

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

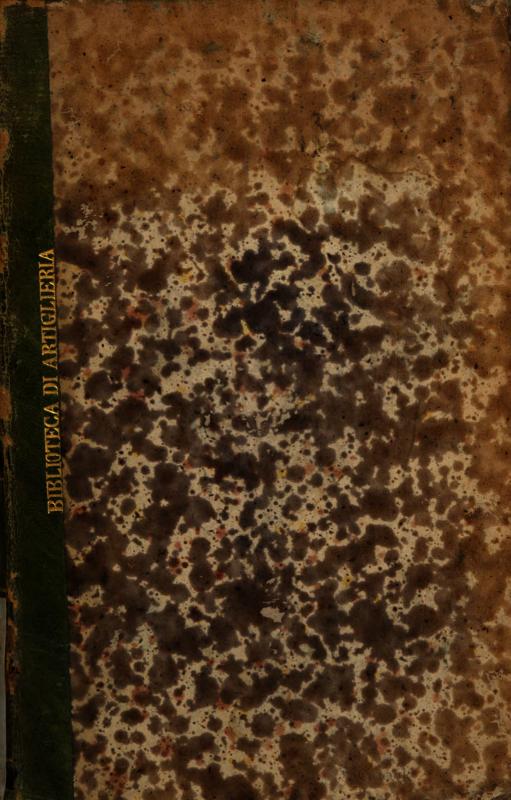
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

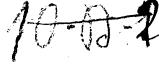
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + Ne pas procéder à des requêtes automatisées N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + Rester dans la légalité Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse http://books.google.com









109

B. Prov.

1521 .

OEUVRES D'ARCHIMEDE.

TOME SECOND



1MPRIMERIE DE BACHELIER, Rue du Jardinet, nº 12.

Digitized by Google

(13575

OEUVRES D'ARCHIMÈDE,

TRADUITES LITTÉRALEMENT,

AVEC UN COMMENTAIRE,

PAR F. PEYRARD,

Professeur de Mathématiques et d'Astronomie au Lycée Bonaparte;

SUIVIES

D'UN MÉMOIRE DU TRADUCTEUR, SUR UN NOUVEAU MIROIR ARDENT,

Et d'un autre Mémoire de M. DELAMBRE, sur l'Arithmétique des Grecs.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT

ET ADOPTÉ PAR LE COUVERNEMENT POUR LES BIBLIOTHÈQUES DES LYCÉES.

Dédie à Sa Majeste l'Empereur et Pooi.



SECONDE ÉDITION.

TOME II.

Édition publiée en M DCCC VIII.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES AUGUSTINS, Nº 55.

C. 1844



Digitized by Google

OEUVRES D'ARCHIMEDE.

DES HÉLICES.



 ${f A}$ rchimède a Dosithée, Salut.

Tu me pries sans cesse d'écrire les démonstrations des théorêmes que j'avois envoyés à Conon. Tu as déjà plusieurs de ces démonstrations dans les livres qu'Héraclides t'a portés; et je t'en envoie quelques autres qui se trouvent dans celui-ci. Ne sois pas étonné si j'ai différé si long-temps de mettre au jour les démonstrations de ces théorêmes. La cause en a été que j'ai voulu laisser le temps de les trouver aux personnes versées dans les mathématiques, qui auroient desiré s'occuper de cette recherche. Car combien y

TOME II.

a-t-il de théorêmes en géométrie qui paroissent d'abord ne présenter aucun moyen d'être connus et qui dans la suite deviennent évidens? Conon mourut sans avoir eu le temps de trouver ces démonstrations, et a laissé à ces théorêmes leur obscurité; s'il eût vécu, il les eût trouvées sans doute; et · par ces découvertes et par plusieurs autres, il eût reculé les bornes de la géométrie. Car nous n'ignorons pas que cet homme avoit une capacité et une industrie admirables dans cette science. Plusieurs années se sont écoulées depuis sa mort, et je ne sache pas cependant qu'il se soit trouvé personne qui ait résolu quelqu'un de ces problèmes. Je vais les exposer tous les uns après les autres. Il est arrivé que deux problèmes qui ont été mis séparément dans ce livre sont tout-à-fait défectueux. De sorte que ceux qui se vantent de les avoir tous découverts sans en apporter aucune démonstration sont réfutés par cela seul, qu'ils confessent avoir trouvé des choses qui ne peuvent l'être d'aucune manière (α).

Je vais te faire connoître quels sont ces problèmes; de quels problèmes sont les démonstrations que je t'ai envoyées, et de quels problèmes sont celles qui se trouvent dans ce livre.

1. Une sphère étant donnée, trouver une surface plane égale à la surface de cette sphère.

Ce problème est résolu dans le livre que j'ai publié sur la sphère; car puisqu'on a démontré que la surface d'une sphère est quadruple d'un des grands cercles de cette sphère, il est facile de voir comment il est possible de trouver une surface plane égale à la surface d'une sphère.

- 2. Un cône ou un cylindre étant donné, trouver une sphère égale à ce cône ou à ce cylindre.
- 3. Couper une sphère par un plan, de manière que ses segmens aient entre eux une raison donnée.
- 4. Couper une sphère donnée par un plan, de manière que les surfaces des segmens aient entre elles une raison donnée.
- 5. Un segment sphérique étant donné, le rendre semblable à un segment sphérique donné (6).
 - 6. Etant donnés deux segmens sphériques

de la même sphère ou de différentes sphères, trouver un segment sphérique qui soit semblable à l'un d'eux et qui ait une surface égale à celle de l'autre.

7. Retrancher un segment d'une sphère donnée, de manière que le segment et le cône qui a la même base et la même hauteur que ce segment aient entre eux une raison donnée: cette raison ne peut pas être plus grande que celle de trois à deux.

Héraclides t'a porté les démonstrations de tous les problèmes dont nous venons de parler. Ce qui avoit été mis séparément après ces problèmes est faux. Voici ce qui venoit ensuite:

1. Si une sphère est coupée par un plan en deux parties inégales, la raison du plus grand segment au plus potit est doublée de celle de la plus grande surface à la plus petite.

Ce qui est évidemment faux d'après ce qui t'a déjà été envoyé (de la Sph. et du Cyl. 2. 9.).

2. Ceci étoit encore ajouté aux problèmes dont nous avons parlé. Si une sphère est coupée en deux parties inégales par un plan perpendiculaire sur un de ses diamètres, la raison du plus grand segment au plus petit est la même que celle du plus grand segment du diamètre au plus petit.

Car la raison du plus grand segment de la sphère au plus petit est moindre que la raison doublée de la plus grande surface à la plus petite; et plus grande que la raison sesquialtère (de la Sph. et du Cyl. 2. 9.).

3. On avoit enfin ajouté le problême suivant qui est encore faux: Si un diamètre d'une sphère quelconque est coupé de manière que le quarré construit sur le plus grand segment soit triple de celui qui est construit sur le plus petit; et si le plan qui est conduit par ce point perpendiculairement sur le diamètre, coupe la sphère, le plus grand segment sera le plus grand de tous les segmens sphériques qui ont une surface égale.

Cela est évidemment faux d'après les théorèmes que je t'ai déjà envoyés; car il est démontré que la demi-sphère est le plus grand de tous les segmens qui ont une surface égale (de la Sph. et du Cyl. 2. 10.).

On proposoit ensuite ce qui suit relativement au cône:

1. Si une parabole, le diamètre restant

immobile, fait une révolution de manière que le diamètre soit l'axe, la figure décrite par la parabole s'appellera conoïde.

- a. Si un plan touche un conoïde, et si un autre plan parallèle au plan tangent retranche un segment du conoïde, le plan coupant s'appellera la base du segment qui est produit, et le point où le premier plan touche le conoïde, s'appellera son sommet.
- 3. Si la figure dont nous venons de parler est coupée par un plan perpendiculaire sur l'axe, il est évident que la section sera un cercle: mais il faut démontrer que le segment produit par cette section est égal aux trois moitiés du cône qui a la même base et la même hauteur que ce segment.
- 4. Si deux segmens d'un conoïde sont retranchés par des plans conduits d'une manière quelconque, il est évident que les sections seront des ellipses, pourvu que les plans coupans ne soient pas perpendiculaires sur l'axe: mais il faut démontrer que ces segmens sont entre eux comme les quarrés des droites menées de leurs sommets au plan coupant parallèlement à l'axe.

Je ne t'envoie pas encore ces démonstrations.

On proposoit enfin ce qui suit, relativement aux hélices. Ce sont des problèmes qui n'ont rien de commun avec ceux dont nous venons de parler. J'en ai écrit pour toi les démonstrations dans ce livre. Voici ce que l'on proposoit:

- 1. Si une ligne droite, une de ses extrémités restant immobile, tourne dans un plan avec une vîtesse uniforme jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, et si un point se meut avec une vîtesse uniforme dans la ligne qui tourne, en partant de l'extrémité immobile, ce point décrira une hélice dans un plan. Je dis que la surface qui est comprise par l'hélice, et par la ligne droite revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir est la troisième partie d'un cercle qui a pour centre le point immobile. et pour rayon la partie de la ligne droite qui a été parcourue par le point dans une seule révolution de la droite.
- 2. Si une droite touche l'hélice à son extrémité dernière engendrée, et si de l'extrémité immobile de la ligne droite qui a tourné et qui est revenue au même endroit d'où

elle étoit partie, on mène sur cette ligne une perpendiculaire qui coupe la tangente; je dis que cette perpendiculaire est égale à la circonférence du cercle.

- 3. Si la ligne droite qui a tourné et le point qui s'est mu dans cette ligne continuent de se mouvoir en réitérant leurs révolutions, et en revenant au même endroit d'où ils avoient commencé à se mouvoir, je dis que la surface comprise par l'hélice de la troisième révolution est double de la surface comprise par l'hélice de la seconde; que la surface comprise par l'hélice de la quatrième est triple; que la surface comprise par l'hélice de la cinquième est quadruple; et qu'enfin les surfaces comprises par les hélices des révolutions suivantes sont égales à la surface comprise par l'hélice de la seconde révolution multipliée par les nombres qui suivent ceux dont nous venons de parler. Je dis aussi que la surface comprise par l'hélice de la première révolution est la sixième partie de la surface comprise par Phélice de la seconde.
- 4. Si l'on prend deux points dans une hélice décrite dans une seule révolution, si

de ces points on mène des droites à l'extrémité immobile de la ligne qui a tourné, si l'on décrit deux cercles qui aient pour centre le point immobile et pour rayons les droites menées à l'extrémité immobile de la ligne qui a tourné, et si l'on prolonge la plus petite de ces droites; je dis que la surface comprise tant par la portion de la circonférence du plus grand cercle, qui est sur la même hélice entre ces deux droites, que par l'hélice et par le prolongement de la plus petite droite est à la surface comprise tant par la portion de la circonférence du plus petit cercle, que par la même hélice et par la droite qui joint leurs extrémités, comme le rayon du petit cercle, conjointement avec les deux tiers de l'excès du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit est au rayon du plus petit cercle, conjointement avec le tiers de l'excès dont nous venons de parler.

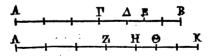
J'ai écrit dans ce livre les démonstrations des choses dont je viens de parler, et les démonstrations d'autres choses qui regardent l'hélice. Je fais précéder, comme les autres géomètres, ce qui est nécessaire pour démontrer ces propositions; et parmi les principes dont je me suis servi dans les livres que j'ai publiés, je fais usage de celui-ci:

Des lignes et des surfaçes étant inégales, si l'excès de la plus grande sur la plus petite est ajouté un certain nombre de fois à luimême, il peut arriver que cet excès, ainsi ajouté à lui-même, surpasse une certaine quantité proposée parmi celles qui sont comparées entre elles.

PROPOSITION L

Si un point se meut dans une ligne avec une vîtesse uniforme, et si dans cette ligne on en prend deux autres, ces deux dernières seront entre elles comme les temps que ce point a employés à les parcourir:

Qu'un point soit mu avec une vîtesse

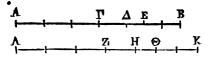


égale dans la ligne AB. Prenons les deux lignes $\Gamma\Delta$, ΔE . Que le temps employé par ce point à parcourir la ligne $\Gamma\Delta$ soit zH, et le temps

employé par ce même point à parçourir la ligne ΔE soit He. Il faut démontrer que la ligne $\Gamma \Delta$ est à la ligne ΔE comme le temps ZH est au temps He.

Que les lignes AA, AB soient composées des lignes TA, AB, comme on voudra, de manière que AA surpasse AB. Que le temps zн soit contenu dans le temps лн autant de fois que la ligne ra l'est dans la ligne as; et que le temps on soit contenu dans le temps кн autant de fois que la ligne ΔE l'est dans ΔB. Puisque l'on suppose qu'un point se meut avec une vîtesse égale dans la ligne AB, il est évident que le temps employé par ce point à parcourir la ligne r∆ sera égal au temps employé par ce même point à parcourir chacune des lignes qui sont égales à τΔ. Donc ce point a parcourn la ligne composée A dans un temps égal au temps AH; parce que la ligne ra est supposée contenue dans la ligne AA autant de fois que le temps zu l'est dans le temps AH. Par la même raison, le point a parcouru la droite BA dans un temps égal au temps ku. Donc, puisque la ligne AA est plus grande que BA, il est évident que le temps employé par le point à

parcourir la ligne AΔ sera plus grand que le temps employé par ce même point à parcourir BΔ. Donc le temps AH est plus grand que le temps KH.

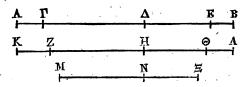


Si des temps sont composés des temps ZH, HO, comme on voudra, de manière que l'un surpasse l'autre, on démontrera pareillement que parmi les lignes qui sont composées de la même manière des lignes $\Gamma\Delta$, ΔE , l'une surpassera l'autre, et ce sera celle qui est homologue au temps le plus grand. Il est donc évident que la droite $\Gamma\Delta$ est à la droite ΔE comme le temps ZH est au temps HO (a).

PROPOSITION IL

Si deux points se meuvent dans deux lignes, chacun avec une vîtesse uniforme, et si l'on prend dans chaque ligne deux lignes dont les premières ainsi que les secondes soient parcourues par ces points dans des temps égaux, les lignes qui auront été prises seront proportionnelles entre elles.

Qu'un point se meuve avec une vîtesse uniforme dans une ligne AB et un autre point dans une autre ligne KA. Prenons dans la ligne AB les deux lignes TA, AE, et dans la



ligne κΛ les deux lignes zH, HΘ; que le point qui se meut dans la ligne AB parcoure la ligne ΓΔ dans un temps égal à celui pendant lequel l'autre point qui se meut dans la ligne κΛ parcourt la ligne zH. Pareillement, que le premier point parcoure la ligne ΔE dans un temps égal à celui pendant lequel l'autre point parcourt la ligne HΘ. Il faut démontrer que ΓΔ est à ΔE comme zH est à HΘ.

Que le temps pendant lequel le premier point parcourt la ligne $\Gamma\Delta$ soit MN. Pendant ce temps, l'autre point parcourra la ligne zh. De plus, que le temps pendant lequel le premier point parcourt la ligne ΔE soit NE; pendant ce temps l'autre point parcourra aussi la ligne HO. Donc la ligne $\Gamma\Delta$ sera à la ligne ΔE comme le temps MN est au

temps Nz, et la ligne zh sera à la ligne не comme le temps MN est au temps Nz. Il est donc évident que ΓΔ est à ΔE comme zh est à не.

PROPOSITION III.

Des cercles quelconques étant donnés, on peut trouver une droite plus grande que la somme des circonférences de ces cercles.

Car ayant circonscrit un polygone à chaque cercle, il est évident que la droite composée de tous les contours est plus grande que la somme des circonférences de ces cercles.

PROPOSITION IV.

Deux lignes inégales étant données, savoir une droite et une circonférence de cercle, on peut prendre une droite qui soit plus petite que la plus grande des lignes données et plus grande que la plus petite.

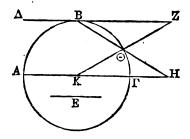
Car si la droite est divisée en autant de parties égales que l'excès de la plus grande ligne sur la plus petite doit être ajouté à luimême pour surpasser cette droite, une partie de cette droite sera plus petite que cet excès. Si la circonférence est plus grande que la droite, et si l'on ajoute à la droite une de ses parties, il est évident que cette seconde droite sera encore plus grande que la plus petite des lignes données et plus petite que la plus grande. Car la partie ajoutée est plus petite que l'excès.

PROPOSITION V.

Un cercle et une tangente à ce cercle étant donnés, on peut mener du centre à la tangente une droite, de manière que la raison de la droite placée entre la tangente et la circonférence du cercle au rayon soit moindre que la raison de l'arc placé entre le point de contact et la droite menée du centre à la tangente à un arc quelconque donné.

Que ABF soit le cercle donné; que son centre soit le point K; que la droite \(\Delta \) touche le cercle au point B. Soit donné aussi un arc quelconque. On peut prendre une droite plus grande que l'arc donné; que cette droite soit E. Par le centre conduisons la droite AH parallèle à \(\Delta Z \); supposons que la droite HQ

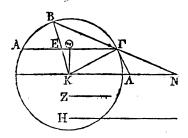
dirigée vers le point в soit égale à la droite E, et prolongeons la droite menée du centre к au point e. La raison de ez à ок sera la même que la raison de ве à ен. Donc la raison de ze à ек sera moindre que la raison de



l'arc BO à l'arc donné; parce que la droite BO est plus petite que l'arc BO, tandis que la droite OH est plus grande que l'arc donné. Donc aussi la raison de la droite ZO au rayon est moindre que l'arc BO à l'arc donné.

PROPOSITION VI.

Etant donnés un cercle, et dans un cercle une ligne plus petite que le diamètre, il est possible de mener du centre à la circonférence une droite qui coupe la ligne donnée dans le cercle, de manière que la raison de la droite placée entre la circonférence et la ligne donnée dans le cercle à la droite menée de l'extrémité du rayon qui est dans la circonférence à une des extrémités de la ligne donnée dans le cercle soit la même qu'une



raison proposée; pourvu que cette raison soit moindre que celle de la moitié de la ligne donnée dans le cercle à la perpendiculaire menée du centre sur cette ligne.

Que ABT soit le cercle donné, et que son centre soit le point k. Soit donnée dans ce cercle la ligne la plus petite que le diamètre; et que la raison de z à H soit moindre que la raison de le à ke, la droite ke étant perpendiculaire sur la Du centre menons kn parallèle à al et la perpendiculaire sur kl. Les triangles les les perpendiculaire sur kl. Les triangles les les comme kl est è la. Donc la raison de z à H est moindre que la raison de kl à la droite kl à la dro

TOME II.

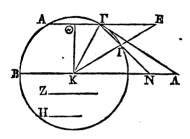
une droite BN plus grande que TA soit la même que la raison de z à H; et plaçons la droite BN entre la circonférence et la ligne KN, de manière qu'elle passe par le point T. Cette droite qui peut être coupée ainsi, tombera au-delà de TA, puisqu'elle est plus grande que TA (a). Donc, puisque BK est à BN comme z est à H, la droite EB sera aussi à BT comme z est à H.

PROPOSITION VII.

Les mêmes choses étant données, et la ligne donnée dans le cercle étant prolongée, on pourra mener du centre sur le prolongement de cette ligne une droite, de manière que la droite placée entre la circonférence et le prolongement de la ligne, et la droite menée de l'extrémité du rayon prolongé à l'extrémité de la ligne prolongée aient entre elles une raison proposée; pourvu que cette raison soit plus grande que la raison de la demi-ligne donnée dans le cercle à la perpendiculaire menée du centre sur cette ligne.

Soient données les mêmes choses qu'aupa-

ravant. Prolongeons la ligne qui est donnée dans le cercle. Que la raison donnée soit celle de z à H, et que cette raison soit plus grande que celle de ro à OK. Cette raison sera encore plus grande que la raison de Kr à TA.



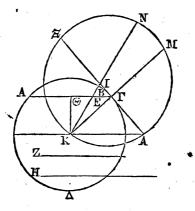
Que la raison de la droite Kr à une droite IN, plus petite que IA, soit la même que la raison de z à H, et que la droite IN soit dirigée vers le point I. Cette droite qui peut être coupée ainsi tombera en deçà de IA, parce qu'elle est plus petite que IA. Donc, puisque Kr est à IN comme z est à H, la droite EI sera à la droite II comme z est à H.

PROPOSITION VIIL

Etant donné un cercle, et dans ce cercle une ligne plus petite que le diamètre; étant donnée de plus une ligne qui touche le cercle à une des extrémités de la ligne donnée dans ce cercle, on peut mener du centre une droite, de manière que la partie de cette droite placée entre la circonférence du cercle et la ligne donnée dans le cercle, et la partie de la tangente placée entre la droite menée du centre et le point de contact, aient entre elles une raison proposée; pourvu que cette raison soit moindre que celle de la demiligne donnée dans le cercle à la perpendiculaire même du centre sur cette ligne.

Que ABTA soit le cercle donné; que TA soit la ligne qui est donnée dans le cercle, et qui est plus petite que le diamètre. Que EA touche le cercle au point T, et que la raison de z à H soit moindre que celle de TO à OK. Si l'on mène KA parallèle à OT, la raison de z à H sera encore moindre que celle de TK à TA. Que K' soit à TE comme z est à H. La droite ET sera plus grande que TA. Faisons passer une circonférence par les points K, A, E. Puisque la droite ET est plus grande que la droite TA, et que les droites KT, EA se coupent à angles droits, on peut prendre une droite IN qui se dirigeant vers le point K soit égale à MT. Donc, la surface comprise sous

EI, IA est à la surface comprise sous KE, IA comme EI est à KE; et la surface comprise sous KI, IN est à la surface comprise sous KI, TA comme IN est à TA. Donc IN est à TA comme EI est à KE (a). Donc IM est à TA, et TE



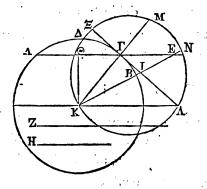
à KI, et le à KB comme zi est à KE. Donc la droite restante il est à la droite restante BE comme zi est à IK, et comme h est à z (6). Donc KN tombe sur la tangente, et sa partie BE placée entre la circonférence et la ligne donnée dans le cercle est à la partie de la tangente placée entre KN et le point de contact comme z est à H.

PROPOSITION IX.

Les mêmes choses étant données, et la ligne qui est donnée dans le cercle étant prolongée, on peut mener du centre du cercle une droite à la ligne prolongée, de manière que la partie de cette droite placée entre la circonférence et la ligne prolongée, et la partie de la tangente placée entre la droite menée du centre et le point de contact aient entre elles une raison proposée; pourvu que cette raison soit plus grande que celle de la moitié de la ligne donnée dans le cercle à la perpendiculaire menée du centre du cercle sur cette même ligne.

Que ABTA soit le cercle donné; et que TA soit la ligne qui est donnée dans le cercle, et qui est plus petite que le diamètre. Prolongeons cette ligne; que la droite ET touche le cercle au point T, et que la raison de Z à H soit plus grande que celle de TO à OK. La raison de Z à H sera encore plus grande que la raison de KT à TA. Que KT soit à TE comme Z est à H. La droite ET sera plus petite que TA. Faisons passer de nouveau une circonférence

de cercle par les points Ξ , K, Λ . Puisque la droite $\Xi \Gamma$ est plus petite que $\Gamma \Lambda$, et que les droites KM, $\Xi \Gamma$ se coupent à angles droits, on peut prendre une droite ΓN qui, étant dirigée vers le point K, soit égale à la droite ΓM .



Puisque la surface comprise sous zi, in est à la surface comprise sous ni, ke comme zi est à ke; que la surface comprise sous ki, in est égale à la surface comprise sous zi, in, et que la surface comprise sous ki, ra est égale à la surface comprise sous ni, ke; parce que ke est à ik comme ni est à ni; la droite zi sera à ke comme la surface comprise sous ki, in est à la surface comprise sous ki, ra, c'est-à-dire comme ni est à ra, c'est-à-dire comme re est à ra. Mais im est à ra comme zi est à ke; donc zi est à ke comme zi est à ke, et la

droite restante II est à la droite restante BE comme EI est à IK. Mais EI est à IK comme H est à Z; donc la droite KE tombe sur la ligne prolongée, et la partie BE qui est placée entre la ligne prolongée et la circonférence est à la partie II de la tangente placée entre la droite menée du centre et le point de contact comme z est à H.

PROPOSITION X.

Si des lignes en aussi grand nombre que l'on voudra et qui se surpassent également sont placées les unes à la suite des autres, et si l'excès est égal à la plus petite; si l'on prend d'autres lignes qui soient en même nombre que les premières, et dont chacune soit égale à la plus grande de celles-ci, la somme de tous les quarrés construits sur les lignés qui sont égales chacune à la plus grande, conjointement avec le quarré de la plus grande, et la surface comprise sous la plus petite et sous une ligne composée de toutes les lignes qui se surpassent également, sera triple de la somme de tous les quarrés construits sur les lignes qui se surpassent également (a).

Que des lignes A, B, T, A, E, Z, H, Q, en aussi grand nombre qu'on voudra, et qui se surpassent également, soient placées les unes à la suite des autres; et que Q soit égal à leur



excès. A la ligne B ajoutons une ligne I égale à 0; à la ligne I, une ligne K égale à H; à la ligne A, une ligne A égale à Z; à la ligne E, une ligne M égale à la ligne E; à la ligne Z, une ligne M égale à A; à la ligne H, une ligne E égale à la ligne I; et enfin à la ligne O, une ligne O égale à B. Les lignes qui résulteront de cette addition seront égales entre elles, et égales chacune à la plus grande. Il faut démontrer que la somme des quarrés de toutes ces droites, c'est-à-dire la somme du quarré de A et des quarrés des droites qui résultent de cette addition, conjointement avec le quarré de A, et la surface comprise sous o et sous une ligne composée de toutes les lignes

A, B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ est triple de la somme de tous les quarrés construits sur A, B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ .

Car le quarré de BI est égal à la somme des quarrés des lignes 1, B, conjointement avec le double de la surface comprise sous B, I; le quarré de Kr est égal à la somme des quarrés des lignes k, r, conjointement avec le double de la surface comprise sous K, r; semblablement, les sommes des quarrés des autres lignes égales chacune à A sont égaux aux sommes des quarrés de leurs segmens, conjointement avec les doubles des surfaces comprises sous ces mêmes segmens. Donc la somme des quarrés des lignes A, B, T, A, E, Z, H, Ø, avec la somme des quarrés construits sur 1, K, A, M, N, Z, O, conjointement avec le quarré de A est double de la somme des quarrés construits sur A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.

Il reste à démontrer que la somme des doubles des surfaces comprises sous les segmens de chacune des lignes égales à A, conjointement avec la surface comprise sous la ligne Θ et sous une ligne composée de toutes les lignes A, B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ est égale à la somme des quarrés des lignes A, B, Γ , Δ , E, Z, H, O. En effet, le double de la surface comprise sous B, I est égal au double de la surface comprise sous B, O; le double de la surface comprise sous K, r est égal à la sur-



de B, du quintuple de r et des lignes suivantes multipliées par les nombres impairs qui suivent ceux-ci (6). Mais la somme des quarrés construits sur A, B, T, A, E, Z, H, e est aussi égale à la surface comprise sous ces mêmes lignes, parce que le quarré de A est égal à la surface comprise sous la ligne e et sous une ligne composée de toutes ces lignes, c'est-à-dire sous une ligne composée de A et des lignes restantes dont chacune est égale à A; car la ligne o est contenue autant de fois dans A, que A est contenu dans la somme des lignes égales à $A(\gamma)$. Donc le quarré de A est égal à la surface comprise sous la ligne o et sous une ligne composée de A, et du double de la somme des lignes B, Γ, Δ, E , z, H, O; car la somme des lignes égales à A, la ligne A exceptée, est égale au double de la somme des lignes B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ (δ). Semblablement, le quarré de B est égal à la surface comprise sous la ligne e, et sous une ligne composée de la ligne B et du double des lignes r, Δ, Ε, z, H, Θ; le quarré de r est égal à la surface comprise sous la ligne @, et sous une ligne composée de la ligne r et du double des lignes Δ , E, Z, H, Θ . Par la même raison les quarrés des lignes restantes sont égaux aux surfaces comprises sous la ligne et sous une ligne composée de la ligne qui suit et des doubles des lignes restantes. Il est donc évident que la somme des quarrés de toutes ces lignes est égale à la surface comprise sous et sous une ligne composée de toutes ces lignes, c'est-à-dire sous une ligne composée de A, du triple de B, du quintuple de I, et des lignes suivantes multipliées par les nombres qui suivent œux-ci.

COROLLAIRE.

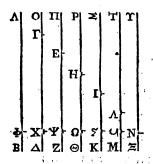
Il suit évidemment de-là que la somme des quarrés construits sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande est plus petite que le triple de la somme des quarrés construits sur les lignes inégales; car la première somme seroit triple de la seconde, si l'on augmentoit la première de certaines quantités. Il est encore évident que la première somme est plus grande que le triple de la seconde, si on retranche de celle-ci le triple du quarré de la plus grande ligne. Car ce dont la première somme est augmentée

est moindre que le triple du quarré de la plus grande ligne (¿). Donc si l'on construit des figures semblables sur les lignes qui se surpassent également et sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande, la somme des figures construites sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande sera plus petite que le triple de la somme des figures construites sur les lignes inégales, et la première somme sera plus grande que le triple de la seconde, si l'on retranche de celle-ci le triple de la figure construite sur la plus grande ligne. Car ces figures qui sont semblables ont entre elles la même raison que les quarrés dont nous avons parlé.

PROPOSITION XL

Si des lignes en aussi grand nombre qu'on voudra, et qui se surpassent également sont placées les unes à la suite des autres, et si l'on prend d'autres lignes dont le nombre soit plus petit d'une unité que le nombre de celles qui se surpassent également, et dont chacune soit égale à la plus grande des lignes inégales. La raison de la somme des quarrés des lignes qui sont égales chacune à la plus grande à la somme des quarrés des lignes qui se surpassent également, le quarré de la plus petite étant excepté, est moindre que la raison du quarré de la plus grande à la surface comprise sous la plus grande ligne et sous la plus petite, conjointement avec le tiers du quarré construit sur l'excès de la plus grande sur la plus petite; et la raison de la somme des quarrés des lignes qui sont égales chacune à la plus grande à la somme des quarrés des lignes qui se surpassent également, le quarré de la plus grande étant excepté, est plus grande que cette même raison (a).

Que des lignes en aussi grand nombre



qu'on voudra, et qui se surpassent également soient placées les unes à la suite des autres, la droite AB surpassant TA; TA, EZ; EZ, HO; HO, IK; IK, AM; et AM, NE. A la ligne TA, ajoutons une ligne TO égale à un excès; à la ligne EZ, la ligne EI égale à deux excès; à la

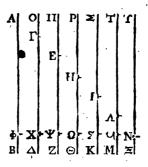


ligne Ho, la ligne HP égale à trois excès; et ainsi de suite. Les lignes ainsi composées seront égales entre elles, et égales chacune à la plus grande. Il faut démontrer que la raison de la somme des quarrés des lignes ainsi composées à la somme des quarrés des lignes qui se surpassent également, le quarré de NE étant excepté, est moindre que la raison du quarré de AB, à la surface comprise sous AB, NE, conjointement avec le tiers du quarré de NY; et que la raison de la somme des quarrés des lignes ainsi composées à la somme de tous les quarrés des lignes qui se surpassent également, le quarré de la plus grande

ligne étant excepté, est plus grande que cette même raison (a).

De chacune des lignes qui se surpassent également, retranchons une ligne égale à l'excès (6). Le quarré de AB sera à la surface comprise sous AB, &B, conjointement avec le tiers du quarré de At, comme le quarré de $o\Delta$ est à la surface comprise sous $o\Delta$, Δx , conjointement avec le tiers du quarré de xo; comme le quarré de nz est à la surface comprise sous nz, 4z, conjointement avec le tiers du quarré de 411, et comme les quarrés des autres lignes sont à des surfaces prises de la même manière. Donc la somme des quarrés construits sur les lignes od, IIZ, PO, EK, TM, YE est à la surface comprise sous la ligne Nz, et sous une ligne composée de celles dont nous venons de parler, conjointement avec le tiers de la somme des quarrés construits sur les lignes ox, ΠΨ, ΡΩ, EF, Ty, TN, comme le quarré de AB est à la surface comprise sous AB, DB, conjointement avec le tiers du quarré de va. Donc, si l'on démontre que la surface comprise sous la ligne NE et sous une ligne composée de OA, nz, po, xk, TM, xz, conjointement avec le TOME II.

tiers de la somme des quarrés construits sur OX, ΠΨ, ΡΩ, Σ7, Τ4, ΥΝ est plus petite que la somme des quarrés construits sur AB, ΤΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΑΜ, et qu'elle est plus grande



que la somme des quarrés construits sur les lignes ra, ez, ho, ik, am, nz, il sera évident qu'on aura démontré ce qui est proposé.

En effet, la surface comprise sous la ligne Nπ et sous une ligne composée de OΔ, ΠΖ, PΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ, conjointement avec le tiers de la somme des quarrés construits sur OX, ΠΨ, PΩ, ΣΨ, ΤΨ, ΤΝ est égale à la somme des quarrés construits sur XΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΨΚ, ΨΜ, ΝΞ, conjointement avec la surface comprise sous la ligne NΞ, et sous une ligne composée de OX, ΠΨ, PΩ, ΣΨ, ΤΨ, ΥΝ, et le tiers de la somme des quarrés construits sur les lignes

OX, $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $\Sigma \tau$, TY, ΥN ; et la somme des quarrés construits sur les lignes AB, TA, EZ, HO, IK, AM est égale à la somme des quarrés construits sur les lignes Bo, XA, YZ, QO, TK, yM, conjointement avec la somme des quarrés construits sur les lignes Ao, TX, E4, HΩ, 17, A4, èt la surface comprise sous la ligne Bo et sous le double d'une ligne composée AΦ, TX, EΨ, HΩ, I7, Ay. Mais les quarrés construits sur des lignes égales chacune à NE, sont communs aux unes et aux autres de ces quantités; et la surface comprise sous la ligne NZ et sous une ligne composée de ox, ΠΨ, ΩΡ, ΓΣ, γΤ, τN est plus petite que la surface comprise sous Bo et sous le double d'une ligne composée de Ao, TX, xΨ, HΩ, T7, A4; parce que la somme des lignes dont nous venons de parler est égale à la somme des lignes ro, επ, ρΗ, IΣ, ΛΤ, m, et plus grande que la somme des lignes restantes. De plus, la somme des quarrés construits sur AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, IF, Ay est plus grande que le tiers de la somme des quarrés construits sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σ7, ΤΨ, YN; ce qui a été démontré plus haut (10. Cor.). Donc la somme des surfaces dont nous venons de parler est plus petite que la somme des quarrés construits sur AB, $\Gamma\Delta$, EZ, HO, IK, AM. Il reste à démontrer que la somme de ces mêmes surfaces est plus grande que la



somme des quarrés construits sur IA, EZ, HO, IK, AM, NE. En effet, la somme des quarrés construits sur les lignes IA, EZ, HO, IK, AM, NE est égale à la somme des quarrés construits sur IX, EY, HO, IT, AY, conjointement avec la somme des quarrés construits sur XA, YZ, OO, TK, YM, EE, et la surface compfise sous la ligne NE et sous le double d'une ligne composée de IX, EY, HO, IT, AY. Mais les quarrés construits sur XA, YZ, OO, TK, MY, NE sont communs; et la surface comprise sous la ligne NE et sous une ligne composée de OX, IIY, PO, ZT, YF, TN est plus grande que la surface comprise sous le double

d'une ligne composée de ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, 17, ΛΨ; de plus, la somme des quarrés construits sur XO, ΨΠ, ΩΡ, ΓΣ, ΨΤ, ΥΝ est plus grande que le triple de la somme des quarrés construits sur les lignes ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, 17, ΛΨ; ce que est aussi démontré (10. Cor.). Donc la somme des surfaces dont nous venons de parler est plus grande que la somme des quarrés construits sur les lignes ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ.

COROLLAIRE.

Donc, si sur ces lignes on construit des figures semblables, tant sur celles qui se surpassent également, que sur celles qui sont égales chacune à la plus grande, la raison de la somme des figures construites sur les lignes égales chacune à la plus grande à la somme des figures construites sur les lignes qui se surpassent également, la figure construite sur la plus petite étant exceptée, sera moindre que la raison du quarré de la plus grande ligne à la surface comprise sous la plus grande ligne et sous la plus petite, conjointement avec le tiers du quarré de l'excès de la plus grande ligne sur la plus petite; et

la raison de la somme des figures construites sur les lignes égales chacune à la plus grande à la somme des figures construites sur les lignes qui se surpassent également, la figure construite sur la plus grande étant exceptée, sera plus grande que cette même raison. Car ces figures qui sont semblables sont entre elles comme les quarrés dont nous avons parlé.

DÉFINITIONS.

- 1. Si une droite menée dans un plan, une de ses extrémités restant immobile, tourne avec une vîtesse uniforme jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, et si dans la ligne qui a tourné, un point se meut avec une vîtesse uniforme en partant du point immobile de cette ligne, ce point décrira une hélice.
- 2. Le point de la ligne droite qui reste immobile s'appellera le commencement de l'hélice.
- 3. La position de la ligne droite d'où cette ligne a commencé à se mouvoir, s'appellera le commencement de la révolution.

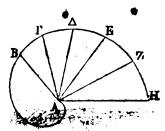
- 4. La droite que le point a parcourue dans celle où il se meut pendant la première révolution, s'appellera la première droite; celle que le point a parcourue pendant la seconde révolution s'appellera la seconde, et ainsi de suite; c'est-à-dire que les noms des autres droites seront les mêmes que le, nom des révolutions.
- 5. La surface comprise par l'hélice décrite dans la première révolution et par la première droite s'appellera la première surface; la surface comprise par l'hélice décrite dans la seconde révolution et par la seconde droite s'appellera la seconde surface, et ainsi de suite.
- 6. Si du point qui est le commencement de l'hélice, on mène une ligne droite quelconque, ce qui est du côté de cette ligne vers lequel la révolution se fait, s'appellera les antécédens, et ce qui est de l'autre côté s'appellera les conséquens.
- 7. Le cercle décrit du point qui est le commencement de l'hélice comme centre, et d'un rayon égal à la première droite, s'appellera le premier cercle; le cercle décrit du même point et avec un rayon double de la pre-

mière droite s'appellera le second, et ainsi des autres.

PROPOSITION XII.

Si tant de droites que l'on voudra sont menées du commencement d'une hélice décrite dans la première révolution à cette même hélice en formant des angles égaux entre eux, ces droites se surpasseront également.

Soit une hélice dans laquelle les droites AB, Ar, AA, AE, AZ fassent des angles égaux

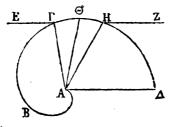


entre eux. Il faut démontrer que l'excès de AI sur AB est égal à l'excès de AI sur AI, et ainsi de suite.

Car dans le temps que la ligne droite qui tourne arrive de AB en AI, le point qui se meut dans cette ligne parcourt l'excès de IA sur AB; et dans le temps que la ligne droite arrive de AT en AA, le point parcourt l'excès de AA sur AT. Mais la ligne droite va dans un temps égal de AB en AT et de AT en AA, parce que les angles sont égaux; donc le point qui se meut dans la ligne droite parcourt dans un temps égal l'excès de AT sur AB, et l'excès de AA sur AT (1); donc, l'excès de AT sur AB est égal à l'excès de AA sur AT, et ainsi de suite.

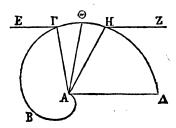
· PROPOSITION XIII

Si une ligne droite touche une hélice, elle ne la touchera qu'en un seul point. Soit l'hélice ABTA. Que le commencement



de l'hélice soit le point A; que le commencement de la révolution soit la droite AA, et que la droite ZE touche cette hélice. Je dis que cette droite ne la touchera qu'en un seul point.

Car que la droite ze touche l'hélice aux deux points r, H, si cela est possible. Menons



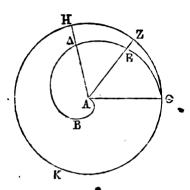
les droites AT, AH. Partageons en deux parties égales l'angle compris entre AH, AT, et que le point où la droite qui partage cet angle en deux parties égales rencontre l'hélice soit le point e. L'excès de AH sur AO sera égal à l'excès de AO sur AT, parce que ces droites comprennent des angles égaux entre eux. Donc la somme des droites AH, AT est double de AO. Mais la somme des droites AH, AT est plus grande que le double de la droite AO qui est dans le triangle et qui partage l'angle en deux parties égales (a). Il est donc évident que le point où la droite AO rencontre la droite TH tombe entre les points e, A. Donc la droite EZ coupe l'hélice, puis-

que parmi les points qui sont dans TH, il en est quelqu'un qui tombe en dedans de l'hélice. Mais on avoit supposé que la droite EZ étoit tangente. Donc la droite EZ ne touche l'hélice qu'en un seul point.

PROPOSITION XIV.

Si deux droites sont menées à une hélice décrite dans la première révolution du point qui est le commencement de l'hélice, et si ces droites sont prolongées jusqu'à la circonférence du premier cercle, les droites menées à l'hélice seront entre elles comme les arcs de ce cercle compris entre l'extrémité de l'hélice, et les extrémités des droites prolongées qui sont dans la circonférence : les arcs de cercle étant pris à partir de l'extrémité de l'hélice, en suivant le sens du mouvement.

Soit l'hélice ABTAEO décrite dans la première révolution; que le commencement de l'hélice soit le point A; que le commencement de la révolution soit OA, et que le premier cercle soit OKH. Que les droites AE, AA soient menées du point A à l'hélice, et que ces droites soient prolongées jusqu'à la circonférence du cercle, c'est-à-dire jusqu'aux points z, H. Il faut démontrer que AE est à AA comme l'arc OKZ est à l'arc OKH.



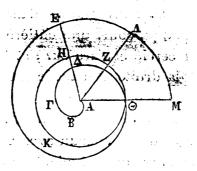
Car la ligne droite AO ayant fait une révolution, il est évident que le point O se sera mu avec une vîtesse uniforme dans la circonférence OKH, et le point A, dans la ligne droite AO; que le point O aura parcouru l'arc OKZ, et le point A la droite AO; que le point A aura parcouru la droite AO et le point O l'arc OKH, et que chacun de ces deux points se sera mu avec une vîtesse uniforme. Il est donc évident que AE est à AO comme l'arc OKZ est à l'arc OKH. Ce qui a été démontré plus haut (2). On démontreroit semblablement que cela arriveroit encore,

quand même l'une des deux droites menée du centre à la circonférence tomberoit à l'extrémité de l'hélice.

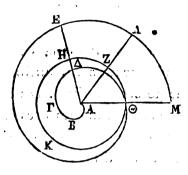
PROPOSITION XV.

Si deux droites sont menées à une hélice décrite dans la seconde révolution du commencement de cette hélice, ces droites seront entre elles comme les arcs dont nous avons parlé, conjointement avec une entière circonférence du cercle.

Soit l'hélice ABFAGEAM, dont la partie ABFAG soit décrite dans la première révolu-



tion, et dont l'autre partie SEAM soit décrite dans la seconde. Menons à l'hélice les droites AE, AA. Il faut démontrer que AA est à AE comme l'arc OKZ, conjointement avec une entière circonférence du cercle est à l'arc OKH, conjointement avec une entière circonférence du cercle.

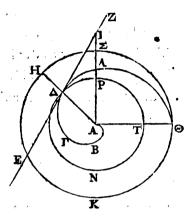


Car le point a qui se meut dans la ligne droite parcourt la ligne AA dans le même temps que e parcourt une entière circonférence du cercle et l'arc ekz; et le point A parcourt la droite AE dans le même temps que le point e parcourt une entière circonférence du cercle et l'arc ekh. Or ces deux points se meuvent chacun avec une vîtesse uniforme. Il est donc évident que AA est à AE comme l'arc ekz, conjointement avec une entière circonférence du cercle est à l'arc ekh, conjointement avec une entière circonférence du cercle (a).

Si des droites étoient menées à une hélice décrite dans la troisième révolution, on démontreroit de la même manière que ces droites seroient entre elles comme les arcs dont nous avons parlé, conjointement avec deux fois la circonférence entière du cercle. Semblablement, si des droites étoient menées à d'autres hélices, on démontreroit semblablement que ces droites seroient entre elles comme les arcs dont nous avons parlé, conjointement avec la circonférence entière du cercle, prise autant de fois qu'il y auroit eu de révolutions moins une, quand même une des droites tomberoit à l'extrémité de l'hélice.

PROPOSITION XVI.

Si une droite touche une hélice décrite dans la première révolution, et si l'on mène une droite du point de contact au point qui est le commencement de l'hélice, les angles que la tangente fait avec la droite qui a été menée, seront inégaux; et celui qui est du côté des antécédens est obtus, et celui qui est du côté des conséquens est aigu. • Que ABIDE soit une hélice décrite dans la première révolution; que le point A soit le commencement de l'hélice; la droite AB le commencement de la révolution et EKH



le premier cercle. Qu'une droite \triangle EZ touche l'hélice au point \triangle , et joignons le point \triangle et le point A par la droite \triangle A. Il faut démontrer que \triangle Z fait avec \triangle A un angle obtus.

Avec l'intervalle AA et du point A comme centre, décrivons le cercle ATN. Il faut nécessairement que la partie de la circonférence de ce cercle qui est du côté des antécédens tombe en dedans de l'hélice, et que la partie qui est du côté des conséquens tombe en dehors; parce que parmi les droites menées du point A à l'hélice, celles qui sont

du côté des antécédens sont plus grandes que AA, et que celles qui sont du côté des conséquens sont plus petites. Il est donc évident que l'angle formé par les deux droites AA, Az n'est pas aigu, parce que cet angle est plus grand que l'angle du demi-cercle (a). Il faut démontrer à présent qu'il n'est pas droit. Qu'il soit droit, si cela est possible. Alors la droite EAZ sera tangente au cercle ATN. Mais il est possible de mener du point · A à la tangente une droite, de manière que la raison de la droite comprise entre le cercle et la tangente au rayon soit moindre que la raison de l'arc compris entre le point de contact et la droite menée du centre à un arc donné (5). C'est pourquoi menons la droité AI qui coupe l'hélice au point A, et la circonférence au point P; et que la raison de PI à AP soit moindre que la raison de l'arc AP à l'arc ANT. Donc, la raison de la droite entière IA à AP est moindre que la raison de l'arc PANT à l'arc ANT, c'est-à-dire que la raison de l'arc EHKO à l'arc HKO. Mais la raison de l'arc ΣΗΚΘ à l'arc ΗΚΘ est la même que la raison de la droite AA à la droite AA: ce qui est démontré (14); donc la raison de A1

TOME IL

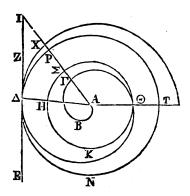
à AP est moindre que la raison de AA à AA. Ce qui est impossible; car PA est égal à AA et IA, est plus grand que AA. Donc l'angle compris par les droites AA, Az n'est pas droit. Mais nous avons démontré qu'il n'est pas aigu; il est donc obtus. On démontreroit semblablement que la même chose arriveroit encore si la droite qui touche l'hélice la touchoit à son extrémité.

PROPOSITION XVII.

Il en sera de même si une droite touche une hélice décrite dans la seconde révolution.

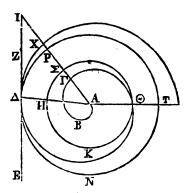
Que la droite Ez touche une hélice décrite dans la seconde révolution. Faisons les mêmes choses qu'auparavant. Par la même raison, les parties de la circonférence qui sont du côté des antécédens tomberont dans l'hélice, et celles qui sont du côté des conséquens tomberont en dehors. Donc l'angle formé par les droites AA, Az n'est point droit, mais bien obtus. Qu'il soit droit, si cela est possible. Alors la droite Ez touchera le cercle PNA au point A. Conduisons

de nouveau à la tangente une droite AI que coupe l'hélice au point x, et la circonférence du cercle PNA au point P. Que la raison de PI à PA soit moindre que la raison de l'arc



ΔP à une circonférence entière du cercle ΔPN, conjointement avec l'arc ΔNT; car on démontre que cela peut se faire (5). Donc la raison de la droite entière IA à la droite AP, est moindre que la raison de l'arc PΔNT, conjointement avec une circonférence du cercle à l'arc ΔNT, conjointement avec une circonférence entière du cercle. Mais la raison de l'arc PΔNT, conjointement avec une circonférence entière du cercle ΔNTP à l'arc ΔNT, conjointement avec une circonférence entière du cercle ΔNTP est la même que la raison de l'arc ΣΗΚΘ, conjointement avec une

circonférence entière du cercle ONK à l'arc HKO, conjointement avec une circonférence entière du cercle ONK; et la raison des arcs dont nous venons de parler est la même que



la raison de la droite XA à la droite AA; ce qui est démontré (14). Donc la raison de IA à AP est moindre que la raison de AX à AA. Ce qui est impossible, parce que PA est égal à AA, et que IA est plus grand que AX. Il est donc évident que l'angle formé par les droites AA, AZ est obtus. Donc l'angle restant est aigu. Les mêmes choses arriveroient, si la tangente tomboit à l'extrémité de l'hélice.

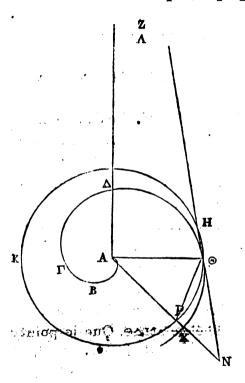
Si une droite touchoit une hélice formée d'une révolution quelconque et même à son extrémité, on démontreroit semblablement que cette droite formeroit des angles inégaux avec la droite menée du point de contact; et que celui de ces angles qui est du côté des antécédens seroit obtus, et que celui qui est du côté des conséquens seroit aigu.

PROPOSITION XVIII

Si une hélice décrite dans la première révolution est touchée à son extrémité par une droite; si du point qui est le commencement de l'hélice, on élève une perpendiculaire sur la droite qui est le commencement de la révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et la partie de cette perpendiculaire comprise entre la tangente et le commencement de l'hélice sera égale à la circonférence du premier cercle.

Soit l'hélice ABTAO. Que le point A soit le commencement de l'hélice; la droite OK le commencement de la révolution, et OHK le premier cercle. Que la droite OZ touche l'hélice au point O; et du point A menons la droite AZ perpendiculaire sur OA. Cette perpendiculaire rencontrera nécessairement la tangente OZ, parce que les droites ZO, OA

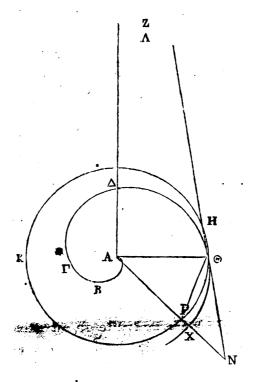
comprennent un angle aigu (16). Que cette perpendiculaire rencontre la tangente au point z. Il faut démontrer que la perpen-



diculaire za est égale à la circonférence du cercle exh.

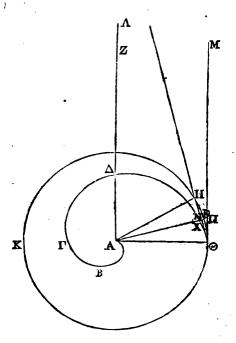
Car si elle ne lui est pas égale, elle est ou plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord plus grande, si cela est possible. • Je prends

une droite AA plus petite que ZA, mais plus grande que la circonférence du cercle OHK. On a donc un cercle OHK, et dans ce cercle une droite OH plus petite que le diamètre; et de plus, la raison de OA à AA est plus grande que la raison de la moitié de la droite HO à la perpendiculaire menée du point A sur la droite HO; parce que la première raison est encore plus grande que la raison de OA à AZ (a'. On peut donc mener du point A à la ligne prolongée une droite AN, de manière que la raison de la droite NP placée entre la circonférence et la ligne prolongée à la droite OP soit la même que la raison de ØA à AA (7). Donc la raison de NP à PA sera la même que la raison de OP à AA (6). Mais la raison OP à AA est moindre que la raison de l'arc op à la circonférence du cercle онк; car la droite ор est plus petite que l'arc OP, et la droite AA est au contraire plus grande que la circonférence du cercle OHK. Donc la raison de NP à PA est moindre que la raison de l'arc op à la circonférence du cercle OHK. Donc la raison de la droite entière NA à AP est moindre que la raison de l'arc or, conjointement avec la circonférence du cercle ΘΗΚ à cette circonférence (γ). Mais la raison de l'arc ΘΡ, conjointement avec la circonférence du cercle



өнк à la circonférence du cercle өкн, est la même que la raison de ха à лө; ce qui est démontré (15). Donc la raison de ма à ло. Ce est moindre que la raison de ха à ло. Ce qui ne peut être; car ма est plus grand que Ax, tandis que AP est égal à Ao. Donc la droite za n'est pas plus grande que la circonférence du cercle OHK.

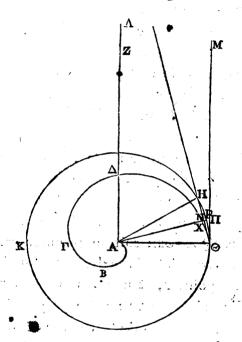
Que la droite za soit à présent plus petite que la circonférence du cercle OHR, si



cela est possible. Je prends une droite AA plus grande que Az, mais plus petite que la circonférence du cercle OHK. Du point O, je mène la droite OM parallèle à Az. On a un

cercle exh, et une droite en dans ce cercle qui est plus petite que le diamètre; on a de plus une droite qui touche le cercle au point e; et la raison de Ao à AA est moindre que la raison de la moitié de la droite no à la perpendiculaire menée du point a sur la droite но; parce que la première raison est moindre que celle de OA à AZ. On peut donc mener du point A à la tangente une droite AII, de manière que la raison de la droite PN placée entre la ligne donnée dans le cercle, et entre la circonférence à la droite en placée entre la droite AII et le point de contact soit la même que la raison de OA à AA (8). Que la droite An coupe le cercle au point P et l'hélice au point x. Par permutation, la raison de la droite NP à PA sera la même que celle de en à AA. Mais la raison de en à AA est plus grande que la raison de l'arc OP à la circonférence du cercle онк; car la droite on est plus grande que l'arc op, tandis que la droite AA est plus petite que la circonférence du cercle OHK. Donc la raison de NP à AP est plus grande que la raison de l'arc ор à la circonférence du cercle онк. Donc la raison de PA à AN est aussi plus grande que

la raison de la circonférence du cercle онк à l'arc окр (d'). Mais la raison de la circonférence du cercle онк à l'arc окр est la même que la raison de од à дх; се qui est démon-



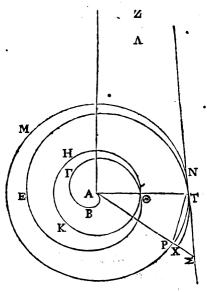
tré (14). Donc la raison de PA à AN est plus grande que la raison de AO à AX. Ce qui ne peut être. Donc la droite ZA n'est ni plus grande ni plus petite que la circonférence du cercle онк. Donc elle lui est égale.

PROPOSITION XIX.

Si une hélice décrite dans la seconde révolution est touchée à son extrémité par une droite, et si du commencement de l'hélice, on mène une perpendiculaire sur la ligne qui est le commencement de la révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et la partie de cette perpendiculaire placée entre la tangente et l'origine de l'hélice sera double de la circonférence du second cercle.

Que l'hélice ABFO soit décrite dans la première révolution, et l'hélice OEF dans la seconde. Que OKH soit le premier cercle et TMN le second. Qu'une droite TZ touche l'hélice au point T, et menons la droite ZA perpendiculaire sur TA; cette perpendiculaire rencontrera la droite TZ, parce qu'on a démontré que l'angle compris par les droites AT, TZ est aigu (17). Il faut démontrer que la droite ZA est double de la circonférence du cercle TMN.

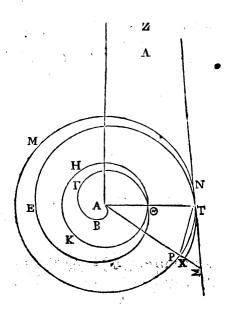
Car si cette droite n'est pas deuble de cette circonférence, elle est ou plus grande ou plus petite que son double. Qu'elle soit d'abord plus grande que son double. Prenons une droite AA plus petite que ZA, mais



plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN. On a dans un cercle et une droite inscrite dans ce cercle, qui est plus petite que le diamètre; et la raison de TA à AA est plus grande que la raison de la moitié de la droite TN à la perpendiculaire menée du point A sur la droite TN (a). On peut donc mener du point A à la ligne prolongée une droite AE, de manière que la

droite PS placée entre la circonférence et la droite prolongée à la droite TP soit la même que la raison de TA à AA(7). Que la droite AE coupe le cercle au point P et l'hélice au point x. Par permutation, la raison de la droite PS à la droite TA sera la même que la raison de la droite TP à la droite AA. Mais la raison de TP à AA est moindre que la raison de l'arc TP au double de la circonférence TMN; car la droite TP est plus petite que l'arc TP; tandis que la droite AA est plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN. Donc la raison de PE à AP est moindre que la raison de l'arc TP au double de la circonférence du cercle TMN. Donc la raison de la droite entière SA à AP est moindre que la raison de l'arc TP, conjointement avec le double de la circonférence du cercle TMN au double de la circonférence TMN. Mais la dernière raison est la même que celle de XA à AT; ce qui a été démontré (15). Donc la raison de Az à AP est moindre que la raison de xa à Ta. Ce quiene peut être. Donc la droite za n'est pas plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN. On démontrera semblablement que cette droite

n'est pas plus petite que le double de la circonférence du cercle TMN. Donc elle est double de cette circonférence.

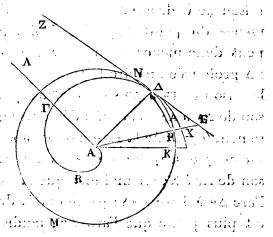


On démontrera de la même manière que si une hélice décrite dans une révolution quelconque est touchée à son extrémité par une droite, la perpendiculaire menée du commencement de l'hélice sur la ligne qui est le commencement de la révolution, rencontrera la tangente, et cette perpendiculaire sera égale au produit de la circonférence du cercle dénommé d'après le nombre des révolutions par ce même nombre.

PROPOSITION XX.

Si une hélice décrite dans la première révolution est touchée non à son extrémité par une droite, si l'on mène une droite du point de contact au commencement de l'hélice, et si du point qui est le commencement de l'hélice et avec un intervalle égal à la droite qui a été menée, on décrit un cercle; et de plus, si du commencement de l'hélice on mène une droite perpendiculaire sur celle qui a été menée du point de contact au commencement de l'hélice, cette droite rencontrera la tangente (16), et la partie de cette droite qui est placée entre la tangente et le commencement de l'hélice sera égale à l'arc de cercle qui est placé entre le point de contact et le point de section dans lequel le cercle décrit coupe la ligne qui est le commencement de la révolution: cet arc étant pris à partir du point placé dans la ligne qui est le commencement de la révolution en suivant le sens du mouvement.

Que ABIA soit une hélice décrite dans la première révolution. Qu'une droite AEZ la touche au point A, et du point A menons au commencement de l'hélice la droite AA. Du



point a comme centre, et avec l'intervalle AA, décrivons le cercle AMN qui coupe au point k la ligne qui est le commencement de la révolution; et menons la droite za perpendiculaire sur AA. La droite za rencontrera la tangente (16). Il faut démontrer que cette droite est égale à l'arc KMNA.

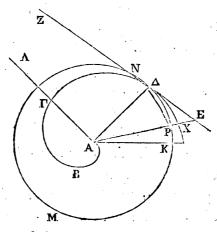
Car si elle ne lui est pas égale, elle est plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord plus grande, si cela est possible, Prenons une droite AA plus petite que za mais

TOME II.

plus grande que l'arc KMNA. On a un cercle kmn, et dans ce cercle une droite Δn, qui est plus petite que le diamètre; et de plus, la raison de AA à AA est plus grande que la raison de la droite AN à la perpendiculaire menée du point a sur la droite An. On peut donc mener du point A sur la droite NA prolongée une droite AE, de manière que la raison de EP à DP soit la même que la raison de AA à AA; car on a démontré que cela se peut (7). Donc la raison de EP à AP sera la même que la raison de AP à AA. Mais la raison de AP à AA est moindre que la raison de l'arc ΔP à l'arc κMΔ: parce que la droite ΔP est plus petite que l'arc AP, tandis que la droite AA est plus grande que l'arc KMA. Donc la raison de EP à PA est moindre que la raison de l'arc AP à l'arc KMA. Donc la raison de AE à AP est encore moindre que la raison de l'erc KMP à l'arc KMA. Mais la raison de l'arc KMP à l'arc KMA est le même que la raison de XA à AA (14); donc la raison de EA à AP est moindre que la raison de XA à AA. Ce qui ne peut être. Donc la droite ZA n'est pas plus grande que l'arc kma. On démontrera semblablement comme on l'a fait

plus haut, qu'elle n'est pas plus petite. Elle lui est donc égale.

Si une hélice décrite dans la seconde révolution est touchée non à son extrémité par



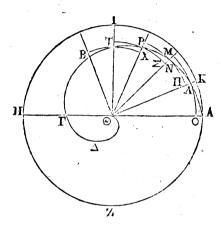
une droite, et si l'on fait le reste comme auparavant, on démontrera de la même manière que la droite comprise entre la tangente et le commencement de l'hélice est égale à la circonférence du cercle qui a été décrit, conjointement avec l'arc qui est placé entre les points dont nous avons parlé, cet arc étant pris de la même manière; et si une hélice décrite dans une révolution quelconque est touchée non à son extrémité, et si l'on fait le reste comme auparavant, la droite placée entre les points dont nous avons parlé sera égale à la circonférence du cercle qui aura été décrit, multipliée par le nombre des révolutions moins une, conjointement avec l'arc placé entre les points dont nous avons parlé, cet arc étant pris de la même manière.

PROPOSITION XXI.

Ayant pris la surface qui est contenue par une hélice décrite dans la première révolution, et par la première des droites parmi celles qui sont dans le commencement de la révolution, on peut circonscrire à cette surface une figure plane, et lui en inscrire une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que toute surface proposée.

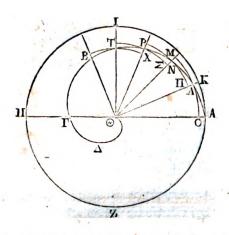
Que ABIA soit une hélice décrite dans la première révolution; que le point e soit le commencement de l'hélice; que la droite es soit le commencement de la révolution; et que ZHIA soit le premier cercle, ayant ses diamètres AH, ZI perpendiculaires l'un sur l'autre. Si l'on partage continuellement en

deux parties égales un angle droit, et le secteur qui contient cet angle droit, ce qui restera du secteur sera enfin plus petit que la surface proposée. Que le secteur restant



AOK soit celui qui est plus petit que la surface proposée. Partageons les quatre angles
droits en angles égaux à celui qui est compris par les droites AO, OK, et prolongeons
jusqu'à l'hélice les droites qui comprennent
ces angles. Que A soit le point où la droite
OK coupe l'hélice, et du point o comme
centre et avec l'intervalle OA décrivons un
cercle. La partie de la circonférence de ce
cercle qui est dans les antécédens tombera
dans l'hélice, et la partie qui est dans les

conséquens tombera en dehors. C'est pourquoi décrivons l'arc om, de manière que cet arc rencontre à un point o la droite ΘA , et au point m celle qui est menée à l'hélice



après la droite ek. Que n soit le point où la droite em coupe l'hélice; et du point e comme centre et avec l'intervalle en décrivons un arc de cercle, de manière que cet arc rencontre la droite ek, et celle qui est menée à l'hélice après la droite em. Semblablement du centre e décrivons des arcs de cercle qui passent par les autres points où les droites qui forment des angles égaux coupent l'hélice; de manière que chacun de ces arcs rencontre la droite qui précède et

celle qui suit. On aura alors une figure composée de secteurs semblables qui sera inscrite dans la surface qui aura été prise, et une autre figure qui sera circonscrite. On démontrera de la manière suivante que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est plus petit que toute surface proposée.

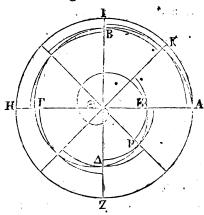
Le secteur Ono est égal au secteur OMA; le secteur onn, au secteur onp; le secteur oxz, au secteur OXT; et chacun des autres secteurs de la figure inscrite est égal à chacun des secteurs de la figure circonscrite qui a un côté commun. D'où il suit que la somme de tous les premiers secteurs est égale à la somme de tous les seconds. Donc la figure inscrite dans la surface qu'on a prise est égale à la figure circonscrite à la même surface. le secteur OAK étant excepté; car le secteur OAK est le seul de tous ceux de la figure circonscrite qui n'ait pas été pris. Il est donc évident que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est égal au secteur AKO qui est plus petit que la surface proposée.

Il suit évidemment de-là qu'on peut circonscrire à la surface dont nous avons parlé, une figuré telle que celle dont nous avons parlé, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur cette surface soit moindre que toute surface proposée, et qu'on peut lui en inscrire un autre, de manière que l'excès de la surface dont nous avons parlé sur la figure inscrite soit encore moindre que toute surface proposée.

PROPOSITION XXII.

