OEUVRES
D'ARCHIMÈDE.

TOME PREMIER.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
Rue du Jardinet, n° 12.


ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ŒUVRES D'ARCHIMÈDE,

TRADUITES LITTÉRALEMENT,

AVEC UN COMMENTAIRE,

PAR F. PEYRARD,
Professeur de Mathématiques et d'Astronomie au Lycée Bonaparte;

SUIVIES

D'UN MÉMOIRE DU TRADUCTEUR, SUR UN NOUVEAU MIROIR ARDENT,

Et d'un autre Mémoire de M. DELAMBRE, sur l'Arithmétique des Grecs.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT

ET ADOPTÉ PAR LE GOUVERNEMENT POUR LES BIBLIOTHÈQUES DES LYCÉES.

Dédié à Sa Majesté l'Empereur et Roi.

SECONDE ÉDITION.

TOME Ier.

Édition publiée en MDCCC VIII.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1844

bole, par exemple, soit bien grec, et qu'il se trouve même dans le titre de l'un des Traités d'Archimède, on ne le rencontre pourtant jamais dans le texte. Par-tout on y voit cette courbe désignée par les mots de *section du cône rectangle*. L'ellipse y est nommée *section du cône obliquangle*, et l'hyperbole *section du cône obtusangle*. Le paramètre, nommé ὀρθία par *Apollonius*, et *latus rectum* par les Modernes, est désigné dans Archimède par l'expression longue et vague de *ligne qui s'étend jusqu'à l'axe*; les mots d'*ordonnée* et d'*abscisse* sont suppléés par de longues périphrases. Quoiqu'Archimède établisse en un endroit la distinction entre l'axe et les diamètres de la parabole, cependant il donne toujours à l'axe le nom de *diamètre*, et celui-ci est désigné par les termes de *ligne parallèle au diamètre*. Enfin, croiroit-on que les Grecs n'ont jamais eu de mot pour exprimer *le rayon d'un cercle*, et qu'ils l'appeloient *ligne qui part du centre?* Toutes ces expressions, qui reviennent à chaque instant, donnent à l'énoncé des propositions et à tous les raisonnemens dont se compose la démonstration, une longueur très-incommode; et je serois peu surpris que le Géomètre qui entend le mieux le grec, préférât cependant la traduction pour suivre facilement une démonstration pénible et obscure, telle qu'il s'en rencontre plus d'une dans Archimède. Chaque membre de phrase est clair et très-intelligible à le considérer seul; mais le tout est si long, qu'on a souvent oublié le commencement, quand on arrive à l'endroit où le sens est complet. Ces inconvéniens se retrouvent presque tous, avec beaucoup d'autres, dans les traductions latines;

mais la majeure partie a disparu tout naturellement dans la traduction de M. Peyrard, qui s'est permis d'écrire, *rayon*, *tangente*, *parabole* et *paramètre*. Cependant il a conservé assez souvent *section du cône rectangle*, et peut-être a-t-il eu tort (*). Il auroit pu s'autoriser de l'exemple d'Apollonius; mais il a voulu sans doute respecter son original, toutes les fois qu'il a cru le pouvoir sans nuire à la clarté. Il a voulu tenir la promesse qu'il a faite, dans son *Prospectus*, de donner une traduction littérale; et la sienne nous a paru telle en effet.

Archimède étoit fort exact à démontrer toutes les propositions dont il faisoit usage, à moins qu'elles ne fussent déjà démontrées dans ses Traités antérieurs, ou dans ceux d'autres Auteurs alors fort répandus : mais une partie de ces ouvrages est perdue; de là quelques lacunes que M. Peyrard a remplies dans ses notes. Quelquefois aussi il y démontre algébriquement des lemmes qui, traités à la manière des Anciens, sont trop obscurs et trop pénibles. Souvent il a puisé dans les Commentaires d'Eutocius; et il auroit pu lui faire bien d'autres emprunts, s'il n'avoit craint de trop grossir le volume. Quelquefois aussi Eutocius, en suivant de trop près la marche d'Archimède, n'est guère moins obscur que lui; et c'est ce qu'on remarque principalement à la proposition 9 du liv. 2 de l'Equilibre des plans. La démonstration d'Archimède a trois énormes colonnes

(*) M. Delambre a raison; j'ai remplacé cette expression par celle de *parabole*.

in-folio, et n'est rien moins que lumineuse. Eutocius commence sa note en disant, que le théorême est fort peu clair, et il promet de l'expliquer de son mieux. Il y emploie quatre colonnes du même format et d'un caractère plus serré, sans réussir davantage; au lieu que quatre lignes d'algèbre suffisent à M. Peyrard pour mettre la vérité du théorême dans le plus grand jour. Il est peu croyable qu'Archimède ait pu arriver par une voie si longue à la proposition qu'il vouloit établir; et il est beaucoup plus probable qu'il en aura reconnu la vérité par quelqu'autre moyen, et que, bien sûr de cette vérité, il aura pris ce long détour pour la démontrer, en ne supposant que des propositions avouées et reçues des Géomètres de son temps.

Telle est l'idée que nous pouvons donner ici du travail de M. Peyrard: sa traduction est fidèle et complète; et quand il n'auroit rien ajouté de lui-même, ce seroit déjà un service important rendu aux Géomètres. On prendra, dans la traduction française, une connoissance du génie et des méthodes d'Archimede, aussi juste et aussi exacte que si on le lisoit dans l'original. Le Traducteur a tenu toutes ses promesses, et rempli toutes les conditions qu'il s'étoit imposées dans son *Prospectus*. On doit donc des éloges à M. Peyrard, et desirer que le succès de cette nouvelle traduction lui inspire le courage d'entreprendre celle d'Apollonius, bien moins difficile, au reste, que l'ouvrage qu'il vient d'achever.

Cette autre entreprise seroit d'autant plus utile, que l'édition d'Oxford, la seule qui soit complète, est aujourd'hui d'un prix et d'une rareté qui la tiennent au-dessus des moyens d'un grand nombre de Géomètres.

Fait au Palais des Sciences et Arts, le 22 Septembre 1806.

Signés, La Grange, Delambre,
Rapporteurs.

La Classe approuve le Rapport, et en adopte les Conclusions.

Certifié conforme à l'original, à Paris, le 24 *Septembre* 1806.

Le Secrétaire perpétuel, Signé, Delambre.

A SA MAJESTÉ
L'EMPEREUR ET ROI.

SIRE,

JE m'étois imposé la tâche longue et pénible de faire passer dans notre Langue les *Œuvres d'Archimède*, qui n'avoient encore été traduites dans aucune Langue vivante. Ma tâche étant terminée, je ne formois plus qu'un vœu : c'étoit de dédier au plus grand de tous les Guerriers la Traduction des Écrits du plus grand des Géomètres. VOTRE MAJESTÉ daigne en agréer la Dédicace, le plus cher de mes vœux est accompli.

Je suis, avec respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ IMPÉRIALE ET ROYALE,

Le très-humble, très-obéissant et très-fidèle Sujet,

F. PEYRARD.

AVERTISSEMENT

DU LIBRAIRE.

La Première Edition des Œuvres d'Archimède *ayant été épuisée avec rapidité, il est devenu nécessaire de publier cette nouvelle Edition* in-8°. *Elle a été revue par l'Auteur.*

Les Personnes qui n'ont pu se procurer la Première Edition, me sauront gré, sans doute, de ne pas les priver d'un Ouvrage aussi important pour les progrès des Sciences Mathématiques.

On trouve chez le même Libraire, l'Ouvrage suivant, qui a été adopté par le Gouvernement pour les Bibliothèques des Lycées, et pour être donné en prix aux Elèves de ces Etablissemens.

ANNALES NÉCROLOGIQUES DE LA LÉGION D'HONNEUR, ou *Notices sur la Vie, les Actions d'éclat, les Services Militaires et Administratifs, les Travaux Scientifiques et Littéraires des Membres de la Légion d'Honneur, décédés depuis l'origine de cette Institution;* dédiées à S. M. l'Empereur et Roi, Chef suprême de la Légion d'Honneur, et rédigées d'après des Mémoires authentiques, par *J. Lavallée,* Chef de Division à la grande Chancellerie de la Légion d'Honneur, Secrétaire perpétuel de la Société Philotechnique de Paris, Membre de l'Académie Celtique et de celle des Enfans d'Apollon, de la Société Royale des Sciences de Gottingue, des Académies de Dijon, etc.

Cet Ouvrage étant par ordre alphabétique, fait Suite aussi au Dictionnaire des Hommes célèbres.

Vol. *in*-8°., avec quinze portraits de Légionnaires, gravés en taille-douce, et dont les dessins ont été fournis par les Familles des Légionnaires. Prix, 8 fr. 50 c. broché. En papier vélin, 17 fr.

