autre costé est perpendiculaire, a pour mesure la moitié de l'arc que soutient la partie du costé non perpendiculaire au diametre laquelle est au dedans du cercle. Ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié de l'arc *f c*. IX. 46. XXXII.



DEUX AVIS DE LOGIQUE.

1.

Quand on a à prouver qu'un angle ayant deux bases, les angles sur une sont égaux aux angles sur l'autre chacun à chacun, on est assuré que cela est, quand on a prouvé que l'un des angles sur une base est égal à l'un des angles sur l'autre, parcequ'il s'ensuit de là necessairement que l'autre est égal aussy à l'autre. XXXIII.

Cette preuve est convaincante, & on s'en doit passer quand on ne peut mieux. Mais il faut avoüer qu'elle n'est pas si bonne & ne fait pas si bien entrer dans la nature des choses, que celle qui montre positivement que l'un & l'autre angle d'une base est égal à l'un & l'autre angle de l'autre. Et c'est pourquoy je ne me contenteray point de la premiere sorte de preuve, & me serviray toûjours de cette derniere.

2.

Quand on a à prouver de plusieurs binaires de lignes, qu'ils XXXIV.

sont reciproques les uns aux autres, on en eſt aſſeuré quand on peut montrer qu'ils ſont tous reciproques à un même binaire, ou qu'ils ont tous Le même moyenne proportionelle.

Mais quoique cela ſoit convaincant, l'eſprit ne reçoit pas La même clarté & ne demeure pas ſi ſatisfait, que ſi on montroit immediatement de chaque binaire qu'il eſt reciproque à chaque autre.

Et ainſy, quoyqu'il me fuſt facile d'employer la premiere voie, je me ſuis reſolu de n'employer que cette derniere comme plus parfaite & plus lumineuſe pour parler ainſy, & peut eſtre qu'on trouvera que ces deux exemples ſont remarquables pour faire voir la difference qu'il y a entre convaincre l'eſprit en le mettant hors d'eſtat de pouvoir douter qu'une choſe ſoit; & le ſatisfaire pleinement en luy donnant toute la clarté qu'il peut raiſonnablement deſirer.

Reprenons maintenant la diviſion propoſée, qui eſt que le point commun aux lignes reciproques par la ſection du cercle, eſt neceſſairement

1. Ou dans la circonference.

2. Ou hors le cercle.

3. Ou au dedans du cercle.

PREMIERE VOIE GENERALE
DE TROUVER DES RECIPROQUES
QUAND LE POINT COMMUN EST DANS LA CIRCONFERENCE.

On en trouve par cette voie en deux manieres. L'une par deux angles proches l'un de l'autre, & compris dans un angle total, ce qui eſt une eſpece ſinguliere, & hors l'analogie des autres Theoremes de ce Livre, ce qui fait que nous l'appellerons, *le Theoreme anomal.*

L'autre par un angle qui a deux baſes antiparalleles.

PREMIERE MANIERE.
THEOREME ANOMAL.

XXXV. Les deux coſtez de tout angle inſcript au cercle ſont reciproques à la ligne entiere, qui le partageant par la moitié ſe termine à la circonference & à la partie de cette li-

gne compriſe entre le ſommet de l'angle coupé par la moitié & ſa baſe.

Soit l'angle inſcript E *k E*. Soit pris le point *K* dans le ſegment oppoſé également diſtant d'E & d'*E*. La ligne *k K* qui coupe la baſe en *c* partage cet angle inſcript par la moitié, puiſque les deux angles E *k K* & *E k K* eſtant appuyez ſur des arcs égaux ſont égaux (par 30. 3.) qui eſt le même qu'E *k K*. *E k K*.

Or les angles E *k c* & *E k K* ne ſont pas ſeulement égaux, mais ils ſont auſſy ſemblables, c'eſtadire que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun.

Car les angles inſcripts vers E & vers *K* ſont égaux (par 30. 3.) parcequ'ils ſont appuyez ſur le même arc *k E*.

2. (par 32. 3.) L'angle *k c* E, a pour meſure la moitié de l'arc *k* E ſur lequel il eſt appuyé, plus la moitié de l'arc oppoſé *E K*. Et l'arc E *K* eſtant égal à l'arc *E K*, cette meſure eſt égale à la moitié des arcs *k E* & E *K*, qui eſt la meſure de l'angle inſcript *k E K*. (par 30. 3.)

Donc les angles *k c* E & *k E K* ſont égaux.

Donc les angles E *k c* & *E k K* ſont ſemblables.

Donc (par XI. 17.)

k E. *k K* :: *k c*. *k E*.

Ce qu'il falloit demonſtrer, puiſque *k* E & *k E* ſont les deux coſtez de l'angle partagé par la moitié, & que *k K* eſt la ligne entiere qui le partage, & *k c* ſa partie.

COROLLAIRE.

Si l'angle inſcript eſtoit Iſoſcele, chaque coſté ſeroit moyenne proportionelle entre la toute qui le diviſeroit par la moitié & ſa partie. XXXVI.

Car les coſtez de l'angle eſtant égaux, les prendre tous deux, ou en prendre un deux fois, c'eſt la même choſe.

Mais quand l'angle inſcript eſt Iſoſcele, la ligne qui le

partage par la moitié eſt neceſſairement un diametre. Et de plus les deux points E E eſtant alors également diſtans de K auſſy bien que de K, cela revient à ce qui ſera demonſtré plus bas par une autre voie.

SECONDE MANIERE DE LA MESME
VOIE GENERALE.

XXXVII. L'AUTRE maniere de trouver des reciproques quand le point commun eſt dans la circonference, eſt de ſe ſervir pour cela d'un angle qui a deux baſes antiparalleles. Surquoy il faut remarquer, que ce point eſtant dans la circonference, les coſtez de l'angle qu'il a pour ſommet ne ſçauroient eſtre coupez par la circonference que chacun en un endroit. Ce qui ne ſuffiroit pas pour determiner dans ces coſtez les points dont on puiſſe tirer des baſes antiparalleles, puiſque pour deux baſes il faut avoir quatre points differens dans les deux coſtez d'un angle, ou au moins trois.

Il faut donc qu'il y ait une ligne droitte outre la circonference, afin que les coſtez de l'angle eſtant coupez par l'une & par l'autre, le puiſſent eſtre en 4. endroits, ou au moins en 3. quand un des coſtez ſera terminé par un point commun à la ligne droitte & à la circonference.

Voicy donc la propoſition generale ſur ce ſujet, qui eſt peut-eſtre la plus belle & la plus generale qu'on puiſſe trouver ſur les proportions des lignes par la geometrie ordinaire.

PROPOSITION GENERALE.

XXXVIII. Si d'un point dans la circonference on tire une ligne indefiniment par le centre, & qu'on en tire une autre indefinie que j'appelleray *y*, qui coupe perpendiculairement celle qui paſſe par le centre, en quelque endroit qu'elle la coupe, ſoit en coupant auſſy le cercle, ſoit en le touchant, ſoit tout à fait hors le cercle; toutes les lignes tirées du point dans la circonference qui ſeront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference: ou coupées par la circonference & terminées par *y*; ſeront telles, que chaque toute & ſa partie vers le point commun ſeront reciproques à chaque autre toute & à ſa partie: & chaque

toute & sa partie auront pour moyenne proportionelle celle qui sera terminée à un point commun à *y*, & à la circonference.

CETTE proposition est si vaste & comprend tant de cas qu'on n'en sçauroit bien voir la verité, qu'en la considerant dans ces cás particuliers qui sont trois principaux. XXXIX.

Le 1er. Quand la ligne *y* coupe le cercle.

Le 2e. Quand elle le touche.

Le 3e. Quand elle est tout à fait hors le cercle.

C'est ce que nous traitterons par divers Theoremes.

PREMIER CAS.

LE 1er Cas est quand *y* coupe le cercle. Et alors il n'est point necessaire de dire que cette ligne doit estre perpendiculaire à celle qui estant tirée du point *K* passe par le centre : car il suffit de dire (ce qui est la méme chose) qu'elle doit couper le cercle en deux points, que j'appelleray E & *E*, qui soient également distans de *K*. Cela estant vray, voicy le 1er Theoreme. XL.

PREMIER THEOREME.

SI la ligne *y* coupe le cercle en deux points également distans de *K*, toutes les lignes tirées du point *K* qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference, ou coupées par la circonference & terminées par *y*, seront telles que chaque toute & sa partie vers *K* seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie vers *K*. XLI.

On peut faire sur cela trois comparaisons.

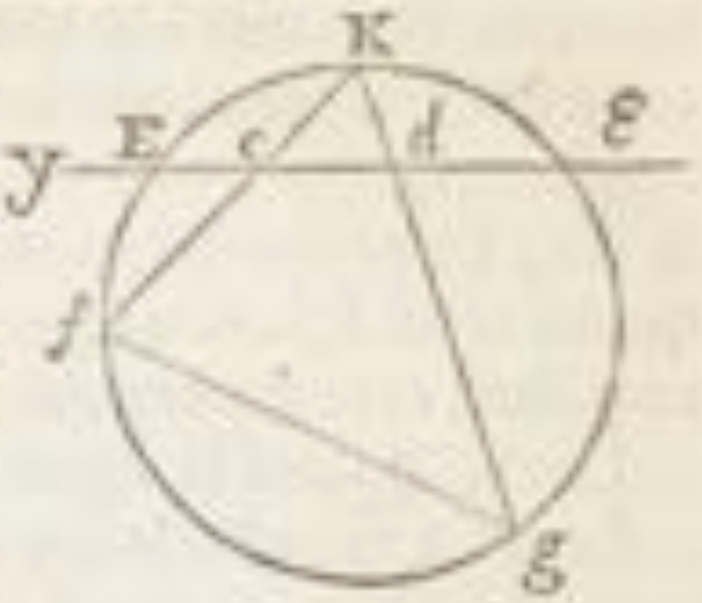
La 1re. De deux lignes qui sont toutes deux coupées par *y* & terminées par la circonference.

La 2e. De deux lignes qui sont toutes deux coupées par la circonference, & terminées par *y*.

La 3e. De deux lignes, dont l'une est coupée par *y*, & terminée par la circonference; & l'autre coupée par la circonference, & terminée par *y*.

PREMIERE COMPARAISON.

SOIENT tirées *K f*, qui coupe *y* en *c*; & *K g* qui le coupe en *d*: je dis que les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles. Donc tout le reste s'ensuit (par la 1re Proposition fondamentale, n. 17. XLII.



Car (par 32. 3.) l'angle $K c E$ a pour mesure la moitié de l'arc $K E$ plus la moitié de l'arc $E f$, & l'arc $K E$ estant égal à l'arc $K E$, cette mesure est égale à la moitié des deux arcs $K E$ & $E f$. Or la moitié des deux arcs $K E$ & $E f$ est la mesure de l'angle inscript $K g f$, parceque l'arc $K E f$, sur lequel il est appuyé, comprend ces deux là.

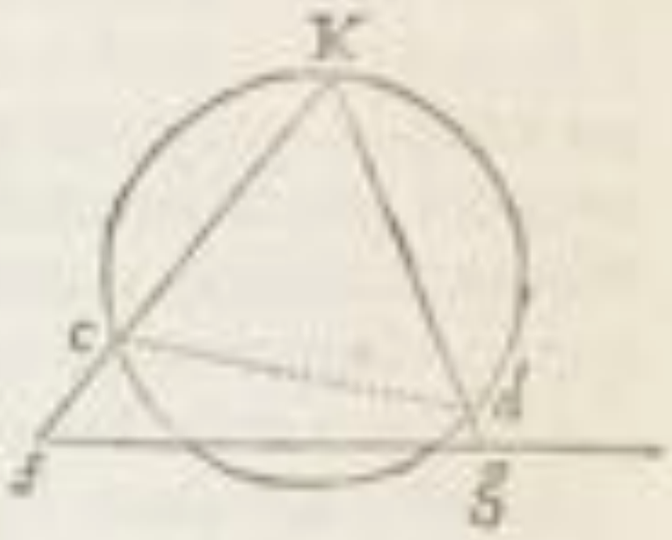
Donc l'angle $K c E$ (ou $K c d$) est égal à l'angle $K g f$. On prouvera la même chose des angles $K d c$ & $K f g$. Donc ces deux bases sont antiparalleles.

Donc (par la 1re Prop. fond. 3. 17.) la toute d'une part & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. Ce qu'il falloit demonstrer.

$$K f. K d :: K g. K c.$$
$$T. p :: T. p.$$

SECONDE COMPARAISON.

XLIII. SOIENT tirées $k f$ qui coupe la circonference en c, & $k g$ qui la coupe en d; je dis que les bases $f g$ & $c d$ sont antiparalleles.



Car (par 33. 3.) l'angle $k f g$ a pour mesure la moitié de l'arc $k c$, qui est aussy la mesure de l'angle inscript $k d c$. Donc les angles $k f g$ & $k d c$ sont égaux.

On prouvera de la même sorte que les angles $k g f$ & $k c d$ sont égaux.

Donc les bases $f g$ & $c d$ sont antiparalleles.

Donc $K f. K d :: K g. K c.$
$$T. p :: T. p.$$

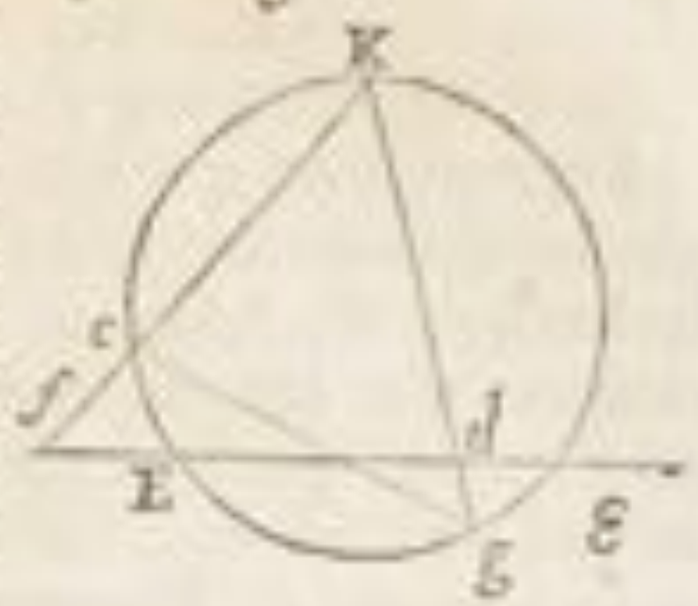
TROISIEME COMPARAISON.

XLIV. SOIENT tirées $k f$ qui coupe la circonference en c, & $k g$ qui coupe y en d.

Dans cette comparaison les bases se croisent. Car il

faut prendre pour les deux bases *f d* & *g c*.

Or pour prouver qu'elles sont antiparalleles, il faut montrer que les angles *k f d*, ou *k f E*. & *k g c* sont égaux. Ce qui est facile, puisqu'il est clair (par ce qui a esté dit (44. 5.) que l'un & l'autre a pour mesure la moitié de l'arc *k c*, & pour les deux autres *k d E* & *k c g*, cela se prouve aussy facilement (par ce qui a esté dit 43. 5.) de l'égalité entre les angles *k d c* (ou *k d E*) & *k g f*.



Donc les bases *f d* & *g c* sont antiparalleles.

Donc *K f. K g :: K d. K c.*

T. *T* :: *p*. p.

SECOND THEOREME.

COROLLAIRE DU PREMIER.

LA ligne tirée de *k* au point commun à la circonference & à *y* (c'est à dire *k E* ou *k ε*) est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie, soit qu'elle soit coupée par *y* & terminée par la circonference, soit qu'elle soit coupée par la circonference & terminée par *y*. XLV.

PREMIERE COMPARAISON.

Soit tirée *k f* qui coupe *y* en *c*, & *k E*, il ne faut que prouver que les bases *f*. E & *c*. *E* sont antiparalleles. Ce qui est facile.

Car les angles inscripts *k f E* & *k E c* (ou *k E E*) sont égaux, parceque (par 30. 3.) l'un est appuyé sur l'arc *k E*, & l'autre sur l'arc *k E*, qui sont égaux.

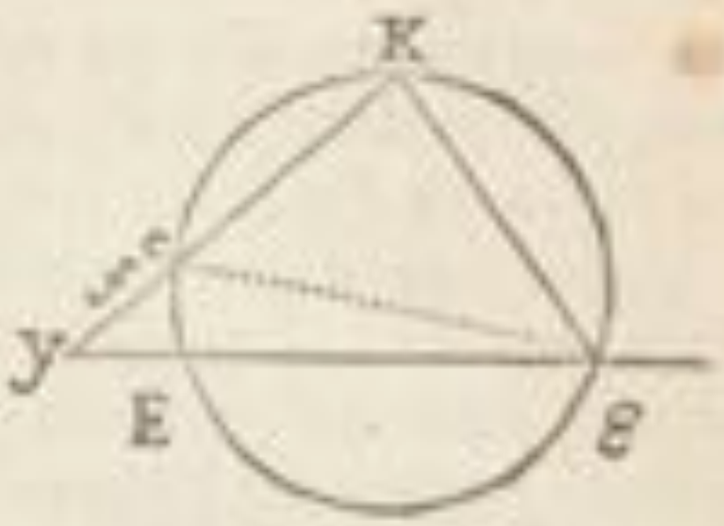
Et pour les angles *k c E*, & *k E f*, leur égalité se prouve de la même sorte que l'égalité des arcs *k f g* & *k d c*, dans le 1er Theoreme, 1re Comparaison.

Donc ces bases sont antiparalleles & disposées en la 3e maniere expliquée dans le 4e Lemme.

Donc $Kf. KE :: KE. Ke.$
$T. m :: m. p.$

SECONDE COMPARAISON.

XLVI. Soit tirée kf qui coupe la circonference en e; je dis que les bases fE & eE sont antiparalleles. Car les angles kfE & kEe ont pour mesure la moitié de l'arc ke, selon ce qui a esté dit, 1er Theoreme, 2e Comparaison, & les angles inscripts kEf, ou kEk & keE sont appuyez sur les angles kE, kE, qui sont égaux.



Donc $Kf. KE :: KE. Ke.$
$T. m :: m. p.$

SECOND CAS.

XLVII. Le 2e Cas de la proposition principale (5. 39.) est quand la ligne y touche le cercle en un point diametralement opposé à k: ce qui comprend aussy deux Theoremes.

TROISIEME THEOREME.

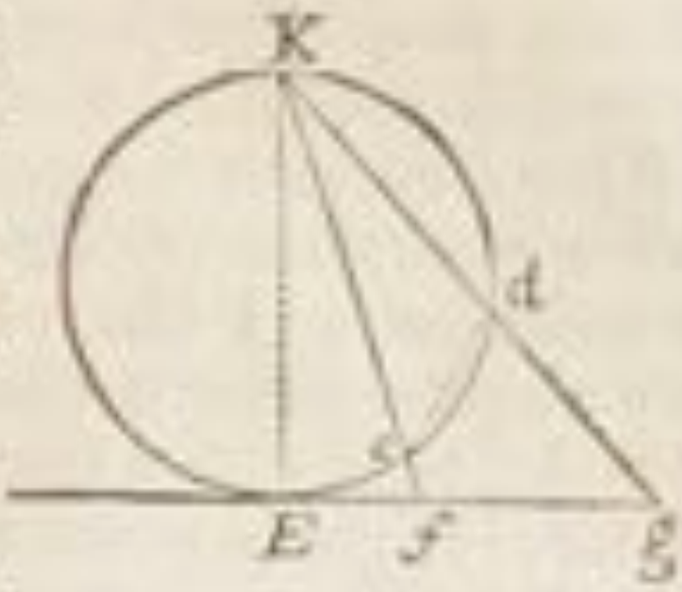
XLVIII. QUAND y touche le cercle en un point diametralement opposé à k, toutes les lignes tirées de k sur cette ligne (qui ne peuvent pas n'estre point coupées par le cercle) sont telles, que chaque toute & sa partie sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie.

Si les deux lignes estoient tirées de deux differens costez, il n'y auroit rien qui n'euſt deja esté prouvé (44 5) C'est pourquoy nous les proposerons du même costé. Ce qui pourra aussy servir aux cas semblables du 1er Theoreme.

Soient tirées du même costé kf, coupée par la circonference en e, & kg coupée par la circonference en d, il faut prouver que les bases fg & ed sont antiparalleles. Or il y a sur chacune un angle aigu kgf (ou kgE) & ked, & un obtus kfg & kde.

Mais pour les aigus ils sont égaux, parcequ'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc kd. (par 30. & 33. 5.)

Et pour les obtus, il eſt aiſé de prouver qu'ils ſont égaux par leurs complemens, qui ſont *cdg* & *kfE*.



Car par 12. Lem. *cdg* a pour meſure la moitié des deux arcs *kd* & *dc*.

Et par Lem. 14. *kfE* a pour meſure la moitié de l'arc *kdc*, qui comprend ces deux là.

Donc ces angles aigus ſont égaux.

Donc les obtus *kdc* & *kfg*, dont ces aigus ſont les ſupplemens, ſont égaux auſſy.

Donc les baſes *fg* & *cd* ſont antiparalleles.

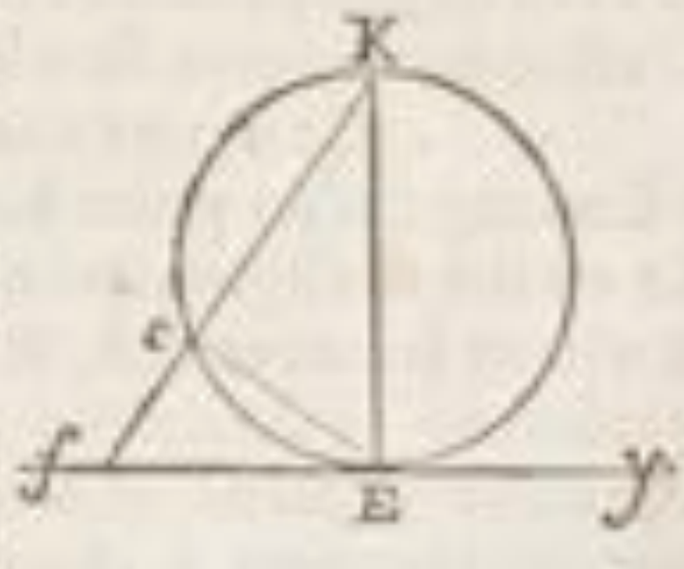
Donc *kf. kd :: kg. kc.*

T. *p* :: *T.* p.

QUATRIEME THEOREME,

COROLLAIRE DU SECOND.

XLIX. Le diametre tiré du point *k* (& par conſequent tout autre) eſt moyenne proportionelle entre chaque toute & ſa partie.



Soit tirée *kf* qui ſoit coupée en *c*, les baſes *fE* & *cE* ſont antiparalleles.

Car les angles *kEf*, & *kcE*, ſont droits, & par conſequent égaux.

Et les aigus *kfE*, & *kEc*, ont chacun pour meſure la moitié de l'arc *kc* (par 30. & 33. 3.)

Donc les baſes *fE* & *cE* ſont antiparalleles.

Donc *kf. kE :: kE. kc.*

T. *m* :: *m.* p.

TROISIEME CAS.

Le 3e Cas eſt quand la ligne *y* eſt toutafait hors le cer- 2;

cle : mais comme il n'a aucune difficulté particuliere, nous ne nous y arresterons point.

Il faut seulement remarquer, qu'il n'y a point de moyenne proportionelle dans ce 3e Cas, parcequ'il n'y a aucun point qui soit commun à la ligne *y*, & à la circonference, la ligne *y* estant toutafait hors le cercle.

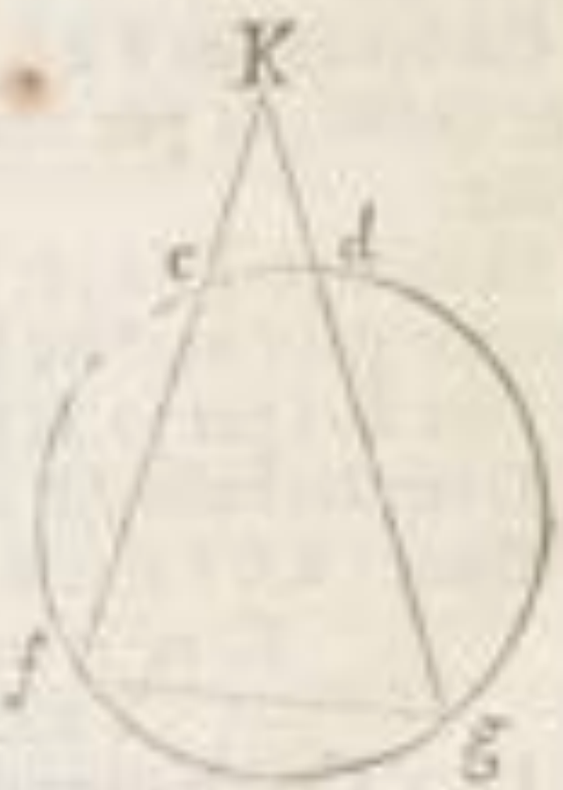
SECONDE VOIE GENERALE POUR TROUVER DES RECIPROQUES QUAND LE POINT COMMUN EST HORS LE CERCLE.

LI. QUAND le point commun est hors le cercle, les costez de l'angle qui l'a pour sommet peuvent estre coupez chacun deux fois par la circonference du cercle ; une fois par la convexité en entrant dans le cercle, & une fois par sa concavité, où on les suppose terminées ; si ce n'est que le point de l'attouchement tenant lieu tout seul de la convexité & de la concavité, un des costez peut n'estre terminé qu'à ce point. Et alors il sera tangente du cercle, & les deux bases antiparalleles n'auront que 3 points differens. C'est ce qu'on verra dans les deux Theoremes suivans.

CINQUIEME THEOREME.

LII. LORSQUE d'un point hors le cercle on tire des lignes qui coupent le cercle en sa convexité, & sont terminées en sa concavité, chaque toute, & sa partie hors le cercle, sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie hors le cercle.

Soient tirées *kf*, qui coupe la circonference en *e*, & *kg* qui la coupe en *d*. Je dis que les bases *fg* & *ed* sont antiparalleles.



Car (par 31. 3.) l'angle *k c d* a pour mesure la moitié des deux arcs *c d*, & *c f*. Or la moitié de ces deux arcs *c d* & *c f* est aussy la mesure de l'angle *k g f*. (par 30. 3.) Donc les angles *k c d* & *k g f* sont égaux.

On prouvera de la même sorte l'égalité des angles *k d c* & *k f g*.

Donc les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles.

Donc *k f. k d :: k g. k c.*

T. *p* :: *T*. p.

On peut aussy prouver ce Theoreme en croisant les bases, en montrant que les bases *f d* & *g c* sont antiparalleles.

L III.

Car les angles vers *f* & vers *g* sont égaux estant appuyez sur le même arc *c d*.

Et pour les angles *k c g* & *k d f*, ils sont égaux, parceque si on les examine (par le 11e Lemme, 31. 3.) on trouvera qu'ils ont chacun pour mesure la moitié des trois arcs *f c*, *c d*, *d g*.

Donc les bases *f d* & *g c* sont antiparalleles.

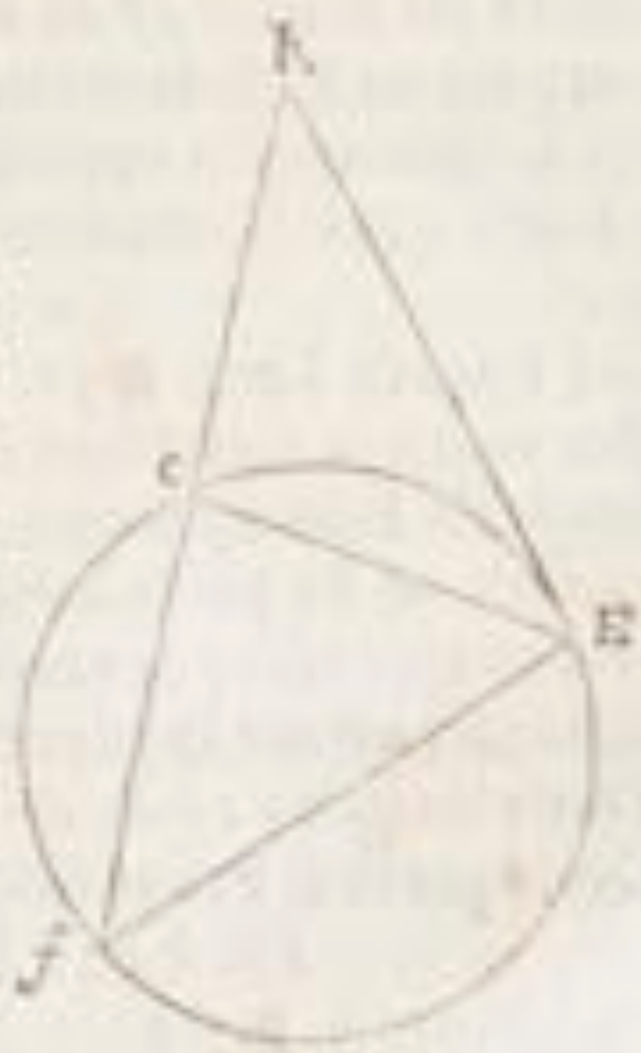
Donc *k f. k g :: k d. k c.*

T. *T* :: *p*. p.

VI. THEOREME,

COROLLAIRE DU CINQUIEME.

Si l'une de ces lignes tirées d'un point hors le cercle est une tangente, cette tangente est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie hors le cercle.



L IV.

Soit tirée *k f* qui coupe le cercle en *c* & la tangente *k E*, je dis que les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles. Car (par 30. 3.) l'angle *k f E* a pour mesure la moi-

tié de l'arc *c E*, qui eſt auſſy la meſure de l'angle *k E c* (par 29. 3. & par le 10e Lemme 29. 3.)

Et l'angle *k E f*, par le même 10e Lemme, a pour meſure la moitié des deux arcs *E c* & *c f*, qui eſt auſſy la meſure de l'angle *k c E*, par le 11e Lemme (30. 3.)

Donc les baſes *f E* & *E c* ſont antiparalleles.

Donc par 29. 3.

k f. k E :: k E. k c.

T. *m* :: *m*. p.

TROISIEME VOIE
POUR TROUVER DES RECIPROQUES
QUAND LE POINT EST AU DEDANS DU CERCLE.

LV. CETTE voie eſt pour trouver que les parties d'une ligne ſont reciproques aux parties d'une autre ligne, ou à une ligne quand elle eſt moyenne proportionelle. Et ainſy elle eſt toute appuyée ſur la 2e Propoſition fondamentale & ſon Corollaire (21. & 22. 3.) qui eſt des angles oppoſez au ſommet qui ont leurs baſes antiparalleles.

LVI. SEPTIEME THEOREME.

SI deux cordes ſe coupent dans le cercle, les parties de l'une ſont reciproques aux parties de l'autre.

Soient les cordes *c f* & *d g* qui ſe coupent en *k*. Soient tirées les baſes à deux angles oppoſez *c g*. *d f*. Je dis qu'elles ſont antiparalleles.

Car (par 11. Lem. & 30. 3.) les angles vers *g* & vers *f* ſont égaux, parcequ'ils ſont appuyez ſur le même arc *c d*. Et par la même raiſon les angles vers *c* & vers *d* ſont égaux auſſy eſtant appuyez ſur le même arc *g f*.

Donc les baſes *c g* & *d f* ſont antiparalleles.