Ayant pris la surface qui est contenue dans l'hélice décrite dans la seconde révolution, et la seconde droite parmi celles qui sont dans le commencement de l'hélice, on peut circonscrire à cette surface une figure composée de secteurs semblables, et lui en inscrire un autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petite que toute surface proposée.

Soit ABFAE une hélice décrite dans la seconde révolution. Que le point e soit le commencement de l'hélice; la droite Ae, le commencement de la révolution; et la droite EA, la seconde droite parmi celles qui sont dans le commencement de la révolution. Que AZH soit le second cercle, ayant ses diamètres AH, ZI perpendiculaires l'un sur l'autre. Si l'on partage continuellement en deux parties égales un angle droit et le secteur qui



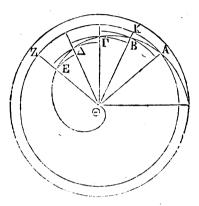
comprend cet angle droit, ce qui restera sera enfin plus petit que la surface proposée. Que le secteur restant oka soit celui qui est plus petit que la surface proposée. Si l'on partage les autres angles droits en angles égaux à celui qui est compris par les droites ko, oa, et si l'on fait le reste comme auparavant, l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite sera une surface plus petite que le secteur oka. Car cet excès sera plus grand que l'excès du secteur oka sur le secteur oep.

Il est donc évident qu'il peut se faire que l'excès de la figure circonscrite sur la surface qui a été prise soit plus petit que toute surface proposée; et que l'excès de la surface qu'on a prise sur la figure inscrite soit plus petit que toute surface proposée.

Il est semblablement évident qu'ayant pris une surface contenue par une hélice décrite dans une révolution quelconque et par une droite dénommée d'après le nombre des révolutions, on peut circonscrire une surface plane telle que celle dont nous avons parlé, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la surface qui a été prise soit plus petit que toute surface proposée, et lui en inscrire une autre, de manière que l'excès de cette surface sur la figure inscrite soit plus petite que toute surface proposée.

PROPOSITION XXIII.

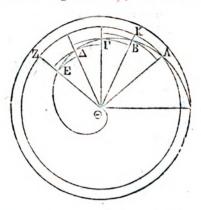
Ayant pris une surface contenue par une hélice plus petite que celle qui est décrite dans la première révolution et qui ne soit point terminée au commencement de la révolution, si l'on prend la surface contenue par cette hélice et par les droites menées de l'extrémité de cette même hélice, on pourra circonscrire à cette surface une figure



plane et lui en inscrire une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que toute surface proposée.

Soit ABIAE une hélice dont les extrémités soient les points A, E, et dont le commencement soit le point O. Menons les droites AO, OE. Du point O comme centre et avec l'intervalle OA, décrivons un cercle qui rencontre la droite OE au point z. Si l'on partage continuellement en deux parties égales l'angle qui est placé au point O et le secteur OAZ, on aura enfin un reste qui sera plus petit que

la surface proposée. Que le secteur OAK soit plus petit que la surface proposée. Décrivons, comme auparavant, des arcs de cer-



cle qui passent par les points où les droites qui font des angles égaux au point e, rencontrent l'hélice, de manière que chaque arc tombe sur la ligne qui précède et sur celle qui suit. On aura circonscrit à la surface contenue par l'hélice ABFAE et par les droites Ae, et une surface plane composée de secteurs semblables, et on lui en aura aussi inscrit une autre. Or, l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite sera moindre que la surface proposée; car le secteur eak est plus petit que la surface proposée.

Il suit manifestement de-là qu'on peut cir-

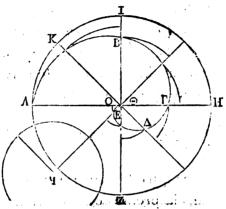
conscrire à la surface dont nous avons parlé, une surface plane telle que celle dont nous avons parlé, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur cette surface soit plus petite que toute surface proposée; et que l'on peut encore lui en inscrire une autre, de manière que l'excès de la surface dont nous avons parlé sur la figure inscrite soit moindre que toute quantité proposée.

PROPOSITION XXIV.

La surface qui est comprise par une hélice décrite dans la première révolution, et par la première des droites qui sont dans le commencement de la révolution, est la troisième partie du premier cercle.

Que ABTAEO soit une bélice décrite dans la première révolution; que le point e soit l'origine de l'hélice; la droite es, la première de celles qui sont dans le commencement de la révolution, et ARZHI, le première cercle. Que la troisième partie de ce cercle soit celui où se trouve la lettre y. Il faut démontrer que la surface dont nous venons de parler est égale au cercle y.

Car si elle ne lui est pas égale, elle est plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord plus petite, si cela est possible. On peut circonscrire à la surface comprise par

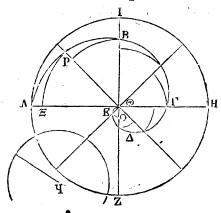


l'hélice ABIAEO, et par la droite AO, une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la surface dont nous venons de parler soit moindre que l'excès du cercle y sur cette même surface (21). Circonscrivons cette figure. Que parmi les secteurs dont la figure dont nous venons de parler est composée, le plus grand soit le secteur OAK, et le plus petit le secteur OEO. Il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le cercle y.

Prolongeons jusqu'à la circonférence du cercle les droites qui font des angles égaux au point o. On a certaines lignes menées du point o à l'hélice, qui se surpassent également (12); la plus grande de ces lignes est la ligne oa; la plus petite, qui est la ligne OE, est égale à l'excès. On a de plus certaines lignes menées du point o à la circonférence du cercle, qui sont en même nombre que les premières et dont chacune est égale à la plus grande de celles-ci; et l'on a construit des secteurs semblables sur toutes ces lignes, c'est-à-dire sur celles qui se surpassent également et sur celles qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande. Donc la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande est plus petite que le triple des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également. Ce qui est démontré (10, Cor.). Mais la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande est égale au cercle AZHI; et la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également est égale à la figure circonscrite. Donc le cercle ZHIK est plus petit que le triple de la figure circonscrite. Mais ce cercle est le triple du cercle y; donc le cercle y est plus petit que la figure circonscrite. Mais il n'est pas plus petit, puisqu'au contraire il est plus grand; donc la surface comprise par l'hélice AETAEO et par la droite AO n'est pas plus petite que le cercle y.

Elle n'est pas plus grande. Qu'elle soit plus grande, si cela est possible. On peut inscrire une figure dans la surface comprise par l'hélice ABIAEO et par la droite AO, de manière que l'excès de la surface dont nous venons de parler sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès de cette surface sur le cercle y (21). Inscrivons cette figure; et que parmi les secteurs dont la figure inscrite est composée, le secteur OPE soit le plus grand, et le secteur OPO, le plus petit. Il est évident que la figure inscrite sera plus grande que le cercle y.

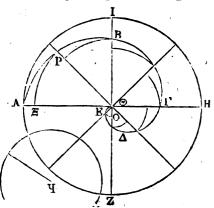
Prolongeons jusqu'à la circonférence du cercle les droites qui font des angles égaux au point e. On a certaines lignes menées du point e à l'hélice, qui se surpassent également (12). La plus grande de ces lignes est la droite ΘA , et la plus petite, qui est la ligne ΘE , est égale à l'excès. On a de plus certaines lignes menées du point Θ à la circonférence du cercle, qui sont en même



nombre que les premières, et dont chacune est égale à la plus grande de celles-ci, et l'on a des secteurs semblables construits sur toutes ces lignes, c'est-à-dire sur celles qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande, et sur celles qui se surpassent également. Donc la somme des secteurs construits sur les lignes égales est plus grande que le triple de la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus grande étant excepté. Ce qui est démon-

6

tré (10, Cor.). Mais la somme des secteurs construits sur les lignes égales est égale au cercle AZHI; et la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent éga-



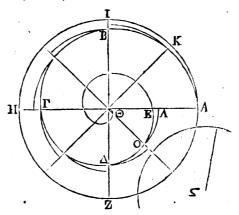
lement, celui qui est décrit sur la plus grande étant excepté, est égale à la figure inscrite. Donc le cercle est plus grand que le triple de la figure inscrite. Mais ce cercle est le triple du cercle y. Donc le cercle y est plus grand que la figure inscrite. Mais il n'est pas plus grand, puisqu'au contraire il est plus petit. Donc la surface comprise par l'hélice ABFARO et par la droite AO n'est pas plus grande que le cercle y. Donc le cercle y est égal à la surface comprise par l'hélice et la droite AO.

PROPOSITION XXV.

La surface comprise par une hélice décrite dans la seconde révolution et par la seconde des droites qui sont dans le commencement de la révolution est au second cercle comme sept est à douze, c'est-à-dire comme la surface comprise sous le rayon du second cercle et sous le rayon du premier, conjointement avec le tiers du quarré de l'excès du rayon du second cercle sur le rayon du premier est au quarré du rayon du second cercle.

Que ABTAE soit une hélice décrite dans la seconde révolution. Que le point e soit l'origine de l'hélice; la droite et, la première des droites qui sont dans le commencement de la révolution, et la droite AE, la seconde des droites qui sont dans le commencement de la révolution. Que AZHI soit le second cercle, et que ses diamètres AH, IZ soient perpendiculaires l'un sur l'autre. Il faut démontrer que la surface comprise par l'hélice ABTAE et par la droite AE est au cercle AZHI comme sept est à douze.

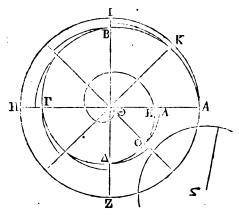
Soit 7 un certain cercle dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous AO, OE, conjointement avec le tiers du



quarré de AE. Le cercle τ sera au cercle AZHI comme sept est à douze, parce que la dernière raison est la même que celle du quarré du rayon du cercle τ est au quarré du rayon du cercle AZHI (a). Nous allons démontrer à présent que le cercle τ est égal à la surface comprise par l'hélice ABFAE et par la droite AE.

Car si le cercle τ n'est pas égal à cette surface, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. On peut circonscrire à cette surface une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur cette surface soit plus petit que l'excès du cercle τ sur cette même surface (22). Circonscrivons-lui cette figure. Que parmi les secteurs dont la figure circonscrite est composée, le plus grand soit le secteur ΘAK , et le plus petit, le secteur ΘAA . Il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le cercle τ .

Prolongeons jusqu'à la circonférence les droites qui font des angles égaux au point o. On a certaines lignes menées du point o à l'hélice, qui se surpassent également (12), dont la plus grande est la ligne OA et la plus petite la ligne OE. On a de plus d'autres lignes menées du centre o à la circonférence du cercle AZHI, qui sont en même nombre que les premières et qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande de celles-ci; et l'on a construit des secteurs semblables non-seulement sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande, mais encore sur celles qui se surpassent également, excepté sur la plus petite. Donc la raison de la somme des secteurs qui sont construits sur les lignes égales à la plus grande à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, le secteur construit sur la plus petite étant excepté, est moindre que la raison du quarré de la plus grande

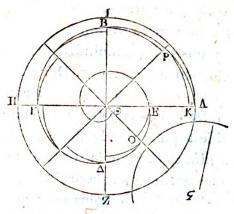


à la surface comprise sous AO, OE, conjointement avec le tiers du quarré de AE. Ce qui est démontré (11, Cor.). Mais le cercle AZHI est égal à la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande; et la figure circonscrite est égale à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus petite étant excepté. Donc la raison du cercle AZHI à la figure circonscrite est moindre que la raison du quarré de AO à la surface comprise sous AO, OE, conjointement avec

le tiers du quarré de AE. Mais la raison du quarré de Θ A à la surface comprise sous Θ A, AE, conjointement avec le tiers du quarré de AE est égale à la raison du cercle AZHI au cercle \mathcal{T} ; donc la raison du cercle AZHI à la figure circonscrite est moindre que la raison du cercle AZHI au cercle \mathcal{T} . Donc le cercle \mathcal{T} est plus petit que la figure circonscrite. Mais il n'est pas plus petit, puisqu'au contraire il est plus grand; donc le cercle \mathcal{T} n'est pas plus grand que la surface comprise par l'hélice ABIDE et par la droite AE.

Le cercle 7 n'est pas plus petit que cette surface. Qu'il soit plus petit, si cela est possible. On peut inscrire dans la surface comprise par l'hélice et par la droite AE une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la surface comprise par l'hélice ABIAE et par la droite AE sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès de cette même surface sur le cercle 7. Inscrivons cette figure. Que parmi les secteurs dont la figure inscrite est composée, le plus grand soit le secteur OKP, et le plus petit, le secteur OEO. Il est évident que la figure inscrite sera plus rande que le cercle 7.

Prolongeons jusqu'à la circonférence du cercle les droites qui forment des angles égaux au point o. On a de nouveau certaines



lignes menées du point o à l'hélice, qui se surpassent également, dont la plus grande est la ligne oa, et la plus petite, la ligne oe. On a de plus d'autres lignes menées du point o à la circonférence du cercle, dont le nombre est plus petit d'une unité que ce-lui des lignes inégales, et qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande; et l'on a construit des secteurs semblables non-seulement sur les lignes qui se surpassent également, mais encore sur celles qui sont égales chacune à la plus grande. Donc la raison de la somme des secteurs construits

sur les lignes' qui sont égales chacune à la plus grande à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus petite étant excepté, est plus grande que la raison du quarré construit sur OA à la surface comprise sous OA, OE, conjointement avec le tiers du quarré de EA (11, Cor.). Mais la figure inscrite est composée de secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus grande étant excepté; et le cercle est égal à la somme de tous les autres secteurs; donc la raison du cercle AZHI à la figure inscrite est plus grande que la raison du quarré de OA à la surface comprise sous OA, OE, conjointement avec le tiers du quarré de AE, c'est-à-dire plus grande que la raison du cercle AZHI au cercle 7. Donc le cercle 7 est plus grand que la figure inscrite. Ce qui ne peut être; car il est plus petit. Donc le cercle τ n'est pas plus petit que la surface comprise par l'hélice ABTAE et par la droite ΔE. Donc il lui est égal.

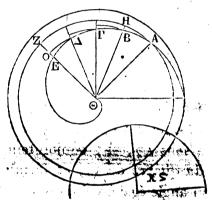
On démontrera de la même manière que la surface comprise par une hélice et par une droite dénommées d'après le nombre des révolutions, est au cercle dénommé d'après le nombre des révolutions comme la somme des deux surfaces suivantes, savoir: la surface comprise sous le rayon du cercle dénommé d'après le nombre des révolutions et sous le rayon du cercle dénommé d'après ce même nombre diminué d'une unité, et le tiers du quarré construit sur l'excès du rayon du plus grand de ces deux cercles sur le rayon du plus petit est au quarré du rayon du plus grand.

PROPOSITION XXVI.

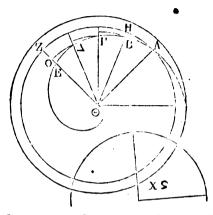
La surface comprise par une hélice plus petite que celle qui est décrite dans la première révolution, et qui n'a pas pour extrémité l'origine de l'hélice, et par les droites menées par ses extrémités à son origine, est au secteur dont le rayon est égal à la plus grande des droites menées des extrémités de l'hélice à son origine, et dont l'arc est celui qui est placé entre les droites dont nous venons de parler, et du même côté de l'hélice comme la surface comprise sous les droites.

menées des extrémités de l'hélice à son commencement, conjointement avec le tiers du quarré de l'excès de la plus grande des lignes dont nous venons de parler sur la plus petite, est au quarré de la plus grande des droites qui sont menées des extrémités de l'hélice à son commencement.

Que ABTAE soit une hélice plus petite que



celle qui est décrite dans la première révolution. Que ses extrémités soient les points A, E, et son commencement le point O. Du point O comme centre et avec l'intervalle OA décrivons un cercle. Que la droite OE rencontre sa circonférence au point z. Il faut démontrer que la surface comprise par l'hélice ABIAE, et par les droites AO, OE est au secteur AOZ comme la surface comprise sous AO, OE, conjointement avec le tiers du quarré de EZ, est au quarré de OA.



Que le quarré du rayon du cercle où se trouvent les lettres x7 soit égal à la surface comprise sous A0, OE, conjointement avec le tiers du quarré de Ez, et formons à son centre un angle égal à celui qui est formé au point O. Le secteur 7 x sera au secteur OAZ comme la surface comprise sous AO, OE, conjointement avec le tiers du quarré de Ez, est au quarré de OA; car les quarrés des rayons de ces secteurs sont entre eux comme ces mêmes secteurs.

Nous allons démontrer à présent que le secteur z rest égal à la surface comprise par

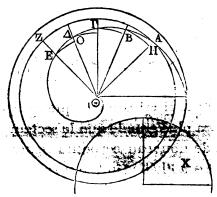
l'hélice ABIAE et par les droites AO, OE. Car si ce secteur n'est pas égal à cette surface, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. On peut circonscrire à la surface dont nous venons de parler, une figure plane composée : de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la surface dont nous venons de parler soit plus petite que l'excès du secteur sur cette même surface (23). Que cette figure soit circonscrite. Que parmi les secteurs dont la figure circonscrite est composée, le plus grand soit le secteur OAH, et le plus petit le secteur OOA. Il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le secteur x7.

Prolongeons, jusqu'à l'arc du secteur ΘAZ , les droites qui font des angles égaux au point Θ . On a certaines lignes menées du point Θ à l'hélice, qui se surpassent également, dont la plus grande est la ligne ΘA , et la plus petite, la ligne ΘE . On a aussi d'autres lignes dont le nombre est moindre d'une unité que le nombre des lignes menées du point Θ à l'hélice, et ces lignes sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande

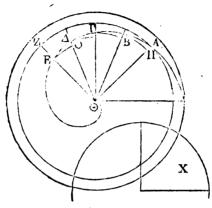
de celles-ci, la droite oz étant exceptée; et de plus on a construit des secteurs semblables sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande et sur les lignes qui se surpassent également; et l'on n'a pas construit · de secteur sur la ligne OE. Donc la raison de la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus petite étant excepté, est moindre que la raison du quarré de OA à la surface comprise sous AO, OE, conjointement avec le tiers du quarré de EZ (11, Cor.). Mais le secteur OAZ est égal à la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande: et la figure oirconscrite est égale à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également. Donc la raison du secteur OAZ à la figure circonscrite est moindre que la raison du quarré de 🗛 à la surface comprise sous OA, OB, conjointement avec le tiers du quarré de zE. Mais la raison du quarré de oa à la somme des surfaces

dont nous venons de parler est la même que la raison du secteur ØAZ au secteur XF; donc le secteur XF est plus petit que la figure circonscrite. Mais il n'est pas plus petit, puisqu'il est au contraire plus grand; donc le secteur XF ne sera pas plus grand que la surface comprise par l'hélice ABTAE et par les droites AØ, ØE.

Le secteur x7 ne sera pas plus petit que



cette même surface. Qu'il soit plus petit, si cela est possible. Faisons les mêmes choses qu'auparavant. On pourra inscrire dans la surface dont nous avons parlé une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de cette surface sur la figure inscrite soit moindre que l'excès de cette même surface sur le secteur x. Inscrivons cette figure. Que parmi les secteurs dont la figure inscrite est composée, le plus grand soit le secteur ©BH, et le plus petit, le



secteur 00E. Il est évident que la figure inscrite sera plus grande que le secteur x.

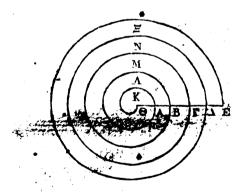
On a de nouveau certaines lignes menées du point Θ à l'hélice qui se surpassent également, dont la plus grande est la ligne Θ A, et la plus petite la ligne Θ E. On a aussi d'autres lignes menées du point Θ à l'arc du secteur Θ AZ, dont le nombre est moindre d'une unité que le nombre des lignes menées du point Θ à l'hélice, et ces lignes sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande de celles-ci, la ligne Θ A étant ex-

ceptée; et de plus on a construit des secteurs semblables sur chacune de ces lignes, et l'on n'a pas construit de secteur sur la plus grande de celles qui se surpassent également. Donc la raison de la somme des secteurs construits sous les lignes qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, excepté celui qui est construit sur, la plus grande, est plus grande que la raison du quarré de OA à la surface comprise sous OA, OE, conjointement avec le tiers du quarré de EZ (11, Cor.). Donc la raison du secteur OAZ à la figure inscrite est plus grande que la raison du secteur OAZ au secteur x. Donc le secteur x est plus grand que la figure inscrite. Mais il n'est pas plus grand, puisqu'il est au contraire plus petit. Donc le secteur x n'est pas plus petit que la surface comprise par l'hélice ABTAE et par les droites AO, OE. Donc il lui est égal.

PROPOSITION XXVII.

Parmi les surfaces comprises par des hélices et par les droites qui sont dans le commencement des révolutions, la troisième est double de la seconde; la quatrième, triple; la cinquième, quadruple, et ainsi de suite, c'est-à-dire que toujours la surface qui suit est un multiple qui croît suivant l'ordre des nombres. La première surface est la sixième partie de la seconde.

Soit proposée une hélice décrite dans la

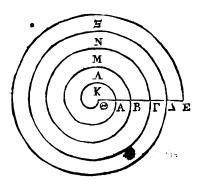


première révolution; une hélice décrite dans la seconde, et enfin des hélices décrites dans toutes les révolutions suivantes. Que le commencement de l'hélice soit le point 0, et le commencement de la révolution, la droite OE. Que la première des surfaces soit K; la seconde, A; la troisième, M; la quatrième, N; la cinquième, Z. Il faut démontrer que la surface K est la sixième partie de celle qui suit; que la surface M est double de la surface A; que la surface N est triple de cette même surface; et que toujours les surfaces qui se suivent par ordre sont des multiples qui se suivent aussi par ordre.

On démontrera de cette manière que la surface κ est la sixième partie de la surface κ . Puisque l'on a démontré que la surface κ est au second cercle comme sept est à douze (25); puisque le second cercle est évidemment au premier comme douze est à trois (a); et puisque le premier cercle est à la surface κ comme trois est à un (24), il s'ensuit que la surface κ est la sixième partie de la surface κ (6).

On a démontré que la surface KAM est au troisième cercle comme la surface comprise sous 10, 08, conjointement avec le tiers du quarré 18 est au quarré de 10 (25). De plus, le troisième cercle est au seçond comme le quarré de 10 est au quarré de 08; et le se-

cond cercle est à la surface KA contme le quarré de BO est à la surface comprise sous BO, OA, conjointement avec le tiers du quarré de AB (25). Donc la surface KAM est à la surface KA comme la surface comprise sous TO, OB, conjointement avec le tiers du quarré



de rB est à la surface comprise sous BO, ΘA, conjointement avec le tiers du quarré de AB. Mais ces surfaces sont entre elles comme dix-neuf est à sept; donc la surface KAM est à AK comme dix-neuf est à sept; donc la surface M est à la surface KA comme douze est à sept. Mais la surface KA est à la surface A comme sept est à six; donc la surface M est double de la surface A (γ).

On démontrera de cette manière que les surfaces suivantes sont égales à la surface A,

multipliée successivement par les nombres qui viennent ensuite.

La surface KAMNE est au cercle qui a pour rayon la droite OE comme la surface comprise sous OE, OA, conjointement avec le. tiers du quarré de DE est au quarré de OE (25). Mais le cercle qui a pour rayon la droite OE est au cercle qui a pour rayon la droite $\Theta\Delta$ comme le quarré de 0E est au quarré de 0A; et le cercle qui a pour rayon od est à la surface KAMN comme le quarré de 0A est à la surface comprise sous OA, OI, conjointement avec le tiers du quarré de Ar. Donc la surface KAMNE est à la surface KAMN comme la surface comprise sous OE, OA, conjointement avec le tiers du quarré de AE, est à la surface comprise sous $\Delta \Theta$, $\Theta \Gamma$, conjointement avec le tiers du quarré de Ar. Donc, par soustraction, la surface z est à la surface kann comme l'excès de la surface comprise sous EO, OA, conjointement avec le tiers du quarré de EA sur la surface comprise sous OA, Ar, conjointement avec le fiers du quarré de Ar, est à la surface comprise sous ΘΔ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de Ar. Mais l'excès de la somme des deux pre-

mières surfaces sur la somme des deux secondes est égale à l'excès de la surface comprise sous EO, OA sur la surface comprise sous $\Delta \Theta$, $\Theta \Gamma$, c'est-à-dire à la surface comprise sous $\Delta\Theta$, re. Donc la surface z est à la surface KAMN comme la surface comprise sous $\Theta\Delta$, re est à la surface comprise sous ΔΘ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de TA. On démontrera de la même manière que la surface n est à la surface comprise sous KA, AM, comme la surface comprise sous or, BA est à la surface comprise sous ro, ob, conjointement avec le tiers du quarré de IB. Donc la surface N est à la surface KAMN comme la surface comprise sous Or, BA est à la surface comprise sous Or, OB, conjointement avec le tiers du quarré de IB, et avec la surface comprise sous er, BA; et par conversion..... (5). Mais la somme de ces surfaces est égale à la surface comprise sous ΔΘ, Θr, conjointement avec le tiers du quarré de ra; donc, puisque la surface z est à la surface KAMN comme la surface comprise sous $\Theta\Delta$, TE est à la surface comprise sous $\Delta\Theta$, Θ r, conjointement avec le tiers du quarré de 1A; que la surface KAMN est à la

surface N comme la surface comprise sous $\Delta\Theta$, Θ r, conjointement avec le tiers du quarré de $\Gamma\Delta$ est à la surface comprise sous Θ r, ΔB , la surface Ξ sera à la surface N comme la surface comprise sous $\Theta\Delta$, ΓE est à la surface comprise sous Θ r, ΔB . Mais la surface comprise sous Θ r, ΔB comme Θ r est à la surface comprise sous Θ r, ΔB comme Θ r est à Θ r; parce que les droites ΓE , Br sont égales entre elles. Il est donc évident que la surface Ξ est à la surface Σ comme Θ r.

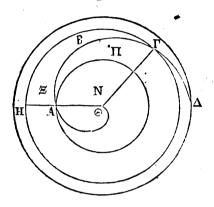
On démontrera semblablement que la surface N est à la surface M comme et est à OB; et que la surface M est à la surface A comme BO est à AO. Or les droites EO, AO, TO, BO, AO son entre elles comme des nombres pris de suite.

PROPOSITION XXVIII.

Si dans une hélice décrite dans une révolution quelconque, on prend deux points qui ne soient pas ses extrémités, si l'on mène de ces points des droites au commencement de l'hélice, et si du commencement de l'hélice comme centre et avec des intervalles égaux aux droites menées au commencement de l'hélice, on décrit des cercles; la surface comprise tant par l'arc du plus grand cercle placé entre ces droites, que par la portion de l'hélice placée entre ces mêmes droites, et par le prolongement de la plus petite de ces droites sera à la surface comprise tant par l'arc du plus petit cercle que par la même portion de l'hélice et par la droite qui joint leurs extrémités comme le rayon du plus petit cercle, conjointement avec les deux tiers de l'excès du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit cercle est au rayon du plus petit cercle, conjointement avec le tiers de son excès.

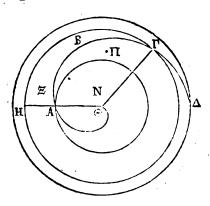
Soit l'hélice ABTA décrite dans la première révolution. Prenons dans cette hélice les deux points A, Γ. Que le point Θ soit son commencement; des points A, Γ menons des droites au point Θ; et du point Θ comme centre et avec les intervalles ΘA, ΘΓ, décrivons des cercles. Il faut démontrer que la surface z est à la surface π comme la droite ΘA, conjointement avec les deux tiers de la droite HA est à la droite ΘA, conjointement avec le tiers de HA.

Car on a démontré que la surface NII est au secteur HIO comme la surface comprise sous HO, AO, conjointement avec le tiers du quarré de AH est au quarré de HO (26). Donc



la surface est à la surface NII comme la surface comprise sous OA, AH, conjointement avec les deux tiers du quarré de HA est à la surface comprise sous AO, OH, conjointement avec le tiers du quarré de HA (a). Mais la surface NII est au secteur NIIE comme la surface O comprise sous OA, OH, conjointement avec le tiers du quarré de HA, est au quarré de OH; et le secteur NIIE est au secteur N comme le quarré de OH est au quarré de OA. Donc la surface NII sera au secteur N comme la surface comprise sous

OA, OH, conjointement avec le tiers du quarré de на, est au quarré OA. Donc la surface и est à la surface и comme la surface comprise sous но, ОА, conjointement



avec le tiers du quarré de HA, est à la surface comprise sous HA, OA, conjointement avec le tiers du quarré de HA. Mais la surface z est à la surface NII comme la surface comprise sous OA, AH, conjointement avec les deux tiers du quarré de HA, est à la surface comprise sous HO, OA, conjointement avec le tiers du quarré de HA; et la surface NII est à la surface II comme la surface comprise sous HO, OA, conjointement avec le tiers du quarré de HA, est à la surface comprise sous HA, AO, conjointement avec le tiers du quarré

de HA. Donc la surface z sera à la surface n comme la surface comprise sous OA, HA, conjointement avec les deux tiers du quarré de HA, est à la surface comprise sous OA, HA, conjointement avec le tiers du quarré de HA. Mais la surface comprise sous OA, HA, conjointement avec les deux tiers du quarré de HA est à la surface comprise sous OA, HA, conjointement avec le tiers du quarré de HA comme la droite ØA, conjointement avec les deux tiers de la droite HA est à la droite OA, conjointement avec le tiers de la droite HA. Il est donc évident que la surface z est à la surface N comme la droite OA, conjointement avec les deux tiers de la droite HA, est à la droite ea, conjointement avec le tiers de la droite на.

FIN DES HÉLICES.

οU

DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉS.

LIVRE PREMIER.

DEMANDES.

- 1. Des graves égaux suspendus à des longueurs égales sont en équilibre (a).
 - 2°. Des graves égaux suspendus à des longueurs inégales ne sont point en équilibre; et celui qui est suspendu à la plus grandelongueur est porté en bas.
 - 3°. Si des graves suspendus à de certaines longueurs sont en équilibre, et si l'on ajoute quelque chose à un de ces graves, ils ne sont plus en équilibre; et celui auquel on ajoute quelque chose est porté en bas.
 - 4°. Semblablement, si l'on retranche quelque chose d'un de ces graves, ils ne sont plus en équilibre; et celui dont on n'a rien retranché est porté en bas.

- 5°. Si deux figures planes égales et semblables sont appliquées exactement l'une sur l'autre, leurs centres de gravité seront placés l'un sur l'autre.
- 6°. Les centres de gravité des figures inégales et semblables sont semblablement placés.

Nous disons que des points sont semblablement placés dans des figures semblables, lorsque les droites menées de ces points à des angles égaux forment des angles égaux avec les côtés homologues.

- 7°. Si des grandeurs suspendues à de certaines longueurs sont en équilibre, des grandeurs égales aux premières suspendues aux mêmes longueurs seront encore en équilibre.
- 8°. Le centre de gravité d'une figure quelconque dont le contour est concave du même côté, se trouve nécessairement en dedans de la figure.

Cela posé, je procède ainsi qu'il suit:

PROPOSITION I.

Lorsque des graves suspendus à des longueurs égales sont en équilibre, ces graves sont égaux entre eux.

Car s'ils étoient inégaux, après avoir ôté du plus grand son excès, les graves restans ne seroient pas en équilibre, puisque l'on auroit ôté quelque chose d'un des graves qui sont en équilibre (Dem. 3). Donc lorsque des graves suspendus à des longueurs égales sont en équilibre, ces graves sont égaux entre eux.

PROPOSITION II.

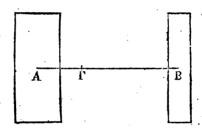
Des graves inégaux suspendus à des longueurs égales ne sont pas en équilibre; et le grave qui est le plus grand est porté en bas.

Car ayant ôté l'excès, ces graves seront en équilibre, parce que des graves égaux suspendus à des longueurs égales sont en équilibre (*Dem.* 1). Donc, si l'on ajoute ensuite ce qui a été ôté, le plus grand des deux graves sera porté en bas, car on aura ajouté quelque chose à un des graves qui sont en équilibre (Dem. 3).

PROPOSITION III.

Des graves inégaux suspendus à des longueurs inégales peuvent être en équilibre, et alors le plus grand sera suspendu à la plus petite longueur.

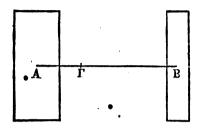
Que A, B soient des graves inégaux, et



que A soit le plus grand. Que ces graves suspendus aux longueurs AI, IB soient en équilibre. Il faut démontrer que la longueur AI est plus petite que la longueur IB.

Que la longueur ar ne soit pas la plus petite. Retranchons l'excès de a sur B. Puisque l'on a ôté quelque chose d'un des graves qui sont en équilibre, le grave B sera porté en bas (Dem. 4). Mais ce grave ne sera

point porté en bas; car si ra est égal à re, il y aura équilibre (Dem. 1); et si ra est plus grand que re, ce sera au contraire le grave a qui sera porté en bas; puisque des graves

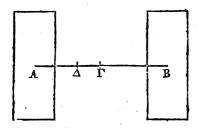


égaux suspendus à des longueurs inégales ne restent point en équilibre, et que le grave suspendu à la plus grande longueur est porté en bas (Dem. 2). Donc la est plus petit que le la plus graves suspendus à des longueurs inégales sont en équilibre, il est évident que ces graves seront inégaux, et que le plus grand sera suspendu à la plus petite longueur.

PROPOSITION IV.

Si deux grandeurs égales n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux grandeurs est le point placé au milieu de ladroite qui joint les centres de gravité de ces deux grandeurs (a).

Que le point A soit le centre de gravité de la grandeur A, et le point B le centre de

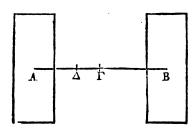


gravité de la grandeur B. Ayant mené la droite AB, partageons cette droite en deux parties égales au point r. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B est le point r.

Car, si le point r n'est pas le centre de gravité de la grandeur qui est composée des deux grandeurs A, B, supposons, si cela est possible, que ce soit le point Δ . Il est démontré que le centre de gravité est dans la droite AB (6). Puisque le point Δ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B, le point Δ étant soutenu, les grandeurs A, B seront en équi-

8

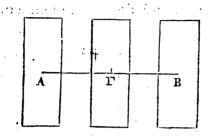
libre. Donc les grandeurs A, B suspendues aux longueurs AA, AB sont en équilibre. Ce qui ne peut être; car des grandeurs égales



suspendues à des longueurs inégales ne sont point en équilibre (Dem. 2). Il est donc évident que le point r est le centre de gravité de la grandeur qui est composée des grandeurs A, B.

PROPOSITION V.

Si les centres de gravité de trois grandeurs sont placés dans une même droite; si ces grandeurs ont la même pesanteur, et si les droites placées entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point qui est le centre de gravité de la grandeur du milieu. Soient les trois grandeurs A, B, T; que leurs centres de gravités soient les points A, B, T placés dans une même droite; et que les grandeurs A, B, T soient égales entre elles

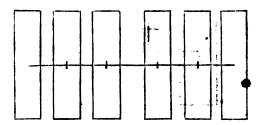


ainsi que les droites Ar, TB. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point r.

Car, puisque les grandeurs A, B ont la même pesanteur, leur centre de gravité sera le point r (4); car les droites Ar, rB sont égales. Mais le point r est aussi le centre de gravité de la grandeur r; il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point qui est le centre de gravité de la grandeur du milieu.

Il suit évidemment de-là que, si les centres de gravité de tant de grandeurs que l'on voudra et d'un nombre impair, sont dans la

même droite, si celles qui sont également éloignées de celle qui est au milieu ont la même pesanteur, et si les droites comprises entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée



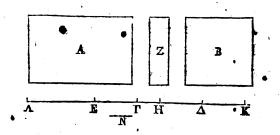
de toutes les grandeurs sera le point qui est le centre de gravité de la grandeur du milieu.

Si ces grandeurs sont d'un nombre pair, si leurs centres de gravité sont dans la même droite, si celles du milieu et celles qui sont également éloignées de part et d'autre des grandeurs du milieu ont la même pesanteur, et si les droites placées entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point placé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité, ainsi que cela est représenté dans la figure (a).

PROPOSITION VI.

Des grandeurs commensurables sont en équilibre, lorsqu'elles sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues.

Soient les grandeurs commensurables A, B; que leurs centres de gravité soient les points A, B; soit une certaine longueur EA; et que la grandeur A soit à la grandeur B

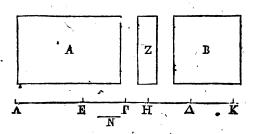


comme la longueur Δr est à la longueur re. Il faut démontrer que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs. A, B, est le point r.

Puisque A est à B comme Ar est à IE, et que les grandeurs A, B sont commensurables, les droites IA, IE seront aussi commensurables,. c'est-à-dire qu'elles seront entre elles comme

une droite est à une droite. Donc les droites. EI, IA ont une commune mesure. Que cette commune mesure soit N. Supposons que chacune des droites AH, AK soit égale à la droite Er et que la droite en soit égale à la droite Δr. Puisque la droite ΔH est égale à la droite TE, la droite Ar sera égale à la droite EH, et la droite AE égale à la droite EH. Donc la droite AH est double de la droite Ar Jet la droite нк double de la droite ге. Donc la droite n mesure chacune des droites AH. нк, puisqu'elle mesure leurs moitiés. Mais A est à.B comme la droite ar està la droite Er, et la droite Ar est à la droite re comme la droite лн est à la droite нк, puisque les droites AH, HK sont doubles des droites ΔΓ, ΓΕ; donc A est à B comme AH est à HK. Que A soit autant de fois multiple de z que AH l'est de N. La droite AH sera à la droite N comme A està z. Mais KH est à AH comme B est à A: donc, par raison d'égalité, la droite ku est à la droite N comme B est à z. Donc autant de fois ku est multiple de n, autant de fois B l'est de z. Mais on a démontré que A est aussi un multiple de z. Donc z est la commune mesure de A et de B. Donc si AH est.

partagé dans des segmens égaux chacun à N, et A dans des segmens égaux chacun à Z, les segmens égaux chacun à N, qui sont dans AH, seront en même nombre que les segmens égaux chacun à Z qui sont dans A. Donc si à chacun des segmens de AH, on applique une

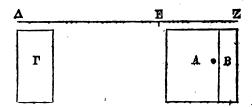


grandeur égale à z, qui ait son centre de gravité dans le milieu de chacun des segmens, toutes ces grandeurs seront égales à A, et le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point E; car elles sont en nombre pair, attendu que AE est égal à HE (5). On démontrera semblablement que si à chacun des segmens de KH, on applique une grandeur égale à z, qui ait son centre de gravité au milieu de chacun de ces segmens, toutes ces grandeurs seront égales à B, et que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le

point A. Mais la grandeur A est appliquée au point E et la grandeur B au point A; donc certaines grandeurs égales entre elles sont placées sur une droite; leurs centres de gravité ont entre eux le même intervalle, et ces grandeurs sont en nombre pair. Il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point placé au milieu de la droite, sur laquelle sont les centres de gravité des grandeurs moyennes (5). Mais la droite AE est égale à la droite ro et la droite er égale à la droite Δκ; donc la droite entière AF est égale à la droite entière TR. Donc le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point r. Done la grandeur a étant appliquée au point E, et la grandeur B au point A, ces grandeurs seront en équilibre autour du point r (&).

PROPOSITION VII.

Des grandeurs incommensurables sont en équilibre, lorsque ces grandeurs sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues. Que les grandeurs AB, I soient incommensurables, et que AE, EZ soient les longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues. Que la grandeur AB soit à la grandeur I



comme la longueur EA est à la longueur EZ. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs AB, r est le point E.

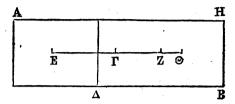
Car si les grandeurs AB, T ne sont pas en équilibre, lorsque l'une est appliquée au point z et l'autre au point A, la grandeur AB est trop grande, par rapport à la grandeur T, pour qu'elle soit en équilibre avec elle, ou elle n'est pas assez grande; que la grandeur AB soit trop grande. Retranchons de AB moins qu'il ne faudroit pour rétablir l'équilibre, mais juste ce qu'il faut pour ôter l'incommensurablité. Les grandeurs A, T seront commensurables. Mais la raison de AB T sera moindre que la raison de AB D

EZ; donc les grandeurs A, r suspendues aux longueurs ΔE , EZ ne seront point en équilibre, lorsque l'une sera appliquée au point z et l'autre au point Δ (6). Par la même raison, elles ne seront point en équilibre, si on suppose que la grandeur r est trop grande, par rapport à la grandeur AB, pour qu'elle puisse être en équilibre avec elle (α).

PROPOSITION VIII.

Si d'une grandeur quelconque, on retranche une certaine grandeur qui n'ait pas le même centre de gravité que la grandeur entière, pour avoir le centre de gravité de la grandeur restante, il faut prolonger, vers le côté où est le centre de gravité de la grandeur entière, la droite qui joint les centres de gravité de la grandeur totale et de la grandeur retranchée; prendre ensuite sur le prolongement de la droite qui joint les centres de gravité dont nous venons de parler, une droite qui soit à la droite qui joint les centres de gravité comme la pesanteur de la grandeur retranchée est à la pesanteur de la grandeur restante, le centre de gravité de la grandeur restante sera l'extrémité de la droite prise sur le prolongement (a).

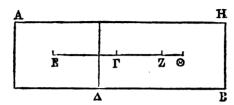
Que le point r soit le centre de gravité



d'une grandeur AB. De AB retranchons une grandeur AA, dont le centre de gravité soit le point E. Ayant mené la droite EF et l'ayant prolongée, retranchons de son prolongement une partie TZ qui soit à la droite TE comme la grandeur AA est à la grandeur AH. Il faut démontrer que le point z est le centre de gravité de la grandeur AH.

Que le point z ne soit pas le centre de gravité de ΔH , mais bien un autre point Θ , si cela est possible. Puisque le point E est le centre de gravité de la grandeur $A\Delta$, et le point Θ le centre de gravité de la grandeur ΔH , le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs $A\Delta$, ΔH sera dans la droite E Θ partagée de manière que ses segmens soient réciproquement proportionnels à ces deux grandeurs (6 et 7) (6). Donc

le point r ne coïncidera pas avec la section dont nous venons de parler. Denc le point r n'est pas le centre de gravité de la gran-



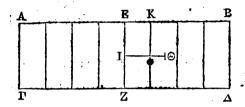
deur composée des deux grandeurs AA, AH, c'est-à-dire de AB. Mais il l'est par supposition; donc le point e n'est pas le centre de gravité de la grandeur AH.

PROPOSITION IX.

Le centre de gravité d'un parallélogramme quelconque est dans la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés.

Soit le parallélogramme ABIA, dont les milieux des côtés AB, IA sont joints par la droite EZ. Je dis que le centre de gravité du parallélogramme ABIA est dans la droite EZ.

Que cela ne soit point ainsi; et supposons, si cela est possible, que le point e soit le centre de gravité. Menons la droite en parallèle à AB. Si la droite EB est continuellement partagée en deux parties, il restera enfin un segment plus petit que en Partageons donc chacune des droites AE, EB dans des segmens égaux chaçun à EK, et par les



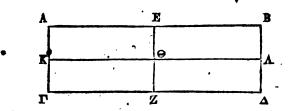
points de division conduisons des droites parallèles à ez. Le parallélogramme entier sera divisé dans des parallélogrammes égaux et semblables chacun à kz. Donc ces parallélogrammes égaux et semblables chacun au parallélogramme kz, étant appliqués exactement les uns sur les autres, leurs centres de gravité s'appliqueront aussi exactement les uns sur les autres (Dem. 4). Donc ces parallélogrammes seront certaines grandeurs égales chacune à KZ, et en nombre pair, ayant leurs centres de gravité placés dans la même droite (a). Mais les grandeurs moyennes sont égales, et ainsi que toutes celles qui sont également distantes de part et d'autre des moyennes, et les droites placées entre le

centre de gravité sont aussi égales entre elles; donc le centre de gravité de la grandeur qui est composée de toutes ces grandeurs, est dans la droite qui joint les centres de gravité des grandeurs moyennes (5). Mais cela n'est point, puisque le point e tombe audelà de la moitié des parallélogrammes. Il est donc évident que le centre de gravité du parallélogramme est dans la droite Ez.

PROPOSITION X.

Le centre de gravité d'un parallelogramme est le point où les deux diagonales se rencontrent.

Soit le parallélogramme ABTA; que EZ

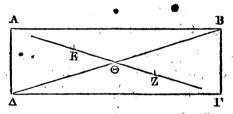


coupe les côtés AB, rA, en deux parties égales, et que KA coupe aussi les côtés Ar, BA en deux parties égales. Le centre de gravité du parallélogramme ABIA sera dans la

droite Ez; ce qui a été démontré (9). Par la même raison, il sera aussi dans la droite KA. Donc le point e est le centre de gravité. Mais les diagonales se rencontrent au point e; donc la proposition est démontrée.

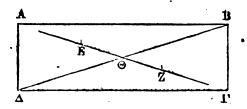
On peut encore démontrer autrement cette proposition.

Soit le parallélogramme ABFA, dont AB est la diagonale. Les triangles ABA, BFA sont égaux et semblables. Donc ces triangles étant placés exactement l'un sur l'autre, leurs



centres de gravité seront appliqués l'un sur l'autre (Dem. 5). Que le point E soit le centre de gravité du triangle ABA. Partageons la droite AB en deux parties égales au point O. Ayant conduit la droite EO et l'ayant prolongée, prenons ZO égal à EO. Le triangle ABA étant appliqué exactement sur le triangle BAT, le côté AB sur le côté AT et le côté AA.

sur le côté Br, la droite en s'appliquera exactement sur la droite ze et le point ne sur le point z. Mais le centre de gravité du triangle ABA s'applique exactement sur le

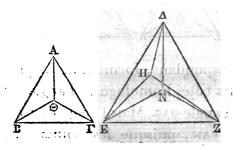


centre de gravité du triangle BTA (Dem. 5); donc puisque le centre de gravité du triangle ABA est le point E, et que le centre de gravité du triangle ABT est le point z; il est évident que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux triangles, est le point placé au milieu de la droite Ez, qui est certainement le point o.

PROPOSITION XL

Si deux triangles sont semblables, si des points sont semblablement placés dans ces triangles, et si l'un de ces points est le centre de gravité du triangle dans lequel il est placé, l'autre point sera aussi le centre de gravité du triangle dans lequel il est placé. Nous disons que des points sont semblablement placés dans des figures semblables, lorsque les droites menées de ces points à des angles égaux font des angles égaux avec les côtés homologues.

Soient les deux triangles ABF, $\triangle EZ$; et que AF soit à $\triangle Z$ comme AB est à $\triangle E$, et comme BF est à EZ. Que dans les triangles dont nous

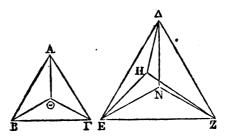


venons de parler, les points e, n soient semblablement placés, et que le point e soit le centre de gravité du triangle ABT. Je dis que le point n est aussi le centre de gravité du triangle AEZ.

Que le point N ne soit pas le centre de gravité du triangle ΔEZ , et que ce soit un autre point H, si cela est possible. Menons les droites ΘA , ΘB , $\Theta \Gamma$, ΔN , EN, ZN, ΔH , EH, ZH. Puisque les triangles $AB\Gamma$, ΔEZ sont

TOME II.

semblables, que leurs centres de gravité sont les points 0, H, et que les centres de gravité des figures semblables sont semblablement placés, c'est-à-dire que les droites menées des centres de gravité aux angles égaux

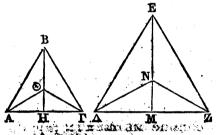


et correspondans, forment des angles égaux avec les côtés homologues, l'angle HAE sera égal à l'angle OAB. Mais l'angle OAB est égal à l'angle EAN, puisque les points O, N sont semblablement placés. Donc l'angle EAH est égal à l'angle EAN, c'est-à-dire que le plus grand est égal au plus petit; ce qui ne peut être. Donc le point N n'est pas le centre de gravité du triangle AEZ. Donc le point N dont nous avons parlé est son centre de gravité.

PROPOSITION XII.

Si.deux triangles sont semblables, et si le centre de gravité de l'un est dans la droite menée d'un des angles au milieu de la base, le centre de gravité de l'autre sera aussi dans une droite semblablement menée.

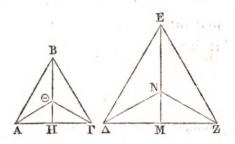
Soient les deux triangles ABF, AEZ. Que



Ar soit à $\triangle z$ comme AB est à $\triangle E$, et comme Br est à zE. Ayant partagé la droite Ar en deux parties égales au point H, menons la droite BH. Que le point Θ , pris dans la droite BH, soit le centre de gravité du triangle ABT. Je dis que le centre de gravité du triangle E\(\triangle\) sera aussi dans une droite semblablement menée.

Partageons Az en deux parties égales au point M, et menons la droite EM. Faisons en

sorte que BH soit à BΘ comme ME est à EN, et menons les droites AΘ, ΘΓ, ΔΝ, Nz. Puisque AH est la moitié de ΓΑ, et ΔM la moitié de Δz, la droite BA sera à la droite EΔ comme AH est à ΔM. Mais ces côtés qui sont proportionnels sont placés autour d'angles égaux;



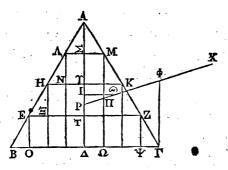
donc l'angle AHB est égal à l'angle AME. Donc AH est à AM comme BH est à EM. Mais BH est à BO comme ME est à EN (a); donc, par raison d'égalité, la droite AB est à la droite AE comme BO est à EN. Mais ces côtés qui sont proportionnels sont placés autour d'angles égaux; donc l'angle BAO est égal à l'angle EAN. Donc l'angle restant OAT est aussi égal à l'angle NAZ. Par la même raison, l'angle BEO est égal à l'angle EZN, et l'angle OFH égal à l'angle NZM. Mais on a démontré que l'angle ABO est égal à l'angle AEM; donc l'angle restant OBT est aussi égal à l'angle NEZ.

D'où il suit que les points Θ , N sont semblablement placés sur des côtés homologues, et qu'ils forment des angles égaux. Donc les points Θ , N sont semblablement placés. Mais le point Θ est le centre de gravité du triangle ABF; donc le point N est aussi le centre de gravité du triangle Δ EZ (dem. 6).

PROPOSITION XIII.

Le centre de gravité d'un triangle quelconque est dans la droite qui est menée d'un des angles au milieu de la base.

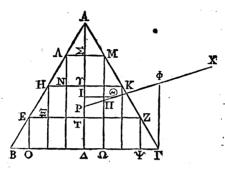
Soit le triangle ABF, et que dans ce trian-



gle la droite A soit menée au milieu de la base. Il faut démontrer que le centre de gravité du triangle ABT est dans la droite A.

Que cela ne soit point ainsi; et que le

point o soit son centre de gravité, si cela est possible. Par ce point conduisons la droite et parallèle à Br. Si la droite ar est continuellement partagée en deux parties égales, il restera enfin un segment moindre que oi. Partageons chacune des droites BA, Ar en segmens égaux; par les points de division conduisons des parallèles à AA, et menons les droites Ez, HK, AM; ces droites seront parallèles à Br (a). Or, le centre de gravité du parallélogramme MN est dans la droite YI, celui du parallélogramme KE, dans la droite Tr, et enfin celui du parallélogramme zo, dans la droite TA. Donc le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est dans la droite 22 (5). Que son centre de gravité soit le point P. Menons la droite Po, et ayant prolongé cette droite, conduisons la droite ro parallèle à AA. Le triangle ADI est à la somme de tous les triangles qui sont semblables au triangle AAr et qui sont construits sur les droites AM, MK, KZ, ZT, comme ra est à am; parce que les droites AM, MK, KZ, Zr sont égales entre elles (6). Mais le triangle ADB est aussi à la somme de tous les triangles construits sur les droites. AA, AH, HE, EB comme BA est à AA; donc le triangle ABF est à la somme de tous les triangles dont nous venons de parler comme FA est à AM. Mais la raison de FA à AM est plus



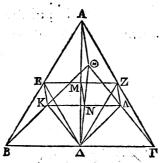
grande que la raison de op à po; car sa est à am comme op est à pn, parce que les triangles sont semblables (7); donc la raison du triangle Abr à la somme des triangles dont nous avons parlé est plus grande que la raison de op à po. Donc par soustraction, la raison de la somme des parallélogrammes mn, ke, zo à la somme des triangles restans est plus grande que la raison de op à op. Que la droite xo soit à la droite op comme la somme des parallélogrammes est à la somme des triangles. Puisque l'on a une certaine grandeur Abr dont le centre de gravité est le point o, que de cette grandeur on a ôté une

grandeur composée des parallélogrammes mn. KE. ZO, et que le centre de gravité de la grandeur retranchée est le point P, le centre de gravité de la grandeur restante qui est composée des triangles restans sera dans la droite PO prolongée, et le prolongement de cette droite sera à la droite OP comme la grandeur retranchée est à la grandeur restante (8). Donc le point x est le centre de gravité de la grandeur composée des triangles restans. Ce qui ne peut être; car ayant conduit par le point x, et dans le plan du triangle ABT une droite parallèle à AA, tous les triangles seroient du même côté de cette droite, c'est-à-dire de l'un ou de l'autre côté. Donc la proposition est évidente.

AUTREMENT.

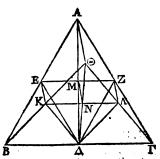
Soit le triangle ABT; menons la droite AA au milieu de BT. Je dis que le centre de gravité du triangle ABT est dans la droite AA.

Que cela ne soit pas ainsi, et que le centre de gravité soit le point e, si cela est possible. Menons les droites Ae, es, er, et les droites EA, ZE aux milieux de BA, Ar. Conduisons ensuite les droites EK, ZA parallèles à la droite AO, et menons enfin les droites KA, AA, AK, AO, MN. Puisque le triangle ABT est semblable au triangle AZT, à cause que BA est parallèle à ZA, et puisque le centre de gravité du



triangle ABT est le point Θ , le centre de gravité du triangle ZDT sera le point Λ ; car il est évident que les points Θ , Λ sont semblablement placés dans chaque triangle (a) (1.1). Par la même raison, le centre de gravité du triangle EBD est le point K. Donc le centre de gravité de la grandeur composée des triangles EBD, 2DT est au milieu de la droite KA, parce que les triangles EBD, ZDT sont égaux. Mais le point N est le milieu de KA, parce que BE est à EA comme BK est à Θ K, et que TZ est à ZA comme TA est à $\Lambda\Theta$. Donc, puisque cela est ainsi, la droite KA est parallèle à la

droite Br. Mais on a mené la droite $\Delta \Theta$; donc $B\Delta$ est à $\Delta\Gamma$ comme KN est à NA. Donc le centre de gravité de la grandeur composée des deux triangles, dont nous venons de parler, est le point N. Mais le centre de gravité du parallélogramme AE Δ Z est le point M; donc le centre de gravité de la grandeur composée



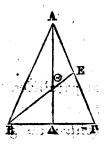
de toutes ces grandeurs est dans la droite MN. Mais le centre de gravité du triangle ABF est le point e; donc la droite MN prolongée passera par le point e. Ce qui est impossible. Donc le centre du triangle ABF n'est point hors de la droite AA. Il est donc dans cette droite.

PROPOSITION XIV.

Le centre de gravité d'un triangle quelconque est le point où se coupent mutuellement des droites menées des angles du triangle aux milieux des côtés.

Soit le triangle ABT. Conduisons la droite

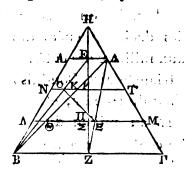
AA au milieu du côté Br, et la droite BE au milieu du côté Ar. Le centre de gravité du triangle ABr est dans les deux droites AA, BE, ce qui a été démontré (13). Donc le point o est le centre de gravité du triangle ABr.



PROPOSITION XV.

Le centre de gravité d'un trapèze quelconque ayant deux côtés parallèles, est dans la droite qui joint les milieux des deux côtés parallèles, partagée de manière que la partie placée vers le point où le plus petit des côtés parallèles est partagé en deux parties égales, soit à l'autre partie comme le double

du plus grand des côtés parallèles, conjointement avec le plus petit est au double du plus petit, conjointement avec le plus grand. Soit le trapéze ABTA, ayant les côtés AA,



Br parallèles. Que la droite Ez joigne les milieux des côtés AΔ, Br. Il est évident que le centre de gravité du trapèze est dans la droite Ez; car si nous prolongeons les droites rΔH, ZEH, BAH, ces droites se rencontreront en un même point (a). Donc le centre de gravité du triangle HBr est dans la droite HZ. Mais le centre de gravité du triangle AHΔ est aussi dans la droite EH; donc le centre de gravité du trapèze restant ABrΔ est aussi dans la droite EZ (8). Menons la droite BΔ, et partageons cette droîte en trois parties égales aux points κ, Θ; par ces points conduisons les droites ΛΘΜ, NKT parallèles à Br, et menons Az, BE, Oz. Le centre de gravité du triangle ABT sera dans OM, parce que OB est le tiers de BA (6), et que la droite MO a été conduite par le point o parallèlement à la base мо. Mais le centre du triangle ДВГ est dans la droite Δz ; donc le point z est le centre de gravité du triangle dont nous yenons de parler. Mais, par la même raison, le point o est le centre de gravité du triangle ABA; donc le centre de gravité de la grandeur composée des triangles ABA, BAT, c'est-àdire du trapèze, est dans la droite oz. Mais le centre de gravité du trapèze dont nous venons de parler est aussi dans la droite Ez; donc le point π est le centre de gravité du trapèze ABTA. Donc le triangle BTA est au triangle ABΔ comme on est à n= (6 et 7). Mais le triangle BAT est au triangle ABA comme вг est à AA, et on est à пя comme пр est à ΠΣ; donc BΓ est à AΔ comme PΠ est à ΠΣ. Donc aussi le double de Br, conjointement avec A est au double de A conjointement avec Br comme le double de PII, conjointement avec πz est au double de πz, conjointement avec пр. Mais le double de рп, conjointement avec πΣ est égal à ΣP, conjoin142 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

tement avec PΠ, c'est-à-dire à PE; et le double de ΠΣ, conjointement avec ΠΣ est-è-dire à ΠΖ. Donc la proposition est démontrée.

UO

DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉS.

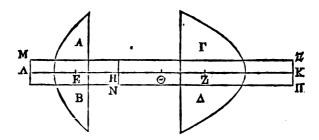
LIVRE SECOND.

PROPOSITION PREMIÈRE

Si deux surfaces qui sont comprises par une droite et par une parabole, et qui peuvent par conséquent s'appliquer sur une droite donnée, n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée des deux premières sera dans la droite qui joint les centres de gravité, la droite dont nous venons de panler étant partagée de manière que ses segmens soient réciproquement proportionnés aux surfaces paraboliques.

Soient deux surfaces AB, IA, telles que celles dont nous venons de parler. Que leurs

centres de gravité soient les points E, z, et que la surface AB soit à la surface ID comme zo est à OE. Il faut démontrer que le point



est le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs AB, ΓΔ.

Que chacune des droites ZH, ZK soit égale à EO, et la droite EA égale à la droite ZO, c'est-à-dire à la droite HE. La droite AO sera aussi ègale à la droite KO; et la surface AB sera à la surface IA comme AH est à HK; car chacune des droites AH, HK est double de chacune des droites ZO, OE. Appliquons sur la droite AH de l'un et de l'autre côté, la surface AB; de manière que la surface MN soit égale à la surface AB (a). Le centre de gravité de la surface NN sera le point E (1, 9). Achevons le rectangle NZ. La surface MN sera à la surface NZ Comme AH est à NK. Mais

la surface AB est à la surface ΓΔ comme ΛΗ est à ΗΚ; donc la surface AB est à la surface ΓΔ comme la surface MN est à la surface NZ, et par permutation...... Mais la surface AB est égale à la surface MN; donc la surface ΓΔ est égale à la surface NZ. Puisque le centre de gravité de NZ est le point Z, que la droite ΛΘ est égale à la droite ΘΚ, et que la droite entière ΛΚ partage les côtés opposés en deux parties égales, le point Θ sera le centre de gravité de la surface entière ΠΜ (1,9). Mais la surface ΜΠ est égale à une surface composée de MN, NΣ; donc le point Θ est le centre de gravité de la surface composée des surfaces AB, ΓΔ.

Si dans le segment qui est compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment; si dans les segmens restans ont inscrit des triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segmens, et si l'on continue d'inscrire de la même manière des triangles dans les segmens restans, la figure produite est dite inscrite régulièrement dans le segment (6). Il est évident que les droites qui joignent les angles

10

de la figure inscrite de cette manière, nonseulement ceux qui sont les plus près du
sommet, mais encore ceux qui viennent ensuite, seront parallèles à la base du segment.
Ces droites seront coupées en deux parties
égales par le diamètre dù segment; et ces
mêmes droites couperont le diamètre de manière que ses segmens, en comptant pour
un celui qui est vers le sommet, seront
entre eux comme les nombres successivement impairs. Ce qu'il faut démontrer (2).

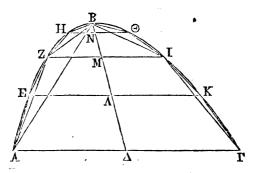
PROPOSITION II.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit régulièrement une figure rectiligne, le centre de gravité de la figure rectiligne sera dans le diamètre du segment.

Que le segment ABT soit tel que celui dont nous venons de parler. Inscrivons-lui régulièrement la figure rectiligne AEZHBOIKT. Que BA soit le diamètre du segment. Il faut démontrer que le centre de gravité de cette figure rectiligne est dans BA.

Car puisque le centre de gravité du tra-

pèze AEKT est dans la droite $\Lambda\Delta$ (1, 15), le centre de gravité du trapèze EZIH dans MA, le centre de gravité du trapèze ZHOI dans



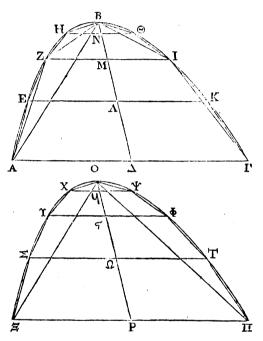
ми, et enfin le centre de gravité du triangle нво dans ви, il est évident que le centre de gravité de la figure rectiligne entière sera dans вд.

PROPOSITION III.

Si dans deux segmens semblables compris par une droite et par une parabole, on inscrit régulièrement des figures rectilignes qui aient le même nombre de côtés, les centres de gravité des figures rectilignes seront semblablement placés dans les diamètres des segmens (a).

Soient les deux segmens ABF, zon. Inscri-

vons-leur régulièrement des figures rectilignes qui aient chacune le même nombre de côtés. Que BA, or soient les diamètres des segmens. Menons les droites EK, ZI, HO; et les



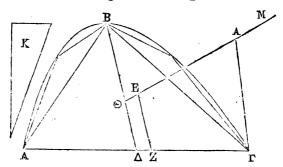
droites IT, YO, XY. Puisque les diamètres BA, Po sont partagés semblablement par les parallèles; que leurs segmens sont comme les nombres successivement impairs, et que ces segmens sont égaux en nombre, il est évident que non-seulement les segmens des dia-

mètres, mais encore les parallèles, seront dans les mêmes raisons (6). Mais les centres de gravité des trapèzes AEKI, ESTII seront semblablement placés dans les droites AA, OP, parce que la raison de Ar à EK est la même. que la raison de ΞΠ à ΣΤ (1, 15); les centres de gravité des trapèzes EZIK, EYOT seront semblablement placés dans les droites AM, Ω7; les centres de gravité des trapèzes 20, ry seront semblablement placés dans les droites MN, 74, et les centres de gravité des triangles HBO, XOY seront encore semblablement placés dans les droites BN, ou; et de plus les trapèzes et les triangles sont proportionnels. Il est donc évident que le centre de gravité de la figure rectiligne entière inscrite dans le segment ABT, et le centre de . gravité de la figure rectiligne entière inscrite dans le segment zon sont semblablement placés dans les diamètres BA, op. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

Le centre de gravité d'un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est dans le diamètre du segment.

Soit ABT un segment tel que celui dont



nous venons de parler. Que son diamètre soit BA. Il faut démontrer que le centre de gravité du segment dont nous venons de parler est dans la droite BA.

Que cela ne soit point; et que le point E soit son centre de gravité. Par ce point conduisons ez parallèle à Ba. Inscrivons dans le segment un triangle ABI, ayant la même base et la même hauteur que ce segment; et que rz soit à az comme le triangle ABI est à la surface K. Inscrivons régulièrement dans le

segment une figure rectiligne, de maniè e que la somme des segmens restans soit moindre que la surface κ (α). Le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite est dans la droite BA (2, 2); que son centre de gravité. soit le point o. Menons la droite OE; et ayant prolongé cette droite, conduisons TA parallèle à BA. Il est évident que la raison de la figure rectiligne inscrite dans le segment à la somme des segmens restans est plus grande que la raison du triangle ABF à la surface K. Mais le triangle ABT est à la surface K comme rz est à zΔ; donc la raison de la figure inscrite. dans le segment à la somme des segmens restans est plus grande que la raison de rz à za, c'est-à-dire de ле à ею. Que ме soit à ею comme la figure rectiligne inscrite est à la somme des segmens. Donc puisque le centre de gravité du segment entier est le point E, et que le centre de gravité de la figure inscrite est le point o, il est évident que le centre de gravité de la grandeur restante qui est composée de tous les segmens restans sera dans la droite OE prolongée, de manière que son prolongement soit à OE comme la figure rectiligne inscrite est à la somme des segmens.