RAPPORT

Fait à l'Institut National, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques, par MM. Lagrange et Delambre, sur la traduction des Œuvres d'Archimède.

La Classe, en approuvant la traduction d'Euclide, avoit invité l'Auteur (M. Peyrard) à terminer celle des Œuvres d'Archimède, qu'il avoit dès-lors entreprise. Ce travail est achevé. Nous l'avons comparé avec le texte original, et ce sont les résultats de cet examen que nous allons soumettre au jugement de la Classe.

Archimède a conservé la réputation de l'un des génies les plus étonnans, et de l'une des têtes les plus fortes qui se soit jamais appliquée aux Mathématiques. Aucun Géomètre ancien ne s'est fait connoître par des Découvertes plus nombreuses et plus importantes; mais, malgré tant de renommée, il compte aujourd'hui peu de Lecteurs. La principale raison en est, sans doute, l'invention des nouveaux calculs.

Malgré l'avantage des nouvelles méthodes, malgré leur certitude qui n'est plus contestée par les admirateurs même les plus outrés des Anciens, il n'est pas de Géomètre qui ne doive être curieux de voir par quelle adresse et quelle profondeur de méditation, la Géométrie élémentaire a pu s'élever jusqu'à des vérités si difficiles ; comment, par exemple, Archimède a pu trouver et démontrer, de deux manières absolument indépendantes l'une de l'autre, la Quadrature de la Parabole ; comment il a su déterminer le centre de gravité d'un secteur parabolique quelconque, et la position que doit prendre, en vertu de la gravité, un paraboloïde abandonné à lui-même dans un liquide spécifiquement plus pesant. Ses Traités des Spirales, des Conoïdes et des Sphéroïdes, de la Sphère et du Cylindre, brillent par-tout de ce même génie d'invention, qui crée des ressources proportionnées aux difficultés, et parvient ainsi à les surmonter heureusement. L'Arénaire même, quoiqu'il ait en apparence un but plus frivole, n'est pas moins recommandable, soit par des expériences faites avec autant d'adresse que de sagacité, pour mesurer le diamètre du soleil, soit par des efforts très-ingénieux pour suppléer à l'imperfection de l'arithmétique des Grecs, qui n'avoient ni figures, ni noms pour exprimer les nombres au-dessus de cent millions.

Le systême qu'il imagine pour écrire et dénommer un nombre quelconque, porte sur un principe bien peu différent de l'idée fondamentale qui fait le mérite et la simplicité de notre arithmétique arabe, ou plutôt indienne.

On a même cru trouver dans ce systême la première idée des logarithmes ; mais il nous semble que c'est outrer les choses. On voit à la vérité dans l'Arénaire deux progressions, l'une arithmétique et l'autre géométrique, dont la première sert à trouver un terme quelconque de la seconde. Mais c'est une pure spéculation destinée à montrer comment on pourroit donner une extension indéfinie à l'arithmétique de ce temps, et jamais Archimède n'a songé à rendre son idée utile dans les calculs ordinaires, à changer la multiplication en une addition, et encore moins la division en une soustraction. On ne lui voit réellement exécuter aucun calcul. Il se contente d'indiquer de quel ordre doit être le produit de deux termes quelconques de sa progression géométrique, dont la raison est dix; et pour plus de facilité dans ses opérations, on lui voit constamment ajouter au résultat du calcul, ce qui lui manque pour être un multiple d'une puissance parfaite de dix. Mais en réduisant à sa juste valeur le mérite de son invention, il n'en est pas moins vrai qu'elle est extrêmement curieuse; et c'est à son Arénaire, ainsi qu'à sa Mesure du Cercle, et au soin qu'a pris son Commentateur Eutocius de développer tous ses calculs, que nous sommes redevables de tout ce que nous savons de plus précis sur l'arithmétique des Grecs; et si vous y ajoutez le fragment d'Apollonius, conservé par Pappus et publié par Wallis, et sur-tout les calculs astronomiques de Théon, dans son Commentaire sur l'Almageste de Ptolémée, vous aurez de quoi recomposer un Traité complet d'arithmétique grecque, en y comprenant la formation des puissances et l'extraction de la racine quarrée.

Voilà bien des motifs pour qu'au moins une fois en sa vie tout Géomètre se croie obligé de lire Archimède tout entier. Mais les bonnes éditions sont rares ou incomplètes : le texte grec y est singulièrement altéré, et les fautes d'impression ne sont pas rares, même dans la belle édition d'Oxford ; il est vrai qu'elles sont de nature à être facilement apperçues et corrigées. Le style des Traducteurs, Commendin et Torelli exceptés, est souvent barbare, et quelques-uns ont montré qu'ils entendoient médiocrement le grec et la géométrie.

Le style d'Archimède lui-même est beaucoup meilleur, il est plus doux, plus agréable que celui d'aucun Géomètre grec. L'harmonie naturelle des grands mots qu'il est forcé d'employer, distrait souvent le Lecteur de l'attention qu'il doit au fonds des idées. Malgré le dialecte dorique qui domine plus ou moins dans presque tous ses ouvrages, il est, grammaticalement parlant, toujours clair et facile à comprendre. Archimède suit assez généralement l'ordre naturel, et ne se permet d'inversions que celles qu'il n'a pu éviter, parce qu'elles sont dans le génie de sa langue; mais ce génie n'est pas précisément celui qui convient aux mathématiques. La multitude d'articles dont cette langue est embarrassée, beaucoup plus que la nôtre, la place où se mettent ces articles qui s'entrelacent et se trouvent souvent assez loin des mots auxquels ils appartiennent, toute cette construction nuit essentiellement à la clarté, sur-tout dans les propositions longues et compliquées ; et le Traducteur français peut facilement obtenir à cet égard un avantage marqué sur son original.

On s'attendroit à retrouver chez les Géomètres anciens une foule de termes grecs dont nous faisons un usage continuel. Quoique le mot *para-*

PRÉFACE

CONTENANT LA VIE ET L'ANALYSE DES ÉCRITS D'ARCHIMÈDE.

ARCHIMÈDE naquit 287 ans avant l'ère vulgaire; il étoit le parent et l'ami du Roi Hiéron, qui gouverna, avec douceur et sagesse, les Syracusains, pendant l'espace de cinquante ans.

Platon et Aristote florissoient dans le siècle précédent. Euclide n'existoit plus, ou du moins il étoit d'une extrême vieillesse, lorsqu'Archimède parut. La naissance d'Apollonius de Perge n'eut lieu qu'environ quarante ans après.

Archimède avoit pour ami intime Conon, dont parle Virgile dans sa troisième Eglogue (*). Conon étant mort, Archimède écrivit à Dosithée la lettre suivante, qui est à la tête de son Traité de la Quadrature de la Parabole:

(*) In medio duo signa: Conon, et quis fuit alter?
Descripsit radio totum qui gentibus orbem,
Tempora quæ messor, quæ curvus arator haberet:

« Je venois d'apprendre que Conon, le seul de mes amis qui me restoit encore, étoit mort; je savois que tu étois étroitement lié d'amitié avec lui, et très-versé dans la Géométrie. Profondément affligé de la mort d'un homme qui étoit mon ami et qui avoit dans les Sciences Mathématiques une sagacité tout-à-fait admirable, je pris la résolution de t'envoyer, comme je l'aurois fait à lui-même, un théorême de Géométrie, dont personne ne s'étoit encore occupé et qu'enfin j'ai voulu examiner, etc. ».

Archimède continua de correspondre avec Dosithée, et lui adressa tous les Ouvrages qu'il publia dans la suite.

La Vie d'Archimède est peu connue. Héraclides l'avoit écrite; mais malheureusement elle n'est point parvenue jusqu'à nous. Ce que nous en savons, nous le devons à Polybe, à Cicéron, à Tite-Live, à Plutarque et à quelques autres Auteurs anciens.

Archimède fit un voyage en Égypte. Ce fut alors qu'il inventa la fameuse vis qui porte son nom, et dont les Egyptiens se servirent dans la suite pour répandre et distribuer les eaux du Nil dans les lieux qu'elles ne pouvoient atteindre.

Archimède avoit une ardeur invincible pour l'étude. On raconte de lui que, sans cesse retenu par les charmes de l'étude, il oublioit de boire et de manger. Traîné souvent par force aux bains et aux étuves, il traçoit des figures de Géométrie sur les cendres, et des lignes sur son corps enduit d'essence.

« De quelle ardeur, dit Cicéron, Archimède ne devoit-il pas être enflammé pour l'étude, lui qui, occupé à décrire certaines figures, ne s'apperçut pas même que sa Patrie étoit au pouvoir des Romains (*) » ?