Donc par la 2e Propoſition fondamentale (21. 3.)

k f. k g :: k d. k c.

P. *q* :: *f*. q.

HUITIEME THEOREME,

COROLLAIRE DU SEPTIEME.

LVII. Si une des lignes eſt coupée par la moitié, une de ces moitiez eſt moyenne proportionelle entre les deux parties de l'autre.

C'eſt le Corollaire même de la 2e Propoſition fondamentale.

COROLLAIRE.

LVIII. Si d'un point quelconque d'un diametre on éleve une perpendiculaire juſques à la circonference, cette perpendiculaire ſera moyenne proportionelle entre les deux parties du diametre.

Car il eſt clair que cette perpendiculaire eſt la moitié de la corde qui couperoit le diametre perpendiculairement par ce point. Donc par le Theoreme precedent elle doit eſtre moyenne proportionelle entre les parties du diametre.

NEUVIEME THEOREME.

LIX. Si du ſommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire ſur l'hypotenuſe, il y aura trois moyennes proportionelles.

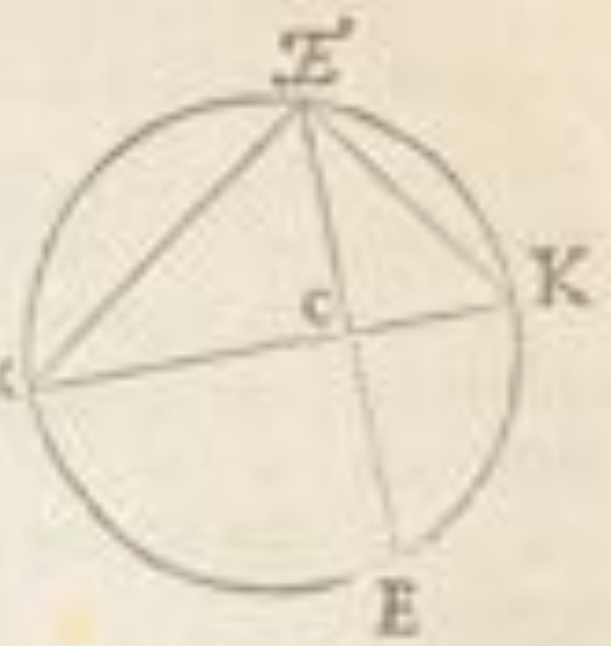
1. La perpendiculaire entre les deux parties de l'hypotenuſe.
2. Le petit coſté de l'angle droit entre la plus petite partie de l'hypotenuſe qui y eſt jointe, & l'hypotenuſe entiere.
3. Le plus grand coſté de l'angle droit entre la plus grande partie de l'hypotenuſe qui y eſt jointe, & l'hypotenuſe entiere.

Tout cela ſe peut prouver par un grand nombre de voies. Mais celle cy me ſemble la plus facile & la moins embaraſſée.

Soit l'angle droit *k E x*, & la perpendiculaire du ſommet à l'hypotenuſe *E e*.

Si on fait un cercle qui ait l'hypotenuſe *k x* pour dia-

metre, le sommet *E* se trouvera dans la circonference par IX. 31.



Et si on prolonge *E c* jusques à E, que je suppose estre le point opposé de la circonference, la corde *k* E sera coupée en *c* par la moitié, & les points *E* E également distans tant de *k* que de *K*.

Donc 1. par le Corollaire precedent

kc. Ec :: Ec. cK.

Donc 2. par le 2e Theoreme (46. 5.)

kc. kE :: kE. cK. Ec

Donc 3. par le même 2e Theoreme.

Kc. KE :: KE. Kk. kk.

DIXIEME THEOREME.

I. X. TOUTE ligne qui coupant perpendiculairement l'hypotenuse d'un angle droit en coupe aussy un costé, l'hypotenuse entiere & sa partie vers le point qui luy est commun avec le costé coupé, sont reciproques au costé coupé entier, & à sa même partie vers le point commun. La preuve en est facile par le 2e Theoreme & par d'autres voies que je laisse à trouver.

DERNIER THEOREME.

I. XI. UN angle ayant deux bases, si ses costez selon une base sont proportionels à ses costez selon l'autre base, les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base chacun à chacun. C'est la converse de la pluspart des propositions de ce Livre, qui se prouve ainsy.

Les costez sur une base ne sçauroient estre proportionels aux costez sur l'autre base qu'en deux manieres.

La 1re est, quand la toute d'une part & sa partie sont proportionels à l'autre toute & à sa partie.

La 2e, quand une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie.

Or

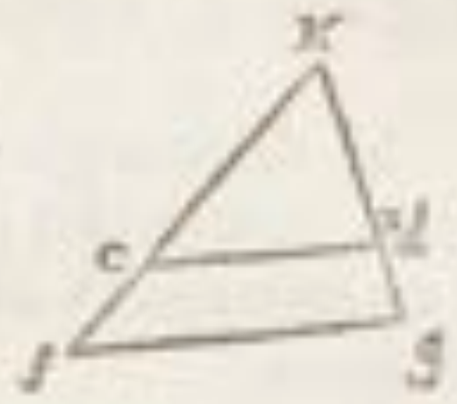
Or le premier ne peut estre, que les bases ne soient paralleles. Et le second, qu'elles ne soient antiparalleles. Et en l'un & en l'autre les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base.

PREUVE DU PREMIER.

SOIT l'angle *fkg*, dont les deux bases soient *fg* & *ed*. LXII.

Je dis que ces bases sont paralleles, si,

kf. ke :: kg. kd.



Car soit mené du point *e* une parallele à *fg*, qui coupe *kg* en un point que j'appelleray *x*.

Il est certain (par XI. 19.) que

kf. ke :: kg. kx.

Or par l'hypotese,

kf. ke :: kg. kd.

Donc *kx* & *kd* sont égales par II. 43.

Donc les points *k* & *d* ne sont qu'un même point.

Donc *ex* & *ed* ne sont que la même ligne.

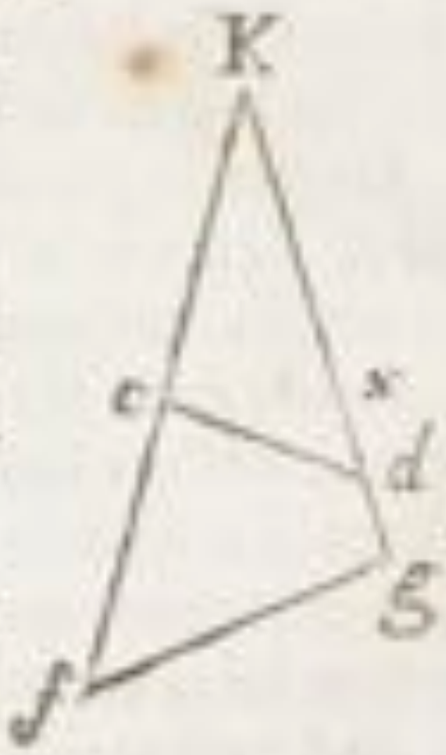
Or *ex* est parallele à *fg*. Donc *ed* luy est aussy parallele.

Donc les angles sur la base *ed* sont égaux aux angles sur la base *fg*. Ce qu'il falloit demonstrer.

PREUVE DU SECOND.

SOIT l'angle *fkg*, qui ait deux bases, *fg* & *ed*. Je dis que ces bases sont antiparalleles si

kf. kd :: kg. ke. LXIII.



Car soit tirée du point *e* une ligne qui coupant *kg*, prolongée s'il est besoin, faſſe sur *kg* un angle égal à celuy que *gf* fait sur *kf*, & que le point où cette ligne coupera *kg* soit *x*, cette ligne *ex* sera une base de l'angle *k* antiparallele à la base *fg*, & par consequent (par 18. 5.)

kf. kx :: kg. ke.

Or par l'hypotese,

kf. kd :: kg. ke.

Donc par II. 43. *k x* eſt égale à *k d*.

Donc les points *x* & *d* eſtant ſur la même ligne, ne ſont qu'un même point.

Donc *c x* & *c d* ne ſont qu'une même ligne.

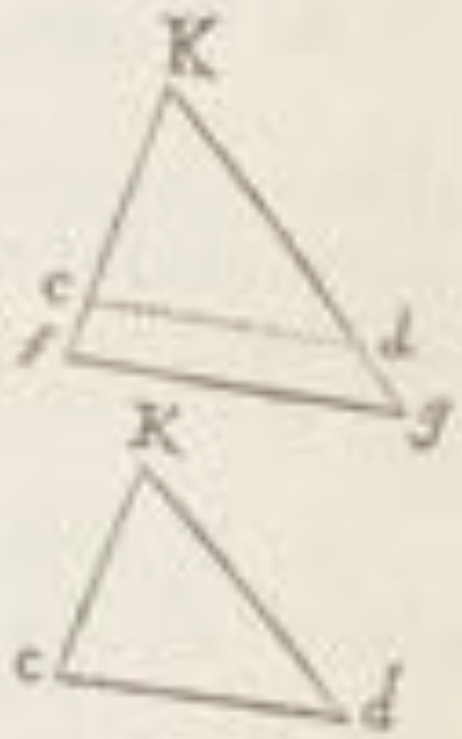
Or *c x* eſt antiparallele à *f g*.

Donc *c d* eſt auſſy antiparallele à *f g*.

Donc les angles ſur la baſe *c d* ſont égaux aux angles ſur la baſe *f g*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

LXIV. Si deux angles égaux ont leurs coſtez proportionels, ils ſont ſemblables; c'eſtadire que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'auere chacun à chacun.



Soient les angles égaux qui ayent leurs coſtez proportionels *f K g*, & *c k d*, en ſorte que *K f. K c :: K g. k d.*

D'où il s'enſuit que ſi *K f* eſt plus grand que *k c*, *K g* ſera plus grand que *k d*. Prenant donc dans *K f*, *K c* égale à *k c*, & dans *K g*, *K d* égale à *k d*, les angles *c K d* & *c k d* eſtant égaux, & les coſtez de l'un eſtant égaux à ceux de l'autre, leurs baſes ſeront égales, & les angles ſur la baſe de l'un égaux aux angles ſur la baſe de l'autre, par VIII. 63. & 64.

Or par le precedent Theoreme les deux baſes de l'angle *K*, ſçavoir la baſe *c d* & la baſe *f g*, ſont paralleles, & les angles ſur l'une ſont égaux aux angles ſur l'autre.

Donc dans les deux angles égaux *K* & *k* les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Remarquez que ce dernier Theoreme & ſon Corollaire ſont les inverſes des principaux Theoremes de ce Livre & du Livre precedent, & qu'ils ſeront de grand uſage dans la ſuite.

PROBLEMES.

I.

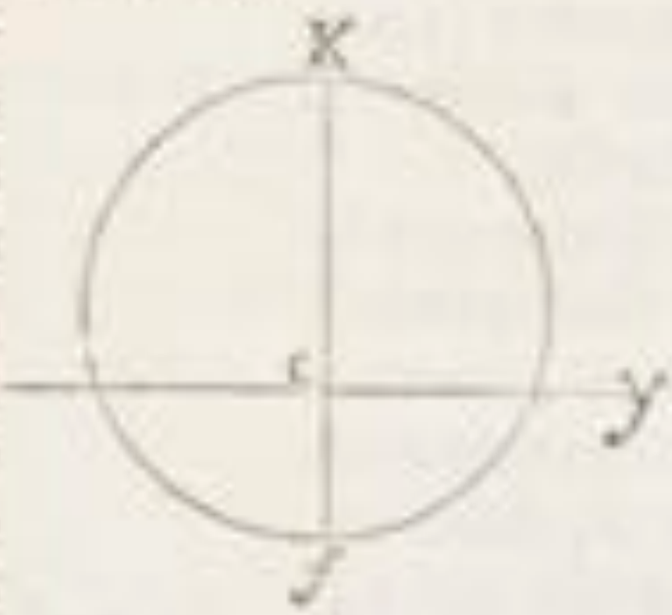
LXV.

TROUVER la moyenne proportionelle entre deux lignes données. Joindre les lignes données. Faire un demy cercle, dont prises ensemble elles soient diametre : la perpendiculaire élevée du point où se joignent ces lignes à la circonference sera la moyenne proportionelle entre ces lignes données. (par 57. 5.)

On peut employer pour trouver la même chose les Theoremes 2. (46. 5.) & 6. 54. 5.) J'en laisse la recherche pour exercer l'esprit.

SECOND PROBLEME.

LXVI.



TROUVER toutes les reciproques possibles à deux lignes données. Mettre la plus petite dans la plus grande, comme *k r* dans *k f*. Faire un cercle qui ait la plus grande pour diametre. Et du point *r*, où la plus petite se termine, tirer sur ce diametre une perpendiculaire indefinie comme *y*. Cette perpendiculaire satisfera au Probleme, comme on le peut juger en considerant le 1er Theoreme (42. 43. 45 5.) sans qu'il soit besoin que je m'amuse à l'expliquer davantage.

TROISIEME PROBLEME.

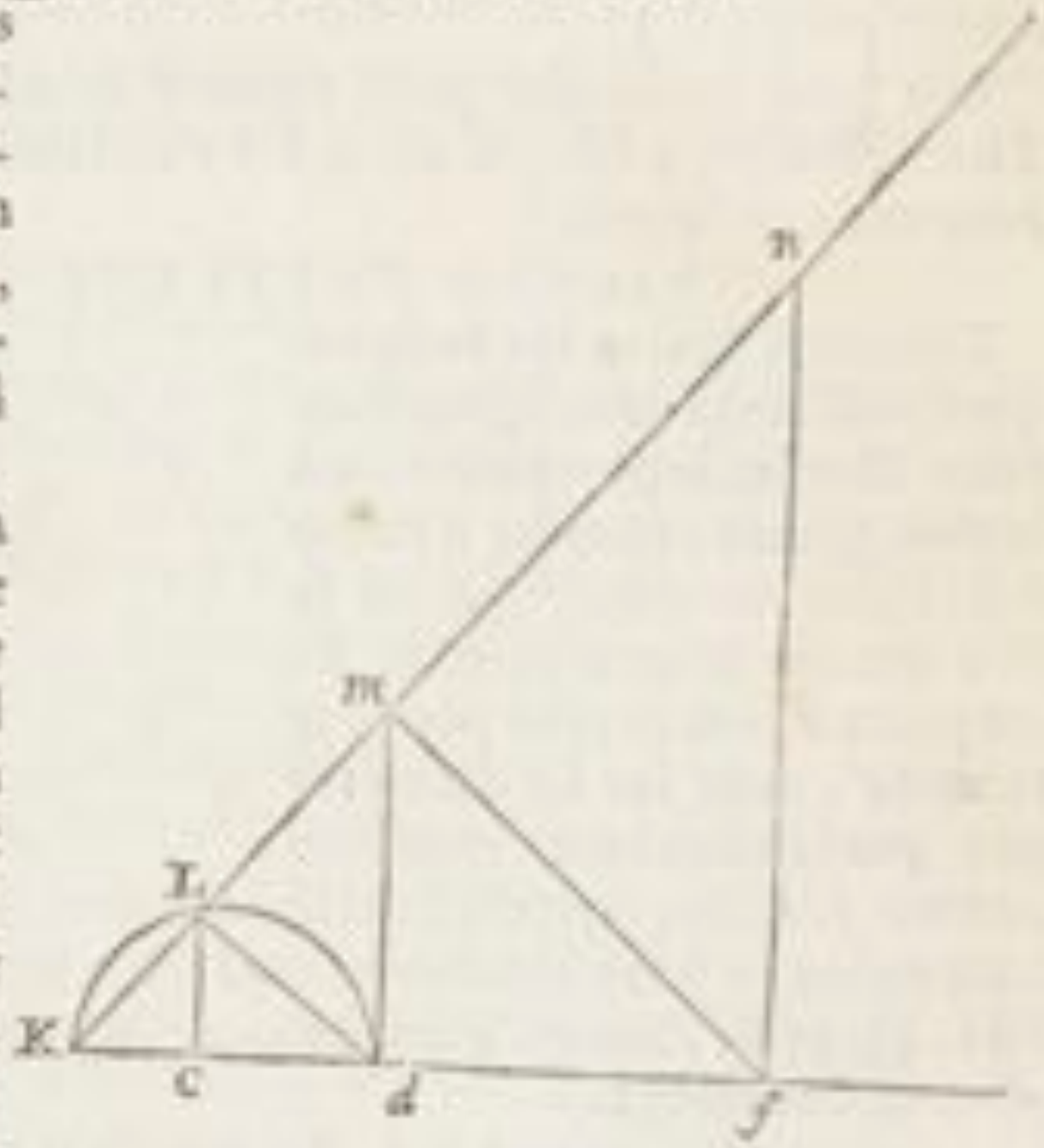
LXVII.

AYANT tiré à discretion d'un même point tant de lignes que l'on voudra sur une même ligne, les diviser toutes, en sorte que chaque toute & sa partie vers le point commun soient reciproques à chaque autre toute & à sa même partie.

Tout cercle dont la circonference paſſera par le point commun, & qui aura pour diametre, ou la perpendiculaire entiere de ce point à la ligne, ou une partie de cette perpendiculaire, ſatisfera au Probleme, par le 3e Theoreme, & ce qui a eſté dit du 3e Cas (49. 50. 3.)

QUATRIEME PROBLEME.

LXVIII. AYANT les trois premieres lignes d'une progreſſion geometrique, trouver toutes autres à l'infini.



Faire que la 3e comprenne la 1re, comme *Kd* comprend *K c*, faire un cercle qui ait *Kd* pour diametre, de *c* élever la perpendiculaire *c L*, & puis tirer une ligne indefinie de *K* par *L*, laquelle j'appelleray *x*; & prolonger auſſy infiniment *Kd*, laquelle j'appelleray *z*.

Tirant *Ld* perpendiculaire ſur *x*, & *dm* perpendiculaire ſur *z*, & *mf* perpendicolaire ſur *x*, & *fn* perpendiculaire ſur *z*, & ainſy à l'infiny:

On trouvera facilement par (20. 3.) la ſuite infinie de la progreſſion geometrique, dont les trois premiers termes auront eſté *kc*. *kL*. *kd*. qui ſeront ſuivis de *km*. *kf*. *kn*. *kg*. &c.

CINQUIEME PROBLEME.

LXIX. DIVISER une ligne donnée en moyenne & extrême raison. C'eſtadire en telle ſorte que ſa plus grande partie ſoit moyenne proportionelle entre la plus petite partie & la toute.

Ce qui eſt auſſy la même choſe que de trouver une ligne qui ſoit moyenne entre une donnée & cette donnée moins cette moyenne, laquelle pour cette raiſon j'appelleray la mediane.

Soit la ligne donnée appellée *b*.

Sa plus grande partie que l'on cherche *x*.

Et ſa plus petite *b*—*x*.

Il faut trouver une ligne qui ſoit telle, que *b* moins cette ligne ſoit à cette ligne comme cette ligne eſt à *b*.

b—*x*. *x* :: *x*. *b*.

C'eſt ce qui ſe peut trouver par une voie fort facile.

Décrire un cercle de l'intervale de la moitié de *b*, élevée perpendiculairement ſur l'une des extremitez de *b*.

Et tirer une ſecante de l'autre extremité de *b*, qui paſſant par le centre du cercle ſe termine à la circonference.

La partie de cette ſecante qui eſt hors le cercle ſera *x*. C'eſtadire moyenne proportionelle entre *b*, & *b*—*x*.

Car par la conſtruction 1. *b* eſt tangente de ce cercle.

2. Le diametre de ce cercle eſt égal à *b*.

3. Et par conſequent la ſecante entiere eſt *x*+*b*.

Or (par 54. 3.) *b* tangente eſt moyenne proportionelle entre la partie de la ſecante qui eſt hors le cercle (c'eſtadire *x*.)

Et la ſecante entiere (c'eſtadire *x*+*b*.

Donc *x*. *b* :: *b*. *x*+*b*.

Donc *permutando* *b*. *x* :: *x*+*b*. *b*.

Donc *dividendo* *b*—*x*. *x* :: *x*. *b*.

Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREMIER COROLLAIRE.

LXX. UNE ligne eſtant diviſée en moyenne & extrême raiſon, ſi on y ajoûte ſa plus grande partie (que nous appellerons la mediane) il s'en fera une nouvelle toute qui ſera encore diviſée en moyenne & extrême raiſon, la 1re toute eſtant la mediane.

C'eſt ce qui ſe voit par la voie même dont on s'eſt ſervi pour diviſer la 1re toute en moyenne & extrême raiſon, en ſorte qu'il ne faut que recompoſer, pour parler ainſy, ce que l'on a diviſé.

Car ſi $b-x. \ x :: x. \ b.$

Componendo $b. \ x :: x+b. \ b.$

Donc la ligne $x+b$ eſt diviſée par b en moyenne & extrême raiſon, puiſque b eſt moyenne proportionelle entre la toute $x+b$. & ſon autre partie x.

SECOND COROLLAIRE.

LXXI. UNE ligne eſtant diviſée en moyenne & extrême raiſon, ſa petite partie diviſe la mediane en moyenne & extrême raiſon.

Soit b diviſée comme deſſus, & comme ſa mediane eſt appellée x, ſoit la petite appellée y. Il faut prouver que $x-y. \ y :: y. \ x.$

Or il ne faut pour cela que nommer b par ces parties $y+x$.

Car par la diviſion de b par x en moyenne & extrême raiſon $y. \ x :: x. \ y+x.$

Donc *permutando* $x \ y :: y+x. \ x.$

Donc *dividendo* $x-y. \ y :: y. \ x.$ Ce qu'il falloit demonſtrer.

TROISIEME COROLLAIRE.

LXXII. IL eſt aiſé de conclure de ces deux Corollaires, que lorſqu'on a une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes & plus petites diviſées de la même ſorte.

PREUVE DES PLUS GRANDES.

LXXIII. SI on joint la mediane à la 1re toute, il s'en fait une 2de toute qui a la 1re pour ſa mediane (par le 1er Corollaire.)

Donc ſi on joint la 1re toute à la 2e, il s'en fait une 3e qui a la 2e pour ſa mediane.

Et joignant la 2e à la 3e, il s'en fait une 4e qui a la 3e pour ſa mediane, & ainſy à l'infini.

PREUVE DES PLUS PETITES.

SI on prend la mediane de la 1re toute, il s'en fait une 2e toute plus petite, qui a pour ſa mediane (par le 2e Corollaire) la petite partie de la 1re toute.

Et cette mediane de la 2e toute eſt une 3e toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la 2e toute, & cette mediane de la 3e toute eſt une 4e toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la 3e toute, & ainſy à l'infini. Ce qui peut eſtre conſideré comme une nouvelle & tres belle preuve de la diviſibilité d'une ligne à l'infini.

SIXIEME PROBLEME.

AYANT la grandeur des coſtez d'un angle qui doive eſtre la moitié de chacun des angles ſur la baſe, en trouver la baſe. LXXIV.

Soit *K b* de la grandeur de ces coſtez, & ſoit décritte une portion de cercle de cette intervale & du centre *K*.

Soit diviſée *K b* en *c*. en moitié & extréme raiſon, en ſorte

b c. *c K* :: *c K*. *b K*.

La corde *b d* de la grandeur de *c K*, qui eſt la moyenne entre *b c* & *b K*, ſera la baſe de cet angle, & *K d* en ſera l'autre coſté.

Car ſoit tirée la ligne *c d*, je ſuppoſe que les deux angles ſur la baſe d'un angle Iſoſcele ſont égaux. Et ainſy j'auray prouvé que l'angle *K* eſt la moitié de chacun des angles ſur la baſe, ſi je puis montrer deux choſes.

La 1re. Que l'angle *K* eſt égal à l'angle *b d c*.

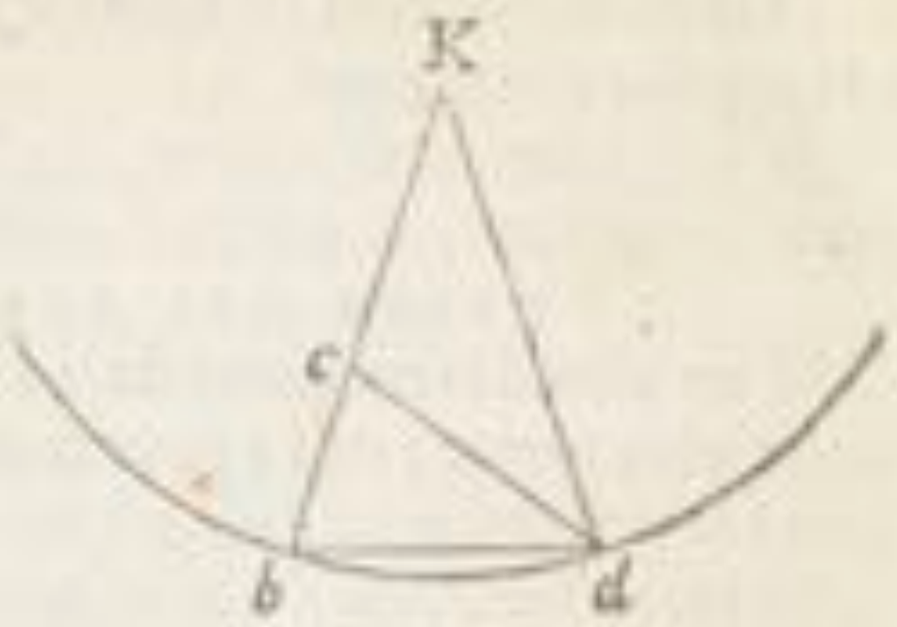
La 2e. Que l'angle *b d c* eſt la moitié de l'angle *b d K*.

PREUVE DE LA PREMIERE.

L'angle *b* a deux baſes, *c d* & *K d*, & ſes coſtez ſelon une baſe ſont proportionels à ſes coſtez ſelon l'autre baſe, puiſque

b c. *b d* :: *b d*. *b K*.

Donc les baſes *c d* & *K d* ſont antiparalleles, & par conſequent les angles ſur une ſont égaux aux angles ſur l'autre chacun à chacun.



Donc l'angle *x* eſt égal à l'angle *b d c*. Ce qui eſt la premiere choſe qu'il falloit demonſtrer.

PREUVE DE LA SECONDE.

Les deux parties de *b K*, baſe de l'angle *b d K*, ſont en même raiſon que les deux coſtez de cet angle, puiſque *d K* eſtant égale à *b K*, & *c K* à *b d*,

b c. c K :: b d. d K.

Donc l'angle *b d K* eſt diviſé par la moitié.

Donc l'angle *x* eſtant égal à l'angle *b d c*, qui eſt la moitié de l'angle *b d K*, eſt auſſy la moitié de l'angle *b d K*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

LXXV. TOUT angle Iſoſcele dont la baſe eſt moyenne proportionelle entre le coſté entier & le coſté moins, cette baſe eſt de 36 degrez, & chacun des angles ſur la baſe de 72. Car 36. plus deux fois 72. qui eſt la double de 36, vaut 180, qui eſt ce que valent les 3 angles pris enſemble.

SEPTIEME PROBLEME.

AYANT la baſe d'un angle Iſoſcele de 36 degrez, en trouver le coſté.

Soit *b* la baſe donnée diviſée en moyenne & extrême raiſon, & *x* en ſoit la plus grande partie, *x + b* ſera le coſté de cet angle. C'eſtadire que l'angle qui aura *x + b* pour l'un & l'autre de ces coſtez, & *b* pour baſe ſera de 36 degrez.

Car puiſque par la diviſion de *b* en moyenne & extrême raiſon. *b — x. x :: x. b.*

Componendo.

b. x :: x + b. b.

Donc

Donc la base *b* est moyenne proportionelle entre le costé $x-b$ & x, qui est ce costé moins *b*.

Donc par le precedent Corollaire l'angle qui a $x-b$ pour chaque costé, & *b* pour base, est de 36 degrez. Ce qu'il falloit demonstrer.

DES LIGNES INCOMMENSURABLES.

Ce que nous avons dit dans le IV. Livre des grandeurs incommensurables donne une si grande facilité d'expliquer les lignes incommensurables, qu'il ne faut pour cela qu'ajoûter à ce Livre trois ou quatre propositions. LXXVI.

PROPOSITION GENERALE.

Lorsque 3 lignes sont continuellement proportionelles, la raison de la 1re à la 3e peut estre de 3 sortes: ce qui se fait en 3 cas.

Premier Cas.

Si la raison de la premiere à la troisiéme est une raison de nombre à nombre qui ait pour ses exposans des nombres quarrez, la moyenne est à chacune des deux autres, comme le produit des racines de ces nombres quarrez, est à chacun de ces nombres quarrez, & par consequent la moyenne est commensurable aux deux autres.

Second Cas.

Si la raison de la 1re à la 3e est une raison de nombre à nombre, qui n'ait pas pour ses exposans des nombres quarrez, la moyenne est incommensurable en longueur & commensurable en puissance à la 1re & à la 3e.

Troisieme Cas.

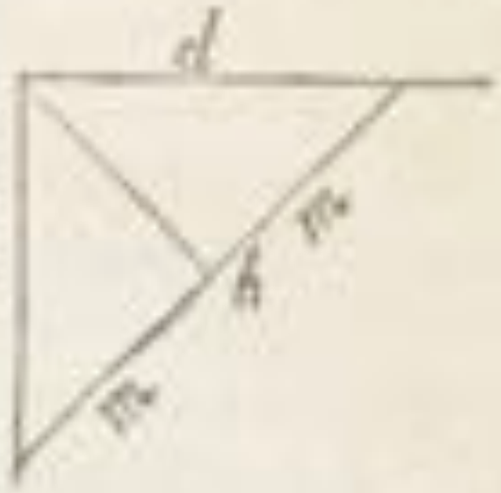
Si la raison de la 1re à la 3e est une raison sourde, & non de nombre à nombre, la moyenne est incommensurable aux deux autres, tant en longueur qu'en puissance.

Tous ces 3 Cas se prouvent des lignes, de la même sorte qu'on les a prouvez dans le IV. Livre des grandeurs en general. C'est pourquoy ce qui reste icy est d'appliquer cette doctrine generale à des exemples particuliers qui soient propres aux lignes. Ce que nous ferons par les Theoremes suivans.

PREMIER THEOREME.

LXXVII. UN angle droit eſtant Iſoſcele, le coſté & l'hypotenuſe ſont incommenſurables en longueur & commenſurables en puiſſance.

Soit un angle droit Iſoſcele, dont
L'hypotenuſe ſoit appellée *b.*
Le coſté *d.*



La perpendiculaire du ſommet à l'hypotenuſe la partagera en deux également. Chaque moitié
ſoit appellée *m.*

Donc ∴ *b. d. m.*
Or *b. m* :: 2. 1.

Donc 2 & 1 n'eſtant pas deux nombres quarrez (par le 2e Cas) *d* eſt incommenſurable en longueur à *b* & à *m*.

Mais il leur eſt commenſurable en puiſſance, parceque

$$\left\{\begin{matrix} bb. & dd \\ dd. & mm \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} b. & m. \\ 2. & 1. \end{matrix}\right\}$$

SECOND THEOREME.

LXXVIII. QUAND l'hypotenuſe eſt à l'un des coſtez d'un angle droit, comme nombre à nombre, il eſt aiſé de juger ſi l'autre coſté eſt commenſurable ou incommenſurable à l'hypotenuſe. Et voicy comment.