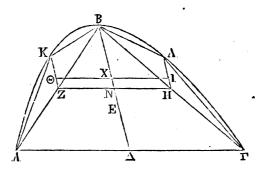
restans (1, 8). Donc le centre de gravité de la grandeur composée des segmens restans sera le point M. Ce qui est absurde; car tous les segmens restans sont du même côté de la droite menée par le point M parallèle à BA. Il est donc évident que le centre de gravité est dans BA.

PROPOSITION V.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit régulièrement une figure rectiligne, le centre de gravité du segment est plus près du sommet que le centre de gravité de la figure rectiligne.

Soit ABT un segment tel que celui dont nous venons de parler; que BA soit son diamètre. Inscrivons-lui d'abord régulièrement le triangle ABT. Partageons BA au point E, de manière que BE soit double de EA. Le point E sera le centre de gravité du triangle ABT. Partageons les droites AB, BT en deux parties égales aux points z, H, et par les points z, H conduisons les droites ZK, AH parallèles à BA; le centre de gravité du seg-

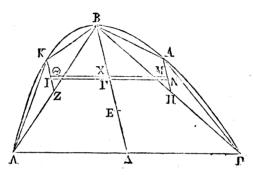
ment AKB sera dans la droite ZK, et le centre de gravité du segment BIA dans la droite HA (2, 4). Que ces centres de gravité soient les points Θ , I. Menons Θ I. Puisque la figure



est égal à NH, la droite XO sera égale à la droite XI. Donc le centre de gravité de la grandeur composée des deux segmens AKB, BAT sera dans le milieu de OI, c'est-à-dire en X; car ces segmens sont égaux (6). Puisque le centre de gravité du triangle ABT est le point E, et que le centre de gravité de la grandeur composée des deux segmens AKB, EAT est le point X, il est évident que le centre de gravité du segment total ABT sera dans XE, c'est-à-dire entre les points X et E (2, 8). Donc le centre de gravité du segment entier sera

154 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS. plus près du sommet que le centre de gravité du triangle régulièrement inscrit.

Inscrivons ensuite régulièrement dans le segment ABT le pentagone AKBAT. Que la droite BA soit le diamètre du segment entier, et les droites KZ, AH les diamètres des



segmens AKB, BAI. Puisque dans le segment AKB on a inscrit régulièrement un triangle, le centre de gravité du segment entier est plus près du sommet que le centre de gravité du triangle. Que le point Θ soit le centre de gravité du segment AKB, et le point I celui du triangle; que le point m soit le centre de gravité du segment BAI, et le point N celui du triangle. Joignons les points Θ , m et les points I, N. La droite Θ X sera égale à la droite XM, et la droite IT à la droite TN.

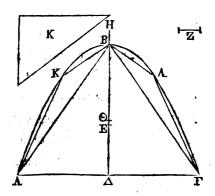
Mais le triangle BAT est égal au triangle AKB, et le segment BAT au segment AKB, car on a démontré dans d'autres livres que ces segmens sont égaux à quatre fois le tiers des triangles (2); donc le point x sera le centre de gravité de la grandeur composée des segmens AKB, BAT, et le point T le centre de gravité de la grandeur composée des triangles AKB, BAT. Donc puisque le point E est le centre de gravité du triangle ABT, et le point x le centre de gravité de la grandeur composée des segmens AKB, BAT, il est évident que le centre de gravité du segment entier ABT est dans la droite XE, partagée de manière que la partie dont l'extrémité est le point x soit à la plus petite partie comme le triangle ABT est à la somme des segmens AKB, BAT (1, 8). Mais le centre de gravité du pentagone AKBAT est dans la droite ET, partagée de manière que la partie dont l'extrémité est le point T. soit à l'autre partie comme le triangle ABF est à la somme des triangles AKB, BAT. Donc puisque la raison du triangle ABF à la somme dos triangles KAB, ABT est plus grande que la raison du triangle ABF à la somme des segmens AKB, BAT (1), il est évident que le centre

de gravité du segment ABT est plus près du sommet B que le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. On pourra faire le même raisonnement pour toutes les figures rectilignes régulièrement inscrites.

PROPOSITION VI.

Un segment compris par une droite et par une parabole étant donné, on peut lui inscrire régulièrement une figure rectiligne, de manière que la droite qui est entre le centre de gravité du segment et celui de la figure rectiligne soit plus petite que toute droite proposée.

Soit donné le segment ABF tel que celui

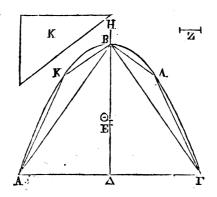


dont nous venons de parler; que son centre

de gravité soit le point Θ . Inscrivons-lui régulièrement le triangle ABF, et que z soit la droite proposée. Que le triangle ABF soit à la surface K comme B Θ est à z. Inscrivons régulièrement dans le segment ABF la figure rectiligne AKBAF, de manière que la somme des segmens restans soit plus petite que la surface K. Que le point E soit le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. Je dis que la droite Θ E est plus petite que la droite z.

Car si la droite OE n'est pas plus petite que la droite z, elle lui est égale ou plus grande. Mais puisque la raison de la figure rectiligne AKBAT à la somme des segmens restans est plus grande que la raison du triangle ABF à la surface κ (α), c'est-à-dire que la raison de la droite OB à la droite z, et que la raison OB à z n'est pas moindre que la raison de OB à OE; parce que OE n'est pas plus petit que z, la raison de la figure rectiligne AKBAT à la somme des segmens restans sera encore plus grande que la raison de BO à OE. C'est pourquoi, si nous faisons en sorte que la figure rectiligne AKBAT soit à la somme des segmens restans comme une autre droite est à la droite eE, cette autre droite sera plus

grande que la droite BO. Que cette autre droite soit OH. Puisque le point O est le centre de gravité du segment ABF, et le point E le



centre de gravité de la figure rectiligne AKBAT, si l'on prolonge la droite EØ et si l'on prend une certaine partie de son prolongement qui soit à ØE comme la figure rectiligne AKBAT est à la somme des segmens restans, cette partie du prolongement sera plus grande que ØB. Que HØ soit donc à ØE comme la figure rectiligne AKBAT est aux segmens restans; le point H sera le centre de gravité de la grandeur composée de tous les segmens restans. Ce qui ne peut être; car si l'on conduit par le point H une droite parallèle à BT, les segmens restans seront du même côté que le segment entier. Il est

donc évident que la droite ΘE est moindre que la droite z; ce qu'il falloit démontrer (6).

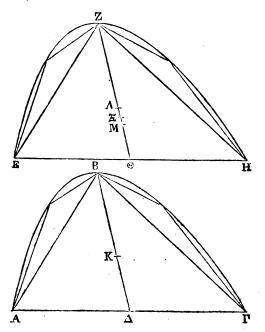
PROPOSITION VII.

Les centres de gravité de deux segmens semblables compris par une droite et par une parabole, coupent leurs diamètres dans la même raison.

Soient les deux segmens ABT, EZH tels que ceux dont nous venons de parler. Que BA, ZO soient leurs diamètres; que le point K soit le centre de gravité du segment ABT, et le point A le centre de gravité du segment EZH. Il faut démontrer que les points K, A coupent les diamètres en parties proportionnelles.

Car si cela n'est point, que zm soit à om comme kb est à ka. Inscrivons régulièrement dans le segment ezh une figure rectiligne, de manière que la droite qui est entre le centre de gravité du segment et le centre de gravité de la figure rectiligne soit plus petite que am. Que le point z soit le centre de gravité de la figure inscrite. Inscrivons dans le

160 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS. segment ABT une figure rectiligne semblable à celle qui est inscrite dans le segment EZH,

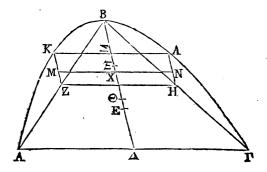


c'est-à-dire régulièrement (a). Le centre de gravité de cette dernière figure sera plus près du sommet que le centre de gravité du segment (2, 5). Ce qui ne peut être. Il est donc évident que BK est à KA comme ZA est à AO.

PROPOSITION VIIL

Le centre de gravité d'un segment compris par une droite et par une parabole partage le diamètre, de manière que la partie qui est vers le sommet est égale à trois fois la moitié de la partie qui est vers la base.

Soit un segment ABT tel que celui dont



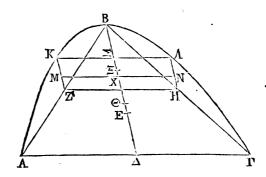
nous venons de parler. Que BA soit son diamètre, et le point Θ son centre de gravité. Il faut démontrer que la droite B Θ est égale aux trois moitiés de la droite $\Theta \Delta$.

Inscrivons régulièrement dans le segment ABF le triangle ABF dont le centre de gravité soit le point E. Partageons chacune des droites AB, BF en deux parties égales aux points

TOME II.

z, H, et conduisons les droites Kz, HΛ parallèles à BΔ: ces droites seront les diamètres des segmens AKB, BΛΓ.

Que le point m soit le centre de gravité



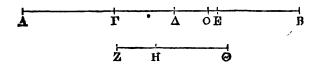
du segment AKB, et le point N le centre de gravité du segment BAT. Menons les droites ZH, MN, KA. Le point x sera le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux segmens. Puisque BΘ est à ΘΔ comme KM est à MZ (2), par addition et par permutation, la droite BΔ sera à la droite KZ comme ΘΔ est à MZ. Mais la droite BΔ est quadruple de KZ, ainsi qu'on le démontrera à la fin, à l'endroit où est la lettre Θ (6). Donc la droite ΔΘ est quadruple de la droite restante BΘ est aussi quadruple de la droite restante KM, c'est-à-dire de la droite

xx. Donc la somme des droites restantes Bz, $x\Theta$ est triple de la droite x (γ). Que Bx soit triple de zz; la droite xo sera triple de zx. Puisque BA est quadruple de BE, car cela se démontre, et que BY est triple de YE, la droite EB sera le tiers de BA. Mais EA est le tiers de AB, parce que le point E est le centre de gravité du triangle ABT. Donc la droite restante ze est le tiers de la droite BA. Puisque le point o est le centre de gravité du segment entier, que le point x est le centre de gravité de la grandeur composée des deux segmens AKB, BAF, et qu'enfin le point E est le centre de gravité du triangle ABT, le triangle ABT sera à la somme des segmens restans comme xo est à OE (1, 8). Mais le triangle ABT est triple de la somme des segmens; parce que le segment entier est égal à quatre fois le tiers du triangle ABF (5); donc xo est triple de oE. Mais on a démontré que xo est triple de xz; donc zE, c'està-dire DE est quintuple de EØ, car les droites ZE, ΔE sont égales. Donc $\Delta \Theta$ est sextuple de ΘΕ Mais BΔ est triple de ΔΕ (ε); donc BΘ est égal aux trois moitiés de 04. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

Si quatre lignes droites sont continuellement proportionnelles, si l'on prend une droite qui soit aux trois cinquièmes de l'excès de la plus grande sur la troisième, comme la plus petite est à l'excès de la plus grande sur la plus petite, et si l'on prend une autre droite qui soit à l'excès de la plus grande sur la troisième, comme une droite composée du double de la plus grande, du quadruple de la seconde, du sextuple de la troisième, du triple de la quatrième, est à une droite composée du quintuple de la plus grande, du décuple de la seconde, du décuple de la troisième et du quintuple de la quatrième; ces deux droites prises ensemble seront les deux cinquièmes de la plus grande (a).

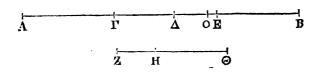
Soient AB, BI, BA, BE quatre droites proportionnelles. Que la droite ZH soit aux trois cinquièmes de la droite AA comme BE est à EA, et que HO soit à AA comme une droite composée du double de AB, du quadruple de BI, du sextuple de BA et du triple de BE, est à une droite composée du quintuple de AB, du décuple de FB, du décuple de BA et du quintuple de BE. Il faut démontrer que zo est égal aux deux cinquièmes de AB.



Puisque les droites AB, BI, BA, BE sont proportionnelles, les droites Ar, ra, DE seront dans la même raison (6). Donc la somme des droites AB, Br est à BA, et la somme des droites BA, Br, est à EB comme AA est à ΔE, et comme la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens. Donc A dest à DE comme une droite composée du double de AB, du triple de TB et de AB est à une droite composée du double de BA et de BE. Mais une droite composée du double de AB, du quadruple de Br. du quadruple de BA, du double de BE, est à une droite composée du double de BA et de BE comme la droite AA sera à une droite plus petite que DE; que ce soit à DO. La dernière raison sera égale à la première. Dono

OA sera à AA comme une droite composée du double de AB, du quadruple de TB, du sextuple de BA, du triple de BE est à une droite composée du double de chacune des droites AB, EB, et du quadruple de chacune des droites FB, BA. Mais AA est à HO comme une droite composée du quintuple de chacune des droites AB, BE, et du décuple de chacune des droites TB, BA, est à la droite composée du double de AB, du quadruple de FB, du triple de EB et du sextuple de BA Donc les raisons étant disposées différemment, c'est-à-dire la proportion étant troublée, par raison d'égalité, la droite од sera à но comme une droite composée du quintuple de chacune des droites AB, BE et du décuple de chacune des droites IB, BA, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, RE et du quadruple de chacune des droites TB, BA. Mais une droite composée du quintuple de chacune des droites, AB, BE, et du décuple de chacune des droites гв, вд, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites TB, BA, comme cinq est à deux; donc ло est à но comme

cinq est à deux. De plus, puisque od est à As comme es, conjointement avec le double de Bd est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites FB, Bd, et que Ad



est à DE comme une droite composée du double de AB, du triple de IB et de BA, est à une droite composée de EB et du double de BA. Donc les raisons étant autrement disposées, c'est-à-dire la proportion étant troublée, par raison d'égalité, la droite o∆ sera à la droite DE comme une droite composée du double de AB, du triple de BI et de BA, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites FB, BA. Donc EO est à EA comme une droite composée de 1B, du triple de BA et du double de EB, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites TB, BA. Mais AE est à EB comme AF

est à rB, et comme r est à DB, et par addition, comme le triple de TA est au triple de AB, et comme le double de AE est au double de EB: donc aussi une droite composée de Ar, du triple de TA et du double de AE est à une droite composée de IB, du triple de AB et du double de EB. Donc les raisons étant autrement disposées, c'est-à-dire la proportion étant troublée, par raison d'égalité la droite EO sera à la droite EB comme une droite composée de AI, du triple de IA et du double de AE est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites FB, BA. Donc la droite entière OB est à EB comme une droite composée du triple de AB, du sextuple de rB et du triple de BA est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE, et du quadruple de chacune des droites TB, BA. Puisque non-seulement les droites EA. ΔΓ, TA ont la même raison, mais encore les sommes des droites EB, BA, des droites AB, FB et des droites IB, IA; donc une droite composée des droites EB, BA sera à une droite composée des droites DB, Br et des droites TB, BA comme EA est à AA. Donc, par addition,

la droite AE est à AA comme une droite composée des droites EB, BA, et des droites AB, BI, et des droites IB, BA, c'est-à-dire des droites EB, BA et du double de chacune des droites AB, Br est à une droite composée de chacune des droites BA, BA et du double de Rr. Donc la raison du double au double sera la même, c'est-à-dire qu'une droite composée du double de chacune des droites EB, BA, et du quadruple de chacune des droites TB, BA est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BA et du quadruple de TB, comme EA est à AA. Donc EA est aux trois cinquièmes de AA comme une droite composée du double de chacune des droites AB, BE, du quadruple de chacune des droites rb, BA aux trois cinquièmes de la droite composée du double de chacune des droites AB, BA, et du quadruple de TB. Mais ea est aux trois cinquièmes de AA comme EB est à ZH; donc EB est à ZH comme une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites AB, BI est aux trois cinquièmes de la droite composée du double de chacune des droites AB, BA et du qua-

druple de TB. Mais on a démontré qu'une droite composée du triple de chacune des droites AB, BA et du sextuple de TB, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites IB, BA, comme OB est à EB; donc, par raison d'égalité, une droite composée du triple de chacune des droites AB, BΔ et du sextuple de TB, est aux trois cinquièmes d'une droite composée du double de chacune des droites AB, BA, du quadruple de TB, comme oB est à ZH. Mais la droite composée du triple de chacune des droites AB, BA et du sextuple de TB, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BA et du quadruple de IB comme trois est à deux. Mais la première droite est aux trois cinquièmes de cette droite comme cinq est à deux, et l'on a démontré que ao est à HO comme cinq est à deux. Donc la droite entière BA est à la droite entière zo comme cinq est à deux. Cela étant ainsi, il faut que zo soit les deux cinquièmes de AB. Ce qu'il falloit démontrer.

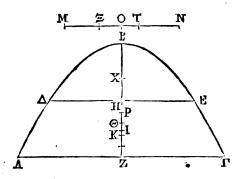
PROPOSITION X.

Le centre de gravité d'un segment retranché d'une surface parabolique est dans la ligne droite qui est le diamètre du segment partagée en cinq parties égales; et il est placé dans la partie du milieu, coupée de manière que la portion qui est plus près de la plus petite base du segment, soit à l'autre portion comme un solide ayant pour base le quarré construit sur la moitié de la grande base du segment, et pour hauteur le double de la plus petite base, conjointement avec la plus grande, est à un solide ayant pour base le quarré construit sur la moitié de la plus petite base du segment et pour hauteur le double de la plus grande base du segment, conjointement avec la plus petite base du segment.

Soient dans une parabole les deux droites Ar, ΔE ; que Bz soit le diamètre du segment ABI. Il est évident que Hz sera aussi le diamètre du segment ADEI, et que les droites AI, ΔE sont parallèles à la tangente au point B (a). Partageons la droite Hz en cinq par-

172 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

ties égales, et que Θ K soit la partie du milieu. Que Θ I soit à IK comme un solide ayant pour base le quarré construit sur Az et pour hauteur le double de la droite Δ H, conjointement avec la droite Az, est à un solide

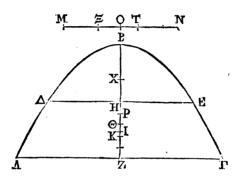


ayant pour base le quarré construit sur ΔH et pour hauteur le double de la droite Az, conjointement avec la droite ΔH . Il faut démontrer que le point 1 est le centre de gravité du segment $\Delta \Delta EF$.

Que mn soit égal à ZB, et no égal à HB. Prenons une droite NZ moyenne proportionnelle entre mn, no, et la droite TN quatrième proportionnelle à ces trois droites. Faisons en sorte que TM soit à TN comme zo est à une droite IP menée du point I; son autre extrémité tombera où l'on vou-

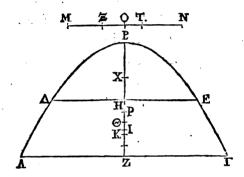
dra, car il est indifférent que son autre extrémité tombe entre z, н ou entre н, в. Puisque zB est un diamètre de la parabole, c'est-à-dire, ou le premier ou un diamètre parallèle au premier (6), et que les droites Az, AH sont des ordonnées, parce qu'elles sont parallèles à la tangente au point B, le quarré construit sur az sera au quarré construit sur AH comme zB est à BH, c'est-àdire comme mn est à no. Mais mn est à no comme le quarré construit sur mn est au quarré construit sur NZ; donc le quarré construit sur Az est au quarré construit sur AH comme le quarré construit sur MN est au quarré construit sur NE. Donc Az est à AH comme MN est à NE. Donc le cube construit sur az est au cube construit sur an comme le cube construit sur my est au cube construit sur NE. Mais le cube construit sur Az est au cube construit sur An comme le segment BAT est au segment ABE; et le cube construit sur MN est au cube construit sur NE comme MN est à NT. Donc, par soustraction, le segment ADTE est au segment ABE comme mt est à tn, c'est-à-dire comme les trois cinquièmes de nz est à 1P. Puisqu'un 174 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

solide qui a pour base le quarré construit sur Az et pour hauteur le double de AH, conjointement avec la droite Az, est au cube construit sur Az comme le double de la droite AH, conjointement avec la droite



AZ est à ZA, et par conséquent comme le double de NΞ, conjointement avec MN est à NM. Donc le cube construit sur AZ est au cube construit sur ΔH comme MN est à NT. Mais le cube construit sur ΔH est à un solide ayant pour base le quarré construit sur ΔH et pour hauteur le double de la droite AZ, conjointement avec la droite ΔH comme ΔH est au double de la droite ΔZ, conjointement avec la droite ΔH, et comme la droite TN est au double de la droite on, conjointement avec la droite TN. On a donc quatre

quantités, savoir : le solide qui a pour base le quarré construit sur az et pour hauteur le double de la droite AH, conjointement avec la droite Az; le cube construit sur Az; le cube construit sur AH, et le solide qui a pour base le quarré de AH et pour hauteur le double de la droite Az, conjointement avec la droite Дн; et ces quatre quantités sont proportionnelles deux à deux à quatre quantités, savoir : au double de la droite NZ, conjointement avec la droite nm, à la droite MN, à la droite NT, et enfin au double de la droite no, conjointement avec la droite NT. Donc par raison d'égalité, le solide qui a pour base le quarré construit sur az et pour hauteur le double de la droite Дн, conjointement avec la droite az est au solide qui a pour base le quarré construit sur AH et pour hauteur le double de la droite Az, conjointement avec la droite ΔH, comme le double de la droite NE, conjointement avec la droite NM est le double de la droite No, conjointement avec la droite NT. Mais le premier solide dont nous venons de parler est au second solide dont nous venons aussi de parler, comme oi est à ix; donc OI est à IK comme la première droite composée est à la seconde droite composée. Donc, par addition et en quintuplant les antécédens, la droite zu sera à la droite ik comme une droite composée du quintuple de chacune des droites mn, nt, et la décuple de chacune des droites NE, No est au double de la droite on, conjointement avec la droite nt. Mais zh est aux deux cinquièmes de zk comme une droite composée du quintuple de chacune des droites MN, NT, du décuple de chacune des droites En, no est à une droite composée du double de chacune des droites MN, NT et du quadruple de chacune des droites EN, NO. Donc une droite composée du quintuple de chacune des droites mn, nr et du décuple de chacune des droites an, no sera à une droite composée du double de mn, du quadruple de nz, du sextuple de on et du triple de nт, comme zн est à zi. Donc puisque les quatre droites MN. NE, ON, NT sont continuellement proportionnelles, la droite NT est à TM comme la droite pi qui a été prise est aux trois cinquièmes de zн, c'est-à-dire à мо. Mais une droite composée du double de NM, du quadruple de Nz, du sextuple de No et du triple de NT est à une droite composée du quintuple de chacune des droites MN, NT, du décuple de chacune des droites ZN, NO, comme l'autre droite zz qui a été prise est



à zh, c'est-à-dire à mo. Donc la droite Pz, d'après ce que nous avons démontré plus haut, sera les deux cinquièmes de mn, c'est-à-dire de zb. Donc le point p est le centre de gravité du segment Abr. Que le point x soit le centre de gravité du segment Abe; le centre de gravité du segment Abe; le centre de gravité du segment Aber sera dans une droite placée dans la direction de xp, qui sera à la droite xp comme le segment Aber est au segment restant (1, 8). Mais le point i est ce centre de gravité, car bp est égal aux trois cinquièmes de zb et bx aux

TOME II.

178 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

trois cinquièmes de HB; donc la droite XP est égale aux trois cinquièmes de la droite restante HZ. Mais le segment ADET est au segment DBE comme MT est à NT, et MT est à NT comme les trois cinquièmes de HZ, qui est XP, est à PI. Donc le segment ADET est au segment DBE comme XP est à PI. Mais le point P est le centre de gravité du segment total, et le point x le centre de gravité du segment ABE. Il est donc évident que le point I est le centre de gravité du segment ADET.

FIN DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS. •

DE LA QUADRATURE DE LA PARABOLE.

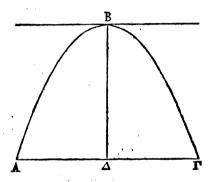
Archimède a Dosithée, Salut.

Lorsque j'eus appris que Conon, le seul de mes amis qui me restoit encore, étoit mort ; que tu étois étroitement lié d'amitié avec lui, et très-versé dans la géométrie; je fus grandement affligé de la mort d'un homme qui étoit mon ami et qui avoit dans les sciences mathématiques une sagacité tout-àfait admirable; et je pris la résolution de t'envoyer, comme je l'aurois fait à lui-même, un théorême de géométrie, dont personne ne s'étoit encore occupé et qu'enfin j'ai voulu examiner. J'ai découvert ce théorême, d'abord par des considérations de mécanique, et ensuite par des raisonnemens géométriques. Parmi ceux qui ont cultivé la géométrie avant nous, quelques-uns ont en-

trepris de faire voir comment il seroit possible de trouver une surface rectiligne égale à un cercle ou à un segment de cercle. Ils ont ensuite essayé de quarrer la surface comprise par la section d'un cône entier et par une droite; mais en admettant des lemmes difficiles à accorder (a). Aussi ont-ils été repris par plusieurs personnes comme n'ayant point atteint leur but. Mais je ne sache pas qu'il se soit encore trouvé une seule personne qui ait cherché à quarrer la surface comprise sous une droite et une parabole. Ce que nous avons certainement fait aujourd'hui; car nous démontrons qu'un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment (6). Pour démontrer ce théorême, nous nous sommes servis du lemme suivant: Si deux surfaces sont inégales, ce dont la plus grande surpasse la plus petite étant ajouté à lui-même un certain nombre de fois, il peut arriver que ce reste ainsi ajouté à lui-même surpasse une surface proposée et limitée. Les géomètres qui ont vécu avant nous, ont aussi fait usage de ce lemme pour démontrer que les cercles sont entre eux en raison doublée de leurs diamètres, et les sphères en raison triplée; qu'une pyramide est le tiers d'un prisme qui a la même base et la même hauteur que cette pyramide, et qu'un cône est le tiers d'un cylindre qui a la même base et la même hauteur que ce cône. Or, les théorêmes démontrés de cette manière n'ont pas paru moins évidens que ceux qui ont été démontrés autrement. Ceux que je viens de publier ont donc le même degré d'évidence. Comme j'ai écrit les démonstrations de ce théorême, je te les envoie. Tu verras comment il a été résolu d'abord par des considérations de mécanique, et ensuite par des raisonnemens géométriques. Nous mettrons en tête de ce traité les élémens des sections coniques qui sont nécessaires pour démontrer ce théorême. Porte-toi bien.

PROPOSITION L

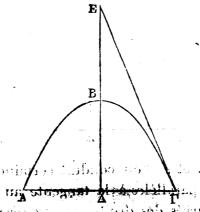
Soit ABT une parabole; que BA soit une droite parallèle au diamètre, ou le diamètre lui-même; que la droite AAT soit parallèle à



la tangente au point B. Les droites $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ seront égales entre elles; et si la droite $A\Delta$ est égale à la droite $\Delta\Gamma$, la droite $A\Gamma$ sera parallèle à la tangente au point B (α).

PROPOSITION IL

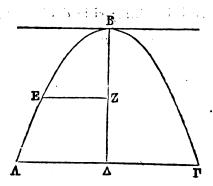
Si ABT est une parabole; si la droite BA est une droite parallèle au diamètre, ou le diamètre lui-même; si la droite AAT est pa-



rallèle à la droite qui touche la parabole au point B, et si la droite re touche la parabole au point r, les droites AB, BE seront égales entre elles (a).

PROPOSITION IIL

Si ABT est une parabole; et si BA est une parallèle au diamètre ou le diamètre lui-



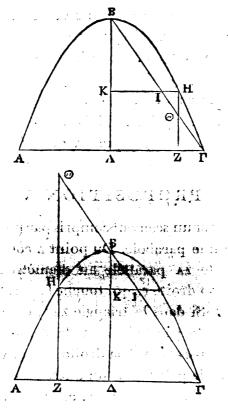
même, et si l'on conduit certaines droites $A\triangle$, Ez parallèles à-la tangente au point B, les quarrés des droites $A\triangle$, Ez seront entre eux comme les droites $A\triangle$, BZ.

Cela est démontre dans les élémens des sections coniques (a).

PROPOSITION IV.

Soit ABT un segment compris par une droite et par une parabole. Du milieu de AT conduisons une droite BA qui soit une pa-

rallèle au diamètre, ou le diamètre luimême, menons la droite si et prolongeonsla. Si nous conduisons une autre droite zo



qui soit parallèle à BA, et qui coupe les deux droites ar et IB, la droite zo sera à la droite OH comme AA est à Az.

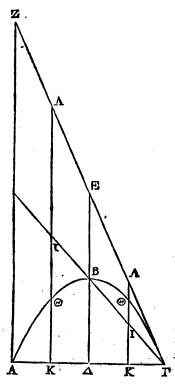
Par le point H conduisons KH parallèle à Ar.

Le quarré de Δr sera au quarré de kh comme BΔ est à BK. Ce qui est démontré. Donc le quarré de Δr est au quarré de Δz comme Br est à BI; car les droites Δz, Kh sont égales. Donc le quarré de Br est au quarré de Be comme Br est à BI. Donc les droites Br, Be, BI sont proportionnelles (a). Donc Br est à BO comme TO est à OI (6). Donc OZ est à OH comme TΔ est à Δz. Mais ΔA est égal à Δr; il est donc évident que ΔA est à Δz comme ZO est à OH.

PROPOSITION V.

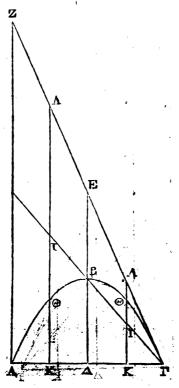
Soit ABT un segment compris par une droite et par une parabole. Du point A conduisons la droite ZA parallèle au diamètre, et du point T la droite TZ qui touche la parabole au point T. Si dans le triangle ZAT, on conduit une droite parallèle à AZ, la droite KA qui coupe la parabole et la droite AT qui va d'un point de la parabole à un autre, seront coupées dans la même raison, et la partie de la droite AT qui est du côté du point A, et la partie de droite KA qui est du côté du même point seront des termes correspondans de la proportion.

Conduisons une droite quelconque ΔE parallèle à Az. Que d'abord cette droite coupe en deux parties égales la droite At. Puisque



ABT est une parabole, qu'on a conduit la droite BA parallèle au diamètre, et que AA est égal à AT, la droite AT sera parallèle à la droite qui touche la parabole au point B. De plus, puisque AE est parallèle à l'axe, que

du point r on a mené la droite re tangente à la parabole au point r, et que Δr est parallèle à la tangente au point B, la droite EB



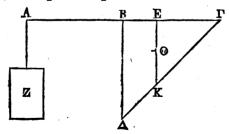
sera égale à BA (2). Donc AA est à Ar comme AB est à BE. On a donc démontré ce qui étoit proposé, lorsque la droite qui a été menée partage Ar en deux parties égales.

Supposons que cette droite ne partage pas

la droite Ar en deux parties égales. Conduisons une droite κλ parallèle à Az. Il faut démontrer que AK est à KΓ comme KΘ est à ΘΛ. Car puisque la droite BE est égale à BΔ, et que la droite 1Λ est aussi égale à la droite KI, la droite KΛ sera à la droite KI comme AΓ est à ΔΑ. Mais KI est à ΘΚ comme ΔΑ est à ΑΚ. Ce qui est démontré dans la proposition précédente; donc KΘ est à KΛ comme AK est à AΓ (α). Donc KΘ est à ΘΛ comme AK est à KΓ. Donc la proposition est démontrée.

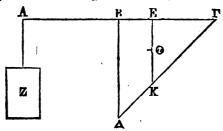
PROPOSITION VL

Supposons que les choses que nous nous proposons d'examiner soient placées devant les yeux dans un plan perpendiculaire sur l'horizon et passant par la droite AB; que ce



qui est du côté du point Δ soit au bas, et que ce qui est placé de l'autre côté soit en haut.

Que le triangle BAT soit rectangle, ayant l'angle droit en B, et que le côté BT soit égal à la moitié d'un fléau d'une balance, c'est-àdire que AB soit égal à BT. Que ce triangle



soit suspendu aux points B, r. Que la surface z soit suspendue à l'autre extrémité de la balance, c'est-à-dire au point A, de manière que la surface z suspendue au point A soit en équilibre avec le triangle BAT ainsi placé. Je dis que la surface z est la troisième partie du triangle ABT.

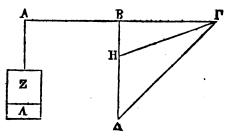
Car puisqu'on suppose que la balance est en équilibre, la droite ar sera parallèle à l'horizon, et les droites qui sont perpendiculaires sur ar, dans le plan perpendiculaire sur l'horizon, seront elles-mêmes perpendiculaires sur l'horizon. Coupons la droite er au point e, de manière que re soit double de la droite eb; conduisons ke parallèle à ba, et partageons cette droite en deux parties égales

au point o. Le point o sera le centre de gravité du triangle BAT; ce qui est démontré dans les mécaniques. Donc si le triangle qui est suspendu aux points B, r en est détaché, et si son centre de gravité est suspendu au point E, il restera dans sa position actuelle, car une chose qui est suspendue demeure en repos lorsque le point de suspension et le centre de gravité sont dans la même verticale. Ce qui est aussi démontré. Donc, puisque la position du triangle Bra, par rapport à la balance, est la même qu'auparavant, la surface z lui fera pareillement équilibre; et puisque la surface z et le triangle BAT sont en équilibre, l'un étant suspendu au point A et l'autre étant suspendu au point E, il est constant que les longueurs sont réciproquement proportionnelles à ces surfaces, c'està-dire que la longueur AB est à la longueur BE comme le triangle BΔΓ est à la surface z. Mais la longueur AB est triple de la longueur BE; donc le triangle B△r est aussi triple de la surface z.

Il est encore évident que si le triangle étoit triple de la surface z, ces deux surfaces seroient pareillement en équilibre.

PROPOSITION VII.

Que la droite Ar soit une balance, dont le milieu soit le point B. Que le triangle rah soit suspendu par rapport au point B. Que le triangle rah soit obtus - angle, ayant pour base la droite ah, et pour hauteur une droite égale à la moitié de la balance. Suspendons



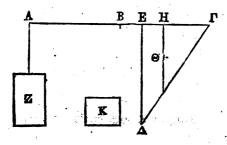
le triangle $\triangle \Gamma H$ aux points B, Γ . Que la surface z suspendue au point A soit en équilibre avec le triangle $\Gamma \triangle H$ ainsi placé. On démontrera pareillement que la surface z est la troisième partie du triangle $\Gamma \triangle H$.

Suspendons au point A une autre surface qui soit la troisième partie du triangle BIH. Le triangle BIA sera certainement en équilibre avec la surface ZA. Donc puisque le triangle BIH est en équilibre avec la surface A, que le triangle BIA est en équilibre avec

la surface zA, et que la surface zA est le tiers du triangle BFA, il est constant que le triangle FAH est'triple de la surface z.

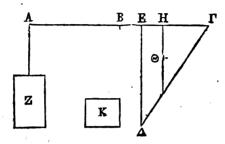
PROPOSITION VIII.

Que la droite Ar soit une balance, dont le milieu soit le point B. Suspendons, par rapport au point B, un triangle rectangle rae, ayant l'angle droit en E; suspendons ce



triangle aux points Γ , E. Suspendons au point Λ une surface Z, de manière qu'elle soit en équilibre avec le triangle $\Gamma\Delta E$ ainsi placé. Que le triangle $\Gamma\Delta E$ soit à la surface K comme ΛE est à E. Je dis que la surface E est plus petite que le triangle E et plus grande que la surface E.

Car prenons le centre de gravité du triangle AET; que son centre de gravité soit le point TOME 11. e. Conduisons en parallèle à ΔE. Puisque le triangle τΔE est en équilibre avec la surface z, le triangle τΔE sera à la surface z comme

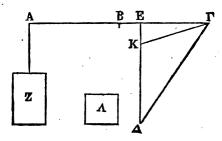


AB est à BH. Donc la surface z est plus petite que le triangle $\Gamma\Delta E$. Mais le triangle $\Gamma\Delta E$ est à la surface z comme BA est à BH, et ce même triangle est à la surface x comme BA est à BE; il est donc évident que la raison du triangle $\Gamma\Delta E$ à la surface x est plus grande que la raison de ce même triangle à la surface z. Donc la surface z est plus grande que la surface x.

PROPOSITION IX.

Soit AT une balance dont le milieu soit le point B. Que TAK soit un triangle obtus angle ayant pour base la droite AK et pour hauteur la droite ET. Que ce triangle soit sus-

pendu aux points r, E de la balance; et que la surface z soit suspendue au point A, de manière qu'elle soit en équilibre avec le



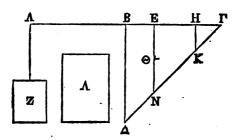
triangle ΔΓΚ ainsi placé. Que le triangle ΓΔΚ soit à la surface Λ comme AB est à BE. Je dis que la surface z est plus grande que la surface Λ et plus petite que le triangle ΔΓΚ.

On démontrera cette proposition de la même manière que la précédente.

PROPOSITION X.

Soit la balance ABT dont le milieu soit le point B; soit aussi le trapèze BAHK, ayant des angles droits en B, H et le côté KA dirigé vers le point T. Que BA soit à BH comme le trapèze BAKH est à la surface A. Que le trapèze BAHK soit suspendu aux points B, H de la balance. Qu'une surface z soit suspendue au point A,

de manière qu'elle soit en équilibre avec le trapèze ABKH ainsi placé. Je dis que la surface z est plus petite que la surface A.

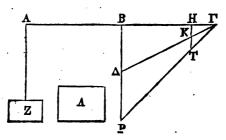


Coupons Ar au point E, de manière que EH soit à BE comme le double de AB, conjointement avec kH est au double de kH, conjointement avec BA. Conduisons par le point E la droite EN parallèle à BA, et partageons cette droite en deux parties égales au point e. Le centre de gravité du trapèze вдик sera le point o. Car cela a été dans les mécaniques (α). Que le trapèze вΔнк soit suspendu au point E, et qu'il soit détaché des points B, H, par la même raison que nous avons dit plus haut, le trapèze ainsi placé restera en repos et sera en équilibre avec la surface z (6). Donc puisque le trapèze BAHK suspendu au point E est en équilibre avec la surface z suspendue au point A, le trapèze BAHK

sera à la surface z comme la droite BA est à la droite BE. Donc la raison du trapèze BΔAK à la surface z est plus grande que la raison de ce trapèze à la surface Λ, puisque la raison de AB à BE est plus grande que la raison de AB à BH. Donc la surface z sera plus petite que la surface Λ.

PROPOSITION XI.

Soit Ar une balance, dont le milieu soit le point B. Soit le trapèze KATP, ayant ses côtés KA, TP dirigés vers le point r, et les côtés AP, KT perpendiculaires sur Br. Que

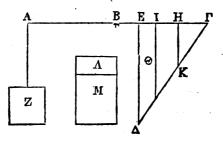


AP tombe sur le point B. Que le trapèze ΔΚΤΡ soit à la surface Λ comme AB est à BH. Que le trapèze ΔΚΤΡ soit suspendu aux points B, H de la balance, et la surface z au point A, de manière que la surface z soit en équilibre

198 DE LA QUADRATURE avec le trapèze Δκτρ ainsi placé. On démontrera, comme on l'a fait plus haut, que la surface z est plus petite que la surface Λ.

PROPOSITION XII.

Soit une balance Ar, dont le milieu soit le point B. Soit le trapèze AEKH ayant des an-

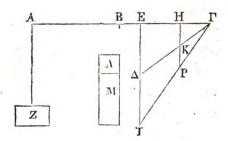


gles droits en E, H et les côtés KΔ, EH dirigés vers le point Γ. Que le trapèze ΔΚΕΗ soit à la surface M comme AB est à BH, et que le trapèze ΔΚΕΗ soit à la surface Λ comme AB est à BE. Que le trapèze ΔΚΕΗ soit suspendu aux points E, H de la balance; et que la surface z soit suspendue au point A, de manière qu'elle soit en équilibre avec le trapèze ainsi placé. Je dis que la surface z est plus grande que la surface Λ, et plus petite que la surface M.

Prenons le centre de gravité du trapèze AKEH, et que son centre de gravité soit le point o. Nous prendrons son centre de gravité comme nous l'avons fait plus haut (10). Conduisons et parallèle à AE. Que le trapèze AKEH soit suspendu au point 1 de la balance, et qu'il soit détaché des points E, н. Par la même raison que nous avons dit plus haut, le trapèze étant ainsi placé restera en repos et sera en équilibre avec la surface z (6). Donc puisque le trapèze AKEH suspendu au point I est en équilibre avec la surface z suspendue au point A, le trapèze sera à la surface z comme AB est à BI. Il est donc évident que la raison du trapèze à la surface A sera plus grande que la raison du trapèze à la surface z. Mais la raison du trapèze à la surface M est moindre que la raison du trapèze à la surface z; donc la surface z est plus grande que la surface A, et plus petite que la surface M.

PROPOSITION XIII.

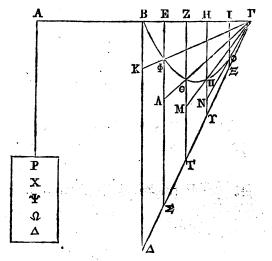
Soit ar une balance, dont le milieu soit le point B. Soit le trapèze KATP, ayant ses



côtés κΔ, τρ dirigés vers le point r, et ses côtés Δτ, κρ perpendiculaires sur Br. Que le trapèze Δκτρ soit suspendu aux points E, H de la balance, et que la surface z soit suspendue au point A, de manière qu'elle soit en équilibre avec le trapèze Δκτρ ainsi placé. Que le trapèze Δκτρ soit à la surface A comme AB est à BE; et que ce même trapèze soit à la surface M comme AB est à BH. On démontrera de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que la surface z est plus grande que la surface A, et plus petite que la surface M.

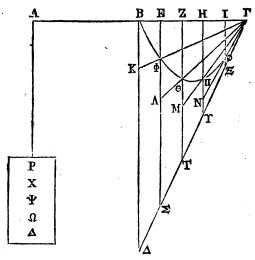
PROPOSITION XIV.

Soit un segment BOT compris par une ligne droite et par une parabole. Que la droite BT soit d'abord perpendiculaire sur le diamètre. Du point B conduisons la droite



BA parallèle au diamètre; et du point r conduisons la droite ra tangente à la parabole au point r. Le triangle Bra sera rectangle. Partageons la droite Br en un certain nombre de parties BE, EZ, ZH, HI; par les points de division conduisons les droites EZ, ZT, HY, IE parallèles au diamètre. Joignons avec le

point r les points où ces droites coupent la parabole, et prolongeons les droites qui joi-gnent ces points. Je dis que le triangle BAT est



plus petit que le triple de la somme des trapèzes KE, ΛZ, MH, NI et du triangle zII, et plus grand que le triple de la somme des trapèzes ZΦ, ΠΘ, ΗΠ et du triangle 10Γ.

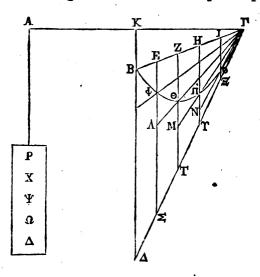
Prolongeons la droite TB, et faisons AB égale à Br. Supposons une balance Ar dont le milieu soit le point B; et qui soit suspendue par le point B. Suspendons le triangle BAT aux points B, T de la balance; de l'autre côté de la balance suspendons au point A les surfaces P, X, \Psi, \Omega, \Delta. Que la

surface P soit en équilibre avec le trapèze ΔE ainsi placé, la surface x avec le trapèze zΣ, la surface Ψ avec le trapèze TH, la surface Ω avec le trapèze ΥI , et enfin la surface Δ avec le triangle zir. La somme des premières surfaces sera en équilibre avec la somme des secondes. Donc le triangle BAT sera triple de la surface $PX \Psi \Omega \Delta$ (6). Puisqu'on a un segment Bro compris par une droite et par une parabole, que du point B on a conduit la droite BA parallèle au diamètre, et du point r la droite rΔ tangente à la parabole au point r et que de plus l'on a conduit une autre droite E parallèle aussi au diamètre, la droite BI sera à la droite BE comme SE est à ΕΦ (α). Donc aussi BA est à BE comme le trapèze ΔE est au trapèze KE (6). On démontrera semblablement que AB est à BZ comme le trapèze zz est au trapèze Az; que AB est à вн comme le trapèze тн est au trapèze мн, et enfin que AB est à BI comme le trapèze ri est au trapèze ni. Donc puisque le trapèze DE a des angles droits en B, E, et deux côtés dirigés vers le point r; que la surface P, suspendue au point A de la balance, est en équilibre avec le trapèze ainsi placé, et

que BA est à BE comme le trapèze DE est au trapèze KE, le trapèze KE sera plus grand que la surface P; car cela a été démontré (10). Puisque le trapèze zz a des angles droits en z, E, et le côté ET dirigé vers le point r; que la surface x, suspendue au point A de la balance, est en équilibre avec le trapèze ainsi placé; que la droite BA est à la droite BE comme le trapèze Zz est au trapèze zo; et que la droite AB est à la droite BZ comme le trapèze ZZ est au trapèze AZ, la surface x sera plus petite que le trapèze Az. et plus grande que le trapèze zo; car cela a été démontré (12). Par la même raison, la surface v est plus petite que le trapèze MH, et plus grande que le trapèze он; la surface Ω plus petite que le trapèze NOIH, et plus grande que le trapèze III, et enfin la surface A plus petite que le triangle zir, et plus grande que le triangle 110 (8). Donc puisque le trapèze ke est plus grand que la surface P, le trapèze az plus grand que la surface x, le trapèze мн plus grand que la surface ч, le trapèze NI plus grand que la surface Ω , et enfin le triangle zir plus grand que la surface Δ , il est évident que la somme des surfaces dont nous venons de parler est plus grande que la surface PXΨΩΔ. Mais la surface PXΨΩΔ est la troisième partie du triangle ATA; donc le triangle BTA est plus petit que le triple de la somme des trapèzes KE, AZ, MH, NI et du triangle ZIF. De plus, puisque le trapèze zo est plus petit que la surface X(12), le trapèze OH plus petit que la surface 4, le trapèze in plus petit que le trapèze Ω , et enfin le triangle 10r plus petit que la surface \triangle (8), il est encore évident que la somme des trapèzes dont nous venons de parler est plus petite que la surface $\Delta \Omega \Psi X$. Donc le triangle BAT est plus grand que le triple de la somme des trapèzes oz, он, in et du triangle 170, et plus petit que le triple de la somme de ceux dont nous avons parlé auparavant.

PROPOSITION XV.

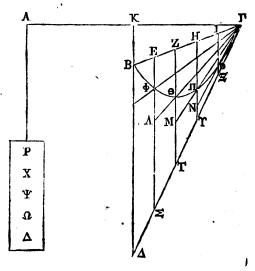
Soit un segment BOT compris par une droite et par une parabole. Que la droite BT ne soit pas perpendiculaire sur le diamètre. Il faut nécessairement que l'une ou l'autre des droites, ou celle qui est menée par le point B du même côté du segment parallelement au diamètre, ou celle qui est menée du point r, fasse un angle obtus avec la droite Br. Que la droite menée par le point



B fasse un angle obtus. Par le point B menons la droite B\$\Delta\$ parallèle au diamètre, et du point r, la droite r\$\Delta\$ tangente à la parabole au point r. Partageons la droite Br en un certain nombre de segmens BE, £Z, ZH, HI, IT, et des points de division E, Z, H, I, conduisons les droites E\$\Delta\$, ZT, HY, I\$\Pi\$ parallèles au diamètre, et joignons avec le point r les points où la parabole est coupée par ces

droites, et prolongeons les droites qui joignent ces points. Je dis que le triangle BAT est plus petit que le triple de la somme des trapèzes BØ, AZ, MH, NI et du triangle IIE, et plus grand que le triple de la somme des trapèzes ZØ, HØ, III et du triangle TOI.

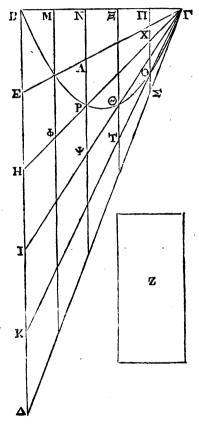
Prolongeons DB vers le côté opposé; menons la perpendiculaire TK, et faisons AK égal à rk. Supposons une balance ar dont le milieu soit le point k, et suspendons cette balance par le point k. Suspendons par rapport à la moitié de la balance le triangle ΓκΔ, c'est-à-dire aux points r, κ. Ce triangle étant placé comme il l'est actuellement, suspendons de l'autre côté de la balance au point A, les surfaces P, X, Ψ , Ω , Δ ; que la surface p soit en équilibre avec le trapèze DE ainsi placé. Que la surface x soit en équilibre avec le trapèze zz; la surface 4 avec le trapèze TH; la surface Ω avec le trapèze YI. et enfin la surface \(\Delta \) avec le triangle IIE. Il est évident que la somme des premières surfaces sera en équilibre avec la somme des secondes surfaces. Donc le triangle ABF sera triple de la surface PXΨΩΔ. On démontrera, comme nous l'avons fait plus haut, que le trapèze BØ est plus grand que la surface P; que le trapèze ØE est plus grand que la surface x, et que le trapèze zØ est plus petit;



que le trapèze MH est plus grand que la surface Ψ , et que le trapèze H Θ est plus petit; que le trapèze NI est plus grand que la surface Ω , et que le trapèze III est plus petit, et enfin que le triangle Ξ II est plus grand que la surface Δ , et que le triangle IIO est plus petit. Donc la proposition est évidente.

PROPOSITION XVI.

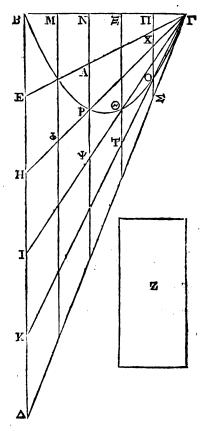
Soit BOT un segment compris par une droite et par une parabole. Du point B con-



duisons une parallèle au diamètre, et du point r une tangente à la parabole au point TOME II. 14 r. Que la surface z soit la troisième partie du triangle BΔr. Je dis que le segment BΘr est égal à la surface z.

Car si le segment BOT n'est pas égal à la surface z, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit plus grand, si cela est possible. L'excès du segment BOT sur la surface z, ajouté un certain nombre de fois à lui-même, sera plus grand que le triangle Br . Or , il est possible de prendre une surface qui soit plus petite que cet excès, et qui soit une partie du triangle BAT. Que le triangle BTE soit plus petit que l'excès dont nous venons de parler, et qu'il soit une partie du triangle BAT. Il est évident que la droite BE sera une même partie de BA. C'est pourquoi, partageons BA en autant de parties égales que l'excès du segment sur la surface z a été ajouté de fois à lui-même, et que les points de division soient les points E, H, I, K. Joignons par des droites les points H, I, K avec le point r. Ces droites couperont la parabole, puisque la droite r∆ touche la parabole au point r. Par les points où ces droites coupent la parabole, menous les droites ΜΦ, NP, ΞΘ, ΠΟ parallèles au diamètre; ces droites seront

aussi parallèles à BA. Donc puisque le triangle BIE est plus petit que l'excès du segment BOI sur la surface z, il est évident que la surface z



et le triangle BIE, pris ensemble, sont plus petits que le segment BOI. Mais la somme des trapèzes ME, OA, OP, OO et du triangle IOE que la parabole traverse, est égale au triangle BTE; parce que le trapèze ME est commun; que le trapèze MA est égal au trapèze $\Phi\Lambda$; que le trapèze AE égal au trapèze Θ P; que le trapèze XE égal au trapèze Θ P ; que le triangle TXII égal au triangle TOS. Donc la surface z est plus petite que la somme des trapèzes MA, EP, III et du triangle III (a). Mais le triangle BAI est triple de la surface z; donc le triangle BAI est plus petit que le triple de la somme des trapèzes MA, PE, Θ II et du triangle III. Ce qui ne peut être; car on a démontré qu'il est plus grand que le triple de cette somme (14). Donc le segment BOI n'est pas plus grand que la surface z.

Je dis actuellement que le segment BOT n'est pas plus petit que la surface z. Supposons, s'il est possible, qu'il soit plus petit. L'excès de la surface z sur le segment BOT ajouté un certain nombre de fois à luimême, sera plus grand que le triangle BAT. Or, on peut prendre une surface qui soit plus petite que cet excès, et qui soit une partie du triangle BAT. Que le triangle BIE soit plus petit que ces excès; que ce triangle soit une partie du triangle BAT; et que le

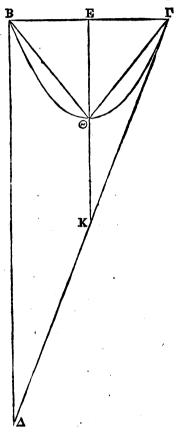
reste soit comme auparavant. Puisque le triangle BIE est plus petit que l'excès de la surface z sur le segment BOT, le triangle BTE et le segment BOT pris ensemble seront plus petits que la surface z. Mais la surface z est plus petite que la somme des trapèzes EM. ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ et du triangle τΠΣ; car le triangle BAT est triple de la surface z, et plus petit que le triple de la somme des trapèzes dont nous venons de parler, ainsi qu'on l'a démontré dans la proposition précédente. Donc le triangle BTE, conjointement avec le segment BOT est plus petit que la somme des trapèzes EM, ΦN, ΞΨ, ΨT et du triangle ΓΗΣ. Donc, si l'on retranche le segment commun, le triangle TBE sera plus petit que la somme des surfaces restantes. Ce qui est impossible; car on a démontré que le triangle BET est égal à la somme des trapèzes EM, OA, OP, OO et du triangle roz, laquelle somme est plus grande que la somme des surfaces restantes (6). Donc le segment BOT n'est pas plus petit que la surface z. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus grand; donc le segment BOT est égal à la surface z.

PROPOSITION XVII.

Cela étant démontré, il est évident qu'un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment.

En effet, soit un segment compris par une droite et par une parabole dont le sommet soit le point o. Inscrivons-lui un triangle BOT qui ait la même base et la même hauteur que le segment. Puisque le point o est le sommet du segment, la droite menée du point e, parallèlement au diamètre, coupe en deux parties égales la droite Br: parce que Br est parallèle à la tangente au point 0 (2). Conduisons la droite E0 parallèle au diamètre; du point B conduisons aussi la droite BA parallèle au diamètre, et du point r la droite rΔ tangente à la parabole au point r. Puisque Ko est parallèle au diamètre, que ro touche la parabole au point r, et que er est parallèle à la tangente au point o, le triangle BAT sera quadruple du triangle BOT (a). Puisque le triangle BAT est

quadruple du triangle BOT, et qu'il est triple du segment BOT, il est évident que le seg-



ment BØr est égal à quatre fois le tiers du triangle BØr.

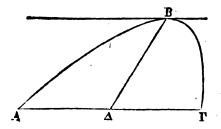
Lorsque des segmens sont compris par une

droite et par une courbe, la droite s'appelle la base du segment; la plus grande des perpendiculaires menées de la courbe à la base du segment, s'appelle la hauteur du segment, et enfin le point de la courbe d'où la plus grande perpendiculaire est abaissée sur la base, s'appelle le sommet.

PROPOSITION XVIII.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on conduit du milieu de la base une droite parallèle au diamètre, le sommet du segment est le point de la parabole rencontré par la droite parallèle au diamètre.

Soit ABT un segment compris par une



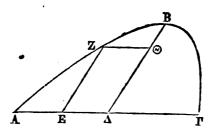
droite et par une parabole. Du milieu de Ar conduisons la droite De parallèle à un diamètre. Puisque dans une parabole nous avons mené BA parallèle au diamètre, et que les droites AA, AI sont égales, la droite AI et la droite qui touche la parabole au point B seront parallèles (1). Il est donc évident que de toutes les perpendiculaires menées de la parabole sur la droite AI, celle qui est menée du point B sera la plus grande. Donc le point B est le sommet du segment.

PROPOSITION XIX.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on conduit deux droites parallèles au diamètre, l'une du milieu de la base et l'autre du milieu de la moitié de la base; celle qui est conduite du milieu de la base est égale à quatre fois le tiers de celle qui est conduite du milieu de la moitié de la base.

Soit ABT un segment compris par une droite et par une parabole. Du milieu de AT et du milieu AA, conduisons les droites BA, EZ parallèles au diamètre de BA. Conduisons aussi zo parallèle à AT. Puisque dans une parabole nous avons conduit la droite BA pa-

rallèle au diamètre, et les droites AA, zo parallèles à la droite qui touche la parabole au point B, la droite BA sera à la droite BO

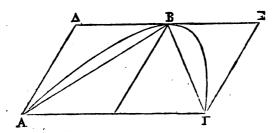


comme le quarré construit sur AD est au quarré construit sur zo (3). Donc BD est quadruple de BO. Il est donc évident que la droite BD est égale à quatre fois le tiers de la droite EZ.

PROPOSITION XX.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment, le triangle inscrit sera plus grand que la moitié du segment.

Que le segment ABT soit tel que celui dont nous venons de parler. Inscrivons-lui un triangle qui ait la même hauteur que ce segment (18). Puisque le triangle a la même base et la même hauteur que le segment, le point B sera le sommet du segment. Donc Ar est parallèle à la droite qui touche la



parabole au point B. Par le point B conduisons la droite AE parallèle à la droite AI, et des points A, I les droites AA, IE parallèles au diamètre. Ces droites tomberont hors de la parabole. Donc puisque le triangle ABI est la moitié du parallélogramme AAEI, il est évident qu'il est plus grand que la moitié du segment.

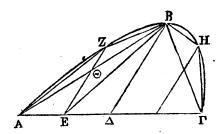
Cela étant démontré, il est évident qu'on peut inscrire dans ce segment un polygone de manière que la somme des segmens restans soit plus petite que toute surface donnée. Car en retranchant continuellement une surface plus grande que la moitié, nous diminuerons continuellement la somme des segmens restans, et nous la rendrons par conséquent plus petite que toute surface proposée.

PROPOSITION XXI.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment; et si dans les segmens restans l'on inscrit d'autres triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segmens, le triangle inscrit dans le segment entier est égal à huit fois chacun des autres triangles qui sont inscrits dans les segmens restans.

Soit le segment ABT tel que celui dont nous venons de parler. Partageons AT en deux parties égales au point Δ ; conduisons $B\Delta$ parallèle au diamètre. Le point B sera le sommet du segment (18). Donc le triangle ABT aura la même base et la même hauteur que le segment. Partageons ensuite $A\Delta$ en deux parties égales au point E, et conduisons la droite EZ parallèle au diamètre. La droite AB sera partagée en deux parties égales au point Φ . Donc le point z sera le sommet du seg-

ment AZB. Donc le triangle AZB a la même base et la même hauteur que le segment AZB. Il faut démontrer que le triangle ABF est égal à huit fois le triangle ABZ.



En effet, la droite BA est égale à quatre fois le tiers de la droite EZ (19) et au double de la droite EO. Donc EO est double de OZ. Donc aussi le triangle AEB est double du triangle ZBA; car le triangle AEO est double du triangle AOZ, et le triangle OBE double du triangle ZOB. Donc le triangle ABT est égal à huit fois le triangle AZB. Nous démontrerons de la même manière qu'il est aussi égal à huit fois le triangle qui est inscrit dans le segment BHT.

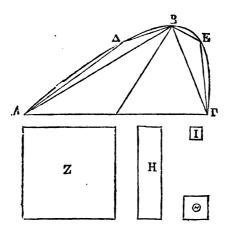
PROPOSITION XXIL

Si l'on a un segment compris par une droite et par une parabole; si des surfaces en aussi grand nombre que l'on voudra, sont placées à la suite les unes des autres; si chacune d'elles contient quatre fois celle qui la suit immédiatement; et si la plus grande de ces surfaces est égale à un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment, la sommé de toutes ces surfaces sera plus petite que le segment.

Soit un segment ADBET compris par une droite et par une parabole. Soient aussi autant de surfaces z, H, O, I que l'on voudra, placées les unes à la suite des autres; que z soit le quadruple de H, et égal à un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment. Je dis que le segment est plus grand que la somme des surfaces z, H, O, I.

Que le sommet du segment entier soit le point B, et les sommets des segmens restans les points \triangle , E. Puisque le triangle ABT est égal à huit fois chacun des triangles AB \triangle , BET, il est évident qu'il est le quadruple de

ces deux triangles pris ensemble. Mais le triangle ABT est égal à la surface z; donc par la même raison la somme des triangles AΔB, BET est égale à la surface н. On démontrera

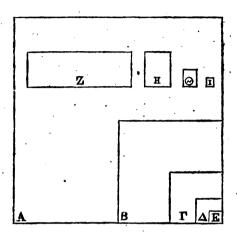


pareillement que la somme des triangles qui sont inscrits dans les segmens restans, et qui ont la même base et la même hauteur que ces segmens est égale à la surface Θ . Mais la somme des triangles qui sont inscrits dans les segmens suivans est égale à la surface 1. Donc la somme de toutes les surfaces proposées est égale à un certain polygone inscrit dans le segment. Il est donc évident que la somme de toutes ces surfaces est plus petite que le segment.

PROPOSITION XXIII.

Si tant de grandeurs que l'on voudra, sont placées à la suite les unes des autres, et si chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement, la somme de ces grandeurs, conjointement avec le tiers de la plus petite est égale à quatre fois le tiers de la plus grande.

Soient tant de grandeurs que l'on voudra A, B, T, A, E, placées à la suite les unes des autres, dont chacune contienne quatre fois celle qui suit immédiatement. Que la plus grande soit A; que z soit le tiers de B; que H soit le tiers de T; que ⊗ soit le tiers de △, et 1 le tiers de E. Puisque z est le tiers de B, et que B est le quart de A, les grandeurs B, z prises ensemble seront le tiers de A. Par la même raison, les grandeurs H, T prises ensemble, sont le tiers de B; les grandeurs Θ, Δ prises ensemble, le tiers de r, et les grandeurs I, E prises ensemble, le tiers de Δ. Donc la somme des grandeurs B, r, Δ, E, Z, H, O, I est le tiers de la somme des grandeurs A, B, r, \(\Delta \). Mais la somme des grandeurs Z, H, Θ est le tiers de la somme des grandeurs B, Γ , Δ ; donc la somme des grandeurs restantes B, Γ , Δ , E, I est le tiers de la

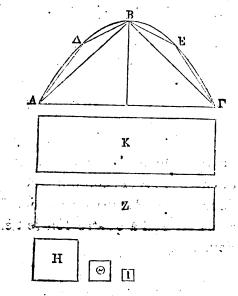


grandeur restante A. Donc la somme des grandeurs A, B, r, \triangle , E, conjointement avec la grandeur 1, c'est-à-dire avec le tiers de la grandeur E, est égal à quatre fois le tiers de la grandeur A (a).

PROPOSITION XXIV.

Un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que ce segment.

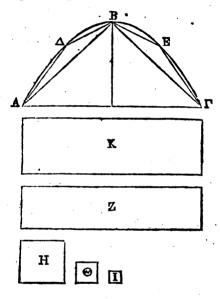
Soit ADBET un segment compris par une



droite et par une parabole. Soit aussi un triangle ABF qui ait la même base et la même hauteur que le segment. Que la surface k soit égale à quatre fois le tiers du triangle

ABT. Il faut démontrer que la surface K est égale au segment ADBET.

Car si la surface k n'est pas égale au segment ADBET, elle est ou plus grande ou plus petite. Supposons d'abord, si cela est possible, que le segment ADBET soit plus grand que la surface K. Inscrivons les triangles AAB, BET, ainsi que cela a été dit (21). Inscrivons dans les segmens restans d'autres triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segmens; et continuons d'inscrire dans les segmens restans deux triangles qui avent la même base et la même hauteur que ces segmens. La somme des segmens restans sera certainement plus petite que l'excès du segment ADBET sur la surface K. Donc le polygone inscrit sera plus grand que la surface k. Ce qui ne peut être. En effet, le triangle ABT étant quadruple de la somme des triangles ADB, BET, la somme de ceux-ci quadruple la somme de ceux qui sont inscrits dans les segmens suivans, et ainsi de suite, des surfaces sont placées les unes à la suite des autres, et chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement (£1). D'où il suit que la somme de toutes ces surfaces est plus petite que quatre fois le tiers de la plus grande de ces surfaces (23). Mais la surface k est égale à quatre fois le tiers de cette surface; donc le segment ADBET n'est pas plus grand que la surface k.



Supposons à présent, si cela est possible, que le segment ADBET soit plus petit que la surface K. Que le triangle ABT soit égal à la surface Z; que la surface H soit le quart de la surface Z; que la surface e soit le quart de la surface H et ainsi de suite, jusqu'à ce que la dernière surface soit plus petite que

·l'excès de la surface k sur le segment. Que cette dernière surface soit 1. La somme des surfaces z, H, O, I, conjointement avec le tiers de la surface I, est égale à quatre fois le tiers de la surface z (23). Mais la surface x est égale à quatre fois le tiers de la surface z; donc la surface k est égale à la somme des surfaces z, H, O, I, conjointement avec le tiers de la surface 1. Mais l'excès de la surface K sur la somme des surfaces z, H, O, I est plus petite que la surface I, et l'excès de la surface k sur le segment est plus grand que la surface 1; il est donc évident que la somme des surfaces z, H, O, I est plus grande que le segment. Ce qui ne peut être; car on a démontré que si des surfaces en aussi grand nombre qu'on voudra, sont placées les unes à la suite des autres, si chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement, et si la plus grande de toutes est égale au triangle inscrit dans le segment, la somme de ces surfaces est plus petite que le segment (22). Donc le segment ADBET n'est pas plus petit que la surface k. Mais nous avons démontré qu'il n'est pas plus grand; donc il est égal à la surface k. Mais la sur-

230 DE LA QUADRATURE, &c.

face K est égale à quatre fois le tiers du triangle ABT; donc le segment ADBET est égal à quatre fois le tiers du triangle ABT.