Le Roi Hiéron avoit fait remettre à un orfèvre une certaine quantité d'or pour en faire une couronne; mais l'Artiste retint une partie de cet or, et lui substitua un égal poids d'argent. Archi-

(*) Quem enim ardorem studii censetis fuisse in Archimede, qui dum in pulvere quodam describit attentius, ne patriam quidem captam esse senserit? Cic. *De Finibus*, lib. v.

mède fut consulté sur le moyen de découvrir la quantité d'argent substituée à l'or. Un jour qu'il étoit aux bains, tout-à-coup se présente à son esprit la solution de ce problême. On dit que transporté de joie, il s'élance du bain, et, qu'oubliant qu'il étoit nu, il traverse les rues de Syracuse, en criant : *Je l'ai trouvé, je l'ai trouvé.*

On raconte encore que dans une autre circonstance, il démontra au Roi Hiéron, qu'on pouvoit, avec une force donnée, mouvoir une masse quelque grande qu'elle pût être. Il ajouta même que d'une autre terre il pourroit déranger la nôtre de sa place. Le Roi, étonné, l'invite à faire mouvoir devant lui une grande masse, avec une très-petite force. Il se trouvoit dans le port une galère qui ne pouvoit être tirée à terre qu'à force de peines et de bras; Archimède y fait placer un grand nombre d'hommes, outre sa charge ordinaire; il s'assied ensuite à une distance considérable, et, au moyen d'un moufle, attire à lui avec la main, et sans un grand effort, le vaisseau, qui sembloit voguer naturellement sur la surface de la mer. Le Roi frappé d'étonnement, admire la puissance de l'art; il presse Archimède de lui construire des machines, à l'aide desquelles il puisse à son gré attaquer ou se défendre.

Hiéron ne se servit point des machines que lui construisit Archimède; car il dut à la fortune et sur-tout à lui-même de passer sa longue vie dans une paix continuelle.

Après la mort d'Hiéron, Hiéronyme, son petit-fils, monta sur le trône. Au lieu d'imiter son aïeul, il affecta de marcher sur les traces de Denis le Tyran. Les Syracusains se soulevèrent et le précipitèrent du trône, après un règne de quelques mois. Hipparque, général des Syracusains, favorisa le parti des Carthaginois. Le Sénat romain chargea Marcellus de s'emparer de Syracuse.

« Tout étant prêt, dit Polybe, les Romains étoient sur le point d'attaquer les tours. Mais Archimède avoit de son côté disposé des machines capables de lancer des traits à quelque distance que ce fût. Les ennemis étoient encore loin de la ville, qu'avec des balistes et des catapultes plus grandes qu'à l'ordinaire et animées d'une très-grande force, il les perçoit de tant de traits, qu'ils ne savoient comment les éviter. Quand les traits passoient au-delà, il avoit de plus petites catapultes proportionnées à la distance; ce qui causoit une si grande confusion parmi les Romains, qu'ils ne pouvoient rien entreprendre. Marcellus, ne sachant quel parti prendre, fut obligé de faire avancer secrètement ses galères à la faveur de la nuit. Mais quand elles furent près de terre et à la portée du trait, Archimède inventa un autre stratagème contre ceux qui combattoient de leurs vaisseaux : il fit percer des trous dans la muraille, à hauteur d'homme et d'une palme d'ouverture en dehors. Il plaça en dedans des arbalètriers et de petits scorpions. Par le moyen de ces ouvertures, il atteignoit la flotte ennemie, et mettoit en défaut toutes ses attaques. De cette manière, soit que les ennemis fussent éloignés, ou qu'ils fussent près de terre, non-seulement il rendoit tous leurs projets inutiles, mais encore il en tuoit une grande partie. Lorsqu'ils vouloient dresser les sambuques, des machines disposées le long des murs en dedans, s'élevoient sur les forts, et s'avançoient bien loin au-delà. Beaucoup d'entre elles jetoient des pierres qui ne pesoient pas moins de dix talens, et d'autres des masses de plomb d'une égale pesanteur. Quand les sambuques s'approchoient, on tournoit par le moyen d'une corde les becs de ces machines selon le besoin, et de là on faisoit tomber sur les sambuques des pierres qui non-seulement brisoient ces machines, mais encore mettoient les vaisseaux et ceux qui s'y trouvoient dans un extrême péril.

» Il y avoit encore d'autres machines qui dirigeoient des pierres contre les ennemis qui s'avançoient couverts par des claies, et qui se croyoient en sûreté contre les traits lancés des murailles; mais ces pierres tomboient si juste, qu'ils étoient obligés de se retirer de la proue.

» Outre cela, il lançoit une main de

fer attachée à une chaîne. Lorsque cette main avoit saisi la proue d'un vaisseau, celui qui conduisoit le bec de la machine abaissoit vers la terre le bout qui étoit en dedans du mur. Quand il avoit dressé le vaisseau sur la poupe, il tenoit immobile pendant quelque temps le bec de la machine, et lâchoit ensuite la main de fer et la chaîne, par le moyen d'une poulie. De cette manière il y avoit des navires qui tomboient sur le côté, d'autres sur le devant, et la plupart tomboient perpendiculairement sur la proue, et étoient submergés. Marcellus étoit dans un très-grand embarras : tous ses projets étoient renversés par les inventions d'Archimède; il faisoit des pertes considérables, et les assiégés se moquoient de tous ses efforts.

» Appius qui avoit éprouvé sur terre les mêmes difficultés, avoit abandonné son entreprise. Quoique son armée fût loin de la ville, elle étoit accablée des pierres et des traits que lançoient les balistes et les catapultes; tant étoit prodigieuse la quantité des traits qui en partoient, et la roideur avec laquelle ils étoient lancés.

» Lorsque les ennemis s'approchoient de la ville, blessés par les traits qu'on lançoit à travers la muraille, ils faisoient des efforts superflus. Si, couverts de leurs boucliers, ils s'avançoient avec impétuosité, ils étoient assommés par les pierres et par les poutres qu'on leur faisoit tomber sur la tête; sans parler des pertes que leur causoient ces mains de fer dont nous avons fait mention plus haut, et qui, en élevant des hommes avec leurs armes, les brisoient ensuite contre terre.

» Appius se retira dans son camp, et assembla le Conseil des Tribuns. On résolut de tenter toutes sortes de moyens pour surprendre Syracuse, à l'exception d'un siége en forme; et cette résolution fut exécutée. Car pendant huit mois que les Romains restèrent devant la ville, il n'y eut sorte de stratagêmes que l'on n'inventât, ni d'actions de valeur que l'on ne fît, à l'assaut près, que l'on n'osa jamais tenter. Telle étoit la puissance d'un seul homme; tel étoit le pouvoir de son génie. Avec des forces de terre et de mer aussi considérables la ville, à la première attaque, tomberoit au pouvoir des Romains, si un seul vieillard n'étoit dans Syracuse. Archimède est dans ses murs, et ils n'osent même pas en approcher ».

Voilà ce que rapporte Polybe : Tite-Live et Plutarque racontent les mêmes choses.

« Lorsque les vaisseaux de Marcellus furent à la portée de l'arc, dit Tzetzès, le vieillard (Archimède) fit approcher un miroir hexagone qu'il avoit fabriqué. Il plaça, à une distance convenable de ce miroir, d'autres miroirs plus petits, qui étoient de la même espèce, et qui se mouvoient à l'aide de leurs charnières et de certaines lames quarrées de métal. Il posa ensuite son miroir au milieu des rayons solaires du midi d'été et d'hiver. Les rayons du soleil étant réfléchis par ce miroir, il s'alluma un horrible incendie dans les vaisseaux, qui furent réduits en cendres à une distance égale à celle de la portée de l'arc..... (*) ».

(*) Voyez mon Mémoire sur un nouveau Miroir ardent, tom. II, pag. 500.

Marcellus désespérant de prendre Syracuse, cessa toute attaque de vive force; convertit le siége en blocus, et quelque temps après, profitant d'une fête de Diane, fit enfoncer une des portes de la ville, et surprit les Syracusains au milieu des festins et des plaisirs. Tandis que les vainqueurs répandus dans la ville se livrent à toutes sortes d'excès, Archimède, entièrement occupé de figures qu'il avoit tracées, fut tué par un soldat qui ne le connoissoit point. Marcellus déplora la perte d'Archimède; lui fit donner une sépulture honorable; ordonna de chercher ses parens et les prit sous sa protection.

Archimède avoit prié ses proches et ses amis de mettre sur son tombeau une sphère inscrite dans un cylindre, et de marquer dans l'inscription les rapports de ces deux figures; ses vœux furent accomplis. Cicéron, étant questeur en Sicile, découvrit son tombeau environné de ronces et d'épines.