Soit l'hypotenuſe *b.*
Un des coſtez *c.*
L'autre coſté *d.*

Une perpendiculaire eſtant menée du ſommet à l'hypotenuſe,
Soit ſa portion vers *c* appellée *k*,
Et l'autre vers *d* appellée *l.*

Il s'enſuit que $\left\{\begin{matrix} \therefore & b. & c. & k. \\ \therefore & b. & d. & l. \end{matrix}\right.$

Suppoſant donc que *b* & *c* ſoient comme les deux nombres *x* & *z*. C'eſtadire que

b. c :: *x. z.*

Donc la raiſon de *b. k* eſtant double de la raiſon de *b. c.*

b. k :: *xx. zz.*

Or k & l eſtant les deux portions de b,

$l = b - k$.

Donc b. l :: xx. $xx - zz$.

Donc ſi $xx - zz$ eſt un nombre quarré par le 1er Cas de la Propoſition principale, b eſt commenſurable à d.

Que ſi au contraire $xx - zz$ n'eſt pas un nombre quarré (par le 2e Cas) b n'eſt point commenſurable à d en longueur, mais ſeulement en puiſſance.

PROBLEME.

LXXIX. TROUVER toutes les raiſons de nombre à nombre ſelon leſquelles l'hypotenuſe peut eſtre à chacun coſté comme nombre à nombre.

L'hypotenuſe ne peut eſtre à chacun coſté comme nombre à nombre, que ces 3 nombres eſtant reduits aux moindres termes ne ſoient tels qu'il s'enſuit.

I. Le nombre de l'hypotenuſe doit avoir ſon quarré égal aux quarrez des nombres de chaque coſté

$HH = BB + CC$.

II. Le nombre du grand coſté doit eſtre moindre ſeulement d'une unité que celuy de l'hypotenuſe $B + 1 = H$.

III. Le nombre du petit coſté doit avoir ſon quarré égal aux nombres de l'hypotenuſe & du grand coſté

$CC = H + B$.

Or pour trouver toutes ſortes de 3 nombres qui ſoient tels que cy deſſus, il ne faut que voir ce qui en a eſté dit dans le Livre IV. n. 30.

TROISIEME THEOREME.

LXXX. LORSQU'UN des coſtez de l'angle droit eſt une aliquote de l'hypotenuſe, l'autre coſté eſt incommenſurable à l'hypotenuſe en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance.

Car afin que c par exemple, ſoit une aliquote de b, il faut que b ſoit à c, comme quelque nombre à l'unité que je marqueray par un 1.

Soit donc b. c :: x. 1.

Donc par le Theoreme 2.

b. k :: xx. 11.

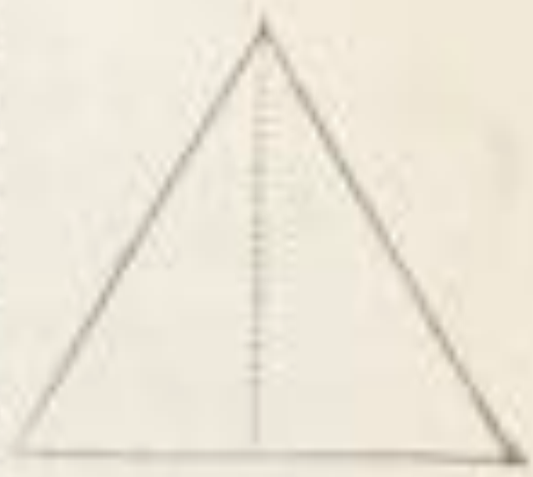
b. l :: xx. $xx - 11$.

Or il eſt impoſſible que $x\,x-11$ ſoit un nombre quarré. Car (11) ne fait qu'une unité, ſelon ce qui a eſté dit, IV. 10. Et deux moindres quarrez ne peuvent jamais eſtre differents ſeulement d'une unité.

Donc par le Theoreme 1er *b* & *d* ſont incommenſurables en longueur, & commenſurables ſeulement en puiſſance.

COROLLAIRE.

LXXXI. Si la baſe d'un angle Iſoſcele eſt égale au coſté, la perpendiculaire du ſommet à la baſe eſt incommenſurable en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance avec le coſté.



Car alors cette perpendiculaire fait un angle droit avec la moitié de la baſe, & l'un ou l'autre des coſtez eſt l'hypotenuſe de cet angle droit.

Donc l'un des coſtez de cet angle droit, qui eſt la moitié de la baſe, eſt auſſy la moitié de l'hypotenuſe.

Donc il eſt une aliquote de l'hypotenuſe.

Donc par le Theoreme precedent l'autre coſté, qui eſt la perpendiculaire, eſt incommenſurable en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance avec l'hypotenuſe de cet angle droit, laquelle eſt le coſté de l'angle dont la baſe eſt ſuppoſée égale à chaque coſté.

QUATRIEME THEOREME.

LXXXII. AYANT deux lignes incommenſurables en longueur (ou par les Theoremes precedens, ou par d'autres voies) & ayant trouvé la moyenne proportionelle entre ces deux lignes, elle leur ſera incommenſurable tant en longueur, qu'en puiſſance.

Cela eſt clair par le 3e Cas de la Propoſition principale.

AVERTISSEMENT.

Il n'y a rien à dire de quatre lignes continuellement proportionelles que ce qui a eſté dit dans le IVe. Livre de quatre grandeurs continuellement proportionelles.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DOVZIEME.

DES FIGURES EN GENERAL CONSIDEREES SELON LEURS ANGLES ET LEURS COSTEZ.

ON appelle *figure* dans les elemens de Geometrie, une surface plaste terminée de tous costez. I.

Ce qui comprend deux choses: la premiere, les extremitez de cette surface: la seconde, l'espace qu'elle comprend; ce qui s'appelle *l'aire de la figure.*

Nous les considerons dans ce Livre & le suivant selon le premier rapport: & dans d'autres Livres nous les considererons selon le dernier.

DIVISION.

TOUTE figure considerée selon ses extremitez, est, II.
Ou rectiligne.
Ou curviligne.
Ou mixte.

PREMIERE DEFINITION.

ON appelle rectiligne celle qui est terminée par des lignes droittes, qui ne peuvent estre moins de trois, estant III.

clair que deux lignes droittes ne peuvent pas terminer un espace de tous costez, puisqu'elles ne peuvent se rencontrer qu'en un point, ce qui laisse l'espace ouvert du costé oppolé à ce point.

Il est clair aussy par là que les lignes droittes ne peuvent terminer un espace, qu'en faisant autant d'angles qu'il y a de lignes droittes qui terminent l'espace. Car si un angle demande deux lignes, une ligne sert à deux angles.

Et ainsy l'on peut considerer trois choses dans l'extremité d'une figure rectiligne. 1. Les angles. 2. Les costez. 3. Le circuit, qu'on appelle aussy *perimetre*, qui n'est autre chose que la somme des costez; c'est-à-dire tous les costez pris ensemble.

SECONDE DEFINITION.

IV. ON appelle curviligne celle qui est terminée par une ou plusieurs lignes courbes. Et une seule ligne courbe pouvant rentrer en soy même, peut terminer un espace.

Mais on ne considere icy des figures curvilignes que le seul cercle; parceque de toutes les lignes courbes on ne considere que la circulaire.

TROISIEME DEFINITION.

V. ON appelle figure mixte celle qui est terminée en partie par des lignes droittes, & en partie par des courbes, dont on ne considere icy que les portions de cercle, qui sont celles qui sont terminées par une corde & une portion de circonference; ou les secteurs du cercle qui sont terminez par deux rayons & une portion de la circonference, tel qu'est un quart de cercle.

DES FIGURES RECTILIGNES.

VI. ON peut diviser les figures rectilignes en celles qui ont quelque angle rentrant, & celles dont tous les angles sont saillans; c'est-à-dire tels que leur

pointe regarde toûjours le dehors de la figure.

Les Geometres se sont restraints à considerer les dernieres, parcequ'on y peut facilement reduire les premieres.

ESPECES DES FIGURES RECTILIGNES.

VII. Toute figure rectiligne ayant autant d'angles que de costez, on les divise indifferemment par le nombre de leurs angles ou de leurs costez, & on les nomme selon l'un ou selon l'autre.

Ainsy on appelle Triangle une figure de trois angles & de trois costez, & Quadrilatere celle de quatre angles & de quatre costez.

Les noms Grecs des figures sont pris du nombre des angles: comme

Pentagone, de cinq.
Exagone, de six.
Heptagone, de sept.
Octogone, de huit.
Decagone, de dix.
Et Polygone, de plusieurs angles indeterminément.

Ces noms sont si communs, qu'il est bon de ne les pas ignorer; mais on peut se passer d'en sçavoir d'autres qui sont moins communs: & appeller les figures du nombre de leurs costez ou de leurs angles. Une figure de quinze costez, de trente, de cent, de mille &c.

PREMIER THEOREME.

VIII. Tout polygone peut estre resolu en autant de triangles, qu'il a de costez moins 2, & il ne le peut estre en moins.

C'est à dire, s'il a 4 costez, il peut estre resolu en deux triangles, si 5, en trois, si 6, en quatre, si 7, en cinq, si 8, en six &c.

Car d'un angle quelconque tirant deux lignes de part & d'autre, qui soûtienne chacune l'angle qui le fait de part & d'autre, il s'en fait deux triangles qui comprennent 4 costez de la figure. Mais de ce même angle menant des lignes à chacun des autres angles, il s'en fait autant de triangles qu'il y a de costez outre ces 4. Donc il y aura autant de triangles que de costez moins 2, puisqu'il y a necessairement 2 de ces triangles qui comprennent 4 de ces costez.

SECOND THEOREME.

IX. Tous les angles d'un polygone quelconque sont égaux à autant de droits que le double de ces costez moins 4.

Car nous avons deja veu qu'un angle plus les deux angles que font ses costez sur sa base, sont égaux à deux droits. Or un angle avec sa base n'est point different d'un triangle. Et par consequent les trois angles d'un triangle valent deux angles droits, qui sont six moins 4.

Or par le precedent Theoreme tout autre polygone peut estre resolu en autant de triangles moins 2 qu'il a de costez; & les angles de ces triangles comprendront ceux du polygone. Donc si le polygone a 7 costez estant resolu en 5 triangles, les angles de ces 5 triangles en vaudront dix droits, qui sont 14 moins 4.

On le peut encore démontrer d'une autre sorte, en prenant un point quelconque au dedans du polygone, & de ce point menant des lignes à tous les angles. Car alors l'heptagone sera partagé en 7 triangles, qui auront tous, deux costez de leurs angles autour de la figure, & le 3e au dedans. Or tous les 21 angles de ces 7 triangles en valent 14 droits, & les 7 du dedans de la figure valent 4 droits (& quand il y en auroit mille, ou tant que l'on voudra, ils ne vaudront jamais que 4 droits) & par consequent les 14 autres qui sont égaux à ceux de l'heptagone valent 14 droits moins 4; c'est à dire 10 droits.

DIVISION.

Les figures de ces differentes especes se peuvent considerer ou chacune à part, ou en les comparant deux ensemble.

FIGURES

FIGURES CONSIDEREE'S A PART.

DEFINITIONS.

X. 1. CELLES dont tous les angles ſont égaux, s'appellent *Equiangles*.

2. Celles dont tous les coſtez ſont égaux, s'appellent *Equilatteres*.

3. Celles qui ſont tout enſemble equiangles & equilateres, s'appellent *Regulieres*.

Et on met auſſy le cercle entre les regulieres, à cauſe de ſa parfaite uniformité, & qu'on le peut conſiderer comme un polygone regulier d'une infinité de coſtez.

4. Celles dont les angles, ou les coſtez ſeroient alternativement égaux, c'eſtadire le premier égal au 3e, 5e, 7e, 9e, & le ſecond égal au 4e, 6e, 8e, 10e, ſe peuvent appeller alternativement equiangles ou equilaterales.

Mais il faut remarquer que cela ne peut eſtre que quand le nombre des angles ou des coſtez eſt pair. Car s'il eſtoit impair, le dernier & le premier ſe trouveroient égaux, & par conſequent le penultiéme & le premier ſeroient inégaux: & par conſequent ils ne ſeroient pas tous alternativement égaux.

FIGURES COMPARE'ES.

DEFINITIONS.

XI. QUAND on compare deux figures de même genre, c'eſt dire d'un nombre égal de coſtez.

1. Si les angles de l'une ſont égaux aux angles de l'autre, on les appelle *Equiangles*; & ce mot ne marque pas alors que les angles de chaque figure ſoient égaux entr'eux; mais ſeulement que ceux de l'une ſont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

2. Si les coſtez de l'une ſont égaux aux coſtez de l'autre, on les appelle *Equilateres*, ou *Equilateres entr'elles*.

3. Si elles ſont tout enſemble equiangles & equilateres entr'elles, on les peut appeller *Tout-egales*, ce qu'il faut bien diſtinguer de celles qu'on appelle ſimplement *Egales*.

4. Si elles ſont equiangles, & que les coſtez de l'une

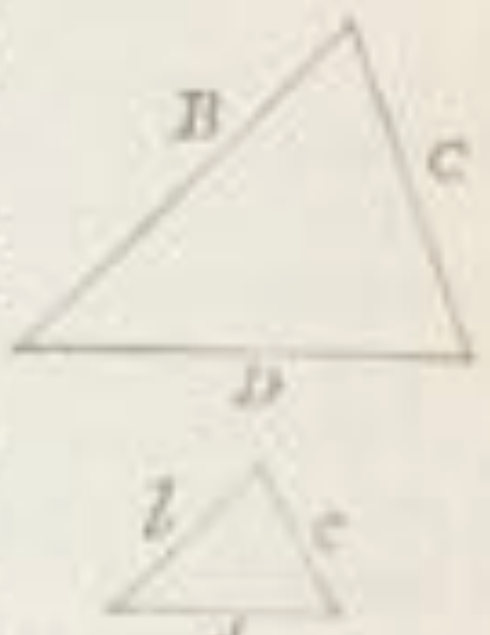
soient proportionels aux costez de l'autre, on les appelle *Semblables*.

Ce qui fait voir que les *sont-egales* sont toûjours *semblables*, puisqu'il y a même raison entre les costez de l'une & de l'autre, qui est la raison de l'égalité. Au lieu que les *semblables* ne sont pas tous toûjours *sont-egales*, puisqu'il peut y avoir une autre raison que celle d'égalité, qui soit la même entre les costez de l'une & de l'autre.

Les costez des figures semblables, entre lesquels il y a même raison, s'appellent les costez *Homologues*, qui sont toûjours le plus grand costé de l'une & de l'autre: & toûjours ainsy. Et c'est ce qui produit ce Theoreme.

PREMIER THEOREME.

XII. Les circuits de deux figures semblables sont en même raison que leurs costez homologues.



Car soient les trois costez de l'une de ces figures, *B C D*, & de l'autre *b c d*.

Puisque *B* est à *b*, comme *C* à *c*, & *D* à *d*.

Les trois d'une part (qui font le circuit de la premiere figure) sont aux trois de l'autre part (qui font le circuit de la seconde) en même raison que chacune d'une part à chacune de l'autre. C'est ce qui a esté demonstré, II. 52.

AUTRES DEFINITIONS.

XIII. QUAND on compare deux figures de même ou de differentes especes.

5. Si le circuit de l'une est égal au circuit de l'autre, on les appelle *Isoperimetres*.

6. Si l'espace que comprend l'une est égal à l'espace que comprend l'autre, on les appelle *égales*. Ce qui appartient au Livre où l'on traittera des figures considerées selon *l'aire*. Et ce qu'il ne faut pas confondre, comme il a déja esté dit, avec celles qu'on appelle *sont-egales*.

DES FIGURES INSCRITTES OU CIRCONSCRITTES AU CERCLE.

DES INSCRITTES.

XIV. On dit qu'une figure rectiligne eſt *inſcritte au cercle* quand les ſommets de ſes angles ſe trouvent dans la circonference de ce cercle. D'où il s'enſuit,

1. Que les angles de cette figure inſcritte ſe doivent alors conſiderer comme des angles inſcrits au cercle, dont il a eſté parlé dans le Livre IX.

2. Qu'ainſy les angles d'une figure inſcritte ne ſçauroient eſtre égaux, que quand les deux arcs qui ſoûtiennent les deux coſtez de chaque angle ſont égaux pris enſemble aux deux arcs que ſoutiennent les deux coſtez de chaque autre angle: parceque chacun de ces angles a pour meſure la demy circonference moins la moitié des deux arcs que ſoutiennent ces coſtez. IX. 19. D'où s'enſuit ce Theoreme.

SECOND THEOREME.

XV. UNE figure inſcritte au cercle ne ſçauroit eſtre equiangle qu'elle ne ſoit equilaterale ou abſolument, ou alternativement, & en ce dernier cas, il faut que le nombre de ſes coſtez ſoit pair.

Car afin que les angles d'une figure inſcritte au cercle (qui ſont des angles inſcrits) ſoient tous égaux, il faut & il ſuffit que les deux arcs que ſoutiennent les coſtez de chaque angle pris enſemble ſoient égaux aux arcs que ſoutiennent auſſy les coſtez de tout autre angle, comme il vient d'eſtre dit.

Or cela eſt quand tous ces arcs ſont égaux: ce qui arrive quand la figure eſt abſolument équilaterale,

parceque tous ces costez estant égaux, tous les arcs qu'ils soutiennent le sont aussy.

Mais cela arrive encore quand ces arcs sont alternativement égaux, pourveu qu'ils soient en nombre pair, parcequ'alors la moitié de ces arcs estant petits & tous égaux entr'eux, & la moitié plus grands tous égaux aussy entr'eux, & un petit estant toujours suivi d'un grand, les deux arcs soutenant les costez d'un angle inscrit pris ensemble seront toujours égaux à deux autres arcs soutenans les costez de tout autre angle. Et ainsy ces angles seront égaux. Or pour cela il suffit que les costez de la figure soient alternativement égaux, parce qu'alors ils soutiendront des arcs alternativement égaux.

Mais il est bien visible qu'il faut en ce cas là que le nombre des costez soit pair, comme il a esté montré §. 10.

DES CIRCONSCRITTES AU CERCLE.

XVI. ON dit qu'une figure est *circonscritte à un cercle*, quand tous les costez de la figure touchent le cercle. Et de là il s'ensuit,

1. Que les angles de la figure sont des angles circonscrits; & par consequent il est bon de les considerer comme des angles compris entre deux tangentes, que l'on doit prendre comme si chacune estoit terminée au point de l'attouchement. D'où il s'ensuit encore,

2. Que ces angles circonscrits sont toujours Isosceles; parceque les tangentes menées d'un même point sont égales, VII. 34.

3. Que les angles circonscrits sont égaux quand les tangentes de l'un sont égales aux tangentes de l'autre. IX. 55.

4. Que chaque costé d'une figure circonscritte est composé de deux tangentes, qui viennent de deux differens angles.

Et delà s'ensuit ce Theoreme.

TROISIEME THEOREME.

UNE figure circonſcritte au cercle ne ſçauroit eſtre equilaterale qu'elle ne ſoit equiangle, ou abſolument ou alternativement, & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes angles ſoit pair. XVII.

Car afin qu'une figure circonſcritte au cercle ſoit équilaterale, il faut & il ſuffit que deux tangentes dont eſt compoſé chaque coſté de cette figure circonſcritte priſes enſemble ſoient égales à deux autres tangentes dont ſera compoſé tout autre coſté.

Or cela eſt quand toutes ces tangentes ſont égales, ce qui arrive quand tous les angles de cette figure ſont égaux; car alors toutes les tangentes ſont égales auſſy.

Mais cela arrive encore quand les angles de la figure ſont alternativement égaux, pourveu que ce ſoit en nombre pair, en ſorte que la moitié des angles n'ait que deux petites tangentes (ce qui fait neanmoins les plus grands angles) & l'autre moitié deux plus grandes tangentes, & que toutes les petites ſoient égales entr'elles, & les grandes auſſy, & qu'un petit angle ſoit toujours ſuivi d'un grand.

Car alors chaque coſté ſera compoſé d'une petite & d'une grande tangente (parceque chaque coſté, comme il a eſté dit, eſt compoſé de deux tangentes qui viennent de deux differens angles.) Donc tous les coſtez ſeront égaux.

Donc une figure circonſcritte au cercle ne peut eſtre équilaterale, ſi elle n'eſt equiangle, ou abſolument ou alternativement, & en ce dernier cas il faut que le nombre des angles ſoit pair. Ce qu'il falloit demonſtrer.

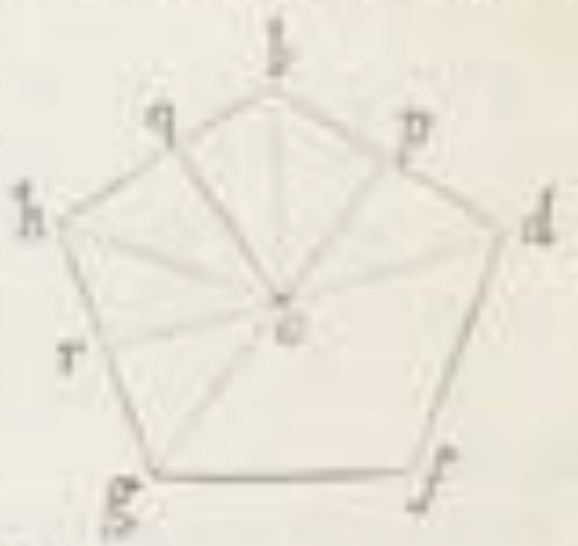
DES FIGURES REGULIERES.

LE meilleur moyen de bien concevoir les figures regulieres, eſt de les conſiderer comme inſcrittes en un cercle, XVIII.

parcequ'elles peuvent toutes y eſtre inſcrites, ſelon ce Theoreme.

QUATRIEME THEOREME.

XIX. TOUTE figure reguliere peut eſtre inſcritte & circonſcritte en un cercle; parcequ'il y a toûjours dans ces figures un point qui en eſt le centre, dont toutes les lignes menées à tous les angles (qu'on appelle raions) ſont égales, & dont toutes les perpendiculaires menées au coſté (qu'on peut appeller *les raions droits*) ſont ainſy égales entr'elles.



Soit une figure reguliere de tant de coſtez & d'angles que l'on voudra, il ſuffira d'en conſiderer 4 ou 5 angles, dont j'appelleray les ſommets *b. d. f. g. h.*

Si de *p* milieu du coſté *b d*, & de *q* milieu du coſté *b h*, on éleve deux perpendiculaires, elles ſe rencontreront eſtant prolongées, par VI. 34.

Et le point *c* où elles ſe rencontrent ſera le centre de la figure.

Car du point *c*, intervale *c b*, décrivant une circonference, elle paſſera par les trois points *h. b. d.* VII. 3.

Donc les trois raions *c b*, *c h*, & *c d*, ſeront égaux.

Donc les 4 angles *c h b*, *c b h*, *c h d*, *c d b* ſeront égaux, par VIII. 64.

Donc chacun de ces trois raions *c h*, *c b*, *c d*, partage par la moitié l'angle de la figure.

Donc l'angle *c b g* eſtant égal à l'angle *c h b*, *c g* baſe de l'angle *c b g*, doit eſtre égale à *c b*, baſe de l'angle *c h b*, par VIII. 65.

Donc ce 4e raion *c g* eſt égal aux trois autres.

Et il eſt clair que quand cette figure reguliere auroit cent mille angles, on prouveroit la même choſe de toutes les lignes menées de *c* aux angles, qui ſont les raions.

Donc ſi de ce point *c* & de l'intervale d'un raion on décrit un cercle, la figure ſera inſcritte en ce cercle; puiſque tous les raions eſtant égaux, les ſommets de tous les an-

gles se trouveront dans la circonference de ce cercle.

Et delà il s'ensuit que tous les costez de cette figure seront des cordes égales du même cercle.

Donc les perpendiculaires du centre aux costez sont égales, par VII. 8.

Or ces perpendiculaires en sont les raions droits.

Donc si on décrit un autre cercle de l'intervale d'un raion droit; c'estadire d'une perpendiculaire à un costé, cette figure sera circonscritte à ce cercle; puisque tous ces raions droits estant égaux, il n'y aura aucun costé qui ne touche le cercle.

COROLLAIRE.

IL est aisé par là de determiner trois choses importantes dans chaque espece de figure reguliere. XX.

La premiere, de combien de degrez est l'arc qui soûtient le costé de la figure, que j'appelleray simplement l'arc de la figure.

La seconde, de combien de degrez est l'angle de la figure; c'estadire l'angle compris entre les deux costez de la figure.

La troisiéme, quel est aussy l'angle que fait un raion sur un costé: c'est ce qui se verra par ces trois Problemes.

PREMIER PROBLEME.

DETERMINER la grandeur de l'arc de toute espece de figure reguliere. XXI.

La circonference estant divisée en 360 degrez, ou 21600 minutes, ou 1296000 secondes: si on divise ce nombre par celuy des costez de la figure, le quotient fera voir de combien de degrez, ou de minutes, ou de secondes est l'arc de la figure.

Ainsy l'arc d'une figure de 15 costez est de 24 degrez, parceque 15 divisant 360, le quotient est 24.

L'arc d'une figure de 3600 costez est de 6 minutes, parceque 21600 minutes estant divisé par 3600, le quotient est 6.

SECOND PROBLEME.

DETERMINER la grandeur de l'angle de toute espece de figure reguliere. XXII.

Ayant trouvé l'arc par le premier Probleme, oſter les degrez de cet arc de 180. qui eſt la demycirconference, ce qui reſtera ſera la meſure de l'angle de la figure.

Car tout angle d'une figure reguliere doit eſtre conſideré comme un angle Iſoſcele inſcrit dans le cercle, qui a pour meſure la demycirconference moins l'arc que ſoûtient un de ſes coſtez. IX. 10.

Et ainſy pour avoir la grandeur de l'angle d'une figure de 15 coſtez, il ne faut qu'oſter de 180 les 24 degrez de l'arc que ſoûtient le coſté de cette figure; & ce qui reſtera, qui eſt 156, ſera la meſure de l'angle d'une figure de 15 coſtez.

Et pour avoir l'angle d'une figure de 3600 coſtez, il faut oſter 6 minutes de 180 degrez, & ce qui reſtera, qui eſt 179 d. 54'. ſera la meſure de l'angle de cette figure.

TROISIEME PROBLEME.

XXIII. DETERMINER la grandeur de l'angle que fait le raion ſur le coſté de toute figure reguliere.

Il ne faut pour cela que prendre la moitié du nombre des degrez que vaut l'angle de la figure. Parceque tout raion partage par la moitié l'angle de la figure.

Ainſy l'angle du raion ſur le coſté dans une figure de 15 coſtez, eſt de 78 degrez, qui eſt la moitié de 156. Et l'angle du raion ſur le coſté d'une figure de 3600 coſtez, eſt de 89. d. 57'.

CONSIDERATION SUR LE CERCLE.

XXIV. LES Geometres conſiderent ſouvent le cercle comme un polygone d'une infinité de coſtez: & ſelon cela voicy de quelle ſorte on devroit marquer les trois choſes que nous venons de determiner dans tout autre polygone.

Puiſque l'arc d'un polygone regulier eſt d'autant plus petit, que le nombre de ſes coſtez eſt grand, il faut que l'arc d'un polygone d'une infinité de coſtez ſoit infiniment petit, & qu'ainſy il ne puiſſe eſtre marqué que par zero.

Or qui oſte zero de 180 degrez, reſte 180 pour l'angle de ce polygone infini.

Et qui divise 180 par la moitié, reste 90, qui est la mesure d'un angle droit pour l'angle du raion sur le costé de ce polygone infini.

Aussy il est way que l'angle du raion sur la circonference d'un cercle est droit en sa maniere, puisque le raion coupe perpendiculairement sa circonference; & que si cet angle est plus petit qu'un droit, ce n'est que de l'espace qui est entre la circonference & la tangente, qui est plus petit que tout angle aigu; quoiqu'il n'y ait point d'angle aigu qui ne puisse estre divisé en une infinité de plus petits.

Et on peut dire aussy que tout point de la circonference est comme le sommet d'un angle de 180 degrez, puisqu'estant partagé par le raion en deux angles égaux, chacun de ses angles de part & d'autre est droit en sa maniere; & qu'ainsy chacun est de 90 degrez.

DES FIGURES REGULIERES COMPARE'ES ENSEMBLE.

CINQUIEME THEOREME.

LES figures regulieres de même espece, c'est à dire d'autant de costez, sont toûjours semblables, & les circuits sont en même raison que les costez. XXV.

Car par ce qui vient d'estre dit, les angles de deux figures regulieres de même espece sont necessairement égaux, leur grandeur estant determinée par les arcs des figures, & ces arcs l'estant par le nombre des costez de la figure.

Et pour ce qui est des costez, ceux de chaque figure estant égaux, on peut appeller les uns *b*, & les autres *c*.

Or il est bien clair que *b*. *c* :: *b*. *c*.

Et il est clair aussy que *b* est à *c*, comme 10 *b* à 10 *c*, ou 100 *b* à 100 *c*, ou 1000 *b* à 1000 *c*.

Donc les circuits ne sçauroient manquer d'estre en même raison que les costez.

SIXIEME THEOREME.

DEUX figures regulieres estant de même espece, ces 4 choses de l'une, *raion*, *raion droit*, *costé*, *circuit*, sont en même raison avec ces 4 autres mêmes choses de l'autre: XXXV.

c'eſtadire que le raion de l'une eſt au raion de l'autre, comme le raion droit au raion droit, le coſté au coſté, le circuit au circuit.

Ces deux derniers viennent d'eſtre prouvez, mais ils ne laiſſeront pas d'entrer dans la preuve generale des autres.

Il ne faut pour cela que conſiderer dans chacune de ces figures un angle compris entre un raion, & un raion droit qui a pour baſe la moitié du coſté.

Ces deux angles ſont ſemblables en toutes les figures regulieres de même eſpece, c'eſtadire que l'angle eſt égal à l'angle, & que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre.

Car chacun de ces angles a pour meſure la moitié de l'arc de la figure, puiſque ſa baſe eſt la moitié du coſté. Or dans toutes les figures de même eſpece l'arc de la figure eſt d'autant de degrez en l'une qu'en l'autre.

Pour les angles ſur chacune des baſes cela eſt encore plus clair, puiſque l'un eſt droit en l'un & en l'autre, ſçavoir celuy qui eſt fait par le raion droit; & que l'autre eſt la moitié de l'angle de la figure qui eſt égal en toutes les figures de même eſpece.

Or puiſque ces angles ſont ſemblables par X. 17. les coſtez ſont proportionels aux coſtez; & la baſe à la baſe: c'eſtadire que,

Le raion eſt au raion, comme le raion droit à un raion droit, & la moitié du coſté à la moitié du coſté. Et par conſequent comme le coſté au coſté, & le circuit au circuit.

PREMIER COROLLAIRE.

XXVII. LES coſtez & les circuits de deux figures regulieres de même eſpece ſont en même raiſon, que les diametres des cercles dans leſquels elles ſont inſcrites.

Car ces diametres ſont le double des raions de ces figures. Donc &c.

SECOND COROLLAIRE.

XXVIII. LES circonferences des cercles ſont en même raiſon que leurs diametres.

Car les cercles sont comme des polygones d'une infinité de costez, & leur circonference est comme le circuit comprenant cette infinité de costez. Donc par le precedent Corollaire ce circuit d'une infinité de costez d'une part, est au circuit d'une infinité de costez de l'autre, comme le diametre au diametre.