FIN DE LA QUADRATURE DE LA PARABOLE.

L'ARÉNAIRE.

L est des personnes, ô roi Gélon, qui pensent que le nombre des grains de sable est infini. Je ne parle point du sable qui est autour de Syracuse et qui est répandu dans le reste de la Sicile, mais bien de celui qui se trouve non-seulement dans les régions habitées, mais encore dans les régions inhabitées. Quelques-uns croient que le nombre des grains de sable n'est pas infini, mais qu'il est impossible d'assigner un nombre plus grand. Si ceux qui pensent ainsi se représentoient un volume de sable qui fût égal à celui de la terre, qui remplît toutes ses cavités, et les abîmes de la mer, et qui s'élevàt jusqu'aux sommets des plus hautes montagnes, il est évident qu'ils seroient bien moins persuadés qu'il pût exister un nombre qui surpassât celui des grains de sable.

Quant à moi, je vais faire voir par des démonstrations géométriques auxquelles tu

ne pourras refuser ton assentiment, que parmi les nombres dénommés par nous dans les livres adressés à Zeuxippe, il en est qui excèdent le nombre des grains d'un volume de sable égal non-seulement à la grandeur de la terre, mais encore à celui de l'univers entier.

Tu sais que le monde est appelé par la plupart des astronomes une sphère dont le centre est le même que celui de la terre et dont le rayon est égal à la droite placée entre le centre de la terre et celui du soleil. Aristarque de Samos rapporte ces choses en les réfutant, dans les propositions qu'il a publiées contre les astronomes. D'après ce qui est dit par Aristarque de Samos, le monde seroit beaucoup plus grand que nous venons de le dire; car il suppose que les étoiles et le soleil sont immobiles; que la terre tourne autour du soleil comme centre; et que la grandeur de la sphère des étoiles fixes dont le centre est celui du soleil, est telle que la circonférence du cercle qu'il suppose décrite par la terre est à la distance des étoiles fixes comme le centre de la sphère est à la surface. Mais il est évident que cela ne sauroit être, parce que le centre de la sphère n'ayant aucune grandeur, il s'ensuit qu'il ne peut avoir aucun rapport avec la surface de la sphère. Mais à cause que l'on conçoit la terre comme étant le centre du monde, il faut penser qu'Aristarque a voulu dire que la terre est à la sphère que nous appelons le monde, comme la sphère dans laquelle est le cercle qu'il suppose décrit par la terre est à la sphère des étoiles fixes; car il établit ses démonstrations, en supposant que les phénomènes se passent ainsi; et il paroît qu'il suppose que la grandeur de la sphère dans laquelle il veut que la terre se meuve est égale à la sphère que nous appelons le monde (a).

Nous disons donc que si l'on avoit une sphère de sable aussi grande que la sphère des étoiles fixes supposée par Aristarque, on pourroit démontrer que parmi les nombres dénommés dans le livre des Principes, il y en auroit qui surpasseroient le nombre de grains de sable contenus dans cette sphère.

Cela posé, que le contour de la terre soit à - peu - près de trois cent myriades de stades (\mathcal{E}), mais non plus graud. Car tu

n'ignores point que d'autres ont voulu démontrer que le contour de la terre est à-peuprès de trente myriades de stades. Pour moi, allant beaucoup plus loin, je le suppose dix fois aussi grand, c'est-à-dire que je le suppose à-peu-près de trois cent myriades de stades, mais non plus grand. Je suppose ensuite, d'après la plupart des astronomes dont nous venons de parler, que le diamètre de la terre est plus grand que celui de la lune, et que celui du soleil est plus grand que celui de la terre; je suppose enfin que le diamètre du soleil est environ trente fois aussi grand que le diamètre de la lune. mais non plus grand. Car parmi les astronomes dont nous venons de parler, Eudoxe a affirmé que le diamètre du soleil étoit environ neuf fois aussi grand que celui de la lune; Phidias, fils d'Acupatre, a dit qu'il étoit environ douze fois aussi grand; et enfin Aristarque s'est efforcé de démontrer que le diamètre du soleil étoit plus grand que dixhuit fois le diamètre de la lune et plus petit que vingt fois. Pour moi, allant encore plus loin, afin de démontrer sans réplique ce que je me suis proposé, je suppose que le diamètre du soleil est à-peu-près égal à trente fois le diamètre de la lune, mais non plus grand. Je suppose, outre cela, que le diamètre du soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés inscrit dans un grand cercle de la sphère dans laquelle il se meut: je fais cette supposition, parce qu'Aristarque affirme que le soleil paroît être la sept cent vingtième partie du cercle qu'on appelle le Zodiaque.

J'ai fait tous mes efforts pour prendre, avec des instrumens, l'angle qui comprend le soleil et qui a son sommet à l'œil de l'observateur. Cet angle n'est pas facile à prendre, parce qu'avec l'œil, les mains et les instrumens dont on se sert pour cela, on ne peut pas le mesurer d'une manière bien exacte. Mais il est inutile de parler davantage de l'imperfection de ces instrumens, parce que cela a déjà été fait plusieurs fois. Au reste, il me suffit, pour démontrer ce que je me suis proposé, de prendre un angle qui ne soit pas plus grand que celui qui comprend le soleil et qui a son sommet à l'œil de l'observateur; et ensuite un autre angle qui ne soit pas plus petit que celui qui comprend le soleil et qui a aussi son sommet à l'œil de l'observateur.

C'est pourquoi avant placé une longue règle sur une surface plane élevée dans un endroit d'où l'on pût voir le soleil levant; aussitôt après le lever du soleil, je posai perpendiculairement sur cette règle un petit cylindre. Le soleil étant sur l'horison et pouvant être regardé en face (γ) , je dirigeai la règle vers le soleil, l'œil étant à une de ses extrémités, et le cylindre étant placé entre le soleil et l'œil de manière qu'il cachât entièrement le soleik J'éloignai le cylindre de l'œil jusqu'à ce que le soleil commençât à être apperçu le moins possible de part et d'autre du cylindre, et alors j'arrêtai le cylindre. Si l'œil appercevoit le soleil d'un seul point, et si l'on conduisoit de l'extrémité de la règle où l'œil est placé des droites qui fussent tangentes au cylindre, il est évident que l'angle compris par ces droites seroit plus petit que l'angle qui auroit son sommet à l'œil et qui embrasseroit le soleil; parce qu'on appercevroit quelque chose du soleil de part et d'autre du cylindre. Mais à cause que l'œil n'apperçoit pas les objets par un seul point, et que la partie de l'œil qui voit à une certaine grandeur (5), je pris un cylindre dont le diamètre ne fût pas plus petit que la largeur de la partie de l'œil qui voit; je posai ce cylindre à l'extrémité de la règle où l'œil étoit placé, et je conduisis ensuite deux droites tangentes aux deux cylindres. Il est évident que l'angle compris par ces tangentes dut se trouver plus petit que l'angle qui embrassoit le soleil et qui avoit son sommet à l'œil.

On trouve un cylindre dont le diamètre ne soit pas plus petit que la largeur de la partie de l'œil qui voit de la manière suivante: on prend deux cylindres d'un petit diamètre, mais d'un diamètre égal, dont l'un soit blanc et dont l'autre ne le soit pas; on les place devant l'œil, de manière que le cylindre blanc soit le plus éloigné et que l'autre soit le plus près possible et touche le visage. Si les diamètres des cylindres sont plus petits que la largeur de la partie de l'œil qui voit, il est évident que cette partie de l'œil apperçoit, en embrassant le cylindre qui est près du visage, l'autre cylindre qui est blanc; elle le découvre tout entier,

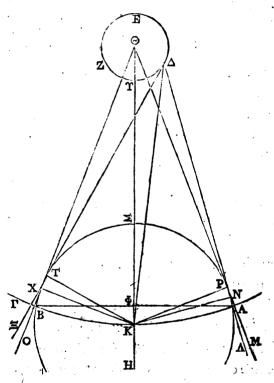
si les diamètres des cylindres sont beaucoup plus petits que la largeur de la partie de l'œil qui voit; sinon, elle n'en découvre que quelques parties placées de part et d'autre de celui qui est près de l'œil. Je disposai donc de cette manière deux cylindres dont l'épaisseur étoit telle que l'un cachoit l'autre par son épaisseur sans cacher un endroit plus grand. Il est évident qu'une grandeur égale à l'épaisseur de ces cylindres n'est pas, en quelque façon, plus petit que la largeur de la partie de l'œil qui voit (¿).

Pour prendre un angle qui ne fût pas plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet à l'œil, je me conduisis de la manière suivante: après avoir éloigné de l'œil le cylindre jusqu'à ce qu'il cachât le soleil tout entier, je menai de l'extrémité de la règle où l'œil étoit placé des droites tangentes au cylindre. Il est évident que l'angle compris par ces droites dut se trouver plus grand que celui qui embrasse le soleil et qui a son sommet à l'œil.

Ces angles ayant été pris de cette manière, et les ayant comparés avec un angle droit, le plus grand de ces angles, qui avoit son sommet au point marqué sur la règle, se trouva plus petit que le cent se xante-quatrième partie d'un angle droit et le plus petit se trouva plus grand que la deux centième partie de ce même angle. Il est donc évident que l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet à l'œil est plus petit que la cent soixante-quatrième partie d'un angle droit et plus grand que la deux centième partie de ce même angle.

Cela étant ainsi, on démontre que le diamètre du soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés inscrit dans un grand cercle de la sphère du monde. En effet, supposons un plan conduit par le centre de la terre, par le centre du soleil et par l'œil de l'observateur, le soleil étant peu élevé au-dessus de l'horizon. Ce plan coupera la sphère du monde suivant le cercle ABT, la terre suivant le cercle AEZ, et le soleil suivant le cercle EH. Que le point o soit le centre de la terre, le point k le centre du soleil, et le point \(\Delta \) l'œil de l'observateur. Conduisons des droites tangentes au cercle IH; savoir, du point \(\Delta \) les droites \(\Delta \), \(\Delta \) tangentes aux points N et T, et du point o

les droites Θ M, Θ O tangentes aux points P et x. Que ces croites Θ M, Θ O coupent la circonférence du cercle ABF aux points A, B. La droite Θ K sera plus grande que la droite Δ K,



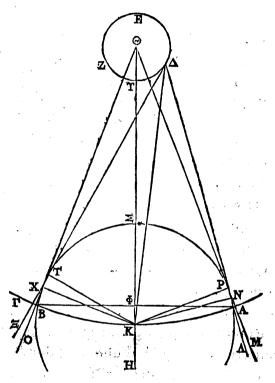
parce que l'on suppose le soleil au-dessus de l'horizon (2). Donc l'angle compris par les droites $\Delta \Lambda$, $\Delta \Xi$ est plus grand que l'angle compris par les droites ΘM , ΘO (ζ). Mais

l'angle compris par les droites $\triangle A$, $\triangle E$ est plus grand que la 200° partie d'un angle droit et plus petit que la 164° partie de ce même angle; parce que cet angle est égal à l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet à l'œil. Donc l'angle compris par les droites ΘM , ΘO est plus petit que la 164° partie d'un angle droit. Donc la droite AB est plus petite que la corde de la 656° partie de la circonférence du cercle ABr.

Mais la raison du contour du polygone dont nous venons de parler au rayon du cercle ABT est moindre que la raison de 44 à 7; parce que la raison du contour d'un polygone quelconque inscrit dans un cercle au rayon de ce cercle est plus petite que la raison de 44 à 7. Car tu n'ignores pas que nous avons démontré que le contour d'un cercle quelconque est plus grand que le triple du diamètre, augmenté d'une certaine partie qui est plus petite que le 7° de son diamètre, et plus grande que les $\frac{10}{71}$ (de la Mesure du Cercle, prop. 3). Donc la raison de BA à OK est moindre que la raison de 11 à 1148 (n). Donc la droite BA est plus petite que la 100° partie de OK (8). Mais le diamètre du cercle

١

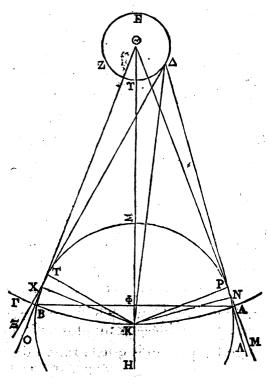
EH est égal à BA; parce que la droite DA moitié de BA est égale à KP, à cause que les droites OK, OA étant égales, on a abaissé de



leurs extrémités des perpendiculaires opposées au même angle. Il est donc évident que le diamètre du cercle EH est plus petit que la 100° partie de OK. Mais le diamètre EOT est plus petit que le diamètre du cercle EH,

parce que le cercle DEZ est plus petit que le cercle EH; donc la somme des droites or, KE est plus petite que la 100° partie de OK. Donc la raison de ex à Yz est moindre que la raison de 100 à 99 (1). Mais ok n'est pas plus petit que Θ P, et Σ Y est plus petit que Δ T; donc la raison de OP à AT est moindre que la raison de 100 à 99. De plus, puisque les côtés KP, KT des triangles rectangles OKP, AKT sont égaux, que les côtés OP, AT sont inégaux et que le côté op est le plus grand, la raison de l'angle compris par les côtés AT, Δκ à l'angle compris par les côtés ΘΡ, Θκ sera plus grande que la raison de la droite on à la droite Ak, et moindre que la raison de OP à DT; car si parmi les côtés de deux triangles rectangles qui comprennent l'angle droit, les uns sont égaux et les autres inégaux, la raison du plus grand des angles inégaux compris par les côtés inégaux au plus petit de ces angles, est plus grande que la raison du plus grand des côtés opposés à l'angle droit au plus petit de ces côtés, et moindre que la raison du plus grand des côtés qui comprennent l'angle droit au plus petit (z). Donc la raison de l'angle compris entre les côtés AA,

Az à l'angle compris entre les côtés 00, 0M est moindre que la raison de 0P à AT, laquelle est certainement moindre que la raison de 100 à 99. Donc la raison de l'angle



compris par les côtés $\Delta \Lambda$, $\Delta \Xi$ à l'angle compris entre ΘM , ΘO est moindre que la raison de 100 à 99. Mais l'angle compris par les côtés $\Delta \Lambda$, $\Delta \Xi$ est plus grand que la 200° partie

d'un angle droit; donc l'angle compris par les côtés em, eo sera plus grand que les $\frac{99}{2000}$ d'un angle droit. Donc cet angle sera plus grand que le 203° d'un angle droit. Donc la droite ba est plus grande que la corde d'un arc de la circonférence du cercle abr divisée en 812 parties. Mais le diamètre du soleil est égal à la droite ab; il est donc évident que le diamètre du soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés.

Cela étant posé, on démontre aussi que le diamètre du monde est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre, et que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades. Car puisqu'on a supposé que le diamètre du soleil n'est pas plus grand que trente fois le diamètre de la lune, et que le diamètre de la terre est plus grand que le diamètre de la lune, il est évident que le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre. De plus, puisqu'on a démontré que le diamètre du soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés inscrit dans un grand cercle de la sphère du monde, il est évident que le contour du po-

lygone de mille côtés dont nous venons de parler est plus petit que mille fois le diamètre du soleil. Mais le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre; donc le contour de ce polygone est plus petit que trois myriades de fois le diamètre de la terre. Mais le contour de ce polygone est plus petit que trois myriades de fois le diamètre de la terre et plus grand que le triple du diamètre du monde, parce qu'il est démontré que le diamètre d'un cercle quelconque est plus petit que la troisième partie du contour d'un polygone quelconque qui est inscrit dans ce cercle, et qui a plus de six côtés égaux. Donc le diamètre du monde est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre. Il est donc évident que le diamètre du monde qui est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre sera plus petit que cent myriades de myriades de stades. Mais nous avons supposé que le contour de la terre ne surpasse pas trois cents myriades de stades, et le contour de la terre est plus grand que le triple de son diamètre, parce que le contour d'un cercle quelconque est plus grand que le triple de son diamètre;

il est donc évident que le diamètre de la terre est plus petit que cent myriades de stades. Mais le diamètre du monde est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre; il est donc évident que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

Voilà ce que nous avons supposé relativement aux grandeurs et aux distances, et voici ce que nous supposons relativement aux grains de sable. Soit un volume de sable qui ne soit pas plus grand qu'une graine de pavot; que le nombre des grains de sable qu'il renferme ne surpasse pas une myriade, et que le diamètre de cette graine de pavot ne soit pas plus petite que la quarantième partie d'un doigt.

Voilà ce que je suppose, et voici ce que je fis à ce sujet. Je plaçai des graines de pavot en droite ligne sur une petite règle, de manière qu'elles se touchassent mutuellement; vingt-cinq de ces graines occupèrent une longueur plus grande que la largeur d'un doigt. Je supposai que le diamètre d'une graine de pavot étoit encore plus petit, et qu'il n'étoit que le quarantième de la largeur d'un doigt,

afin de ne point éprouver de contradiction dans ce que je m'étois proposé. Telles sont les suppositions que nous faisons. Mais je pense qu'il est nécessaire à présent d'exposer les dénominations de nombres; si je n'en disois rien dans ce livre, je craindrois que ceux qui n'auroient pas lu celui que j'ai adressé à Zeuxippe ne tombassent dans l'erreur.

On a donné des noms aux nombres jusqu'à une myriade et au-delà d'une myriade, les noms qu'on a donné aux nombres sont assez connus, puisqu'on ne fait que répéter une myriade jusqu'à dix mille myriades.

Que les nombres dont nous venons de parler et qui vont jusqu'à une myriade de myriades soient appelés nombres premiers, et qu'une myriade de myriades des nombres premiers soit appelée l'unité des nombres seconds; comptons par ces unités, et par les dixaines, les centaines, les milles, les myriades de ces mêmes unités, jusqu'à une myriades de myriades. Qu'une myriade de myriades des nombres seconds soit appelée l'unité des nombres troisièmes; comptons par ces unités, et par les dixaines, les centaines, les milles, les myriades de ces mêmes unités, jusqu'à une myriade de myriades; qu'une myriade de myriades des nombres troisièmes soit appelée l'unité des nombres quatrièmes; qu'une myriade de myriades de nombres quatrièmes soit appelée l'unité des nombres cinquièmes, et continuons de donner des noms aux nombres suivans jusqu'aux myriades de myriades de nombres composés de myriades de myriades des nombres troisièmes.

Quoique cette grande quantité de nombres connus soit certainement plus que suffisante, on peut cependant aller plus loin. En effet, que les nombres dont nous venons de parler soient appelés les nombres de la première période, et que le dernier nombre de la première période soit appelé l'unité des nombres premiers de la seconde période. De plus, qu'une myriade de myriades des nombres premiers de la seconde période soit appelée l'unité des nombres seconds de la seconde période; qu'une myriade de myriades des nombres seconds de la seconde période soit appelée l'unité des nombres troisièmes de la seconde période, et continuons de donner des noms aux nombres suivans jusqu'à

un nombre de la seconde période qui soit égal aux myriades de myriades de nombres composés de myriades de myriades. De plus, que le dernier nombre de la seconde période soit appelé l'unité des nombres premiers de la troisième période, et continuons de donner des noms aux nombres suivans jusqu'aux myriades de myriades de la période formée d'une myriade de myriades de nombres de myriades de myriades (λ).

Les nombres étant ainsi nommés, si des nombres continuellement proportionnels, à partir de l'unité, sont placés les uns à la suite des autres, et si le nombre qui est le plus près de l'unité est une dixaine, les huit premiers nombres, y compris l'unité, seront ceux qu'on appelle nombres premiers; les huit suivans seront ceux qu'on appelle seconds et les autres nombres seront dénommés de la même manière d'après la distance de leur octade à l'octade des nombres premiers. C'est pourquoi le huitième nombre de la première octade sera de mille myriades; le premier nombre de la seconde octade, qui est l'unité des nombres seconds, sera une myriade de myriades, parce qu'il est décuple

de celui qui le précède; le huitième nombre de la seconde octave sera de mille myriades des nombres seconds, et enfin le premier nombre de la troisième octade qui est l'unité des nombres troisièmes sera une myriade de myriades des nombres seconds, parce qu'il est décuple de celui qui le précède. Il est donc évident qu'on aura plusieurs octades, ainsi qu'on l'a dit.

Il est encore utile de connoître ce qui suit. Si des nombres sont continuellement proportionnels à partir de l'unité, et si deux termes de cette progression sont multipliés l'un par l'autre, le produit sera un terme de cette progression éloignée d'autant de termes du plus grand facteur que le plus petit facteur l'est de l'unité. Ce même produit sera éloigné de l'unité d'autant de termes moins un que les deux facteurs le sont ensemble de l'unité (µ).

En effet, soient A, B, Γ, Δ, E; Z, H, Θ, I, K, Λ certains nombres proportionnels à partir de l'unité; que A soit l'unité. Que le produit de Δ par Θ soit x. Prenons un terme A de la progression éloignée de Θ d'autant de termes que Δ l'est de l'unité. Il faut démon-

trer que x est égal à A. Puisque les nombres $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, A$ sont proportionnels, et que \(\Delta \) est autant éloigné de \(\Delta \) que A l'est de Θ, le nombre Δ sera au nombre A comme le nombre A est au nombre 0; mais \triangle est égal au produit de A par \triangle ; donc Λ est égal au produit de Θ par Δ (ν); donc A est égal à x. Il est donc évident que le produit de Δ par Θ est un terme de la progression, et qu'il est éloigné du plus grand facteur d'autant de termes que le plus petit l'est de l'unité. De plus il est évident que ce même produit sera éloigné de l'unité d'autant de termes moins un que les facteurs le sont ensemble de l'unité. En effet, le nombre des termes A, B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ est égal au nombre des termes dont o est éloigné de l'unité; et le nombre des termes 1, K, A est plus petit d'une unité que le nombre des termes dont o est éloigné de l'unité, puisque le nombre de ces termes avec o est égal au nombre des termes dont o est éloigné de l'unité.

Ces choses étant en partie supposées et en partie démontrées, nous allons faire voir ce que nous nous sommes proposés. En effet, puisque l'on a supposé que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas plus petit que la quarantième partie de la largeur d'un doigt, il est évident qu'une sphère qui a un diamètre de la largeur d'un doigt n'est pas plus grande qu'il ne le faut pour contenir six myriades et quatre mille graines de pavots. Car cette sphère est égale à soixante-quatre fois une sphère qui a un diamètre d'un quarantième de doigt; parce qu'il est démontré que les sphères sont entre elles en raison triplée de leurs diamètres. Mais on a supposé que le nombre des grains de sable contenus dans une graine de pavot n'étoit pas de plus d'une myriade; il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère ayant un diamètre de la largeur d'un doigt ne surpassera pas une myriade de fois six myriades et quatre mille. Mais ce nombre renferme six unités des nombres seconds et quatre mille myriades des nombres premiers; ce nombre est donc plus petit que dix unités des nombres seconds.

Une sphère qui a un diamètre de cent doigts est égal à cent myriades de fois une sphère qui a un diamètre d'un doigt, parce

que les sphères sont en raison triplée de leurs diamètres (ξ). Donc si l'on avoit une sphère de sable dont le diamètre fût de cent doigts, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que celui qui résulte du produit de dix unités des nombres seconds par cent myriades. Mais dix unités: des nombres seconds sont, à partir de l'unité, le dixième terme d'une progression dont les termes sont décuples les uns des autres, et cent myriades en sont le septième terme, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le nombre qui résulte du produit de ces deux nombres est le sixième terme de la progression à partir de l'unité. Car on a démontré que le produit de deux termes d'une progression qui commence par un, est distant de l'unité d'autant de termes moins un que les facteurs ensemble le sont de l'unité. Mais parmi ces seize termes, les huit premiers conjointement avec l'unité, appartiennent aux nombres premiers, et les huit autres appartiennent aux nombres seconds, et le dernier terme est de mille myriades des nombres seconds. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans

une sphère de cent doigts de diamètre, est plus petit que mille myriades des nombres seconds.

Une sphère d'un diamètre d'une myriade de doigts est égal à cent myriades de fois une sphère d'un diamètre de cent doigts. Donc, si l'on avoit une sphère de sable d'un diamètre d'une myriade de doigts, il est évident que le nombre des grains de sable contenus dans cette sphère seroit plus petit que celui qui résulte du produit de mille myriades de nombres seconds par cent myriades. Mais mille myriades de nombres seconds sont le seizième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades en sont le septième terme, à partir aussi de l'unité; il est donc évident que le nombre qui résulte du produit de ces deux nombres sera le vingt-deuxième terme de la progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces vingt-deux termes, les huit premiers y compris l'unité appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers, les huit suivans aux nombres qu'on appelle seconds, les six restans à ceux qu'on appelle troisièmes, et enfin le dernier terme est de dix myriades des nombres troisièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère qui auroit un diamètre de dix mille doigts, ne seroit pas moindre que dix myriades des nombres troisièmes. Mais une sphère qui a un diamètre d'une stade est plus petite qu'une sphère qui a un diamètre d'une myriade de doigts. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère qui auroit un diamètre d'une stade, seroit plus petit que dix myriades des nombres troisièmes.

Une sphère qui a un diamètre de cent stades est égal à cent myriades de fois une sphère qui a un diamètre d'une stade. Donc si l'on avoit une sphère de sable aussi grande que celle qui a un diamètre de cent stades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que le nombre qui résulte du produit d'une myriade de myriades des nombres troisièmes par cent myriades. Mais dix myriades des nombres troisièmes sont le vingt-deuxième terme de la progression à partir de l'unité, et cent myriades en sont le septième terme, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le produit de

ces deux nombres est le vingt-huitième terme de cette même progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces vingt-huit termes, les huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers; les huit suivans, à ceux qu'on appelle seconds; les huit suivans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les quatre restans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les quatre restans, à ceux qu'on appelle quatrièmes, et le dernier de ceux-ci est de mille unités des nombres quatrièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère d'un diamètre de cent stades, seroit plus petit que mille unités des nombres quatrièmes.

Une sphère qui a un diamètre de dix mille stades est égale à cent myriades de fois une sphère qui a un diamètre de cent stades. Donc si l'on avoit une sphère de sable qui a un diamètre de dix mille stades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que celui qui résulte du produit de mille unités des nombres quatrièmes par cent myriades. Mais mille unités des nombres quatrièmes sont le vingt-huitième terme de la progression, à partir de

TOME II.

l'unité, et cent myriades en sont le septième, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le produit sera le trente-quatrième terme, à partir de l'unité. Mais parmi ces termes, les huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers; les huit suivans, à ceux qu'on appelle seconds; les huit suivans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les huit suivans, à ceux qu'on appelle quatrièmes; les deux restans, à ceux qu'on appelle cinquièmes; et le dernier de ceux-ci est de dix unités de nombres cinquièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère ayant un diamètre d'une myriade de stades, seroit plus petit que dix unités des nombres cinquièmes.

Une sphère qui a un diamètre de cent myriades de stades est égal à cent myriades de fois une sphère ayant un diamètre d'une myriade de stades. Donc si l'on avoit une sphère de sable ayant un diamètre de cent myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que le produit de dix unités des nombres cinquièmes par cent myriades. Mais dix unités des nombres cinquièmes sont le trentequatrième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades sont le septième terme, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le produit de ces deux nombres sera le quarantième terme de la progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces quarante termes, les huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers; les huit suivans, à ceux qu'on appelle seconds; les huit suivans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les huit qui suivent les nombres troisièmes, à ceux qu'on appelle quatrièmes; les huit qui suivent les nombres quatrièmes. à ceux qu'on appelle cinquièmes, et le dernier de ceux-ci est de mille myriades de nombres cinquièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère ayant un diamètre de cent myriades de stades seroit plus petit que mille myriades des nombres cinquièmes.

Une sphère qui a un diamètre d'une myriade de myriades de stades est égale à cent myriades de fois une sphère ayant un diamètre de cent myriades de stades. Si done l'on avoit un sphère de sable dont le diamètre fût d'une myriade de myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que le produit de mille myriades de nombres cinquièmes par cent myriades. Mais mille myriades des nombres cinquièmes sont le quarantième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades sont le septième, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le produit de ces deux nombres est le quarantesixième de la progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces quarante-six termes, les huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers: les huit suivans, à ceux qu'on appelle seconds; les huit suivans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les huit qui suivent les nombres troisièmes, à ceux qu'on appelle quatrièmes; les huit qui viennent après les nombres quatrièmes, à ceux qu'on appelle cinquièmes; les six restans à ceux qu'on appelle sixièmes, et le dernier de ceux-ci est de dix myriades des nombres sixièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère qui auroit un diamètre de dix mille myriades de stades, seroit plus petit que dix myriades des nombres sixièmes.

Une sphère qui a un diamètre de cent myriades de myriades de stades est égal à cent myriades de fois une sphère qui a un diamètre d'une myriade de myriades de stades. Si donc l'on avoit une sphère de sable dont le diamètre fût de cent myriades de myriades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que le produit de dix myriades des nombres sixièmes par cent myriades. Mais dix myriades des nombres sixièmes sont le quarante-sixième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades en sont le septième, à partir aussi de l'unité; il est donc évident que le produit de ces deux nombres sera le cinquante-deuxième terme de la progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces cinquantedeux termes, les quarante-huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers, seconds, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes, les quatre restans appartiennent aux nombres septièmes, et le dernier de ceux-ci est de mille

unités des nombres septièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère ayant un diamètre de cent myriades de myriades de stades, sera plus petit que mille unités des nombres septièmes.

Puisque l'on a démontré que le diamètre du monde n'est pas de cent myriades de myriades, il est évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère égale à celle du monde, est plus petit que mille unités de nombres septièmes. On a donc démontré que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère égale en grandeur à celle que la plupart des astronomes appellent monde, seroit plus petit que mille unités des nombres septièmes.

Nous allons démontrer à présent que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère aussi grande que la sphère des étoiles fixes, supposée par Aristarque, est plus petit que mille myriades des nombres huitièmes. En effet, puisque l'on suppose que la terre est à la sphère que nous appelons le monde comme la sphère que nous appelons le monde est à la sphère des étoiles fixes sup-

posée par Aristarque; que les diamètres des sphères sont proportionnels entre eux et que l'on a démontré que le diamètre du monde est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre, il est évident que le diamètre de la sphère des étoiles fixes est plus petit que dix mille fois le diamètre du monde. Mais les sphères sont entre elles en raison triplée de leurs diamètres; il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère aussi grande que la sphère des étoiles fixes, supposée par Aristarque, seroit plus petit qu'une myriade de myriades de myriades de fois la sphère du monde : car il a été démontré que le nombre des grains de sable qui feroient un volume égal au monde est plus petit que mille unités de nombres septièmes. Il est donc évident que si l'on formoit de sable une sphère égale à celle qu'Aristarque suppose être celle des étoiles fixes, le nombre des grains de sable seroit plus petit que le produit de mille unités des nombres septièmes par une myriade de myriades de myriades. Mais mille unités des nombres septièmes est le cinquantedeuxième terme de la progression à partir de l'unité, et une myriade de myriades de myriades en est le treizième, à partir aussi de l'unité; il est donc évident que le produit sera le soixante-quatrième terme de la progression. Mais ce nombre est le huitième des nombres huitièmes, c'est-à-dire qu'il est de mille myriades des nombres huitièmes; il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère aussi grande que celle des étoiles fixes supposée par Aristarque, est plus petit que mille myriades des nombres huitièmes (o).

Je pense, ô roi Gélon, que ces choses ne paroîtront pas très-croyables à beaucoup de personnes qui ne sont point versées dans les sciences mathématiques; mais elles seront démontrées pour ceux qui ont cultivé ces sciences et qui se sont appliqués à connoître les distances et les grandeurs de la terre, du soleil, de la lune et du monde entier. C'est pourquoi j'ai pensé qu'il ne seroit pas inconvenant que d'autres les considérassent de nouveau.

FIN DE L'ARÉNAIRE.

DES CORPS

QUI SONT

PORTÉS SUR UN FLUIDE.

LIVRE PREMIER. HYPOTHÈSE PREMIÈRE.

On suppose que la nature d'un fluide est telle que ses parties étant également placées et continues entre elles, celle qui est moins pressée est chassée par celle qui l'est davantage. Chaque partie du fluide est pressée par le fluide qui est au-dessus suivant la verticale, soit que le fluide descende quelque part, soit qu'il soit chassé d'un lieu dans un autre.

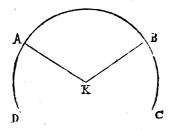
PROPOSITION I.

Si une surface est coupée par un plan toujours par le même point, et si la section est une circonférence de cercle, ayant 266 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

pour centre le point par lequel passe le plan coupant, cette surface sera une surface sphérique.

Qu'une surface soit coupée par un plan mené par le point k; et que la section soit toujours une circonférence de cercle, ayant pour centre le point k. Je dis que cette surface est une surface sphérique.

Car si cette surface n'est pas sphérique, les droites menées du point k à cette surface ne seront pas toutes égales. C'est pourquoi, que A, B soient des points dans cette surface, et que les droites Ak, kB soient inégales. Par les droites Ak, kB conduisons un

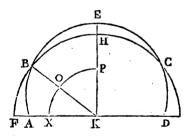


plan qui fasse, dans cette surface, une secction qui soit la ligne DABC. La ligne DABC sera une circonférence de cercle qui aura pour centre le point K; parce que l'on a supposé que la section de cette surface étoit un cercle. Donc les droites AK, KB sont égales entre elles. Mais elles sont inégales; ce qui est impossible. Il est donc évident que cette surface est une surface sphérique.

PROPOSITION II.

La surface de tout fluide en repos est sphérique; et le centre de cette surface sphérique est le même que le centre de la terre.

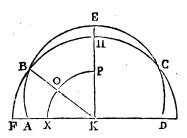
Supposons un fluide en repos. Que sa surface soit coupée par un plan conduit par le centre de la terre. Que le centre de la terre soit le point k, et que la section de cette surface soit la ligne ABCD. Je dis que la ligne



ABCD est un arc de cercle dont le centre est le point K.

Car si cela n'est pas, les droites menées du point k à la ligne ABCD ne seront pas 268 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

égales. Prenons une droite BK plus grande que certaines droites menées du point K à la ligne ABCD, mais plus petite que certaines autres; et du centre K, avec un intervalle



égal à cette droite, décrivons un arc de cercle. L'arc de ce cercle sera en partie en dehors de la ligne ABCD et en partie en dedans; puisque le rayon de cet arc est plus
grand que certaines droites menées du point
k à la ligne ABCD, et plus petit que certaines
autres. Que FBH soit l'arc de cercle dont nous
venons de parler. Ayant joint les points B, k,
menons les droites Fk, khe qui fassent des
angles égaux avec la droite kb. Du centre k
décrivons, dans un plan et dans le fluide,
un arc xop. Les parties du fluide qui sont
dans l'arc xop sont également placées et
continues entre elles. Mais les parties qui sont
dans l'arc xo sont pressées par le fluide qui

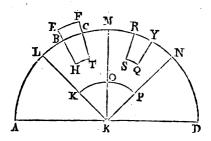
est contenu dans ABOX, et les parties qui sont dans l'arc or sont pressées par le sluide qui est contenu dans BEPO. Donc les parties du fluide qui sont dans l'arc xo et dans l'arc or sont inégalement pressées. Donc celles qui sont moins pressées seront chassées par celles qui le sont davantage (hyp. 1). Donc le fluide ne restera pas en repos. Mais on a supposé qu'il étoit en repos; il faut donc que la ligne ABCD soit un arc de cercle ayant pour centre le point k. De quelque manière que la surface du fluide soit coupée par un plan conduit par le centre de la terre, nous démontrerons semblablement que la section sera une circonférence de cercle, et que son centre sera le même que celui de la terre. D'où il suit évidemment que la surface d'un fluide en repos est sphérique, et que le centre de cette surface est le même que le centre de la terre; puisque cette surface est telle qu'étant coupée toujours par le même point, sa section est un arc de cercle. ayant pour centre le point par lequel passe le plan coupant.

PROPOSITION IIL

Si un corps qui, sous un volume égal, a la même pesanteur qu'un fluide (a), est abandonné dans ce fluide, il s'y plongera jusqu'à ce qu'il n'en reste rien hors de la surface du fluide; mais il ne descendra point plus bas.

Soit un corps de même pesanteur qu'un fluide. Supposons, si cela est possible, que ce corps étant abandonné dans ce fluide, une partie reste au-dessus de sa surface. Que ce fluide soit en repos. Supposons un plan qui, étant conduit par le centre de la terre, coupe le fluide et le corps plongé dans ce fluide, de manière que la section de la surface du fluide soit ABCD et que la section de ce corps soit EHTF. Que le centre de la terre soit le point k. Que витс soit la partie du corps qui est dans le fluide, et que BEFC soit la partie qui est en dehors. Supposons une pyramide, qui ait pour base un parallélogramme placé dans la surface du fluide (6), et pour sommet le centre de la terre. Que les sections des faces de la pyramide, par

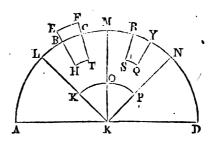
le plan dans lequel est l'arc ABCD, soient KL, KM. Dans le fluide et au-dessous de EF, TH, supposons une autre surface sphérique



хор, ayant le point к pour centre, de manière que xop soit la section de sa surface par le plan de l'arc ABCD. Prenons une autre pyramide égale et semblable à la première; qu'elle lui soit contiguë et continue, et que les sections de ses plans soient KM, KN. Supposons dans le fluide un autre solide RSQY composé du fluide, et égal et semblable à внтс qui est la partie du corps ент plongé dans le fluide. Les parties du fluide qui, dans la première pyramide, sont contenues dans la surface xo et qui dans la seconde pyramide sont contenues dans la surface op, sont également placées et continues entre elles; mais elles ne sont pas semblablement pressées. Car les parties du fluide contenues

272 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

dans xo sont pressées par le corps EHTF, et par le fluide placé entre les surfaces xo, LM et entre les faces de la pyramide; et les par-



ties contenues dans po sont pressées par le solide RSQY et par le fluide placé entre op, PM, et entre les faces de la pyramide. Mais la pesanteur du fluide placé entre MN, OP est plus petite que la pesanteur du fluide placé entre LM, XO solide; car le solide RSQY est plus petit que le solide EHTF, puisque RSQY est égal à BHTC, et l'on a supposé que, sous un volume égal, le corps plongé dans le fluide a la même pesanteur que ce fluide. Donc si on retranche les parties égales, les restes seront inégaux. Il est donc évident que la partie du fluide contenue dans la surface or sera chassée par la partie qui est contenue dans la surface xo; et que le fluide ne restera pas en repos (1). Mais on a supposé qu'il étoit en repos; donc il ne reste rien du corps plongé dans le fluide, audessus de la surface de ce fluide. Cependant ce corps ne descendra point plus bas; car les parties du fluide, étant également placées, le pressent semblablement, puisque ce corps à la même pesanteur que le fluide.

PROPOSITION IV.

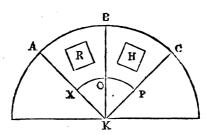
Si un corps plus léger qu'un fluide est abondonné dans ce fluide, une partie de ce corps restera au-dessus de la surface de ce fluide.

Soit un corps plus léger qu'un fluide; que ce corps abandonné dans ce fluide soit submergé tout entier, si cela est possible, de manière que nulle partie de ce corps ne soit au-dessus de la surface du fluide. Que le fluide soit en repos. Supposons un plan qui, étant conduit par le centre de la terre, coupe le fluide et le corps plongé dans ce fluide. Que la section de la surface du fluide soit l'arc de cercle ABC; et la section du corps, la figure où est la lettre R. Que le centre dé la terre soit K. Supposons, comme aupara-

18

274 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

vant, une certaine pyramide qui comprenne la figure R, et dont le sommet soit le point k. Que les faces de cette pyramide soient coupés par le plan ABC, suivant AK, KB; et



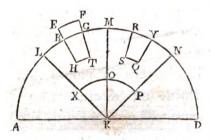
prenons une autre pyramide qui lui soit égale et semblable, et dont les plans soient coupés par le plan ABC, suivant les droites BK, KC. Dans le fluide et au-dessous du corps plongé dans le fluide, imaginons une surface sphérique, ayant pour centre le point K, et que cette surface sphérique soit coupée par le même plan ABC suivant XOP. Enfin, supposons dans la dernière pyramide un solide H qui soit composé du fluide et qui soit égal au corps B. Les parties du fluide qui, dans la première pyramide, sont contenues dans la surface XO, et qui, dans la seconde pyramide, sont contenues dans la surface or, sont également placées et continues entre

elles, et cependant elles ne sont pas semblablement pressées; car celles qui sont dans la première pyramide sont pressées par le corps R et par le fluide contenu dans cette pyramide en ABOX, et celles qui sont dans la seconde pyramide sont pressées par le corps H et par le fluide contenu dans cette pyramide en POBC. Mais la pesanteur du corps R est plus petite que la pesanteur du fluide contenu dans н, puisque le corps, sous un égal volume, est supposé plus léger que le fluide. Mais la pesanteur du fluide qui contient le solide R est égal à la pesanteur du fluide qui contient le solide H, puisque les pyramides sont égales. Donc la partie du fluide qui est dans la surface op est pressée davantage. Donc cette partie chassera la partie moins pressée, et le fluide ne restera pas en repos (1). Mais on a supposé que le fluide étoit en repos; donc le corps ne sera pas entièrement submergé, et une partie de ce corps restera au-dessus de la surface du fluide.

PROPOSITION V.

Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il s'y enfoncera jusqu'à ce qu'un volume de liquide égal au volume de la partie du corps qui est enfoncé ait la même pesanteur que le corps entier.

Faisons la même construction qu'auparavant. Que le fluide soit en repos, et que le corps entre soit plus léger que le fluide. Si le fluide est en repos, ses parties, qui sont



également placées, seront semblablement pressées. Donc le fluide contenu dans les surfaces xo, or est semblablement pressé. Donc le fluide contenu dans les surfaces xo, or, est pressé par un poids égal.

Mais la pesanteur du fluide qui est dans

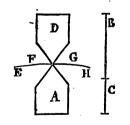
la première pyramide, le corps внтс excepté, est égale à la pesanteur du fluide qui est placé dans la seconde pyramide, le fluide RSQY excepté. Il est donc évident que la pesanteur du corps внт est égale à la pesanteur du fluide RSQY. D'où il suit qu'un volume du fluide égale à la partie du corps qui est enfoncée a la même pesanteur que le corps entier.

PROPOSITION VI.

Si un corps plus léger qu'un fluide est enfoncé dans ce fluide, ce corps remontera avec une force d'autant plus grande, qu'un volume égal du fluide sera plus pesant que ce corps.

Que le corps A soit plus léger qu'un fluide;

que B soit la pesanteur du corps A, et que BC soit la pesanteur d'une partie du fluide, ayant un volume égal à celui de A. Il faut démontrer que le corps A,

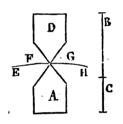


étant enfoncé dans le fluide, remontera avec une vîtesse d'autant plus grande que la pesanteur c est plus grande.

278 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

Prenons une grandeur D dont la pesanteur soit égale à c. Une grandeur composée de l'une et de l'autre grandeur, c'est-à-dire de A et de D sera plus légère que le fluide; car la pesanteur de la grandeur composée de AD est BC. Mais la pesanteur d'une partie du fluide ayant un volume égal à celui de ces deux grandeurs est plus grande que BC, parce que BC est la pesanteur d'une partie du fluide

ayant un volume égal à celui de A. Donc si l'on abandonne dans le fluide la grandeur composée de AD, elle s'y enfoncera jusqu'à ce qu'un volume du fluide



égal à la partie submergée ait une pesanteur égale à celle de la grandeur entière, ainsi que cela a été démontré (5). Que la surface d'un fluide quelconque soit une portion de la circonférence effet. Puisqu'un volume d'une partie du fluide égal à celui du corps A a la même pesanteur que les grandeurs A et D, il est évident que la partie submergée est le corps A, et que D tout entier est hors de la surface du fluide. Il est donc évident que le corps A remonte avec une force égale

à la force D qui est au-dessus de EFGH et qui le presse en bas; puisque l'une de ces forces n'est point détruite par l'autre. Mais la grandeur D est portée en bas avec une pesanteur égale à c; car on a supposé que la pesanteur D est égale à c. Donc la proposition est évidente.

PROPOSITION VII.

Si un corps plus pesant qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il sera porté en bas jusqu'à ce qu'il soit au fond; et ce corps sera d'autant plus léger dans ce fluide, que la pesanteur d'une partie du fluide, ayant le même volume que ce corps, sera plus grande.

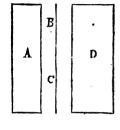
Il est évident qu'un corps plus pesant qu'un fluide, étant abandonné dans ce fluide, sera porté en bas, jusqu'à ce qu'il soit au fond; car les parties du fluide qui sont audessous sont plus pressées que les parties qui leur sont également adjacentes; puisque l'on a supposé que le corps est plus pesant que le fluide.

L'on démontrera que le corps est plus léger de la manière suivante. Soit un solide

A plus pesant que le fluide; que BC soit la pesanteur du corps A, et que B soit la pesanteur d'une partie du fluide, ayant un volume égal à celui de A. Il faut démontrer

que le corps A, plongé dans le fluide, a une pesanteur égale à c.

Prenons une autre grandeur D qui soit plus légère que le fluide, et dont la pesanteur soit égale à B; que



BC soit la pesanteur d'une portion du fluide, ayant un volume égal à la grandeur D. Les deux grandeurs A, D étant réunies, la grandeur composée de ces deux grandeurs aura la même pesanteur que le fluide. Car la pesanteur de la somme de ces deux grandeurs est égale à la somme des pesanteurs BC et B. Mais la pesanteur d'une portion du fluide, ayant un volume égal à la somme de ces deux grandeurs, est égale à la somme des pesanteurs; donc ces grandeurs étant abandonnées et plongées dans le fluide, auront la même pesanteur que le fluide, et elles ne seront portées ni en haut ni en bas; parce que la grandeur A, qui est plus pesante que

le fluide, sera portée en bas, et reportée en haut avec la même force par la grandeur D. Mais la grandeur D, plus légère que le fluide, sera portée en haut avec une force égale à la pesanteur C; car on a démontré qu'un corps plus léger que le fluide est porté en haut avec une force d'autant plus grande, qu'une partie du fluide ayant un volume égal à ce corps, est plus pesante que ce même corps. Mais une portion du fluide qui a un volume égal à D est plus pesant que D de la pesanteur C; il est donc évident que le corps A est porté en bas avec une pesanteur égale à C. Ce qu'il falloit démontrer.

HYPOTHÈSE II.

Nous supposons que les corps qui, dans un fluide, sont portés en haut, le sont chacun suivant la verticale qui passe par leurs centres de gravité.

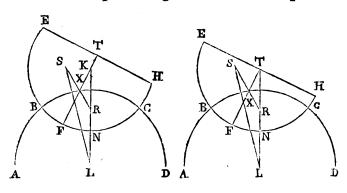
PROPOSITION VIII.

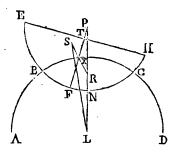
Si une grandeur solide qui est plus légère qu'un fluide, et qui a la figure d'un segment sphérique, est abandonnée dans un fluide, de manière que la base du segment ne touche point le fluide, le segment sphérique se placera de manière que l'axe du segment ait une position verticale. Si l'on incline le segment de manière que la base du segment touche le fluide, il ne restera point incliné, s'il est abandonné à lui-même, et son axe reprendra une position verticale (*).

« Supposons qu'une grandeur telle que celle dont nous venons de parler, soit abandonnée dans un fluide. Conduisons un plan par l'axe du segment et par le centre de la terre. Que la section de la surface du fluide soit l'arc ABCD; que la section de la surface du segment soit l'arc EFH; que EH soit une droite, et que FT soit l'axe du segment. Que

^(*) La démonstration de cette proposition est de Fréd. Commandin. Celle d'Archimède n'est point parvenue jusqu'à nous.

le segment soit incliné de manière que son axe fr n'ait pas une position verticale. Il faut démontrer que le segment ne restera point

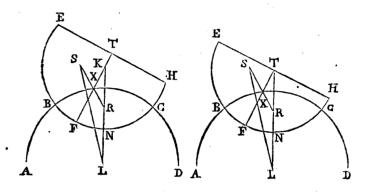


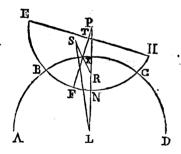


en repos, et que son axe reprendra une postion verticale.

» Le centre de la sphère est dans la droite FT. Supposons d'abord que le segment soit plus grand que la moitié de la sphère. Que le point T soit le centre de la sphère, dans la

demi-sphère; que dans un segment plus petit le centre soit P, et que dans un segment plus grand le centre soit le point k. Par le point K et par le centre de la terre L, menons la droite KL qui coupe l'arc EFH au point N. Puisqu'un segment sphérique quelconque a son axe dans la droite menée du centre perpendiculairement sur sa base, et qu'il a aussi, dans son axe, son centre de gravité, l'axe de la partie submergée qui est composée de deux segmens sphériques, sera dans la verticale menée par le point k. D'où il suit que son centre de gravité sera dans la droite NK. Supposons qu'il soit en R. Or le centre de gravité du segment entier est dans la ligne FT entre к et f. Qu'il soit en x. Le centre de gravité du reste du segment qui est hors du fluide sera dans la ligne ax, prolongé vers le point x, jusqu'à ce que son prolongement soit à RX comme la pesanteur de la partie plongée dans le fluide est à la pesanteur de la partie qui est hors du fluide (a). Que le point s solt le centre de gravité de la figure dont nous venons de parler, et par le point s conduisons la verticale Ls. La figure qui est hors du fluide sera portée en bas, par sa pesanteur, suivant la droite sL, et la partie submergée sera portée en haut suivant la droite RL (hyp. 2). Donc la figure ne restera pas en





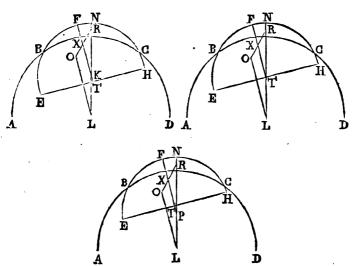
repos, puisque les parties qui sont vers E seront portées en bas, et celles qui sont vers H seront portées en haut (hyp. 2), et cela continuera jusqu'à ce que la droite FT ait une position verticale. On démontrera la 286 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE. même chose dans les autres segmens sphériques.

PROPOSITION IX.

Si un segment sphérique plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, de manière que la base entière soit dans le fluide, il se placera de manière que l'axe du segment ait une position verticale.

Qu'une grandeur telle que celle dont nous avons parlé, soit abandonnée dans un fluide; et supposons un plan mené par l'axe du segment et par le centre de la terre. Que l'arc ABCD soit la section de la surface du fluide; que l'arc EFH soit la section de la surface du segment; que EH soit une ligne droite, et FT l'axe du segment. Supposons, si cela est possible, que FT n'ait pas une position verticale. Il faut démontrer que le segment ne restera point en repos, et que son axe reprendra une position verticale.

Le centre de gravité du segment sera dans la droite fr. Supposons d'abord que le segment soit plus grand que la moitié de la sphère. Que dans la demi-sphère, le centre soit le point T; que dans un segment plus petit le centre soit le point P, et que dans un segment plus grand le centre soit le point k. Par le point k et par le centre de la terre



L, menons KL. Le segment qui est hors de la surface du fluide a son axe dans la verticale menée par le point K. Il aura, d'après ce qui a été dit plus haut, son centre de gravité dans la droite NK. Que son centre de gravité soit le point R. Or, le centre de gravité du segment entier est dans la droite FT, entre K et F. Qu'il soit au point X. Le centre de gravité du reste du segment, c'est-à-dire de la partie qui est dans le fluide sera, dans

la droite RX, prolongée vers le point X, jusqu'à ce que son prolongement soit à xR, comme la pesanteur de la partie du segment qui est hors du fluide est à la pesanteur du segment qui est dans le fluide (a). Que le point o soit le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide; et par le point o menons la verticale Lo. La partie du segment qui est hors du fluide sera portée en bas, par sa pesanteur, suivant la droite KL, et la partie qui est dans le fluide sera portée en haut, par sa pesanteur, suivant la droite on (hyp. 2, liv. 1). Donc le segment ne restera pas en repos, puisque les parties qui sont vers n seront portées en bas, et celles qui sont vers E seront portées en haut, et cela continuera jusqu'à ce que FT ait une position verticale.

DES CORPS

QUI SONT

PORTÉS SUR UN FLUIDE.

LIVRE SECOND.

PROPOSITION PREMIÈRE

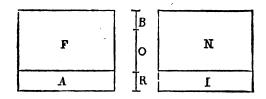
Si une grandeur solide quelconque plus légère qu'un fluide est abandonnée dans ce fluide, la pesanteur de cette grandeur sera à la pesanteur d'un volume égal de ce fluide, comme la partie de cette grandeur qui est submergée est à la grandeur entière.

Abandonnons dans un fluide une grandeur solide quelconque FA plus légère que ce fluide. Que A soit la partie submergée, et que F soit la partie qui est hors du fluide. Il faut démontrer que la pesanteur de la

TOME 11. 19

290 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE. grandeur FA est à la pesanteur d'un volume égal de ce fluide comme A est à FA.

Prenons un volume ni du fluide qui soit égal à la grandeur FA; que n soit égal à F,



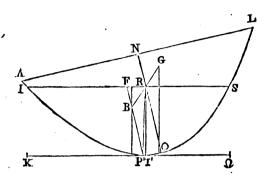
et i égal à A. Que la pesanteur de FA soit B; que la pesanteur de NI soit on, et que la pesanteur de 1 soit R. La pesanteur de FA sera à la pesanteur de NI comme B est à OR. Mais puisque la grandeur FA abandonnée dans le fluide est plus légère que le fluide, il est évident qu'un volume du fluide égal à la partie de la grandeur FA qui est submergée, a la même pesanteur que la grandeur FA, ainsi que cela a été démontré plus haut(1,5). Mais le fluide 1 dont la pesanteur est R répond à A, et la pesanteur de FA est B; donc B qui est la pesanteur de la grandeur entière FA, sera égale à la pesanteur du fluide 1, c'est-à-dire à R. Puisque la pesanteur de la grandeur FA est à la pesanteur du fluide NI qui lui est correspondant, comme B est à OR; que B est égal à R, et que R est à OR comme I est à NI, et comme A est à FA, il s'ensuit que la pesanteur de FA sera à la pesanteur d'un volume égal du fluide comme la grandeur A est à la grandeur FA. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IL

Lorsqu'un segment droit (a) d'un conoïde parabolique n'a pas son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre (6); si ce segment, quelle que soit sa pesanteur par rapport à celle d'un fluide, est abandonné dans ce fluide, et s'il est posé incliné de manière que sa base ne touche point le fluide, il ne restera point incliné, mais il se placera verticalement. Je dis qu'il est placé verticalement, lorsque sa base est parallèle à la surface du fluide.

Soit un segment droit d'un conoïde tel que celui dont nous venons de parler. Que ce segment soit posé incliné. Il faut démontrer qu'il ne restera point incliné, mais qu'il se placera verticalement.

Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide (γ) ; que la section du segment soit la parabole APOL; que no soit l'axe du segment et le diamètre



de la parabole, et que la section de la surface du fluide soit la droite is. Si le segment n'est pas vertical, la droite al ne sera point parallèle à is. Donc la droite no ne formera pas des angles droits avec la droite is. Conduisons une droite κα qui touche la parabole au point p (*) et qui soit parallèle à is. Du point p conduisons jusqu'à is la droite pr parallèle à on. Cette droite sera le diamètre de la parabole ipos, et l'axe de partie du seg-

^{. (*)} Ce qui suit est de Fréd. Commandin. Le reste de la démonstration a péri par l'injure des temps.

ment qui est submergée. Prenons ensuite les centres de gravité (5); que le point R soit le centre de gravité du segment APOL, et que le point B soit le centre de gravité du segment ipos. Conduisons la droite BR, et prolongeons-la vers c. Que le point c soit le centre de gravité de la figure restante ISLA. Puisque la droite no est égale à trois fois la moitié de Ro, et que cette droite est plus petite que trois fois la moitié du demi-paramètre, la droite no sera plus petite que la moitié du paramètre. Donc l'angle RPΩ sera aigu (s). En effet, puisque la moitié du paramètre est plus grande que no, la perpendiculaire menée du point R sur KQ, c'està-dire RT, rencontrera la droite FP hors de la parabole; elle tombera par conséquent entre le point P et le point Ω . Donc si par les points B, G, on conduit des parallèles à RT, ces parallèles feront des angles droits avec la surface in fluide, et la partie qui est dans le fluide sera portée en haut, selon la perpendiculaire menée par le point B, parallèlement à RT (liv. 1, hyp. 2); et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la perpendiculaire menée par le point G.

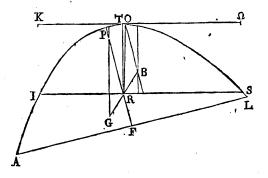
Donc le segment APOL ne restera point en repos, puisque ce qui est vers A sera porté en haut el que ce qui est vers L sera porté en bas, jusqu'à ce que no ait une position verticale » (ζ).

PROPOSITION III.

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique n'a pas son axe plus grand que trois fois la moitié du paramètre, si ce segment, quelle que soit sa pesanteur par rapport à celle d'un fluide, est abandonné dans ce fluide, si sa base est toute entière dans le fluide, et s'il est posé incliné, il ne restera point incliné, mais il se placera de manière que son axe ait une position verticale (a).

Abandonnons dans un fluide un segment tel que celui dont nous venons de parler. Que sa base soit dans le fluide. Conduisons par l'axe un plan perpendialaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que PF soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole; et que la section de la surface du fluide soit la droite is. Si le segment est incliné, son axe

n'aura pas une position verticale. Donc la droite PF ne formera pas des angles droits avec la droite is. Conduisons une droite κω parallèle à is et tangente à la parabole APOL au point o. Que le point R soit le centre de gravité du segment APOL, et le point B le centre de gravité de IPOS. Joignons la droite



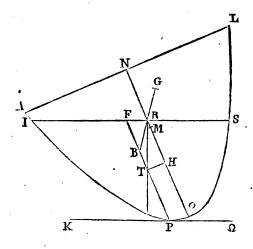
BR; prolongeons cette droite, et que le point c soit le centre de gravité de la figure restante ISLA. On démontrera semblablement que l'angle ROK sera aigu, et que la perpendiculaire menée du point R sur KΩ tombera entre K et o. Que cette perpendiculaire soit RT. Si des points c, B, on conduit des parallèles à RT, la partie du segment qui est dans le fluide sera portée en haut (liv. 1, hyp. 2), suivant la perpendiculaire menée par le point

G, et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la perpendiculaire menée par le point B. Donc le segment APOL ainsi posé dans le fluide ne restera point en repos; puisque ce qui est en A sera porté en haut, et ce qui est en L sera porté en bas, jusqu'à ce que la droite PF ait une position verticale.

PROPOSITION IV.

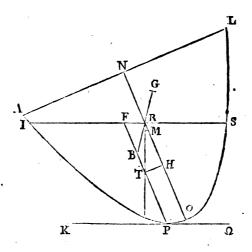
Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide, a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre; si la raison de la pesanteur de ce segment à la pesanteur d'un volume égal du fluide n'est pas moindre que la raison du quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de l'axe; si ce segment étant abandonné dans ce fluide, sa base ne touche pas le fluide, et s'il est posé incliné, il ne restera pas incliné, mais il se placera verticalement.

Soit un segment d'un conoïde parabolique tel que celui dont nous venons de parler. Supposons, s'il est possible, que ce segment étant abandonné dans le fluide ne soit pas placé verticalement, mais bien incliné. Conduisons par l'axe un plan qui soit perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la



section du segment soit la parabole APOL; que la droite no soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole, et que la section de la surface du fluide soit la droite is. Si le segment n'est pas placé verticalement, la droite no ne fera point des angles égaux avec la droite is. Conduisons la droite kû tangente à la parabole en un point P, et parallèle à la droite is, et du point P conduisons la droite parallèle à la droite on.

Prenons les centres de gravité: que le point R soit le centre de gravité du segment APOL, et le point B le centre de gravité du segment qui est dans le fluide. Menons la droite



BR, prolongeons cette droite vers c, et que le point c soit le centre de gravité de la grandeur solide qui est hors du fluide. Puisque la droite no est égale à trois fois la moitié de no, et que no est plus grande que trois fois la moitié du démi-paramètre, il est évident que la droite no est plus grande que le demiparamètre. Que la droite nu soit égale au demi-paramètre, et que on soit double de нм. Puisque no est égal à trois fois la moitié

de Ro, et que mo est aussi égal à trois fois la moitié de но, la droite restante им sera égale à trois fois la moitié de RH (a). Donc l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demiparamètre est d'autant plus grand que la droite mo est plus grande (6). Mais on a supposé que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur d'un volume égal du fluide, n'est pas moindre que la raison du quarré construit sur l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré construit sur l'axe; il est donc évident que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur d'un pareil volume du fluide n'est pas moindre que la raison du quarré construit sur mo au quarré construit sur no (γ). Mais la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur d'un volume égal du fluide est la même que la raison de la partie submergée au segment entier, ainsi que cela a été démontré plus haut (2, 1), et la raison de la partie submergée au segment entier est la même que la raison du quarré PF au quarré de no, parce qu'on a démontré dans le Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes, que si un conoïde parabolique est partagé en

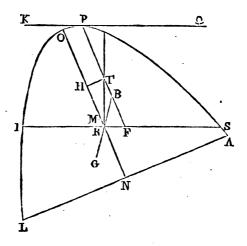
deux parties par des plans menés d'une manière quelconque, les segmens sont entre eux comme les quarrés construits sur les axes. Donc la raison du quarré de PF au quarré de no n'est pas moindre que la raison du quarré de mo au quarré de no. Donc PF n'est pas plus petit que mo, ni BP plus petit que но (d). Donc si du point н on con duit une perpendiculaire sur No, elle rencontrera BP, et elle tombera entre B et P (s). Que cette perpendiculaire rencontre la droite BP au point T. Puisque PF est parallèle à l'axe, que нт lui est perpendiculaire, et que RH est égal au demi-paramètre, si la droite menée du point R au point T est prolongée, elle fera des angles droits avec la tangente à la parabole au point $P(\zeta)$. Donc cette droite fera des angles droits avec la droite 1s, et avec la surface du fluide qui passe par la droite is. Donc si par les points B, G, on conduit des parallèles à RT, ces parallèles feront des angles droits avec la surface du fluide, et la partie du segment qui est dans le fluide sera portée en haut, suivant la droite menée par le point B parallèlement à RT, et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la droite menée par le point c, jusqu'à ce que le segment droit du conoïde soit placé verticalement.

PROPOSITION V.

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas plus grande que la raison de l'excès du quarré de l'axe sur le quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demiparamètre au quarré de l'axe; si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base est toute entière dans ce fluide, et s'il est posé incliné, il ne restera point incliné, mais il se placera de manière que son axe ait une position verticale.

Abandonnons dans un fluide un segment tel que celui dont nous venons de parler, et que sa base soit toute entière dans le fluide. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; 302 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE. que la droite no soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole, et que la section

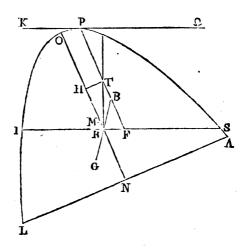
diamètre de la parabole, et que la section de la surface du fluide soit la droite 1s. Puisque l'axe n'a point une position verticale, la



droite no ne fera pas des angles droits avec la droite is. Conduisons la droite kû tangente à la parabole en un point p et parallèle à is. Par le point p menons la droite per parallèle à no, et prenons les centres de gravité: que le point resoit le centre de gravité de apol, et le point resoit le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide. Menons la droite repoint soit le centre de gravité de la partie ce point soit le centre de gravité de la par-

tie du segment qui est dans le fluide. Prenons вн égal au demi-paramètre ; que он soit double de HM, et faisons le reste comme nous l'avons dit plus haut. Puisque l'on a supposé que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas plus grande que la raison de l'excès du quarré de No sur le quarré de mo au quarré de no (α), et que l'on a démontré dans la première proposition que la pesanteur du segment est à la pesanteur d'un volume égal du fluide comme la partie du segment qui est submergée est au segment entier, la raison de la partie submergée au segment entier ne sera pas plus grande que la raison dont nous venons de parler. Donc la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide ne sera pas plus grande que la raison du quarré de no au quarré de mo (6). Mais la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide est la même que la raison du quarré de no au quarré de PF (2); donc la raison du quarré de no au quarré de pr n'est pas plus grande que la raison du quarré de no au quarré de mo. D'où il suit que pr n'est pas plus petit que om, ni PB plus petit que

он. Donc la perpendiculaire élevée du point н sur la droite мо, rencontrera la droite вр entre les points р et в. Que cette perpendiculaire rencontre вр au point т. Puisque



dans la parabole la droite PF est parallèle au diamètre NO, que la droite HT est perpendiculaire sur le diamètre, et que la droite RH est égale au demi-paramètre, il est évident que RT prolongée fera des angles droits avec KPΩ, et par conséquent avec IS. Donc RT est perpendiculaire sur la surface du fluide. Donc si par les points B, G, on mène les droites parallèles à RT, ces parallèles seront perpendiculaires sur la surface du

fluide. Donc la portion du segment qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la perpendiculaire menée par le point B, et la portion qui est dans le fluide sera portée en haut, suivant la perpendiculaire menée par le point G (liv. 1, hyp. 2). Donc le segment APOL ne restera point en repos; mais il se mouvra dans le fluide jusqu'à ce que l'axe no ait une position verticale.