« Etant questeur en Sicile, dit Cicéron(*), je mis tous mes soins à découvrir le tombeau d'Archimède. Les Syracusains affirmoient qu'il n'existoit point. Je le trouvai environné de ronces et d'épines. Je fis cette découverte à l'aide d'une inscription qu'on disoit avoir été gravée sur son monument, et qui indiquoit qu'il étoit surmonté d'une sphère et d'un cylindre.

(*) Cujus (Archimedis) ego Quæstor ignoratum ab Syracusanis, cùm esse omnino negarent, septum undique, vestitum vepribus et dumetis indagavi sepulcrum: tenebam enim quosdam senariolos, quos in ejus monumento esse inscriptos acceperam: qui declarabant in summo sepulcro sphæram esse positam cum cylindro. Ego autem cùm omnia collustrarem oculis (est enim ad portas Agragianas magna frequentia sepulcrorum), animadverti columellam non multum è dumis eminentem: in qua inerat sphæræ figura, et cylindri. Atque ego statim Syracusanis (erant autem principes mecum) dixi, me illud ipsum arbitrari esse quod quærerem. Immissi cum falcibus multi purgarunt, et aperuerunt locum. Quò cùm patefactus esset aditus, ad adversam basim accessimus. Apparebat epigramma exesis posterioribus partibus versiculorum, dimidiatis ferè. Ita nobilissima Græciæ civitas, quondam verò etiam doctissima, sui civis unius acutissimi monumentum ignorasset, nisi ab homine Arpinate didicisset. Cic. *Tuscul.* lib. V.

Parcourant des yeux les nombreux tombeaux qui se trouvent vers la porte d'Agragante, j'apperçus une petite colonne qui s'élevoit au-dessus des buissons, dans laquelle se trouvoit la figure d'une sphère et d'un cylindre. Je m'écriai aussitôt, devant les principaux habitans de Syracuse, qui étoient avec moi : voilà, je pense, ce que je cherchois ! Un grand nombre de personnes furent chargées de couper les buissons et de découvrir le monument. Nous nous approchâmes de la colonne. Nous vîmes l'inscription à moitié rongée par le temps. Ainsi la plus noble et jadis la plus docte des cités de la Grèce, ignoreroit encore où est le tombeau du plus illustre de ses citoyens, si un homme d'Arpinum ne le lui avoit appris ».

Voilà tout ce que nous savons de la vie d'Archimède, d'après les anciens Auteurs. Je vais parler à présent de ses écrits et des machines qu'il a inventées.

Beaucoup de personnes croient que les Ouvrages d'Archimède qui sont parvenus jusqu'à nous, sont altérés et tronqués. Ces personnes sont dans l'erreur. Les Ouvrages d'Archimède que nous possédons, c'est-à-dire presque tous les Ouvrages qu'il a composés, ne sont ni altérés ni tronqués. Il faut cependant en excepter son Traité des Corps qui sont portés sur un fluide, que nous ne possédons plus qu'en latin, et dont une partie des démonstrations de la proposition 8 du premier livre, et de la proposition 2 du second, ont péri en partie par l'injure des temps. Je ne parle pas du livre des Lemmes que nous n'avons qu'en arabe.

Les Ouvrages d'Archimède sont : *De la Sphère et du Cylindre*, *de la Mesure du Cercle*, *des Conoïdes et des Sphéroïdes*, *des Hélices*, *de l'Équilibre des Plans*, *de la Quadrature de la Parabole*, *l'Arénaire*, *des Corps portés sur un fluide*, et *les Lemmes*.

Je vais mettre sous les yeux du Lecteur les principaux théorèmes qui sont démontrés et les principaux problèmes qui sont résolus dans les Œuvres d'Archimède. Je ne parlerai point d'une foule de théorêmes infiniment précieux, qu'il est obligé de démontrer pour arriver à son but.

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

LIVRE I.

1. La surface d'un cylindre droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

2. La surface d'un cône droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

3. La surface d'une sphère quelconque est quadruple d'un de ses grands cercles.

4. Une sphère quelconque est quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère, et une hauteur égale au rayon de cette même sphère.

5. Ces choses étant démontrées, il est évident que tout cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère,

et une hauteur égale au diamètre de cette sphère, est égal à trois fois la moitié de cette sphère, et que la surface de ce cylindre, les bases étant comprises, est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère.

6. La surface d'un segment sphérique quelconque plus petit que la moitié de la sphère, est égale à un cercle qui a pour rayon une droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est à la base du segment.

7. Si le segment est plus grand que la moitié de la sphère, sa surface sera encore égale à un cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

8. Un secteur quelconque d'une sphère est égal à un cône qui a une base égale à la surface du segment sphérique qui est dans le secteur, et une hauteur égale au rayon de cette sphère.

LIVRE II.

1. Un cône ou un cylindre étant donné, trouver une sphère égale à ce cône ou à ce cylindre.

2. Couper une sphère donnée de manière que les segmens aient entre eux une raison donnée.

3. Construire un segment sphérique semblable à un segment sphérique donné, et égal à un autre segment sphérique aussi donné.

4. Etant donnés deux segmens de la même sphère, ou de différentes sphères, trouver un segment sphérique qui soit semblable à l'un des deux, et qui ait une surface égale à celle de l'autre.

5. Retrancher d'une sphère un segment, de manière que la raison de ce segment au cône, qui a la même base et la même hauteur que le segment, soit la même qu'une raison donnée.

DE LA MESURE DU CERCLE.

1. Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.

2. La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre, réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre et plus grande que les dix soixante-onzièmes de ce même diamètre.

DES CONOÏDES ET DES SPHÉROÏDES (*).

1. Un segment quelconque d'un conoïde parabolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, est égal à trois

(*) Par conoïdes Archimède entend des solides engendrés par la révolution d'une parabole ou d'une hyperbole tournant sur son axe; et par sphéroïde il entend des solides engendrés par la révolution d'une ellipse tournant sur son grand ou sur son petit axe.

fois la moitié du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

2. Si un segment d'un conoïde parabolique est retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, ce plan sera parallèlement égal à trois fois la moitié du segment du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

3. Si deux segmens d'un conoïde parabolique sont retranchés par deux plans, dont l'un soit perpendiculaire sur l'axe et dont l'autre ne lui soit pas perpendiculaire, et si les axes des segmens sont égaux, ces segmens seront égaux entre eux.

4. Si deux segmens d'un conoïde parabolique sont retranchés par un plan conduit d'une manière quelconque, ces segmens sont entre eux comme les quarrés de leurs axes.

5. Un segment d'un conoïde hyperbolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, est à un cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite

ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe (*).

6. Si un segment d'un conoïde hyperbolique est retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, le segment du conoïde sera au segment du cône qui a la même base et le même axe que le segment, comme une droite composée de l'axe du segment, et du triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment, et du double de la droite ajoutée à l'axe.

7. La moitié d'un sphéroïde quelconque coupé par un plan conduit par le centre et perpendiculaire sur l'axe, est double du cône qui a la même base et le même axe que le segment.

8. Si un sphéroïde quelconque est coupé par un plan conduit par le centre et non perpendiculaire sur l'axe, la moi-

---

(*) L'ajoutée à l'axe est la droite comprise entre le sommet du conoïde et le sommet du cône dont la surface est engendrée par les asymptotes; c'est ce que nous appelons la moitié du premier axe.

tié du sphéroïde sera encore double d'un segment de cône qui aura la même base et le même axe que le segment.

9. Le segment d'un sphéroïde quelconque coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe qui ne passe pas par le centre, est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde, et de l'axe du plus grand segment est à l'axe du plus grand segment.

10. Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, le plus petit segment sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment, comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des segmens qui sont produits par le plan coupant et de l'axe du petit segment est à l'axe du grand segment.

11. Le grand segment d'un sphéroïde quelconque coupé non par son centre par un plan perpendiculaire sur l'axe, est au cône qui a la même base et le même axe

que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment.

12. Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, le plus grand segment du sphéroïde sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que lui, comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des segmens qui ont été produits par cette section, et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment.

DES HÉLICES.

1. Si une ligne droite, une de ses extrémités restant immobile, tourne dans un plan avec une vîtesse uniforme jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, et si un point se meut avec une vîtesse uniforme dans la ligne qui tourne, en partant de l'extrémité immobile, ce point décrira une hélice dans un plan; la sur-

face qui est comprise par l'hélice, et par la ligne droite revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, est la troisième partie d'un cercle qui a pour centre le point immobile, et pour rayon la partie de la ligne droite qui a été parcourue par le point dans une seule révolution de la droite.