C'est la seule voie dont on peut prouver la proportion des circonferences & des diametres. Car n'y en ayant point pour le faire positivement & immediatement, on est reduit à y employer l'analogie des polygones semblables d'un si grand nombre de costez que l'on voudra, qu'on peut concevoir estre inscrits dans l'un & l'autre cercle: comme de cent mille costez, de cent millions, de cent mille millions, & ainsy jusques à l'infini.

Car plus ces polygones ont de costez, moins il y a de difference entre la circonference du cercle & leur circuit, VII. 19. Et ainsy quelque petite que soit une ligne donnée, quand ce ne seroit que la centmillième partie de l'épaisseur d'une fueille de papier, on peut concevoir un polygone de tant de costez inscrit dans l'un & dans l'autre cercle, que la difference de son circuit d'avec la circonference de ces cercles sera moindre que cette ligne donnée.

Or de quelque grand nombre de costez que soient ces polygones, leurs circuits seront toûjours en même raison que les diametres, par le Corollaire precedent.

Donc on doit conclure par une analogie tres certaine, que les circonferences sont aussy en même raison que les diametres.

TROISIEME COROLLAIRE.

Si deux figures regulieres de même espece ont de l'égalité en l'une de ces quatre choses, raion, raion droit, costé, circuit, elles l'ont en tout, & sont tout-égales. XXIX.

C'est une suite évidente du sixiéme Theoreme.

QUATRIEME COROLLAIRE.

L'UNE de ces quatre choses estant donnée, la grandeur de la figure reguliere est determinée: c'est à dire qu'elle ne XXX.

peut estre que d'une sorte, quoiqu'il ne soit pas toûjours facile de la décrire, parceque souvent il n'est pas aisé ou de trouver le costé d'une figure reguliere en ayant le raion, ce qui est la même chose que de l'inscrire en un cercle donné : ou d'en trouver le raion en ayant le costé, ce qui est la même chose que trouver le cercle dans lequel une figure dont le costé est donné puisse estre inscritte. C'est de quoy nous allons traitter.

DE L'INSCRIPTION OU CIRCONSCRIPTION D'UNE FIGURE REGULIERE DE TELLE ESPECE DANS UN CERCLE DONNÉ.

XXXI. Il est bien facile par ce qui a esté dit, une figure reguliere estant décritte, d'en trouver le raion pour l'inscrire dans un cercle : mais il n'est pas aussy facile d'inscrire dans un cercle donné, telle figure reguliere que l'on voudra. Et souvent même on ne le peut que mecaniquement, & non geometriquement, aumoins par la Geometrie ordinaire ; parcequ'elle ne donne pas le moien de diviser un arc donné, en 3, en 5, en 7 &c. ce qui seroit souvent necessaire pour inscrire en un cercle donné telle figure que l'on voudroit.

Ainsy je pense que tout ce que l'on peut faire de mieux se reduit à ces deux regles generales, & à quelques Problemes particuliers.

PREMIERE REGLE GENERALE.

XXXII. LORSQU'ON sçait inscrire en un cercle donné une certaine espece de figure reguliere, il est bien facile d'inscrire toutes celles qui ont plus ou moins de costez, selon la progression double.

C'est à dire qui en ont deux fois moins, 4 fois moins, 8 fois moins &c jusques à ce qu'on soit arrivé ou à 4, ou à un nombre impair, qui ne se puisse plus diviser par la moitié.

Ou qui en ont deux fois plus, 4 fois plus, 8 fois plus &c. jusqu'à l'infini.

Supposons, par exemple, qu'on sçache inscrire dans

un cercle donné une figure de 32 costez, la corde qui soûtiendra deux arcs de cette figure, sera le costé d'une figure de 16. Et celle qui soûtiendra deux arcs de la figure de 16 costez, sera le costé d'une figure de 8. Et ainsy de suite.

Et au contraire la corde qui soûtiendra la moitié de l'arc de cette figure de 32 costez sera le costé d'une figure de 64. Et celle qui soûtiendra la moitié de l'arc d'une figure de 64 costez, sera le costé d'une figure de 128 costez. Et ainsy à l'infini.

SECONDE REGLE GENERALE.

LORSQUE l'on sçait inscrire une certaine espece de figure reguliere en un cercle donné, on la sçait aussy circonscrire. XXXIII.

Car ayant les points de tous les sommets des angles de l'inscrite, les tangentes au cercle à ces mêmes points estant prolongées jusques à ce qu'elles se rencontrent, font une figure semblable circonscritte au même cercle; puisque d'une part tous les angles circonscrits de cette figure sont égaux, estant appuyez sur des arcs convexes égaux; & que de l'autre chacun de ces angles est égal à l'angle de la figure circonscritte, par IX. 52.

PROBLEMES PARTICULIERS.

I.

INSCRIRE un quadrilatere regulier (qui s'appelle quarré) dans un cercle donné. XXXIV.

Deux diametres qui se couppent, partagent la circonference en 4 parties, dont chacune est l'arc du quarré inscrit dans le cercle.

COROLLAIRE.

INSCRIRE dans un cercle donné une figure de 8 costez, de 16, de 32, & ainsy à l'infini. 1e Regle generale. XXXV.

SECOND PROBLEME.

INSCRIRE en un cercle donné un exagone regulier. XXXVI.

Le diametre ou raion est le costé de l'exagone. Car ayant fait un angle compris par deux raions, & ayant pour base

une ligne égale au raion, cet angle est de 60 degrez, puisque cet angle est égal à chacun des angles sur la base, & que les trois ensemble valent 180 degrez. Donc chacun est de 60 degrez. Or 60 degrez est l'arc de l'exagone. Donc le demydiametre est le costé de l'exagone.

PREMIER COROLLAIRE.

XXXVII. INSCRIRE en un cercle donné un triangle regulier.

Doubler l'arc de l'exagone, par la 1re Regle generale.

SECOND COROLLAIRE.

XXXVIII. INSCRIRE en un cercle donné une figure de 12 costez, de 24, de 48. Et ainsy à l'infini. 1re Regle generale.

TROISIEME PROBLEME.

XXXIX. INSCRIRE en un cercle donné un decagone, ou figure de dix costez.

Ayant divisé le demydiametre en moyenne ou extrême raison (par XI. 68.) la plus grande partie de cette ligne ainsy divisée est le costé du decagone. Car elle soutient un arc de 36. degrez, par XI 73.

PREMIER COROLLAIRE.

XL. INSCRIRE en un cercle donné un pentagone ou figure de cinq costez.

Doubler l'arc du decagone, par la 1re Regle generale.

SECOND COROLLAIRE.

XLI. INSCRIRE en un cercle donné une figure de 20 costez, de 40, de 80: & ainsy à l'infini. 1re Regle generale.

QUATRIEME PROBLEME.

XLII. INSCRIRE en un cercle donné une figure de 15 costez.

De l'arc de l'exagone qui est de 60 degrez, oster l'arc du decagone qui est de 36, il restera un arc de 24 degrez, qui est l'arc d'une figure de 15 costez; parceque 24 fois 15 font 360.

COROLLAIRE.

XLIII. INSCRIRE en un cercle donné une figure de 30 costez, de 60, de 120. Et ainsy à l'infini. 1re Regle generale.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TREIZIEME.

DES TRIANGLES ET QUADRILATERES CONSIDEREZ SELON LEURS COSTEZ ET LEURS ANGLES.

APRES ce qui a eſté dit des figures en general, il ne reſte plus que d'expliquer ce qui eſt particulier aux triangles, & aux quadrilateres.

PREMIERE SECTION.

DES TRIANGLES.

PREMIER LEMME.

UN angle avec ſa baſe, eſt la même choſe qu'un triangle. Et ainſy tout ce qui a eſté dit dans les livres des angles, des proportionelles, & des reciproques des angles conſiderez avec leur baſe, ſe peut ſans peine appliquer aux triangles. I.

SECOND LEMME.

TOUT triangle ſe peut inſcrire en un cercle. Car il ne faut que trouver la circonference qui paſſe par les trois ſommets des trois angles, par VII. 3. II.

TROISIEME LEMME.

DEFINITION.

111. LE coſté quelconque d'un triangle en peut eſtre appellé *La baſe*, & les deux autres ſes coſtez : & alors l'angle ſoûtenu par la baſe eſt appellé *l'angle du ſommet*, & la diſtance de ce ſommet à la baſe eſt appellée *la hauteur du triangle*.

TRIANGLES CONSIDEREZ A PART.

PREMIER THEOREME.

IV. TOUT triangle a ſes trois angles égaux à deux droits. VIII. 59.

PREMIER COROLLAIRE.

V. Tous les trois angles d'un triangle peuvent eſtre aigus, mais il n'y en peut avoir qu'un droit ou obtus.

SECOND COROLLAIRE.

VI. SI l'un des angles du triangle eſt droit, les deux autres valent un droit.

TROISIEME COROLLAIRE.

VII. QUI connoiſt la grandeur des deux angles d'un triangle, connoiſt la grandeur du 3e. Car oſtant de la demycirconference les deux dont on connoiſt la grandeur, ce qui reſte eſt la grandeur du 3e.

Qui connoiſt de combien de degrez ſont les deux, ſçait de combien de degrez eſt le 3e. Car oſtant le nombre des degrez que valent les deux de 180, ce qui reſte eſt le nombre des degrez que vaut le 3e. Si les deux valent 108 degrez, le 3e en vaut 72.

SECOND THEOREME.

VIII. DANS tout triangle le plus grand coſté ſoûtient le plus grand angle, & le plus grand angle eſt ſoûtenu par le plus grand coſté. Car par le 2e Lemme, tout triangle peut eſtre inſcrit dans un cercle, & alors la circonference du cercle eſt partagée en trois arcs, ſur chacun deſquels eſt appuyé chacun des angles du triangle.

Or ces trois arcs ſont :

1er CAS. Ou tous trois moindres que la demycircon-

ference

rence : & alors chacun des angles du triangle eſt aigu. (IX. 25.) Et il eſt clair que le plus grand angle eſtant appuyé ſur le plus grand arc, eſt auſſy ſoûtenu par le plus grand coſté. VII 10.

2. CAS. Ou l'un de ces arcs eſt une demy-circonference, & les autres moindres ; & alors l'angle appuyé ſur la demycirconference eſt droit (IX. 25.) Et par conſequent le plus grand de tous, comme auſſy le coſté qui le ſoûtient, qui eſt un diametre, eſt plus grand qu'aucun des deux autres. VII. 9.

3. CAS. Ou l'un de ces arcs eſt plus grand que la demycirconference ; & alors l'angle appuyé ſur cet arc eſt obtus, & par conſequent le plus grand de tous : comme auſſy le coſté qui le ſoûtient terminant le ſegment dans lequel eſt cet angle obtus, eſt plus prés du centre qu'aucun des deux coſtez qui le comprennent ; & ainſy plus grand. VII. 10.

PREMIER COROLLAIRE.

Tous les coſtez du triangle eſtant égaux, tous les angles le ſont auſſy : & au contraire tous les angles eſtant égaux, les coſtez le ſont auſſy. IX.

Car eſtant inſcrit dans un cercle, les coſtez égaux ſoûtiennent des arcs égaux. Or les angles appuyez ſur des arcs égaux, ſont égaux. IX. 21.

Que ſi au contraire on ſuppoſoit les trois angles égaux, on prouveroit de la même maniere que les coſtez ſont égaux. Car les angles égaux ſeront appuyez ſur des arcs égaux. IX. 21. Or les arcs égaux ſont ſoûtenus par des coſtez égaux.

SECOND COROLLAIRE.

Tout triangle qui a deux coſtez égaux a les deux angles ſoûtenus par ces coſtez égaux ; & au contraire. En inſcrivant ce triangle dans le cercle, on prouvera ce Corollaire de la même ſorte que le precedent. X.

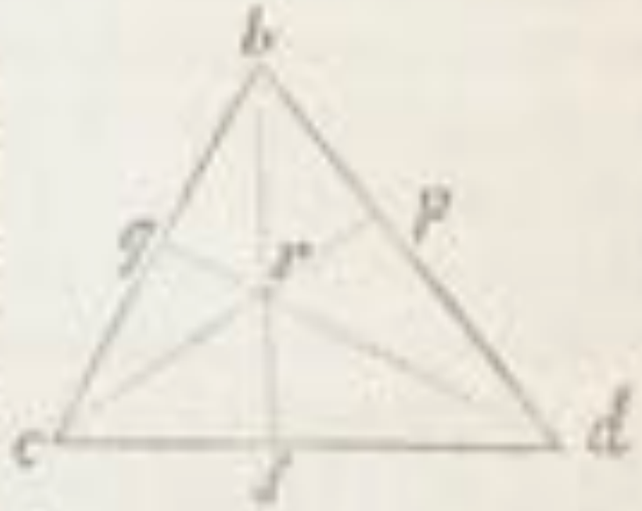
On laisse à trouver beaucoup d'autres manieres dont on le peut demonstrer.

TROISIEME THEOREME.

XI. Les lignes qui divisent par la moitié chacun des angles du triangle se rencontrent en un même point au dedans du triangle.

Soit le triangle *b c d*.

Soit l'angle *d* divisé par la moitié par *d q*, & *c* divisé par la moitié par *c p*, & que *d q* & *c p* se coupent en *r*, je dis que la ligne *b r* divisera aussy l'angle *b* par la moitié.



Car (par X. 30.) l'angle *d* estant divisé par la moitié,

32.

d b. b q :: d c. c q.

Et par la même raison considerant *d q*, comme la base de l'angle *c*, divisé par la moitié par *c r*.

c d. c q :: d r. q r.

Donc *d b. b q :: d r. q r.*

Donc (par X. 31.) la ligne *b r* divise l'angle *b* par la moitié. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Ces lignes coupant par la moitié les angles d'un triangle font plusieurs proportions. On les peut reduire à 6. en commençant la comparaison par les portions des secantes.

Pour l'angle *b*. *b r*. *r s* { *b d*. *d s*. ; *b c*. *c s*.

Pour l'angle *c*. *c r*. *r p* { *c d*. *d p*. ; *c b*. *b p*.

Pour l'angle *d*. *d r*. *r q* { *d b*. *b q*. ; *d c*. *c q*.

PREMIER PROBLEME.

XII. FAIRE un triangle de trois lignes données. Il faut que deux quelconques soient plus grandes que la 3e.

De chacune des deux extremitez de l'une des données décrire un cercle de l'intervale de chacune des deux autres; où ces deux cercles se rencontreront, ce sera le point où il faudra tirer les deux costez du triangle.

SECOND PROBLEME.

FAIRE le triangle dont on a un angle, & la grandeur des costez qui le comprennent. XIII.

Ayant mis ces deux costez en sorte qu'ils facent l'angle donné, la ligne qui en joindra les extrémitez achevera le triangle.

TROISIEME PROBLEME.

FAIRE le triangle dont on a un costé, & les deux angles sur ce costé. XIV.

Tirant des lignes sur les extremitez du costé donné qui facent les angles donnez, où elles se rencontreront elles acheveront le triangle.

QUATRIEME PROBLEME.

FAIRE le triangle dont on a un angle, un des costez qui le comprend, & la grandeur du costé qui le soûtient. XV.

Soit *b c* le costé donné comprenant l'angle donné, & *c d* la grandeur du costé qui doit soûtenir l'angle donné, tirant de *b* une ligne indefinie qui face sur *b c* l'angle donné, & décrivant un cercle de *c*, intervalle *c d*.

1. CAS. Ou ce cercle ne coupera l'indefinie qu'au point *d*. Ce qui arrivera toûjours quand le costé qui doit soûtenir l'angle donné est plus grand que celuy qui le comprend) & alors le triangle sera *b c d*.

2e CAS. Ou le cercle coupera l'indefinie en deux points de la même part (comme en *f* & en *d*) & alors le triangle pourra estre *b c d*, ou *b c f*.

Et pour sçavoir lequel des deux c'est precisément, il faudroit avoir determiné si *b c* doit soûtenir un angle aigu, ou s'il doit soûtenir un angle obtus.

Car si *b c* doit soûtenir un angle aigu, le triangle est *b c d*: & s'il doit soûtenir un angle obtus, le triangle est *b c f*.

TRIANGLES COMPAREZ.

PREMIER THEOREME.

XVI. Deux triangles sont tout-égaux, quand les costez de l'un sont égaux aux costez de l'autre, chacun à chacun. Car alors les angles de l'un sont aussy égaux aux angles de l'autre, par VIII. 64.

SECOND THEOREME.

XVII. Deux triangles sont tout-égaux quand ils ont un angle égal, & que les costez qui comprennent dans l'un cet angle égal, sont égaux à ceux qui le comprennent dans l'autre, chacun à chacun. Car alors la base est aussy égale à la base, par VIII. 65.

TROISIEME THEOREME.

XVIII. Deux triangles sont tout-égaux quand ils ont un costé égal, & que les angles sur ce costé égal sont égaux chacun à chacun.

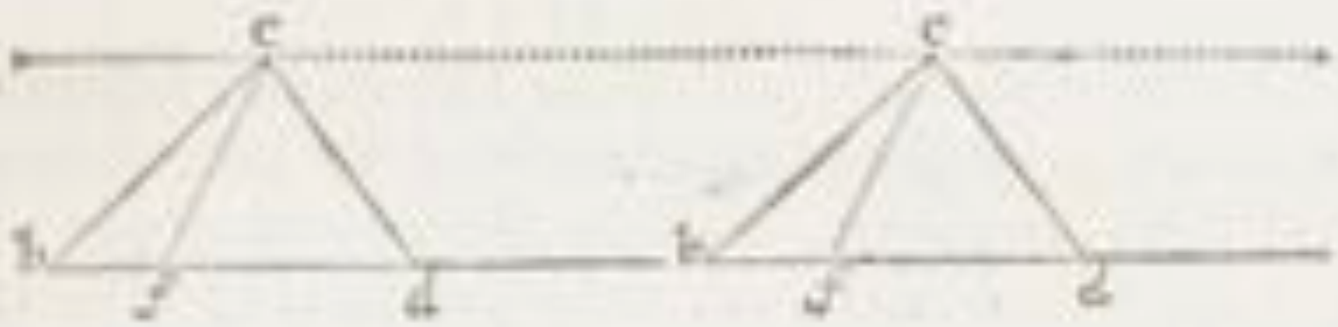
Car ces deux angles estant égaux chacun à chacun, le troisiéme qui est celuy que soutient le costé égal, sera égal aussy (3. 7.)

Si donc l'on s'imagine que ces deux triangles sont chacun inscrit dans un cercle, ces cercles seront égaux (par X. 16.) parceque le costé égal soûtiendra dans chacun de ces cercles des arcs d'autant de degrez.

Donc les deux autres angles eſtant égaux chacun à chacun ſeront appuyez ſur des arcs égaux, qui eſtant de cercles égaux ſeront ſoûtenus par des coſtez égaux chacun à chacun.

Donc les 3 coſtez de ces deux triangles ſont égaux chacun à chacun auſſy bien que les angles. Donc ils ſont tout-égaux.

QUATRIEME THEOREME.



SI deux triangles ont ces trois choſes égales. XIX.
Un angle, comme celuy dont le ſommet eſt en *b*.
Un des coſtez qui compreennent cet angle, comme *b c*.
Et le coſté qui le ſoûtient, comme *c d*, ou *c f*.
Il faut outre cela afin qu'ils ſoient tout-égaux, ou que l'angle que ſoûtient *b c*, ne ſoit obtus ny dans l'un ny dans l'autre, ou qu'il ſoit obtus dans tous les deux.

Car ſuppoſant qu'on euſt mené par *c* une parallele à *b d*.

Ces deux triangles ſeroient enfermez entre deux eſpaces paralleles égaux (par VIII. 56.) parceque *b c* eſt égale & fait le même angle *c b d* dans l'un & dans l'autre.

Donc le coſté *c d* ou *c f* eſtant égal par l'hypotheſe dans les deux triangles, s'il eſt oblique dans tous les deux vers le même endroit, il fait le même angle aigu dans l'un & dans l'autre, lorſque c'eſt vers le dedans du triangle qu'il eſt incliné, comme quand c'eſt *c d*, en l'un & en l'autre; ou le même angle obtus quand c'eſt vers le dehors, comme ſi c'eſt *c f* en l'un & en l'autre. VIII. 56.

Donc les deux triangles qui avoient déja deux costez égaux par l'hypothese se trouvant encore avoir deux angles égaux, & par consequent trois (7. 5.) seront tout-gaux par le 2e Theoreme.

Mais si le costé que soûtient *b c* estoit diversement incliné dans ces deux triangles, parceque ce seroit *c d* dans l'un & *c f* dans l'autre, ces triangles n'auroient garde d'estre tout-égaux, puisque *c d* seroit dans l'un un angle aigu, & *c f* dans l'autre un angle obtus.

COROLLAIRE.

Dans l'hypothese du precedent Theoreme, lorsque des deux costez supposez égaux dans les deux triangles celuy qui soûtient l'angle supposé égal est plus grand que celuy qui le comprend, les deux triangles sont certainement tout-égaux.

Car alors dans l'un & dans l'autre angle *c d b* est necessairement aigu, par 8. 5.

CINQUIEME THEOREME.

XX. DEUX triangles équiangles entr'eux sont semblables. C'estadire que les costez de l'un sont proportionnels aux costez de l'autre. C'est ce qui a esté prouvé en diverses manieres dans les deux livres des Proportionnelles. Voyez X. 18.

AVERTISSEMENT ET DEFINITION.

XXI. EN comparant deux triangles semblables, il faut toûjours comparer le plus grand costé de l'un au plus grand costé de l'autre, le moyen au moyen, & le plus petit au plus petit. Ainsy le plus grand costé estant appellé *b*. b,

Le moyen *d* d.

Et le plus petit *h*. h.

Dans deux triangles semblables.

b. b :: *d*. d :: *h*. h.

Et ces costez que l'on doit comparer ensemble s'appellent homologues.

PREMIER COROLLAIRE.

XXII. LES costez qui soûtiennent les angles égaux, sont homologues. Car dans l'un & dans l'autre le plus grand costé

soûtient le plus grand angle ; le moyen costé le moyen angle ; le plus petit costé le plus petit angle. Cela se prouve encore par le X. livre 18.

SECOND COROLLAIRE.

XXIII. Deux triangles sont équiangles, si deux angles de l'un sont égaux aux deux angles de l'autre, chacun à chacun. Car il s'ensuit de là que le 3e est aussy égal au 3e.

SIXIEME THEOREME.

XXIV. Lorsque deux triangles ont un angle égal, & les costez qui soûtiennent ces angles proportionnels, ils sont semblables. Car alors la base est aussy proportionnelle à la base, & les deux angles sur cette base égaux, par XI. 63.

SEPTIEME THEOREME.

XXV. Si deux triangles sont de même hauteur, les paralleles à la base également distantes de la base dans l'une & dans l'autre sont entr'elles comme ces bases.

Cela est demonstré X 20.

HUITIEME THEOREME.

XXVI. Deux polygones quelconques estant semblables peuvent estre partagez, chacun en autant de triangles, qui seront tels, que ceux d'une part sont semblables à ceux de l'autre part, chacun à chacun, & les costez homologues de deux de ces triangles semblables, sont en même raison que ceux de deux autres semblables.

Soient deux exagones irreguliers semblables *BCDFGH*, & *bcdfgh*. Soient menées dans le grand des lignes de *B* à *D*, à *F*, à *G*. Et de même dans le petit.

L'une & l'autre exagone sera en 4 triangles.

Sçavoir $\begin{cases} BCD. & BDF. & BFG. & BGH. \\ bcd. & bdf. & bfg. & bgh. \end{cases}$

Qui sont semblables deux à deux *BCD*, à *bcd* &c.

Car les angles *C* & *c* sont égaux par l'hypotese que les exagones sont semblables, & les costez *CB* & *CD* proportionelles aux costez *cb* & *cd* par la même hypotese.

Donc les bases *BD* & *bd* sont aussy proportionelles aux costez, & les triangles semblables, par le 6e Theoreme.

B D F & *b d f* sont semblables aussy. Car les angles *C D F* & *c d f* estant égaux par l'hypotese, si on en oste les angles *B D C* & *b d c* qui sont égaux aussy (comme on le vient de voir) les angles *B D F* & *b d f* demeureront égaux.

Or les costez de ces angles *B D* & *D F* d'une part, & *b d* & *d f* de l'autre sont proportionels. Donc les bases *D F* & *d f* sont proportionelles aux costez, & les triangles *B D F* & *b d f* semblables. On prouvera la même chose & de la même maniere des autres triangles. Donc les triangles d'une part sont semblables à ceux de l'autre.

Il reste à prouver que les costez homologues de deux de ces triangles semblables sont en même raison que ceux de deux autres semblables, ce qui est aisé. Car prenant les points *B* & *b* pour sommet des quatre triangles d'une part & d'autre, ils auront chacun pour base un des costez de l'exagone. Les deux premiers *C D* & *c d*, les deux seconds *D F* & *d f* &c.

Or par l'hypotese *C D. c d :: D F. d f.*

Donc les bases des deux premiers triangles sont proportionelles aux bases des deux seconds. Et ainsy des autres.

AVERTISSEMENT.

XXVII. *On omet diverses choses qui pourroient estre dites des triangles semblables, parcequ'il n'y a rien en tout cela qui ne se trouve facilement par ce qui a esté dit des angles considerez avec leurs bases dans les deux livres des Proportionelles.*

DIVISION DU TRIANGLE EN SES ESPECES.

XXVIII. LE triangle se divise selon les costez & selon les angles.

Les costez sont	Tous trois inégaux, & s'appelle		Scalene.
	Deux égaux,		Isoscele.
	Tous trois égaux,		Equilateral.
Les angles sont	Tous trois aigus,		Oxygone.
	Deux aigus & l'autre	obtus,	Amblygone.
		droit,	Rectangle.

Le scalene a ses trois angles inégaux.

L'Isoscele en a deux égaux.

L'equilateral

L'equilateral les a tous trois égaux.

Le scalene } peuvent estre { Oxygone. Amblygone. Rectangle.
L'isoscele }

L'equilateral ne sçauroit estre qu'oxygone.

DES TRIANGLES OXYGONES.

THEOREME.

Si de tous les angles d'un triangle oxygone on tire des perpendiculaires aux costez, elles se couperont en un même point au dedans du triangle. XXIX.

Soit le triangle *b c d*, & deux perpendiculaires aux costez *d m*, *c n*, je dis que *b o* menée par le point *p*, qui est celuy où *d m* & *c n* se coupent, sera aussy perpendiculaire.

Car les triangles *c b n* & *d b m* sont équiangles ayant chacun un angle droit & un angle commun, & par consequent les angles *b c n* & *b d m* sont égaux.

Et par consequent aussy les triangles *b d m* & *c p m* sont équiangles, ayant chacun un angle droit, & l'angle *m c p* (qui est le même que *b c n*) estant égal à l'angle *b d m*.

Donc *d m. m c :: m b. m p. & alternando d m. m b :: m c. m p.*

Donc les triangles *b m p* & *d m c* sont équiangles, par 24. *sup.* puisque dans le triangle *b m p* les costez *d m* & *m c*, qui comprennent un angle droit, sont proportionels à *m b* & *m p*, qui comprennent aussy un angle droit.

Donc l'angle *m b p* soûtenu par *m p*, est égal à l'angle *m d c* soûtenu par *m c*.

Or les angles *m p b* & *o p d* sont égaux, parcequ'ils sont opposez au sommet. Donc les triangles *m p b* & *o p d* sont équiangles.

Or l'angle *p m b* est droit par la construction.

Donc l'angle *o p d* est droit aussy. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Ces perpendiculaires coupant les angles d'un triangle, XXX.

font 12 triangles rectangles : 6 grands, qui ont pour hypothenuse l'un des costez du triangle total, & qui enferment tous quelque chose les uns des autres : & 6 petits entierement separez, & qui ont chacun pour hypothenuse la portion d'une perpendiculaire la plus proche de l'angle qu'elle coupe ; & ces 12 triangles rectangles sont 4 à 4 équiangles, deux grands & deux petits. C'est un exercice d'esprit de les trouver, & il vaut mieux le laisser à ceux qui commencent. Je diray seulement qu'entre les diverses proportions qui se font par tous ces triangles, il y en a de deux sortes fort considerables.

La premiere est, que le costé d'un angle & sa premiere portion sont reciproques à l'autre costé & sa premiere portion ; c'est-adire que le grand costé est au petit comme la premiere portion du petit à la premiere portion du grand. Exemple dans l'angle *b*.

grand, petit, :: 1. portion du grand, 1. portion du petit.
b d. *b c*. :: *b m*. *b n*.

La seconde est, que les portions d'un costé du triangle total sont reciproques à la perpendiculaire entiere, & sa portion qui fait l'angle droit ; c'est-adire qu'une portion du costé est à la perpendiculaire, comme la portion de la perpendiculaire qui fait l'angle droit, est à l'autre portion du costé. Exemple :

port. du costé. perpend :: port. de la perp. port du costé.
m c. *m d* :: *m p*. *m b*.

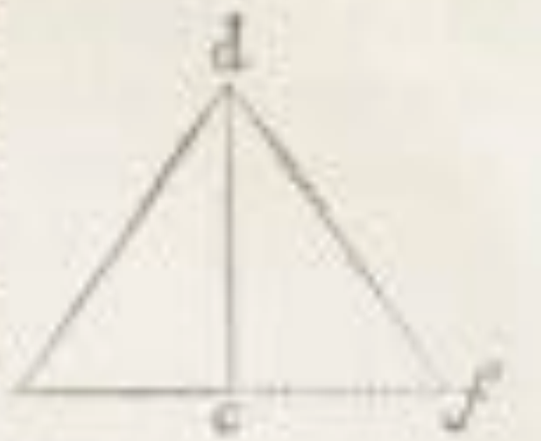
DES TRIANGLES RECTANGLES.

PREMIER THEOREME.

XXXI. Si l'un des angles aigus du triangle rectangle est double de l'autre (ce qui ne peut estre qu'il ne vaille les deux tiers d'un angle droit, & l'autre le tiers, c'est-adire qu'il ne soit de 60 degrez & l'autre de 30) le petit costé qui soûtient l'angle de 30 degrez & qui en est le sinus, est la moitié de l'hypothenuse de l'angle droit, qui est aussy le raion de cet angle de 30 degrez.

Soit le triangle *b d c* conforme à l'hypotese.

Tirant *d f* égale à *d b* sur *b c* prolongée, l'angle *d f b* sera égal à l'angle *d b f*, & par consequent l'un & l'autre sera de 60 degrez. Donc l'angle *b d f* sera aussy de 60 degrez, puisque tous les trois ensemble valent *b* deux droits, c'estadire 180 degrez.



Donc le triangle *b d f* est equilateral.

Donc *b c* + *c f* = *d b*.

Or *b c* = *c f*, les deux triangles *d b c* & *d c f* estant tout-égaux, par 18. *sup.*

Donc *b c* est la moitié de *d b*. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME.

TROUVER le triangle rectangle dont on a XXXII.

1. Ou les deux costez comprenans l'angle droit.
2. Ou l'hypothenuse, & un des costez.
3. Ou l'hypothenuse, & la perpendiculaire du sommet de l'angle droit à cette hypothenuse.
4. Ou l'hypothenuse, & la moyenne proportionelle entre l'hypothenuse donnée, & un des costez.
5. Ou un des costez & la moyenne proportionelle entre le costé donné & l'hypothenuse.
6. Ou l'un des costez, & la moyenne proportionelle entre ce costé donné & l'autre coste.

PREMIER CAS.