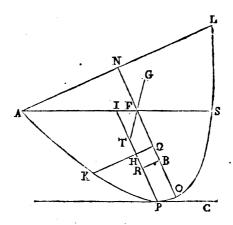
PROPOSITION VI

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois fois la moitié du demiparamètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme quinze est à quatre; si ce segment étant abandonné dans ce fluide, sa base touche la surface du fluide, il ne restera jamais incliné de manière que la base touche la surface du fluide en un seul point.

Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Abandonnons-le dans le fluide, comme nous l'avons dit, de manière que la base touche le fluide en un seul point.

TOME II.

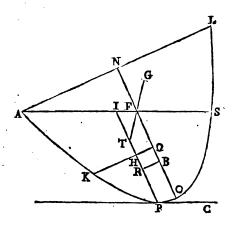
Il faut démontrer que le segment ne gardera point cette position, mais qu'il tournera jusqu'à ce que sa base ne touche en aucune manière la surface du fluide.



Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que la section de la surface du fluide soit la droite As, et que no soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons no en un point F, de manière que of soit double de FN, et en un point a, de manière que no soit à fa comme quinze est à quatre. Menons ak perpendiculaire sur no. La raison

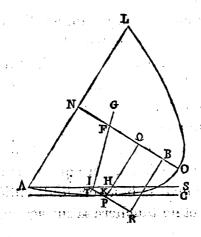
de no à FO sera plus grande que la raison de no au demi-paramètre. Que FB soit égal au demi-paramètre. Menons la droite re parallèle à as et tangente à la parabole APOL en un point P, et la droite PI parallèle à No. Que la droite PI coupe d'abord κΩ au point н. Puisque dans le segment APOL qui est compris par une droite et par une parabole, la droite κΩ est parallèle à AL; que la droite pi est parallèle au diamètre; que cette droite est coupée au point H par la droite $K\Omega$, et que as est parallèle à la tangente au point P, il faut nécessairement que la raison de PI à Ph'soit la même que la raison de NΩ à Ωo, ou qu'elle soit plus grande, car cela a déjà été démontré (a). Mais NΩ est égal à trois fois la moitié de Ωo; donc ri est égal à trois fois la moitié de HP ou plus grand que trois fois la moitié(6); donc PH est double de HI ou plus petit que le double. Que et soit double de π; le point τ sera le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide. Menons la droite TF; prolongeons cette droite; que le point c soit le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide, et du point s élevons la droite BR perpendiculaire sur No.

Puisque PI est parallèle au diamètre No; que BR lui est perpendiculaire, et que FB est égal au demi-paramètre, il est évident que FR prolongé fera des angles égaux avec la tan-



gente à la parabole APOL au point P, et par conséquent avec As et avec la surface du fluide. Mais les droites menées par les points T, G parallèlement à FR seront perpendiculaires sur la surface du fluide; donc la partie du segment APOL qui est dans le fluide sera portée en haut suivant la perpendiculaire, menée par le point T (liv. 1, hyp. 2), et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas suivant la perpendiculaire menée

par le point c. Donc le segment solide APOL tournera et sa base ne touchera en aucune manière la surface du fluide. Mais si la droite



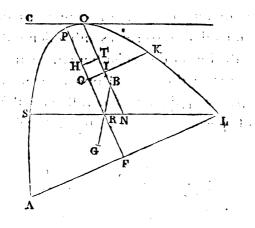
PI ne coupe pas la droite KO, comme dans la seconde figure, il est évident que le point T, qui est le centre de gravité de la partie submergée tombera entre le point P et le point I, et l'on démontrera le reste d'une manière semblable.

PROPOSITION VIL

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme quinze est à quatro; si ce segment étant abandonné dans un fluide, sa base entière est dans le fluide, le segment ne restera jamais incliné de manière que sa base touche le fluide; mais sa base sera toute entière dans le fluide et ne touchera sa surface en aucune manière.

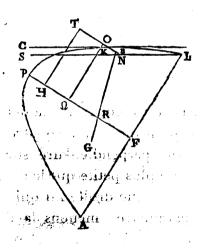
venons de parler. Qu'il soit abandonné dans un fluide comme nous l'avons dit, de manière que sa base touche la surface du fluide en un seul point. Il faut démontrer qu'il ne gardera point cette position, mais qu'il tournera jusqu'à ce que sa base ne touche en aucune manière la surface du fluide.

Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que la section de la surface du fluide soit la droite As, et que la droite pr soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons pr èn un point a de manière que ar soit double



de RF, et en un point Ω de manière que PF soit à RΩ comme quinze est à quatre. Menons la droite Ωκ perpendiculaire sur PF. La droite RΩ sera plus petite que le demi-paramètre. Prenons une droite RH qui soit égale au demi-paramètre; menons la droite co tangente à la parabole au point o et parallèle à SL, et menons aussi la droite NO parallèle à PF. Que cette droite coupe d'abord au point 1 la droite κΩ. Nous démontrerons,

comme auparavant, que la droite no est ou égale à trois fois la moitié de oi, ou plus grande que deux fois la moitié. Que la droite oi soit plus petite que le double de in; que ob soit double de Bn, et faisons les mêmes choses qu'auparavant. Si l'on mène la droite RT, nous démontrerons semblablement que cette droite sera perpendiculaire sur co et sur la surface du fluide. Donc les droites menées par les points B, G parallèlement à RT, seront perpendiculaires sur la surface du



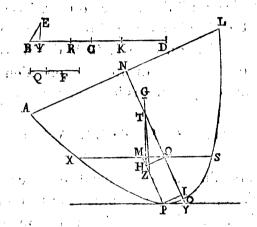
fluide. Donc la partie du segment qui est hors du fluide sera portée en bas suivant la perpendiculaire qui passe par le point B, et la partie qui est dans le fluide sera portée en haut suivant la perpendiculaire qui passe par le point c (liv. 1, hyp. 2). D'où il suit évidemment que le segment tournera jusqu'à cè que sa base ne touche en aucune manière la surface du fluide, parce que sa base touchant le fluide en un point, le segment est porté en bas du côté L. Si la droite no ne coupoit point la droite Ωκ, on n'en démontreroit pas moins les mêmes choses.

PROPOSITION VIII.

Lorsqu'un segment droit d'un conoide parabolique a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme quinze est à quatre; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de l'axe; si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base ne touche point le fluide, il ne se placera point verticalement, et il ne restera point incliné, à moins que l'axe ne

fasse avec la surface du fluide un angle égal à celui dont nous parlerons plus bas.

Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Que no soit égal à l'axe; que no soit égal à l'axe;

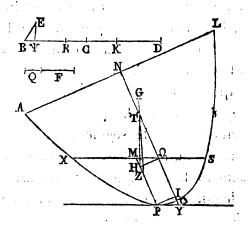


au demi-paramètre, et que ce soit egal à trois fois la moitié de BR. La droite on sera égale à trois fois la moitié de KR (a). Que la raison du quarré de PQ au quarré de BE soit la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide; et que F soit double de Q. Il est évident que la raison de FQ à DE sera moindre que la raison de CE à BD; car CE est l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre (6). Donc

FQ est plus petit que BC, et par conséquent rest plus petit que BB. Que RY soit égal à F; conduisons la droite YE perpendiculairement sur BD; que le quarré de YE soit la moitié du rectangle compris sous KR, YB, et joignons BE. Il faut démontrer que lorsque le segment est abandonné dans le fluide comme nous l'avons dit, il restera incliné de manière que l'axe fera avec la surface du fluide un angle égal à l'angle EBY.

Abandonnons le segment dans le fluide de manière que sa base ne touche point la surface du fluide; que l'axe ne fasse point avec la surface du fluide un angle égal à l'angle EBY, si cela est possible, et supposons qu'il fasse d'abord un angle plus grand. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide; que la section du segment soit la parabole APOL; que la section de la surface du fluide soit la droite xs, et que no soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Menons la droite py parallèle à xs et tangente à la parabole APOL en un point P; la droite PM parallèle à No et la droite FI perpendiculaire sur No. Que de plus la droite BR soit égale à on; la droite BR

égale à $T\Omega$, et que ΩH soit perpendiculaire sur l'axe. Puisqu'on suppose que l'axe du segment fait avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle B, l'angle PYI



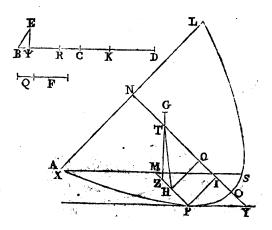
sera plus grand que l'angle B. Donc la raison du quarré de PI au quarré de VI est plus grande que la raison du quarré de EV au quarré de PB. Mais la raison du quarré PI au quarré de IV est la même que la raison de KR à IV (7), et la raison du quarré de EV au quarré de PB est la même que la raison de la moitié de KR à VB (8); donc la raison de KR à IV est plus grande que la raison de la moitié de KR à VB. Donc IV est plus petit que le double de PB. Mais VI est double de

01; donc 01 est plus petit que ΨB, et 1Ω plus grand que AR. Mais AR est égal à F; donc IΩ est plus grand que F. Mais, par supposition, la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de FQ est au quarré de BD; la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme la partie submergée est au segment entier (2, 1), et la partie submergée est au segment entier comme le quarré de PM est au quarré de on. Il s'ensuit donc que le quarré de PM est au quarré de on comme le quarré de FQ est au quarré de BD. Donc FQ est égal à PM. Mais on a démontré que рн est plus grand que F; il est donc évident que PM est plus petit que trois fois la moitié de PH, et par conséquent PH est plus grand que le double de нм. Que rz soit double de zм. Le point т sera le centre de gravité du segment entier, le point z le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, et le centre de gravité de la partie restante sera dans la droite zT prolongée jusqu'en c. On démontrera de la même manière que la droite TH est perpendiculaire sur la surface du fluide. Donc la partie du segment qui est plongée dans le fluide sera portée hors

du fluide suivant la perpendiculaire menée par le point z sur la surface du fluide (liv. 1. hyp. 2); et la partie qui est hors du fluide sera portée dans le fluide suivant la perpendiculaire menée par le point c. Donc le segment ne restera pas incliné, ainsi qu'on l'a supposé, mais il ne se placera pas verticalement, parce que parmi les perpendiculaires menées par les points z, G, celle qui est menée par le point z tombe du côté où est le point L, et celle qui est menée par le point c tombe du côté où est le point A. D'où il suit que le centre de gravité z est porté en haut, et que le centre de gravité c est porté en bas. Donc toutes les parties du segment qui sont vers le point a seront portées en bas, et toutes les parties qui sont vers le point L seront portées en haut.

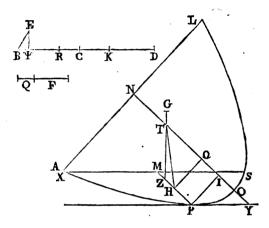
Que l'axe du segment fasse avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle B, le reste étant supposé comme auparavant. La raison du quarré de 11 au quarré de 12, sera moindre que la raison du quarré de 24 au quarré de 48. Donc la raison de KR à 12 est moindre que la moitié de KR à 48. Donc 12 est plus grand que le double de 48. Mais

IY est double de oi; donc oi sera plus grand que ΨB. Mais la droite entière oû est égale à RB, et la droite restante ûi est plus petite que ΨR; donc la droite PH sera plus petite que F. Donc puisque MP est égal à FQ, il est



évident que PM sera plus grand que trois fois la moitié de PH, et que PH sera plus petit que HM. Que PZ soit double de ZM; le point T sera le centre de gravité du segment entier, et le point z le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide. Joignons la droite ZT, et cherchons le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide dans le prolongement de cette droite. Que le point c soit son centre de gravité. Par les points z, c

menons des perpendiculaires sur la surface du fluide, ces perpendiculaires seront parallèles à TH. Il suit de là que le segment ne restera point en repos, mais qu'il tournera jusqu'à ce que son axe fasse avec la surface



du fluide un angle plus grand que celui qu'il fait actuellement.

Mais on avoit supposé auparavant que l'axe faisoit un angle plus grand que l'angle B, et alors le segment ne restoit point en repos; il est donc évident que le segment restera en repos, si l'axe fait avec la surface du fluide un angle égal à l'angle B; car de cette manière la droite 10 sera égale à 4B; la droite OI égale à 4R, et la droite PH égale

à F. Donc la droite мр sera égale à trois fois la moitié de рн, et la droite рн double de нм. Donc puisque le point н est le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, la partie qui est dans le fluide sera portée en haut, et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la même perpendiculaire. Donc le segment restera en repos, parce qu'une partie n'est point chassée par l'autre.

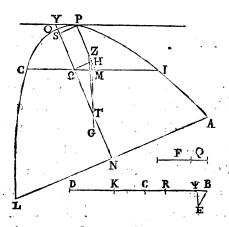
PROPOSITION IX.

Lorsque le segment droit d'un conoïde parabolique a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais trop petit pour que la raison de l'axe au demi-paramètre soit la même que la raison de quinze à quatre; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est plus grande que la raison de l'excès du quarré de l'axe sur le quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de l'axe; si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base est toute entière dans le fluide, et s'il est posé incliné,

21

il ne tournera point pour se placer verticalement, et il ne restera incliné que lorsque son axe fera avec la surface du fluide un angle égal à celui dont nous avons parlé plus haut.

Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Supposons DB égal à l'axe du segment. Que la droite BK soit double de KD; la droite KR égale au demi-paramètre,

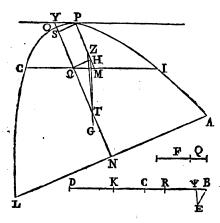


et la droite ce égale à trois fois la moitié de BR. Que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD soit la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide; et que la droite F soit double de Q. Il est évident que

la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de BC au quarré de BD est moindre que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD; car BC est l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre. Donc l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ est plus grand que l'excès du quarré de BD sur le quarré de BC. Donc la droite FQ est plus petite que la droite BC, et la droite F plus petite que la droite BR. Que RY soit égal à F. Menons sur BD la perpendiculaire 4E dont le quarré soit égal à la moitié du rectangle compris sous KR. 4B. Je dis que si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base est toute entière dans le fluide, il se placera de manière que son axe fera avec la surface du fluide un angle égal à l'angle B.

Abandonnons le segment dans le fluide comme on vient de le dire, et que son axe ne fasse pas un angle égal à l'angle B, mais d'abord un angle plus grand. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que la section de la surface du fluide soit la droite ci, et que la droite

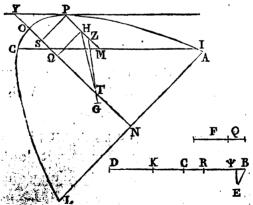
No soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons l'axe aux points Ω, τ comme auparavant. Conduisons la droite γρ parallèle à ci, et tangente à la parabole en



un point P; la droite MP parallèle à No, et la droite Ps perpendiculaire sur l'axe. Puisque l'axe du segment fait avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle B, l'angle syp sera plus grand que l'angle B. Donc la raison du quarré de Ps au quarré de sy est plus grande que la raison du quarré de PE au quarré de PB. Donc la raison de RR à SY est plus grande que la raison de la moitié de RR à YB. Donc sy est plus petit que le double de PB, et so plus petit que

ΨΒ. Donc sΩ est plus grand que R Ψ , et PH plus grand que F. Donc puisque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison de l'excès du quarré de BD. sur le quarré de FQ au quarré de BD, et que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison de la partie submergée au segment entier (2, 1), il s'ensuit que la raison de la partie submergée au segment entier est la même que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD. Donc la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide sera la même que la raison du quarré de RD au quarré de FQ (a). Mais la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide est la même que la raison du quarré de no au quarré de PM; donc PM sera égal à FQ. Mais on a démontré que PH est plus grand que F; donc мн sera plus petit que Q, et PH plus grand que le double de нм. Que rz soit double de zm; joignons la droite zr, et prolongeons cette droite vers c. Le point T sera le centre de gravité du segment entier; le point z le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide,

et le centre de gravité de la partie restante qui est dans le fluide sera dans le prolongement de la droite zt. Que le point c soit son centre de gravité. Nous démontrerons, comme nous l'avons fait plus haut, que the est perpendiculaire sur la surface du fluide, et que les parallèles à the menées par les points z, c sont aussi perpendiculaires sur la surface du fluide. Donc la partie qui est hors du fluide sera portée en bas suivant la perpendiculaire qui passe par le point z, et la partie qui est dans le fluide sera portée en haut suivant la perpendiculaire qui passe par le point c (liv. 1, hyp. 2). Donc le segment



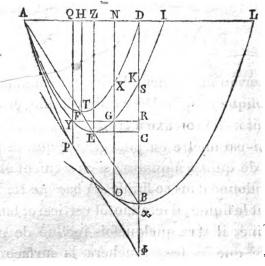
ne restera pas incliné ainsi, mais il ne tournera pas de manière que l'axe devienne perpendiculaire sur la surface du fluide, puisque ce qui est du côté L sera porté en bas, et que ce qui est du côté A sera porté en haut, ce qui est évident d'après ce qui a été démontré. Si l'axe fait avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle B, on démontrera semblablement que le segment ne gardera point cette position, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que l'axe fasse avec la surface du fluide un angle égal à l'angle B.

PROPOSITION X.

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique est plus léger qu'un fluide, et que la raison de son axe à trois fois la moitié du demi-paramètre est plus grande que la raison de quinze à quatre; si ce segment étant abandonné dans ce fluide, sa base ne touche point le fluide, il sera tantôt vertical et tantôt incliné; il sera quelquefois incliné de manière que sa base touchera la surface du fluide en un seul point, et cela dans deux positions différentes (a); quelquefois sa base s'enfoncera davantage dans le fluide, et quel-

quefois sa base ne touchera en aucune manière la surface du fluide, suivant la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide. Nous allons démontrer séparément chacune de ces propositions.

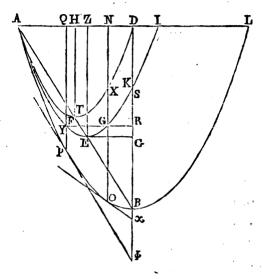
Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que BD soit l'axe du segment et le



diamètre de la parabole. Coupons BD en un point K, de manière que BK soit double de KD, et en un point C, de manière que BD

soit à KC comme quinze est à quatre. Il est évident que kc sera plus grand que le demiparamètre. Que KR soit égal au demi-paramètre; que os soit égal à trois fois la moitié de KR. La droite sB sera égale à trois fois la moitié de BR (6). Joignons AB; du point c et sur en élevons la perpendiculaire ce, qui coupe la droite AB au point E; et par le point E conduisons ez parallèle à BD. Partageons AB en deux parties égales au point T, et conduisons TH parallèle à BD. Supposons deux paraboles AEI, ATD décrites l'une autour de Ez comme diamètre et l'autre autour de тн; que ces deux paraboles soient semblables à la parabole ABL(γ). La parabole AEI passera par le point k (d), et la perpendiculaire élevée du point R sur BD coupera la parabole AEI. Que cette perpendiculaire la coupe aux points Y, G; et par les points Y, G conduisons les droites PYQ, ogn parallèles à BD. Que ces parallèles coupent la parabole ATD aux points r, x. Conduisons enfin les droites Po, ox qui touchent la parabole APOL aux points P, o. Puisqu'on a trois segmens plans APOL, AEI, :ATD compris par des droites et par des paraboles; que ces segmens sont semblables et

inégaux, et qu'ils se touchent sur chacune des bases; que du point n on a élevé la perpendiculaire nxco, et du point Q la perpen-



diculaire QFYP, la raison de og à gx sera composée de la raison de 1L à LA, et de la raison de AD à DI (ε). Mais 1L est à LA comme deux est à cinq (ζ); parce que cB est à BD comme deux est à cinq, parce que cB est à BD comme EB est à BA, et comme DZ est à DA, et parce que les droites LI, LA sont doubles des droites DZ, DA, et que AD est à DI comme cinq est à un (η). Mais la raison composée de la raison

de deux à cinq, et de la raison de cinq à un est la même que la raison de deux à un; et deux est double de un. Donc co est double de Gx. On démontrera, par le même raisonnement, que py est double de YF. Donc puisque la droite ps est égale à trois fois la moitié de KR, la droite BS sera l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre. Donc lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison du quarré de BS au quarré de BD, ou lorsqu'elle est plus grande, si le segment étant abandonné dans le fluide, sa base ne touche point le fluide, il restera dans une position verticale; car d'après ce qui a été démontré plus haut (2, 4), lorsque le segment a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, et lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas moindre que la raison du quarré de l'excès de l'axe sur les trois fois la moitié du paramètre au quarré de l'axe, si l'on abandonne le segment dans Ie fluide, comme on l'a dit, le segment restera dans une position verticale.

2.

Lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du quarré de sB au quarré de BD, mais plus grande que la raison du quarré de xO au quarré de BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il restera incliné de manière que sa base ne touchera la surface du fluide en aucune manière, et l'axe fera avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle x.

5.

Lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison du quarré xo au quarré de BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il se placera de manière que sa base touchera la surface du fluide en un seul point, son axe faisant avec la surface du fluide un angle égal à l'angle x. Mais lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison du quarré de PF au quarré de BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que la base touche le fluide, il restera incliné de manière que sa base touchant la surface du fluide en un seul point, son axe fera un angle égal à l'angle •.

4.

Lorsque la raison de la pesanteur d'un segment à la raison de la pesanteur du fluide est plus grande que la raison du quarré de PP au quarré de BD, mais moindre que la raison du quarré de BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il se placera de manière que sa base s'enfoncera dans le fluide.

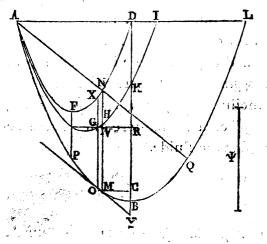
5.

Lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du quarré de FP au quarré de 554 des corps portés sur un fluide.

BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il restera incliné de manière que son axe fera avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle \(\Phi \), sa base ne touchant en aucune manière la surface du fluide. Toutes ces propositions seront démontrées les unes après les autres.

DÉMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Que la raison de la pesanteur du segment

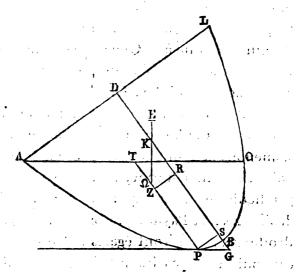


à la pesanteur du fluide soit plus grande que la raison du quarré de xo au quarré de xo,

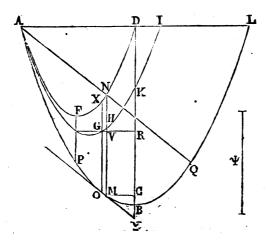
mais moindre que le quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de BD, et que la raison du quarré de la droite y au quarré de BD soit la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide. Il est évident que v sera plus grand que xo et plus petit que l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre. Appliquons entre les paraboles AMQL, AXD une certaine droite ми qui soit égale à ч. Que cette droite coupe la troisième parabole au point н, et la droite RG au point v. On démontrera que мн est double de ни, comme on a démontré que co est double de cx (a). Par le point м menons la droite му tangente à la parabole AMQL au point M, et la droite Mc perpendiculaire sur BD. Ayant ensuite mené la droite An, et l'ayant prolongée vers q, les droites AN, NQ seront égales entre elles (6); car puisque dans les paraboles semblables AMQL, AND on a mené des bases à ces para-. boles les droites AQ, AN qui font des angles égaux avec les bases, la droite QA sera à la droite an comme LA est à AD. Donc an est égal à NQ', et AQ parallèle à MY (2). Il faut

démontrer que si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il restera incliné de manière que la base ne touchera en aucune manière la surface du fluide, l'axe fait avec la base un angle plus grand que l'angle x.

Abandonnons le segment dans le fluide, et qu'il soit placé de manière que sa base touche



la surface du fluide en un point. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL, et la section de la surface du fluide la droite AO. Que la droite BD soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons BD aux points K, R, comme cela a été dit. Menons la droite PG

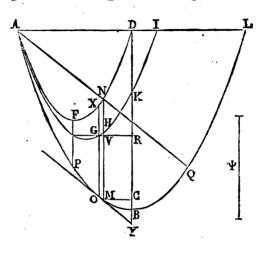


parallèle à no et tangente à la parabole au point P, et de ce point menons PT parallèle à BD, et Ps perpendiculaire sur BD. Prisque la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de P est au quarré de BD; que la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme la partie du segment qui est submergée est au segment entier (2, 1), et que la partie submergée est au segment entier comme le quarré de TP est au quarré de BD (8), la droite P sera égale

22

çç8 des corps portés sur un fluide.

à TP. Donc les droites MN, PT sont égales entre elles, ainsi que les segmens AMQ, APO. Puisque dans les paraboles égales et sem-



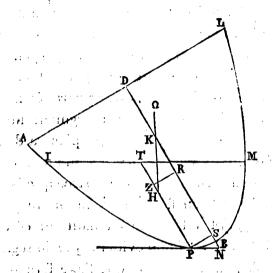
blables APOL, AMQL, on a conduit des extrémités des bases les droites Ao, AQ, de manière que les segmens retranchés font des angles égaux avec les axes, les angles qui sont en Y, c seront égaux, ainsi que les droites YB, GB, et les droites BC, BS. Donc les droites CR, SR sont aussi égales entre elles, ainsi que les droites MV, PZ, et les droites VN, ZT. Donc puisque MV est plus petit que le double de VN, il est évident que PZ sera plus petit que le double de ZT. Que PD soit

le double de $\Omega \tau$. Menons la droite $\Omega \kappa$, et prolongeons-la vers E. Le point K sera le centre de gravité du segment entier, et le point Ω le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, et le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide sera dans la droite KE. Que le point E soit son centre de gravité. Mais la droite xz sera perpendiculaire sur la surface du fluide; donc les droites menées par les points E, Ω parallèlement à Kz, le sont aussi. Donc le segment ne restera pas en repos, mais il se placera de manière que sa base ne touche en aucune manière la surface du fluide, parce que la base touchant la surface du fluide en un point, le segment est porté en haut du côté du point A. Il est donc évident que le segment se placera de manière que l'axe fera avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle x.

DÉMONSTRATION DE LA TROISIÈME PARTIE.

Que la pesanteur du segment soit à la pesanteur du fluide comme le quarré de xo est au quarré de sp. Abandonnons le seg-

ment dans le fluide de manière que sa base soit inclinée et ne touche point cependant le fluide. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APML;

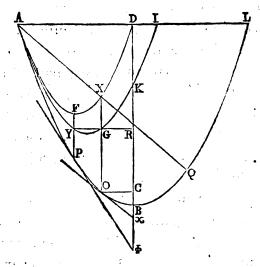


que la section de la surface du fluide la droite 1M, et que BD soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons la droite BD, comme auparavant, et menons la droite PN parallèle à 1M et tangente au point P; la droite PT parallèle à PB, et la droite PS perpendiculaire sur BD. Il faut démontrer que le segment posé ainsi ne restera pas en re-

pos, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que la base touche la surface du fluide en un point.

Que la figure soit la même que la précédente. Menons oc perpendiculaire sur BD; joignons la droite Ax, et prolongeons-la vers Q. La droite ax sera égale à la droite xo. Menons ensuite ox parallèle à Aq. Puisqu'on suppose que la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de xo est au quarré de BD, comme la partie submergée est au segment entier, c'est-à-dire comme le quarré de TP est au quarré de BD, la droite TP sera égale à xo, et les segmens IPM, AOQ seront aussi égaux puisque leurs diamètres sont égaux. De plus, puisque dans les segmens égaux et semblables AOQL, APML, on a mené les droites AQ, IM qui séparent des segmens égaux, l'une de l'extrémité de la base et l'autre d'un point qui n'est pas l'extrémité de la base; il est évident que celle qui est menée de l'extrémité de la base fait avec l'axe du segment entier un angle aigu plus petit (a). Mais l'angle qui est en x est plus petit que l'angle qui est en N; donc BC est plus grand que Bs, et ca plus petit que sa. Donc oc est plus petit que rz, et cx plus

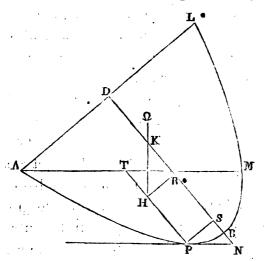
grand que zr. Donc rz est plus grand que le double de zr, parce que oc est double de cx. Que rh soit double de hr. Menons la droite hk, et prolongeons-la vers Ω. Le point



 κ sera le centre de gravité du segment entier; le point κ sera le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, et le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide sera dans la droite $\kappa\Omega$. Que le point Ω soit son centre de gravité. On démontrera semblablement que la droite κz et que les parallèles à κz menées par les points κ sont perpendiculaires sur la surface du fluide.

Donc le segment ne restera point en repos, mais il s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche en un point la surface du fluide, et il restera dans cette position. Car alors dans les segmens égaux AOQL, APML, on aura conduit des extrémités des bases des droites AQ; AM qui séparent des segmens égaux; parce que l'on démontrera, comme nous l'avons fait plus haut, que Aoq est égal à APM. Donce les angles aigus qui forment les droites AQ, AM avec les diamètres des segmens sont égaux entre eux, parce que les angles x et n sont égaux (б). Donc si l'on prolonge la droite нк vers Ω, le point κ sera le centre de gravité du segment entier, le point n le centre de gravité de la partie submergée, et le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide sera dans la droite нк. Que son centre de gravité soit le point o. Or, la droite ex est perpendiculaire sur la surface du fluide; donc la partie qui est dans le fluide sera portée en haut, et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant les mêmes droites. Donc le segment restera en repos, sa base touchant la surface du fluide en un point, et l'axe fera avec la surface du fluide

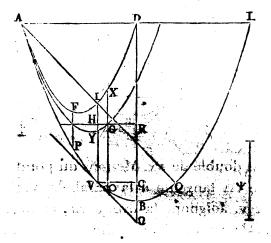
un angle égal à l'angle x. Si la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de pr est au quarré de pp, on démontrers semblablement que si le segment



est abandonné dans le fluide de manière que sa base ne touche point le fluide, le segment restera incliné de manière que la base touchera la surface du fluide en un point, et que l'axe fera avec la surface du fluide un angle égal à l'angle o.

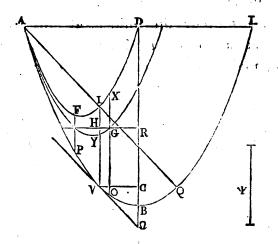
DÉMONSTRATION DE LA QUATRIÈME PARTIE.

Que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide soit plus grande que la raison du quarré de FP au quarré de BD, mais moindre que la raison du quarré



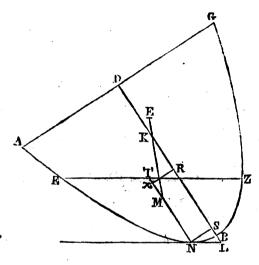
de xo au quarré de so, et que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide soit la même que la raison du quarré de 4 au quarré de 8D. La droite 4 sera plus grande que FP et plus petite que xo. Appliquons entre les paraboles AVQL, AXD une droite IV qui soit égale à 4 et parallèle à BD, et qui rencontre la troisième parabole au

point y. Nous démontrerons que vy est double de y1, comme on a démontré que



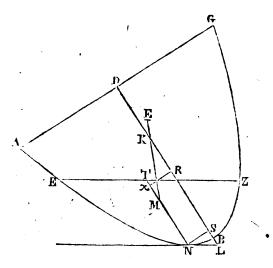
oc est double de cx. Menons du point v la droite va tangente à la parabole avol au point v. Joignons la droite ai, et prolongeons-la vers q. Nous démontrerons de la même manière que la droite ai est égale à la droite iq, et que la droite aq est parallèle à va. Il faut démontrer que si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, la base du segment s'enfoncera dans le fluide plus qu'il ne le faut pour qu'elle ne touche le fluide qu'en un seul point.

Abandonnons le segment dans le fluide, comme nous l'avons dit, et que d'abord il soit incliné de manière que sa base ne touche le fluide en aucune manière. Conduisons par



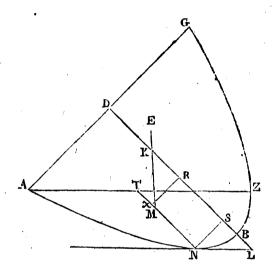
l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole ANZG; que la section de la surface du fluide soit la droite EZ, et que l'axe du segment et le diamètre de la parabole soit la droite BD. Coupons BD aux points K, R, comme auparavant. Menons la droite NL parallèle à EZ et tangente à la parabole ANZG au point N; que la droite NT soit parallèle à BD, et

348 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE. que la droite NS soit perpendiculaire sur BD. Puisque la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de Ψ est au quarré de BD, la droite Ψ sera égale à NT,



ce que l'on démontrera comme on l'a fait plus haut. Donc nt est égal à vr. Donc les segmens avo, enz sont égaux entre eux. Mais dans les paraboles égales et semblables avol, anzo, l'on a conduit les droites ao, ez, qui séparent des segmens égaux, l'une étant conduite de l'extrémité de la base et l'autre étant conduite d'un point qui n'est pas l'extrémité de la base; donc celle qui est con-

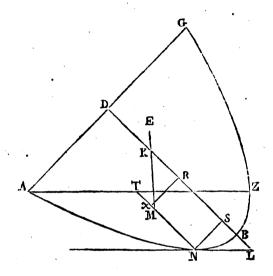
duite de l'extrémité de la base fera avec le diamètre du segment un angle aigu qui sera plus petit. Mais parmi les angles des triangles NLS, VOC, l'angle en L est plus grand que



l'angle en Ω ; donc BS est plus petit que BC, et SR plus grand que cR. Donc Nx est plus grand que vH, et xT plus petit que HI. Donc puisque vY est double de YI, il est évident que Nx est plus grand que le double de xT. Que MN soit double de MT. Il suit évidemment de ce qui a été dit, que le segment ne restera point en repos, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la sur-

350 des corps portés sur un fluide.

face du fluide en un point, comme on le voit dans la figure. Que les autres choses soient les mêmes. Nous démontrerons de nouveau que nr est égal à vi, et que les



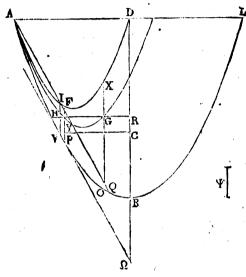
segmens AVQ, ANZ sont égaux entre eux. Donc puisque dans les segmens égaux et semblables AVQL, AVZG, on a conduit les droites AQ, AZ qui séparent des segmens égaux, ces droites feront des angles égaux avec les diamètres des segmens. Donc les angles des triangles NLS, V Ω C, qui sont vers les points μ , Ω , sont égaux; donc la droite BS est. égale à la droite BC; la droite SR égale à CR; la droite

Nx égale à vH, et la droite xT égale à HI. Mais vy est double de YI; donc NX sera plus grand que le double de XT. Que NM soit double de MT. Il est encore évident que le segment ne restera pas en repos, mais qu'il s'inclinera du côté du point A. Mais on supposoit que le segment touchoit la surface du fluide en un point; il est donc nécessaire que sa base s'enfonce davantage dans le fluide.

DÉMONSTRATION DE LA CINQUIÈME PARTIE.

Qu'enfin la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide soit moindre que la raison du quarré de FP au quarré de BD, et que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide soit la même que la raison du quarré de vau quarré de BD. La droite ve sera plus petite que PF. Appliquons de nouveau, entre les paraboles AVQL, AXD, une certaine droite vi qui soit parallèle à BD, et qui coupe la parabole du milieu au point H, et la droite RY au point v. Nous démontrerons que vh est double de HI, comme nous avons démontré que 352 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

og est double de gx. Menons ensuite la droite vΩ tangente à la parabole AVQL au point v, et la droite vc perpendiculaire sur BD. Joignons la droite AI, et prolongeons-la vers



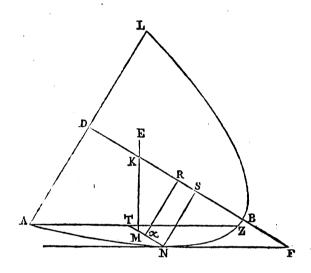
Q. La droite AI sera égale à IQ, et la droite AQ parallèle à la droite VO. Il faut démontrer que si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il se placera de manière que son axe fera avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle o, et que sa base ne touchera en aucune manière la surface du fluide.

Abandonnons le segment dans le fluide, et qu'il soit placé de manière que sa base touche la surface du fluide en un point. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole ANZL; que la section de la surface du fluide soit la droite Az, et que BD soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons BD aux points K, R, comme on l'a dit plus haut; menons la droite NF parallèle à Az et tangente à la parabole au point n; la droite nt parallèle à BD, et la droite Ns perpendiculaire sur BD. Puisque la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de 4 est au quarré de BD, et que la partie submergée est au segment entier comme le quarré de nt est au quarré de BD, d'après ce qui a été dit, il est évident que nr sera égal à ч. Donc les segmens ANZ, AVQ sont égaux. Mais dans les segmens égaux et semblables AVQL, ANZL, on a mené des extrémités des bases les droites AQ, AZ qui séparent des segmens égaux; il est donc évident que ces droites feront des angles égaux avec les diamètres des segmens, et que les angles des

23

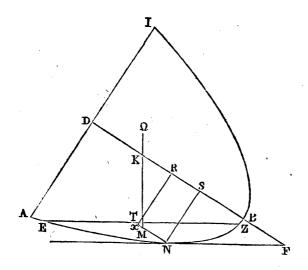
354 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

triangles NFS, $V\Omega c$, placés en F, Ω sont égaux, ainsi que les droites SB, CB et les droites SR, CB. Donc les droites Nx, CB sont égales, ainsi que les droites XB, YB. Mais la droite CB est double de HI; donc la droite Nx sera plus



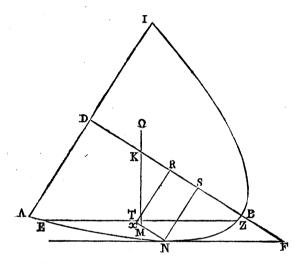
petite que le double de xT. Que NM soit double de NT; menons la droite MK, et prolongeons-la vers E. Le point K sera le centre de gravité du segment entier; le point M le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, et le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide sera dans le prolongement de la droite MK. Que le point E soit

son centre de gravité. Il suit évidemment de ce qui a été démontré, que le segment ne restera point en repos, mais qu'il s'inclinera de manière que sa base ne touchera la



surface du fluide en aucune manière. On démontrera de la manière suivante que le segment se placera de manière que l'axe fasse avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle o. En effet, si cela est possible, que l'axe ne fasse pas un angle plus petit que l'angle o. Que les autres choses soient disposées comme on le voît dans la figure. Nous démontrerons de la même ma356 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

nière que nT est égal à Ψ , et par conséquent à GI. Mais dans les triangles POC, NFS, l'angle F n'est pas plus petit que l'angle Φ ; donc la droite BS ne sera pas plus grande que BC.



Donc la droite sa ne sera pas plus petite que ca, ni la droite nx plus petite que py. Mais puisque la droite pe est plus grande que nt, et que la droite pe est égale à trois fois la moitié de py, la droite nt sera plus petite que trois fois la moitié de nx, et par conséquent la droite nx plus grande que le double de xt. Que la droite nm soit double de mt; menons la droite mk, et prolongeons-

la. Il suit évidemment, d'après ce qui a été dit, que le segment ne restera pas en repos, mais qu'il fournera jusqu'à ce que l'axe fasse avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle ϕ .

MARKATORY ON WORLD ON

FIN DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

(ii) Suppose the continuous of the continuous

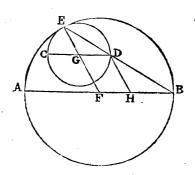
en de la composition della com

LEMME September 1 Lemme 1 and 1 and

PROPOSITION PREMIÈRE.

SI deux cercles AEB, CED se touchent mutuellement en un point E; si leurs diamètres AB, CD sont parallèles, et si l'on joint les deux points B, D et le point de contact E par les droites DE, BD; je dis que la ligne BDE sera une ligne droite.

Que les points c, r soient les centres de



ces deux cercles. Menons la droite GF et prolongeons-la jusqu'en E (a). Conduisons la droite DH parallèle à GF. Puisque la droite

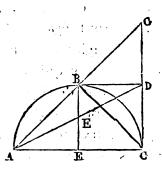
ne est égale à la droite co et que les droites GD, RG sont égales, il est évident que si des droites égales FB, FE, on retranche les droites égales FH, GE les droites restantes GF ou de et es seront égales. Donc les deux angles нрв, нвр seront égaux. Mais les deux angles EGD, EFB sont égaux et par conséquent les deux angles EGD, DHB; donc les deux angles GED, GDE qui sont égaux entre eux seront égaux aux deux angles HDB, HBD. Donc l'angle EDG est égal à l'angle DBF. Donc si à ces angles égaux on ajoute l'angle GDB, les deux angles GDB, FBD qui sont égaux à deux droits seront égaux aux deux angles GDB, GDE. Donc ces deux derniers angles sont aussi égaux à deux droits. Donc la ligne EDB est une ligne droite. Ce qu'il falloit démontrer (6).

PROPOSITION IL

Que CBA soit un demi-cercle; que les droites DC, DB soient des tangentes; que la droite BE soit perpendiculaire sur AC, et joignons AD. Je dis que BF est égal à FE (α) .

Menons la droite AB, et prolongeons cette

droite. Prolongeons aussi la droite co jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite ac au point c, et joignons cs. Puisque l'angle csa est dans le demi-cercle, cet angle sera droit, ainsi que l'angle csc. Mais la figure desc est un

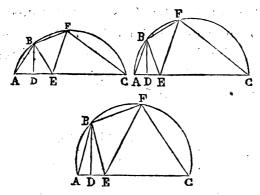


rectangle. Donc dans le triangle rectangle cBC la droite BD menée du point B, est perpendiculaire sur la base. Mais les droites BD, DC seront égales, puisqu'elles sont deux tangentes au cercle; donc cD est égal à DC (a), ainsi que nous le démontrons dans les propositions qui regardent les rectangles. Mais dans le triangle rectangle cAC, la droite BE est parallèle à la base, et du milieu de la base on a conduit la droite DA qui coupe cette parallèle au point F; donc la droite BF sera égale à la droite FE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

Soit un segment de cercle ca. Que B soit un point quelconque de son arc; que BD soit perpendiculaire sur ac; et que la droite DE soit égale à la droite DA, et l'arc BF égal à l'arc BA. Je dis que la droite cF est égale à la droite cE.

Menons les droites, AB, BF, FE, EB. Puisque l'arc BA est égal à l'arc BF, la corde AB sera égale à la corde BF. Mais la droite AD est égale à BD; les angles sont droits en D, et

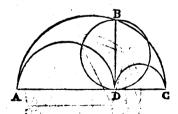


la droite DB est commune; donc la droite AB sera égale à BE. Donc BF est égal à BE, et l'angle BFE égal à l'angle BEF. Mais le quadrilatère CFBA est inscrit dans un cercle;

donc l'angle CFB, conjointement avec l'angle CAB qui lui est opposé, ou avec l'angle BEA, est égal à deux angles droits. Mais l'angle CEB, conjointement avec l'angle BEA est aussi égal à deux angles droits; donc les deux angles CFB, CEB sont égaux. Donc les angles restans CFE, CEB sont aussi égaux. Donc la droite CE est égale à la droite CF. Ca qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

Soit un demi-cercle ABC. Sur son diamètre AC construisons deux demi-cercles dont l'un soit AD et l'autre DC. Que DB soit perpendiculaire sur AC. La figure qui résulte



de cette construction, et qui est comprise entre l'arc du demi grand cercle et entre les deux arcs des plus petits demi-cercles se nomme Arbelon, Je dis que l'Arbelon est égal au cercle qui a pour diamètre la perpendiculaire DB.

Puisque la droite DB est moyenne proportionnelle entre les deux droites DA, DC, le rectangle compris sous les divites AD, DC sera égal au quarré de DB. Ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous AD, DC, et les quarrés de An et de nc. Le double du rectangle compris sous AD. DC. comointement avec les deux quarrés de ab et de Dc, c'est-à-dire le quarré de ac sera égal au double du quarré de de conjointement avec les deux quarrés de Ap., pc (a). Mais les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs rayons; donc le cercle qui a pour diamètre la droite ac est égal au double du cercle qui a pour diamètre la droite BD, conjointement avec les deux cercles qui ont pour diamètres les droites an pont Donc le demi-cercle, qui a pour diamètre : Ac, est égal au double du cercle qui a pour diamètre DB, conjointement avec les deux demicercles qui ont pour diamètres les droites AD, Do Donc si nous retranchons de part et d'autre les deux demi-cercles AD, nc. la figure comprise entre les trois demi-chrochť.

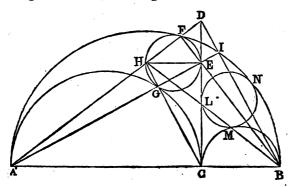
férences des cercles Ac, AD, DC, c'est-àdire l'Arbelon, sera égal au cercle dont le diamètre est DB. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

Soit un demi-cercle AB. Que c soit un point quelconque de son diamètre. Construisons sur son diamètre les deux demi-cercles Ac, CB; du point c élevons la droite co perpendiculaire sur AB; et de part et d'autre de cette perpendiculaire décrivons deux cercles qui touchent cette perpendiculaire et les arcs des demi-cercles. Je dis que ces deux cercles sont égaux entre eux.

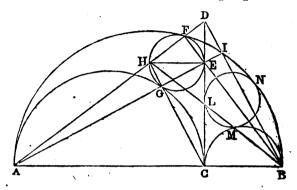
Supposons qu'un de ces cercles touche la perpendiculaire pc en E; qu'il touche la circonférence du demi-cercle AB au point F, et la circonférence du demi-cercle AC au point G. Menons le diamètre HE perpendiculaire sur pc. Le diamètre HE sera parallèle au diamètre AB, parce que les deux angles HEC, ACE sont droits. Joignons FH, HA. La ligne AF sera une ligne droite, ainsi qu'on l'a démontré dans la première proposition; et les droites AF, CE se rencontreront en un

point D, parce que les angles DAC, DCA pris ensemble sont moindres que deux droits. Joignons aussi FE, EB; la ligne EFB sera aussi une ligne droite, ainsi que nous l'avons dit;



et cette droite sera perpendiculaire sur AD, parce que l'angle AFB est droit à cause qu'il est compris dans le demi-cercle AB. Joignons HG, GC. La ligne HC sera une ligne droite. Joignons EG, GA. La ligne EGA sera une ligne droite. Prolongeons cette droite vers 1, et joignons BI. La droite BI sera perpendiculaire sur AI. Joignons DI. Puisque les lignes AD, AB sont deux droites; que du point D on a conduit la droite DC perpendiculaire sur AB; que du point B on a conduit la droite BF perpendiculaire sur DA; que ces deux perpendiculaires se coupent mutuellement au

point E, et que de plus la droite AE prolongée jusqu'en 1 est perpendiculaire sur B1, la ligne B1D sera une ligne droite, ainsi que nous l'avons démontré dans nos propositions

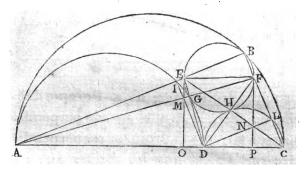


qui regardent les triangles rectangles (a). Mais les deux angles AGC, AIB sont droits, les droites BD, CG étant parallèles, et la raison de AD à DH, qui est la même que la raison de AC à HE, est encore la même que la raison de AB à BC (6); donc le rectangle compris sous AC, CB est égal au rectangle compris sous AB, HE. Nous démontrerons semblablement que dans le cercle LMN, le rectangle compris sous AC, CB est égal au rectangle compris sous AC, CB est égal au rectangle compris sous AC, CB est égal au rectangle compris sous AB et sous le diamètre du cercle LMN, et l'on conclura de là que les diamètres des cercles EFG, LMN sont égaux.

Donc ces deux cercles sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VI.

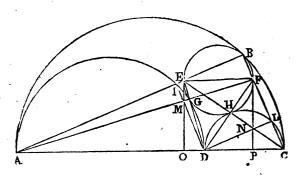
Soit un demi-cercle ABC. Prenons un point D sur son diamètre, de manière que la raison de AD à DC soit la même que la raison de



trois à deux; sur AD, DC décrivons deux demi-cercles. Supposons un cercle EF tangente aux trois autres demi-cercles, et menons dans ce cercle le diamètre EF parallèle au diamètre AC. Il faut trouver la raison du diamètre AC au diamètre EF.

Joignons AE, EB, et CF, FB. Les lignes CFB, AEB seront des lignes droites, ainsi qu'on l'a démontré dans la proposition 1ère. Menons

aussi les deux lignes FGA, EHC, on démontrera que ces deux lignes seront des droites ainsi que les deux lignes DE, DF. Joignons DI, DL, ainsi que EM, FN, et prolongeons ces



dernières droites vers o, p. Puisque dans le triangle AED, la droite AG est perpendiculaire sur ED; que la droite DI est perpendiculaire sur AE, et que les droites AG, DI se coupent au point M, la droite EMO sera perpendiculaire sur AD (a), ainsi que nous l'avons démontré dans notre exposition des propriétés des triangles, sur laquelle est fondée la démonstration précédente. La droite FP sera semblablement perpendiculaire sur CA. Mais les angles en L et B sont droits; donc DL sera parallèle à AB, et DI parallèle à CB. Donc AD est à DC comme AM est à FM, et

comme ao est à op. Mais co est à da comme cn est à ne, et comme cp est à po; et nous avons supposé que ad étoit à de comme trois est à deux; donc ao est à op comme trois est à deux. Mais op est à cp comme trois est à deux; donc les trois droites ao, op, pe sont proportionnelles. Donc la droite pe étant quatre, la droite op sera six, la droite ao neuf et la droite ca dix-neuf. Mais po est égal à ef; donc ac est à ef comme dix-neuf est à six. Donc nous avons trouvé la raison demandée.

Si la raison de AD à DC étoit différente, si par exemple elle étoit la même que la raison de quatre à trois ou de cinq à quatre, ou tout autre raisonnement, et la manière de procéder ne seroit pas différente (6). Ce qu'il falloit trouver.

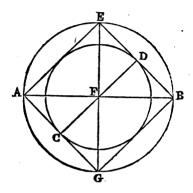
PROPOSITION VII.

Si un cercle est circonscrità un quarré, et si un autre cercle lui est inscrit, le cercle circonscrit sera double du cercle inscrit.

Circonscrivons un cercle AB au quarré AB, et inscrivons-lui le cercle cn. Que AB soit la

TOME II.

diagonale du quarré et le diamètre du cercle circonscrit. Conduisons dans le cercle inscrit le diamètre co parallèle au côté AE, qui est



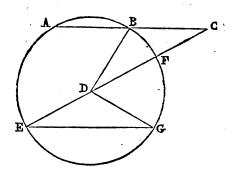
égal à cd. Puisque le quarré de AB est double du quarré de AE ou de de, et que les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres, le cercle AB sera double du cercle cd. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si une corde AB d'un cercle est prolongée, et si l'on fait BC égal au rayon de ce cercle; si ensuite l'on joint le point C et le centre du cercle qui est le point D, et si l'on prolonge CD jusqu'en E, l'arc AE sera triple de l'arc BF.

Menons et parallèle à AB, et joignons DB,

DC. Puisque l'angle DEC est égal à l'angle DCE, l'angle GDC sera double de l'angle DEC. Mais l'angle BDC est égal à l'angle BCD, et l'angle



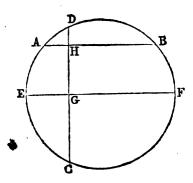
CEG égal à l'angle ACE; donc l'angle GDC sera double de l'angle CDB, et l'angle entier BDG triple de l'angle BDC. Donc l'arc AE qui est égal à BG sera triple de l'arc BF. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX

Si dans un cercle deux droites AB, CD, qui ne passent pas par le centre, se coupent à angles droits, les arcs AD, CB pris ensemble, seront égaux aux deux arcs AC, DB pris ensemble.

Menons le diamètre er parallèle à AB; ce

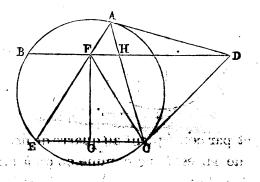
diamètre coupera co en deux parties égales, au point c. Donc l'arc ec sera égal à l'arc ed. Mais l'arc edf est égal à la demi-circonférence, ainsi que l'arc ecf, et l'arc ed est égal à l'arc ea, conjointement avec l'arc ad; donc l'arc cf, conjointement avec les deux arcs



EA, AD sera égal à la demi-circonférence. Mais l'arc ea est égal à l'arc est; donc l'arc ce, conjointement avec l'arc ad est égal à la demi-circonférence. Donc la somme des arcs ec, ea, c'est-à-dire l'arc ac, conjointement avec l'arc de est aussi égal à la demi-circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

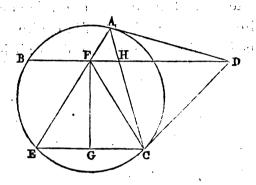
PROPOSITION X.

Soient le cercle ABC; la tangente DA; la sécante DB, et la tangente DC. Menons la droite CE parallèle à DB, et la droite EA qui coupe la droite DB en F. Du point Fabaissons



la perpendiculaire re sur la droite ce, Je dis que la perpendiculaire re coupera la droite ec en deux parties égales au point c.

Joignons Ac. Puisque la droite DA est tangente, et que la droite Ac est une corde, l'angle DAC sera égal à l'angle du segment alterne ABC, c'est-à-dire à l'angle AEC. Mais l'angle AEC est égal à l'angle AFD, parce que les droites CE, BD sont parallèles; donc les angles DAC, AFD sont égaux. Donc les deux triangles DAF, AHD ont les angles AFD, HAD égaux chacun à chacun, mais ils ont de plus un angle commun en D; donc le rectangle compris sous FD, DH est égal au quarré de



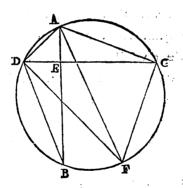
DA, et par conséquent au quarré de DC. Donc puisque FD est à DC comme CD est à DH, et que l'angle BDC est commun, les triangles DFC, DCH sont semblables. Donc l'angle DFC est égal à l'angle DCH, qui est égal à l'angle DAH, et celui-ci est égal à l'angle AFD. Donc les deux angles AFD, CFD sont égaux. Mais l'angle DFC est égal à l'angle FCE, et nous avons vu que l'angle DFA est égal à l'angle AEC; donc dans le triangle FEC l'angle FCC est égal à l'angle FCC. Mais les deux triangles FCE, FCC ont de plus chacun un angle droit en C et un côté commun CF; donc la droite

cc est égale à la droite ce. Donc la droite ce est coupée en deux parties égales en c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

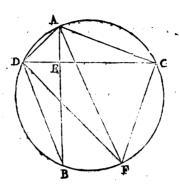
Si dans un cercle deux cordes AB, CD se coupent mutuellement à angles droits en un point E qui ne soit pas le centre, la somme des quarrés des droites AE, BE, EC, ED sera égale au quarré du diamètre.

Menons le diamètre AF, et les droites AC, AD, CF, DB. Puisque l'angle AED est droit,



cet angle sera égal à l'angle ACF. Mais l'angle ADC est égal à l'angle AFC; puisqu'ils comprennent le même arc; donc dans les triangles ADE, AFC, les autres angles CAF, DAE

sont égaux chacun à chacun. Donc les deux arcs cr, DB sont égaux, et par conséquent les cordes de ces arcs. Mais la somme des quar-

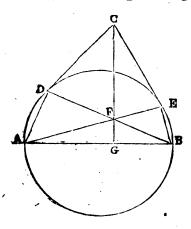


rés de de et de es est égale au quarré de BD, et par conséquent au quarré de CF; la somme des deux quarrés de AE et de EC est égale au quarré de CA, et la somme des quarrés de CF et de CA est égale au quarré du diamètre FA; donc la somme des quarrés de AE, EB, CE, ED est égale au quarré du diamètre. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XII.

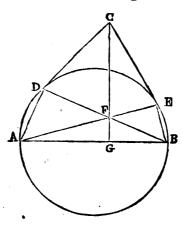
Soit un demi-cercle décrit sur AB comme diamètre. Du point c conduisons deux droites tangentes aux points D, E. Menons les droites EA, DB, qui se coupent mutuellement au point F. Joignons CF et prolongeons CF jusqu'en G. Je dis que la droite CG sera perpendiculaire sur AB.

Joignons DA, EB. Puisque l'angle BDA est



droit, la somme des deux angles restans DAB, DBA du triangle DAB, sera égale à un droit. Mais l'angle AEB est droit; donc la somme des deux angles DAB, DBA est égale à l'angle AEB. Donc si nous ajoutons de part et d'autre l'angle FBE, la somme des deux angles DAB, ABE sera égale à la somme des angles FBE, FEB, et par conséquent à l'angle extérieur DFE du triangle FBE. Mais la droite CD est tangente au cercle, et DB une corde; donc

l'angle CDB est égal à l'angle DAB. Semblablement l'angle CEF est égal à l'angle EBA. Donc la somme des angles CEF, CDF est égale à l'angle DFE. Mais nous avons démontré dans le livre des quadrilatères que

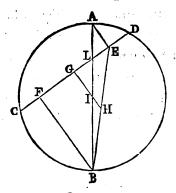


si entre deux droites égales CD, CE qui se rencontrent en un point, on mène deux droites DF, EF qui se coupent mutuellement, et si l'angle DFE compris par ces deux droites est égal à la somme des deux angles CEF, CDF, la droite CF sera égale à chacune des droites CD, CE (a). D'où il suit que CF sera égal à CD. Donc l'angle CFD est égal à l'angle CDF, c'est-à-dire à l'angle DAG. Mais l'angle CFD, conjointement avec l'angle DFG

est égal à deux angles droits; donc l'angle DAG, conjointement avec l'angle DFG est égal à deux droits. Mais la somme des deux angles restans ADF, AGF du quadrilatère est égale à deux droits, et l'angle ADB est droit; donc l'angle AGC est droit. Donc CG est perpendiculaire sur AB. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIII.

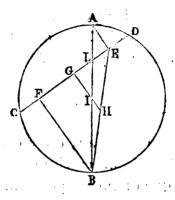
Que deux droites AB, CD se coupent mutuellement dans un cercle; que AB soit un diamètre; que CD ne soit point un diamètre,



et des points A, B conduisons les droites AE, BF perpendiculaires sur CD. Je dis que les droites CF, DE seront égales.

Joignons EB. Du point 1, qui est le centre

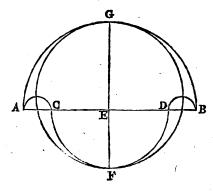
du cercle, conduisons la droite 16 perpendiculaire sur CD, et prolongeons-la jusqu'au point H de la droite EE. Puisque la perpendiculaire 16 est menée du centre sur CD,



cette perpendiculaire partagera la droite CD en deux parties égales en G. Mais les droites IG, AE sont deux perpendiculaires sur CD; donc ces deux perpendiculaires sont parallèles. Mais BI est égal à IA; donc la droite BH est égale à la droite HE. Donc, à cause de l'égalité de ces deux droites, et à cause que BF est parallèle à HG, la droite FG sera égale à la droite GE. Donc si des droites égales GC, GD, on retranche les droites égales GF, GE, les droites restantes FC, EN seront égales. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

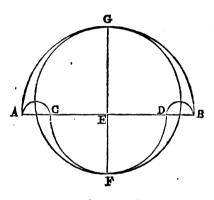
Soit un demi-cercle AB. De son diamètre AB retranchons les parties égales AC, BD. Sur les droites AC, CD, BD décrivons des démi-cercles; que le point E soit le centre des deux



demi-cercles AB, CD. Que la droite EF soit perpendiculaire sur AB, et prolongeons la droite EF vers G. Je dis que le cercle qui a la droite FG pour diamètre est égal à la surface comprise par la demi-circonférence du demi grand cercle, par la demi-circonférence de deux demi-cercles qui sont placés dans le grand demi-cercle, et enfin par la demi-circonférence du demi-cercle qui est hors du demi grand cercle. La figure comprise entre

les quatre demi-circonférences des demicercles AB, CD, DB, AC s'appelle Salinon.

Puisque la droite DC est coupée en deux parties égales au point E, et qu'on lui a ajouté la droite CA, la somme des quarrés des droites DA, CA sera double de la somme des quarrés



des droites DE, EA (a). Mais FG est égal à DA; donc la somme des quarrés des deux droites FG, AC est double de la somme des quarrés des deux droites DE, EA. Mais AB est double de AE, et CD double de ED; donc la somme des quarrés des deux droites AB, DC est quadruple de la somme des quarrés des deux droites DE, EA, et par conséquent double de la somme des quarrés des deux droites GF, AC. Donc la somme des deux cercles qui ont pour diamètres les droites AB, DC

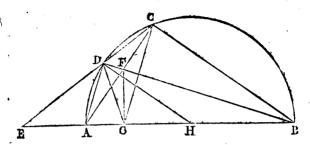
sera semblablement double de la somme des cercles qui ont pour diamètres les droites GF, AC. Donc la somme des demi-cercles qui ont pour diamètres les droites AB, CD est égale à la somme des deux cercles qui ont pour diamètres les deux droites GF, AC. Mais le cercle qui a pour diamètre la droite AC est égal à la somme des deux demi-cercles AC, BD; donc si l'on retranche de part et d'autre les deux demi-cercles AC, BD qui sont communs, la figure restanté, qui est comprise entre les quatre demi-circonférences des demi-cercles AB, CD, DB, AC, et qu'on appelle salinon, sera égale au cercle qui a pour diamètre la droite FG. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

Soit AB un demi-cercle; que Ac soit le côté du pentagone inscrit, et AD la moitié de l'arc AC. Menons la droite CD, et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle rencontre en E la droite BA prolongée. Menons la droite BD, qui coupe la droite CA en un point F, et du point F abaissons sur AB la perpendiculaire FG. Je

dis que la droite EG sera égale au rayon du cercle.

Joignons CB. Que le point H soit le centre



du cercle. Joignons HD, DG et AD. Puisque l'angle ABC qui embrasse le côté du pentagone vaut les deux cinquièmes d'un angle droit, chacun des angles CBD, DBA vaudra le cinquième d'un angle droit. Mais l'angle DHA est double de l'angle DBH; donc l'angle DHA vaut les deux cinquièmes d'un droit. Mais les deux triangles CBF, GFB ont chacun un angle égal en B, et chacun un angle droit en G et c, et ils ont de plus un côté commun FB; donc BC sera égal à BG. Mais les deux triangles CBD, GBD ont les côtés CB, BG égaux entre eux, ainsi que les deux angles FBC, FBG, et ils ont de plus le côté BD commun; donc les deux angles BCD, BGD sont égaux. Mais chacun de ces angles, qui

vaut les six cinquièmes d'un angle droit, est égal à l'angle externe DAE du quadrilatère BADC, qui est inscrit dans le cercle (α) ; donc l'angle restant DAB sera égal à l'angle DGA, et le côté DA égal au côté DG. Mais l'angle DHG vaut les deux cinquièmes d'un angle droit, et l'angle DGH vaut les six cinquièmes d'un angle droit; donc l'angle restant HDG vaut les deux cinquièmes d'un droit. Donc DG est égal à GH. Mais l'angle externe ADE du quadrilatère ADCB inscrit dans le cercle est égal à l'angle CBA, qui vaut les deux cinquièmes d'un angle droit et à l'angle GDH, et de plus dans les deux triangles EDA, HDG, les deux angles EDA, HDG, sont égaux ainsi que les deux angles DGH, DAE et les deux côtés DA, DG; donc EA sera égal à HG. Donc si l'on ajoute de part et d'autre AG, la droite EG sera égale à la droite AH. Ce qu'il falloit démontrer.

Il suit de là que la droite DE est égale au rayon du cercle. Car puisque l'angle DAE est égal à DGH, la droite DH sera égale à la droite DE. Je dis de plus que la droite EC est partagée en moyenne et extrême raison en D, et que DE est le plus grand segment. En TOME II.

effet, la droite ED est le côté d'un hexagone, et DC le côté d'un décagone (6). Ce qui est démontré dans les élémens. Ce qu'il falloit démontrer.

FIN DES LEMMES ET DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

COMMENTAIRE SUR LES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

COMMENTAIRE

SUR

LE LIVRE DES HÉLICES.

ARCHIMÈDE A DOSILHÉE.

- (a) Archimède ne parle ci que de deux problêmes défectueux, et cependant on verra plus bas qu'il en comptoit trois.
- (6) C'est la proposition 6 du deuxième livre de la Sphère et du Cylindre, laquelle est énoncée ainsi : Construire un segment sphérique semblable à un segment sphérique donné, et égal à un autre segment sphérique aussi donné.

PROPOSITION L

(a) Cette démonstration est fondée sur la sixième proposition du cinquième livre des Elémens d'Euclide

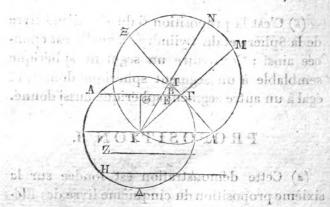
enna Sejara e emplomone (* 1140 et 1200 A)). Considad 200 et 150 et 120 general (* 150 august 126).

PROPOSITION VI.