2. Si une droite touche l'hélice à son extrémité dernière engendrée, et si de l'extrémité immobile de la ligne droite qui a tourné et qui est revenue au même endroit d'où elle étoit partie, on mène sur cette ligne une perpendiculaire qui coupe la tangente; cette perpendiculaire sera égale à la circonférence du cercle.

3. Si la ligne droite qui a tourné et le point qui s'est mu dans cette ligne continuent à se mouvoir en réitérant leurs révolutions, et en revenant au même endroit d'où ils avoient commencé à se mouvoir; la surface comprise par l'hélice de la troisième révolution est double de la surface comprise par l'hélice de la seconde; la surface comprise par l'hélice de la quatrième est triple; la

surface comprise par l'hélice de la cinquième est quadruple; et enfin les surfaces comprises par les hélices des révolutions suivantes sont égales à la surface comprise par l'hélice de la seconde révolution multipliée par les nombres qui suivent ceux dont nous venons de parler. La surface comprise par l'hélice de la première révolution est la sixième partie de la surface comprise par l'hélice de la seconde.

4. Si l'on prend deux points dans une hélice décrite dans une seule révolution, si de ces points on mène des droites à l'extrémité immobile de la ligne qui a tourné, si l'on décrit deux cercles qui aient pour centre le point immobile et pour rayons les droites menées à l'extrémité immobile de la ligne qui a tourné, et si l'on prolonge la plus petite de ces droites; la surface comprise tant par la portion de la circonférence du plus grand cercle, qui est sur la même hélice entre ces deux droites, que par l'hélice et par le prolongement de la plus petite droite, est à la surface comprise tant par

la portion de la circonférence du plus petit cercle, que par la même hélice et par la droite qui joint les extrémités, comme le rayon du petit cercle, conjointement avec les deux tiers de l'excès du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit est au rayon du plus petit cercle, conjointement avec le tiers de l'excès dont nous venons de parler.

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

LIVRE I.

1. Des grandeurs commensurables sont en équilibre, lorsqu'elles sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues.

2. Des grandeurs incommensurables sont en équilibre, lorsque ces grandeurs sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues.

3. Si d'une grandeur quelconque, on retranche une certaine grandeur qui n'ait pas le même centre de gravité que la

grandeur entière, pour avoir le centre de gravité de la grandeur restante, il faut prolonger, vers le côté où est le centre de gravité de la grandeur entière, la droite qui joint le centre de gravité de la grandeur totale et de la grandeur retranchée; prendre ensuite sur le prolongement de la droite qui joint les centres de gravité dont nous venons de parler, une droite qui soit à la droite qui joint les centres de gravité comme la pesanteur de la grandeur retranchée est à la pesanteur de la grandeur restante, le centre de gravité de la grandeur restante sera l'extrémité de la droite prise sur le prolongement.

4. Le centre de gravité d'un parallélogramme est le point où les deux diagonales se rencontrent.

5. Le centre de gravité d'un triangle quelconque est le point où se coupent mutuellement des droites menées des angles du triangle aux milieux des côtés.

6. Le centre de gravité d'un trapèze quelconque, ayant deux côtés parallèles, est dans la droite qui joint les milieux

des deux côtés parallèles, partagée de manière que la partie placée vers le point où le plus petit des côtés parallèles est partagé en deux parties égales, soit à l'autre partie comme le double du plus grand des côtés parallèles, conjointement avec le plus petit est au double du plus petit, conjointement avec le plus grand.

LIVRE II.

1. Le centre de gravité d'un segment compris par une droite et par une parabole, partage le diamètre, de manière que la partie qui est vers le sommet est égale à trois fois la moitié de la partie qui est vers la base.

2. Le centre de gravité d'un segment retranché d'une surface parabolique est dans la ligne droite qui est le diamètre du segment partagé en cinq parties égales; et il est placé dans la partie du milieu, coupée de manière que la portion qui est plus près de la plus petite base du segment, soit à l'autre portion comme un

solide ayant pour base le quarré construit sur la moitié de la grande base du segment, et pour hauteur le double de la plus petite base, conjointement avec la plus grande, est à un solide ayant pour base le quarré construit sur la moitié de la plus petite base du segment et pour hauteur le double de la plus grande base du segment, conjointement avec la plus petite base du segment.

DE LA QUADRATURE DE LA PARABOLE.

Un segment quelconque compris par une droite et par une parabole, est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que ce segment.

L'ARÉNAIRE.

Dans ce livre, adressé à Gélon, qui étoit fils d'Hiéron et qui mourut quelques mois avant son père, Archimède fait voir que le nombre des grains de sable contenus dans la sphère des étoiles fixes, seroit au-dessous de 1 suivi de 63 zéros, le diamètre des étoiles fixes étant de 10,000,000,000 stades; le stade étant de 10,000 doigts, et une sphère dont le diamètre seroit la quarantième partie d'un doigt, contenant 64,000 grains de sable.

Ce livre est infiniment intéressant. Archimède expose le système du monde imaginé par Aristarque, qui est le même que celui de Copernic. Il donne un moyen fort ingénieux pour prendre le diamètre apparent du soleil. Pour faire ses calculs, il a imaginé un systême de numération qui est à peu de chose près le même que le nôtre; il se sert de deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique. Le premier terme de la première progression est zéro, et la différence est un; le premier terme de la progression géométrique un et la raison dix. C'est la comparaison de ces deux progressions qui nous ont menés à la découverte des logarithmes.

DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

LIVRE I.

1. Si un corps qui, sous un volume égal, a la même pesanteur qu'un fluide, est abandonné dans ce fluide, il s'y plongera jusqu'à ce qu'il n'en reste rien hors de la surface du fluide; mais il ne descendra point plus bas.

2. Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, une partie de ce corps restera au-dessus de la surface de ce fluide.

3. Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il s'y enfoncera jusqu'à ce qu'un volume de liquide égal au volume de la partie du corps qui est enfoncé ait la même pesanteur que le corps entier.

4. Si un corps plus léger qu'un fluide est enfoncé dans ce fluide, ce corps remontera avec une force d'autant plus grande, qu'un volume égal du fluide sera plus pesant que ce corps.

5. Si un corps plus pesant qu'un fluide

est abandonné dans ce fluide, il sera porté en bas jusqu'à ce qu'il soit au fond; et ce corps sera d'autant plus léger dans ce fluide, que la pesanteur d'une partie du fluide, ayant le même volume que ce corps, sera plus grande.

6. Si une grandeur solide qui est plus légère qu'un fluide, et qui a la figure d'un segment sphérique, est abandonnée dans un fluide, de manière que la base du segment ne touche point le fluide, le segment sphérique se placera de manière que l'axe du segment ait une position verticale. Si l'on incline le segment de manière que la base du segment touche le fluide, il ne restera point incliné, s'il est abandonné à lui-même, et son axe reprendra une position verticale.

7. Si un segment sphérique plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, de manière que la base entière soit dans le fluide, il se placera de manière que l'axe du segment ait une position verticale.

LIVRE II.

Archimède détermine dans ce livre les différentes positions que doit prendre un conoïde plongé dans un fluide suivant les différens rapports de l'axe au paramètre, et suivant les différens rapports des pesanteurs spécifiques du conoïde et du fluide.

LEMMES.

Ce livre renferme plusieurs théorêmes et plusieurs problêmes très-curieux, et utiles à l'analyse géométrique.

Tels sont les théorêmes qu'Archimède a démontrés, et les problêmes qu'il a résolus. Aucun de ces théorêmes n'avoit été démontré, aucun de ces problêmes n'avoit été résolu avant lui. Bien différent en cela d'Euclide et d'Apollonius, qui n'ont guère fait que rassembler en corps de doctrine des matériaux épars;

mais qui l'ont fait d'une manière admirable.

Archimède, pour démontrer ces théorêmes et pour résoudre ces problêmes, n'a employé que la Géométrie élémentaire, et les trois principes suivans :

1. Deux lignes qui sont dans un plan, et qui ont les mêmes extrémités, sont inégales, lorsqu'elles sont l'une et l'autre concaves du même côté, et que l'une est comprise toute entière par l'autre et par la droite qui a les mêmes extrémités que cette autre, ou bien lorsque l'une n'est comprise qu'en partie et que le reste est commun : la ligne comprise est la plus courte.

2. Pareillement lorsque des surfaces ont les mêmes limites dans un plan, la surface plane est la plus petite.

3. Deux surfaces, qui ont les mêmes limites dans un plan, sont inégales, lorsqu'elles sont l'une et l'autre concaves du même côté, et que l'une est comprise toute entière par l'autre et par le plan qui a les mêmes limites que cette autre; ou bien lorsque l'une n'est comprise qu'en

partie et que le reste est commun : la surface comprise est la plus petite.