Mettant à l'angle droit les deux costez donnez, la ligne qui en joint les extrêmitez est l'hypotenuse.

SECOND CAS.

Décrivant la demycirconference dont l'hypotenuse donnée est le diametre, le point de cette circonference où se terminera le costé donné sera le point du sommet de l'angle droit, ce qui determinera l'autre costé non donné.

TROISIEME CAS.

Voyez IX. 34.

QUATRE, CINQ ET SIXIEME CAS.

Trois lignes estant continuellement proportionelles,

ayant la premiere & la seconde, qui est la moyenne, on a la 3e par le Probleme, X. 34. Et par consequent le 4e & 5e Cas se rapportent au 2e, & le 6e au 1er.

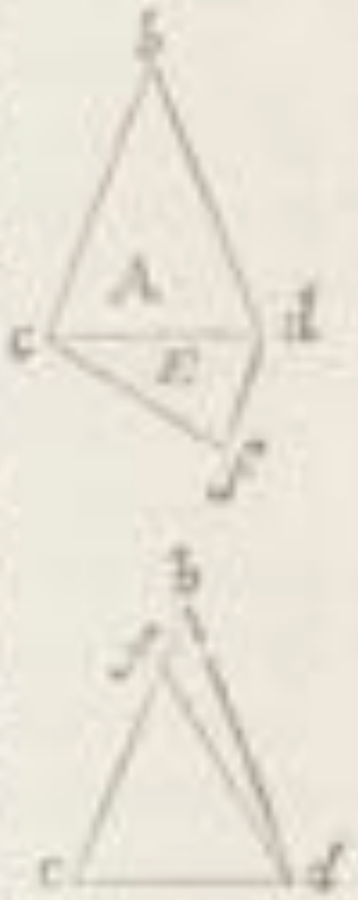
DES TRIANGLES ISOSCELES.

PREMIER THEOREME.

XXXIII. LORSQUE l'angle du sommet d'un triangle Isoscele est de 36 degrez, chacun des angles sur la base est de 72, & la base est la moyenne proportionelle entre le costé entier, & le costé moins cette base (c'est à dire que la base divise le costé en moyenne & extrême raison) & la base estant ajoûtée au costé, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. Voyez XI. 68. 69. 73.

SECOND THEOREME.

XXXIV. DEUX triangles Isosceles estant semblables & inégaux, si la même ligne est la base de l'un & le costé de l'autre, cette ligne sera moyenne proportionelle entre le costé de triangle dont elle est base, & la base de celuy dont elle est costé.



Soit l'un des triangles Isosceles *b c d*, & l'autre *c f d*, de sorte que *c d* soit la base de *b c d*, & le costé de *c f d*; Je dis que *c d* sera moyenne proportionelle entre *b c* costé du premier triangle, & *f d* base du second. Car ces triangles estant semblables, *b c* (costé du 1er) est à *c d* (costé du 2e) comme le même *c d*, estant que base du premier, est à *f d* base du second. Donc ∴ *b c. c d. f c.* Ce qu'il falloit demonstrer.

SECONDE SECTION.

DES QUADRILATERES.

DEFINITIONS.

XXXV. LE quadrilatere est une figure de 4 costez qui ne se joignent qu'aux extrêmitez: & par consequent de 4 angles qui tous ensemble valent quatre droits. XII. 5.

Les costez qui comprennent un même angle s'appellent costez angulaires.

Ceux qui ne comprennent point le même angle, coſtez oppoſez.

Les angles de même ſont proches ou oppoſez.

THEOREME.

Tout quadrilatere qui a ſes angles oppoſez égaux à XXXVI. deux droits, peut eſtre inſcrit au cercle, & nul autre n'y peut eſtre inſcrit.

Soit le quadrilatere *b c d f*, dont les angles *b* & *d* ſoient égaux à deux droits, & par conſequent auſſy les angles *f*. *c*.

Soit trouvé le cercle dont la circonference paſſe par les 3 points *f b c*. par VII. 3. Ie dis qu'elle paſſera auſſy par le 4e, qui eſt *d*.

Car tout angle qui a *f c* pour baſe, & qui eſt inſcrit dans ce cercle du coſté de *d*, comme *f g c*, plus l'angle *b*, vaut deux droits. IX. 26. Or l'angle *f g c* eſt égal à l'angle *d*, qui plus l'angle *b* vaut auſſy deux droits. Donc l'angle *d* eſt auſſy inſcrit dans ce cercle par IX. 30.

DIVISION ET DEFINITIONS.

LORSQUE les coſtez oppoſez d'un quadrilatere ſont pa- XXXVII. ralleles, le 1er au 3e, & le 2e au 4e, on l'appelle *Parallelogramme*, ſinon on l'appelle *Trapeze*, quand même deux des coſtez oppoſez, comme le 1er & le 3e ſeroient paralleles, ſi le 2e & le 4e ne le ſont pas.

DES PARALLELOGRAMMES.

PREMIER THEOREME.

SI les coſtez oppoſez d'un quadrilatere ſont égaux, ils XXXVIII. ſont paralleles; & s'ils ſont paralleles, ils ſont égaux. VI. 26. & 27.

SECOND THEOREME.

SI tous les 4 angles d'un quadrilatere ſont droits, il eſt XXXIX. parallelogramme. VI. 25.

TOISIEME THEOREME.

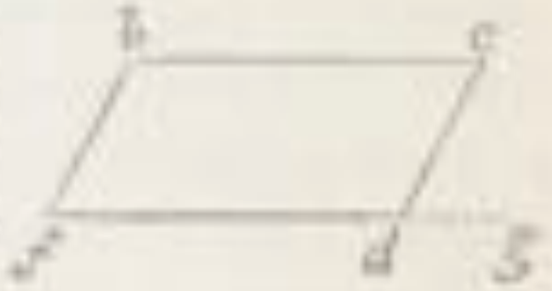
SI deux coſtez oppoſez d'un quadrilatere ſont égaux XL.

& paralleles, les deux autres sont aussy égaux & paralleles. VI. 28.

QUATRIEME THEOREME.

XLI. LES deux angles opposez d'un parallelogramme sont égaux, & les proches sont égaux à deux droits.

Soit le parallelogramme *b c d f*. Soit prolongé *f d* jusques à *g*, l'angle *c d g* est égal à l'angle *c*, par VIII 53. & à l'angle *f*, par VIII 54. Donc les aigus opposez *c* & *f* sont égaux.



Or les deux angles vers *d*, l'un exterieur & l'autre interieur, sont égaux à deux droits. Donc les angles interieurs vers *d* & vers *f* sont aussy égaux à deux droits.

Donc les deux autres vers *b* & vers *c* sont aussy égaux à deux droits, puisque les 4 valent 4 droits.

Ostant donc de part & d'autre les deux aigus *c* & *f* qui sont égaux, les obtus opposez *b* & *d* seront égaux.

PREMIER COROLLAIRE.

XLII. S'IL y a un angle droit dans un parallelogramme, tous les autres le sont aussy, & alors il est appelle *Rectangle*.

Car l'opposé est droit, puisqu'il est égal à celuy là; & les proches ne peuvent valoir deux droits, que l'un estant droit, l'autre ne le soit aussy.

SECOND COROLLAIRE.

XLIII. QUI connoist un angle d'un parallelogramme, les connoist tous. Car ce qui manque de la demy circonference à l'arc qui mesure l'angle donné, est la mesure de l'angle proche de celuy là, & les deux autres sont égaux chacun à l'un de ces deux là.

TROISIEME COROLLAIRE.

XLIV. DEUX parallelogrammes qui ont un angle égal, sont equiangles.

QUATRIEME COROLLAIRE.

XLV. SI deux costez angulaires d'un parallelogramme sont égaux, tous les 4 sont égaux entr'eux. Car chacun des angulaires est égal à son opposé.

CINQUIEME COROLLAIRE.

QUI connoist d'un parallelogramme deux costez angu- XLVI.
laires & un angle, connoist tout le parallelogramme.

Car qui connoist un angle, les connoist tous; & qui connoist deux costez angulaires connoist les deux autres, chacun estant égal à son costé.

PROBLEME.

DECRIRE un parallelogramme dont on a un angle, & XLVII.
la grandeur de chacun des deux costez angulaires.

Les deux costez angulaires comprenant cet angle, de l'extremité du plus petit décrire un cercle de l'intervalle du plus grand, & de l'extremité du plus grand décrire un cercle de l'intervalle du plus petit: les lignes menées de ces extremitez au point où ces cercles se couperont, acheveront la description de ce parallelogramme.

CINQUIEME THEOREME.

DEUX parallelogrammes sont semblables quand ils ont XLVIII.
un angle egal, & les costez angulaires proportionels.

Car l'égalité d'un angle donne celle des autres; & deux costez angulaires ne sçauroient estre proportionels, que les deux autres ne le soient aussy.

DEFINITION.

LA ligne qui joint deux angles opposez s'appelle *Diagonale*, & elle divise le parallelogramme en deux triangles tout-egaux. Car les deux angles non divisez sont égaux, parcequ'ils sont opposez; & les parties des divisez sont alternativement égales, par VIII. 53.

XLIX.

SIXIEME THEOREME.

SI on tire des paralleles aux costez angulaires qui passent par le même point de la Diagonale, les parties de ces nouvelles lignes sont proportionelles.

L.

Demontré X. 16.

DEFINITION.

ON dit qu'un parallelogramme est décrit autour de la LI.
diagonale d'un autre parallelogramme, quand d'un point

de cette diagonale on tire deux paralleles aux deux costez angulaires du parallelogramme, qui se terminant chacune à l'un de ces costez faſſent un nouveau parallelogramme, dont une partie de cette diagonale eſt encore diagonale.

SEPTIEME THEOREME.

LII. TOUT parallelogramme décrit autour de la diagonale d'un autre, luy eſt ſemblable.

b c d f eſt ſemblable à *m n o f*. Car d'une part *f d c* & *f o m* ſont égaux, parceque *c d* & *n o* ſont paralleles.

Et par la même raiſon *f c d*, & *f n o* ſont égaux auſſy.

Donc *f d*. *f o* :: *d c*. *o m*.

Donc ces parallelogrammes ſont equiangles, & ont les coſtez angulaires proportionels. Donc ils ſont ſemblables par le 5e Theoreme.

DIVISION DU PARALLELOGRAMME EN SES ESPECES.

LIII.

- Selon les coſtez angulaires
  - égaux
    - Quarré
    - Rhombe
    - → angles droits.
  - inégaux
    - Oblong
    - Rhomboïde
    - → angles non droits.
- Selon les angles
  - droits, rectangle
    - Quarré
    - Oblong
    - → coſtez tous égaux.
  - non droits
    - Rhombe
    - Rhomboïde
    - → coſtez non tous égaux.

AUTREMENT.

- Parallel.
  - rectangle
    - tous les coſtez égaux. Quarré.
    - les ſeuls oppoſez égaux. Oblong.
  - non rectangle
    - tous les coſtez égaux. Rhombe.
    - les ſeuls oppoſez égaux. Rhomboïde.

DU

DU PENTAGONE.

THEOREME.

LORSQUE deux lignes qui soutiennent chacune un angle d'un pentagone regulier se coupent, elles se coupent mutuellement en moyenne & extrême raison, & la plus grande partie de chacune de ces lignes est égale au costé du pentagone. L 17.

Soit le pentagone inscrit dans un cercle.

Chaque costé soutient un arc de 72 degrez. XII. 11.

Donc les angles inscrits au même cercle qui sont soutenus par un de ces arcs (tels que sont *c b d*, *c d b*, *d c f*, *d f c*) sont chacun de 36 degrez. IX. 18.

Et ceux qui sont soutenus par deux de ces costez (comme l'angle *b c f*) sont de 72. *ibid.*

Et les angles opposez au sommet (*b g c* & *f g d*) sont chacun aussy de 72 degrez, par IX. 40. Et par consequent *b g* est égale à *b c* costé du pentagone.

Donc l'angle *c b g* est tel par XI. 73. & 69. que la base estant jointe au costé, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. Or *g d* est égale à la base *g c*. Donc la toute *b d* est divisée en moyenne & extrême raison. C'est à dire que,

b d. b g :: b g. g d.

COROLLAIRE.

UN exagone & un decagone estant inscrits dans le même cercle, le costé de l'un ajoûté au costé de l'autre fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. L V.

Car l'angle compris entre deux demydiametres, qui a pour base le costé du decagone, est un angle de 36 degrez (XII. 11. & 39.) Donc ajoûtant le costé à la base, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. XI. 73. & 69. *& sup.* 33.

Or le costé de cet angle qui est le demydiametre, est aussy le costé de l'exagone inscrit dans ce cercle là.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUATORZIEME.

DES FIGURES PLANES CONSIDERE'ES SELON LEUR AIRE: C'ESTADIRE SELON LA GRANDEUR DES SURFACES QUELLES CONTIENNENT.

ET PREMIEREMENT DES RECTANGLES.

IDE'E GENERALE DE LA MESURE DES SURFACES.

1. *LA surface eſtant une étendüe de deux dimenſions, longueur & largeur, il eſt neceſſaire pour en connoitre la grandeur, de ſçavoir quelle en eſt la longueur, & quelle en eſt la largeur.*

La longueur ſe meſure par une ligne droite qui donne la diſtance d'un point à un point. C'eſt pourquoy on ne peut connoitre la longueur des lignes courbes que par rapport à des lignes droittes.

La largeur conſiſte dans la diſtance entre deux lignes : com-

me entre b *&* c, *qui se mesure aussy par une ligne droitte. C'estpourquoy les surfaces courbes ne se peuvent mesurer que par rapport à des surfaces planes.*

De plus toute ligne droitte n'est pas propre à mesurer la distance d'une ligne à une ligne. Car si elle tomboit du point d'une ligne obliquement sur l'autre, elle n'en mesureroit pas la distance ; mais tombant du point d'une ligne perpendiculairement sur l'autre, elle mesure la distance de ce point à cette ligne.

Mais il ne s'ensuit pas que pour avoir mesuré la distance d'un des points de la ligne b *à la ligne* c, *elle ait mesuré la distance de tous les autres points de la ligne* b, *à moins que tous les autres points de la ligne* b *fussent également distans de la ligne* c ; *c'estadire qu'elle luy fust parallele.*

D'où il s'ensuit que si b *n'estoit pas parallele à* c, *il faudroit autant de differentes mesures pour connoitre la distance de* b *à* c, *qu'il y auroit de differens points dans* b. *Ce qui estant impossible, il paroist par là qu'afin qu'on puisse avoir distinctement la distance d'une ligne à une autre, ce qui fait la largeur, il faut que ces lignes soient parallelet.*

De plus, si ces lignes sont inégales, & que b *soit plus grande que* c, *on ne sçauroit laquelle prendre pour la longueur, parceque cette surface seroit plus longue d'un costé que de l'autre. Et ainsy afin qu'on puisse avoir exactement la mesure d'une surface, il faut que les lignes dont la distance en fait la largeur, soient non seulement paralleles ; mais aussy égales. D'où il arrivera que les autres lignes seront aussy égales & paralleles entr'elles.*

Et par consequent afin qu'une surface soit en estat d'estre exactement mesurée, il faut qu'elle soit terminée par 4 lignes paralleles ; c'estadire que ce soit un parallelogramme.

Mais si les deux lignes égales & paralleles qu'on prend pour mesure de la longueur ne sont pas directement opposées, en sorte que de tous les points de l'une on puisse tirer des perpendiculaires sur tous les points de l'autre ; c'estadire si ce parallelogramme n'est pas rectangle, mais obliquangle, on aura bien alors dans la figure dequoy en mesurer la longueur, sçavoir lequel

en vendra de deux coſtez oppoſez. Mais l'autre coſté angulaire eſtant oblique ſur cette longueur, ne ſera pas propre à meſurer la diſtance entre les deux lignes qui font la longueur. D'où il s'enſuit qu'il n'y a que le rectangle qui ait en ſoy la meſure de ſa longueur & de ſa largeur.

Car ſi d f *eſt prie pour la longueur,* d b *qui eſt la meſure de la diſtance de tous les points de* b c *à* d f, *en meſurera la largeur.*

C'eſt pourquoy nulle ſurface ne ſe meſure proprement par ſoy même, que le rectangle.

Et dans tout rectangle l'un des coſtez angulaires à choiſir, ſe peut appeller la longueur, *& l'autre* la largeur; *ou pour s'accommoder davantage aux termes communs, l'un* la baſe, *& l'autre* la hauteur.

Mais comme la meſure eſt d'autant plus parfaite qu'elle eſt plus ſimple, & que le quarré *qui n'a qu'une même meſure pour ſa longueur & pour ſa largeur, eſt plus ſimple que l'oblong qui en a deux: il eſt arrivé de là que les hommes prennent le quarré de quelque ligne connüe, comme d'une toiſe, d'un pied, d'un pouce &c. pour la meſure commune de toutes les ſurfaces, & qu'alors ſeulement ils en croient connoître parfaitement la grandeur, quand ils peuvent dire qu'elle eſt de tant de toiſes quarrées, ou de tant de pieds quarrez, ou de tant de pouces quarrez &c. Et ainſy ce qu'on entend ordinairement par ces mots, avoir l'aire d'un plan, c'eſt ſçavoir combien ce plan, de quelque figure qu'il ſoit, contient ou de toiſes quarrées, ou de pieds quarrez, ou de pouces quarrez, & quand on parle de ſurface on ſouſentend le mot de quarré ſans l'exprimer: comme quand on dit que la place d'un logis eſt de tant de toiſes, cela s'entend de toiſes quarrées, dont chacune vaut 36 pieds quarrez.*

Neanmoins comme cela ne ſe peut pas toujours connoître à cauſe des grandeurs incommenſurables, on ſe contente ſouvent en comparant des ſurfaces enſemble, de ſçavoir que ſi l'une contient tant de petits rectangles, comme 16 fois b c, *l'autre en contient tant auſſy, comme 25 fois le même* b c.

Tout cela nous fait voir, 1°. Que la premiere & la plus

parfaitte meſure eſt le quarré, & que c'eſt par le quarré qu'on meſure les reïtangles pour en connoitre exactement la grandeur.

2°. Que la plus parfaitte apres le quarré, & qui eſt même parfaitte en ſon genre, parcequ'elle contient en ſoy la meſure de la longueur & de la largeur, eſt le reïtangle oblong; & que c'eſt par là que l'on meſure les autres parallelogrammes.

3°. Que celle d'aprés, & qui eſt imparfaitte, ne contenant pas en ſoy la meſure de la longueur & de la largeur, eſt le parallelogramme non reïtangle: & que c'eſt d'ordinaire par ces parallelogrammes que l'on meſure les triangles, en ce qu'on les conſidere comme les moitiez de ces parallelogrammes.

4°. Que le triangle ſuit aprés, & que c'eſt par luy qu'on meſure d'ordinaire les autres polygones en les reduiſant en triangles, comme ils s'y peuvent tous reduire.

5°. Qu'enfin les autres polygones ſont meſurez & ne ſervent point de meſure, comme le quarré ſert de meſure & n'eſt point meſuré ſi ce n'eſt par d'autres plus petits; comme quand on dit que la toiſe quarrée contient 36 pieds quarrez. Voilà en abregé tout ce qu'a pu faire l'art des hommes pour meſurer les ſurfaces reïtilignes, ſans parler des curvilignes qui ne ſe peuvent meſurer que par rapport à des reïtilignes.

Mais comme toutes nos connoiſſances qui dependent de l'art en ſuppoſent de naturelles qu'on appelle Axiomes, voicy ceux ſur leſquels eſt fondée toute la ſcience de la dimenſion des figures planes.

PREMIER AXIOME.

TOUS les quarrez de racine égale, ſont égaux. C'eſt-à-dire que les eſpaces compris dans le quarré de la ligne *b*, & dans celuy de la ligne *m* égale à *b*, & de quelque autre ligne que ce ſoit égale à *b*, ſont égaux. Cela eſt clair par la notion même de la ſurface, qui n'ayant que deux dimenſions, longueur & largeur, il n'eſt pas plus clair que deux lignes droittes d'une même longueur ſont égales, qu'il eſt clair que deux ſurfaces de même longueur & de même largeur ſont égales. Or deux quarrez ſont de même longueur & de même largeur, ſi la ligne qui meſure dans l'un 11.

tant la longueur que la largeur, eſt égale à celle qui meſure dans l'autre tant la longueur que la largeur.

C'eſt pourquoy auſſy par tout où une ligne d'une certaine longueur ſe trouve, comme de la longueur de *b*, elle peut eſtre marquée par le même caractere & appellée *b*. Car il ne peut y avoir de difference que de ſituation, ce qui n'y fait rien. Et ainſy il ne faut pas s'étonner ſi *bb* eſt par tout égal à *bb*.

SECOND AXIOME.

III. Si les coſtez angulaires d'un rectangle ſont égaux aux coſtez angulaires d'autres rectangles, chacun à chacun, tous ces rectangles ſont égaux. Ou ce qui eſt la même choſe, tous ceux dont la baſe eſt égale à la baſe, & la hauteur à la hauteur, ſont égaux.

C'eſt la même choſe que le precedent. Car les coſtez angulaires d'un rectangle en meſurent la longueur & la largeur; & on peut même, comme nous avons dit, en appeller l'un ſa longueur, & l'autre ſa largeur. Et par conſequent tous les rectangles dont les coſtez angulaires ſont égaux, chacun à chacun, ont même longueur & même largeur.

On peut encore dire que les coſtez angulaires d'un rectangle pouvant eſtre marquez par les mêmes caracteres par tout où ils ſe rencontrent égaux, comme par *b* & par *c*, par tout où l'un eſt égal à *b* & l'autre à *c*, dire qu'ils ſont égaux, c'eſt dire que *bc* eſt égal à *bc*.

AVERTISSEMENT.

IV. *Ces deux axiomes nous font voir que tout ce que nous avons dit dans le premier livre de la multiplication des grandeurs incomplexes & complexes, & dans le 5e de la raiſon entre les grandeurs planes, ſe peut appliquer aux quarrez & aux rectangles, & qu'il n'y a qu'à ſubſtituer des lignes au lieu des ſimples caracteres.*

C'eſt ce que nous verrons en peu de mots en commençant par la puiſſance des lignes.

DEFINITION.

V. On appelle puiſſance d'une ligne le quarré de cette li-

gne, comme *b b* est la puissance de *b*, ou bien le rectangle de deux lignes quand il s'agit de deux lignes, comme la puissance de *b* par *c* est le rectangle *b c*.

DE LA PUISSANCE D'UNE LIGNE COMPAREE AVEC LA PUISSANCE DE SES PARTIES.

VII. Tout ce qu'on enseigne de la puissance d'une ligne comparée avec la puissance de ses parties, n'est que la même chose que ce que nous avons dit dans le premier livre de la multiplication des grandeurs complexes; & se peut reduire à cet Axiome.

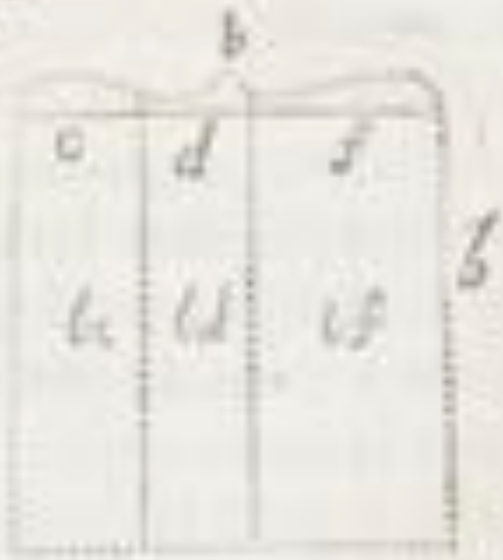
Troisieme Axiome.

C'est la même chose de multiplier le tout par le tout, & de multiplier le tout par chacune de ses parties, ou de multiplier chaque partie par toutes les parties, en faisant autant de multiplications partiales qu'est le produit des deux nombres des parties qu'on multiplie les unes par les autres.

Avertissement.

VIII. *Ainsy le plus grand mystere pour ne se point brouiller est de nommer chaque ligne autant que l'on peut par un seul caractere, afin que deux caracteres joints ensemble puissent marquer une multiplication, c'estadire un rectangle, & de marquer par un même caractere les lignes égales.*

Exemple: La ligne b *soit divisée en trois portions inégales que j'appelleray* c. d. f. *il est visible que c'est la même chose de multiplier* b *par* b, *ce qui donne* b b, *que de multiplier* b *par toutes ces parties, c'estadire par* c, *par* d, *& par* f, *ce qui donne* b c. b d. b f: *& par consequent* b b = b c + b d + b f.



Ainsy presque toutes les propositions du second livre d'Euclide ne sont que des Corollaires de ces Axiome & de ces Avertissemens. Je ne proposeray que les principales & qui sont d'usage.

Je suppose toujours qu'on mette à angles droits les lignes

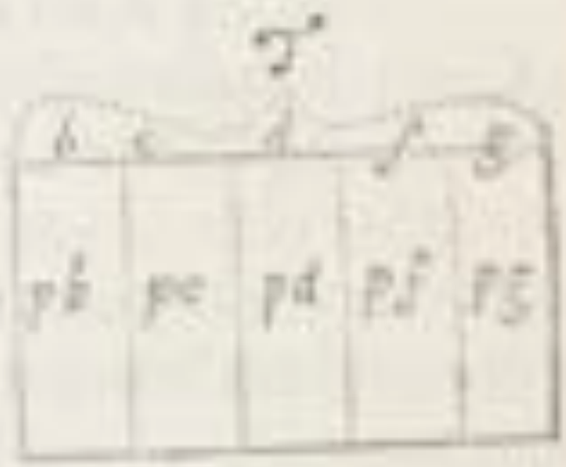
qui doivent faire les coſtez angulaires des rectangles, ſans que je m'amuſe plus à en avertir.

Et quand je parle d'une ligne coupée en pluſieurs parties, j'entens toujours égales ou inégales, à moins que j'exprime qu'on les doive prendre égales.

PREMIER THEOREME.

IX. Ayant deux lignes, l'une non coupée; & l'autre coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle des deux entieres eſt égal à tous les rectangles de la non coupée par chaque partie de la coupée. C'eſt à dire qu'un tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

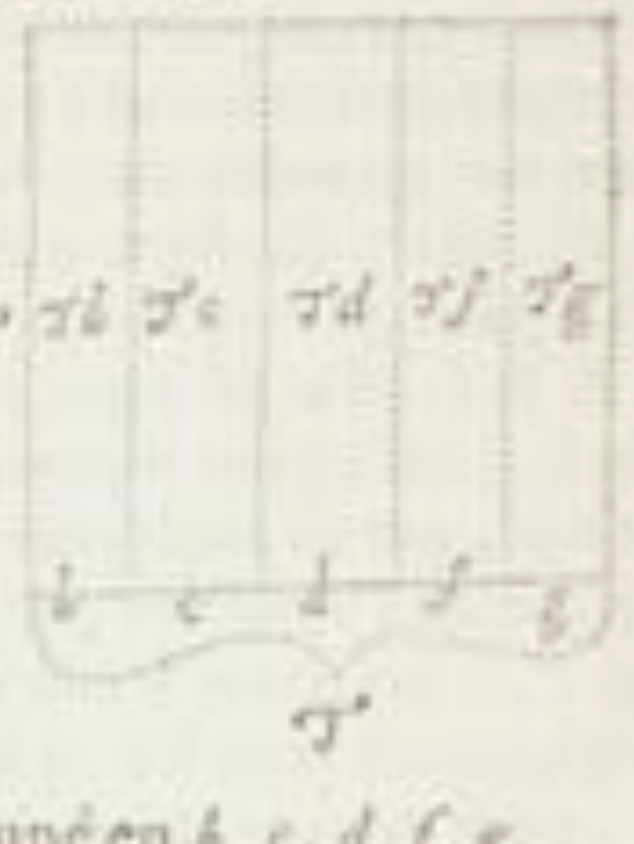
Soit p la non coupée, & T la coupée en 5 parties b, c, d, f, g, il eſt bien viſible qu'en tirant des lignes paralleles à p, & par conſequent qui luy ſont égales par tous les points de diviſion de T, elles feront pb, pc, pd, pf, pg, qui pris enſemble ſont égaux à pT, puiſque c'en ſont toutes les parties.



SECOND THEOREME.

X. UNE ligne eſtant coupée en pluſieurs parties, le quarré de la toute eſt égal aux rectangles de chaque partie ſur la toute.

C'eſt la même choſe que le precedent, excepté que la même ligne faiſant les deux coſtez du rectangle total qui eſt alors quarré, on la prend une fois pour la non coupée, & une autre fois pour la coupée.



Il eſt donc clair que T eſtant coupé en b, c, d, f, g. TT doit eſtre égal à $Tb. Tc. Td. Tf. Tg$.

TROISIEME THEOREME.

XI. UNE ligne eſtant coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle de quelque partie que ce ſoit par la toute,

toute, est égal au quarré de cette partie plus les rectangles de cette partie par chacune des autres.

Soit T comme auparavant divisé en 5 parties $b.c.d.f.g.$ il est clair par le premier Theoreme, que le rectangle de b par la toute est égal aux 5 rectangles de b par chaque partie de T. Or b est l'une de ces parties, & par consequent l'un de ces 5 rectangles sera bb. C'est à dire le quarré de cette partie, & les autres 4 rectangles seront le rectangle de b par chacune des autres parties, sçavoir $bc.bd.bf.bg$.

QUATRIEME THEOREME.

UNE ligne estant divisée en tant de parties que l'on voudra, le quarré de la toute est égal aux quarrez de chaque partie plus deux fois autant de rectangles, dont il y en a toujours deux qui sont les rectangles des mêmes deux parties. XII.

Ce Theoreme n'est que l'assemblage du 2e & du 3e.

Soit T comme auparavant divisée en b,c,d,f,g, par le 1er Theoreme ayant fait le quarré TT, & n'ayant divisé qu'un seul de ces costez par b,c,d,f,g, & tiré les paralleles à l'autre costé, on a 5 bandes, dont on peut appeller chacune du nom de sa partie, sçavoir Tb, Tc, Td, Tf, Tg. Mais divisant encore l'autre costé par les mêmes b,c,d,f,g, on divise chacune des 5 bandes en 5, ce qui fait 25, & dans chaque bande ainsy divisée se trouve un quarré de la partie dont elle est bande (dans Tb, bb, dans Tc, cc) & quatre rectangles des autres parties par celle là. Et il est aisé de voir que dans chaque bande se trouve toujours un rectangle de deux parties, dont le rectangle se trouve encore dans un autre, comme dans Tb se trouve bc, qui se trouve aussy dans Tc, & ainsy tout le quarré contient

5 quarrez $bb.cc.dd.ff.gg$.
20 rectangles 2.bc. 2.bd. 2.bf. 2.bg.
2.cd. 2.cf. 2.cg.
2.df. 2.dg.
2.fg.

COROLLAIRE.

LE plus grand usage de ces Theoremes est quand la li- XIII.

gne eſt coupée en deux. C'eſt pourquoy il faut bien retenir ces trois propoſitions.

1. Le quarré de la toute eſt égal aux deux rectangles de chaque partie par la toute.

2. Le rectangle d'une partie par la toute eſt égal au quarré de cette partie, plus le rectangle des deux parties.

3. Le quarré de la toute eſt égal aux 2 quarrez de chaque partie plus deux fois le rectangle des deux parties.

DE LA PROPORTION ENTRE LES RECTANGLES.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

XIV. Les rectangles qui ont un coſté égal à un coſté, & l'autre inégal, ſont entr'eux comme l'inégal.

Ou) les rectangles de même hauteur ſont comme leurs baſes.