(a) Ce passage est un peu obscur. Voici comment on pourroit rendre la pensée d'Archimède: Plaçons la droite BN de manière que cette droite passant par le point r une de ses extraémités se termine à la circonférence en dedans a cercle, et que l'autre extrémité se termine à la tigne KN. Cette droite sera coupée par la circonterence, et tombera au-delà de TA.

PROPOSITION VIII.

(a) Les antécédens ZI X IA et KI X IN sont



égaux; car puisque ZI: KI:: IN: IA, on a ZI × IA = KI × IN. Les conséquens KE × IA et KI × ΓA sont aussi égaux; car les deux triangles IKA, IEA étant semblables, on a IA: KI:: IA: IE, et par soustraction ΙΛ : ΚΙ :: ΓΛ : ΚΕ; ce qui donne KE \times IA = KI \times FA. Donc IN : FA :: Ξ I : KE.

(6) En effet, la proportion IZ: KB: ZI: KE donne $\Gamma Z \longrightarrow ZI$; $KB \longrightarrow KE :: \Gamma Z : KB \text{ ou } K\Gamma$; c'està-dire II : BE :; IZ : KB.

PROPOSITION X.

the comment of the second

(a) Soit la suite 1, 2, 3, 4, 5.... n; Soit aussi la suite $n, n, n, n, n, \dots n$.

Te dis d'abord que la somme des quarres des termes de la seconde suite qui est $n_{i,j}^3$ plus le quarré d'un des termes de cette suite qui est n², plus du produit du premier terme de la première suite par la somme des termes de cette suite qui est $(n+1)\frac{n}{2}$, c'est-à-dire $\frac{n^2+n}{2}$, est égale à trois fois la somme des quarrés des termes de la première suite, qui est égale à n³+ $\frac{3 n^* + n}{2}$. Ce qui est évident, car la somme des trois premières quantités étant n³ + n³ + $\frac{n^2+n}{n^2}$, si l'on réduit n^2 en fraction, on aura $n^3 + \frac{3n^4 + n}{2}$

om• chi-

que

: 565

. de∙

ter•

ipee IV. Je dis ensuite que la somme des quarrés des termes de la seconde suite qui est egale a n^3 , est plus petite que le triple de la somme des quarrés des termes de la première suite qui est egale à $n^3 + \frac{3n^3 + n}{2}$; cela est évident.

Je dis enfin que la somme des quarrés des termes de la seconde suite qui est n³, est plus grande que le triple de la somme des quarrés des termes de la première suite, le dernier étant

excepté, c'est-à-dire que $n^3 + \frac{3n^2 + n}{2} - n^2$,

c'est-à-dire que $n^3 - \frac{3n^4}{2} + \frac{n}{2}$. Ce qui est encore evident.

(6) Ce qui précède paroîtra très clair, si l'on fait usage des signes de l'algèbre. En effet, l'on aura en faisant usage de ces signes:

$$2 \times B \times I = 2B \times \Theta_{2,\text{out Leady}}$$

$$2 \times \Gamma \times K = 4\Gamma \times \Theta_{1}$$

$$2 \times \Delta \times \Lambda = 6\Delta \times \Theta,$$

$$2 \times \Delta \times \Lambda = 6\Delta \times \Theta,$$

$$2 \times Z \times M = 10Z \times \Theta,$$

$$2 \times Z \times N = 10Z \times \Theta,$$

$$2 \times H \times Z = 12H \times \Theta,$$

$$10Z \times \Theta,$$

Donc la somme des premiers membres de ces équations, conjointement avec Θ ($\overline{A} + B + \Gamma$

$$+\Delta + E + Z + H + \Theta$$
), sera égale à Θ (A



 $+3B + 5\Gamma + 7\Delta + 9E + 11Z + 13H + 15\Theta$).

- (2) C'est à-dire, $\Theta: A:: A:8A$.
- (1) En effet, puisque les droites B, Γ , etc. sont en progression arithmétique, on a B + Θ $\Rightarrow A$, $\Gamma + H = A$; $\Delta + Z = A$; $\Delta = A$.
 - (a) C'est-à-dire, que, $A^a + (A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta) \times \Theta \leq 3A^a$. En effet, on a démontre plus haut que $A^a = (A + 2B + 2\Gamma + 2\Delta + 2E + 2Z + 2H + 2\Theta) \times \Theta$. Donc $A^a \leq (A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta) \times \Theta$. Donc $A^a + (A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta) \times \Theta \leq 3A^a$.

 $(2\pi^{2} + 5\pi + 7)\pi + 7^{2}\pi + 2\pi (\pi + 7) \times \pi$ $\pi + \pi \pi^{2} + \pi \pi^{2}$ $\pi + \pi \pi^{2} + \pi \pi^{2}$

PROPOSITION XI.

(a) Que $\Lambda \gamma$ soit égal à 1; que le nombre des quantités inégales ΛB , $\Gamma \Delta$, etc. soit n+1. Le nombre des quantités inégales $\Lambda \Phi$, ΓX , etc. sera égal à n, et $\Lambda \Phi$ égal aussi à n. Nommons a la ligne N Z. La somme des quarrés des lignes



OA, ΠZ , etc. égalera $(n + a)^2 \times n$, et la somme des quarrés des lignes AB, ΓA , etc., le quarré de la ligne NZ étant excepté, égalera $\overline{A\Phi}^2 + \Gamma X + E\Psi + H\Omega + \overline{12} + \overline{\Lambda V}^2 + \overline{NZ} \times n$ $\overline{+}^2 2 NZ (A\Phi + \Gamma X + E\Psi + H\Omega + \overline{17} + \overline{\Lambda V})$, c'est-à-dire $\frac{1}{6}(2n^2 + n + 1)n + a^2n + 2a(n + 1) \times \frac{1}{3}n$. Il faut démontrer que $(n + a)^2 \times n$ $\overline{+}^4 (2n^2 + 3n + 1)n + a^2n + 2a(n + 1) \times \frac{1}{2}n$

$$<\frac{(n+a)^2}{(n+a)^2a+\frac{1}{3}n^2}.$$

Il faut démontrer ensuite

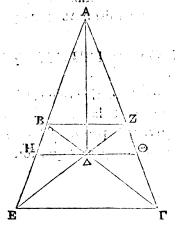
$$\frac{(n+a)^{2} \times n}{\frac{1}{6}(2n^{2}+3n+1)n+a^{2}n-(n+a)^{2}+2a(n+1)\times \frac{1}{2}n}} > \frac{(n+a)^{2}}{(n+a)^{2}}.$$

Ce qui sera évident, lorsqu'on aura fait les opérations convenables.

(6) C'est-à-dire, égal à NZ.

PROPOSITION XIII

(a) Si la droite AD partage en deux parties égales l'angle BAT du triangle BAT, la somme



des deux côtés AB, AI sera plus grande que le double de la droite AA. Si les côtés AB, AI

étoient égaux, il est évident que AB + Ar seroit plus grand que 2 AA. Supposons que ces côtés ne soient pas égaux, et que Ar soit le plus grand, je prolonge AB, et je fais AE égal à Ar. Je joins les points E, r; par les points A et B je mène les droites HO, BZ parallèles à ET, et je joins les points E, Z. Il est évident que AH + A0 > 2 A2. Il reste donc à démontrer que $AB + A\Gamma > AH + A\Theta$. Puisque $A\Delta$ partage l'angle BAT en deux parties égales, on aura AT : BA :: $\Delta \Gamma$: B Δ . Mais A Γ > AB; done $\Gamma \Delta$ > B Δ . Donc $\Gamma\Delta > \Delta Z$. Mais l'angle $\Gamma\Delta\Theta =$ l'angle $B\Delta H$, et l'angle $z\Delta\Theta = l'angle B\Delta H$; donc $r\Delta : \Delta z :: r\Theta$: ΘZ . Mais $\Delta Z = B \Delta$, et $\Gamma \Delta > \Gamma \Delta$; donc $\Gamma \Delta >$ AZ. Donc $\Gamma\Theta > \Theta$ Z. Mais AH + A $\Theta > 2$ A Δ ; donc à plus forte raison AB + A $\Gamma > 2$ A Δ .

PROPOSITION XVI.

(a) L'angle du demi-cercle est l'angle formé par le diamètre et la circonférence. Euclide démontre (liv. 111, prop. 18) que l'angle du demi-cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu.

ha don of the At, as sonather particles as a special state of the stat

PROPOSITION XVIII

- (a) Car si du point A on abaisse une perpendiculaire sur HO, Le triangle formé par cette perpendiculaire, par AO et par la moitié de HO, sera semblable au triangle OAZ. Donc OA sera à AZ comme la moitié de HO est à la perpendiculaire dont nous venons de parler. Mais la raison de OA à AA est plus grande que la raison de OA à AZ; donc la raison de OA à AA est plus grande que la raison de la moitié de HO est à la perpendiculaire dont nous avons parlé.
 - (6) Par permutation.
 - (2) Par addition.
- (4) Cette conclusion est fondée sur le principe suivant:

Si la raison d'une partie d'une quantité à cette même quantité est plus grande que la raison d'une partie d'une autre quantité à cette même quantité, la raison de la première quantité à son autre partie sera encore plus grande que la raison de la seconde quantité à son autre partie.

Que la première quantité soit ap, et qu'une de ses parties soit a. Son autre partie sera ap

-a. Que la seconde quantité soit bq, et qu'une de ses parties soit b. Son autre partie sera bq-b. Si $\frac{a}{ap} > \frac{b}{bq}$, je dis que $\frac{ap}{ap-a} > \frac{bq}{bq-b}$.

Puisque $\frac{a}{ap} > \frac{b}{bq}$, il est évident que p > q.

A présent pour faire voir que $\frac{ap}{ap-a} > \frac{bq}{bq-q}$, ou que $\frac{p}{p-1} > \frac{q}{q-1}$, je fais disparoître les dénominateurs, et la première quantité devient pq-p, et la seconde devient pq-q, mais p > q; donc $\frac{ap}{ap-a} > \frac{bq}{bq-b}$.

PROPOSITION XIX.

(a) Car puisque le triangle TAZ, et celui dont les côtés sont TA, la moitié de TN, et la perpendiculaire menée du point A sur TN sont semblables, on a TA est à AZ comme $\frac{TN}{2}$ est à la perpendiculaire. Mais AA est plus petit que AZ; donc la raison de TA à AA est plus grande que la raison de $\frac{TN}{2}$ à la perpendiculaire.

PROPOSITION XXV.

(a) En effet, le quarré du rayon du cercle \mathbf{r} étant égal à $A\Theta \times \Theta E + \frac{AE \times AE}{3}$, et ΘE étant égal à EA, on aura cer. \mathbf{r} : cer. AZHI :: $\mathbf{2} \Theta E \times \Theta E + \frac{\Theta E \times \Theta E}{3}$: $\mathbf{2} \Theta E \times \mathbf{2} \Theta E :: 6$ $\times \frac{\mathbf{2} \Theta E}{\mathbf{2} \Theta E}$: $\mathbf{12} \times \frac{\mathbf{2} \Theta E}{\mathbf{2} \Theta E}$: $\mathbf{12}$.

PROPOSITION XXVII.

- (a) Parce que OB est double de OA.
- (6) Puisque l'on a,

KA: 2^{me} cerc. :: 7:12; 2^{me} cerc.: 1^{er} cerc.:: 12:3; 1^{er} cerc.: K:: 3:1.

Si l'on multiplie ces trois proportions par ordre, on aura, KA: K:: 7:11. Ce qui donne KA — K: K:: 7:1; c'est-à-dire A: K:: 6:1; et l'on a par inversion, K: A:: 1:6.

(>) Puisque l'on a,

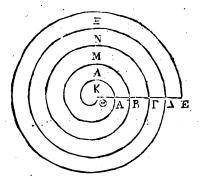
KAM: 5^{mis} cerc. :: $1\Theta \times \Theta B + \frac{\Gamma B}{3} : \overline{\Gamma \Theta}^2$;

DES HÉLICES.

400

3^{me} cerc. : 2^{me} cerc. :: ΓΘ : BΘ;

 2^{m_0} cerc. : $K\Lambda$:: $\overline{B\Theta}$: $B\Theta \times \Theta \Lambda + \frac{\overline{AB}}{3}$.



Si l'on multiplie ces trois proportions par ordre, et si l'on supprime les facteurs communs de deux termes de chaque raison, on aura,

$$K \Lambda M : K \Lambda :: \Gamma \Theta \times \Theta B + \frac{\Gamma B}{3} : E \Theta \times \Theta A + \frac{AB}{3};$$

ou bien

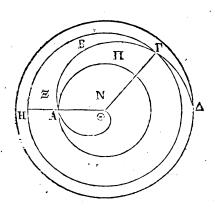
KAM: KA::
$$3\Theta A \times 2\Theta A + \frac{\Theta^4}{3}$$
: $2\Theta A \times \Theta A$

$$+ \frac{\Theta^2}{3}$$
:: 19:7.

Done M: KA:: 12: 7. Mais K: A:: 1: 6; et par addition, KA: A:: 7: 6; done si l'on multiplie ces deux dernières proportions par ordre, on aura M: A:: 2: 1.

PROPOSITION XXVIII.

(a) Puisque NII : secteur HIO :: HO \times AO + $\frac{AH}{3}$: HO, on aura secteur HIO — NII : NII :: HO



 $- HΘ × AΘ - \frac{\overline{AH}^2}{3} : AΘ × ΘH + \frac{\overline{AH}^2}{3}; mais sector HΓΘ - NΠ = Z, et HΘ - HΘ × AΘ - \frac{\overline{AH}^2}{3} = (AH + AΘ)(AH + AΘ) - AΘ (AH + AΘ) - \frac{\overline{AH}^2}{3} = (AH + AΘ)(AH + AΘ - AΘ) - \frac{\overline{AH}^2}{3} = (AH + AΘ)AH - \frac{\overline{AH}^2}{3} = (AH + AΘ - \frac{\overline{AH}^2}{3})$ TOME II.

AH = $(A\Theta + \frac{2}{3}AH)$ AH = $A\Theta \times AH + \frac{2}{3}AH$; donc $Z : N\Pi :: A\Theta \times AH + \frac{2}{3}AH : A\Theta \times \ThetaH$ $+\frac{HA}{3}$.

FIN DU COMMENTAIRE SUR LES HÉLICES.

COMMENTAIRE

SUR LES DEUX LIVRES

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

LIVRE PREMIER.

DEMANDES.

(a) CES graves sont ou des surfaces, ou des solides: on considère ces surfaces et ces solides comme homogènes et comme ayant des pesanteurs proportionnelles à leurs grandeurs.

trade Your july and the surged trade of the PROPOSITION (IV) or the

(a) Deux grandeurs égales peuvent avoir le même centre de gravité. Soient, par exemple, deux cercles concentriques, de manière que le plus petit cercle soit égal à la couronne; il est évident que le plus petit cercle et la couronne seront deux grandeurs égales qui auront le même centre de gravité. Il en seroit de même de deux sphères concentriques.

404 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

(6) Archimède dit qu'il est démontré que le centre de gravité est la droite AB. Cela n'est démontré dans aucun de ses écrits.

PROPOSITION VII.

(a) Retranchons de AB moins qu'il ne faudroit, etc. Cela se peut. Voyez le commencement du dixième livre des Elémens d'Euclide.

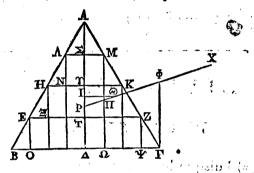
PROPOSITION VIII

- (a) Pesanteur est ici employée comme poids: le premier se prend ordinairement dans un sens plus genéral.
- (c) Le centre de gravité de ΔH sera dans la droite qui passe par les points E, Γ, parce que le centre de gravité de AΔ, celui de ΔH et celui de AB doi Vent se trouver sur la même droite.

of the PROPOSITION XING() and a support of the state of t

PROPOSITION XIII.

(a) En effet, ΔB: BO:: ΔΓ: ΨΓ. Donc ΔB—BO: BO:: ΔΓ—ΨΓ: ΨΓ; ou bien ΔΟ: BO:: ΔΨ: ΨΓ. Mais ΔΟ: BO:: AE: EB, et ΔΨ: ΨΓ:: AZ: ZΓ; donc AE: EB:: AZ: ZΓ. Donc les côtés AB, Ar sont coupés proportionnellement aux points



- E, Z. Donc la droite EZ est parallèle à la droite Br. On fera le même raisonnement pour les droites HK, AM.
- (6) Car à cause des triangles semblables $A\Delta\Gamma$, $A\Sigma M$, on a, triangle $A\Gamma\Delta$: triangle $AM\Sigma$:: $A\Gamma$: AM. Donc triangle $A\Gamma\Delta$: triangle $AM\Sigma \times 4$:: $A\Gamma$: $AM \times 4$:: $A\Gamma \times A\Gamma$: $AM \times (AM + MK + KZ + Z\Gamma)$:: $A\Gamma \times A\Gamma$: $AM \times A\Gamma$:: $A\Gamma$: AM.
- (γ) En effet, $\Phi P : P\Pi :: \Gamma \Delta : \Delta \Omega$, et $\Gamma \Delta : \Delta \Omega$:: $\Gamma A : AM$; donc $\Gamma A : AM :: \Phi P : PH$.

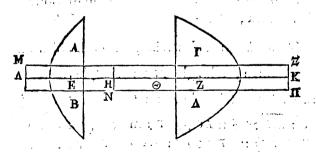
PROPOSITION XV.

(a) Supposons que la droite ZE prolongée ne passe pas par le point H où se rencontrent les droites prolongées BA, ΓΔ. Joignons les points Z et H, on aura BZ: ZΓ:: AE: EΔ. Mais BZ = ZΓ; donc AE = EΔ. Donc la droite qui passe par les points Z et E passe aussi par le point H.

LIVRE SECOND.

PROPOSITION I.

(a) Puisque le segment AB est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et



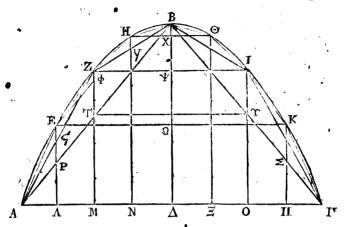
la même hauteur que le segment (voyez le Traité de la Quadrature de la Parabole), il sera facile de transformer ce triangle en un rectangle dont la base soit égale à la droite AH.

- (6) Le grec dit progius, comme on sait; en sorte que cette phrase signifie, nommons cette figure inscrite dans le segment, suivant l'acception ordinaire. Je ne blâme pourtant pas le mot régulièrement, il vaut peut-être mieux que tout ce qu'on pourroit mettre en place. Je disseulement que la traduction n'est pas littérale, non plus que dans le latin. (Delambre.)
- (γ) Dans le segment parabolique ABΓ, dont BΔ est le diamètre, ou une parallèle au diamètre, inscrivons régulièrement la figure rectiligne ABΓ. Menons les droites EΛ, ZM, HN, ΘΞ, IO, KΠ parallèles au diamètre, et menons ensuite les droites EK, ZI, HΘ. Il faut démontrer que les droites EK, ZI, HΘ sont parallèles à la base AΓ du segment; que ces droites sont coupées en deux parties égales par le diamètre BΔ, et que les droites BX, XΨ, ΨΩ, ΩΔ, sont entre elles comme les nombres I, 3, 5, 7.

Puisque ZM est parallèle au diamètre BA, la droite AT sera égale à TB (Quadr. de la Parab. prop. 1). Donc AM est égal à MA. Par la même raison, la droite AT étant égale à TZ, et la droite Zy étant égale à la droite By, la droite AA sera égale à AM, et la droite MN égale à la

408 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

droite NA. Mais la droite AM est égale à MA; donc les droites AA, AM, MN, NA sont égales entre elles. On démontrera semblablement que



les droites ΔΞ, ΞΟ, ΟΠ, ΠΓ sont égales entre elles. Mais AΔ est égal à ΔΓ; donc les droites AΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΔ, ΔΞ, ΞΟ, ΟΠ, ΠΓ sont toutes égales entre elles. Mais AΛ: ΛΡ:: ΑΔ: ΒΔ, et ΠΓ: ΠΣ:: ΓΔ: ΒΔ:: ΑΔ: ΒΔ; donc ΑΛ: ΛΡ:: ΠΓ:: ΠΣ. Mais ΑΛ = ΠΓ; donc ΛΡ = ΠΣ. Mais ΛΡ:: ΡΕ:: ΑΔ: ΑΔ (Quadr. de la Parab. prop. IV), et ΠΣ: ΣΚ:: ΔΓ: ΔΠ:: ΑΔ: ΛΔ; donc ΛΡ: ΡΕ:: ΠΣ: ΣΚ. Mais ΛΡ = ΠΣ; donc ΡΕ = ΣΚ. Donc ΛΕ = ΚΠ. Donc ΕΚ est parallèle à ΛΓ. On demontreroit de la même manière que les droites ZI, HΘ sont parallèles à ΛΓ.

Puisque les droites EK, AII sont parallèles entre elles, ainsi que les droites EA, BA, KII,

et que AA est égal à AII, la droite EO sera égale à OK. Par la même raison, la droite ZY est égale à YI, et la droite HX égale à XO. Donc le diamètre BA partage les droites EK, ZI, HO en deux parties égales.

Puisque BA: BY:: 4: I (Quadr. de la Parab. prop. xix), et que BY: EX:: 4: I, il est évident que si la droite BX vaut I, la droite BY vaudra 4; la droite XY, 3; et la droite BA, 16. D'où il suit que ZT vaudra 4, et que YA ou ZM vaudra 12. Menons la droite EΦ parallèle à AB, on aura ZT: ZΦ:: 4: I (Quadr. de la Parab. prop. xix). Donc ΦT, c'est-à-dire EP, vaudra 3, et AP, qui est égal à la moitié de MT, vaudra 4. Donc ME, c'est-à-dire ΩA, vaudra 7, et par conséquent YΩ, qui est égal à YA — ΩA, vaudra 5. Donc BX étant I, XY vaudra 3, YΩ vaudra 5, et ΩA vaudra 7. Donc les droites BX, XY, YΩ, ΩA sont entre elles comme les nombres I, 3, 5, 7.

PROPOSITION III.

- (a) Voyez la note (a) de la lettre à Dosithée qui est en tête du Traité des Conoïdes.
- (6) Puisque les segmens des diamètres BA, OP sont entre eux comme les nombres 1, 3, 5, 7, 9, etc. il est évident que les segmens

410 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS:

homologues seront proportionnels. Il n'est pas moins évident que les parallèles homologues seront encore proportionnelles. En effet, puisque HN: ZM:: BN: BM:: 1:4, et que Xy: T7::: Oy: O7:: 1:4; nous aurons HN: ZM:: XY: Y7, et par conséquent HO: ZI:: XY: Y4, et ainsi de suite.

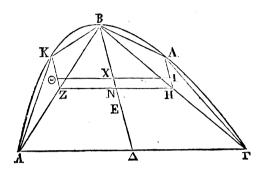
PRÓPOSITION IV.

(a) Cela est évident d'après ce qui est dit dans le dixième livre des Elémens d'Euclide, et dans le premier livre de la Sphère et du Cylindre.

PROPOSITION V.

- (a) Car puisque la droite menée du point K au point Λ, et la droite ZH sont parallèles à AΓ (2, 1), et que la droite KZ est parallèle à ΛΗ, il est évident que KZ = ΛΗ. Mais les droites ZΘ, HI sont les mêmes parties de droites égales; donc ΘZ = IH. Donc cette figure ΘZHI est un parallélogramme.
- (6) Les deux segmens AKB, BAT sont égaux. En effet, KZ = AII, et les perpendiculaires menées du point B sur les droites prolongées ZK, HA sont égales, parce que les droites KZ,

AH sont également éloignées de la droite BΔ. Donc le triangle BKZ est égal au triangle BAH. Le triangle KZA est égal au triangle AHΓ, par la



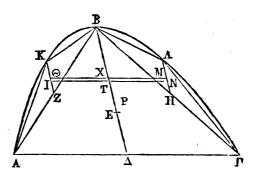
même raison. Donc le triangle BKA est égal au triangle BAT. Mais le segment BKA est égal à quatre fois le tiers du triangle BKA, et le segment BAT est aussi égal à quatre fois le tiers du triangle BAT (Quadr. de la Parab. prop. xxiv). Donc le segment BKA est égal au segment BAT.

(γ) Quadr. de la Parabole, prop. xxiv.

(5) Puisque le centre de gravité du triangle ABT est le point E, et que le centre de gravité de la somme des triangles AKB, BAT est le point T, il est évident que le centre de gravité de la figure rectiligne AKBAT sera placé dans un point P de la droite TE, les segmens PE, TP, PE de cette droite étant proportionnels au triangle ABT, et à la somme des triangles AKB, BAT (1, 8).

412 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

Mais la raison du triangle ABT à la somme des triangles KAB, ABT est plus grande que la raison ABT à la somme des segmens; car la somme



des segmens est plus grande que la somme des triangles. Donc si la droite ET est partagée en deux segmens, de manière que celui qui est du côté du point T soit au segment qui est du côté du point E, comme le triangle ABT est à la somme des segmens, il est évident que le point de division tombera au-dessus du point P.

PROPOSITION VI.

(a) Cela est évident, puisque la figure rectiligne AKBAT est plus grande que le triangle, et qu'au contraire la somme des segmens restans est plus petite que la surface K.

PROPOSITION VII.

(a) La figure inscrite régulièrement dans le segment ABT sera semblable à la figure inscrite dans le segment FZH, si la figure inscrite dans le segment ABT a le même nombre de côtés que la figure inscrite dans le segment EZH. Car puisque les points B, Z sont les sommets de segmens semblables, les figures rectilignes seront semblables.

PROPOSITION VIII.

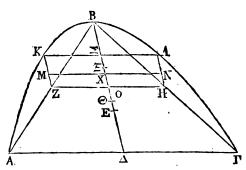
(a) En effet, puisque les segmens sont semblables, leurs centres de gravité sont semblablement placés dans leurs diamètres.

(6) Eutocius démontre cette proposition, qui ne l'est point par Archimède.

Soit la parabole ABI, ayant pour diamètre la droite BA. Menons l'ordonnée AA, et la droite AB; coupons AB en deux parties égales au point Z, et par ce point menons la droite ZK parallèle à BA. Cette droite sera le diamètre du segment AKB. Par les points K, Z, menons les droites KE, Zo parallèles à AA. Puisque AZ est égale à BZ, la droite AB sera double de ZB, la droite AB double de BO et AA double de ZO, c'est-à-

414 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

dire de KS. Donc le quarré de AA est quadruple du quarré de KS, et par conséquent la droite BA quadruple de BS. Donc puisque BA est double de BO, là droite BO sera double de



BΣ. Mais ΣO est égal à KZ, puisque KZΣO est un parallélogramme; donc BΔ est quadruple de KZ.

- (y) Puisque $B\Theta = 4 \Sigma X$, il est évident que $B\Theta = \Sigma X$, c'est-à-dire $B\Sigma + X\Theta$ sera égal à $3 \Sigma X$.
- (s) Voyez la Quadrature de la Parabole, prop. 24.
- (f) Puisque $\Delta E = 5 E\Theta$, la droité $\Delta \Theta$ égalera $6 E\Theta$. Mais $B\Delta = 3 \Delta E$; donc $B\Delta = 15 E\Theta$; donc $B\Theta = 9 E\Theta$; donc $B\Theta : \Delta \Theta :: 9 E\Theta : 6 E\Theta :: 9 : 6 :: 3 : 2. Donc <math>B\Theta = \frac{3}{4} \Theta \Delta$.

PROPOSITION IX.

(a) La démonstration de cette proposition est courte et facile, lorsqu'on emploie l'algèbre.

Soit la progression suivante \ddots \ddots

$$x = \frac{3ad - 3cd}{5a - 5d}. \text{ Que } 2a + 4b + 6c + 3d$$

$$: 5 a + 10 b + 10 c + 5 d :: y : a - c$$
, on aura

$$y = \frac{2a^{2} + 4ab + 6ac + 3ad - 2ac - 4bc - bc^{2} - 3cd}{5a + 10b + 10c + 5d}.$$

Ou bien en faisant la réduction

$$y = \frac{2 a^{2} + 4 ab + 4 ac + 3 ad + 4 bc - 6 c^{2} - 3 cd}{5 a + 10 b + 10 c + 5 d};$$

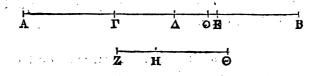
réunissant ces deux équations, les réduisant au même dénominateur, et faisant attention que bc = ad, on aura $x + y = \frac{2}{5}a$. Ce qu'il falloit démontrer.

« Quelquefois Eutocius, en suivant de trop près la marche d'Archimède, n'est guère moins obscur que lui; et c'est ce qu'on remarque principalement à la prop. 9 du livre II de l'Equilibre des Plans. La démonstration d'Archimède a trois énormes colonnes in-folio, et n'est rien

416 DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

moins que lumineuse. Eutocius commence sa note en disant, que le théorème est fort peu clair, et il promet de l'expliquer de son mieux. Il y emploie quatre colonnes du même format et d'un caractère plus serré, sans réussir davantage; au lieu que quatre lignes d'algèbre suffisent à M. Peyrard pour mettre la vérité du théorème dans le plus grand jour. Il est peu croyable qu'Archimède ait pu arriver par une voie si longue à la proposition qu'il vouloit établir; et il est beaucoup plus probable qu'il en aura reconnu la vérité par quelqu'autre moyen, et que, bien sûr de cette vérité, il aura pris ce long détour pour la démontrer, en ne supposant que des propositions avouées et reçues des Géomètres de son temps ». (Rapport fait à l'Institut par MM. La Grange et Delambre.)

(6) Que BE soit représenté par a, et que la raison soit q. Il est évident que $B\Delta = aq$; BF



 $= aq^{\circ}$; $AB = aq^{\circ}$. Mais $A\Gamma = AB - B\Gamma$; $\Gamma\Delta = B\Gamma - B\Delta$, et $\Delta E = \Delta B - BE$. Donc $A\Gamma = aq^{\circ} - aq^{\circ}$; $\Gamma\Delta = aq^{\circ} - aq$; BE = aq - a. Mais

les trois quantités $aq^3 - aq^4$, $aq^4 - aq$, aq— a forment une progression dont la raison est q. Donc les trois quantités Ar, $\Gamma\Delta$, ΔE forment une progression.

PROPOSITION X.

- (a) Archimède suppose que les bases des segmens sont parallèles.
- (6) Le premier diamètre de la parabole est celui sur lequel les ordonnées sont perpendiculaires.

FIN DU COMMENT. SUR L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

27

COMMENTAIRE

SUR LA

QUADRATURE DE LA PARABOLE.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE.

- (a) Archimède veut parler sans doute de l'ellipse.
- (6) Le lemme dont Archimède fait usage est fondé sur le corollaire de la première proposition du dixième livre des Elémens d'Euclide.

PROPOSITION I.

(a) Apollonius, liv. 1, prop. 46, et liv. 11, prop. 5. Archimède appelle diamètre ce que nous appelons axe, et ce que nous appelons diamètre, il l'appelle parallèle au diamètre.

PROPOSITION II.

(a) Apollonius, liv. 1, prop. 35.

PROPOSITION III

(a) Apollonius, liv. 1, prop. 20.

PROPOSITION IV.

- (a) En effet, puisque Br : BI :: Br : Bo, on aura $\overline{BO} \times Br = BI \times \overline{Br}$; ou bien $\overline{BO} = BI \times Br$. D'où l'on tire $\overline{BF} : \overline{BO} :: \overline{BO} :: \overline{BO} :: \overline{BI}$.
- (6) Parce que la proposition Br : BO :: BO : BI donne Br + BO : BO + BI :: Br : BO, c'est-à-dire TO : IO :: BF : BO, ou bien Br : BO :: FO : IO.

PROPOSITION V.

(α) Car comparant les deux proportions KA: KI:: AΓ: ΔΑ; KI: ΘΚ:: ΔΑ: ΑΚ, on a par raison d'égalité KΛ: ΘΚ:: ΑΓ: ΑΚ, ou bien KΘ: ΚΛ:: ΑΚ: ΑΓ; ce qui donne KΘ: ΚΛ — ΘΚ:: ΑΚ: ΑΓ — ΑΚ, ou bien KΘ: ΘΛ:: ΑΚ: ΚΓ.

PROPOSITION X.

(a) Livre 1, prop. 15 de l'Equilibre des plans.

PROPOSITION XIV.

- (a) En effet, on a démontré dans la proposition 5 que BE: EΓ:: EΦ: ΦΣ. Ce qui donne BE + EΓ: BE:: EΦ + ΦΣ: EΦ; c'est-à-dire que BΓ: BE:: ΣΕ: ΕΦ.
- (6) Parce que le trapèze ΔE est au trapèze KE comme la droite menée du milieu de BE parallèlement à BΔ, et terminée à la droite ΔΣ, est à la droite menée du milieu de BE parallèlement à la droite BK et terminée à la droite KΦ. Mais cette première droite est à la seconde comme ΣΕ: ΦΕ, et ΣΕ: ΦΣ:: BΓ ou BA: BE; donc BA: BE:: trapèze ΔΕ: trapèze KE.

PROPOSITION XVI.

(a) Car puisque le triangle BTE et la surface z pris ensemble sont plus petits que le segment BOT, si nous retranchons de part et d'autre BTE, nous aurons z < BOT - BTE, ou bien $z < BOT - ME - \Lambda\Phi - OP - OO - FOE$, c'està-dire $z < M\Lambda + ZP + HO + HOT$.

PROPOSITION XVII.

(a) Car si l'on prolonge la droite ΓΘ jusqu'à la droite ΒΔ, cette droite partagera ΒΔ en deu/

parties égales, parce que EO = OK. Donc la droite FO prolongée partagera le triangle BFA en deux triangles égaux. Mais le triangle formé par BF, par FO prolongé et par la moitié de B est double du triangle BFO; donc le triangle BFA est quadruple du triangle BFO.

PROPOSITION XXIII.

(a) Cette proposition peut se démontrer algébriquement d'une manière très-simple. Soit a la plus petite de ces grandeurs, et u la plus grande. La somme de ces grandeurs égalera $\frac{4u-a}{3}$, et si l'on ajoute $\frac{a}{3}$, l'on aura 4u.

FIN DU COMM. SUR LA QUAD. DE LA PARABOLE.

COMMENTAIRE

SUR

L'ARÉNAIRE.

- (a) IL est évident qu'Aristarque considère le centre d'une sphère comme étant une surface infiniment petite; et qu'en employant cette analogie, il ne se propose de faire entendre autre chose, sinon que l'orbite de la terre est infininement petite, par rapport à la distance des étoiles au soleil. On auroit tort d'être surpris qu'Aristarque ait connu cette immense distance des étoiles: de cela seul que la hauteur méridienne des étoiles est toujours la même pendant une révolution de la terre autour du soleil, il lui étoit facile de conclure que, dans la supposition de l'immobilité des étoiles et du soleil, l'orbite de la terre devoit être infiniment petite par rapport à la distance des étoiles.
- (c) Une myriade veut dire dix mille; un stade étoit d'environ cent vingt-cinq pas géométriques.

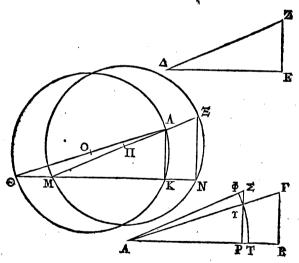
- (7) Archimède prend le soleil à l'horison pour que l'œil puisse en soutenir l'éclat sans en être trop incommodé; car il n'avoit pas de moyen pour le dépouiller d'une grande partie de sa lumière. (Delambre.)
- (3) La partie de l'œil qui apperçoit les objets n'est autre chose que la prunelle dont le diamètre varie à chaque instant, selon que la lumière est plus ou moins vive. De cette manière il pourroit arriver que le cylindre trouvé d'après la méthode d'Archimède fût, au moment de l'observation, d'un diamètre plus petit ou plus grand que celui de la prunelle, et alors l'observation manqueroit d'exactitude.
- (ε) Car si le centre du soleil étoit à l'horison, la droite ΔK seroit tangente à la terre, et par conséquent perpendiculaire sur le rayon qui joint les points Δ, Θ; et alors la droite ΘK seroit plus grande que la droite ΔK. Mais à mesure que le soleil s'élève au-dessus de l'horison, l'angle ΘΔK augmente et l'angle ΔΘK diminue; donc la droite ΘK sera encore plus grande que la droite ΔK, lorsque le soleil est au-dessus de l'horison.
- (ζ) En effet, les deux triangles ΔΝΚ, ΘΡΚ ayant chacun un angle droit en N et en P; le

côté KN étant égal au côté KP, et l'hypoténuse Δ K étant plus petite que l'hypoténuse Θ K, l'angle N Δ K sera plus grand que l'angle P Θ K. Donc le double du premier sera plus grand que le double du second, c'est-à-dire que l'angle $\Delta\Delta$ Z sera plus grand que l'angle M Θ O.

- (n) La raison du contour du polygone de 656 côtés inscrit dans le cercle ABI à KO étant moindre que la raison de 44 à 7, la raison d'un des côtés de ce polygone à KO sera moindre que la raison de 44 à 4592, ou bien de 11 à 1148. Mais la droite AB est plus petite que le côté d'un polygone de 656 côtés; donc la raison de AB à KO est moindre que la raison de 11 à 1148.
- (6) Car la raison de BA à ΘK est moindre que la raison de 11 à 1148, c'est-à-dire que $\frac{BA}{\Theta K}$ $< \frac{11}{5148}$; ou bien en divisant la seconde fraction par 11, $\frac{BA}{\Theta K} < \frac{1}{104 + \frac{4}{12}}$. Donc à plus forte raison $\frac{BA}{\Theta K} < \frac{1}{100}$. Donc si BA est un, ΘK sera plus grand que cent. Donc BA est plus petit que le centième de ΘK .
 - (1) Car puisque le diamètre du cercle XH

est plus petit que la centième partie de ΘK , et que $\Theta \Upsilon + \Sigma K$ est plus petit que le diamètre du cercle ΣH , il est évident que $\Theta \Upsilon + \Sigma K$ sera plus petit que la centième partie de ΘK . Donc la droite ΘK étant partagée en cent parties égales, la droite $\Upsilon \Sigma$ sera plus grande que quatre-vingt-dix-neuf parties de ΘK . Donc la raison de ΘK à $\Upsilon \Sigma$ est moindre que la raison de cent à quatre-vingt-dix-neuf.

(x) Soient les deux triangles ABF, AEZ, ayant des angles droits en B et E. Que FF soit égal à



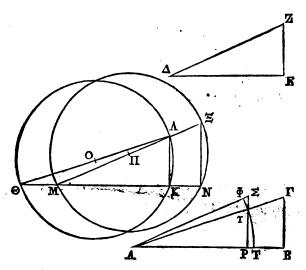
EZ et AB plus grand que AE: je dis que la raison de l'angle A à l'angle A, qui est plus petit que l'angle A, est plus grande que la raison de AF à ΔZ , et que la raison de l'angle Δ à l'angle Δ est moindre que la raison de ΔB à ΔE .

Faisons le triangle OKA égal et semblable au triangle ABT. Prenons MK égal à AE, et menons la droite MA. Le triangle MKA sera égal et semblable au triangle AEZ. Prolongeons MA vers Z, jusqu'à ce que MZ soit égal à OA. Prolongeons aussi MK vers N, et du point z conduisons la droite ZN perpendiculaire sur MN. Le triangle MNE sera semblable au triangle MKA. Du point O, milieu de OA, et avec le rayon OA, décrivons une circonférence de cercle : cette circonférence passera par le point K. Du point II, milieu de MZ, et avec le rayon NZ, décrivons aussi une circonférence de cercle : cette circonférence passera par le point N; et ces deux circonférences seront égales, puisque leurs diamètres sont égaux.

Puisque les angles ZMN, AOK ont leurs sommets à des circonférences égales, ces angles seront entre eux comme les arcs compris par leurs côtés, c'est-à-dire que l'angle ZMN sera à l'angle AOK comme l'arc ZN est à l'arc AK. Mais dans des cercles égaux, la raison des arcs est plus grande que la raison des cordes; donc la raison de l'angle ZMN à l'angle AOK est plus grande que la raison de ZN à AK. Mais ZN est à AK comme MZ est à MA. Donc la raison de l'angle ZMN à l'angle AOK est plus grande que

la raison de $\Theta \Lambda$ à $M\Lambda$, c'est-à-dire que la raison de l'angle Λ à l'angle Λ bet plus grande que la raison de $\Lambda\Gamma$ à ΔZ .

Faisons à présent AP égal à AE. Du point P.



élevons une perpendiculaire sur AB; faisons PZ égal à EZ, et joignons AZ. Le triangle APZ sera égal et semblable au triangle AEZ. Du point A et avec le rayon AT décrivons l'arc TT. L'angle TAT sera à l'angle TAT comme le secteur TAT est au secteur TAT. Mais la raison du secteur TAT au secteur TAT est moindre que la raison du secteur TAT au triangle APT; donc la raison de l'angle TAT au triangle TAT est moindre que la raison du secteur TAT au triangle APT, et moindre par consequent que la raison de ET

- à TP. Donc par addition, la raison de l'angle ΦΑΤ à l'angle TAT est moindre que la raison de ΣP ou de ΓΒ à TP. Mais ΓΒ est à TP comme AB est à AP; donc la raison de l'angle ΦΑΤ à l'angle TAT est moindre que la raison de AB à AP, c'est-à dire que la raison de l'angle ZΔE à l'angle ΓΑΒ est moindre que la raison de AB à ΔΕ.
- (a) Le système de numération imaginé par Archimède est fondé sur les mêmes principes que le nôtre. Au lieu de nos neuf chiffres significatifs, il se sert des lettres de l'alphabet. Sans doute Archimède avoit un caractère qui lui tenoit lieu de notre zéro. Dans son système, comme dans le nôtre, les unités des caractères dont il se sert forment une progression géométrique dont la raison est dix. La seule différence consiste en ce que les unités sont à gauche au lieu d'être à droite. Voyez le Tableau du système d'Archimède comparé avec le nôtre.
- (μ) C'est la propriété fondamentale des logarithmes, et c'est par le moyen de cette propriété qu'Archimède va exécuter tous ses calculs.
- (v) Puisque $\Delta : A :: A : \Theta$, on aura $A \times A = \Theta \times A$. Mais $A = A \times A$; donc $A \times A = \Theta \times A \times A$; donc $A = \Theta \times A$.

IMÈDE, C



RIODE.

Es	ES SIXIÈMES.					NOMBRES ECONDS.							NOMB. TROISIÈM.					
3	1	5	2	8	7	5	9	3	18	5	7	1	6	4	3	8	1	9
Mille.	3.11	Myriades.	Dixaines de myriades.	Centaines de inyriades.	Mille myriades.	Unités.	Dixaines.	Centaines.	Myriades. Mille.	Dixaines de myriades.	Centaines de myriades.	Mille myriades.	Unités.	Dixaines.	Centaines.	Mille.	Myriades.	Dixaines de myriades.
			Quatuordécillious.			Quindecillions.			Sexdécillions.									

(i) J'ai supposé, d'après Archimède, que le diamètre d'une graine de pavot étoit la quarantième partie de la largeur d'un doigt; qu'une graine de pavot contenoit 10,000 grains de sable; qu'un stade valoit 10,000 doigts, et que le diamètre de la sphère des étoiles fixes étoit de 10,000,000,000 stades. J'ai fait les calculs, et j'ai trouvé que le nombre des grains de sable contenus dans la sphère des étoiles fixes seroit de 64 suivi de 61 zéros. Ainsi Archimède a raison de dire que ce nombre est plus petit que 100 suivi de 61 zéros, c'est-à-dire plus petit que mille myriades des nombres huitièmes.

FIN DU COMMENTAIRE SUR L'ARÉNAIRE.

COMMENTAIRE

SUR LES

CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

LIVRE PREMIER.

PROPOSITION III.

- (a) C'est-A-DIRE, si un corps qui a la même pesanteur spécifique qu'un fluide est abandonné dans ce fluide.
- (6) Ce parallélogramme n'est point une surface plane, mais bien une portion de la surface de la sphère comprise entre quatre arcs de grands cercles.

PROPOSITION VIII.

(a) Voyez la prop. 8 de l'Equilibre des Plans.

PROPOSITION IX.

(a) Voyez la note (a) de la prop. 8.

LIVRE SECOND.

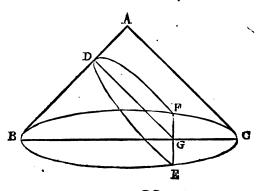
PROPOSITION II.

- (a) Un segment droit d'un conoïde est celui dont l'axe est perpendiculaire sur sa base.
- (6) Archimède ne considère ici la parabole que dans le cône rectangle. (Voyez la note (2) de la lettre à Dosithée qui est à la tête du Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes.) Cette parabole est telle que son demi-paramètre est égal à la droite placée entre son sommet et le sommet du cône. Voilà pourquoi le demi-paramètre est appelé par lui la droite jusqu'à l'axe.

En effet, soit le cône droît et rectangle ABEC. Coupons ce cône par l'axe, et que la section soit le triangle ABC. Par le point D conduisons un plan perpendiculaire sur le plan du triangle ABC, et parallèle à AC. La section EDF sera une parabole. Nommons y, l'ordonnée EG; x, l'abscisse DG, et p le paramètre. Les triangles semblables BAC, BDG donnent DA: GC:: DB ou DG ou x: BG. Donc DA $=\frac{GC \times x}{BG}$. Mais

BG =
$$\sqrt{2x^2}$$
; donc DA = $\frac{GC \times x}{\sqrt[4]{2x^4}}$; mais $y^* = \frac{GC \times x}{\sqrt[4]{2x^4}}$

232 DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE. px, et $y^* = BG \times GC$; donc $px = BC \times GC$ $= \sqrt{2x^2} \times GC$. Donc $GC = \frac{px}{\sqrt{2x^2}}$. Donc au



lieu de l'équation DA = $\frac{GC \times x}{\sqrt{2x^2}}$, nous aurons

$$DA = \frac{px^a}{\sqrt{2x^a} \times \sqrt{2x^a}} = \frac{px^a}{2x^a} = \frac{p}{2}. \text{ Donc DA est}$$
égal à la moitié du paramètre.

Il est évident qu'à mesure que le point D s'éloigne du point A, le demi-paramètre et par conséquent le paramètre augmente; qu'au point A le paramètre est infiniment petit, et qu'à une distance infiniment grande du point A, le paramètre sera infiniment grand. D'où il suit que la section d'un cône rectangle peut donner toutes les paraboles possibles. Donc ce qu'Archimède dit de la parabole qui est la section d'un triangle rectangle, et par conséquent ce qu'il dit aussi d'un segment droit d'un co-

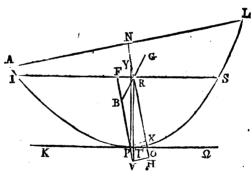
noïde parabolique convient à toutes sortes de paraboles et à toutes sortes de conoïdes paraboliques.

- (γ) Dans le premier livre toutes les constructions se faisoient par rapport au centre de la terre; on y considéroit par conséquent la surface d'un fluide en repos comme étant une surface sphérique. Pour plus de simplicité, Archimède considère, dans le second livre, la surface d'un fluide en repos comme étant une surface plane, et par conséquent la section de cette surface par un plan est considérée comme étant une ligne droite.
- (1) Frédéric Commandin a démontré le premier dans son Traité du Centre de gravité des Solides (prop. 29), que le centre de gravité d'un conoïde parabolique est un point de l'axe qui le divise, de manière que la partie qui est vers le sommet est double de la partie qui est vers la base; de cette manière le point R étant le centre de gravité du conoïde parabolique APOL, la droite OR est double de la droite RN; et le point B étant le centre de gravité du conoïde IPOS, la droite PB est double de la droite BF. D'où il suit que la droite NO est égale à trois fois la moitié de RO, et PF égal à trois fois la moitié de PB.

28

Archimède regarde comme démontré que le centre de gravité d'un conoïde parabolique est aux deux tiers de son axe à partir du sommet. Cela n'est démontré dans aucun des ouvrages existans d'Archimède, ni dans aucun des ouvrages des géomètres anciens; d'où je conclus que l'ouvrage où cette proposition étoit démontrée du temps d'Archimède n'est point parvenu jusqu'à nous.

(1) En effet, prolongeons RO jusqu'à ce que KH soit égal au demi-paramètre. Par le point H menons sur HN la perpendiculaire HV; prolongeons FP, et joignons RV. Par le point P menons sur NH la perpendiculaire PX, et par



le point P menons sur KQ la perpendiculaire PY. La droite XY, qui est la sous-normale, sera égale à RH, puisque la sous-normale est égale à la moitié du paramètre, la droite PX est égale à VH, et les angles sont droits en X et en

- H. Donc les deux triangles PXY, VHR sont égaux. Donc les droites PY, VR sont parallèles; mais PY est perpendiculaire sur $K\Omega$; donc RV est aussi perpendiculaire sur $K\Omega$. Donc l'angle RP Ω est aigu; donc la perpendiculaire abaissée du point R sur $P\Omega$ passe entre P et Ω . Donc la droite RT ne rencontrera la droite FP que hors de la parabole.
- (¿) D'après la proposition 6 du premier livre, et d'après la seconde hypothèse du même livre, la partie du conoïde qui est dans le fluide est portée en haut suivant la verticale qui passe par le point B avec la même force que la partie qui est hors du fluide est portée en bas, suivant la verticale qui passe par le point G, jusqu'à ce que le conoïde ait une position verticale. En effet, les deux parties du conoïde ayant alors leurs centres de gravité dans l'axe du conoïde qui aura une position verticale, la partie qui est dans le fluide tendra à monter avec la même force que celle qui est hors du fluide tendra à descendre. Donc ces deux forces se détruiront; donc le conoïde restera en repos.

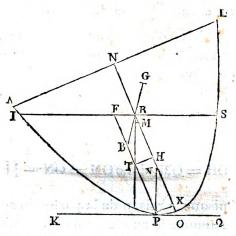
PROPOSITION IIL

(a) Il seroit inutile d'avertir que le segment est supposé plus léger que le fluide.

PROPOSITION IV.

- (a) Puisque NO = $\frac{3}{2}$ RO, et MO = $\frac{3}{2}$ OH, on aura NO MO = $\frac{3}{2}$ RO $\frac{3}{2}$ OH, ou bien NM = $\frac{3}{2}$ (RO OH) = $\frac{3}{2}$ RH.
- (6) En effet, lorsque MO augmente, la droite NM diminue, et par conséquent \(\frac{1}{2}\) RH; et lorsque \(\frac{1}{2}\) RH ou RH, c'est-\(\frac{1}{2}\) dire le demi-paramètre, diminue, l'excès de l'axe sur le demiparamètre devient plus grand.
- (1) Car PF n'étant pas plus petit que MO, la droite BP qui est égale aux deux tiers de BF, ne sera pas plus petite que la droite HO, qui est égale aux deux tiers de MO.
- (e) La perpendiculaire HT tombera entre B et P. En effet, menons une tangente à la parabole au point O, cette tangente sera hors de la parabole, et la droite HO sera égale à la droite PT prolongée jusqu'à la tangente. D'où il suit que si la droite BP prolongée jusqu'à la tangente étoit égale à HO, la perpendiculaire menée par le point H passeroit par le point B. Mais la droite BP prolongée jusqu'à la tangente, est plus grande que HO, puisque BP n'est pas plus peut que HO; donc la perpendiculaire menée par le point H tombe entre B et P.

(ζ) Pour démontrer que la droite RT prolongée fera des angles droits avec la tangente $K\Omega$, élevons du point P une perpendiculaire PV sur $K\Omega$, et abaissons du point P une perpendiculaire PX sur NO. La sous-normale VX



est égale au demi-paramètre RH; la droite PX est égale à la droite TH, et les angles sont droits en X et en H. Donc les deux triangles VXP, RHT sont égaux. Donc NP est parallèle à RT. Mais NP est perpendiculaire sur $K\Omega$; donc RT prolongé sera aussi perpendiculaire sur $K\Omega$.

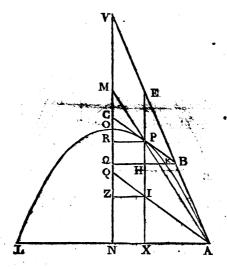
PROPOSITION V.

- (a) On a supposé que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas plus grande que la raison de \overline{NO} (NO $\frac{3}{4}$ RH) à \overline{NO} . Pour faire voir que la seconde supposition est la même que la première, il suffit de démontrer que MO est égale à NO moins $\frac{3}{4}$ HR. En effet, OH = OR HR. Mais OR = $\frac{2}{3}$ ON; donc OH = $\frac{2}{3}$ ON HR. Ce qui donne $\frac{3}{4}$ OH = ON $\frac{3}{4}$ HR. Mais $\frac{HO}{2}$ = HM; donc $\frac{3}{4}$ OH = OM; donc OM = ON $\frac{3}{4}$ HR.
- (6) Puisque la raison de la partie du segment qui est submergée au segment entier, n'est pas plus grande que la raison de $\overline{\text{NO}}$ $\overline{\text{MO}}$ à $\overline{\text{NO}}$, par inversion, la raison du segment entier à la partie du segment qui est submergée, ne sera pas plus grande que la raison de $\overline{\text{NO}}$ à $\overline{\text{NO}}$ $\overline{\text{MO}}$. Donc, par soustraction, la raison du segment entier à la partie qui n'est pas submergée, n'est pas plus grande que la raison de $\overline{\text{NO}}$ à $\overline{\text{MO}}$.
 - (γ) Prop. 26 des Conoïdes et des Sphéroïdes.

PROPOSITION VI.

(a) La démonstration de cette proposition ne se trouve ni dans Archimède ni dans aucun des Géomètres anciens. La démonstration suivante est de Torelli.

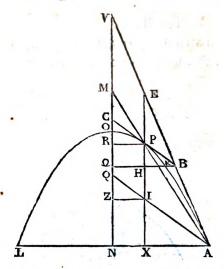
La construction restant la même, que les droites ΩK , CP se rencontrent au point B; et



par le point B menons la droite BV tangente à la parabole.

D'abord que la droite BV touche la parabole au point A, et rencontre les diamètres IP, NO aux points E, V. Que les droites BP, AI rencontrent le diamètre NV aux points C, Q.

Par les points P, I, menons les droites PR, IZ parallèles à AL, et que ces droites rencontrent NO aux points R, Z. Enfin, menons AP, et que cette droite rencontre NV au point M. La droite IP sera égale à PE, la droite NO à OV

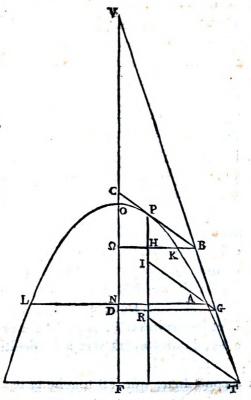


et la droite RO à OC. (Prop. 35 et cor. de la prop. 51 du liv. 1 d'Apoll.) Mais à cause des parallèles EH, VΩ, la droite EP sera à la droite VC comme BP est à BC; c'est-à-dire, comme BH est à CΩ; et à cause des droites égales EP, PI, et par construction, la droite VM sera égale à la droite MQ. Mais RZ est égal à IP ou à EP; donc RZ est à VC comme PH est à CΩ. Mais CV est égal à RN; donc RZ est à RN comme RΩ est à CΩ. Donc, par soustraction, RZ est à ZN.

comme KΩ est à CR. Mais IP est à CM comme AP est à PM, et AP est à PM comme AX est à XN ou IZ, c'est-à-dire, comme IX ou ZN est à QZ; donc à cause des droites égales IP, RZ, la droite RZ est à CM comme ZN est à QZ. Donc, par permutation, la droite RZ est à la droite ZN comme CM est à QZ. Mais à cause des droites égales IZ, PR, et à cause des parallèles IZ, PR et IQ, PC, les droites QZ, CR seront égales entre elles. Donc RΩ est à CR comme CM est à CR. Done les droites CM, R Ω sont égales entre elles. De plus, la droite AV est à BV comme VN est à VΩ, et comme VQ est à VC. Donc si l'on divise les antécédens par deux, la droite VO sera à la droite OΩ comme VM est à VC. Donc, par soustraction, la droite VO est à la droite OQ comme VM est à MC; c'est-à-dire que NO est à $Q\Omega$ comme QM est à MC. Donc, par soustraction, la droite $N\Omega$ est à la droite $\Omega\Omega$ comme QC est à CM. Donc, puisque les droites QC, PC et les droites CM, KQ, PH sont égales entre elles, la droite $N\Omega$ sera à la droite $O\Omega$ comme PI est à PH.

En second lieu, que VB touche la parabole en T, et conduisons la droite TR parallèle à AI ou à CB; et que la droite TR rencontre PI en R. Menons TF parallèle à AN ou à ΩK, et que TF rencontre ON au point F. Prolongeons IA, et que son prolongement rencontre la tangente

BT au point G. Menons la droite GD parallèle à AN, et que GD rencontre ON au point D. A cause des parallèles ΩB, DG, FT et PB, IG, RT,



la droite $D\Omega$ sera à la droite $F\Omega$ comme BG est à BT; et BG sera à BT comme PI est à PR. Donc $D\Omega$ est à $F\Omega$ comme PI est à PR. Mais on démontrera comme on l'a fait plus haut que $F\Omega$ est à ΩO comme PR est à PH; donc $D\Omega$ est à

 Ω O comme PI est à PH. Mais la raison de $\Omega\Omega$ à Ω O est plus grande que la raison de $\Omega\Omega$ à Ω O; donc la raison de la droite PI à la droite PH est plus grande que la raison de la droite $\Omega\Omega$ à la droite $\Omega\Omega$.

(c) Car puisque NO: $F\Omega$:: 15: 4, la droite $F\Omega = \frac{4 \times NO}{15} \cdot \text{Donc } N\Omega = NF + F\Omega = \frac{NO}{3} + \frac{4 \times NO}{15} = \frac{9 \times NO}{15} \cdot \text{Donc } O\Omega = NO - \frac{9 \times NO}{15} = \frac{6 \times NO}{15} \cdot \text{Donc } N\Omega : \OmegaO :: \frac{9 \times NO}{15} : \frac{6 \times NO}{15} :: 9: 6:: 3: 2. \text{Donc } N\Omega \text{ est égal à trois fois la moitié de } \OmegaO.$

PROPOSITION VIII.

(a) En effet, puisque la droite BK est donble de la droite KD, la droite BD sera égale à trois fois la moitié de BK. Mais CB est égal à trois fois la moitié de BR; donc BD: CB:: \frac{1}{3} BK: \frac{3}{2} BR :: BK: BR; donc par permutation BD: BK:: CB: BR. Mais le premier terme est au second comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens, c'est-à-dire que BD: BK:: BD — CB: BK — BR:: CD: KR; et BD: BK:: 3: 2; donc CD: KR:: 3: 2; donc CD = \frac{3}{2} KR.

- (6) Car puisque CD est égal à trois fois la moitié du paramètre, la droite CB sera l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du paramètre. Mais par supposition la raison du quarré de FQ au quarré de DB est la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide; et la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du quarré de CB au quarré de BD; donc la raison du quarré de FQ au quarré de DB est moindre que la raison du quarré de CB au quarré de BD; donc le quarré de FQ est plus petit que le quarré de CB; donc la droite FQ est plus petite que la droite CB.
- (γ) Dans la parabole, le quarré de l'ordonnée est égal au rectangle compris sous le paramètre et l'abscisse, ou au rectangle compris sous le demi-paramètre et sa soutangente. Donc PI = KR × IY; donc PI: IY :: KR × IY: IY :: KR : IY.
- (J) Car puisqu'on a supposé que $\overline{E\Psi} = \frac{KR \times \Psi B}{2}$, on aura $\overline{E\Psi} : \overline{\Psi B} :: \frac{KR \times \Psi B}{2} : \overline{\Psi B} :: \frac{KR}{2} : \Psi B$.

PROPOSITION IX.

(a) Puisque la raison de la partie submergée du segment au segment entier est la même que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD, par inversion et par soustraction la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide sera la même que la raison du quarré de BD au quarré de FQ.

PROPOSITION X.

- (a) Parce que lorsqu'un point de la base touche la surface du fluide, la base peut être toute entière hors du fluide, ou toute entière dans le fluide.
- (c) En-effet, puisque BD est égal à trois fois la moitié de BK, et que DS est aussi égal à trois fois la moitié de KR, on aura BD: DS:: \(\frac{3}{2} \) BK: \(\frac{3}{2} \) KR:: BK: KR; ou par permutation BD: BK:: DS: KR; done BD: BK:: BD—DS: BK—KR:: SB: BR. Mais BD = \(\frac{3}{2} \) BK; done SB = \(\frac{3}{2} \) BR.
- (γ) Voyez la note (ε) de la lettre à Dosithée, qui est à la tête du Traité des Conoïdes.

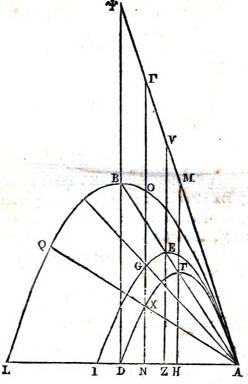
(A) Puisque BK = 2KD, on aura BC + CK = $(CD - CK) \times 2$, d'où l'on déduit CK = $\frac{2CD - BC}{3}$. Mais KC: DB:: 4:15; donc KC = $\frac{4DB}{15} = \frac{4BC + 4CD}{15}$. Donc $\frac{2CD - BC}{15} = \frac{4BC + 4CD}{15}$, ou bien 2CD = 3BC, ce qui donne la proportion suivante CD: BC:: B:2. Mais CD: CB:: AE: EB:: AZ: ZD; donc AZ: ZD:: 3:2. Mais DB: BK:: 3:2; donc la parabole AEI passe par le point K. (Traité de la Parabole, propos. 4.)

(a) En effet, que la droite NY soit tangente à la parabole ABL, et qu'elle rencontre les droites DB, NO, ZE, HT aux points Y, T, V, M, la droite BE sera à la droite EZ comme DA est à AZ. (Apoll. liv. v1, prop. 11.) Donc BD: EZ:: DY: ZV. Mais la droite DY est double de la droite BD; donc la droite sera ZV double de la droite EZ. Donc la droite AY est tangente à la parabole AEI. On démontrera de la même manière que la droite AY est tangente à la parabole ATD.

D'après la proposition 5 du Traité de la Parabole, on a les proportions suivantes, AL: AN:: NΓ: ΓΟ; IA: AN:: NΓ: ΓG, et AD: AN:: NΓ: ΓΧ, et ces proportions donnent ΓΟ =

$$\frac{\text{AN} \times \text{N}\Gamma}{\text{AL}}; \Gamma G = \frac{\text{AN} \times \text{N}\Gamma}{\text{IA}}, \text{et } \Gamma X = \frac{\text{AN} \times \text{N}\Gamma}{\text{AD}}.$$

$$\text{Mais } OG = \Gamma G - \Gamma O = \frac{\text{AN} \times \text{N}\Gamma}{\text{IA}} - \frac{\text{AN} \times \text{N}\Gamma}{\text{AL}},$$



et GX =
$$\Gamma$$
X - Γ G = $\frac{AN \times N\Gamma}{AD}$ - $\frac{AN \times N\Gamma}{IA}$;
donc GG : GX :: $\frac{AN \times N\Gamma}{IA}$ - $\frac{AN \times N\Gamma}{AL}$:

$$\frac{AN \times N\Gamma}{AD} - \frac{AN \times N\Gamma}{IA} :: \frac{I}{AI} - \frac{I}{AL} : \frac{I}{AD} - \frac{I}{IA}$$

$$:: \frac{AL - IA}{IA \times AL} : \frac{IA - AD}{AD \times IA} :: \frac{IL}{AL} : \frac{ID}{AD} :: IL \times AD : LA \times DI; donc la raison de OG à GX est composée des raisons de IL à LA et de AD à ID.$$

- (?) On a démontré que DC: CB:: 3:2; donc par addition DC ou ZE: DB:: 3:6. Mais à cause des paraboles semblables AEI, ABL, on a ZE: DB:: AI: AL; donc AI: AL:: 3:5; donc LA—AI: LA:: 5—3:5; c'est-à-dire IL: LA:: 2:5.
- (n) On a démontré que AZ: ZD:: 3: 2; donc AZ + DZ: ZD:: 5: 2; c'est-à-dire que AD: ZD:: 5: 2. Mais LA: LI:: 5: 2; donc LA: LI:: AD: DZ. Mais LA est double de AD; donc LI est double de DZ; donc les droites LI, LA sont doubles des droites DZ, DA.

Puisque BD: DC:: 15:9::30::18, on aura $\frac{BD}{2}:DC::\frac{BO}{2}:18$ ou bien TH: DC:: 15::18:: 5:6. Mais à cause de paraboles semblables, TH: BC ou EZ:: AD: AI; donc AD: AI:: 5:6; donc AD: AI — AD:: 5:6— 5, c'est-à-dire que AD: DI:: 5:1.

SECONDE PARTIE DE LA PROPOSITION 10.