C'est à l'aide de ces trois principes, dont personne n'avoit encore fait usage, qu'Archimède fit faire à la Géométrie des progrès dont toute l'antiquité fut étonnée, et qui excitent encore aujourd'hui toute notre admiration. Sans ces trois principes, il lui eût été impossible de faire aucune de ses sublimes découvertes, à moins qu'il n'eût fait usage de la considération de l'infini ; c'est-à-dire, à moins qu'il n'eût regardé une courbe comme étant un assemblage d'une infinité de lignes droites, et un solide de révolution comme étant un polyèdre terminé par une infinité de surfaces planes, ou comme étant un assemblage d'une infinité de troncs de cône. Mais les Anciens étoient loin d'admettre de semblables suppositions, et aujourd'hui même on commence à ne vouloir plus les admettre, du moins dans les élémens de Mathématiques.

Archimède n'a point cherché à démontrer les trois principes dont il a fait usage, parce qu'il est impossible de les démontrer, quand on ne veut pas faire usage de la considération de l'infini. Cependant Eutocius et dans la suite plusieurs autres Géomètres l'ont tenté, mais en vain. Pour démontrer, par exemple, que la somme de deux tangentes est plus petite que l'arc de cercle qu'elles embrassent, ces Géomètres font le raisonnement suivant : Partageons l'arc en deux parties égales, et par le point de division menons une tangente ; partageons les nouveaux arcs chacun en deux parties égales, et par les points de division menons de nouvelles tangentes, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'arc soit divisé en une infinité de parties égales. La somme des deux tangentes est plus grande que le contour de la portion du polygone régulier premièrement circonscrit ; le contour de la portion de polygone régulier premièrement circonscrit est plus grand que le contour de la portion de polygone secondement circonscrit ; et enfin le contour de la portion du polygone régulier qui a été circonscrit l'avant-dernier, est plus grand que le contour de la portion du polygone régulier circonscrit en dernier lieu ; donc la somme des deux premières tangentes est plus grande que le contour de la portion de polygone régulier circonscrit en dernier lieu. Mais le contour de la portion du polygone régulier circonscrit en dernier lieu, est égal à l'arc entier, parce que la portion d'un polygone régulier d'une infinité de côtés, est égale à l'arc auquel il est circonscrit. Donc la somme des deux premières tangentes est plus grande que l'arc entier.

Pour que cette conclusion fût légitime, il faudroit qu'ils démontrassent encore que la somme de deux tangentes menées en dernier lieu est plus grande que l'arc qu'elles embrassent ; c'est-à-dire qu'ils n'ont encore rien démontré pour ceux qui bannissent de la Géométrie l'usage de la considération de l'infini.

Plusieurs Géomètres pensent que la partie des élémens d'Euclide qui regarde les corps ronds est incomplète : c'est une erreur. Tout ce qu'on regrette de ne pas trouver dans Euclide, relativement à ces corps, ne peut se démontrer qu'à l'aide des trois principes posés par Archimède.

En faisant usage de la considération de l'infini, et à l'aide des nouveaux calculs, on démontreroit beaucoup plus facilement les sublimes découvertes d'Archimède.

Pour démontrer, par exemple, qu'un cercle est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence, Archimède est forcé de faire usage d'une démonstration indirecte. Il démontre qu'il est impossible que le cercle soit plus grand que ce triangle; il démontre ensuite qu'il est impossible qu'il soit plus petit, et il conclut que le cercle est égal à ce triangle. La démonstration d'Archimède est sans réplique, mais elle est indirecte, et cela ne pouvoit être autrement.

En faisant usage de la considération de l'infini, on se contente de dire: Circonscrivons au cercle un polygone régulier d'une infinité de côtés; ce polygone sera égal à un triangle rectangle, dont un des côtés de l'angle droit sera égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit sera égal au contour de ce polygone. Mais un polygone régulier d'une infinité de côtés circonscrit à un cercle est égal à ce cercle; donc le cercle est égal au triangle. Cette démonstration est simple et facile; mais est-elle sans réplique? mais satisfait-elle l'esprit? Non, certes. Cette seconde manière de raisonner est fondée sur ce principe: deux quantités qui ne diffèrent qu'infiniment peu l'une de l'autre sont égales entr'elles. L'esprit repousse ce principe; il lui est impossible de reconnoître que deux choses soient égales, quand l'une est plus grande que l'autre. Il sent qu'un cercle ne sauroit être égal à un polygone qui lui est circonscrit.

Sans doute les démonstrations d'Archimède sont plus longues, sont moins faciles qu'elles ne l'auroient été s'il avoit fait usage de la considération de l'infini et s'il avoit employé les nouveaux calculs; mais aussi elles sont sans réplique; elles satisfont pleinement l'esprit. Aristote dit que la tâche du Géomètre est de démontrer sans réplique: Archimède a rempli sa tâche aussi bien qu'Euclide.

Ceux qui desirent faire des progrès véritablement solides dans les sciences mathématiques ; ceux qui veulent que leur esprit soit doué d'une grande force et d'une grande exactitude, qu'il ait la capacité d'appercevoir à-la-fois clairement et distinctement un grand nombre d'objets et les rapports qu'ils ont entr'eux ; ceux-là doivent lire et méditer Archimède. Archimède est l'Homère des Géomètres.

On lui a reproché de faire souvent usage de démonstrations indirectes. Archimède ne les emploie que lorsqu'il y est forcé ; et il y est forcé dans tous les théorêmes, qui ne pourroient se démontrer directement qu'en faisant usage de la considération de l'infini.

Archimède n'est véritablement difficile que pour ceux à qui les méthodes des Anciens ne sont point familières ; il est clair et facile à suivre pour ceux qui les ont étudiées. J'avoue cependant qu'il y a quelques-unes de ses démonstrations, et sur-tout la démonstration de la proposition 9 du 2^e livre de l'Equilibre des Plans, qu'on ne peut suivre qu'avec la plus grande contention d'esprit. Il est aussi quelquefois obscur, parce que souvent il franchit des idées intermédiaires. Au reste, voici comment Plutarque s'explique sur cette prétendue obscurité que les Modernes lui reprochent.

« On ne sauroit trouver dans toute la Géométrie de théorêmes plus difficiles et plus profonds que ceux d'Archimède, et cependant ils sont démontrés de la manière la plus simple et la plus claire. Les uns attribuent cette clarté à un esprit lumineux ; d'autres l'attribuent à un travail opiniâtre, qui donne un air aisé aux choses les plus difficiles. Il seroit impossible de trouver, selon moi, la démonstration d'un théorême d'Archimède; mais lorsqu'on l'a lue, on croit qu'on l'auroit trouvée sans peine, tant est facile et court le chemin qui conduit à ce qu'il veut démontrer ». *Plutarque, Vie de Marcellus.*

Galilée, qui étoit pénétré d'admiration pour les Écrits d'Archimède, enchérit encore sur les expressions de Plutarque.

Quoique j'aie dit plus haut que les Ouvrages d'Archimède n'étoient difficiles que pour ceux à qui les méthodes des Anciens n'étoient pas familières, je ne partage point cependant l'opinion de Plutarque et de Galilée. Je me garderai bien de dire, par exemple, que les démonstrations d'Archimède sont aussi faciles que celles d'Euclide et d'Apollonius.

Voilà ce que j'avois à dire sur les Ecrits d'Archimède, dont je publie la Traduction accompagnée d'un Commentaire. Ces Ecrits n'avoient encore été traduits dans aucune langue vivante. J'ai fait tous mes efforts pour que ma Traduction fût fidèle, et même mot à mot, quand le génie de notre langue me l'a permis. Dans mon Commentaire, je cherche à éclaircir les endroits difficiles; je supplée les idées intermédiaires que j'ai crues nécessaires pour rendre le sens plus clair, et je démontre plusieurs théorêmes sur lesquels Archimède s'appuie et dont les démonstrations n'existent plus, parce que les Ouvrages où elles se trouvoient ne sont point parvenus jusqu'à nous.

Lorsque mon travail fut terminé, je le livrai à l'examen des Commissaires de l'Institut, MM. Lagrange et Delambre. M. Delambre eut la complaisance de comparer mon Manuscrit avec le Texte grec, et de faire des notes marginales. La Classe des Sciences physiques et mathématiques ayant approuvé mon Ouvrage, je le revis avec le plus grand soin, avant de le livrer à l'impression. M. Delambre a vu toutes les épreuves, il les a comparées scrupuleusement avec le Texte grec, et il m'a fait part de ses observations.