D'égale baſe ſont comme leurs hauteurs.

Ou) d'égale longueur ſont comme leurs largeurs.

D'égale largeur ſont comme leurs longueurs.

Tout cela n'eſt que la même choſe, & peut paſſer pour prouvé dans le 2e Livre.

Neanmoins en voicy encore la preuve. La theſe eſt

$b\,c.\ b\,d :: c.\ d.$

L'aliquote quelconque de c ſoit appellée x.

Si par tous les points de la diviſion on tire des paralleles à b, il eſt clair que $b\,x$ ſera autant de fois dans $b\,c$, qu'x dans c. C'eſt à dire que $b\,x$ & x ſeront toujours les aliquotes pareilles, l'une de $b\,c$, & l'autre de c. Car il eſt bien clair que toutes les x eſtant égales, tous les $b\,x$ ſeront égaux.

Que ſi on applique x à d, baſe du rectangle $b\,d$, & qu'on tire auſſy par tous les points de la diviſion des paralleles à b, il eſt clair que $b\,x$ ſera autant de fois dans $b\,d$, qu'x dans d, & que ſi x eſt preciſément tant de fois dans d, $b\,x$ ſera auſſy preciſément tant de fois dans $b\,d$. Et ſi x n'eſt pas preciſément tant de fois dans d, mais avec quelque

reſte ; *b x* de même ne ſera pas preciſément tant de fois dans *c d*, mais avec un rectangle de reſte plus petit que *b x*.

Donc les aliquotes pareilles de *b c* & de *c* ſont également contenües, celles de *b c* dans *b d*, & celles de *c* dans *d*.

Donc par la definition de l'égalité des raiſons *b c* & *b d* ſont en même raiſon que *c* & *d* ; puiſque les aliquotes pareilles des antecedens *b c* & *c* ſont également contenus dans les conſequens *b d* & *d*. Donc *b c*. *b d* :: *c*. *d*.

PREMIER COROLLAIRE.

LES rectangles ſont en raiſon compoſée de la longueur à la longueur, & de la largeur à la largeur. C'eſt la definition même de la raiſon compoſée. III. 1. 4. XV.

b c. *m n* :: *b*. *m* → *c*. *n*.

SECOND COROLLAIRE.

LES rectangles ſemblables ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues. XVI.

Car les rectangles ſont ſemblables, quand la longueur eſt à la longueur, comme la largeur à la largeur.

b f & *c g* ſont ſemblables, ſi *b*. *c* :: *f*. *g*.

Donc la raiſon de ces deux rectangles eſt compoſée de deux raiſons égales, par le premier Corollaire.

Donc cette raiſon eſt doublée de chacune, par la definition de la raiſon doublée.

TROISIEME COROLLAIRE.

LES quarrez ſont en raiſon doublée de leurs racines. XVII.

C'eſt la même choſe que le precedent.

Et ainſy ſi *b* eſt double de *d*, *bb* eſt quadruple de *dd*.

QUATRIEME COROLLAIRE.

LES rectangles reciproques ſont égaux. Car on appelle les rectangles reciproques quand la longueur du premier eſt à la longueur du ſecond, comme la largeur du ſecond eſt à la largeur du premier. XVIII.

Ainſy *b g* & *c f* ſont reciproques, ſi

b. *c* :: *f*. *g*.

Or la grandeur plane des deux extremes d'une proportion eſt égale à la grandeur plane des moyens.

Donc *b g* = *c f*.

MESMES COROLLAIRES AUTREMENT PROPOSEZ.

XIX. Si 4 lignes sont proportionelles,

b. c :: f. g.

1. Le rectangle des antecedens *b f*, est au rectangle des consequens *c g*, en raison doublée de la raison de cette proportion *b. c.* ou *f. g.*

2. Le rectangle des deux premiers termes *b c* est au rectangle des deux derniers *f g* en raison doublée de la raison alterne de cette proportion *b. f.* ou *c. g.*

3. Le rectangle des deux extrêmes est égal au rectangle des deux moyens, *b g = c f.* II. 27.

4. Les quarrez de ces quatre lignes sont proportionels *bb. cc :: ff. gg.* par III. 24.

5. Si trois lignes sont continuellement proportionelles, le quarré de celle du milieu est égal au rectangle des extremes.

Si ∴ *b. c. d. cc = b d.* II. 27.

6. Les quarrez des deux premiers *bb* & *cc* sont en même raison que la premiere & la troisiéme.

bb. cc :: b. d. par III. 26.

CINQUIEME COROLLAIRE.

XX. UNE ligne estant divisée en deux parties, si deux autres lignes sont moyennes proportionelles, l'une entre la toute & sa plus grande partie, & l'autre entre la même toute & sa plus petite partie : les deux quarrez de ces deux lignes sont égaux au quarré de cette toute.

Soit *b* divisée en *m* & *n*.
Soit *b* moyenne entre *b* & *m*
Et *d* entre *b* & *n*.
Puisque ∴ *b. b. m. bb = b m.*
Et puisque ∴ *b. d. n = d d. b n.*
Donc *bb + dd = b m + b n.*
Or *b m. + b n. = bb.*
Donc *bb + dd = bb.*

AVERTISSEMENT.

On peut rapporter icy tout ce qui a eſté demonſtré dans le 2 & 3e livre des grandeurs planes en general. Car le rectangle eſt la grandeur plane en matiere d'eſtendüe ou eſpace. XXI.

APPLICATION
DE CETTE DOCTRINE GENERALE
A QUELQUES LIGNES PARTICULIERES QU'ON A FAIT VOIR CY DEVANT ESTRE PROPORTIONELLES

PREMIER THEOREME.

Si deux lignes ſe coupent dans un cercle, le rectangle des portions de l'une eſt égal au rectangle des portions de l'autre. Voyez XI. 55. XXII.

SECOND THEOREME.

Le quarré de la perpendiculaire d'un point de la circonference au diametre, eſt égal au rectangle des portions du diametre. Voyez XI. 57. XXIII.

TROISIEME THEOREME.

Si d'un point hors le cercle deux lignes ſont menées juſqu'à la concavité du cercle, le rectangle d'une toute & de ſa portion qui eſt hors le cercle, eſt égal au rectangle de l'autre toute & de ſa portion, qui eſt auſſy hors le cercle. Voyez XI. 51. XXIV.

QUATRIEME THEOREME.

Si d'un point hors le cercle on mene une ligne qui touche le cercle, & l'autre qui le coupe juſqu'à la concavité, le quarré de la tangente eſt égal au rectangle de l'autre toute, & de ſa portion qui eſt hors le cercle. XI. 54. XXV.

Et ſi on appelle la tangente p, la ſecante entiere s, la partie qui eſt hors le cercle b, & celle qui eſt au dedans d, on aura toutes ces égalitez par ce qui a eſté dit cy devant.

$p\,p = b\,b. + b\,d.$
$b\,b = p\,p. - b\,d.$
$s\,s = b\,s. + d\,s.$
$s\,s = p\,p. + d\,s.$

CINQUIEME THEOREME.

XXVI. Si du sommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypothenuse,

1. Le quarré de cette perpendiculaire est égal au rectangle des deux portions de l'hypothenuse. $p\,p = m\,n$.

2. Le quarré du grand costé de l'angle droit est égal au rectangle de l'hypothenuse entiere & de sa grande portion, $b\,b = h\,m$.

3. Le quarré du petit costé est égal au rectangle de l'hypothenuse entiere, & de sa petite portion, $d\,d = h\,n$.

4. Le quarré de toute l'hypothenuse est égal aux quarrez des deux costez $b\,b + d\,d = h\,h$.

Les 3 premiers points sont clairs, par XI. 58.

Et le 4e par le 5e Corollaire 5.

PREMIER COROLLAIRE.

XXVII. LA diagonale d'un rectangle peut autant que les quarrez des deux costez.

SECOND COROLLAIRE.

XXVIII. LA diagonale d'un quarré peut 2 fois le quarré du costé.

TROISIEME COROLLAIRE.

XXIX. LA diagonale du quarré est incommensurable en longueur au costé, & commensurable en puissance. XI. 76.

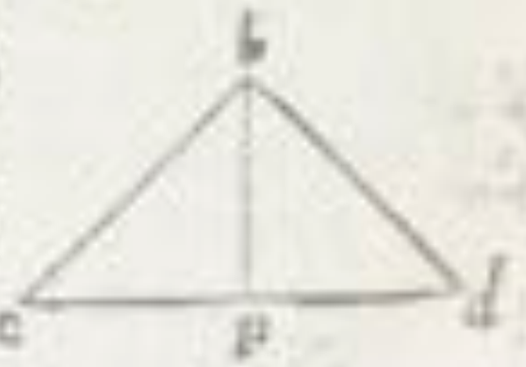
QUATRIEME COROLLAIRE.

XXX. LA hauteur d'un triangle equilateral (c'est à dire la perpendiculaire du sommet à la base) est incommensurable en longueur au costé, & commensurable en puissance, le quarré du costé estant au quarré de cette perpendiculaire comme 4 à 3.

La premiere partie est claire, par XI. 79.

La seconde se prouve ainsy : $p\,d$ est la moitié de $b\,d$. Donc le quarré de $b\,d$ est au quarré de $p\,d$, comme 4 à un. Or ce même quarré de $b\,d$ vaut le quarré de $p\,d$, plus celuy de $b\,p$.

Donc le quarré de $b\,d$ est à celuy de $b\,p$ comme 4 à 3.



SIXIEME THEOREME.

LE quarré de la baſe d'un angle aigu eſt égal aux quarrez des coſtez qui le comprennent moins deux fois le rectangle du coſté ſur lequel on mene une perpendiculaire de l'extremité oppoſée de la baſe & de la ligne comprise entre le ſommet de cet angle aigu & de cette perpendiculaire. XXXI.

Soit la baſe de l'angle aigu nommé *b*.
Le coſté vers lequel on ne mene point la perpendiculaire, *c*.
Celuy ſur lequel on la mene, *d*.
La perpendiculaire, *p*.
La ligne comprise entre la perpendiculaire & le ſommet de l'angle aigu, *x*.
Celle qui eſt comprise entre la perpendiculaire & la baſe, *y*.

Je dis que $bb = cc. + dd. - 2.dx.$

Mais il faut remarquer qu'*x* eſt quelquefois $d - y$.

Quelquefois *d* ſimplement.

Et quelquefois $d. + y.$

Selon que *d* fait ſur la baſe, ou un angle aigu, ou un droit, ou un obtus.

Mais quand *d* fait un angle droit ſur *b*, il eſt plus court de dire que *bb* baſe de l'angle aigu, eſt égal à *cc.* moins *dd.* comme il eſt clair par le precedent Theoreme. Et ainſy reſte ſeulement les deux autres cas.

PREMIER CAS.

QUAND *d* fait ſur la baſe un angle aigu, la perpendiculaire coupe *d* en deux parties.

Et ainſy $d = x + y$. & $x = d - y$.

Et alors le Theoreme ſe prouve ainſy.

Par le precedent Theoreme $bb. = pp + yy.$

Et $cc = pp + xx.$

Et $dd = yy + xx + 2.yx.$

Donc *bb* eſt moindre que $cc + dd.$ de $2.xx$, & $2.yx.$

Or x eſtant égale, $d - y$. $xx = dx - xy$.

Donc $xx + xy = dx$.

Donc $2.xx + 2xy = 2.dx$.

Donc $bb. = cc. + dd. - 2.dx$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SECOND CAS.

Si d fait un angle obtus ſur b, alors p ne tombe ſur d qu'eſtant prolongé, & y eſt une ligne ajoûtée à d. & x, eſt égale à $d. + y$. Ce qui fait qu'on prouve ainſy que $bb = cc + dd - 2.dx$.

$pp = cc - xx$. c'eſtadire $- dd - yy - 2.dy$.

Or $bb = pp. + yy$.

Donc $bb = cc - dd - dy$.

Et par conſequent $bb = cc + dd - 2.dd. - 2.dy$.

Or $x = d. + y$. Donc $dd + dy = dx$.

Donc $2.dd + 2.dy = 2.dx$.

Donc $bb = cc + dd - 2.dx$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

De tout cecy il eſt aiſé de conclure que ſi des deux extremitez de la baſe d'un angle aigu, on tire des perpendiculaires à chaque coſté, le rectangle d'un coſté & de la ligne compriſe entre le ſommet de l'angle aigu, & la perpendiculaire qui tombe ſur ce coſté ſera toujours égale au rectangle de l'autre coſté & de la ligne compriſe entre le ſommet de l'angle aigu & la perpendiculaire qui tombe ſur cet autre coſté.

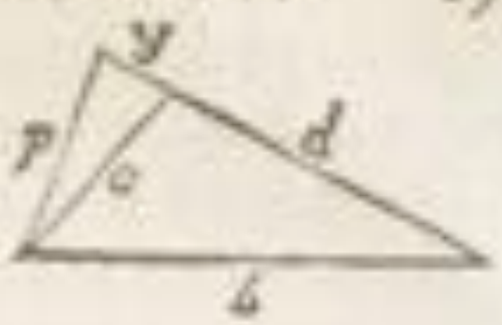
SEPTIEME THEOREME.

XXXII. LE quarré de la baſe de l'angle obtus eſt égal aux quarrez des coſtez, plus le rectangle du coſté vers lequel on aura mené une perpendiculaire de l'extremité de cette baſe & de la ligne compriſe entre cette perpendiculaire & le ſommet de l'angle obtus.

Il eſt clair que cette perpendiculaire ne peut tomber ſur aucun coſté qu'en le prolongeant.

Soit donc la baſe b.

Le



Le coſté non prolongé *c.*
L'ajoûtée *y.*
La perpendiculaire *p.*
b b eſt égal au quarré de *p*, plus le quarré de *d* + *y*. C'eſtadire que

$$bb = pp + yy + dd + 2.dy.$$

Or $cc = pp + yy$.

Donc $bb = cc + dd + 2.dy$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

AVERTISSEMENT.

On peut faire icy un Corollaire ſemblable à celuy du Theoreme precedent. Ie le laiſſe à chercher, & à prouver ſi l'on veut par les principes du livre des lignes proportionelles. XXXIII.

HUITIEME THEOREME.

LE quarré de la baſe d'un angle obtus, qui vaut les deux tiers de deux angles droits ; c'eſtadire qui eſt de 120 degrez, eſt égal aux quarrez des deux coſtez plus le rectangle de ces deux mémes coſtez. XXXIV.

Toutes choſes eſtant faittes, & les lignes nommées comme dans le precedent Theoreme, l'angle obtus ne peut valoir 120 degrez, que l'angle que fait *c* ſur l'ajoûtée *y* (qui eſt le complement de cet angle obtus) ne ſoit de 60 degrez. Or le triangle que font *c y p* eſt rectangle. Donc *y* eſt le ſinus d'un angle de 30 degrez. Donc par XIII. *y* eſt la moitié de *c*, qui en eſt le raion.

Donc $dc = 2.dy$.

Or par le precedent Theoreme,

$bb = cc + dd + 2.dy$.

Donc $bb = cc + dd + dc$ égal à $2\,dy$.

NEUVIEME THEOREME.

LE quarré de la baſe d'un angle aigu de 60 degrez eſt égal aux quarrez des coſtez moins le rectangle des coſtez. XXXV.

Car par le 6e Theoreme *b* eſtant la baſe d'un angle aigu,

$bb = cc + dd - 2.dx$.

Or *x* en tous les cas (c'eſtadire ſoit qu'*x* ſoit ou $d - y$, ou *d* ſimplement, ou $d + y$.) il eſt toujours le ſinus d'un

angle de 30 degrez dont c eſt le raion, quand l'angle que ſoutient b eſt de 60 degrez.

Donc x eſt toujours la moitié de c, par XIII.....

Donc $d\,c = 2.\,d\,x.$

Donc $b\,b. = c\,c. + d\,d. \left\{ \frac{-}{ou} \right. \frac{2.\,d\,x.}{d\,c.}$

DIXIEME THEOREME.

XXXVI. LE quarré du coſté du pentagone eſt égal au coſté du decagone, plus le quarré du coſté de l'exagone inſcrits dans le même cercle.

Soit $b\,d$ le coſté du pentagone.

$c\,b$ & $c\,d$ deux demidiametres du cercle dans lequel il eſt inſcrit, qui ſont auſſy les coſtez de l'exagone, par XII. 36.

$d\,g$ & $g\,b$ deux coſtez du decagone.

$c\,p$ une ligne qui coupe perpendiculairement & par la moitié, tant le coſté du decagone $d\,g$, que l'arc $d\,g$ qui coupe en r le coſté du pentagone.

Cela eſtant, je prouve 1°. Que $b\,c$ (coſté de l'exagone) eſt moyenne entre $b\,d$ coſté du pentagone, & ſa partie $b\,r$.

Car les deux angles vers b & vers d ſont chacun de 54 degrez, XII. 23.

Or l'angle $r\,c\,b$ eſt auſſy de 54 degrez, puiſque l'arc $g\,b$ eſt de 36 degrez, XII. & l'arc $g\,p$ de 18, ce qui enſemble fait 54.

Donc les deux triangles $b\,c\,d$, & $b\,r\,c$ ſont iſoſceles & ſemblables.

Donc par (34 5.) $b\,c$ eſt moyenne entre $b\,d$ & $b\,r$. C'eſt-adire entre le coſté du pentagone & ſa plus grande partie.

Je prouve 2°. Que $d\,g$ coſté du decagone, eſt moyenne entre $b\,d$ coſté du pentagone, & $d\,r$ ſa plus petite partie.

Car $r\,p$ coupant $g\,d$ perpendiculairement & par la moitié, $r\,g$ eſt égale à $r\,d$. Donc les angles que chacun fait ſur $g\,d$ ſont égaux.

Donc les deux triangles *d g b* & *d r g* sont isoſceles & ſemblables. Donc par (34. 5.) *d g* (baſe du petit & coſté du grand) eſt moyenne entre *b d* (baſe du grand) & *r d* (coſté du petit.)

Donc le coſté du decagone eſt moyenne entre le coſté du decagone & ſa plus petite partie.

Donc par le 5e Corollaire (203.) le quarré du pentagone eſt égal au quarré du coſté de l'exagone, plus le quarré du coſté du decagone inſcrit dans le même cercle. Ce qu'il falloit demonſtrer.

ONZIEME THEOREME.

SI une ligne eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, la ligne compoſée de la moitié de cette ligne & de ſa plus grande partie, peut 5 fois le quarré de la moitié. XXXVII.

Soit la ligne *d* diviſée en 6, & *c* en moyenne & extrême raiſon, en ſorte que *b b* = *d d* — *d b*, & par conſequent *b b* + *d b.* = *d d.*

Appellant *m* la moitié de *d*, je dis que le quarré de *m* + *b* vaut 5 fois le quarré d'*m*.

Car *m* eſtant la moitié de *d*, *d d* = 4. *m m*. Et 2 *m b.* = *b d.*

Et ainſy le quarré de *m* + *b.*

Eſtant égal à *m m* + *b b* + 2. *m b.*

Donc à *m m* + *b b* + *d b.*

Donc à *m m* + *d d.*

Donc à *m m* + 4. *m m.*

Donc à 5. *m m.*

DOUZIEME THEOREME.

UNE ligne eſtant diviſée en moyenne & extrême raiſon, la ligne compoſée de la petite portion & de la moitié de la plus grande, peut 5 fois le quarré de la moitié de la plus grande. XXXVIII.

Soit comme auparavant la toute *d*, la plus grande partie *b*, & ſa moitié *n*, la plus petite *c*, en ſorte que *d c* = *b b.*

Or *d c* = *c c* + *c b.* Donc *c c* + *c b* = *b b.*

Cela eſtant, je dis que le quarré de *n.* + *c.* = 5. *n n.*

Car ce quarré de *n* + *c.*

Eſt égal à *n n* + *c c.* + 2. *n c.* Donc a *n n* + *c c.* + *b c.*

Donc a $nn + bb$. (puisque $bb = cc. + bc$)

Donc a $nn + 4. nn$. Donc a $5. nn$. Ce qu'il falloit demonstrer.

TREIZIEME THEOREME.

XXXIX. UNE ligne estant divisée en moyenne & extrême raison, le quarré de la toute, plus le quarré de la plus petite partie, valent 3 fois le quarré de la plus grande.

Soit comme auparavant $d = b. + c.$ & b moyenne entre d & c, en sorte que $bb = dc$. Et par consequent à $cc + cb$. Je dis que $dd + cc. = 3. bb$.

Car $dd = bb + cc + 2. cb$.

Donc $dd + cc. = bb. + 2. cc + 2. cb$.

Or $2. cc + 2. cb = 2. bb$. puisque $cc + cb = bb$.

Donc $dd + cc. = 3. bb$. Ce qu'il falloit demonstrer.

PREMIER PROBLEME.

XL. TROUVER le quarré égal à un rectangle donné.

Ou ayant l'aire d'un quarré, en trouver la racine.

Il ne faut que trouver la moyenne proportionelle entre les costez du rectangle donné.

Ou entre les deux lignes qui font l'aire donnée, comme si l'aire est supposée de 20 toises, ou pieds, ou pouces, entre un & 20, ou 2 & 10, ou 4 & 5.

SECOND PROBLEME.

XLI. AYANT le costé d'un rectangle, trouver quel doit estre l'autre, afin qu'il soit égal à un rectangle donné. Prendre le costé donné pour premier terme de la proportion, les deux costez du rectangle donné pour 2 & 3, le costé que l'on cherche se trouvera en trouvant une 4e proportionelle.

TROISIEME PROBLEME.

TROUVER un quarré égal à deux ou plusieurs quarrez donnez.

Soient les quarrez donnez bb, cc, dd, mettant b & c à angle droit, le quarré de l'hypothenuse de cet angle droit que je nomme f, sera égal à $bb + cc$. Et mettant de nouveau f & d à angle droit, le quarré de l'hypothenuse de cet angle sera égal à $ff. + dd$. Et par consequent à $bb + cc$,

→ *d d.* Et on peut conduire cela jusqu'à l'infini.

COROLLAIRE.

TROUVER le quarré égal à plusieurs rectangles donnez, XLII.
il ne faut que trouver les quarrez égaux à chacun de ces rectangles. Et puis on trouvera le quarré égal à tous ces quarrez.

QUATRIEME PROBLEME.

TROUVER un quarré à qui un quarré donné soit en rai- XLIII.
son donnée.

Soit le quarré donné *b b.*

La raison donnée *m. n.*

Ayant disposé *m. n. b.* & trouvé pour 4e proportionelle *d*, en sorte que

m. n :: b. d.

Et trouvant aussy la moyenne proportionelle entre *b* & *d*, que je suppose estre *c*, le quarré de *c* satisfera au Probleme. Car puisque $\frac{::}{::}$ *b. c. d.* par le....

b b. c c :: b. d.

Or *b. d :: m. n.*

Donc *b b. c c :: m. n.*

CINQUIEME PROBLEME.

DIVISER une ligne, en sorte que le quarré de la plus XLIV.
grande portion soit égal au rectangle de la toute & de la plus petite portion.

Ce Probleme a esté resolu (XI. 68.) quand on a appris à couper une ligne en moyenne & extrême raison : c'est-à-dire, en sorte que la toute soit à la plus grande portion, comme la plus grande portion à la plus petite.

SIXIEME PROBLEME.

DIVISER une ligne en sorte que le quarré de la plus XLV.
grande portion soit au rectangle de la toute & de la plus petite portion en raison donnée.

Soit la ligne donnée *d.*

La raison donnée *m. n*

Il faut trouver une ligne qui soit à *d* comme *m* à *n.* Ce qui se fera en transposant *m n* (*n. m.*) & mettant *d* pour 3 proportionelle. Car la 4e qu'on trouvera que j'appelle *c*,

ſera à d, comme m à n.

$n.\ m :: d.\ c.$ *Permutando* $c.\ d :: m.\ n.$

Cela eſtant fait, prendre la moyenne proportionelle entre c & d, que j'appelle p.

Et faire un cercle de l'intervalle de la moitié de c, dont p ſoit tangente.

Puis tirer une ſecante du point de p qui eſt hors le cercle juſqu'à la concavité du cercle en paſſant par le centre. La partie de cette ſecante qui eſt dans le cercle eſtant le diametre d'un cercle qui a la moitié de c pour raion, ſera égale à c, & celle qui eſt dehors le cercle que j'appelle x ſatisfera à la queſtion.

C'eſtadire que prenant x dans d,

$$x\,x.\ \ dd - xd :: \begin{cases} m. & n. \\ c. & d. \end{cases}$$

Car par la ſolution du Probleme precedent, l. XI. 68.

$x\,x = pp - xc.$

Et $pp = dc.$ parceque $\frac{m}{n}\ d.\ p.\ c.$

Donc $xx = dc - xc.$

Or $dc - xc.\ \ dd - xd :: c.\ d.$

Parceque le ſolide de la multiplication des extrêmes,

$dcd - xcd.$

Eſt égal au ſolide de la multiplication des moyens,

$dcd - xcd.$

Donc $xx.\ dd - xd :: \begin{cases} m. & n. \\ c. & d. \end{cases}$

SEPTIEME PROBLEME.

XLVI. TROUVER la racine d'un quarré dont on ne ſçait autre choſe, ſinon qu'eſtant comparé au quarré d'une ligne donnée, & à un rectangle d'une autre ligne donnée & de cette racine inconnüe, il eſt

Ou { 1. Egal au quarré plus le rectangle.
2. Egal au quarré moins le rectangle.
3. Egal au rectangle moins le quarré.

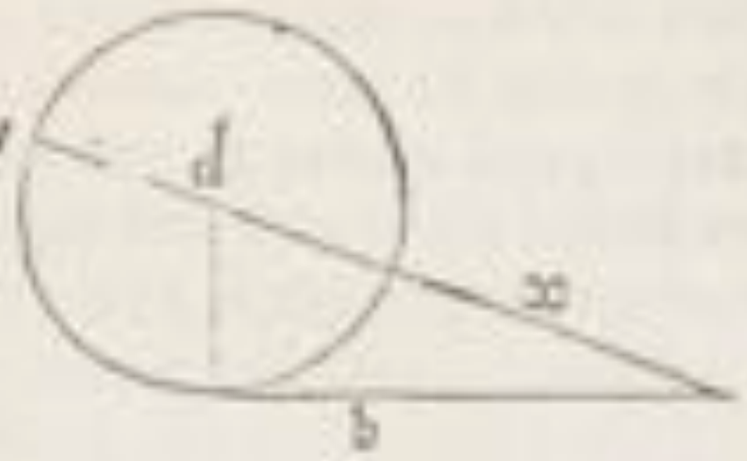
Ainſy la racine inconnüe eſtant nommée x ou y.

La ligne donnée qui fait le quarré, b.

Et l'autre ligne donnée coſté du rectangle, d.

Le 1er Cas ſera $yy = bb + yd$.
Le 2e Cas, $xx = bb - xd$.
Et le 3e, $\begin{cases} yy = yd - bb. \\ xx = xd - bb. \end{cases}$

CONSTRUCTION COMMUNE AU PREMIER ET AU SECOND CAS.



DECRIRE un cercle de l'intervale de la moitié de *d*, élevée perpendiculairement ſur *y* l'une des extremitez de *b*.

Et tirer de l'autre extremité de *b* une ſecante qui paſſant par le centre du cercle ſe termine à la circonference.

Cette ſecante entiere ſoit appellée *y*.

Qui ſera compoſée de ſa partie hors le cercle appellée *x*.

Et du diametre du cercle qui ſera *d* par la conſtruction.

Et *b* ſera tangente du cercle.

PREUVE DU PREMIER CAS.

Dans le 1er Cas, c'eſt *y* (c'eſtadire la ſecante entiere) qui eſt la racine que l'on cherche.

Car *y* eſtant égale à $x + d$.

$yy = yx + yd$. ℨ. 13.

Or $bb = xy$. ℨ. 15.

Donc $yy = bb + yd$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

Dans le 2e Cas, c'eſt *x* (c'eſtadire la partie de la ſecante qui eſt hors le cercle) qui eſt la racine que l'on cherche.

Car $x. b :: b. x + d$.

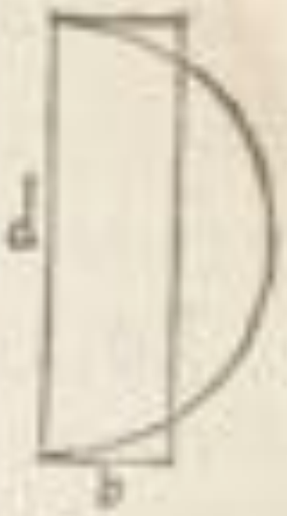
Donc $xx + xd = bb$.

Donc $xx = bb - xd$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

CONSTRUCTION ET PREUVE DU TROISIEME CAS.

Faiſant un cercle qui ait *d* pour diametre, & *b* pour tangente, il faut tirer une parallele à *d* de l'extremité de *b* qui eſt hors le cercle.

Que ſi cette parallele ne coupe point le cercle, parceque *b* eſt auſſy grande ou plus grande que la moitié de *d*, le Probleme eſt impoſſible.



Mais ſi elle le coupe tirant une tangente parallele à *b* de l'autre extremité de *d*, & prolongeant juſqu'à cette tangente la ſecante parallele à *d*, cette ſecante (égale à *d*) ſera compoſée de trois parties, de deux hors le cercle, qui eſtant égales (comme il eſt aiſé de le prouver en tirant du centre une perpendiculaire à cette ſecante) chacun s'appellera *x*, & celle de dedans le cercle plus une du dehors, c'eſtadire plus *x*, s'appellera *y*.

Cela eſtant ſuppoſé, je dis qu'*x* & *y* peuvent l'une & l'autre ſatisfaire au Probleme.

Car $xy = bb$, par le 4e Theoreme, & *d* eſtant égale à $x + y$.

$xx + xy = xd.$ }
Et $yy + xy = yd.$ } par 13. 5.
Donc $xx = xd - xy$ égal à bb.
Et $yy = yd - xy$ égal à bb.

Donc ſoit qu'on prenne *x* ou *y*, on ſatisfait au Probleme. Et le choix depend de ſçavoir d'ailleurs ſi la racine que l'on cherche doit eſtre plus petite que *b*. Car alors c'eſt *x*, au lieu que ſi elle doit eſtre plus grande, c'eſt *y*.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUINZIEME.

DE LA MESURE DE L'AIRE DES PARALLELOGRAMMES, DES TRIANGLES, ET AUTRES POLYGONES.

DEFINITIONS.

QUAND on parle des costez d'un parallelogramme, on entend les costez angulaires, amoins qu'on ne marque autre chose. 1.

On peut prendre lequel on veut de ces costez pour mesure de la longueur du parallelogramme, & alors ce costé s'appelle la base.

Et la perpendiculaire qui mesure la distance entre la base & son costé oppose s'appelle la hauteur du parallelogramme.

FONDEMENT DE LA MESURE DES PARALLELOGRAMMES.

PAR ce que nous avons dit au commencement du livre precedent, que dans les parallelogrammes non rectangles (à qui pour abreger nous donnerons simplement le nom 11.

de parallelogrammes) on pouvoit prendre lequel on vouloit de leurs costez angulaires pour mesure de l'une de leurs dimensions, qui est la longueur, mais que l'autre costé angulaire ne pouvoit pas en mesurer la largeur, parcequ'estant oblique il ne mesuroit pas la distance entre les costez opposez qui avoient esté pris pour la longueur. Et ainsy au lieu de cet autre costé angulaire, il faut prendre la perpendiculaire qui mesure la distance entre le premier costé & son oppose, pour avoir l'autre dimension de ces parallelogrammes.