- (a) Première partie de la prop. 10.
- (6) D'après la prop. 5 de la Quadr. de la Par. (fig. de la note (s) de la prop. 10), on a LN: NA :: NO : OΓ, et par addition LA : NA :: NΓ : OΓ; donc NA $= \frac{\text{LA} \times \text{O}\Gamma}{\text{N}\Gamma}$. Mais d'après la même proposition on a encore DA: NA:: N Γ : X Γ ; donc NA = $\frac{DA \times X\Gamma}{N\Gamma}$; donc $\frac{LA \times O\Gamma}{N\Gamma}$ = $\frac{DA \times X\Gamma}{N\Gamma}$, ou bien $LA \times O\Gamma = DA \times XL$; donc LA : DA:: XI : OI. Mais LA est double de DA; done $X\Gamma$ est double de $O\Gamma$; donc $XO = O\Gamma$. Menons la droite AX et prolongeons-la jusqu'en Q. D'après la prop. 5 du Traité de la Parabole, on a QX : XA :: XO : O Γ . Mais XO = O Γ ; done QX = XA; donc dans la figure de la seconde partie, AN = 00.

TROISIÈME PARTIE DE LA PROPOSITION 10.

(a) Cela est évident; car si la droite menée du point M au point I étoit menée au point A, cette dernière droite feroit avec l'axe un angle aigu plus petit que celui que fait la droite MI avec l'axe. Mais alors le segment retranché se-TOME IL

29

roit plus grand que le segment AOQ. Pour que le premier segment devînt égal au second, il faudroit que la droite menée du point A au point M tournât autour du point A, en s'approchant du point B; donc l'angle aigu formé par l'axe et par la droite menée par le point A, diminueroit encore. D'où je conclus que la droite menée du point A fait avec l'axe un angle aigu plus petit que l'angle que fait avec l'axe la droite menée du point I.

(6) Voyez la seconde partie.

FIN DU COMMENTAIRE SUR LES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

COMMENTAIRE

SUR

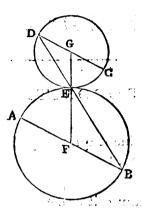
LE LIVRE DES LEMMES.

PROPOSITION L

- (a) In est évident que le rayon FG prolongé ira au point de contact.
- (6) Le manuscrit arabe ne parle que du cas où les circonférences du cercle se touchent intérieurement; et cependant comme le cas où les cercles se touchent extérieurement est nécessaire dans la suite, je vais le démontrer.

Que les deux cercles ABE, DCE se touchent extérieurement au point E, et que leurs diamètres DC, AB soient parallèles. Joignons DE, EB. Je dis que la ligne DEB est une ligne droite. Joignons les centres de ces cercles par la droite GF; cette droite passera par le point de contact E. Puisque les droites DC, AB sont parallèles, l'angle DGE sera égal à l'angle EFB; mais les triangles DGE, EFB sont isolés. Donc

les angles GDE, GED sont égaux entre eux et aux angles FEB, FBE. Donc l'angle GED est égal à l'angle FEB. Donc la somme des angles GED, GEB est ègale à la somme des angles FEB, BEG. Mais la somme des angles FEB,



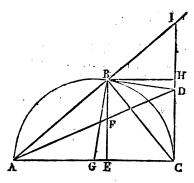
BEG est égale à deux angles droits; donc la somme des angles DEG, GEB est aussi égale à deux droits; donc la ligne DEB est une ligne droite. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

(a) Cette proposition a deux cas, le premier a lieu lorsque la perpendiculaire BE passe par le centre, et le second lorsque cette perpendiculaire ne passe pas par le centre. La démonstration du manuscrit arabe ne comprend que le premier cas; la démonstration suivante qui comprend les deux cas est de Torelli.

Que CBA soit un demi-cercle; que les droites DC, DB soient des tangentes; que BE soit perpendiculaire sur AC; menons la droite AD qui rencontre la droite BE au point F; je dis que BF sera égal à FE.

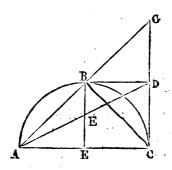
Menons la droite AB, et que cette droite prolongée rencontre CD au point I. Du point G, qui est le centre du demi-cercle CBA, menons



GB, et du point B la droite BH parallèle à AC. Puisque l'angle EBH est égal à l'angle GBD, si l'on supprime l'angle commun EBD, l'angle DBH sera égal à l'angle GBE. Mais l'angle IBH est égal à l'angle ABG, puisqu'ils sont chacun égal à l'angle IAC; donc l'angle IBD, qui est composé des deux angles DBH, IBH est égal à l'angle ABE qui est composé des deux angles GBE, ABG. Mais l'angle BID est égal à l'angle

ABE; donc l'angle IBD est égal à l'angle BID; car les choses qui sont égales à une troisième sont égales entr'elles; donc la droite BD est égale à la droite ID. Mais les droites BD, DC sont égales entr'elles; donc les droites ID, DC seront aussi égales entr'elles. Mais les triangles AID, ABF sont semblables, ainsi que les triangles AIC, ABE, et encore les triangles ADC, AFE; donc ID est à BF comme DC est à FE. Donc par permutation ID est à DC comme BF est à FE. Mais ID est égal à DC; donc BF est aussi égal à FE, ce qu'il falloit démontrer.

(6) En effet, l'angle DCB est égal à l'angle DBC, à cause de l'égalité des droites DB, DC.



Mais l'angle DBG a pour complément l'angle DBC, et l'angle DGB a pour complément l'angle DCB, c'est-à-dire l'angle DBC; donc les deux angles DBG, DGB ont le même complément. Donc ils sont égaux. Donc le côté GD est égal

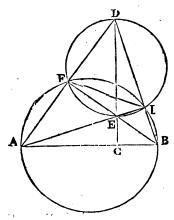
au côté DB. Mais le côté DB est égal au côté DC; donc GD est égal à DC.

PROPOSITION IV.

(a) Puisque AD × DC = \overline{BD} , si nous ajoutons de part et d'autre AD × DC + \overline{AD} + \overline{DC} , nous avons \overline{AD} + 2 AD × DC + \overline{DC} = \overline{BD} + \overline{AD} × DC + \overline{AD} + \overline{DC} , c'est-à-dire \overline{AC} = 2 × \overline{BD} + \overline{AD} + \overline{DC} .

PROPOSITION V.

(a) Soit le triangle ABD ayant un angle aigu



en D. Menons les droites AI, BF perpendiculaires sur les côtés BD, AD, et par les points

D, E conduisons la droite DC; je dis que la droite DC est perpendiculaire sur sa droite AB.

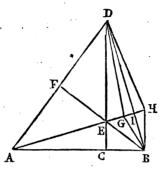
Autour de AB comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle; cette circonférence passera par les points F, I, à cause des angles droits AFB, AIB. Autour de DE, comme diamètre, décrivons aussi une circonférence de cercle, cette circonférence passera aussi par les points F, I, par la même raison.

Joignons FI. L'angle EDI est égal à l'angle IFE, parce que ces deux angles sont compris dans le même segment. Mais l'angle IFB est égal à l'angle BAI par la même raison; donc les deux angles BAI, BDC sont égaux; donc les deux triangles BAI, BDC sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal de part et d'autre et un angle commun en B. Mais l'angle BIA est droit; donc l'angle BCD est droit aussi; donc la droite DC est perpendiculaire sur AB.

Il suit évidemment de là que si des trois angles d'un triangle, on mène des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces trois perpendiculaires se couperont en un seul et même point.

Supposons à présent que DC soit perpendiculaire sur AB, que BF soit perpendiculaire sur AD, et que AI soit perpendiculaire sur BI; joignons ID; je dis que la ligne BID est une ligne droite.

Que cela ne soit point. La droite qui joindra les points B, D passera du côté G ou du côté H. Supposons d'abord qu'elle passe du côté G



et qu'elle soit BGD; l'angle BGA sera droit. Mais l'angle BIA est droit par supposition; donc l'angle extérieur BGA est égal à l'angle intérieur opposé BIA, ce qui est absurde. Supposons qu'elle passe du côté H et qu'elle soit BHD; l'angle BHA sera droit. Mais l'angle BIH est droit aussi; donc l'angle extérieur BIA est égal à l'angle intérieur opposé BHA, ce qui est encore absurde. Donc la droite qui joint les points B, D ne passe ni du côté G ni du côté H; donc elle passe par le point I; donc la ligne BID est une ligne droite.

(6) Car puisque les droites AC, HE sont parallèles, la droite AD est à DH comme AC est à HE, et que les droites DB, HC sont aussi

parallèles, la droite AD est à DH comme AB est à BC; donc la raison de AD à DH, la raison de AC à HE et la raison de AB à BC sont égales entr'elles.

PROPOSITION VI.

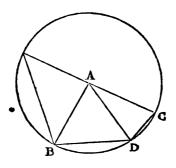
- (a) Voyez la note (a) de la proposition précédente.
- (6) Cette proposition pouvant se démontrer généralement, il étoit fort inutile de prendre des nombres pour exemple.

PROPOSITION XII.

(a) Soit le quadrilatère ABDC, de manière que AB soit égal à AC, et que l'angle BDC soit égal aux deux angles ABD, ACD pris ensemble. Je dis que AD est égal à AB ou à AC.

Prolongeons CA jusqu'à ce que son prolongement AE soit égal à AC, et joignons EB. Puisque AE est égal à AB, l'angle AEB est égal à l'angle ABE. Donc l'angle BDC avec l'angle AEB est égal aux trois angles DCA, DBA, ABE pris ensemble, c'est-à-dire aux deux angles DCA, DBE. Mais les quatre angles d'un quadrilatère valent quatre angles droits; donc deux angles opposés du quadrilatère BDCE valent

deux angles droits. Donc on peut circonscrire une circonférence de cercle au quadrilatère BDCE. Mais les trois droites AC, AB, AE sont

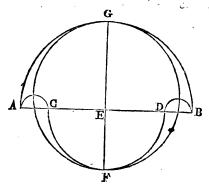


égales; donc le point A est le centre de la circonférence DCE. Donc AD est égal à AB ou à AC.

PROPOSITION XIV.

(a) En effet, puisque DA est égal à 2 EC + CA, le quarré de DA égalera 4 EC + 4 EC × CA + CA; et puisque EA est égal à EC + CA, le quarré de EA égalera EC + 2 EC × AC + CA. Donc la somme des quarrés des droites DA, CA égalera 4 EC + 4 EC × CA + CA + CA, et la somme des quarrés des droites DE, EA égalera EC + EC + 2 CD × AC + CA,

c'est-à-dire que la somme des quarrés des droites DE, BE égalera $2 EC + 2 EC \times CA + \overline{CA}$.



D'où il suit que la somme des quarres des droites DA, CA est double de la somme des quarres des droites DE, EA.

PROPOSITION XV.

- (a) Car les deux angles BCD, BGD ont chacun pour supplément l'angle BAD.
 - (6) Euclide, liv. 1v, prop. 11.

FIN DU COMM. SUR LES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

MIROIR ARDENT,

PAR LE MOYEN DUQUEL ON PEUT RÉFLÉCHIR ET FIXER, GUR UN OBJET EN REPOS OU EN MOUVEMENT, LES RAYONS SOLAIRES, EN AUSSI GRANDE QUANTITÉ QUE L'ON FEUT;

PAR F. PEYRARD,

Professeur de Mathématiques au Lycée Bonaparte.

Ce Miroir ardent est approuvé par la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Institut.

RAPPORT

Fait à l'Institut national, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques, sur un MIROIR ARDENT, présenté à la Classe par M. Peyrard.

M. PEYRARD, qui publie une belle Traduction des Œuvres d'Archimède, a dû naturellement s'occuper du moyen dont on dit que ce grand Géomètre se servit pour incendier la flotte de Marcellus devant Syracuse. Les anciens et les auteurs du moyen âge disent qu'il employa un Miroir ardent; mais aucun d'eux . n'entre à cet égard dans des détails suffisans pour nous donner une connoissance exacte de son procédé. Anthémius qui, dans le sixième siècle, bâtit l'église de Sainte-Sophie à Constantinople, et qui paroît avoir été un Architecte très-éclairé, imagina un assemblage de Miroirs plans qui devoit produire le même effet que le Miroir d'Archimède. Depuis cette époque, Kircher, qui peut-être n'avoit pas connoissance des ouvrages d'Anthémius, imagina quelque chose de pareil. Enfin, dans ces derniers temps, M. de Buffon a exécuté un Miroir ardent composé de cent soixantehuit glaces planes, et tout le monde connoît les expériences auxquelles il l'a employé. Ces trois procédés, qui reviennent absolument au même, ont des inconvéniens assez graves.

Pour qu'un Miroir réfléchisse en un même point les rayons du soleil, regardés comme parallèles entr'eux, on sait que sa surface réfléchissante doit faire partie de celle d'un paraboloïde de révolution, dont l'axe soit parallèle aux rayons de lumière, et dont le foyer soit un point de réunion. Si le Miroir doitêtre composé d'un grand nombre de Miroirs plans d'une grandeur médiocre, il faut que les plans de ces derniers soient parallèles, chacun au plan tangent à la surface du paraboloïde, au point où elle est coupée par le rayon vecteur correspondant. Or, en vertu du mouvement du soleil, la position de l'axe du paraboloïde change d'une manière assez rapide. Il faut donc, si la forme du Miroir est invariable, que ce Miroir tourne tout entier avec le soleil autour du foyer, ce qui paroît impraticable; et si les élémens dont il est composé sont mobiles, indépendamment les uns des autres, il faut que chacun de ces élémens plans tourne de manière qu'il soit constamment perpendiculaire à la droite, qui partage en deux parties égales l'angle formé par le rayon du soleil et le rayon vecteur correspondant.

Il paroît difficile de donner aux Miroirs élémentaires le mouvement dont il s'agit, au moyen d'une machine, moins peut-être parce que les changemens de déclinaison du soleil rendroient cette machine compliquée, que parce que la dilatation des verges métalliques qui transmettroient le mouvement, changeroit d'une manière notable et imprévue les directions des Miroirs élémentaires, et parce que les engrenages inévitables donneroient à ces Miroirs un mouvement de

SUR UN MIROIR ARDENT. 465

vibration, qui mettroit les images individuelles dans une agitation perpétuelle.

Il ne reste donc d'autre moyen raisonnable de composer un Miroir ardent de plusieurs Miroirs plans, que de confier chacun de ces derniers à une personne individuellement chargée de le maintenir dans la position où il doit être pour réfléchir l'image du soleil sur un point déterminé, et de varier cette position conformément au mouvement du soleil. Mais M. Peyrard observe avec raison que ce moyen a un inconvénient qui s'oppose entièrement à son succès. Il est bien facile, à la vérité, à une personne seule, attentive et commodément placée, de diriger sur un point déterminé l'image du soleil réfléchie par un Miroir d'une grandeur médiocre, et de l'y maintenir malgré le mouvement du soleil ; la difficulté ne seroit même pas bien grande pour trois ou quatre personnes qui seroient chargées de faire en même temps la même chose. Mais si 50, 100, 200 personnes, doivent former de cette manière un foyer ardent, comme aucune d'elles ne peut distinguer l'image qu'elle envoie de celle qu'envoient les autres, si une seule de ces images s'écarte du foyer, chacun des coopérateurs veut s'assurer si c'est la sienne; il en résulte une agitation et un désordre qui empêchent le foyer de se former. C'est à cet inconvénient que M. Peyrard s'est proposé de parer, et qu'il évite entièrement d'une manière fort ingénieuse. Pour cela, il garnit chacun de ses Miroirs d'un équipage peu compliqué et que nous allons décrire.

Une petite lunette portée par un trépied, et garnie TOME 11. 30

de deux fils qui se croisent aux foyers des verres, peut être faoilement dirigée vers le point sur lequel on veut porter l'image. On la maintient dans cette direction par deux vis. La lunette, sans changer de direction, est mobile sur son axe, entre deux collets, et peut être maintenue dans toutes ses positions autour de cet axe par une autre vis; elle porte en dehors le Miroir qu'elle entraîne avec elle, quand elle tourne autour de son axe, et qui indépendamment de ce mouvement, peut tourner autour d'un axe particulier, perpendiculaire à celui de la lunette. On fait tourner la lunette sur son axe, jusqu'à ce que l'axe particulier du Miroir soit perpendiculaire au plan formé par les rayons incidens et réfléchis, et on la maintient dans cette position par la vis. Enfin, on fait tourner le Miroir sur son axe particulier, jusqu'à ce que les rayons réfléchis soient parallèles à l'axe de la lunette; et on est sûr qu'alors l'image du soleil se porte sur l'objet vers lequel la lunette est dirigée.

Les deux mouvemens dont nous venons de parler s'exécutent l'un après l'autre, et sont susceptibles d'une assez grande précision. D'abord pour le premier, lorsque l'axe particulier du Miroir est perpendiculaire au plan des rayons incidens et réfléchis, le bord du cadre qui est perpendiculaire à l'axe particulier du Miroir porte une ombre qui est dans un plan parallèle à ce-lui des rayons incidens et réfléchis, et par conséquent parallèle à l'axe de la lunette. Ainsi cette ombre doit couper la face d'un index saillant en dehors de la lunette, dans une droite qui est à même distance de l'axe de la lunette qu'en est le bord du cadre. Donc

cette droite étant tracée sur la face de l'index, pour exécuter le premier mouvement, il suffit de faire tourner la lunette sur son axe, jusqu'à ce que l'ombre du cadre du Miroir coïncide avec la droite tracée sur l'index; ce qui est d'une précision assez grande.

Pour le deuxième mouvement, il est clair que quand le Miroir est placé de manière que les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe de la lunette, si sur l'axe particulier du Miroir, et tout près des bords du cadre, on a enlevé le tain de la glace sur un petit trait, le défaut de tain produira une ombre qui fombera sur le milieu de la droite de l'index. Donc ce point du milieu étant marqué d'avance sur l'index, pour exécuter le deuxième mouvement, il suffit de faire tourner le Miroir sur son axe particulier, jusqu'à ce que l'ombre du trait privé de tain tombe sur ce point; ce qui est de la même précision que pour le premier mouvement.

On voit donc que des coopérateurs, en quelque nombre qu'ils soient, peuvent chacun diriger l'image qu'il produit sur le point indiqué pour le foyer, sans s'occuper de ce que font ses voisins, et sans être génés par leurs opérations. Il faut observer d'ailleurs que le mouvement du soleil dans son arc diurne n'est pas assez rapide pour qu'un même coopérateur ne puisse soigner et entretenir la direction de dix Miroirs voisins les uns des autres; ce qui diminue beaucoup l'embarras et les frais qu'entraîneroit cette opération.

Nous concluons que M. Peyrard a apporté dans la construction des Miroirs ardens composés de plusieurs Miroirs plans, une perfection que ces instrumens 468 RAPP. SUR UN MIROIR ARDENT.

n'avoient pas encore acquise, et qui nous paroît digne de l'approbation de la Classe.

Fait au Palais des Arts, le 3 août 1807.

Signé CHARLES, ROCHON, MONGE, Rapporteur.

La Classe approuve ce Rapport, et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original.

Λ Paris, le 4 août 1807.

Le Secrétaire perpétuel, Signé DELAMBRE.

MIROIR ARDENT,

Par le moyen duquel on peut réfléchir et fixer, sur un objet en repos ou en mouvement, les rayons solaires, en aussi grande quantité que l'on veut.

CE miroir ardent est un assemblage de glaces planes étamées. Chacune des glaces qui le composent est disposée de la manière suivante:

Une lunette AB (fig. 1) est mobile sur son axe entre deux collets CC, C' C', qui sont fixes, avec une pièce de métal DD.

La petite ouverture de la lunette est en A et la grande est en B: deux fils se coupent à angles droits au centre de la grande ouverture de la lunette.

Une vis de pression E agit sur la lunette, et la maintient dans la position qu'on veut lui donner.

La lunette est montée sur son pied comme une lunette ordinaire; de sorte qu'on peut diriger son axe vers un point donné : deux vis de pression F et G la maintiennent dans la position qu'on lui veut donner. On pourroit, au lieu des trois vis de pression dont je viens de parler, employer des vis de rappel.

Le milieu de la lunette est surmonté d'un cylindre M' M', dont la base supérieure est parallèle à l'axe de la lunette.

Une branche de ser HHH, ployée en équerre, est fixe avec la lunette.

Une glace encadrée tourne sur deux pivots MM, OO. La droite qui passe par le centre des pivots est tangente à la face postérieure de la glace, et perpendiculaire sur l'axe de la lunette.

Le trait noir NN, qui est occasionné par le défaut de tain, est partagé en deux parties égales par l'axe du miroir.

La grande ouverture de la lunette est surmontée d'une plaque de métal qui est fixe avec elle. Devant cette plaque est une plaque quarrée ZZ, sur laquelle sont tracées les droites XX, YY, qui se coupent à angles droits. La plaque quarrée a une tige qui traverse un trou quarré, pratiqué dans la plaque fixe. La plaque quarrée peut se mouvoir à droite ou à gauche, s'élever ou s'abaisser: un écrou placé derrière la plaque fixe arrête la plaque mobile dans la position qu'on veut lui donner.

La plaque mobile doit être placée de manière que la droite XX prolongée passe par l'axe de la lunette et soit parallèle à l'axe particulier du miroir, et de manière que la distance de la droite YY à l'axe de la lunette soit égale à la distance de la droite IK à ce même axe. La plaque ZZ étant ainsi placée, il est évident que la droite YY sera parallèle à IK, et que la droite menée du point où l'axe de la glace coupe IK au point où XX coupe YY, sera parallèle à l'axe de la lunette.

La pièce Q Q' est un ressort fixe en Q' avec l'équerre. Ce ressort est traversé en Q par la vis RQ. En tournant cette vis, l'extrémité de l'équerre presse le pivot OO sur le cadre de la glace.

L'équerre HHH est surmontée d'un assemblage de pièces représenté dans la figure 2. La pièce ab et le pivot OO sont assemblés d'une manière invariable. L'extrémité de l'équerre et la pièce VV ont un trou quarré qui reçoit le pivot OO. Lorsqu'on détourne la vis de pression T, la pièce ab peut se mouvoir en avant ou en arrière, et lorsqu'on détourne la vis de pression S, la pièce VV peut se mouvoir à droite ou à gauche avec la pièce ab.

Pour donner à l'axe du miroir une position perpendiculaire sur l'axe de la lunette, pour placer la plaque mobile ZZ (fig. 1), de manière que la droite menée du point où l'axe du miroir coupe la ligne IK, au point où XX coupe YY soit parallèle à IK, et enfin pour placer la droite YY parallèle à IK, je me conduis de la manière suivante:

Je place le miroir de manière que la droite IK coupe à angles droits l'axe de la lunette. Je détourne la vis T, et je fais en sorte que le bord inférieur du cadre soit tangent à la surface circulaire M' M', qui est parallèle à l'axe de la lunette. Je tourne ensuite la vis T pour fixer la pièce ab (fig. 2) d'une manière invariable.

Je dirige ensuite l'axe du miroir sur un point d'une surface plane placée à une certaine distance. Il faut que ce point soit dans le plan vertical qui passe par l'œil de l'observateur et par le centre du soleil, et que ce plan soit perpendiculaire sur la surface plane dont nous venons de parler. Par ce point, je mène une droite horizontale, et à partir de ce point, je prends un second point qui soit autant éloigné du premier, que le centre de la glace est éloigné de l'axe de la lunette. Je détourne la vis de pression S. Je fais tourner la lunette sur son axe; le miroir aussi sur son axe particulier, et je fais avancer ou reculer la pièce VV, jusqu'à ce que le centre de l'image réfléchie tombe sur le second point. Je fixe la pièce VV. Je place ensuite la pièce ZZ de manière que l'ombre de la droite IK tombe sur la droite YY, et que l'ombre de MM soit partagée en deux parties égales par la droite XX, et je fixe la pièce ZZ.

Le miroir étant ainsi monté, il est évident que quel que soit le point sur lequel on aura dirigé l'axe de la lunette, l'ombre de NN et par conséquent tous les rayons réfléchis par la surface de la glace seront parallèles à l'axe de la lunette, pourvu que l'ombre de IK tombe sur YY, et que l'ombre de NN soit partagée en deux parties égales par la droite XX.

Le miroir étant ainsi disposé, voici le moyen de s'en servir:

Pour porter l'image du soleil sur un objet donné, il faut, 1°. diriger l'axe de la lunette sur un point de l'objet donné, 2°. faire tourner la lunette sur con axe, jusqu'à ce que l'ombre de la ligne IK tombe sur la ligne YY; 3°. faire tourner le miroir sur son axe particulier, jusqu'à ce que l'ombre de la bande MM soit partagée en deux parties égales par la droite XX.

Ces trois opérations étant faites, il est évident que l'image du soleil tombera sur l'objet donné; ou pour parler plus rigoureusement, le centre de l'image réfléchie, au lieu d'être sur le point de l'objet sur lequel on a dirigé l'axe de la lunette, en sera à une distance égale à celle qui est entre le centre du miroir et l'axe de la lunette.

Si à mesure que le soleil s'avance, on a soin

de maintenir l'ombre de la droite IK sur la droite YY, et l'ombre de NN sur la droite XX, de manière que la droite XX partage l'ombre de NN en deux parties égales, il est évident que l'image conservera sa première position aussi long-temps qu'on le voudra.

Supposons à présent qu'on ait un grand nombre de ces miroirs; que ces miroirs soient placés les uns à côté des autres dans des rangées placées les unes au-dessus des autres; et supposons que ces miroirs soient dirigés chacun par une personne. Il est évident que les images réfléchies par les glaces pourront être portées sur le même objet, et qu'elles pourront y rester fixées aussi long-temps qu'on le voudra.

J'ai dit qu'il faudroit autant de personnes que de miroirs; mais il est aisé de prévoir qu'une seule personne pourroit diriger facilement dix et même vingt minoirs sans craindre le déplacement du foyer, ni la dispersion des images.

Si l'objet sur lequel on veut porter les images du soleil étoit en mouvement, il faudroit nécessairement que chaque miroir fût dirigé par deux personnes: l'une seroit chargée de diriger constamment l'axe de la lunette sur l'objet en mouvement, tandis que l'autre seroit chargée de faire tomber l'ombre de la droite IK sur la droite YY, et l'ombre du pivot NN sur la droite XX, de manière que cette droite partageât l'ombre du pivot en deux parties égales.

Tel est le miroir ardent que j'ai imaginé. La construction en est simple; la manière de s'en servir est facile, et il est hors de doute que par son moyen on peut réfléchir et fixer sur un objet en repos ou en mouvement les rayons solaires, en aussi grande quantité qu'on le veut.

Je vais examiner à present quels sont les effets que mon miroir est capable de produire.

Buffon s'est assuré par plusieurs expériences que la lumière du soleil réfléchie par une glace étamée ne perdoit, à de petites distances, qu'environ moitié par réflexion; qu'elle ne perdoit, à de grandes distances, presque rien de sa force par l'épaisseur de l'air qu'elle avoit à traverser, et que seulement sa force diminuoit en raison inverse de l'augmentation des surfaces qu'elle occuperoit sur des plans perpendiculaires sur les rayons réfléchis (*).

Cela étant accordé, supposons que les glaces de chaque miroir aient chacune cinq décimètres de hauteur sur six décimètres de largeur. Je prends les glaces plus larges que hautes, afin que les images réfléchies aient leurs hauteurs

^(*) Voyez le Supplément de l'Histoire Naturelle de Buffon, édition in-4°., Paris, 1774, tome 1, pages 401 et 405.

à-peu-près égales à leurs largeurs; car les rayons du soleil étant toujours perpendiculaires sur l'axe de chaque glace, tandis qu'ils sont plus ou moins inclinés sur la ligne IK, si les hauteurs des glaces étoient égales à leurs largeurs, lorsque les rayons du soleil ne seroient pas perpendiculaires sur le plan des glaces, les hauteurs des images du soleil seroient toujours plus petites que leurs largeurs.

Pour calculer plus facilement les effets de mon miroir, je suppose que les glaces sont de forme circulaire, ayant un diamètre de cinq décimètres, et qu'elles reçoivent perpendiculairement les rayons solaires. Les images réfléchies par les glaces de mon miroir étant plus grandes que les images réfléchies par ces glaces circulaires, il est évident que mes résultats seront de quelque chose trop petits.

Le diamètre apparent du soleil étant de 32 minutes, il est évident que chaque point d'une glace réfléchit un cône lumineux dont la section par l'axe forme un angle de 32 minutes.

Cela posé, que AB, fig. 3, soit le diamètre d'une glace circulaire; et que ce diamètre soit decinq décimètres. Supposons que la droite CD, menée du centre du soleil sur le centre de cette glace, soit perpendiculaire sur son plan. Par la droite AB et par la droite CD conduisons un plan, et que les droites AE, BF soient les intersections du plan coupant et de la surface du faisceau de la lumière réfléchie par cette glace. Si les droites EA, FB sont prolongées, elles se rencontreront en un point G, et formeront un angle de 32 minutes. En effet, le diamètre apparent du soleil étant de 32 minutes, chaque point de la glace réfléchit nécessairement un cône lumineux dont la section par l'axe forme un angle de 32 minutes. Que la droite HA soit l'axe du cône lumineux réfléchi par le point A de la glace, et la droite KB l'axe du cône lumineux réfléchi par le point B. Il est évident que les angles EAH, FBK seront chacun de 16 minutes. Mais les angles EAH, FBK sont egaux aux angles EGC, FGC, puisque les trois droites HA, CG, KB sont parallèles; donc l'angle EGF est égal à la somme des angles EAH, FBK, qui vaut 32 minutes. Donc l'angle EGF est de 32 minutes.

Il me reste à calculer à quelle distance du miroir l'image réfléchie sera double, triple, quadruple, etc. de la surface de la glace réfléchissante.

Pour cet effet, je calcule d'abord la distance GD, en faisant cette proportion: tang. AGD: R:: AD: GD; ou bien tang. 16': R:: o^{mètre},25; GD; et je trouve que GD est de 53^m,72.

Je cherche ensuite à quelle distance de la glace l'image réfléchie est double, triple, quadruple, etc. de la surface de la glace. Supposons qu'elle soit double en LM, triple en NO, quadruple en EF, etc.

Pour trouver les distances DP, DQ, DC, etc. je me conduis de la manière suivante:

Pour trouver DP je fais cette proportion:

AB: LM:: GD: GP; ou bien 1:2:: (53 m,72)

: GP; à cause que AD est la moitié de LM, lorsque la surface de la glace est la moitié de l'image réfléchie.

Connoissant la valeur de \overline{AP} , j'en prends la racine quarrée; de cette racine, j'en retranche GD, c'est-à-dire 53 m,72, et je trouve 22 m,25. D'où je conclus que l'image réfléchie est double de la surface de la glace lorsqu'elle en est éloignée de 22 m,25.

Pour trouver la distance DQ, on feroit cette proportion: 1:3:: (53 m,72): GQ. Pour trouver les autres distances, on se conduiroit d'une manière analogue.

J'ai calculé ces distances, et j'ai trouvé les résultats suivans:

_	. •
L'image étant	La distance est de
Double	· 22 m.,25
Triple	. 39 ,33
Quadruple	. 53 ,72
Quintuple	. 66 ,41
Sextuple	. 77 ,86
Septuple	. 88 ,41
Octuple	. 98 ,22
Nonuple	-
Décuple	

Il est inutile d'avertir que ces distances seroient doubles, triples, quadruples, etc. si les diamètres de mes glaces, au lieu d'être de cinq décimètres, étoient de dix, de quinze, de vingt, etc. décimètres.

Soit à présent un certain nombre de mes miroirs; et supposons qu'à une très-petite distance les images de ces miroirs réunies sur le même objet soient capables de produire un certain degré de chaleur. Il suit, d'après les résultats que j'ai obtenus, que pour produire le même degré de chaleur à une distance de 22^m,25, de 39^m,33, de 53^m,72, etc. il faudroit doubler, tripler, quadrupler, etc. le nombre des miroirs. Il suit encore, qu'à une des distances calculées plus haut, on peut produire une chaleur au moins égale à celle qui seroit produite par la chaleur du soleil, répétée autant de fois qu'on le voudroit.

Mais combien faut-il répéter de fois la chaleur du soleil pour faire bouillir de l'eau, pour enslammer du bois, pour fondre tel ou tel métal, le calciner, le vaporiser, etc.? Ces différentes questions ne sont pas encore résolues. A l'aide de mon miroir, elles pourroient l'être. Cependant pour satisfaire jusqu'à un certain point la curiosité de mes lecteurs, je vais tâcher de résoudre quelques-unes de ces questions, en prenant pour base les expériences que Buffon a faites avec son miroir ardent.

Les glaces, dont le miroir de Buffon étoit composé, avoient chacune six pouces de hauteur sur huit de largeur. Pour simplifier les calculs, je supposerai d'abord que, lorsque Buffon faisoit ses expériences, chacune des glaces de son miroir produisoit un effet aussi grand que l'auroit fait une glace circulaire de même surface, sur laquelle les rayons solaires seroient tombés perpendiculairement. Je supposerai ensuite que toutes les images réfléchies par les glaces de son miroir s'appliquoient exactement les unes sur les autres.

Mais il est hors de doute que chacune des glaces du miroir de Buffon produisoit un effet moins grand que celui qui auroit été produit par une glace sur laquelle les rayons solaires seroient tombés perpendiculairement; car les rayons solaires tombant obliquement sur les glaces de son miroir, il est évident que la quantité des rayons réfléchis étoit plus petite qu'elle ne l'eût été, si les rayons solaires fussent tombés perpendiculairement sur les glaces, et je ferai voir tout-à-lèbeure qu'avec le miroir de Buffon, il est impossible de faire tomber exactement les images du soleil les unes sur les autres. Il s'ensuit donc qu'en prenant pour base les expériences de Buffon, mes résultats seront trop grands.

Le 23 mars, à midi, Buffon mit le feu à 66 pieds de distance, à une planche de hêtre goudronnée, avec quarante glaces, le miroir faisant avec le soleil un angle de près de 20 degrés de déclinaison, et un autre de plus de 10 degrés d'inclinaison.

En examinant le tableau de la p. 479, on verra qu'à cette distance l'image étoit quintuple de la surface du miroir. Donc le cinquième de 40 glaces, c'est-à-dire 8 glaces, auroient produit le même effet à une très-petite distance. Mais à une très-petite distance la chaleur de l'image réfléchie est la moitié de la chaleur du soleil; donc quatre fois la chaleur du soleil mettroit le feu à une planche de hêtre goudronnée. Je suppose dans cette expérience, ainsi que dans celles qui suivent, qu'on n'a employé que le nombre des glaces nécessaire pour produire l'inflammation ou la fusion.

31

Le même jour, le miroir étant posé encore plus désavantageusement, il mit le feu à une planche goudronnée et soufrée à 126 pieds de distance, avec 98 glaces.

A cette distance, l'imago réfléchie étoit, à peu de chose près, douze fois aussi grande. Donc la chaleur nécessaire pour mettre le feu à cette planche, seroit la chaleur du soleil multipliée par $\frac{98}{2\times 12}$, c'est à dire que la chaleur nécessaire pour cela seroit égale à quatre fois et $\frac{1}{12}$ la chaleur du soleil.

Le 10 avril après midi, par un soleil assez net, on mit le feu à une planche de sapin goudronnée, à 150 pieds, avec 128 glaces. L'inflammation fut très-subite, et elle se fit dans toute l'étendue du foyer.

A cette distance, l'image étoit à très-peu de chose près, quinze fois aussi grande. Donc la chaleur nécessaire pour enflammer cette planche seroit la chaleur du soleil multipliée par \frac{128}{2\times 15}; c'est-à-dire que la chaleur nécessaire pour cela seroit égale à quatre fois et \frac{4}{15} la chaleur du soleil.

Le 11 avril, à une distance de 20 pieds et avec 21 glaces, on mit le feu à une planche de hêtre qui avoit déjà été brûlée en partie.

A cette distance, l'image étoit double à peu de chose près. Donc la chaleur nécessaire pour enslammer cette planche étoit la chaleur du soleil multipliée par 21, c'est-à-dire par 5 et 1/4.

Le même jour, à la même distance, avec 12 glaces, on enflamma de petites matières combustibles. Donc la chaleur nécessaire pour les enflammer étoit la chaleur du soleil multipliée par trois.

Le même jour encore, à la même distance et avec 45 glaces, on fondit un gros flacon d'étain qui pesoit environ six livres. Donc la chaleur nécessaire pour cela, étoit la chaleur du soleil multipliée par $\frac{45}{2\times 2}$, c'est-à-dire par 11 et $\frac{1}{4}$.

Avec 117 glaces, on fondit des morceaux d'argent minces; on rougit une plaque de tôle. Donc pour produire cet effet, il faudroit une chaleur égale à celle du soleil multipliée par $\frac{117}{2\times 2}$, c'est-à-dire par $29\frac{1}{4}$.

« Par des expériences subséquentes, dit Buffon, j'ai reconnu que la distance la plus avantageuse pour faire commodément avec ces miroirs des épreuves sur les métaux, étoit à 40
ou 45 pieds. Les assiettes d'argent que j'ai fondues à cette distance avec 224 glaces, étoient
bien nettes, en sorte qu'il n'étoit pas possible
d'attribuer la fumée très-abondante qui en sortoit, à la graisse ou à d'autres matières dont
l'argent se seroit imbibé, et comme se le persuadoient les gens témoins de l'expérience: je la

🕆 répétai néanmoins sur des plaques d'argent toutes neuves, et j'eus le même effet. Le métal fumoit très-abondamment, quelquefois pendant plus de 8 ou 10 minutes avant de se fondre. J'avois dessein de recueillir cette fumée d'argent par le moyen d'un chapiteau et d'un ajustement semblable à celui dont on se sert dans les distillations, et j'ai toujours eu regret que mes autres occupations m'en aient empêché; car cette manière de tirer l'eau du métal est peut-être la seule que l'on puisse employer: et si l'on prétend que cette fumée, qui m'a paru humide, ne contient pas de l'eau, il seroit toujours très-utile de savoir ce que c'est, car il se peut aussi que ce ne soit que du métal volatilisé; d'ailleurs jesuis persuadé qu'enfaisant les mêmes épreuves sur l'or, on le verra fumer comme l'argent, peut-être moins, peut être plus ».

A 40 pieds de distance l'image est triple; donc la chaleur nécessaire pour produire cet effet est égale à celle du soleil multipliée par $\frac{224}{2\times3}$, c'est-à-dire par 37 et $\frac{1}{5}$.

Ainsi en partant des expériences imparfaites de Buffon, cinq fois la chaleur du soleil seroit plus que suffisante pour enflammer des planches goudronnées. Je suppose que huit fois cette chaleur soit suffisante pour enflammer toutes sortes de bois, et certes il ne faudroit pas une chaleur aussi grande. Il suit de cette supposition:

- 1°. Qu'à une distance de 22 m, 25, il faudroit 16 de mes glaces pour enflammer du bois;
- 2°. A une distance de 39 = ,33, il en faudroit 24;
- 3°. A une distance de 53 m.,72, il en faudroit 32;
- 4°. A une distance de 66 m, 41, il en faudroit 40;
- 5°. A une distance de 77 m,86, il en faudroit 48;
- 6°. A une distance de 88 m, 41, il en faudroit 56;
- 7°. A une distance de 98 m, 22, il en faudroit 64;
- 8°. A une distance de 107 x,44, il en faudroit 72;
- 9°. A une distance de 116 m, 16, il en faudroit 80;
- 10°. A une distance de 1250 mètres, c'est-àdire un huitième de myriamètre, c'est-à-dire à un quart de lieue, il en faudroit 590 (*);
 - 11°. A une demi-lieue, il en faudroit 2262.

^(*) Pour calculer combien il faut de glaces à cette distance, on fait la proportion suivante :

^{(53,72): (53,72 + 1250)::} r:x². et l'on trouve pour quatrième terme 590 moins une fraction.

Si les hauteurs et les largeurs des glaces devenoient doubles, triples, quadruples, etc., il est évident qu'elles enflammeroient à des distances doubles, triples, quadruples. Ainsi 590 glaces d'un mètre de hauteur produiroient le même effet à une demi-lieue, et des glaces de deux mètres de hauteur à une lieue; mais je me trompe, l'effet seroit beaucoup plus grand.

Si l'on se servoit de glaces d'un mètre de hauteur, le foyer auroit à une distance d'un quart de lieue, 24 mètres en hauteur et en largeur. Nul doute, du moins je le pense, qu'avec 590 glaces de cinq décimètres de hauteur, on ne fût en état d'embraser et de réduire en cendres une flotte à un quart de lieue de distance; à une demi-lieue, avec 590 glaces d'un mètre de hauteur, et à une lieue, avec 590 glaces de deux mètres de hauteur.

Au lieu d'employer des glaces qui auroient deux mètres de hauteur, on pourroit employer quatre glaces d'un mètre de hauteur qu'on assembleroit sur un même plan, et l'effet seroit le même.

Je ne parle point des effets utiles qu'un miroir, tel que le mien, seroit capable de produire. On pourra consulter à ce sujet le sixième Mémoire de Buffon, inséré dans le premier volume du supplément de son Histoire naturelle.

Avant de finir, je dois parler des miroirs ar-

dens qui ont été imaginés pour brûler à de grandes distances. Le miroir de Buffon est le dernier qui ait été imaginé. Ce miroir est composé de 168 glaces planes, montées sur un châssis de fer. Ces glaces qui ont six pouces de bauteur sur huit de largeur, sont mobiles en tous sens.

Le miroir de Buffon a deux défauts qui nuisent essentiellement à l'effet qu'il produiroit, s'il en étoit exempt. Il faut environ une demiheure pour l'ajuster, c'est-à-dire pour faire tomber sur le même point les 168 images du soleil réfléchies par les glaces. Mais les glaces étant ajustées les unes après les autres, et les images réfléchies s'éloignant à chaque instant de leurs premières positions, il est évident que lorsque l'opération est terminée, les images ont dû nécessairement s'éloigner du foyer en s'éparpillant. D'où il suit qu'à chaque instant le foyer se déplace, s'agrandit, et perd de son activité.

Supposons pour un moment que le miroir étant ajusté, les images du soleil soient exactement appliquées les unes sur les autres; je dis qu'alors le miroir de Buffon a toutes les propriétés, et n'a que les propriétés d'un miroir parabolique composé de glaces planes.

Supposons en effet un certain nombre de glaces planes BC, DE, etc. (fig. 4), placées comme on voudra, pourvu que leurs centres G, H, etc. réfléchissent les rayons solaires IG, KH en un point F. Par le point F menons la droite AL parallèle aux rayons solaires IG, KH; sur cette parallèle prenons un point A sur le prolongement de LF, et décrivons une parabole MAN, dont l'origine de l'axe soit le point A, et dont le foyer soit le point F.

Si cette parabole fait une révolution autour de son axe, elle décrira la surface d'un conoïde parabolique. Supposons à présent que les glaces BC, DE, etc. s'approchent ou s'éloignent du point F en se mouvant parallèlement à elles-mêmes, suivant les droites GF, HF, jusqu'à ce qu'elles soient tangentes au conoïde. Il est évident que les points de contacts seront les centres des glaces, et que les centres de ces glaces placées en bc, de réfléchiront les rayons solaires OH, PG, etc. au point F, de la même manière qu'elles y réfléchissoient les rayons solaires IG, KH, etc. lorsque ces glaces étoient placées en BC, DE, etc. Je conclus donc que si le miroir de Buffon étant ajusté, les images étoient exactement appliquées les unes sur les autres, ce miroir auroit toutes les propriétés, et n'auroit que les propriétés d'un miroir parabolique composé de glaces planes. Mais un miroir parabolique ne réfléchit les images solaires en un seul point, que lorsque l'axe est dirigé au centre du soleil; donc pour que les images

réfléchies par le miroir de Buffon restassent exactement appliquées les unes sur les autres, il faudroit que l'axe du miroir, en passant toujours par le même foyer F, fût constamment dirigé au centre du soleil. Mais le miroir de Buffon reste immobile pendant l'expérience; donc, à mesure que le soleil s'avance, le foyer change de place en s'éparpillant. Donc le miroir de Buffon auroit un second défaut essentiel, quand même le premier n'existeroit pas.

Voilà quels sont les deux défauts qui sont inhérens au miroir de Buffon, et qui nuisent grandement à l'effet qu'il produiroit, s'il en étoit exempt.

Mon miroir est exempt de tous ces défauts; car à mesure que le soleil s'avance, les glaces qui le composent ne cessent de former un miroir parabolique dont l'axe est constamment dirigé au centre du soleil, en passant par l'objet qu'on veut enflammer; c'est-à-dire qu'à chaque instant mon miroir change de forme pour produire son effet.

Avant Buffon, Athanase Kircher imagina un miroir ardent pour brûler à cent pieds et audelà. Son miroir étoit un assemblage de glaces . planes et circulaires : il posoit ses glaces sur un mur, en leur donnant une inclinaison convenable, pour que les images du soleil fussent réfléchies sur le même objet.

Athanase Kircher ne fit ses expériences qu'avec cinq glaces; il dit que la chaleur produite avec quatre glaces étoit encore supportable, et que la chaleur produite avec cinq étoit presque insupportable. Je crois très-fermement, dit Kircher, que c'est avec des miroirs plans ainsi disposés, que Proclius brûla les vaisseaux de Vitalien.

Kircher ne poussa pas ses expériences plus loin, et se contenta d'inviter les savans à les répéter, avec un plus grand nombre de glaces (*).

Il est inutile de faire observer que le miroir d'Athanase Kircher a tous les défauts de celui. de Buffon.

Anthémius de Tralles, qui naquit vers la fin du cinquième siècle, et qui fut chargé par Justinien 1er de construire le temple de Sainte-Sophie à Constantinople, a aussi imaginé un miroir ardent. Il nous reste de lui un fragment où il en fait la description. Ce fragment, qui a été traduit par M. Dupuy, se trouve dans les Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, de l'année 1777. Au lieu de faire moi-même la description du miroir d'Anthémius, je vais le laisser parler lui-même.

Construire une machine capable d'incen-

^(*) Kircher, De Arte magna lucis et umbræ, lib. x, par. 11, probl. 1v.

dier, à un lieu donné distant de la portée d'un trait, par le moyen des rayons solaires.

Ce problème paroît comme impossible, à s'en tenir à l'idée de ceux qui ont expliqué la méthode de construire ce qu'on appelle mireirs ardens; car nous voyons toujours que ces miroirs regardent le soleil, quand l'inflammation est produite; de sorte que si le lieu donné n'est pas sur le même alignement que les rayons solaires, s'il incline d'un côté ou d'un autre, ou s'il est dans une directiou opposée, il est impossible d'exécuter ce qu'on propose par le moyen de ces miroirs ardens. D'ailleurs la grandeur du miroir, laquelle doit être proportionnée à la distance où il s'agit de porter le feu au point d'incendier, nous force de reconnoître que la construction, telle qu'elle est exposée par les Anciens, est presque impraticable. Ainsi, d'après les descriptions qu'on en a données, on a raison de croire que le Problême proposé est impossible. Néanmoins comme on ne peut pas enlever à Archimède la gloire qui lui est due, puisqu'on s'accorde unanimement à dire qu'il brûla les vaisseaux ennemis par le moyen des rayons solaires, la raison nous force d'avouer que par ce moyen même, le problême est possible. Pour nous, après avoir examiné la matière, après l'avoir considérée avec toute l'attention dont nous sommes capables, nous allons exposer la méthode que la théorie nous a fait découvrir, en faisant précéder quelques préliminaires nécessaires au sujet.

A un point donné d'un miroir plan, trouver une position, telle qu'un rayon solaire venant, selon quelqu'inclinaison que ce soit, frapper ce point, soit réstéchi à un autre point aussi donné.

Soit A (fig. 5) le point donné, le rayon BA donné, selon une direction quelconque, et qu'il faille que le rayon BA, tombant sur un miroir plan et attaché à ce point A soit résléchi au point donné r.

Tirez du point A au point r la droite AI: divisez en deux parties égales l'angle BAI par la droite AA, et concevez le miroir plan EAZ dans une situation perpendiculaire à la ligne AA, il est évident, par ce qui a été démontré, que le rayon BA tombant sur le miroir EAZ, se réfléchira au point I; ce qu'il falloit exécuter.....

Par conséquent aussi tous les rayons solaires également inclinés, et tombant parallèlement à AB sur le miroir, seront réfléchis par des lignes parallèles à Ar. Il est donc démontré que, de quelque côté que se trouve le point I, dans quelque position qu'il soit à l'égard du rayon solaire, ce rayon sera réfléchi du même côté par le miroir plan. Mais l'inflammation ne

s'opere par le moyen des miroirs ardens, que parce que plusieurs rayons sont rassemblés en un seul et même lieu, et que la chaleur est condensée au sommet au point d'incendier. C'est ainsi que le feu étant allumé dans un lieu, les parties d'alentour et l'air ambiant reçoivent quelque chaleur proportionnée. Si donc nous concevons qu'au contraire tous ces degrés de chaleur soient rassemblés et réunis au milieu de cet endroit, ils y exerceront la vertu du feu dont nous parlons. Qu'il faille donc porter au point r éloigné du point A de la distance que nous avons assignée, et y rassembler différens autres rayons, par le moyen de miroirs plans et semblables, de manière que tous ces rayons, réunis après la réflexion, produisent l'inflammation; c'est ce qui peut s'exécuter à l'aide de plusieurs hommes tenant des miroirs, qui, selon la position indiquée, renvoient les rayons au point T

Mais pour éviter les embarras où jette l'exécution d'un pareil ordre prescrit à plusieurs personnes, car nous trouvons que la matière qu'il s'agit de brûler n'exige pas moins de vingt-quatre réflexions; voici la construction qu'il faut suivre.

Soit le miroir plan hexagone ABIAEZ, et d'autres miroirs adjacens, semblables, hexagones, et attachés au premier suivant les lignes

droites AB, Br, IA, AE, EZ (fig. 6), par le plus petit diamètre, de manière qu'ils puissent se mouvoir sur ces lignes, au moyen de lames ou bandes appliquées qui les unissent et les collent les uns aux autres, ou à l'aide de ce qu'on appelle des charnières. Si donc nous faisons que les miroirs d'alentour se trouvent dans le même plan que le miroir du milieu, il est clair que tous les rayons éprouveront une réflexion semblable et conforme à la position commune de toutes les parties de l'instrument. Mais si le miroir du milieu restant comme immobile, nous inclinons sur lui avec intelligence, comme cela est facile, tous les autres miroirs qui l'entourent, il est évident que les rayons qui en réfléchiront, tendront vers le milieu de l'endroit où est dirigé le premier miroir. Répétons la même opération, et aux environs des miroirs dont nous avons parlé, plaçant d'autres miroirs pareils, dont ceux d'alentour peuvent s'incliner sur le central, rassemblons vers le même point les rayons qu'ils renvoient, de sorte que tous ces rayons réunis produisent l'inflammation dans le lieu donné.

Mais cette inflammation se fera bien mieux, si vous pouvez employer à cet effet quatre ou cinq de ces miroirs ardens, et même jusqu'au nombre de sept, et s'ils sont entre eux à une distance analogue à celle de la matière à brûler, de manière que les rayons qui en partent, se coupant mutuellement, puissent rendre l'inflammation plus considérable. Car si les miroirs sont dans un seul'lieu, les rayons réfléchis se coupent selon des angles très-aigus, de sorte que tout le lieu autour de l'axe étant échauffé.... l'inflammation ne se fait pas au seul point donné. On peut aussi, à l'aide de la construction de ces mêmes miroirs plans, offusquer les yeux des ennemis, qui, dans leur marche ne les appercevant point, tombent sur ceux qui les portent attachés au haut et en dedans de leurs boucliers. Ces derniers tournent a propos et dirigent la réflexion des rayons solaires vers un ennemi, qui ne peut que difficilement se garantir de leur action et la surmonter.

Il est donc possible, par le moyen des miroirs ardens dont on a parlé, et dont on a décrit la construction, de porter l'inflammation à la distance donnée..... Aussi ceux qui ont fait mention des miroirs construits par le divin Archimède, n'ont pas dit qu'il se fût servi d'un seul miroir ardent, mais de plusieurs; et je pense qu'il n'y a pas d'autre moyen de porter d'un lieu l'inflammation à une distance.....

Mais comme les Anciens, en traitant des miroirs ardens ordinaires, n'ont exposé de quelle manière il faut tracer les emboles que par un procédé organique, sans présenter à cet égard aucune démonstration géométrique, sans dire même que c'étoient des sections coniques, ni de quelle espèce, ni comment elles se formoient, nous allons essayer de donner quelques descriptions de pareils emboles, non sans démonstration, mais par des procédés géométriques et démontrés.

Soit donc AB (fig. 7) le diamètre du miroir ardera que nous voulons construire, ou sur lequel nous voulons opérer; et sur la ligne TBA, qui coupe perpendiculairement la ligne AB en deux parties égales, soit le point a où nous voulons que se fasse la réflexion; le point E étant le milieu de la ligne AB. Joignez B, A, et par B soit tirée à ΔΕΓ la parallèle BZ égale à BΔ; par le point Z, la ligne Zr parallèle à BA, coupant au point r la ligne AET. Coupez par le milieu IA au point O, et OE sera la hauteur de l'embole relatif au diamètre AB, comme on le verra par la suite. Divisez en autant de parties égales que vous voudrez la droite BE, en trois, par exemple, comme dans la figure ci-jointe; savoir, EK, KA et AB; et par les points K, A, tirez à BZ, ET, les parallèles AM, KM. Ensuite divisez en deux parties égales l'angle ZBA, par la droite Bz, le point z étant censé être au milieu entre les parallèles BZ, AM. Prolongez toutes ces parallèles du côté de A vers les points Π. P. z. je dis que le rayon parallèle à l'axe,

c'est-à-dire à EA, et tombant par EB sur le miroir au point B, se réfléchira au point A, à cause que l'angle ZBA est divisé en deux parties égales, et que la réflexion se fait à angles égaux, comme on l'a montré précédemment (*).

Nous ferons pareillement réfléchir en A le rayon PA de cette manière. Soit tirée la droite ZA, de même EM, ZZ. Il est évident que ZA est égale à ZZ, à cause que l'angle en B est divisé en denx également. Mais ZZ est égale à ZM, parce que du point milieu Z, elles sont dirigées vers les points Z, M. Ainsi MZ est égale à ZA. Soit donc coupé en deux parties égales l'angle MZA par la ligne ETO, le point O étant censé tenir le milieu entre les parallèles MA, NK; et cette ligne coupant la parallèle MA au point T; on démontrera par les mêmes raisons, que MT est égale à TA, et que TA..... (**).

Le reste manque.

32

^(*) Dans les manuscrits la ligne ZB n'est point prolongée, et les copistes ont écrit ΠK et ZE au lieu de ΣB, ce qui ne présente aucun sens raisonnable. J'ai rectifié la traduction de Dupuy, dans laquelle on lit: « Je dis » que le rayon ΠK est parallèle à l'axe, c'est-à-dire à ΕΔ, » et tombant par ZE sur le miroir au point B ».

^(**) La ligne ΘΔ étant égale à ΘΓ, la ligne ΔT à TM, et la ligne ΔB à BZ, il est évident que les points Θ, Τ, B appartiennent à une parabole.

Le miroir d'Anthémius, comme celui de Buffon, a toutes les propriétés, et n'a que les propriétés d'un miroir parabolique, composé de glaces planes. Ces deux miroirs peuvent enflammer un objet, quelle que soit sa position. Le miroir d'Anthémius, qui est construit géométriquement, est un véritable miroir parabolique, tandis que le miroir de Buffon, quand il est ajusté, est un miroir parabolique trèsimparfait. Le foyer du miroir parabaque d'Anthémius est invariable, tandis que le foyer du miroir de Buffon est variable à volonté. Mais l'on se tromperoit étrangement si l'on pensoit que, la position de l'objet à enflammer étant donnée, et la position du miroir étant donnée aussi, on pourroit enflammer cet objet dans tous les instans du jour et tous les jours de l'année. Ces deux miroirs ne peuvent produire tous leurs effets qu'au moment où le soleil se retrouve au même point du ciel où il se trouvoit, lorsque le miroir d'Anthémius fut construit, et lorsque celui de Buffon fut ajusté.

Il me reste à parler du miroir ardent d'Archimède, avec lequel, dit-on, il réduisit en cendres la flotte de Marcellus, devant les murs de Syracuse.

Les auteurs anciens qui parlent de ce miroir sont Lucien, Galien, Anthémius de Tralles, Eustathe, Tzetzès et Zonare. Lucien dit, dans son Hippias, qu'Archimède, par un artifice singulier, réduisit en cendres les vaisseaux des Romains.

Galien s'exprime ainsi: « C'est de cette manière, du moins je le pense, qu'Archimède brûla les vaisseaux des ennemis. Car, à l'aide d'un miroir ardent, on enslamme avec facilité de la laine, des étoupes, une mèche, de la férule, et enfin tout ce qui est sec et léger (*) ».

Anthémius, qui florissoit au commencement du sixième siècle, nous apprend que l'on s'accordoit unanimement à dire qu'Archimède avoit brûlé les vaisseaux ennemis par le moyen des rayons solaires.

Eustathe, dans son commentaire de l'Iliade, dit qu'Archimède, par une invention de catoptrique, avoit brûlé la flotte des Romains à une distance égale à celle de la portée de l'arc.

« Enfin, dit Zonare, Archimède brûla la flotte des Romains d'une manière tout à-fait admirable: car il tourna un certain miroir vers le soleil; il en reçut les rayons. L'air ayant été embrasé à cause de la densité et du poli de ce miroir, il alluma une grande flamme qu'il précipita sur les vaisseaux qui étoient dans le port, et les réduisit tous en cendres (**)».

^(*) De Temperamentis, lib. 111, cap. 2.

^(**) Zonarias, Annal. lib. IX.

« Lorsque la flotte de Marcellus fut à la portée de l'arc, dit Tzetzès (*), le vieillard (Archimède) fit approcher un miroir hexagone qu'il avoit fabriqué. Il plaça, à une distance convenable de ce miroir, d'autres miroirs plus petits, qui étoient de la même espèce, et qui se mouvoient à l'aide de leurs charnières et de certaines lames quarrées de métal. Il posa ensuite son miroir au milieu des rayons solaires

Tzetzės, chil. 2, hist. 35.

^(*) ως Μάρκιλλος οξ ἀπέτησε βολήν έκείνως (όλεμόλες) τόξες,
Έξάγων όντι ¹ κάτοπηςον έτέκτηνεν ό Γέρων.
Από δὲ σιατήμαηος συμμέτςε τῶ κατόπηςες,
Μικςὰ τοιαῦτα κάτοπηςα θείς τετραπλὰ γωνίαις,
Κινέμενα λεπίσι τὲ καί τισι γίγγλύμοις,
Μέσον ἐκεῖνο τέθεικεν ἀκτίνων τῶν ἢλίες,
Μεσημόζειῆς καὶ θεςινῆς, καὶ χειμεςιατάτης.
'Ανακλωμένων δὲ λοιπόν εἰς τᾶτο τῶν ἀκτίνων,
"Εξαψις ῆςθη φοδεςὰ πυρώσης ταῖς ὁλκάσι.
Καὶ ταύτας ἀπετέφρωσεν ² ἐκ μήκους τοξοδόλε.
Οὔτω νικῷ τὸν Μάρκελλον ταῖς μηχαναῖς ὁ Γέρων.

^{*}Ο Δίων πωὶ Διόσθωςος γεάφει την ίτος ίαν. Καὶ σὺν αὐτοῖς δὲ μέμνην]αι ωολλοὶ τῷ Αρχιμήσθες. *Ανθίμιος μὲν ωςώτιτον, ὁ ωαςασθοζογεάφος. *Η ρων, πωὶ Φίλων, Πάωωος τὲ πωὶ ωαῖς ³ μηχανογεάφος, Εξ ὧνωτρ ἀντγνώκειμεν πνατοωθεικός ἐξάψεις....

^{*} Εξάζωνόν τι. Mss.

^{*} Amerigeuder. Mss. 2644.

¹ Hac. Mas.

Telles sont les autorités sur lesquelles est fondée l'histoire des miroirs ardens d'Archimède, et ces autorités me paroissent d'un grand poids. Gependant le silence de Polybe, de Tite-Live et de Plutarque, qui racontent avec beaucoup de détails ce que fit Archimède pour défendre Syracuse, pourroit faire douter de l'histoire de l'embrâsement de la flotte de Marcellus. Au reste, qu'Archimède ait brûlé ou non la flotte de Marcellus, il n'en reste pas moins constant qu'Archimède avoit imaginé un miroir ardent, et que ce miroir étoit un assemblage de miroirs plans.

Mais quel étoit le miroir ardent d'Archimède? Je tâcherai de répondre à cette question, après que j'aurai fait quelques observations sur les différentes sortes de miroirs paraboliques composés de glaces planes.

Soit un conoïde parabolique dont l'axe soit constamment dirigé au centre du soleil; supposons ensuite que des glaces planes soient tangentes à ce conoïde, et supposons que ce conoïde soit coupé par un plan vertical qui passe par son axe. Si l'on coupe ce conoïde par un plan perpendiculaire sur l'axe, on aura, du côté du sommet, un miroir ardent composé de glaces planes qui n'enflammera un objet qu'autant qu'il sera placé directement entre le miroir et le soleil. Si l'on coupe le conoïde par un plan qui soit perpendiculaire sur le plan vertical, et qui passe entre le soleil et le zénith, le segment supérieur donnera un miroir ardent qui enflammera un objet de haut en bas, et l'autre segment donnera un miroir qui l'enflammera de bas en haut, pourvu que cet objet soit dans le plan vertical dont nous avons parlé. Supposons enfin que le plan coupant ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, et qu'il fasse, avec l'horizon, un angle aigu, soit que le plan coupant passe par l'axe, soit qu'il coupe ou qu'il ne coupe pas l'axe, un des miroirs ardens qui résultera de cette section, enflammera de haut en bas, l'autre de bas en haut, un objet qui sera placé à la droite ou à la gauche du soleil, et c'est le cas du miroir d'Anthémius et de celui de Buffon.

Cela posé, revenons au miroir ardent d'Archimède. Anthémius rapporte, que dans les descriptions que les anciens auteurs donnoient des miroirs ardens, on voyoit toujours que ces miroirs regardoient le soleil, quand l'inflammation étoit produite, et que l'objet enflammé n'étoit jamais ni à droite, ni à gauche. D'où je conclus que le miroir d'Archimède étoit un des segmens du conoïde parabolique dont nous avons parlé, lorsque le plan coupant est perpendiculaire sur le plan vertical.

Tzetzès nous apprend que le miroir d'Archimède étoit un assemblage de miroirs hexagonaux qui se mouvoient à l'aide de leurs charnières et de certaines lames de métal, c'est-àdire que les miroirs d'Archimède étoient assemblés, de manière que chacun pouvoit se mouvoir en tous sens, comme dans le miroir de Buffon, et jusques là le miroir de Buffon ne diffère de celui d'Archimède, qu'en ce que dans le premier les miroirs sont rectangulaires, et que dans le second les miroirs sont hexagonaux.

Tzetzès ajoute qu'Archimède plaça son miroir au milieu des rayons solaires du midi d'été et d'hiver (*); c'est-à-dire qu'il plaça son mi-

^(*) Ce passage, qui n'a été compris par personne, est

roir perpendiculairement au plan de l'équateur. Si le miroir d'Archimède n'avoit été destiné à produire l'inflammation qu'au moment où le soleil étoit dans un plan perpendiculaire sur le plan du miroir et sur le plan de l'horizon, il est évident qu'il auroit été fort indifférent que ce miroir fût ou ne fût pas placé perpendiculairement sur le plan de l'équateur. Mais pourquoi Archimède plaçoit-il son miroir perpendiculairement sur le plan de l'équateur? C'étoit afin que son miroir pût réfléchir les rayons solaires sur le même objet pendant tout le temps que le soleil étoit sur l'horizon, et je vais démontrer que le miroir étant ainsi posé, étoit capable de produire cet effet de deux manières différentes.

cependant bien clair. Voici ce passage traduit mot à mot: « Il posa le miroir au milieu des rayons solaires » méridionaux, estivaux et hyémaux ». Melot traduit ainsi ce passage: « Il plaça son miroir hexagone, de fa- » çon qu'il étoit coupé par le milieu par le méridien » d'hiver et d'été ». Ce qui n'offre aucun sens, car comment seroit-il possible qu'un même lieu eût deux méridiens. Buffon cherche à donner un sens raisonnable à cette version. « Tzetzès, dit-il, indique la position du » míroir en disant que le miroir hexagone, autour du- » quel étoient sans doute les miroirs plus petits, étoit » coupé par le méridien, ce qui veut dire apparemment » que le miroir doit être opposé directement au soleil ». Dutens, qui a traduit ce passage de Tzetzès, supprima cette phrase qu'il ne comprenoit pas.

Soit AB (fig. 8) une verge de fer parallèle à l'axe du monde. Que CD soit une branche de fer perpendiculaire sur AB, que EF soit le miroir d'Archimède, et qu'il soit placé de manière que la branche de fer CD soit perpendiculaire sur son plan prolengé. Il est évident que ce miroir placé ainsi sera perpendiculaire sur le plan de l'équateur. Supposons que par le moyen d'une vis de rappel, comme on le voit dans la fig. 9, on puisse faire mouvoir la verge de fer AB sur elle-même. Cela posé, qu'une personne en tournant la vis de rappel soit chargée de maintenir le miroir dans une position perpendiculaire sur le plan vertical, qui passe par l'axe de la verge de fer AB et par le centre du soleil, et qu'une autre personne soit chargée d'ajuster le miroir de manière que les images résléchies soient portées en un point D, pris sur la verge de fer CD.

Si pendant toute la journée, on maintient, par le moyen de la vis de rappel, le miroir dans une position perpendiculaire sur le plan vertical qui passe par l'axe de la verge de fer AB et par le centre du soleil, il est évident que les images réfléchies au point D y resteront fixées sans éparpillement et sans déplacement du foyer; car si le contraire pouvoit arriver, ce seroit parce que, dans l'espace de douze ou quinze heures, le soleil s'approcheroit ou

s'éloigneroit de l'équateur d'une manière sensible. Ce qui n'est point.