Ma Traduction sort des presses de M. Crapelet. Les Figures devoient être placées à la fin de l'Ouvrage; M. Buisson, Libraire-Editeur, a bien voulu qu'elles fussent mises dans le Texte, et répétées autant de fois que le demande la démonstration; il a consenti volontiers à se charger encore des frais énormes occasionnés par ce changement. Ces Figures ont été calculées avec toute la rigueur possible.

Il me reste encore à parler des machines inventées par Archimède.

Les Anciens lui attribuoient quarante inventions mécaniques ; mais on n'en trouve plus que quelques-unes indiquées obscurément par les auteurs. La plupart de ces inventions nous sont inconnues, parce qu'il dédaigna d'en donner la description. Archimède, dit Plutarque dans la vie de Marcellus, avoit un esprit si profond, un génie si élevé; il possédoit de si grandes connoissances dans la théorie, qu'il ne voulut jamais rien laisser par écrit sur ses inventions mécaniques, qui lui avoient acquis tant de gloire, et qui lui avoient fait attribuer, non une science humaine, mais une intelligence divine.

Des quarante inventions d'Archimède, on ne cite plus aujourd'hui que son Miroir ardent; la vis qui porte son nom; sa sphère; son invention appelée *loculus*. La vis sans fin et la multiplication des poulies passent aussi pour des inventions d'Archimède.

Quant à son Miroir ardent, voyez ce que je dis dans mon Mémoire. Je ne ferai point la description de sa vis inclinée ; elle est connue de tout le monde. Son mécanisme consiste en ce que la pesanteur, qui fait naturellement descendre un corps, est employée seule dans cette machine pour le faire monter, l'eau ne montant à l'aide de la vis que parce qu'elle descend à chaque instant par son propre poids dans cette vis. Ce qui a fait dire à Galilée: *La quale inventione non solo è maravigliosa, ma è miracolosa.*

Qu'on se garde bien de croire que la vis d'Archimède n'est qu'une invention curieuse : cette invention est au contraire capable de produire les plus grands effets. Près de Furnes, il y avoit un étang de près de deux lieues quarrées, dont le fond, dans une grande partie, étoit à six pieds et demi au-dessous du niveau de la basse mer. Des sommes immenses avoient été employées, mais inutilement, pour le dessécher. Des terres couvertes de riches moissons et des habitations nombreuses ont remplacé cet étang. Une vis d'Archimède et deux moulins à palette, mus par le vent, ont opéré toutes ces merveilles. Voyez les deux lettres que M. Alphonse Leroy fils m'a fait l'honneur de m'écrire, et qui se trouvoient dans le *Moniteur* du 22 octobre 1806 et du 12 novembre même année.

La sphère d'Archimède, qui représentoit les mouvemens des astres étoit fameuse chez les Anciens.

Cum Archimedes lunæ, solis, quinque errantium motus in sphæra illigavit, efficit idem quod ille, qui in timæo mundum ædificavit Platonis Deus, ut tarditate et celeritate dissimillimos motus una regeret conversio. Cic. Tusc. quæst. lib. 1.

An Archimedes Siculus concavo ære similitudinem mundi ac figuram potuit machinari, in quo ita solem ac lunam composuit, ut inæquales motus ac cœlestibus similes conversionibus singulis quasi dicbus efficerent : et non modo accessus solis et recessus, vel incrementa diminutionesque lunæ, verum etiam stellarum vel inerrantium, vel vagarum dispares cursus orbis ille dum vertitur, exhiberet ? Lactantius. Divin. inst. lib. 2, cap. 5.

Sans doute qu'Archimède faisoit plus

de cas de sa sphère que de ses autres inventions, puisque c'est la seule dont il avoit laissé une description qui malheureusement ne nous est pas parvenue.

Il seroit difficile de se faire une idée de l'invention appelée *loculus*. Cette invent on semble n'être d'aucune importance; sans doute on a eu tort de l'attribuer à Archimède. Au reste, voici la description que nous en donne Fortunatianus.

Nam si loculus ille Archimedeus quatuordecim eboreas lamellas, quarum anguli varii sunt, in quadratam formam inclusas habens, componentibus nobis aliter atque aliter, modò galeam, modò sicam, aliàs navem, aliàs columnam figurat, et innumerabiles efficit species, solebatque nobis pueris hic loculus ad confirmandam memoriam, plurimum prodesse, quantò majorem potest nobis afferre voluptatem; quantoque pleniorem utilitatem, etc. Gramm. vet. p. 2684.

Avant de finir, je dois parler des Traducteurs et Commentateurs d'Archimède.

Nicolas Tartalea traduisit du grec en

latin, et publia à Venise, en 1543, les ouvrages suivans d'Archimède :

1°. *De Centris gravium valde planis æque repentibus.*

2°. *Quadratura Parabolæ.*

3°. *De insidentibus aquæ, liber primus.*

En 1555, les deux livres *De insidentibus aquæ* parurent à Venise. M. Montucla est dans l'erreur lorsqu'il dit dans son Histoire des Mathématiques, que ces deux livres d'Archimède ont été traduits d'après un manuscrit arabe. Tartalea les a traduits d'après un manuscrit grec, comme il le déclare dans sa préface (1). Peut-être le manuscrit grec existe-t-il encore enfoui dans quelque bibliothèque. J'invite tous les bibliothécaires de l'Europe à s'assurer s'ils ne posséderoient pas ce précieux manuscrit.

---

(1) Cum sorte quadam ad manus meas pervenissent fracti, et qui vix legi poterant quidam libri manu græcâ scripti illius celeberrimi philosophi Archimedis, omnem operam, omne studium, et curam adhibui ut in nostram linguam quæ partes eorum legi poterant, converterentur, etc.

En 1543 parut à Bâle une édition des Œuvres d'Archimède, avec la traduction latine de Jean de Cremone, et revue par Jean Regiomontan. Cette édition ne renferme ni les deux livres *De insidentibus in fluido*, ni les Lemmes. On a joint à cette édition le Commentaire d'Eutocius, grec et latin.

En 1558, Fred. Commandin publia à Venise, avec des Commentaires justement estimés, une excellente Traduction des livres suivans d'Archimède.

1°. *Circuli dimensio.*

2°. *De Lineis spiralibus.*

3°. *Quadratura Paraboles.*

4°. *De Conoïdibus et Sphæroïdibus.*

5°. *De numero Arenæ.*

En 1565, Fred. Commandin publia à Boulogne les deux livres intitulés : *De iis quæ vehuntur in aquâ*, revus, corrigés, et accompagnés d'un excellent Commentaire.

En 1615 parut l'ouvrage de Revault intitulé : *Archimedis opera quæ extant novis demonstrationibus commentariisque illustrata*. Les définitions, les énoncés des propositions, l'Arénaire et les épitres, sont les seules choses d'Archimède que renferme cette édition : le reste est de Revault. Son Ouvrage lui valut le surnom d'*Infelix Commentator*.

En 1657, Greaves et Foster publièrent une Traduction latine des Lemmes. Ils traduisirent ce livre d'après l'arabe.

En 1661, Borelli publia une traduction latine du même Ouvrage, avec un Commentaire.

En 1675 parut l'Archimède abrégé de Barrow.

En 1681 parut l'Archimède de Fr. Maurolicus. Cet Ouvrage n'est qu'une paraphrase d'Archimède, mais une paraphrase très-estimée. Cet Ouvrage avoit paru en 1570. Mais toute l'édition périt par un naufrage, excepté un ou deux exemplaires.

En 1699, Wallis donna une Traduction latine de la Mesure du Cercle et de l'Arénaire.

Enfin, en 1792 parut à Oxford l'Archimède grec et latin de Torelli. La version latine est littérale et élégante tout-à-la-fois. Les variantes qui sont au bas des pages et à la fin du volume, sont infiniment précieuses.

On desireroit que le format ne fût point un grand in-folio pour la commodité du Lecteur. Les figures, très-bien gravées, sont dans le texte, mais elles ne sont point répétées lorsque l'on tourne le feuillet, ce qui en rend la lecture fatigante, et fait perdre le fil de la démonstration.

LORSQUE la Classe des Sciences physiques et mathématiques approuva ma Traduction de la Géométrie d'Euclide, plusieurs Membres témoignèrent leurs regrets de ce que je ne publiois point la Traduction complète de ses Œuvres; et lorsque cette même Classe approuva ma Traduction d'Archimède, elle m'invita à donner celle d'Apollonius. Le double vœu de la Classe sera rempli.

J'ai mis la dernière main à ma Traduction des Œuvres d'Euclide. Elle paroîtra avant la fin de l'année 1808. Cette Traduction renfermera deux volumes in-4°.; elle sera imprimée à l'instar de celle d'Archimède. On souscrit chez l'Auteur, au Lycée Bonaparte; le prix est de 60 fr. pap. ordinaire, et de 120 fr. pap. vélin.