Or delà il s'ensuit que le rectangle de la base & de cette perpendiculaire appellée la hauteur du parallelogramme est egal à ce parallelogramme, puisque n'ayant tous deux que deux dimensions, longueur & largeur, la longueur de l'un est égale à la longueur de l'autre, en ce qu'ils ont tous deux une base égale, & que la largeur de l'un est égale à la largeur de l'autre, puisqu'elle est mesurée par une perpendiculaire égale dans l'une & dans l'autre, quoiqu'elle soit en l'un des costez de la figure, scavoir dans le rectangle, & que dans l'autre elle n'y soit pas marquée.

Cela pourroit suffire pour ceux qui cherchent plûtost à s'assurer de la verité qu'à en pouvoir convaincre les autres.

Neanmoins pour plus grande certitude on peut employer deux voies pour prouver cette proposition: l'une nouvelle appellée la *Geometrie des indivisibles*: & l'autre ancienne & plus commune. Nous expliquerons l'une & l'autre.

NOUVELLE METHODE APPELLE'E LA GEOMETRIE DES INDIVISIBLES.

111. Quoique les Geometres conviennent que la ligne n'est pas composée de points, ny la surface de lignes, ny le solide de surfaces, neanmoins on a trouvé depuis peu de temps un art de démontrer une infinité de choses, en considerant les surfaces comme si elles estoient composées de lignes, & les solides de surfaces.

Je n'ay rien veu de ce qui en a eſté écrit : mais voicy ce qui m'en eſt venu dans l'eſprit, en ne m'arreſtant maintenant qu'à ce qui regarde les ſurfaces.

Le fondement de cette nouvelle Geometrie eſt de prendre pour l'aire d'une ſurface la ſomme des lignes qui la rempliſſent, de ſorte que deux ſurfaces ſont eſtimées égales, quand l'une & l'autre eſt remplie par une ſomme égale de lignes égales, ſoit que chacune de celles d'une ſomme ſoit égale à chacune de celles de l'autre ſomme, ſoit qu'il ſe faſſe une compenſation, en ſorte par exemple, que deux d'une ſomme qui pourront eſtre inegales entr'elles, ſoient égales à deux priſes enſemble de l'autre ſomme qui ſeront égales entr'elles.

Mais pour ne pas donner lieu à beaucoup de paralogiſmes où l'on tombe aiſément en ſe ſervant de cette methode, ſi on n'y prend bien garde, il faut remarquer,

1. Qu'afin que des lignes ſoient cenſées remplir un eſpace, il faut qu'elles ſoient toutes paralleles entr'elles, ſoit qu'elles ſoient droittes pour remplir un eſpace rectiligne, ſoit qu'elles ſoient circulaires pour remplir des cercles ou des portions de cercle. Il eſt facile d'en voir la raiſon. Et ainſy il faut bien prendre garde de ne pas employer pour cela des lignes qui ne ſeroient pas paralleles en l'une ou l'autre de ces deux manieres.

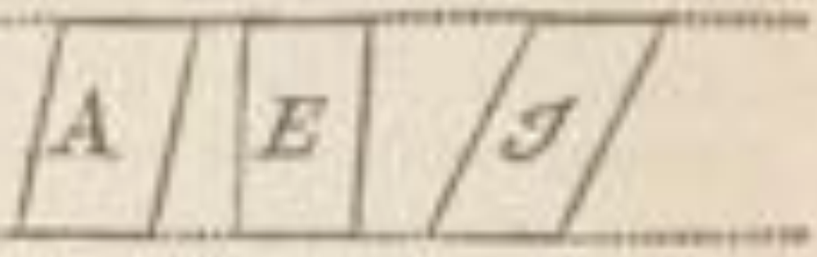
2. Afin qu'une ſomme de lignes ſoit cenſée égale à une autre ſomme de lignes, il ne faut pas s'imaginer qu'on puiſſe dire le nombre qu'en contient chaque eſpace (car il n'y a point de ſi petit eſpace qui n'en contienne un nombre infini) mais ce qui fait qu'on appelle ces ſommes égales, c'eſt que toutes les lignes d'un coſté & d'autre coupent perpendiculairement deux lignes égales. Par exemple ſi la ligne *b* eſt égale à la ligne *m*, le nombre infini des lignes qui peuvent couper perpendiculairement *b* en tous ſes points, eſt cenſé égal au nombre infini de celles qui peuvent auſſy couper perpendiculairement *m*, eſtant viſible qu'il n'y a point de raiſon pourquoy on en puiſ-

se faire passer davantage par l'une que par l'autre. Car les aliquotes pareilles de l'une & de l'autre estant toujours égales jusques à l'infini, on pourra toujours de part & d'autre tirer par tous les points de ces divisions autant de lignes paralleles entr'elles, & qui contiendront toujours de part & d'autre un espace parallele égal. Et c'est proprement delà que depend la verité de cette nouvelle methode (& non que le contina soit composé d'indivisibles) ce qui l'a fait même appeller par quelques uns, la Geometrie de l'infini.

Il faut donc bien prendre garde que les lignes (par le rapport desquelles on dit qu'une somme de ces lignes paralleles qui rempliſſent un espace, est égale à une autre somme) les coupent perpendiculairement. Et c'est où il y a plus de danger de se tromper. Sur ces fondemens voicy les Theoremes que l'on établit.

PREMIER THEOREME.

IV. Tous les parallelogrammes de base égale & de même hauteur sont égaux entr'eux.



Soient divers parallelogrammes, comme *A*, *E*, *I*, enfermez dans le même espace parallele (comme ils le peuvent estre, puisqu'ils sont supposez de même hauteur) & ayant tous les bases égales, il est clair que toutes les paralleles qui peuvent remplir cet espace, rempliront tous ces parallelogrammes, & qu'ainsy ils seront tous remplis d'une somme égale de lignes, cette somme estant mesurée dans tous par la perpendiculaire qui mesure la hauteur de ces rectangles, qui est la même en tous, puisqu'ils sont de même hauteur.

De plus, toutes ces lignes estant paralleles à la base dans tous ces rectangles, sont égales en tous, puisqu'elles sont en tous égales à la base, & que les bases sont supposées égales.

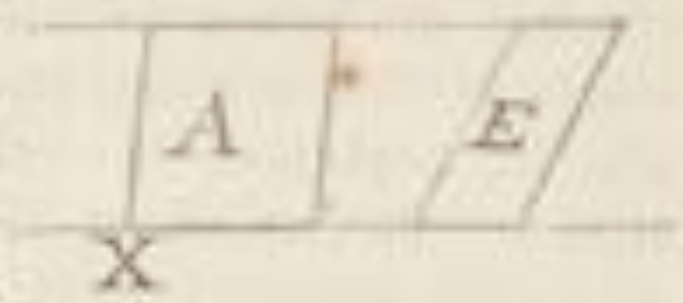
Donc il y a par tout somme égale de lignes égales.

Donc ils sont tous égaux selon le fondement de la Geometrie des indivisibles.

SECOND THEOREME.

Tous les parallelogrammes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. V.

C'est une suitte du precedent.



Soient les parallelogrammes *A*, *E* entre mêmes paralleles, & qui ayent des bases inégales; en quelques aliquotes que je divise la base d'*A*, en tirant les paralleles au costé par tous les points de la division, il y aura dans *A* autant de parallelogrammes égaux entr'eux, que cette base aura de parties égales: de sorte que si elle avoit esté divisée en 7 parties, dont j'appelleray chacune *x*, il y aura dans *A* 7 parallelogrammes qui auront chacun *x* pour base.

Que si appliquant *x* à la base d'*E*, il se trouve qu'il y soit trois fois, ou sans reste, ou avec reste, tirant encore de tous les points de la division des lignes paralleles au costé d'*E*, il est visible qu'il y aura dans *E* autant de parallelogrammes qui auront *x* pour base, qu'*x* se sera trouvé dans la base d'*E*. Et si ç'a esté sans reste, ces trois parallelogrammes rempliront *E* sans reste: & si avec reste, il restera aussy un parallelogramme qui aura ce reste pour base.

Or les parallelogrammes qui dans *E* ont *x* pour base sont égaux à ceux qui dans *A* ont aussy *x* pour base, par le precedent Theoreme.

Donc par la definition de l'égalité des raisons *A* est à *E* en même raison que la base d'*A* à la base d'*E*, puisqu'autant que les aliquotes quelconques de la base d'*A* sont contenues dans la base d'*E*, les aliquotes pareilles d'*A* sont contenues dans *E*: si sans reste, sans reste; si avec reste, avec reste.

TROISIEME THEOREME.

Les triangles de même hauteur & de même base sont égaux. Car estant mis entre les mêmes paralleles, comme devant, & ayant tous *b* pour base, toutes les lignes paral- VI.

leles qui rempliront cet espace, rempliront ces triangles, & chacune de ces lignes tirées tout le long de l'espace d'un point quelconque de la perpendiculaire *m n*, ce qui sera enfermé dans chaque triangle sera toûjours égal, comme il a esté prouvé dans le livre XIII. & X. 20. quoique toujours de plus petit en plus petit montant vers le sommet.

Donc une somme égale de lignes egales chacune à chacune de chaque triangle, remplit tous ces triangles.

Donc ces triangles sont égaux.

QUATRIEME THEOREME.

VII. Les triangles de même hauteur sont entr'eux comme les bases.

C'est la même chose que le 2e Theoreme, & qui se prouve de la même sorte, excepté qu'on employe icy au lieu de parallelogrammes des triangles qui ont pour base, & qui aboutissent de part & d'autre au sommet de chaque triangle dont ils sont parties. Or ces triangles qui ont *x* pour base dans l'un & dans l'autre triangle, sont aussy de même hauteur dans l'un & dans l'autre, & par consequent ils sont égaux. Ensuite dequoy il ne faut appliquer que ce que nous avons dit pour la demonstration du 2e Theoreme.

CINQUIEME THEOREME.

VIII. Le cercle est égal au triangle rectangle, qui a pour costez de son angle droit le raion du cercle, & une ligne egale à la circonference du cercle.

Soit le cercle *d*, le raion *d b*, la tangente *b c*, égale à la circonference & l'hypothenuse *d c*.

Si on tire de tous les points du raion des circonferences concentriques au cercle, elles rempliront tout le cercle, &

elles seront paralleles entr'elles, en la maniere que les circonferences le peuvent estre, & coupées perpendiculairement par le raion.

Si on tire aussy de tous ces mêmes points du raion par lesquels auront passé ces circonferences des paralleles à *b c*, jusques en *d e*, ces paralleles rempliront le triangle. Et ainsy la somme de ces circonferences & de ces paralleles sera égale, estant determinée de part & d'autre par les points du méme raion, estant clair que l'on ne sçauroit tirer une circonference par aucun point, qu'on ne tire aussy une parallele à *d c* par ce même point, & au contraire.

Or la circonference & la parallele tirées du même point sont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra: par exemple celle du point *b*. Car

$$b\,d.\ d\,f :: \begin{cases} \text{circonf. } b. & \text{circonf. } f. \\ b\,c. & f\,g. \end{cases}$$

Donc circonf. *b*, circonf. *f* :: *b c*. *f g*.

Donc *alternando* circonf. *b*. *b c* :: circonf. *f*. *f g*.

Or par l'hypothese la circonference *b*, qui est celle du cercle, est égale au costé du triangle *b c*.

Donc la circonference passant par le point *f*, est égale à *f g*, parallele à *b c*.

AVERTISSEMENT.

Je n'en diray pas davantage de cette nouvelle methode. Il est aisé de juger que ces 5 Theoremes sont de suffisans fondemens pour mesurer sans peine toutes les figures rectilignes, & en trouver les egalitez & les rapports, sur tout en y joignant les principes qui ont esté établis dans les 3 premiers livres. IX.

METHODE COMMUNE.

LEMME OU AXIOME.

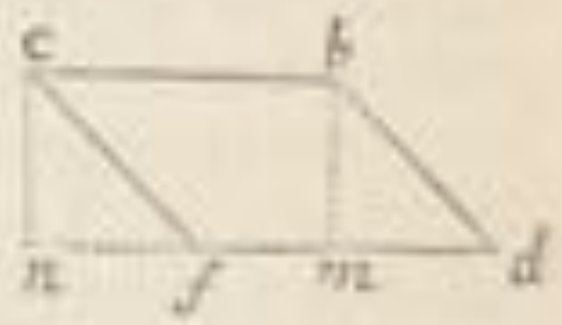
DEUX triangles tout-égaux sont égaux. C'est à dire que lorsque les angles d'un triangle sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun, & les costez égaux aussy chacun à chacun, ces deux triangles comprennent un espace égal; en quoy consiste ce qu'on appelle égalité dans les figures. X.

Cela est clair de soy même, estant visible que deux triangles de cette sorte ne different que de position.

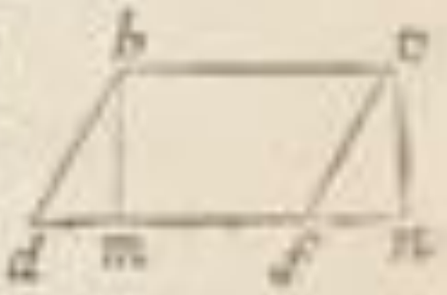
PROPOSITION FONDAMENTALE DE LA MESURE DES PARALLÉLOGRAMMES, ET DES TRIANGLES.

XI. Tout parallelogramme eſt égal au rectangle de ſa hauteur & de ſa baſe.

Soit le parallelogramme *b c d f*, tirant ſes perpendiculaires *b m* & *c n* ſur la baſe *d f*, prolongée autant qu'il eſt neceſſaire, je dis que le rectangle *b c m n*, qui eſt le rectangle de la baſe & de la hauteur de *b c d f*, eſt égal à *b c d f*.



Car *b c* eſtant égale tant à *d f* qu'à *m n*, *d f* eſt égale à *m n*. Donc oſtant *m f*, commune de l'une & de l'autre, *d m* demeurera égale à *f n*. Et ainſy *b d* eſtant égale à *c f*, & *b m* à *c n*, les triangles *b d m* & *c f n* ſont égaux par le Lemme precedent. Et ainſy ajoûtant à l'un & à l'autre le trapeze commun *b m c f*, *b c d f* ſera égal à *b m c n*. Ce qu'il falloit demonſtrer.



PREMIER COROLLAIRE.

XII. Les parallelogrammes de même hauteur & de baſe égale ſont égaux.

Car ils ont tous pour leur meſure commune le même rectangle de cette hauteur & de cette baſe.

SECOND COROLLAIRE.

XIII. Les parallelogrammes de même hauteur ſont comme leurs baſes; de baſe égale, ſont comme leurs hauteurs.

Car chacun eſt égal au rectangle de ſa baſe & de ſa hauteur. Or les rectangles de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes. Il en faut donc dire de même des parallelogrammes qui leur ſont égaux.

On peut auſſy prouver ce 2e Corollaire par le premier de la même façon qu'on a déja fait en demonſtrant le 2e Theoreme de la premiere methode.

TROISIEME COROLLAIRE.

XIV. La raiſon de deux parallelogrammes quelconques eſt toûjours

toujours composée de la raison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base.

Car les parallelogrammes sont toujours entr'eux comme les rectangles de leur hauteur & de leur base.

QUATRIEME COROLLAIRE GENERAL.

XV. Tout ce qui a esté dit de la raison des rectangles par la comparaison de leurs costez angulaires, est vray des parallelogrammes, en comparant la hauteur à la hauteur, & la base à la base. Cela est clair par la raison du precedent Corollaire.

DES PARALLELOGRAMMES EQUIANGLES.

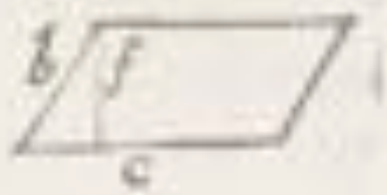
THEOREME GENERAL.

XVI. Les parallelogrammes equiangles sont entr'eux en raison composée de leurs costez angulaires, de même que s'ils estoient rectangles.

Car tous les parallelogrammes sont entr'eux en raison composée de celle de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

Or quand ils sont equiangles, la raison des costez obliques sur la base de chacun est la même que celle de la hauteur à la hauteur. Parceque les lignes également inclinées sont en même raison que leurs perpendiculaires, qui est ce qui mesure cette hauteur. X. 11.

Exemple. Soient $b\,c$ & $m\,n$ deux parallelogrammes equiangles, dont les hauteurs soient f & p.



Par les precedens Corollaires,

$b\,c.\ m\,n :: c.\ n. \dot{+} f.\ p.$

Or $f.\ p :: b.\ m.$ par X. 11.

Donc $b\,c.\ m\,n :: c.\ n \dot{+} b.\ m.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE GENERAL.

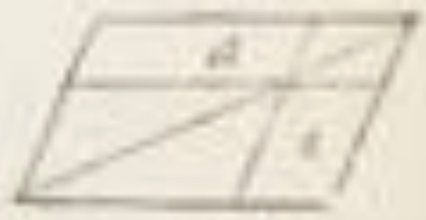
XVII. Tout ce qui a esté dit de la raison des rectangles entr'eux par la comparaison de leurs costez angulaires, est vray aussy des autres parallelogrammes equiangles par la même comparaison de leurs costez angulaires.

C'eſtadire par exemple, que s'ils ſont ſemblables, le grand coſté du premier eſtant au grand coſté du ſecond, comme le petit coſté du premier au petit coſté du ſecond, ils ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Si leurs coſtez ſont reciproques (c'eſtadire, ſi le grand coſté du premier eſt au grand coſté du ſecond, comme le petit coſté du ſecond eſt au petit coſté du premier) ils ſont egaux. Et ainſy de tout le reſte.

COROLLAIRE PARTICULIER.

XVIII. Lorsque deux lignes paralleles chacune aux coſtez angulaires d'un parallelogramme ſe coupent en un même point de la diagonale, il ſe fait 4 parallelogrammes, dont les deux qui ne ſont point coupez par la diagonale, comme *A* & *E*, ſont egaux.



Car ils ſont equiangles, puiſqu'il y a un angle de l'un qui eſt oppoſé au ſommet à un angle de l'autre.

Et il eſt viſible par XIII. 21. que le grand coſté d'*a* eſt au grand coſté d'*e*, comme le petit coſté d'*e* eſt au petit coſté d'*a*.

Je ſçay bien que cela ſe prouve ordinairement d'une autre maniere plus palpable, qui eſt que la diagonale partage par la moitié tant le parallelogramme total, que chacun de ceux qui ſont autour de cette diagonale. Donc la moitié du total dans laquelle eſt *a* eſtant égale à la moitié dans laquelle eſt *e*, & oſtant de chacune de ces deux moitiez deux triangles egaux, les deux parallelogrammes qui demeureront ſeront egaux.

DES PARALLELOGRAMMES SEMBLABLES.

PREMIER THEOREME.

XIX. Deux parallelogrammes ſemblables (c'eſtadire qui eſtant equiangles ont leurs coſtez proportionels) ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues, comme il vient d'eſtre dit §. 17.

SECOND THEOREME.

XX. Les coſtez homologues de deux parallelogrammes ſem-

blables, eſtant en même raiſon que les coſtez homologues de deux autres parallelogrammes ſemblables entr'eux, ces 4 parallelogrammes ſont proportionels.

Soient les deux premiers ſemblables *A* & *E*, & les deux derniers *I* & *O*; ſi la raiſon d'entre les coſtez d'*A* & *E* eſt *x. y*, & de même entre les coſtez d'*I* & *O*, je dis que

A. E :: I. O.

Car $\left\{\begin{matrix} A. & E \\ I. & O \end{matrix}\right\}$ :: *xx. yy.*

DES TRIANGLES

LEMME.

XXI. TOUT triangle eſt la moitié d'un parallelogramme de même baſe & de même hauteur.

Soit le triangle *b c d*. Si de *b* on tire *b f*, égale & parallele à la baſe *c d*, & que du point *f* on tire *f d*; je dis 1. que *b. c. d. f.* eſt un parallelogramme. Car *c d* & *b f* ſont paralleles & égales par la conſtruction, & par conſequent *b c* & *f d* ſont auſſy paralleles & égales, par VI. 28.

Et par conſequent *b d*, qui eſt la diagonale de ce paral. lelogramme, le diviſe en deux triangles egaux *b c d* & *b f d*. Donc *b c d* eſt la moitié de ce parallelogramme.

Or il eſt viſible que ce triangle & ce parallelogramme ſont de même hauteur, puiſqu'ils ſont enfermez entre les mêmes paralleles *b f* & *c d*, & qu'ils ont la même baſe, ſçavoir *c d*.

Donc tout triangle eſt la moitié d'un parallelogramme de même baſe & de même hauteur.

THEOREME GENERAL.

XXII. TOUT triangle eſt egal au rectangle de la moitié de ſa baſe, & de toute ſa hauteur; ou de la moitié de ſa hauteur & de toute ſa baſe.

Car il eſt la moitié d'un parallelogramme de ſa baſe & de ſa hauteur. Or ce parallelogramme eſt egal au rectangle de ſa baſe & de ſa hauteur.

Donc prenant la moitié de la baſe & toute la hauteur,

ou la moitié de la hauteur & toute la base, on a un rectangle qui vaut la moitié du rectangle de toute la base & de toute la hauteur. Donc on a un rectangle égal au triangle.

PREMIER COROLLAIRE.

XXIII. LES triangles de même hauteur & de base égale, sont égaux.

Car ils sont tous égaux au même rectangle, qui est celuy de la moitié de leur base & de toute leur hauteur.

SECOND COROLLAIRE.

XXIV. LES triangles de même hauteur sont comme leurs bases, & d'égale base comme leurs hauteurs.

Car ils sont tous égaux à des rectangles, qui estant de même hauteur sont comme leurs bases, & d'égale base comme leurs hauteurs.

On peut aussy prouver ce second Corollaire par le premier, de la même façon qu'on a demonstré le 4e Theoreme de la premiere methode.

TROISIEME COROLLAIRE.

XXV. LA raison de deux triangles quelconques est toujours composée de la raison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base. Car ces triangles sont toujours entr'eux comme les rectangles de la moitié de leur base & de toute leur hauteur, qui ont entr'eux cette raison composée.

QUATRIEME COROLLAIRE GENERAL.

XXVI. TOUT ce qui a esté dit de la raison des rectangles par la comparaison de leurs costez, est vray des triangles par la comparaison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base.

DES TRIANGLES EQUIANGLES OU SEMBLABLES.

PREMIER THEOREME.

XXVII. TOUS les triangles equiangles, & par consequent semblables, sont en raison doublée de la raison de leurs costez homologues.

Car par les Corollaires precedens les triangles sont en-

tr'eux en raiſon compoſée de la raiſon de la baſe à la baſe, & de la hauteur à la hauteur.

Or quand ils ſont equiangles, les coſtez ſur la baſe de part & d'autre ſont chacun à chacun en même raiſon que les perpendiculaires du ſommet à la baſe qui en meſure la hauteur. X. 12.

Et par conſequent ils ſont en raiſon compoſée de celle de la baſe à la baſe, & d'un coſté à un coſté.

Or eſtant equiangles, la baſe eſt à la baſe comme chacun des coſtez à chacun des coſtez.

Et par conſequent leur raiſon eſt compoſée de deux raiſons égales, ce qui s'appelle raiſon doublée.

Exemple. Soient triangles ſemblables *b c d* & *m n o*, dont *b f* & *m p* meſurent les hauteurs.

b c d. m n o :: c d. n o. :: b f. m p.

Or *b c. m n*
b d. m n :: *b f. m p.*
c d. n o

Donc tous les coſtez ayant la même raiſon, chacun à chacun, & avec les perpendiculaires, la raiſon de ces triangles *b c d* & *m n o* ne peut eſtre compoſée de la raiſon de la baſe *c d* & *n o*, & de celle des hauteurs *b f*, *m p*, qu'ils ne ſoient en raiſon doublée de l'une de ces raiſons, puiſqu'elles ſont égales; & par conſequent auſſy de la raiſon des autres coſtez homologues, qui eſt la même.

SECOND THEOREME.

XXVIII. Si les coſtez homologues de deux triangles ſemblables ſont en même raiſon que les coſtez homologues de deux autres triangles ſemblables entr'eux, ces 4 triangles ſont proportionels. C'eſt la même choſe que ce qu'on a demonſtré des parallelogrammes. 5. 20.

DES FIGURES SEMBLABLES.

PREMIER THEORIME.

XXIX. Deux figures ſemblables quelconques ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Car par XIII. 26. elles peuvent eſtre partagées chacune en autant de triangles, tels que ceux d'une part eſtant ſemblables à ceux de l'autre, chacun à chacun, les coſtez homologues de deux ſemblables ſeront en même raiſon que ceux de deux autres quelconques ſemblables.

Ainſy ſuppoſant qu'elles ſoient partagées chacune en 4 triangles qui ſoient

A. E. I. O.

a. e. i. o.

Par le precedent Theoreme *A. a :: E. e :: I. i :: O. o.*

Donc par II. 35. *A + E + I. + O. a + e + i + o :: A. a.*

C'eſtadire que la plus grande des figures ſemblables qui comprend ces 4 triangles *A. E. I. O.* ſera à la plus petite qui comprend les 4 triangles *a. e. i. o.* comme l'un de ces triangles eſt à ſon ſemblable.

Or ces triangles ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs baſes, & les baſes de ces deux triangles ſemblables ſont coſtez homologues de ces deux figures (comme on a veu XIII. 26.)

Donc ces figures ſemblables ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

COROLLAIRE.

XXX. LES figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrez de leurs coſtez homologues.

Car par le Theoreme precedent les figures ſemblables ſont entr'elles en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Or les quarrez de ces coſtez homologues ſont auſſy entr'eux en raiſon doublée de ces coſtez qui ſont leurs racines.

SECOND THEOREME.

XXXI. SI l'on conſtruit ſur l'hypothenuſe & ſur les deux coſtez d'un angle droit des figures ſemblables quelconques, celle qui ſera conſtruitte ſur l'hypothenuſe ſera égale aux deux qui ſeront conſtruittes ſur les coſtez.

Soit le grand coſté de l'angle droit *b*, le petit *c*, l'hypothenuſe *h*.

La figure construitte sur *b* soit nommée *A*. sur *c*. *E*, & sur *h*. *I*.

Par le Theoreme precedent,

A. *bb* :: *E*. *cc* :: *I*. *hh*.

Donc *A* + *E*, *bb* + *cc* :: *I*. *hh*. (par II. 44)

Donc *alternando*,

A + *E*. *I*. :: *bb* + *cc*. *hh*.

Or *bb* + *cc*. = *hh*. par XIV. 16.

Donc *A* + *E*. = *I*. Ce qu'il falloit demonstrer.

AVERTISSEMENT.

On voit par là que cette proposition quoique plus generale que celle des quarrez, n'a deu estre traittée qu'après celle des quarrez, parceque le quarré est la vraie & naturelle mesure de la dimension des autres figures planes. XXXII.

DES FIGURES REGULIERES.

PREMIER THEOREME.

XXXIII.

Tout polygone est égal au rectangle du raion droit (qui est la perpendiculaire du centre à l'un des costez (& de la moitié de son perimetre, ou au triangle qui a pour hauteur ce raion droit, & pour base ce perimetre.

Car tout polygone regulier comprend autant de triangles tout-égaux, qu'il a de costez, lesquels ont tous pour mesure de leur hauteur la perpendiculaire du centre au costé qui leur sert de base.

Donc chaque triangle est égal au rectangle de ce raion droit qui est leur hauteur, & de la moitié de la base.

Or toutes ces moitiez des bases de ces triangles prises ensemble font la moitié du perimetre, puisque toutes les bases font tout le perimetre.

Donc le rectangle de cette perpendiculaire & de la moitié du perimetre est égal à tous ces triangles; & par consequent au polygone.

Et c'est la même chose du triangle qui a pour hauteur

cette perpendiculaire, & pour base tout le perimetre, puisqu'il est égal à ce rectiligne. Outre qu'il est aisé de prouver qu'il est égal à tous les triangles que contient le polygone, estant de même hauteur que chacun, & sa base estant égale à toutes les bases des autres prises ensemble.

SECOND THEOREME.

XXXIV. PAR l'analogie du cercle à un polygone infini, le cercle est égal au rectangle du raion & de la moitié de la circonference, ou au triangle qui a pour hauteur le raion, & pour base toute la circonference.

Nous l'auons prouvé par la premiere methode, qui est la Geometrie des indivisibles. On le peut aussy prouver par la voie d'Archimede, en montrant que le rectangle du raion & de la moitié de la circonference est plus grand que tout polygone inscrit au cercle, & plus petit que tout circonscrit.

Il est plus grand que tout inscrit, parceque l'inscrit par le Theoreme precedent est égal au rectangle de la perpendiculaire du centre au costé, & de la moitié du perimetre. Or cette perpendiculaire est plus petite que le raion du cercle, puisqu'elle est terminée dans le cercle, & le perimetre du polygone inscrit est plus petit que la circonference qui la comprend, par la maxime d'Archimede. V. 6.

Donc le rectangle du raion du cercle & de la moitié de la circonference est plus grand que tout polygone inscrit.

Et il est plus petit que tout polygone circonscrit, parceque le polygone circonscrit est égal au rectangle du raion du cercle (qui est alors la même chose que la perpendiculaire au costé) & de la moitié de son perimetre, lequel perimetre est plus grand que la circonference du cercle, puisqu'il la comprend, selon la même maxime d'Archimede. Donc &c.

TROISIEME THEOREME.

XXXV. LES figures regulieres de même espece sont entr'elles en raison doublée de celle de leurs raions droits.

Car elles sont égales chacune au rectangle du raion droit,

droit, & de la moitié du perimetre. Or le raion droit eſt au raion droit comme le perimetre au perimetre, par XII. 16. Donc ces rectangles (auſquels ces figures regulieres ſont égales) eſtant ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublée de celle du raion droit, qui eſt l'un de leurs coſtez.

PREMIER COROLLAIRE.

Les cercles ſont entr'eux en raiſon doublée de celle de leurs raions, ou de leurs diametres, ce qui eſt la même choſe. XXXVI.

SECOND COROLLAIRE.

Les cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres. Car les uns & les autres ſont en raiſon doublée de celle de leurs diametres. XXXVII.

QUATRIEME THEOREME.

Les triangles ſemblables inſcrits en des cercles ſont entr'eux en raiſon doublée des diametres de ces cercles: ou, ce qui eſt la même choſe, comme les cercles, ou comme les quarrez des diametres. XXXVIII.

Car les cordes de divers cercles qui ſoutiennent les angles inſcrits égaux, ſont entr'elles comme les diametres, par X. 24. & 25.

Donc les coſtez de ces triangles ſemblables qui ſoutiennent les mêmes angles (qui ſont ceux qu'on appelle homologues) ſont entr'eux comme les diametres.

Or ces triangles eſtant ſemblables, ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Donc ils ſont auſſy en raiſon doublée de ces diametres.

Donc ils ſont auſſy entr'eux comme les cercles & comme les quarrez des diametres.

CINQUIEME THEOREME.

Les figures ſemblables inſcrittes dans les cercles ſont entr'elles en raiſon doublée des diametres. XXXIX.

Car comme il a eſté prouvé 5. & XIII. 26. ces figures ſemblables ſe peuvent reſoudre en triangles ſemblables, chacun d'une figure à chacun de l'autre, qui ſeront tous inſcrits dans le cercle.