Soit en second lieu une pièce de fer ACDEB (fig. 9): que ses extrémités AC, EB, soient cylindriques, et que la partie CDE soit aplatie et ployée en demi-cercle; que les axes des cylindres AC, EB, soient dans la droite AB, et que cette droite soit parallèle à l'axe du monde; que la pièce de fer ACDEB soit mobile autour de l'axe AB, et que LI soit une vis de rappel; que DK soit le miroir d'Archimède; que ce miroir soit placé parallèlement à AB et perpendiculairement au plan qui passe par l'axe de la droite AB et par le point D, milieu de la largeur de la bande CDE. Il est évident que le miroir DK sera placé perpendiculairement au plan de l'équateur.

Cela posé, qu'une personne en tournant la vis de rappel KL soit chargée de maintenir le miroir dans une position perpendiculaire sur le plan vertical qui passe par AB et par le centre du soleil, et qu'une autre personne soit chargée d'ajuster le miroir de manière que les images réfléchies soient portées en un point L de l'axe. Le miroir étant ajusté, il est évident que les images réfléchies au point D y resteront fixées pendant tout le temps que le soleil sera sur l'horizon.

Par le moyen d'un cadran GG et d'une aiguille

fixe avec l'axe AB, il sera facile, connoissant l'heure du jour, de maintenir le miroir dans la position qu'il doit avoir.

J'ai démontré que le miroir ardent d'Archimède restant perpendiculaire sur le plan de l'équateur, il étoit possible de fixer sur un objet les images solaires, pendant tout le temps que le soleil étoit sur l'horizon, et j'ai fait voir que cela pouvoit se faire de deux manières. Mais il est évident qu'avec les constructions que je viens de donner, la chose n'est physiquement possible que quand la distance de l'objet à enflammer au miroir ne passe pas certaines bornes. Il me reste à faire voir qu'en modifiant la seconde construction on peut enflammer un objet placé à une grande distance.

Pendant que la droite DK tourne autour de l'axe AB, la perpendiculaire menée du point K sur AB engendre un cercle parallèle à l'équateur, et la droite menée du point K parallèlement à AB engendre une ellipse dans le plan horizontal. Il suit de là que si l'on faisoit mouvoir le miroir DK de manière que cette droite DK prolongée se mût suivant l'ellipse horizontale, et que le point D se mût suivant la circonférence du cercle parallèle à l'équateur, le plan du miroir restant toujours parallèle à l'axe du monde et perpendiculaire sur le plan vertical qui passe par le centre du soleil et par

le centre du miroir, il est évident que les images réfléchies par les miroirs resteroient fixées au point L comme auparavant.

Cela posé, voici comment on pourroit venir à bout d'incendier un objet placé à une grande distance.

La hauteur du pôle et la distance de l'objet à incendier étant connues, l'ellipse qu'il s'agit de tracer sur le plan horizontal est déterminée. Cette ellipse étant tracée, on feroit mouvoir le miroir de la même manière que dans la figure 9, à l'aide d'une machine dont la construction seroit facile à imaginer. D'où je conclus qu'en suivant les mêmes principes qu'auparavant, on peut incendier un objet placé à une grande distance. Donc en se conduisant ainsi, Archimède auroit pu embrâser la flotte de Marcellus.

Il sera facile de s'appercevoir que le miroir EF (fig. 8) et DK (fig. 9), pourroit avoir une position oblique sur le plan de l'équateur, pourvu que dans les deux cas, il fût fixe avec la droite AB perpendiculaire sur le plan de l'équateur.

Voilà ce que j'avois à dire sur le miroir d'Archimède. Il ne me reste pour terminer ce Mémoire que deux observations à faire. Si le miroir DK, au lieu d'avoir une position fixe, étoit mobile dans la bande de fer CDE (fig. 9),

et si ce miroir étoit ajusté pour porter les images au point R milieu de CE, il est évident que si l'on faisoit en sorte que ce miroir eût son axe YZ constamment dirigé au centre du soleil, le foyer resteroit au point R pendant toutes les heures du jour et pendant tous les jours de l'année.

J'appelle l'axe d'un miroir ardent l'axe du conoide, dont une partie de la surface forme le miroir ardent.

D'après les mêmes principes, il seroit facile de monter un miroir de réfraction, de manière que son foyer fût constamment au même point.

Soit AB (fig. 10) une verge de fer parallèle à l'axe du monde; que CDE soit une bande de fer ployée en arc de cercle, ayant pour centre le point M pris sur l'axe de la verge AB; que KL soit une lentille mobile autour d'un axe perpendiculaire sur le plan qui passe par AB et par le milieu de la largeur de la bande CDE. Supposons qu'à l'aide d'une vis de rappel on maintienne, pendant tout le temps que le soleil est sur l'horizon, la lentille parallèle au soleil, il est évident que le foyer Q restera fixe au même point d'un creuset RDS placé sur la bande CDE.

DE

L'ARITHMÉTIQUE DES GRECS,

Par M. DELAMBRE, Secrétaire perpétuel de la classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, Membre du Bureau des Longitudes, de la Légion d'honneur, etc.

DE

L'ARITHMÉTIQUE

DES' GRECS.

Les Grecs n'avoient pas eu cette idée si heureuse et si feconde, que nous tenons des Arabes ou plutôt des Indiens, et qui fait qu'avec neuf chiffres dont la valeur augmente en progression décuple à mesure qu'on les avance vers la gauche, nous sommes en état d'exprimer commodément les nombres les plus considérables.

La supériorité du système arithmétique des Indiens est si marquée, qu'elle a fait oublier entièrement les méthodes des anciens Grecs. Les foibles vestiges qui nous en restent sont épars dans des ouvrages qui n'ont pas été traduits, ou dont les traductions sont rares et ignorées. Les traducteurs se sont même contentés de nous donner en chiffres arabes l'équivalent à-peu-près de ce qui est dans le texte grec, s'embarrassant fort peu de montrer la

TOME II.

Digitized by Google

514 DE L'ARITHMÉTIQUE

marche et l'esprit de l'opération; en sorte qu'à l'exception d'un petit nombre de lecteurs qui ont pu consulter les originaux; on peut dire avec quelque vraisemblance que personne n'a une idée même incomplète de l'arithmétique grecque. Les Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres renferment à la vérité une Histoire de l'arithmétique ancienne, mais on n'y trouve que quelques idées sur l'usage des jetons dans les calculs, et rien sur l'arithmétique écrite.

Une réflexion nous porte à croire que les monumens de ces méthodes abandonnées doivent être infiniment rares; c'est qu'aucun de nos savans antiquaires ne les a choisis pour objet de ses recherches. Cependant nous avons la certitude qu'en géométrie et en astronomie, les Anciens ont exécuté des calculs assez considérables. Leurs moyens, sans doute, étoient fort inférieurs à ceux que nous pourrions employer aujourd'hui pour les mêmes problèmes: mais cette considération même peut donner quelque intérêt aux recherches suivantes entreprises à l'issue d'une audience donnée par le premier Consul, au bureau des longitudes. et dans laquelle il avoit lui-même amené la conversation sur ce sujet.

Les auteurs qui nous ont conservé les no-

tions recueillies dans ce Mémoire, sont Archimède, dans sa mesure du cercle et dans son Arénaire; Eutocius, dans les Commentaires grecs qu'il nous a laissés sur cet ouvrage; Ptolémée qui, dans sa grande Composition (l'Almageste), nous a donné des tables des cordes, de déclinaison, d'équation du centre, et de latitude pour le soleil et les planètes, et autres tables de ce genre, avec les méthodes qui ont servi à les construire; Théon, dans ses Commentaires grecs sur la grande composition de Ptolémée; et enfin Pappus, dans un fragment publié par Wallis dans le tome III de ses OEuvres. Les deux premiers livres de Pappus traitoient particulièrement de l'arithmétique, et nous y aurions peut-être trouvé les préceptes et les méthodes d'après lesquels les Grecs exécutoient les opérations numériques, c'est-à dire, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines; mais ces livres sont perdus: il n'en reste que le fragment dont nous venons de parler. J'ai vainement consulté tous les ouvrages où j'espérois trouver des renseignemens utiles; j'ai lu en entier le traité qui porte pour titre : Θεολογόυ. μενα της αριθμετικής; celui de Psellus, Arithmetica, Musica et Geometria; celui de Camerarius, de Græcis Latinisque numerorum notis et præterea Saracenicis seu Indicis, cum indicio elementorum ejus quam logisticen Græci nominant, etc. On voit dans tous ces auteurs des idées sur la composition des nombres, sur les moyens de trouver les nombres premiers, sur les raisons, sur les proportions, sur les nombres figurés et sur quelques solides employés dans le toisé; mais pas un mot de ce que j'y cherchois: tous ces écrivains supposent à leurs lecteurs la connoissance des premières règles de l'arithmétique.

J'avois même entrepris quelques recherches dans les manuscrits de la bibliothèque impériale. Feu M: Parquoy, savant aussi estimable que modeste, a bien voulu les continuer, mais sans beaucoup de succès. Il n'a pu rencontrer que trois exemples de division pour trouver l'indiction d'une année quelconque, et dans lesquels on n'avoit par conséquent à opérer que sur des nombres trop peu considérables pour qu'il en résultât de grandes lumières. Nous en donnerons ici de plus importans, et desquels nous pourrons tirer un traité complet des cinq opérations auxquelles se réduit toute l'arithmétique.

Si la notation des Grecs étoit beaucoup moins simple que la nôtre, elle étoit du moins fort régulière.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 Au lieu des caractères ils avoient pour exprimer aby Secino les unités, les lettres. . . Au lieu de les employer pareillement pour les dixaines, ils se servoient ικλμνξοπζ des lettres. . Pour les centaines, ils P 0 T u 0 x 4 4 9 prenoient..... Mais c'est à cela que se bornoient tous leurs chiffres.

C'est-à-dire qu'ils avoient recours aux caractères des unités simples, avec cette seule différence que pour les distinguer ils y joignoient l'iota souscrit, ou bien qu'ils les marquoient d'un trait par-dessous.

Avant d'aller plus loin, remarquons le rapport constant qui règne entre les quatre caractères qu'on voit ici placés dans chaque colonne verticale.

forment une progression géométrique dont la raison est dix. Il en est de même des nombres

518 DE L'ARITHMÉTIQUE

β, κ, σ, β, ou 2, 20, 200, 2000 γ, λ, τ, γ, ou 3, 30, 300, 3000 et de tous les autres.

Les Grecs avoient remarqué ce rapport, et ils avoient des mots pour exprimer la relation de ces nombres. Les nombres de la première rangée horizontale, c'est-à-dire les simples unités a, \beta, \gamma, etc. étoient appelés les fonds (\pi\vert^2-\mu\vert^2\vert^2) des nombres de dixaines, de centaines et de mille; et ces derniers s'appeloient les analogues de ceux auxquels ils correspondent parmi les unités. Dans certains cas, on opéroit sur les fonds au lieu d'opérer sur les analogues; après quoi, à l'aide de quelques théorêmes, on ramenoit le résultat du calcul à celui qu'on auroit eu si l'on eût opéré sur les analogues eux-mêmes, en suivant les règles ordinaires de l'arithmétique.

Avec les caractères qu'on vient de voir, les Grecs pouvoient exprimer un nombre quelconque au dessous de 10000 ou d'une myriade. Ainsi, \$340 significient 9999; \$1778 valoient 7382; nas marquoient 8036; 502 Valoient 6420; \$2, 40001, et ainsi des autres.

Pour exprimer une myriade ou 10000, on auroit pu mettre un trait sous la lettre 1, qui par elle-même vaut 10; et cette notation est en effet indiquée dans quelques lexiques, mais je ne vois pas qu'elle ait été employée par les géomètres.

Pour indiquer un nombre de myriades, on se servoit de la lettre M surmontée du nombre en question.

Cette notation est celle dont se sert Eutocius dans ses Commentaires sur Archimède : elle étoit peu commode pour le calcul.

Pour désigner les myriades, Diophante et Pappus se servent des deux initiales Mu placées après le nombre. Ainsi aMu, pMu, pMu, etc. représentaient 10000, 20000, 30000, etc.; Italian 165, ou 43728097. Cette manière ressemble à celle que nous employons pour les nombres complexes, comme 4 toises 5 pieds 6 pouces.

Les mêmes auteurs employent encore une notation bien plus simple; c'est de remplacer

520 DE L'ARITHMÉTIQUE

par un point les initiales Mv. Ainsi ρτοβ.ηζζ valoient 43728097.

Les Grecs pouvoient ainsi noter jusqu'à 9999.9999 qu'ils écrivoient 6340.6340; une unité de plus auroit fait la myriade de myriade, qui dans notre système vaut 100,000,000 = 10000 ou cent millions. C'étoit là que se bornoit l'arithmétique des Grecs; et cette étendue leur suffisoit de reste, parce que leurs unités de compte, telles que le talent, le stade, étoient plus fortes que nos unités ordinaires, la livre ou la toise. Il n'y avoit donc guères que les géomètres et les astronomes qui pussent se trouver quelquesois trop à l'étroit entre ces limites. Par exemple, Archimède dans son Arénaire, ayant à exprimer le nombre de grains de sable que contiendroit une sphère qui auroit pour diamètre la distance de la terre aux étoiles fixes, et ce nombre étant, d'après lui, tel qu'il faudroit pour l'exprimer dans notre système un nombre de soixante-quatre figures; Archimède, dis-je, se vit obligé de prolonger indéfiniment la notation arithmétique des Grecs.

Nous avons dit que cette notation avoit pour limite la myriade de myriade, ou la myriade quarrée, ou cent millions. Archimède imagina de prendre cette myriade quarrée pour unité nouvelle, et les nombres formés de ces unités nouvelles, il les appelle nombres du second ordre.

De cette manière il exprimoit tous les nombres qui, dans notre système, s'expriment avec 16 chiffres.

Prenant ensuite pour unité nouvelle, l'unité suivie de 16 zéros, ou la quatrième puissance de la myriade, il en forma ses nombres du troisième ordre.

L'unité suivie de 24 zéros, on la sixième puissance de la myriade, compose pareillement les nombres du quatrième ordre.

En général, en prenant pour unité la puissance 2n de la myriade, il en forma des nombres de l'ordre (n+1).

Supposons n = 8, 2n = 16, l'unité suivie de 16 fois 4 zéros, ou de 64 zéros, composera les nombres de l'ordre neuvième, ou (8+1), dont le plus petit aura 65 figures. Ainsi, pour aller à 64 figures, Archimède n'avoit besoin que du huitième ordre.

Cette notation, imaginée pour un cas tout particulier, ne fut, suivant toute apparence, employée que cette seule fois, et même elle ne le fut pas réellement. En effet, Archimède se contenta d'indiquer les opérations, sans en exécuter aucune. Après avoir évalué la sphère dont le diamètre est d'un quarantième de doigt, il en conclut d'abord celle d'un doigt,

puis celle de 100 doigts, de 10000 doigts, d'un stade, de 100 stades, de 10000 stades, et ainsi de suite, en centuplant toujours le diamètre, d'où il suit que les capacités qui sont en raison triplée des diamètres, se trouveroient dans notre systême en ajoutant 6 zéros à chaque opération. La chose est un peu moins facile dans le systême des Grecs; mais on conçoit qu'à l'aide de quelques lemmes, il a pu déterminer à quel ordre monteroit le produit de deux facteurs dont les ordres seroient connus. Il ne faut qu'un seul de ces lemmes quand les deux facteurs sont des analogues de l'unité; c'est-à-dire, dans notre système, quand ils ne sont tous deux que l'unité suivie de plus ou moins de zéros. Ce lemme dans ce cas est extrêmement simple, et le voici.

Soit l'unité suivie de tous ses analogues, c'està-dire a, i, p, a, aMv, ou i, 10, 100, 1000, 10000, etc. Soit n le numéro d'un terme quelconque de cette progression, m le numéro d'un autre terme aussi quelconque, le produit sera aussi un terme de la même progression et son numéro sera (m+n-1); ou bien soit n le nombre de figures d'un terme de la progression, m le nombre de figures d'un autre terme, le nombre de figures du produit sera (m+n-1). Ainsi supposons m=2, n=3, c'est-àdire que les deux facteurs soient 10 et 100, m +n=2+3=5, le nombre de figures sera 5 -1=4. En effet, $10 \times 100 = 1000$.

· Le nombre de zéros du terme n sera (n-1), celui des zéros du terme m sera (m-1); le nombre de zéros du produit sera (n-1) + (m-1) = somme des zéros des deux facteurs.

Archimède démontre ce théorême, mais il ne donne que celui-là. Quelques personnes ont cru y voir l'idée des logarithmes; mais Archimède ne fait mention que des nombres entiers de la progression, 1, 10, 100, 1000, et ne dit rien qui puisse nous faire penser qu'il ait même entrevu la possibilité ou l'utilité d'intercaler entre ces nombres d'autres nombres fractionnaires qui approcheroient autant qu'on le jugeroit nécessaire, d'être égaux aux nombres de la suite naturelle, et qu'on pourroit par ce moyen substituer l'addition de leurs numéros d'ordre dans la progression, à la multiplication des deux nombres mêmes; il n'a pas même étendu son idée à la soustraction, qui auroit pu remplacer la division; enfin, il étoit si éloigné d'envisager cette idée comme devant être utile dans les calculs pratiques, qu'il paroît au contraire évident qu'elle n'a été pour lui-même qu'un moyen de se dispenser du calcul, et non pas un moyen de rendre les calculs plus faciles.

524 DE L'ARITHMETIQUE

· La progression employée par Archimède est donc

α, ι, ρ, α, α., ι., 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000,

1000000, 10000000, etc.

Si pour plus de simplicité il eût écrit

a a a, etc.

il eût trouvé notre arithmétique, ou du moins les traits souscrits eussent été à peu-près l'équivalent de nos zeros; cependant, pour compléter la découverte il auroit fallu supprimer les traits, et dire que l'ordre des unités seroit déterminé par le rang que le nombre occuperoit; et alors il auroit encore fallu imaginer un caractère pour remplir les places vacantes.

Ce qu'il n'a pas imaginé de faire pour la série ascendante, les astronomes l'ont appliqué à la série descendante.

a°, a¹, a¹¹, a¹¹¹, a¹¹, etc. formoient en effet une progression géométrique; mais la raison étoit ½ êt non ½.

En outre de la pro-

gression ci-dessus 1°, 11, 111, 1111, 1114, etc. On avoit encore .. 2°, 21, 211, 2111, 2111, etc. Ou telle autre qu'on

vouloit. 17°, 17¹, 17¹, 17¹¹, 17¹¹, 17¹¹, etc. Et ainsi jusqu'à . . 59°, 59¹, 59¹¹, 59¹¹, 59¹¹, etc.

Les différens termes de cette progression étoient le plus souvent composés de deux chiffres, on ne pouvoit donc pas supprimer les signes o, 1, 11, 111, 117, etc. qui marquoient leur ordre, et rendre la valeur du terme dépendant du rang qu'il occupoit dans la série; il auroit fallu pour cela 59 caractères au lieu de 9. On ne pouvoit donc de ce côté arriver à notre arithmétique: on en étoit plus voisin en s'arrêtant à l'idée d'Archimède. Apollonius, au rapport de Pappus, y fit quelques changemens heureux. Au lieu de ces ordres ou tranches composées de 8 chiffres, et qu'Archimède nommoit pour cette raison des octades, il imagina de ne composer ses tranches que de quatre chiffres. La première tranche à droite étoit celle des unités; la seconde en allant vers la gauche étoit celle des myriades simples; la troisième étoit celle des myriades doubles ou du second ordre, ainsi de suite à l'infini; en sorte qu'en général la tranche du numéro n contenoit les myriades du degré (n-1). Ainsi à chaque tranche on voyoit reparoître les mêmes caractères, mais avec une valeur toujours croissante et proportionnelle aux puissances successives de la myriade. De cette manière, Apollonius auroit pu écrire tout ce que sait exprimer notre numération, et pour en donner un exemple, prenons la circonférence du cercle dont le dia526 DE L'ARITHMÉTIQUE mêtre est une myriade du neuvième ordre, la circonférence sera

Il n'y avoit plus qu'un pas de cette arithmétique à la nôtre; il falloit faire pour les simples dixaines ce qu'on avoit fait pour les dixaines de mille.

Il paroît que c'est encore à Apollonius qu'on étoit redevable d'un autre changement dans l'arithmétique des Grecs. Nous avons déjà dit qu'au nombre de dixaines, de centaines ou de mille, on substituoit quelquefois les unités qui leur correspondoient; par exemple, si l'on avoit à multiplier 50 par 400 ou v par v, au nombre v ou 400, on substituoit I ou 4 qui en étoit le fond. Au nombre 50 ou v on substituoit le fond 5 ou e. On multiplioit donc 5 par 4; le produit étoit « ou 20. Mais on avoit rendu l'un des facteurs 100 fois trop petit et l'autre 10 fois trop petit; le produit étoit donc 100 × 10 fois et 1000 fois trop petit; il falloit donc le multiplier par 1000; au lieu de 20 on avoit 20000 ou 2 myriades.

C'étoit un acheminement vers notre arithmetique; mais comme ils ne faisoient là aucun usage de zéros, au lieu d'une règle unique qui nous suffiroit dans ce cas, et qui seroit de mettre à la suite du produit un nombre de zéros égal au nombre de zéros négligés dans l'un et l'autre facteur, il leur falloit une douzaine de théorêmes différens pour déterminer dans tous les cas à quel degré de myriades appartenoit le produit.

Ces théorêmes nous ont été conservés par Pappus, et publiés par Wallis; pour nous les démontrer tous il suffit de les écrire avec nos caractères arithmétiques. Nous ne rapporterons donc pas ces théorêmes; ceux qui en seroient curieux peuvent consulter le tome III des OEuvres de Wallis.

Le zéro n'étoit pourtant pas tout-à-fait inusité chez les Grecs. On le trouve dans Ptolémée, mais seulement dans l'usage des fractions sexagésimales; son emploi se borne à tenir la place d'un ordre sexagésimal qui manque entièrement. Ainsi, dans la table des déclinaisons des points de l'écliptique, oo. x5¹. 15¹¹. significient oo. 24¹. 16¹¹.; 50. 01. λα¹¹. valoient 60. 01. 31¹¹.; x20. μα¹. 011. exprimoient 210. 411. 011.

Le zéro en grec se nommoit τζιφρα, d'où vient le mot chiffre. Mais τζιφρα ne se trouve à ma connoissance que dans le Traité de l'arith-

métique indienne de Planude, qui écrivoit dans le quatorzième siècle. Ce mot a l'air un peu barbare, et je ne l'ai vu dans aucun auteur ancien.

Ainsi chez les Grecs le zero étoit tout seul; jamais il ne se combinoit avec un autre chiffre pour en changer la valeur. Comme dans chaque tranche les nombres avoient leurs valeurs propres, indépendantes de la place qu'ils y occupoient, le zero devenoit alors inutile, et les tranches au lieu d'être constamment de quatre chiffres, n'en avoient quelquefois que trois, deux, ou même un seul.

Et ils n'auroient employé que 10 figures au lieu de 16 que nous aurions en mettant des zéros à toutes les places vides.

Quand la tranche des unités manquoit entièrement, on l'indiquoit en écrivant Mu à la place de cette tranche; et ce signe montroit que le nombre précédent avoit des myriades pour unités. Si deux ou plusieurs tranches manquoient à la droite, on y mettoit autant de fois Mu.

Ainsi pour exprimer 37. 0000. 0000. 0000. 0000. les Grecs écrivoient & Mv. Mv. Mv. Mv. ou 37 myriades quadruples. Voyez Pappus dans les OEuvres de Wallis.

Le caractère M° employé par Diophante et Eutocius, indique des monades, c'est-à-dire des unités. Ainsi M° za signifie unités 21.

Il nous reste à dire comment les Grecs écrivoient les fractions.

Un trait placé à la droite d'un nombre et vers le haut, faisoit de ce nombre le dénominateur d'une fraction dont l'unité étoit le numérateur. Ainsi $\gamma' = \frac{1}{3}$; $\delta' = \frac{1}{4}$; $\xi \delta' = \frac{1}{64}$; $\rho \kappa \alpha' = \frac{1}{121}$. La fraction $\frac{1}{2}$ avoit un caractère particulier : (ou \langle ou \langle ou \langle ou \langle ou \langle

Quand le numérateur étoit autre que l'unité, le dénominateur se plaçoit comme nos exposans. Ainsi 15^{64} significit $\frac{15}{64}$ ou $16\xi^{6}$; $\frac{7}{121}$ s'écrivoit ξ^{64} , et l'on trouve dans Diophante, liv. iv, question 46, la fraction $\sigma\xi\gamma$. $\gamma\rho\mu\delta^{\lambda\gamma}$ ξ^{40} = $2633544^{331776} = \frac{2633544}{362776}$.

Pour mieux entendre ce qui suit, le plus sûr seroit de se familiariser avec les 36 caractères grecs. Cependant, pour ceux qui ne voudroient pas prendre cette peine, je traduirai en chiffres arabes tous les exemples de calculs que je donnerais: le moyen est bien simple, c'est d'imiter ce que nous faisions dans nos opéra-

TOME IL

tions complexes, avant l'établissement du système métrique décimal. Soient donc y le signe des myriades, m celui des mille, c celui des centaines, d celui des dixaines, o celui des monades ou unités, le nombre y. Alos ou 31775 pourra s'écrire 3 1^m 7^c 7^d 5°.

Cette notation à laquelle nous sommes d'avance familiarisés, nous suffira par-tout pour faire toutes les opérations de l'arithmétique des Grecs.

Nous allons ainsi donner des exemples de toutes les opérations de l'arithmétique, soit dans le système décimal, soit dans le système sexagésimal, qui étoit seul employé dans les calculs astronomiques.

EXEMPLE DE L'ADDITION.

Tiré d'Eutocius, sur le théorême 17 de la mesure du cercle.

ωμζ. γηκα	8° 4d 7°. 3m 9° 2d 1°	847. 3921
ξ. , ηυ ,	6d 8m 4c	60. 8400
Эн. Втка	9°4 8°. 24,3° 24,1°	908. 2321

La seconde ligne ne contenant ni dixaines ni unités, l'addition pour les deux ordres se borne à prendre les nombres 2^d 1° de la première ligne.

Les centaines offrent $9^c + 4^c = 13^c = 1^m + 3^c$. Je pose donc les 3^c et je retiens le mille pour la colonne suivante; là se trouve $3^m + 8^m = 11^m$, qui avec le mille retenu font $12^m = 1^y + 2^m$; nous poserons donc les 2^m , et nous retiendrons la myriade qui sera unité simple dans la seconde tranche.

Nous y trouvons d'abord 7° et rien au dessous; mais nous avons retenu une myriade ou unité, nous aurons donc 8°; aux dixaines nous avons $4^d + 6^d = 10^d = 1^c + 0$; nous laisserons vide la place des dixaines de myriades, et retenant 1° nous aurons $8^c + 1^c = 9^c$, et l'addition sera faite.

Cette addition est exactement celle de nos nombres complexes, elle est seulement plus facile, en ce que chaque unité d'un ordre quelconque vaut toujours dix unités de l'ordre immédiatement inférieur, avantage que n'avoient pas nos soudivisions anciennes des livres, des toises, etc.

Les points dans les chiffres grecs, comme dans ma traduction, séparent les myriades ou nombres du second ordre des nombres simples ou de premier ordre.

On verra bientôt que les Grecs ne s'astrelgnoient pas à placer les unités de différente espèce dans leur ordre naturel; en effet, il n'y avoit aucune nécessité, mais cette attention facilité beaucoup le calcul.

L'addition des sexagésimales se faisoit comme nous le pratiquons encore : il suffira d'un exemple tiré de Ptolémée, p. 65.

EXEMPLE DE LA SOUSTRACTION.

Eutocius, Théor. 111 de la mesure du cercle.

Cet exemple n'offre aucune difficulté: le procédé est le même que dans notre système. On commence par la droite, et quand le nombre à soustraire est le plus grand des deux, on emprunte au nombre suivant à gauche une unité qui vaut dix. A la vérité, je n'ai trouvé ce précepte exprimé nulle part; mais comme il est indépendant de la notation, et qu'il convient à celle des Grecs aussi bien qu'à la nôtre, nous devons croire qu'une idée aussi naturelle s'est présentée d'elle-même à l'esprit des Anciens.

SOUSTRACTION SEXAGÉSIMALE.

Voyez Ptolémée, Almageste, p. 65 et 66.

a ^o a	νη ^τ μδ	ις ¹¹ κα	λ∫ ^{III} ιβ	ns vs	ng ×e▼	β ^{ν1} κγ	1°	58¤ 44.	16 ¹¹ 21	34 ¹¹¹	26 ¹⁷ 54	25 ▼ 54	2 ^{v1} 23
0	12	νέ	na	λα	λ	λθ	1	13	5 5	21	31	3о	39

Cet exemple où les emprunts sont nécessaires d'un bout à l'autre, ne laisse aucun doute sur ce que nous disions à l'article précédent.

Nous nous bornerons à ces exemples d'addition et de soustraction : nous en aurons de plus curieux dans les multiplications et les divisions.

Nous voyons ici le zéro tenir la place des degrés qui manquent dans la seconde ligne. Il est marqué comme chez nous par le caractère o; ce caractère dans l'arithmétique grecque signifie 70; il ne pourroit donc sans équivoque se placer dans les opérations décimales. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus \$.2000 eût signifié 23479 et non 23409. Mais dans l'arithmétique sexagésimale, o ne peut rien signifier, puisque le nombre le plus fort est 59. Cependant pour

554 DE L'ARITHMÉTIQUE

le distinguer on le couvre ordinairement d'un trait horizontal o; en effet, quand o se trouve aux degrés, il pourroit absolument marquer 70°; mais la circonstance empêchera toujours la méprise, et la raison que o = 70 est le premier des nombres qui se rencontrent jamais parmi les fractions sexagésimales, paroît'être le motif déterminant qui l'a fait choisir pour le caractère du zéro, et l'on peut assurer avec beaucoup de vraisemblance que si les Grecs n'ont pas senti tout le parti que l'on pouvoit tirer de leur zéro pour simplifier la notation, c'est à eux cependant qu'on doit le caractère lui-même dont nous nous servons encore, et peut-être l'idée de l'employer à marquer l'absence d'un ordre de quantités.

MULTIPLICATION.

Les Grecs commençoient leurs multiplications par les chiffres de la gauche du multiplicateur : c'est une chose absolument indifférente, et nous le pratiquons encore quelquefois.

Ils prenoient aussi les chiffres du multiplicande, en allant de gauche à droite, pour l'ordinaire. Il y a pourtant des exemple desquels il résulte qu'ils commençoient quelquefois par la droite du multiplicande. Peut-être suivoient-ils cette marche quand ils opéroient sur de petits nombres.

Exemple tiré des Commentaires d'Eutocius, sur le théorème 111 de la mesure du cercle.

 ρ par ρ valent α ; ou 100 par 100 = 10000 = 1 y = α .

 ρ par ν valent ϵ , ou 100 par $50 = 5000 = \epsilon$. ρ par γ valent τ , ou 100 par $3 = 300 = \tau$.

On place ces trois produits à la suite l'un de l'autre, comme on les voit dans le grec et dans la traduction, et cela étoit facile, parce que ces trois produits sont chacun d'un seul chiffre en grec, même dans la seconde ligne. L'exemple prouve par sa disposition qu'on a dû commencer par la gauche: suivons cette marche.

 ν par ρ valent ϵ , ou $50 \times 100 = 5000 = 5^{m}$; on pose ϵ .

par ν valent $\beta \varphi$, ou $50 \times 50 = 2500 = 2^m 5^{\circ}$; on pose $\beta \varphi$ à la suite de ε, quoique β et ε soient des quantités du même ordre, puisque ε 5000 et $\beta = 2000$.

ν par γ = ρν, ou $50 \times 3 = 150 = 1° + 5^d$; on pose encore ρν à la suite.

 ρ par γ valent τ , ou 100 \times 3 = 300 = 3°; on place τ dans la troisième ligne.

 ν par γ valent $\rho\nu$; on place ces deux nombres à la suite de τ .

 γ par γ valent θ , ou $3 \times 3 = 9$; on place θ ou 9 à la suite des produits précédens, et la multiplication est faite : il ne manque plus que l'addition.

Il paroît qu'elle a été commencée par la droite.

Dans cet amas de produits, qui ne sont pas très-bien ordonnés, on voit que $\theta = 9$ est le seul chiffre d'unités, on le portera donc aussitôt aux unités dans la somme.

En dixaines, nous n'avons que v = 50; mais il s'y trouve deux fois; vet valent p = 100; il n'y aura donc rien aux dixaines.

Pour les centaines, nous avons d'abord le cent que nous venons de trouver, puis deux fois s ou 100; total jusqu'ici 300; puis deux fois r ou 300, ce qui fait 600, et avec les précédens nous aurons déjà 900; mais il reste encore $\phi = 500$; total des centaines, 14°. On posera donc v = 400 et l'on retiendra $\alpha = 1000$.

A ce mille retenu ajoutons $\beta = 2000$ et deux fois $\xi = 2 \times 5000 = 10000 = 1^{7}$, nous aurons au total $13000 = \alpha.\gamma$ ou 1^{7} 3^m. Mais nous avons encore 1^{7} ; le total des myriades est donc de 2^{7} ou β ., et la somme totale 2^{7} 3^m 4°. . . . $9^{0} = 23409$.

Cet exemple est copié fidèlement dans Eutocius, qui ne donne d'ailleurs aucune explication; mais la disposition prouve que l'on faisoit séparément tous les produits, qu'on les posoit sans rien retentr, et qu'on mettoit dans une même ligne séparée les produits obtenus par un même chiffre du multiplicateur.

On voit encore dans l'édition de Bâle, p. 51, que les Grecs indiquoient la somme ou le total par la lettre θ , traversée d'un ou de deux traits obliques, et que les Grecs ne mettoient pas de filet pour séparer l'addition de tous les produits partiels de la multiplication.

538

Autre exemple tiré du même endroit, et qui confirme tout ce que nous avons dit sur le premier.

On a mis séparément les produits :

$$5^{\circ} \times 5^{\circ} = 25^{\circ}$$
; $5^{\circ} \times 7^{\circ} = 3^{\circ}$ 5° ; $5^{\circ} \times 1^{\circ} = 5^{\circ}$.

Puis dans une seconde ligne:

$$5^{e} \times 7^{d} = 3^{y} 5^{m}; 7^{d} \times 7^{d} = 4^{m} 9^{e}; 7^{d} \times 1^{o} = 7^{d}.$$

Et enfin dans une troisième:

$$(5^{\circ} 7^{\circ} 1^{\circ}) \times 1^{\circ} = 5^{\circ} 7^{\circ} 1^{\circ}$$

Après quoi vient l'addition.

On voit donc clairement dans ces exemples la manière des Grecs; elle est plus facile que la nôtre, moins sujette à erreur, mais plus longue. Rien ne nouş empêcheroit de la suivre, en disposant le calcul comme on le voit ici.

· 571	,	
57 r		
35 5	Produits par 500.	
35 49	Produits par 70.	
7· 571	Produit par 1.	
326041	** * * * * * * * * * * * * * * * * * *	•

Exemple de multiplication, dans lequel le multiplicande et le multiplicateur sont des nombres fractionnaires. Eutocius, Mesure du cercle, th. 1v.

αωλη θια	1m 8c 3d 80 9
αωλη θια	r 8 3 8 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
n m m i	1007 807 37 87 80 1d 80 2.
M M M IS U X V S 5'a	807 647 27 4m 6m 4c 6c 5d 40 6
M W i Johng 2,10	3y 2y 4m 9° 2° 4d 2d 4° 6.
ηςυσμξδςς σια	8m 6m 4c 2c 4d 6d 40 60 6
ωιη βια χ γ δ ςια	8c 1d 80 2 6c 5d 40 6
x of la f fin a pra	24° 6 6 6 81 121
The a ova gia Tales	338y 1m 20 5d 10 7 81 121
OU TAN a ov B A fora	ou 338^{7} 1 ^m 2° 5^{d} 2° $\frac{37}{121}$ = $3381252\frac{37}{121}$.

Cet exemple est extrêmement curieux: Eutocius se contente de présenter le tableau de l'opération, sans en donner la moindre explication; elle est au reste bien simple.

 $1^{m} \times 1^{m} = 100^{y}$, ou $1000 \times 1000 = 1000000$ = 100 myriades = 100^{y} .

 $1^{m} \times 8^{o} = 80^{y}$, ou $1000 \times 800 = 800000 = 80$ myriades = 80^{y} .

 $1^m \times 3^d = 3^r$, ou $1000 \times 30 = 30000 = 3$ myriades = 3^r .

 $1^{m} \times 8^{s} = 8^{m}$; ou $1000 \times 8 = 8000 = 8^{m}$.

 $1^{m} \times \frac{9}{11} = \frac{9m}{11}$, ou 1000 $\times \frac{9}{11} = \frac{9000}{11} = 8c$ 1d

Voilà donc l'explication de la première ligne; la seconde est toute pareille.

 $8^{\circ} \times 1^{m} = 80^{\circ}$, ou $800 \times 1000 = 80000 = 80$ myriades = 80° .

 $8^{\circ} \times 8^{\circ} = 64^{\circ}$, ou $800 \times 800 = 640000 = 64$ myriades = 64° .

 $8^{\circ} \times 3^{\circ} = 2^{7} + \frac{4^{\circ}}{2^{\circ}}$, ou $800 \times 30 = 24000 = 2$ myriades 4 mille = $2^{7} + 2^{\circ}$.

 $8^{\circ} \times 8^{\circ} = 6^{\text{m}} 4^{\circ}$, ou $800 \times 8 = 6400 = 6$ mille $400 = 6^{\text{m}} 4^{\circ}$.

 $8^{c} \times \frac{9}{11} = \frac{7200}{11}$, ou $800 \times \frac{9}{11} = \frac{7200}{11} = 6^{c} \cdot 5^{d}$

Troisième ligne.

 $3^d \times 1^m = 3^t$, où $3^0 \times 1000 = 30000 = 3 \text{ my-riades} = 3^t$.

 $3^{d} \times 8^{c} = 2^{y} 4^{m}$, ou $3^{o} \times 8^{o} = 24000 = 2$ myriades 4 mille = $2^{y} 4^{m}$.

 $3^d \times 3^d = 9^e$, ou $30 \times 30 = 900 = 9^e$.

 $3^{4} \times 8^{6} = 2^{6}4^{4}$, ou $3^{6} \times 8 = 240 = 2^{6}4^{4}$.

 $3^{d} \times \frac{9}{11} = \frac{270}{11}$, ou $30 \times \frac{9}{11} = \frac{270}{11} = 2^{d} 4^{o} \frac{6}{11}$.

542 DE L'ARITHMÉTIQUE

·La quatrième ligne s'explique de même.

$$8^{\circ} \times 1^{m} = 8^{m}$$
, ou $8 \times 1000 = 8000 = 8^{m}$.
 $8^{\circ} \times 8^{\circ} = 6^{m} 4^{\circ}$, ou $8 \times 800 = 6400 = 6^{m} 4^{\circ}$.
 $8^{\circ} \times 3^{d} = 2^{d} 4^{\circ}$, ou $8 \times 30 = 240 = 2^{\circ} 4^{d}$.
 $8^{\circ} \times 8^{\circ} = 6^{d} 4^{\circ}$, ou $8 \times 8 = 64 = 6^{d} 4^{\circ}$.
 $8 \times \frac{9}{11} = \frac{72}{11}$, ou $8 \times \frac{9}{11} = \frac{72}{11} = 6^{\circ} \frac{6}{11}$.

Il nous reste enfin à prendre les $\frac{9}{11}$ du multiplicande.

$$\frac{9}{11} \times 1^{m} = \frac{9m}{11}, \text{ ou } \frac{9}{11} \times 1000 = \frac{9000}{11} = 8^{\circ}$$

$$1^{d} \cdot 8^{\circ} \cdot \frac{2}{11},$$

$$\frac{9}{11} \times 8^{\circ} = \frac{72^{\circ}}{11}, \text{ ou } \frac{9}{11} \times 800 = \frac{72^{\circ}}{11} = 6^{\circ} \cdot 5^{d}$$

$$4^{\circ} \cdot \frac{6}{11},$$

$$\frac{9}{11} \times 3^{d} = \frac{27d}{11}, \text{ ou } \frac{9}{11} \times 30 = \frac{270}{11} = 2^{d} \cdot 4 \cdot \frac{6}{11},$$

$$\frac{9}{11} \times 8^{\circ} = \frac{72}{11}, \text{ ou } \frac{9}{11} \times 8 = \frac{900}{11} = 6^{\circ} \cdot \frac{6}{11},$$

$$\frac{9}{11} \times \frac{9}{11} = \frac{81}{121}, \text{ ou } \frac{9}{11} \times \frac{9}{11} = \frac{81}{121} = \frac{8^{d}}{102^{d}} = \frac{8^{d}}{102$$

Passons à l'addition, nous aurons en rassemblant les myriades une somme de 334^{y} ; rassemblons de même tous les mille, nous en aurons $36 = 3^{y}$ 6^m; tous les cent qui feront $49^{c} = 4^{m}$ 9^c; toutes les dixaines qui feront $30^{d} = 3^{c}$; toutes les unités qui sont au nombre de $48 = 4^{d}$ 8^c; tous les onzièmes qui feront $\frac{4^{c}}{4^{1}} = 3\frac{7}{14}$; réunissant le tout et ajoutant la fraction quarrée $\frac{8^{1}}{18^{1}}$, nous aurons 338^{y} 1^m 2^c $(5^{d}$ 10 $\frac{7}{13}$ (8^{1}) 0 $(338^{y}$ 1 $(2^{c}$ $(3^{d}$ $(2^{c}$ $(3^{d}$ $(2^{c}$ $(3^{d}$ $(3^{d}$

veg hgaz 25% zi ili skindi na siliki

Autre exemple tiré du même théorême.

Cet exemple est moins long, mais non moins curieux.

$$I^{m} \times I^{m}$$
, ou 1000 × 1000 = 100000 = 1007.
 $I^{m} \times 9^{\circ}$, ou 1000 × 9 = 9000 = 9^{m} .
 $I^{m} \times \frac{1}{6}$, ou 1000 × $\frac{1}{6} = \frac{1000}{6} = 1000$ = 1000 ou 1000 = 100

Voilà pour la première ligne. On y voit que les Grecs préféroient, les fractions qui avoient l'unité pour numérateur; au lieu de 4; = 1/6, ils écrivoient \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.

$$9^{\circ} \times 1^{m}$$
, ou $9 \times 1000 = 9000 = 9^{m}$,
 $9^{\circ} \times 9^{\circ}$, ou $9 \times 9 = 81 = 8^{d} 1^{\circ}$.
 $9^{\circ} \times \frac{7}{6}$, ou $9 \times \frac{7}{6} = \frac{2}{6} = 1 + \frac{7}{4}$.

Voilà pour la seconde ligne.

544 DE L'ARITHMÉTIQUE

$$\frac{1}{6} \times 1^{m}$$
, ou $\frac{1}{2} \times 1000 = \frac{100}{6} = 106^{d} \frac{6}{6}$, ou $\frac{1}{2} \frac{1}{6}$.

$$\frac{1}{6} \times 9_0$$
, ou $\frac{1}{6} \times 9 = \frac{9}{6} = 1 \frac{1}{4}$.

L'addition montre-qu'ils réduisoient les fractions à lêurs plus simples termes; ainsi, au lieu de $\frac{2}{6}$ ils ont écrit $\frac{1}{3}$.

Le caractère grec K, qui ressemble à notre K, signifie $\frac{1}{2}$.

Dans un autre exemple que nous ne rapporterons pas, Eutocius arrive, dans une soustraction après une multiplication de nombres fractionnaires, au reste, 21 15/64, qu'il change en 21 1/6 15/13 à-peu-près. Il ne dit pas par quel moyen il a trouvé cette fraction approximative:

$$\frac{\frac{15}{64} - \frac{45}{192} - \frac{32+13}{192} - \frac{1}{6} + \frac{13}{192} - \frac{1}{6} + \frac{1}{1443}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{15}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \text{ presque.}$$

Dans un autre exemple, Eutocius ayant à multiplier 3013 \(\frac{1}{2}\) par 3013 \(\frac{1}{2}\) \(\frac{1}{4}\), laisse les deux fractions séparées, au lieu de les réduire à \(\frac{1}{4}\). On voit en effet que le procédé est plus facile, et voilà sans doute la raison pour laquelle ils ne vouloient guères d'autres fractions que celles qui avoient l'unité au numérateur. Cependant nousavons vu ci-dessus la fraction \(\frac{9}{11}\), mais elle n'étoit pas commode à décomposer.

J'ai refait de cette manière tous les calculs dont Eutocius ne donne que les types, et je n'y ai rien vu qui ne rentre dans ce qu'on vient de lire. Je ne rapporterai donc pas ces calculs qui n'apprendroient rien de nouveau.

Eutocius ne rapporte aucun exemple de division; souvent il auroit à faire des extractions de racines quarrées; mais alors il se contente toujours de dire quelle est à-peu-près cette racine, et pour le prouver, il la multiplie par ellemême; et retrouve en effet, à fort peu près, le quarré dont on vouloit le côté: ce qui porteroit à croire que le procédé pour l'extraction étoit un simple tâtonnement trop long pour être rapporté.

Mais ces exemples qu'on chercheroit inutilement dans Eutocius, je les ai rencontrés dans le commentaire, non encore traduit, de Théon, sur la grande composition de Ptolémée (c'est l'ouvrage qui est plus connu sous le nom d'Almageste); mais toutes ces divisions et ces extractions sont en parties sexagésimales.

Les astronomes avoient trouvé plus commode de diviser le rayon comme l'angle de l'hexagone en 60 parties, qui elles-mêmes se divisoient en 60 parties ou 60; les primes se divisoient chacune en 60 et ainsi à l'infini.

Le rayon valoit dont 3600' ou 216000", ce qui donnoit une précision un peu plus que TOME II. 35 double de celle que nous aurions en divisant le rayon en 10000 parties; c'est-à-dire avec des sinus à cinq décimales. Il est clair que cette précision étoit plus que suffisante pour les besoins de l'astronomie ancienne.

La raison qui a porté les Grecs à preférer cette division est, d'après Ptolémée, la facilité qu'on y trouve pour les calculs (livre 1, ch. 9, p. 8. Basle, 1538). Il dit encore au même endroit qu'il emploiera par-tout la méthode sexagésimale, à cause de l'incommodité des fractions. Par ce dernier mot, il faut entendre les fractions ordinaires. Théon, en commentant ce passage, dit que 60 est le plus commode de tous les nombres, en ce qu'étant assez petit, il a un nombre considérable de diviseurs.

Pour nous donner un exemple de l'avantage de la division sexagésimale, il suppose que nous ayons à multiplier par elle-même la quantité $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$; dans ce cas, il est bien plus court de changer ces trois fractions en 48'. On pourroit répendre que ces trois fractions équivalent à $\frac{3}{10}$, et que la multiplication par 8, suivie de la division par 10, est encore plus commode.

Mais cette multiplication des minutes par des minutes, ou plus généralement des fractions sexagésimales de différens ordres, les unes par les autres, exige quelques règles pour connoître la nature ou l'espèce des produits qu'on obtient dans les différens cas. Tout ce qu'il expose à ce sujet peut s'exprimer par une formule générale. Les fractions sexagésimales de différens ordres peuvent se représenter par $\frac{a}{60} + \frac{b}{60} + \frac{c}{60}$. Les Grecs remplaçoient comme nous ces dénominateurs, en écrivant a' b'' c''', etc. Soient les nombres $p^{(m)}$ et $q^{(n)}$ dont on démande le produit, $p^{(m)} = \frac{p}{60m}$, $q^{(n)} = \frac{q}{60}$, $p^{(m)}$ $q^{(n)} = \frac{pq}{60(m+n)}$ $pq^{(m+n)}$. Soit (m) = 0 et (n) = 3, $p^0 \times q^m = pq^{(n+3)}$ $pq^{(n)}$.

Ce théorème est au fond le même qu'Archimède a démontré pour la progression 1.10:100, réciproquement $\frac{p(n)}{q(m)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{(n-m)}$.

Après ces préliminaires. Théon montre les règles à suivre dans la multiplication et dans la division des nombres sexagésimaux, et pour premier exemple il choisit le côté du décagone inscrit, qui est de 200 m, ou 370 4 55.

te valgerina i makero i si gor nga mogéti i sa) mikiliki keji

Après avoir écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande, il faut, dit Théon, multiplier 37° par 37°, ce qui donne 1369°; puis 37° par 4′, dont le produit est 148′; ensuite 37° par 55″, qui donnent 2035″. On voit que les ordres vont toujours décroissant uniformément; les unités par les unités donnent des unités; les unités par les soixantièmes ou primes, donnent des primes; par des secondes elles donnent des secondes, et ainsi à l'infini; pour former la seconde ligne, on multiplie par 4′ les trois termes du multiplicande, et les produits sont 148′ 16″ 220″.

Le multiplicande multiplié par 55" donne à la troisième ligne 2035" 220" 3025".

Ainsi réduite, continue Théon, la multiplication est plus facile: (en effet, on a tout au plus 59 à multiplier par 59, et il étoit aisé d'avoir une table de ces produits.) On place

DES GRECS			49
les produits comme on voit ci-d les additionner il faut d'abord par 60, ce qui donne En réunissant les secondes que nous avions déjà, nous aurions	divis	er 30: 50''' :	25""
Total	4	qo'''	
En divisant la somme totale pa			
60, il nous vient	. 8"	10"	
Les trois produits de secondes	•		
font-une somme de 4	086		
Ainsi le total des secondes est 40			
Ou divisant par 60 68'	1,4		
Mais nous avious on			
deux sommes 296'			
Le total des minutes est			
donc 364		,	
ou 6° 4′	,		,
Mais le premier de	1		• .
tous les produits est 1369°		: 0	* 4
Réunissant toutes	`.	· , :	***
les quantités rédui-			
	,,,,,,,		200
tes, on a 4'	14	10	25
Ptolémée qui né-	-	* . * *	
glige les tierces, s'est		.2 : : : :	
borné à	14"	<u>.</u>	

Avec la table de multiplication dont je par-

lois tout-à-l'heure, on suroit eu les quantités toutes réduites, et le calcul se seroit fait comme il suit;

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *
$37^{\circ} \text{ par } 37^{\circ} \Rightarrow 32.49 \Rightarrow 1369^{\circ}$
37° par 4' 2,28'
37° par 55″ 33. 55*
4' par 37° 2.28
4' par 4' 16"
4' par 55" 3.40"
55" par 37°
55" par 4' 3.40
55" par 55"
** Carolyn Collis links
Somme 1375, 4. 14. 10, 25"

Théon ne fait nulle mention d'une pareille table; mais j'ai peine à penser que les Grecs n'aient pas su se procurer un secours dont l'idée étoit si naturelle, d'autant plus qu'ils con-

noissoient la table de Pythagore.

Qu'il soit question maintenant, continue Théon, de diviser un nombre donné par un nombre compose de parties, minutes et secondes. Soit par exemple 1515°. 20'. 15° à diviser par 25°. 12'. 10"; je divise d'abord par 60 (c'est-à-dire, je vois que le premier terme du quotient doit être 60); car 61 donneroit un produit trop fort; retranchons 60 fois 25°. 12'. 10" du dividende; et d'abord 60 fois 25° font 1500°, qui retranchés de 1515, laissent 15° pour reste; ce reste vaut 900'; ajoutons-y les 20' du dividende, nous aurons 920'; retranchons-en 60 × 12' ou 720', il restera 200; retranchons de ce reste 60 × 10" = 600" = 10', il nous restera 190'.

Divisons maintenant ce reste par 25°, le quotient sera 7'; car 8' donneroient un produit trop fort. Or, 25° par 7' font 175"; je les retranche de 190', il reste 15' qui valent 900"; j'y ajoute les 15" du dividende, la somme est 915"; j'en retranche 12' \times 7' = 84"; le reste est 831", dont il faut encore retrancher 10" \times 7' = 70" = 1". 10", il restera 829". 50" à diviser par 25° 12' 10".

829" divisés par 25° donnent 33", car 25° × 33" = 825°; il reste donc 4". 50" = 290"; j'en veux retrancher 12' × 33" = 396"; mais il s'en faut de 106" que cela ne se puisse; 33" est donc un peu trop fort, et le quotient de 1515. 20. 15 divisé par 25°. 12'. 10", n'est donc pas tout-à-fait 60°. 7'. 33"; c'est cependant le plus exact que l'on puisse avoir enl se bornant aux secondes. On en aura la preuve en multipliant le diviseur par le quotient.

Théon n'a pas donné le type du câlcul : je l'ajoute ici pour plus de clarte.

Dividende 1515°. $25^{\circ} \times 60^{\circ}$. 1500		25°. 12′. 10″ diviseur
Reste 15°.=	=900'	
Total des minutes $12' \times 60^{\circ}$	_	$A = \frac{1}{2} \frac{C}{C}$
Reste	200'	
	190' 25°.	12'. 10"
0.00	175	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 .
· : **	15=90	o ^R · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Descendez les 15'		5".
~ /		I" 10"
Reste	825	33″
12 × 33		1" 5 0" = 290" ⋅ ⋅ ⋅ 396
Le reste 290" est trop p	etit de	7.60 (0.1.5)

Cette opération ressemble tout-à-fait à nos divisions complexes; elle est un peu plus longue, mais elle n'emploie jamais que de petits nombres. La table subsidiaire dont j'ai parlé seroit infiniment utile pour appercevoir d'abord le quotient le plus approché, et elle éviteroit des tâtonnemens fastidieux.

Cette marche nous fait voir assez clairement comment les Grecs pouvoient faire la division sur les nombres ordinaires: un exemple va nous prouver combien elle seroit plus embarrassante que la division sexagésimale, si les nombres étoient un peu plus grands. Prenons 726.2726, ou 3327 3^m 3° 2^d 9°, à diviser par 4227, ou 1^m 8° 2^d 5°.

3327	3 m	3°	. 24	9°	1	Iw	8c	2 d	3°		
182	3	•				I m	8°	2 ^d	3°		
150	o	3	2	9	• .	•	•				
145	8	4		14.1 14.1		•	•• •				
4	1	9	2	ġ				,	•		o ir
3)	6	4	-6	,				č	٠.		
	5	4	6						en e		
			6							;	250

En 3327 combien de fois 1^m 8° ou 2^m ; on sait que $1^m \times 1^m = 100^7$, donc $2^m \times 2^m = 400^7$; le

quotient am paroit done trop, fort, il faut done essayer im.

Multiplions, le diviseur par cette première partie du quotient, nous aurons 1823 3m à retrancher du diviseur, et le reste sera 1503 om 3° 2^d 9°.

Je vois qu'en 150 myriades, 2^m seroient plus de 750 fois, 1^m y seroit 1500 fois; j'entrevois que je peux essayer 800 fois ou 8°; le produit du diviseur par le second terme du quotient, sera 1457 8^m 4°, et le reste 47 1^m 9° 2^d 9°.

En 4^y ou 4 myriades, 2^m seroient 2 dixaines de fois; je mets 2^d au quotient, le produit est 3^y 6^m 4° 6^d, et le reste 5^m 4° 6^d 9°.

En 5^m on auroit $2\frac{1}{2}$ fois 2^{m} ; je hasarde 3; le produit est 5^m 4^e 6^d 9^e égal au reste; le quotient exact est donc 1^m 8^e 2^d 3^e.

La division des Grees étoit dong toute pareille à notre division complexe, elle étoit seulement plus longue si, comme tout l'indique, ils commençoient leurs soustractions par la gauche. Ainsi, ils devoient dire de 150 ôtez 145, il resteroit 5; mais à cause du 8° qui suit 145, ne mettez au reste que 4, il vous restera 17.

Si d'une myriade vous retranchez 8m; il restera 2m; mais à cause des 4° ne mettez que 1m, vous aurez un reste de 1m 3° = 13°; retranchez 4°, il restera 9°,

Le procédé n'étoit donc pas bien embargas-

sant, même en allant toujours de gauche à droite.

Théon se propose ensuite ce problème : trouver d'une manière approchée le côté d'une surface quarrée qui n'a point de racine exacte.

Il commence par rappeler le théorême 4 du livre II des Élémens d'Euclide, qui est équivalent à la formule $(a+b)=a^a+2ab+b^a$; il prend ensuite pour exemple le nombre 4500, dont la racine approchée est suivant Ptolémée 67° 4′ 55″. Voici l'opération.

Le plus grand carré contenu dans 4500 est 4489, dont la racine est 67°; je le retranche, il reste 11° = 660'; je double la racine, et j'ai 134°.

Je divise 660' par 134°, le quotient est 4'; le produit de 134° par 4' est 536'; j'y ajoute 16⁴ quarré de 4'; je fais la soustraction, le reste est 123' 44" = 7424".

Je double la racine 67° 4', elle devient 134° 8'.

Je m'en sers pour diviser le reste 7424ⁿ; le quotient est 55ⁿ.

Je multiplie 134 8 55 par 55; je retranche ces trois produits de 7424", il me reste 45" 49" 35"": la racine 67° 4' 55" est donc un peu trop foible.

J'ai fait quelques légers changemens au calcul de Théon, mais sans rien supposer qui ne fût bien connu des Grecs. Leur règle pour l'extraction étoit donc celle dont nous nous servons encore aujourd'hui. Théon la résume ences termes:

Cherchez d'abord la racine du plus grand quarré contenu dans le premier terme, retranchez ce quarré, et doublant la racine trouvée, servez-vous en pour diviser le reste transformé en secondes; quarrez la somme des termes trouvés; retranchez ce quarré, transformez le reste en secondes, et divisez-le par le double de la racine déjà trouvée, vous aurez à-peu-près la racine demandée.

RÉSUMÉ DE CES RECHERCHES.

La notation des Grecs ressembloit à celle que nous employons pour les nombres complexes. Pour désigner les quantités des ordres supérieurs, ils se servoient de traits et de points, mais ils les plaçoient au-dessous de leurs chiffres, au lieu que nous plaçons ces signes caractéristiques à la droite et vers le haut de nos chiffres; ils n'avoient pas besoin de ces signes pour les centaines, les dixaines et les unités, qui avoient des caractères qui leur étoient propres; mais c'étoit un désavantage auquel ils avoient remédié par l'idée des fonds, c'est-à-dire des unités qu'ils substituoient dans les opérations à leurs analogues, c'est-à-dire aux dixaines, centaines, mille, etc.

Leurs nombres complexes avoient un avantage sur les nôtres dans l'uniformité de l'échelle qui étoit ou toute décimale ou toute sexagésimale.

Il paroît que le plus souvent ils faisoient leurs additions de gauche à droite, ce qui les rendoit nécessairement plus longues. J'ai quelques raisons de soupçonner cependant qu'ils savoient les faire comme nous, en allant de droite à gauche, en réservant pour la colonne suivante les quantités qui surpassoient 9 dans leurs opérations décimales, ou 59 dans leurs opérations sexagésimales.

Je soupçonne également qu'ils savoient faire la soustraction comme nous, en allant de droite à gauche, en empruntant quand il en est besoin; mais je n'en ai pas de preuve bien directe, au lieu que nous en avons de trèsconcluantes pour démontrer qu'ils suivoient plus ordinairement la marche contraire de gauche à droite.

Ils alloient de gauche à droite dans leurs multiplications, qui ressembloient fort à nos multiplications algébriques; ils écrivoient pêlemêle myriades, mille, centaines, dixaines, unités et fractions. Ce défaut d'ordre rendoit seulement l'addition plus difficile.

Dans les divisions, ils procédoient comme nous de gauche à droite; seulement les opérations étoient plus pénibles, et elles exigeoient qu'on fit à part des opérations partielles et subsidiaires; les tâtonnemens, les essais de quotients, étoient plus fréquens et plus longs.

L'extraction de la racine quarrée étoit la même que la nôtre.

Les calculs trigonométriques ne se faisant que par des analogies ou règles de trois qui exigent une multiplication et une division, et le rayon devant être de cent mille parties au moins, la multiplication des deux termes moyens produisoit des sommes que ne savoit pas exprimer l'arithmétique vulgaire.

Si l'on commençoit l'analogie par diviser l'un des moyens par le premier extrême, pour multiplier ensuite le quotient par l'autre moyen, on tomboit dans l'inconvenient des fractions, et cet inconvenient étoit extrême pour les Grecs, qui n'avoient pas de fractions décimales.

Pour éviter à la fois ces deux înconveniens autant qu'il étoit possible, ils imaginerent les fractions sexagesimales, et ils divisèrent le rayon en 360' ou 216000" bu 12960000"; mais ordinairement, après avoir employé les tierces, les quartes, etc. Mans le seure de l'opération, ils se bornoient aux secondes dans le résultat definitif.

De cette manière, on n'opéroit jamais que sur des nombres médiocres; et! l'on pouvoit abréger le calcul par une table de multiplication qui donnoit à vue tous les produits depuis 1" par 1" jusqu'à 59" par 59", et qui occupoit un quarré de 59 cases de largeur sur 59 de hauteur. On trouve une table pareille dans les OEuvres de Lansberge, et je m'en suis servi avec avantage pour refaire tous les calculs de Théon. Mais Théon ni Ptolémée n'en parlent en aucun endroit. Les opérations expliquées dans ce Mémoire sont les seules sur lesquelles j'ai pu me procurer des renseignemens. Héron, dans

son ouvrage intitulé τὰ Γεωμετρούμενα, dont le manuscrit est à la Bibliothèque impériale, donne une multitude de règles pour l'arpentage, avec une foule d'exemples; mais il ne présente jamais que le résultat, sans aucun type, sans aucun détail.

J'ai feuilleté un grand nombre de manuscrits grecs sans aucun succès. Parmi ces manuscrits, j'ai remarqué l'arithmétique indienne de Planude; j'espérois y trouver quelques rapprochemens avec l'arithmétique des Grecs; mais autant que j'ai pu en juger par une lecture rapide, il ne contient rien de ce genre.

Le fragment du second livre de Pappus, publié par Wallis, ne contient que quelques théorèmes dont nous avons déjà parlé, et pour exemple de leur application il se propose de trouver les produits des nombres renfermés dans ces deux vers grecs:

άρτεμίδος κλείτε κράτος έξοχον έννέα κουραι μύνικ άιδο θεά Ιπρώτορου άγκαυκάρτου.

En prenant ces lettres pour des chiffres, on devra faire le produit des nombres

1,100,300,5,40,10,4.70,200,20,50.5.10,500,5.20,100,1,300,70, 200,5,60,70,600,70,50,5.50,5.1,20,70,400,100,1.10, 40.8,50,10,50,1,5,10,4.5,9,5,1,4.8,40.8,500,5,100,70,200,1,3, 30,1,70,20,1,100,80,70,400, En supprimant d'abord tous les zéros et multipliant les chiffres significatifs, et rétablissant ensuite les zéros, ou faisant l'équivalent à l'aide de ses théorèmes, il trouve

 $\rho \zeta_{\mathcal{G}}.\tau \xi_{\textit{N}}.f_{\textit{W}}.M_{\textit{U$

Cette idée d'Apollonius, de substituer dans les calculs les simples unités aux dixaines, aux centaines et aux mille, abrégeoit certainement les calculs, et c'étoit un pas assez marqué vers le système indien; il semble que ses myriades simples, doubles, triples, etc. auroient dû le mener aux dixaines simples, doubles, triples; c'est-à-dire aux dixaines de tous les degrés et à notre arithmétique; alors ils n'auroient eu besoin que de neuf chiffres et du zéro qui fut aussi connu des Grecs.

Il paroît que le second livre de Pappus étoit en entier consacré à l'explication de ce qu'Apollonius avoit fait de nouveau en arithmétique : peut-être le premier contenoit-il les règles de l'arithmétique vulgaire.

J'avertirai en finissant que l'idée de séparer les myriades de différens ordres par des points, TOME II. 36 n'est pas d'Apollonius. Il dit pour le premier de ses deux vers, qu'il vaut 196 myriades treizièmes, 368 myriades douzièmes, 4800 myriades onzièmes. J'ai remplacé ces mots par des points, et j'ai mis à la fin 11 fois Mu, suivant la manière de Diophane.

Le mot a $\beta \rho \alpha \sigma \alpha \xi$, évalué à la manière d'Apollonius, vaut 365; car σ et $\rho = 200 + 100 = 300$; $\hat{\xi} = 60$; $\beta = 2$, et trois $\alpha = 3$. Total 365, nombre des jours de l'année.

FIN.

TABLE.

Des Hélices page 1
De l'Equilibre des Plans ou de leurs Centres de
gravité 108
De la Quadrature de la Parabole 179
L'Arénaire 231
Des Corps qui sont portés sur un fluide 265
Lemmes
Commentaire sur les Hélices 389
Plans 403
sur la Quadrature de la Parabole 418
sur l'Arénaire 422
sur les deux livres des Corps portés sur
un fluide 430
sur les Lemmes 451
Miroir ardent, par le moyen duquel on peut réflé-
chir et fixer, sur un objet en repos ou en
mouvement, les rayons solaires, en aussi
grande quantité que l'on veut, par F. Pey-
rard
Rapport fait à l'Institut national, Classe des
Sciences physiques et mathématiques, sur un
Miroir ardent, présenté à la Classe par M. Pey-
rard
De l'Arithmétique des Grecs, par M. Delambre, 513