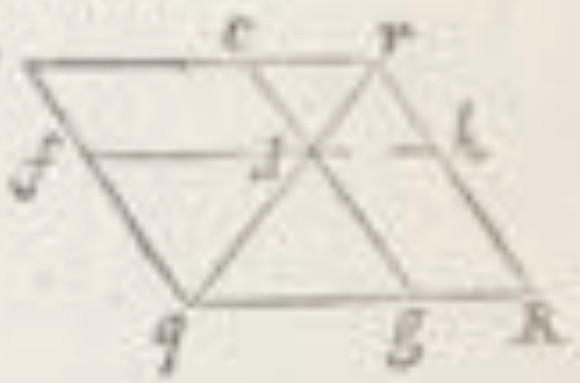
Donc tous les triangles d'une figure ſont à tous ceux de

l'autre (& par conſequent une figure eſt à l'autre) comme un des triangles d'une figure à un ſemblable de l'autre. Or par le Theoreme precedent ces deux triangles ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublée des diametres. Donc les figures ſemblables inſcrittes dans les cercles ſont entr'elles en raiſon doublée des diametres. Donc auſſy comme les cercles. Donc auſſy comme les quarrez des diametres.

PREMIER PROBLEME.

XL. DECRIRE ſur un coſté donné le parallelogramme égal & equiangle à un parallelogramme donné.

Soit le parallelogramme donné *b c d f*. Soit continuée *c d* juſques à *g*, en ſorte que *d g* ſoit égale au coſté donné.



Soit auſſy continuée *b f* juſques à ce que *f q* ſoit égale à *d g*. Soit menée de *q* par *d* une indefinie.

Soit prolongée *b c*, juſqu'à ce qu'elle rencontre en *r* cette indefinie.

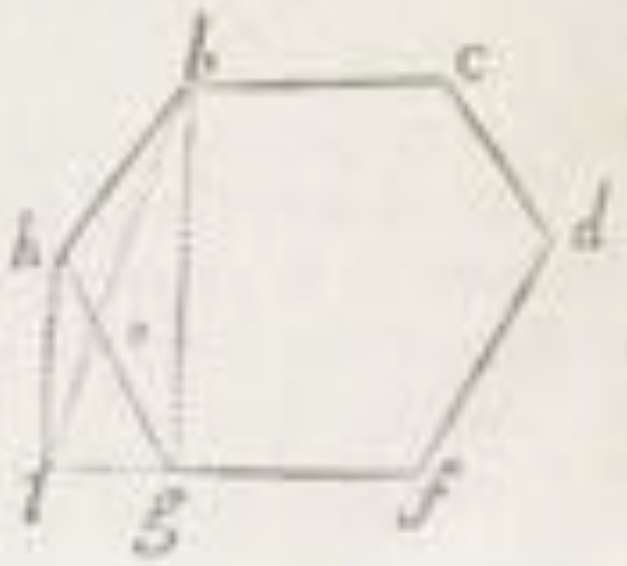
Soit prolongée *q g* juſques en *k*, en ſorte que *q k* ſoit égale à *b r*, joignant les points *r k*, & prolongeant *f d* juſques en *h*, où elle rencontre *k*.

Le parallelogramme *d h k g* ſera égal & equiangle au donné *b c d f*.

SECOND PROBLEME.

XLI. FAIRE une figure égale à une donnée qui ait moins d'un coſté que la donnée. C'eſt à dire que ſi la donnée en a 6, on en cherche une qui n'en ait que 5, & ſi elle en a 5, on en cherche une qui n'en ait que 4: de ſorte que par là on pourra venir juſqu'au triangle.

Soit propoſé de reduire l'exagone *b c d f g h* en un pentagone qui luy ſoit égal.



Ayant prolongé *f g*, je tire la ligne *b g*.

Puis de *b* je tire ſur *g* prolongée *b l* parallele à *b g*.

Et de *b* je tire *b l*; Je dis que le pentagone *b c d f l* est égal à l'exagone donné.

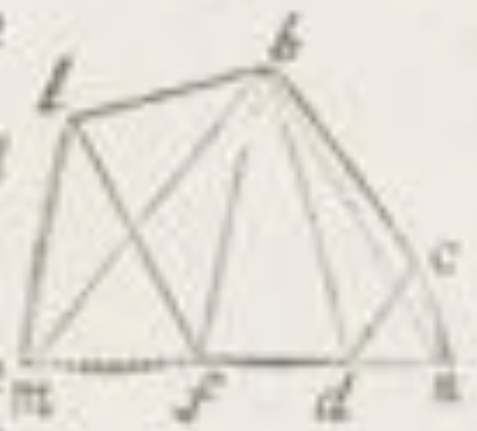
Car les triangles *b l b* & *b l g* sont égaux, parcequ'ils sont sur la même base & entre mêmes paralleles.

Donc ostant *b l o*, commun à l'un & à l'autre, *b o b* demeurera égal à *l g o*, tout le reste est commun à l'exagone & au pentagone.

On reduira de même le pentagone *b c d f l* à un trapeze.

Ayant mené la ligne *b f*, mener de *l* sur *d f* prolongée *l m* parallele à *b f*.

Puis tirer *b m*.



On prouvera de la même maniere que l'on vient de faire, que le trapeze sera égal au pentagone.

Que si de *b d* on tire une ligne.

Et de *c* sur *f d* prolongée de ce costé là *c n*, paralle à *b d*.

Et tirant *b n*, le triangle *b m n* sera égal tant au trapeze *b c d m*, qu'au pentagone *b c d f l*. Et ainsy l'exagone aura esté reduit en un pentagone, & le pentagone en un trapeze, & le trapeze en un triangle.

AVERTISSEMENT ET CONCLUSION.

XLII. *Je laisse d'autres Problemes qui sont tres faciles à resoudre par les principes qui ont esté établis. Outre que n'ayant entrepris ces Elemens que pour donner un essay de la vraie methode qui doit traitter les choses simples avant les composées, & les generales avant les particulieres, je pense avoir satisfait à ce dessein, & avoir montré que les Geometres ont eu tort d'avoir negligé cet ordre de la nature en s'imaginant qu'ils n'avoient autre chose à observer, sinon que les propositions precedentes servissent à la preuve des suivantes: au lieu qu'il est clair, ce me semble, par cet essay que les elemens de Geometrie estans reduits selon l'ordre naturel, peuvent estre aussy solidement demontrez, & sont sans comparaison plus aisez à concevoir & à retenir.*

FIN.

SOLVTION
D'UN DES PLUS CELEBRES
ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE,
APPELLE' COMMUNEMENT
LES QVARREZ
MAGIQUES.

SOLUTION D'UN DES PLUS CELEBRES ET DES PLUS DIFFICILES PROBLEMES D'ARITHMETIQUE, APPELLE' COMMUNEMENT LES QUARREZ MAGIQUES.

§. 1. CE QUE C'EST QUE CE PROBLEME.

I. AYANT un quarré de cellules pair ou impair.

Et l'ayant remply de chiffres ou selon l'ordre naturel des nombres 1. 2. 3. 4. &c.

Ou de quelqu'autre progression arithmetique que ce soit, comme 2. 5. 8. 11. 14. &c.

Disposer tous ces chiffres dans un autre quarré de cellules semblables à celuy là, en sorte que tous les chiffres de chaque bande soit de gauche à droit, soit de haut en bas, soit mesme les deux diagonales, fassent toujours la mesme somme.

Soient pris pour exemples les quarrez d'onze pour les impairs, & de douze pour les pairs, comme on les peut voir dans les figures qui sont à la fin de ce Traitté.

§. 2. CONSIDERATIONS SUR LES QUARREZ NATURELS.

II. J'APPELLE quarrez naturels ceux où les chiffres sont disposez en progression arithmetique en commençant par les plus petits.

Sur les Quarrez impairs.

III. DANS le milieu du quarré impair il y a une cellule qui en est le centre. Le chiffre qui est dans cette cellule soit nommé centre & marqué par *c*.

IV. DE tous les autres chiffres la moitié ſont plus petits & les autres plus grands que le centre. Les uns ſoient appellez ſimplement *petits* & les autres *grands*.

V. LES cellules autour du centre ſoient appellées 1re enceinte.

Autour de la premiere enceinte, 2e enceinte.
Autour de la ſeconde enceinte, 3e enceinte.
Et ainſy de ſuite.

VI. LES enceintes 1. 3. 5. 7. 9. &c. ſoient appellées *enceintes impaires*.

Les 2. 4. 6. 8. 10. &c. *enceintes paires*.

VII. IL eſt important de conſiderer dans chaque enceinte où ſont les petits chiffres, & où ſont les grands.

Les petits ſont premierement dans toute la bande d'enhaut, qui eſt de 3. dans la 1re enceinte, de 5 dans la 2e, de 7 dans la 3e &c.

Secondement dans la bande à gauche les plus hauts juſques à celuy qui eſt vis à vis le centre *inclusive*.

Troiſiémement dans la bande à droit les plus hauts juſques à celuy qui eſt vis à vis le centre *inclusive*.

SUR LES QUARREZ PAIRS.

VIII. IL n'y a point de cellule qui ſoit au centre. Mais on doit prendre pour centre la moitié de la ſomme que font le premier & le dernier chiffre.

Et cette ſomme entiere s'appellera 2. *c*.

IX. LA moitié des bandes, ſçavoir celles qui ſont les plus hautes contiennent les petits chiffres, & les plus baſſes les grands.

X. LES quatre cellules du milieu ſont la 1re enceinte.
Les cellules autour de ces quatre, la 2e enceinte.
Celles autour de la ſeconde, la 3e enceinte.
Et ainſy de ſuitte.

XI. LES enceintes 1. 3. 5. 7. 9. &c. ſoient auſſy appellées les enceintes impaires.

Et les 2. 4. 6. &c. les paires.

XII. LES petits chiffres ſont,

1. Dans la bande d'enhaut de chaque enceinte.

2. Au coſté gauche depuis la bande d'enhaut juſqu'à la bande où commencent les grands chiffres.

3. Et de même au coſté droit.

§. 3. PREPARATION.

LE plus grand myſtere de la ſolution de ce Probleme XIII.
conſiſte à marquer par lettres quelques uns des petits chiffres de chaque bande.

QUARREZ IMPAIRS.

DANS toutes les enceintes generalement marquer le XIV.
coin à gauche de la bande d'enhaut par *r*.
Le coin à droit de la même bande par *s*.
Le milieu de cette bande par *m*.
La cellule à gauche qui eſt vis à vis le centre par *a*.
MARQUER de plus dans les enceintes impaires XV.
Deux cellules dans la bande d'enhaut également diſtantes, l'une d'*r*, l'autre d'*s*, par les mêmes lettres accentuées.
L'une par *b*.
L'autre par *d*.
Et la cellule à gauche au deſſous d'*e* par *o*.
Et au coſté droit celle qui eſt au deſſus de la cellule qui eſt vis à vis le centre par *p*.

DANS LES QUARREZ PAIRS.

NE rien marquer dans les premieres & ſecondes en- XVI.
ceintes.
DANS toutes les autres generalement marquer XVII.
Le coin à gauche d'enhaut par *e*.
A droit par *f*.
Le plus bas des petits nombres à droit par *n*.
Le plus bas des petits nombres à gauche par *g*.
MARQUER de plus dans les enceintes impaires, à com- XVIII.
mencer par la 3e (qui eſt celle qui a 6 cellules dans la bande d'enhaut)
4 cellules dans la bande d'enhaut, deux par { *r*. *d*.
& deux par { *d*. *h*.

A gauche marquer la cellule au deſſous d'*e* par *s*.
Et à droit celle au deſſus d'*a* par *y*.

§. 4. MAXIMES
POUR LA DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

XIX. Deux chiffres, l'un *petit*, l'autre *grand*, également diſtans du centre, & qui ſe joignent par une ligne paſſant par le centre font une ſomme égale à deux fois le centre.

XX. Quand un *petit* chiffre eſt marqué par une lettre, ſon *grand* ſoit nommé (quand on le voudra exprimer) par la majuſcule de la même lettre, quoiqu'elle ne ſoit pas marquée.

Ainſy *e E* font deux fois le centre.
Et de même *a. A*, ou *ß. B*, ou *o. O*.

SECONDE MAXIME.

XXI. Quatre chiffres dans la même bande, dont le premier eſt autant diſtant du 1, que le 3 du 4 ſont en proportion arithmetique.

Et par conſequent la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

XXII. *e. i* :: *i. o*. Donc *e. o* = *i. i*.

D'où il s'enſuit que par tout où ſont enſemble *i. i*, ou bien *i. ȉ*, ou leurs majuſcules *E O*, on peut ſuppoſer, lorſqu'il s'agit de trouver des égalitez avec d'autres chiffres, que c'eſt comme ſi c'eſtoit *e. o*, *E. O*, parceque ſi l'égalité s'y trouve en ſuppoſant que c'eſt *e. o*, elle ne ſera pas troublée en remettant *i. ȉ*, en leur place, qui valent autant que *e. o*.

XXIII. *e. m* :: *m. o*. Donc *e. o* = *m. m*.

DANS LES QUARREZ PAIRS.

XXIV. *e. a* :: *ß. A*. Donc *e. A* = *a. ß*.

Pour trouver *A*. voyez 5. 20.

TROISIEME MAXIME.

XXV. Lorsque 4 cellules font un parallelogramme, rectangle ou non rectangle, leurs 4 chiffres ſont en proportion arithmetique. Et par conſequent la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

DANS LES QUARREZ IMPAIRS.

$e.m :: a.\ell$. Donc $e.\ell = m.a$. XXVI.

$m.\theta :: a.\ell$. Donc $m.\ell = \theta.a$. XXVII.

$a.m :: \ell.\beta$. Donc $a.\beta^{e} = m.e$. XXVIII.

DANS LES PAIRS.

$e.\theta :: \beta.\tilde{a}$. Donc $e.a = \theta.\beta$. XXIX.

$a.\beta :: \theta.\gamma$. Donc $a.\gamma = \beta.\theta$. XXX.

§. 5. METHODE POUR DISPOSER MAGIQUEMENT LE QUARRE' NATUREL.

CETTE methode conſiſte en fort peu de regles ; les unes generales, les autres particulieres, ſelon leſquelles il faut tranſpoſer les chiffres du quarré naturel dans le magique. XXXI.

PREMIERE REGLE GENERALE.

IL faut diſpoſer les chiffres par enceintes, ceux d'une enceinte en l'enceinte ſemblable, & tout le ſoin qu'on doit avoir d'abord, eſt de ſçavoir où l'on doit mettre les petits nombres de l'enceinte, parceque la ſituation des *petits* donne celle des *grands* ſelon les deux regles ſuivantes. XXXII.

SECONDE REGLE GENERALE.

QUAND on a placé un *petit* chiffre dans un coin, il faut placer ſon *grand* dans le coin diagonalement oppoſé. XXXIII.

Ainſy *a* eſtant placé dans le coin gauche de la bande d'enhaut, il faudra mettre *A* dans le coin droit de la bande d'embas.

TROISIEME REGLE GENERALE.

HORS les coins il faut placer les grands vis à vis des petits de la bande oppoſée. XXXIV.

C'eſtpourquoy il faut obſerver de ne mettre jamais deux petits en des bandes oppoſées vis à vis l'un de l'autre.

COROLLAIRE DE CES REGLES.

LES chiffres eſtant diſpoſez ſelon ces regles,

Il s'enſuit, 1. Que les chiffres de deux bandes oppoſées pris enſemble, valent autant de fois *c* qu'il y a de chiffres XXXV.

dans les deux bandes. Car un petit & un grand valent deux fois *c*. Or il y a autant de *petits* que de *grands*. Donc

XXXVI. Il s'enfuit, 2. Que lorſqu'on a prouvé que les chiffres d'une bande après cette diſpoſition valent autant de fois le centre qu'il y a de chiffres, cette bande eſt égale à ſon oppoſée.

XXXVII. Il s'enfuit, 3. Que quand il y a autant de petits chiffres dans une bande que dans l'oppoſée, & que la ſomme des uns eſt égale à la ſomme des autres, c'eſt une marque aſſurée que la bande eſt égale à la bande.

La preuve en eſt facile ſans que je m'arreſte à l'expliquer.

QUATRIEME REGLE GENERALE.

XXXVIII. Il ne faut ſe mettre en peine d'abord que de placer les petits chiffres qui ſont marquez par des lettres: car cela fait, le reſte ſe trouve ſans peine par cette raiſon.

Dans la bande d'enhaut, dans quelques quarrez & quelques enceintes que ce ſoit, outre les cellules marquées par des lettres:

Ou il ne reſte rien,

Ou il reſte toûjours des cellules non marquées en nombre pairement pair, C'eſtadire 4. 8. 12. 16. &c.

Et de plus, ils ſont toujours 4 à 4 en proportion arithmetique.

Donc prenant les extrêmes & les mettant dans une bande, & ceux du milieu dans l'oppoſée, ils ne troubleront point l'égalité qui y eſtoit déja par les chiffres marquez de lettres.

XXXIX. Il en eſt de même des deux coſtez droit & gauche. Car les petits chiffres qui reſtent (s'il en reſte outre les marquez) ſont toûjours en nombre pairement pair 4. 8. 12. 16. &c. & de 4 en 4 en proportion arithmetique.

Donc comme cy deſſus.

Il n'y a donc plus à ſe mettre en peine que de diſpoſer les lettres. Ce qui ſe fait par les regles particulieres.

§. 6. REGLES PARTICULIERES POUR LES QUARREZ IMPAIRS.

Il y a deux regles pour ces quarrez, l'une pour les enceintes impaires, & l'autre pour les paires. XL.

POUR LES ENCEINTES IMPAIRES.

Au coin gauche de la bande d'enhaut a mettre *a*.

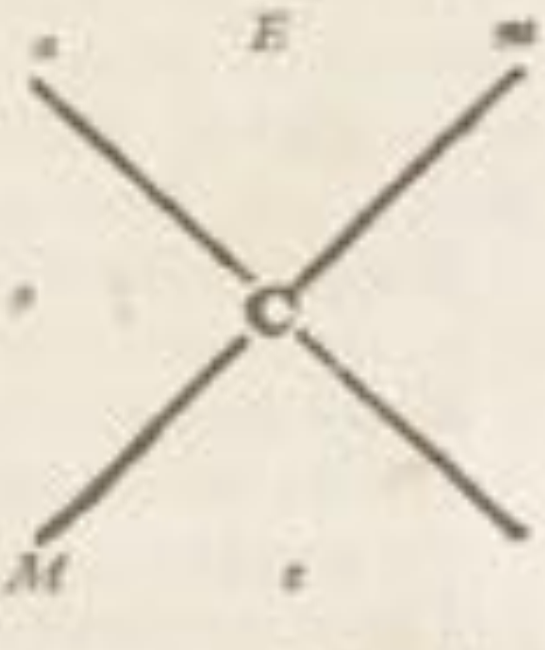
Au coin droit de la même bande, *m*.

A la bande d'embas en quelque cellule hors les coins, *e*.

A la bande de coſté du coſté d'*a*, *e*.

DEMONSTRATION.

IL eſt requis premierement à demonſtrer que dans la bande d'enhaut *a. E. m.* valent trois fois le centre. D'où il s'enſuivra qu'elle ſera égale à la bande d'embas par 36. XLI.



Or par (16.) *e. c* = *a. m.*

Donc *e. c. E* = *a. E. m.*

Or *e. c. E* = 3 *c.* par 20.

Donc *a. E. m* = 3 *c.* Ce qu'il falloit demonſtrer.

REQUIS ſecondement à demonſtrer que *a. e. M* valent 3 *c.* D'où il s'enſuivra que cette bande ſera égale à l'oppoſée par 36. XLII.

Or par (17) *a. e* = *m. c.*

Donc *m. c. M* = *a. e. M.*

Or *m. c. M* = 3 *c.* par 20.

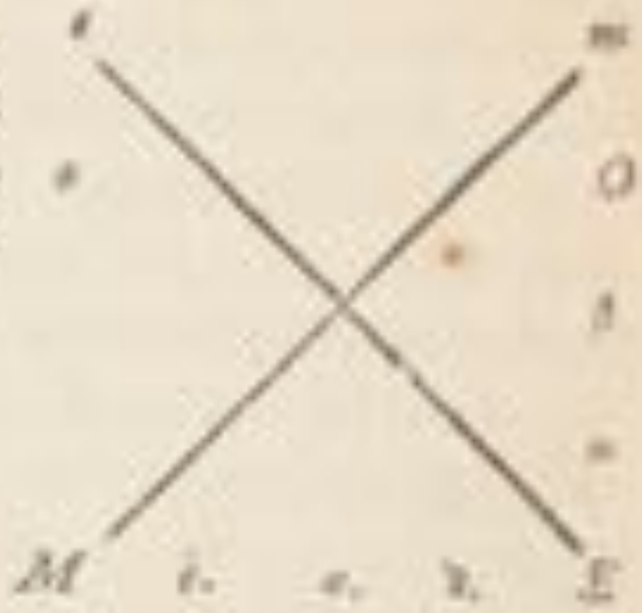
Donc *a. e. M* = 3 *c.*

POUR LES ENCEINTES IMPAIRES.

IL ſuffira de les figurer tout d'un coup. XLIII.

DEMONSTRATION.

XLIV. REQUIS premierement à demonstrer que la bande d'embas *M. i. a. i. E* = 5 *c.* C'estadire qu'elle vaut ensemble cinq fois le centre.



Ce qui se prouve ainsy.

Par (27) *a. o* = *m. c.*
Donc *c. a. o* = *c. m. c.*
Donc *c. m. c. M. E.* = *i. a. i. M. E.* par (22.)
Or *c. m. c. M. E.* = 5 *c.* par 20.
Donc *M. i. a. i. E.* = 5 *c.* Ce qu'il falloit demonstrer.

XLV. REQUIS secondement à demonstrer que dans la bande droitte *m. O. ê. m. E* = 5 *c.*

Ce qui se prouve ainsy.

c. o = *m. m.* par (25.)
Donc *c. o. c* = *m. m. c.*
Or *m. m. c* = *m. ω. ê.*
Parce que *m. c* = *ω. ê.* par 28.
Donc *c. o. c* = *m. ω. ê.*
Donc *c. o. c. E. O* = *m. ω. ê. E. O.*
Or *c. o. c. E. O* = 5 *c.* par 29.
Donc *m. O. ω. ê. E* = 5 *c.* Ce qu'il falloit demonstrer.

§. 7. POUR LES QUARREZ PAIRS.

XLVI. ON laisse à part les deux premieres enceintes, qui ont leur regle particuliere.

POUR LES AUTRES ENCEINTES IMPAIRES.

XLVII. LA disposition s'en figure ainsy.

DEMONSTRATION.

REQUIS 1. à demonſtrer que les ſix chiffres de la bande d'enhaut dont quatre ſont *petits*, & deux *grands* qui viennent de *i* & *à* qu'on a mis embas, valent ſix fois le centre. Ce qui ſe prouve ainſy.

a. A. e. O. e. E = 6 *e.* par (10)

Or ces ſix lettres ſont égales aux ſix, *a. E. a. e. O. ß.*

Car oſtant les mêmes qui ſe trouvent de part & d'autre, ſçavoir *a. e. O. E.* il ne reſtera d'un coſté que *A. e*: & de l'autre que *a. ß.*

Or par (14) *A. e* = *a. ß.*

Donc les ſix lettres *a. E. a. e. O. ß* = 6 *e.*

REQUIS 2. à demonſtrer que *a. e. γ* = *ſ. i. à*. Car ſi cela eſt, les grandes ſeront auſſy égales aux grandes, & le tout au tout par (37.) XLIX.

Suppoſant donc que *i. à* ſoient *e. e.* (5. 22.) & oſtant *e* & *e* de part & d'autre, reſte d'une part *a. γ.* & de l'autre *ß. e.* qui ſont des ſommes égales par (30)

Donc *a. e. γ* = *ß. i. à.*

Donc la bande égale à la bande par (37)

POUR LES ENCEINTES PAIRES.

LA diſpoſition en eſt tres facile, & ſe figure ainſy. L.

DEMONSTRATION.

ELLE eſt ſi facile par 22. 29. & 37. que je ne m'amuſe pas à l'expliquer. LI.

Cette enceinte ſe peut encore faire en tranſpoſant les coins &c.

§. 8. REGLE PARTICULIERE POUR LA PREMIERE ET SECONDE ENCEINTE DES QUARREZ PAIRS.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

LII. Ces deux enceintes ne sont autre chose que le quarré de 4 qui fait 16, dans lequel il y a deux sortes de bandes. Quatre qui sont la seconde enceinte, & qu'on peut appeller les bandes *exterieures*. Et quatre autres qui coupent le quarré, & qu'on peut appeller *transversales*: sçavoir la 2e & la 3e de haut en bas.

Et la 2e & la 3e de gauche à droit.

LIII. Ce qui est cause que ces deux enceintes ne se peuvent pas disposer par les regles des autres, c'est que les 4 chiffres du milieu faisant en divers sens quatre bandes de deux chacune en ligne droitte, & deux en diagonale, les bandes droittes ne sçauroient faire des sommes égales, mais seulement les diagonales.

LIV. Or ces 16 chiffres se pouvant disposer en tant de manieres que cela est presque incroyable; sçavoir en plus de 20 millions de millions.

20:922:789:872:000.

Il n'y en a proprement que 16 qui soient magiques, c'estadire où toutes les bandes faffent des sommes égales (car je ne compte pas pour differentes dispositions celles qui ne viennent que de la differente situation du même quarré.)

LV. Et voicy comme on les trouve.

Il faut prendre toujours les chiffres 4 à 4 en cet ordre.

1. Les quatre du dedans ou interieurs.

2. Les quatre coins exterieurs.

3. Les deux du milieu de la bande d'enhaut, avec les deux du milieu de celle d'embas.

4. Les deux du milieu de la bande à gauche, avec les deux du milieu de celle à droit.

Or chacun de ces chiffres pris ainsy 4 à 4 (& qu'on nommera dans la suite par 1. 2. 3. 4.) peuvent

Ou

Ou eſtre laiſſez en leur même place ; ce qui ſe marquera par *e.*

Ou eſtre tranſportez en croix S. André ; ce qui ſe marquera par *c.*

Ou directement de gauche à droit ; ce qui ſe marquera par *g.*

Ou directement de haut en bas ; ce qui ſe marquera par *h.*

LVI. Suivant ces remarques, & ſe ſouvenant de ce que ſignifient les 4 nombres (1. 2. 3. 4.) & les 4 lettres (*e. c. g. h.*) les deux tables ſuivantes feront trouver ſans peine les 16 diſpoſitions magiques du quarré de 4 : ou ce qui eſt la même choſe des deux premieres enceintes de tous les quarrez pairs.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1.	*e*	*e*	*e*	*e*	*c*	*c*	*c*	*c*
2.	*e*	*c*	*g*	*h*	*e*	*c*	*g*	*h*
3.	*c*	*g*	*c*	*g*	*h*	*e*	*h*	*e*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*e*	*e*	*g*

	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.
1.	*g*	*g*	*g*	*g*	*h*	*h*	*h*	*h*
2.	*e*	*c*	*g*	*h*	*e*	*c*	*g*	*h*
3.	*h*	*e*	*h*	*e*	*c*	*g*	*c*	*g*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*e*	*e*	*g*

LVII. De ces 16 diſpoſitions magiques du quarré de 4. il y en a deux, ſçavoir la 1re & la 6e, où on ne change que 8 chiffres.

Deux, ſçavoir la 11e & la 16e, où on les change tous 16.

Et 12 où on en change 12.

LVIII. Voicy un exemple de la 6e disposition, & un autre de la 16e. On laisse à trouver les autres.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

DEMONSTRATION.

LIX. CHAQUE bande tant exterieure que transversale du quarré de quatre (ou du quarré composé des 2 premieres enceintes de tous les quarrez pairs) est de 4 chiffres en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

Soit donc, par exemple, la somme des extrêmes de la bande d'enhaut appellée *b*, la somme des moyens qui luy est égale pourra estre aussy appellée *b*, & ainsy toute la bande sera *b* + *b*.

Et par la même raison la bande d'embas pourra estre *f* + *f*.

Cela estant on peut faire ces bandes égales par deux voies.

La 1re en transposant les extrémes de l'une à l'autre sans changer les moyens. Car alors l'une deviendra *f* + *b*.

Et l'autre *b* + *f*. & ainsy seront égales.

La 2e en transposant les moyens sans changer les extrêmes. Car alors l'une deviendra *b* + *f*. & l'autre *f* + *b*. & ainsy seront encore égales.

Il ne faut qu'appliquer cecy à chacune de ces 16 dispositions, & l'on verra que les transpositions que l'on y fait les doivent rendre magiques.

§. 9. DIVERS MOYENS DE VARIER LES QUARREZ MAGIQUES.

De ces moyens j'omets ceux qui sont trop faciles à trouver, & je n'en marqueray que deux qui sont plus impor-

rans, & qu'on a pratiquez dans les deux exemples qu'on a donnez de quarrez magiques.

PREMIER MOYEN.

LX. Nous avons supposé qu'on transporteroit les chiffres de la premiere enceinte du quarré naturel dans la 1re enceinte du quarré magique; & ceux de la 2e dans la 2e; & de la 3e dans la 3e &c. Mais cela n'est pas necessaire. Car pour les chiffres marquez de lettres, il suffit de ne les transporter que d'une enceinte impaire à une autre quelconque qui soit impaire, comme de la 5e à la 1re; & d'une enceinte paire à une paire, comme de la 6e à la 4e.

SECOND MOYEN.

LXI. Et pour tous les autres chiffres non marquez de lettres, on les peut transporter de quelque enceinte que ce soit à quelque autre enceinte que l'on voudra; pourvu qu'on en prenne quatre ensemble qui soient en proportion arithmetique, & qu'on ait soin de mettre les extrémes dans une bande, & les moyens dans la bande oppoſée.

CONCLUSION.

LXII. Je pense pouvoir conclure de tout cecy, qu'il n'est pas possible de trouver une methode plus facile, plus abregée & plus parfaitte pour faire les quarrez magiques, qui est un des plus beaux Problemes d'Arithmetique.

Ce qu'elle a de singulier, c'est 1. qu'on n'écrit les chiffres que deux fois.

2. Qu'on ne tâtonne point, mais qu'on est toujours assuré de ce que l'on fait.

3. Que les plus grands quarrez ne sont pas plus difficiles à faire que les plus petits.

4. Qu'on les varie autant que l'on veut.

5. Qu'on ne fait rien dont on n'ait demonstration.

6. A quoy on peut ajoûter, que cette methode est si generale que sans y rien changer on pourroit resoudre sans aucune peine par la même voie cet autre Problême qui paroist encore plus merveilleux.

Ayant mis dans un quarré naturel tous les nombres que

l'on voudra en progression geometrique, comme 1. 2. 4. 8. 16. &c. les disposer de telle sorte dans un quarré semblable, que tous les nombres de chaque bande multipliez les uns par les autres facent une somme égale à celle que font les nombres de toute autre bande multipliez aussy les uns par les autres.

En voicy un exemple dans le quarré de trois.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

FIN de l'Explication des Quarrez Magiques.

QVARRÉ NATVREL DE XI.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

QVARRÉ MAGIQVE DE XI.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
39	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

QVARRÉ NATVREL DE XII.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

QVARRÉ MAGIQVE DE XII.

118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	70
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27