L'Auteur s'occupe actuellement de sa Traduction d'Apollonius de Perge: de cette manière le Public jouira enfin des Traductions des trois plus grands Géomètres de l'antiquité.

AVIS AU LECTEUR.

Les dénominations suivantes sont fréquemment employées par Archimède :

Soit la proportion géométrique $a : b :: c : d$, on aura :

Par permutation $a : c :: b : d$.
Par inversion.... $b : a :: d : c$, ou $d : c :: b : a$.
Par addition .... $a + b : b :: c + d : d$.
Par soustraction $a - b : b :: c - d : d$.
Par conversion. $a : a - b :: c : c - d$.

Soient les deux proportions géométriques :

$$a : b :: c : d.$$
$$b : f :: d : g.$$

On a par raison d'égalité :

$$a : f :: c : g.$$

Soient les deux proportions géométriques :

$$a : b :: c : d.$$
$$b : f :: g : c.$$

On aura par raison d'égalité dans la proportion troublée :

$$a : f :: g : d.$$

Soient les deux raisons géométriques inégales :

$$a : b > c : d, \text{ on a :}$$

Par permutation $a : c > b : d$.
Par inversion... $b : a < c : d$.
Par addition ... $a + b : b > c + d : d$.
Par soustraction $a - b : b > c - d : d$.
Par conversion. $a : a - b < c : c - d$.

Il en seroit de même si l'on avoit :

$$a : b < c : d.$$

Les lettres grecques ayant été employées dans les figures, je les place ici avec leurs noms et leurs valeurs, en faveur de ceux qui ne savent pas cette langue.

LETTRES GRECQUES.	LEURS NOMS.	LEURS VALEURS.
Α α	alpha	A.
Β β	bêta	B.
Γ γ	gamma	G.
Δ δ	delta	D.
Ε ε	epsilon	E *bref*.
Ζ ζ	zêta	Z.
Η η	êta	E *long*.
Θ θ	thêta	TH.
Ι ι	iôta	I.
Κ κ	cappa	K.
Λ λ	lambda	L.
Μ μ	mu	M.
Ν ν	nu	N.
Ξ ξ	xi	X.
Ο ο	omicron	O *bref*.
Π π	pi	P.
Ρ ρ	rho	R.
Σ σ	sigma	S.
Τ τ	tau	T.
Υ υ	upsilon	U.
Φ φ	phi	PH.
Χ χ	chi	CH.
Ψ ψ	psi	PS.
Ω ω	oméga	O *long*.
ϛ	ΣΤ	ST.
ϒ	ΥΙ	UI.

ŒUVRES

ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

LIVRE PREMIER.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE, SALUT.

Je t'avois déjà envoyé, avec leurs démonstrations, les choses que mes réflexions m'avoient fait découvrir; et parmi ces choses étoit le théorême suivant:

Tout segment compris entre une droite et la section du cône rectangle, est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment (α).

J'ai terminé aujourd'hui les démonstrations de plusieurs théorêmes qui se sont présentés; et parmi ces théorêmes, on distingue ceux qui suivent:

La surface de la sphère est quadruple d'un de ses grands cercles.

La surface d'un segment sphérique est égale à un cercle ayant un rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Un cylindre qui a une base égale à un grand cercle de la sphère, et une hauteur égale au diamètre de cette même sphère, est égal à trois fois la moitié de la sphère.

La surface du cylindre est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de la sphère.

Quoique ces propriétés existassent essentiellement dans les figures dont nous venons de parler, elles n'avoient point été remarquées par ceux qui ont cultivé la géométrie avant nous; cependant il sera facile de connoître la vérité de nos théorêmes, à ceux qui liront attentivement les démonstrations que nous en avons données. Il en a été de même de plusieurs choses qu'Eudoxe a considérées dans les solides, et qui ont été admises, comme les théorêmes suivans:

Une pyramide est le tiers d'un prisme qui a la même base et la même hauteur que la pyramide.

Un cône est le tiers d'un cylindre qui a la même base et la même hauteur que le cône.

Ces propriétés existoient essentiellement dans ces figures, et quoiqu'avant Eudoxe, il eût paru plusieurs géomètres qui n'étoient point à mépriser, cependant ces propriétés leur étoient inconnues, et ne furent découvertes par aucun d'eux.

Au reste, il sera permis, à ceux qui le pourront, d'examiner ce que je viens de dire. Il eût été à desirer que mes découvertes eussent été publiées du vivant de Conon; car je pense qu'il étoit très-capable d'en prendre connoissance et d'en porter un juste jugement. Quoi qu'il en soit, ayant pensé qu'il étoit bon de les faire connoître à ceux qui cultivent les mathématiques, je te les envoie appuyées de leurs démonstrations: les personnes versées dans cette science pourront les examiner à loisir. Porte-toi bien.

On expose d'abord les propositions qui sont nécessaires pour démontrer les théorêmes dont on vient de parler.

AXIOMES ET DÉFINITIONS.

1. Il peut y avoir dans un plan, certaines lignes courbes terminées qui soient toutes du même côté des droites qui joignent leurs extrémités, ou qui du moins n'aient aucune de leurs parties de l'autre côté de ces mêmes droites (α).

2. Une ligne concave du même côté est celle dans laquelle, ayant pris deux points quelconques, les droites qui joignent ces points tombent tout entières du même côté de la ligne concave, ou bien quelques-unes tombent du même côté de la ligne concave, et quelques autres sur cette ligne, tandis qu'aucune de ces droites ne tombe de différens côtés (β).

3. Il peut y avoir également des surfaces terminées qui, ayant leurs extrémités dans un plan sans être dans ce plan, sont toutes placées du même côté du plan dans lequel elles ont leurs extrémités, ou qui du moins n'ont aucune de leurs parties de l'autre côté de ce même plan.

4. Une surface concave du même côté est

celle dans laquelle, ayant pris deux points quelconques, les droites qui joignent ces points tombent du même côté de la surface concave, ou bien quelques-unes de ces droites tombent du même côté de la surface concave, et quelques autres dans cette surface, tandis qu'aucune de ces droites ne tombe de différens côtés.

5. J'appelle secteur solide une figure terminée par la surface d'un cône qui coupe la sphère et qui a son sommet au centre, et par la surface de la sphère qui est comprise dans le cône.

6. J'appelle rhombe solide, une figure solide composée de deux cônes qui ont la même base, et dont les sommets sont de différens côtés du plan dans lequel se trouve la base, de manière que les axes ne forment qu'une seule et même droite.

Je prends pour principes les propositions suivantes.

PRINCIPES.

1. La ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités (α).

2. Deux lignes qui sont dans un plan et qui ont les mêmes extrémités sont inégales, lorsqu'elles sont l'une et l'autre concaves du même côté et que l'une est comprise toute entière par l'autre, et par la droite qui a les mêmes extrémités que cette autre, ou bien lorsque l'une n'est comprise qu'en partie et que le reste est commun; la ligne comprise est la plus courte (C).

3. Pareillement lorsque des surfaces ont les mêmes limites dans un plan, la surface plane est la plus petite.

4. Deux surfaces qui ont les mêmes limites dans un plan sont inégales, lorsqu'elles sont l'une et l'autre concaves du même côté, et que l'une est comprise toute entière par l'autre et par le plan qui a les mêmes limites que cette autre; ou bien lorsque l'une n'est comprise qu'en partie, et que le reste est commun; la surface comprise est la plus petite.

5. Étant données deux lignes inégales, ou deux surfaces inégales, ou bien deux solides inégaux, si l'excès de l'une de ces quantités sur l'autre est ajouté à lui-même un certain nombre de fois, cet excès ainsi ajouté à lui-

même pourra surpasser l'une ou l'autre des quantités que l'on compare entre elles (γ).

Ces choses étant supposées, je procède ainsi qu'il suit.

PROPOSITION I.

Si un polygone est inscrit dans un cercle, il est évident que le contour du polygone inscrit est plus petit que la circonférence de ce cercle.

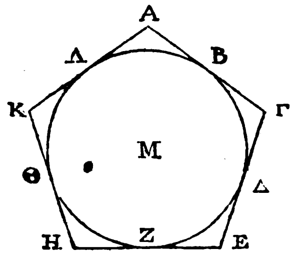
Car chaque côté du polygone est plus petit que l'arc de la circonférence qu'il soutend (*Princ. 1*).

PROPOSITION II.

Si un polygone est circonscrit à un cercle, le contour du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence de ce cercle.

Qu'un polygone soit circonscrit à un cercle : je dis que le contour de ce polygone est plus grand que la circonférence de ce cercle.

Car la somme des droites BA, AA est plus grande que l'arc BA; parce que ces droites comprennent un arc qui a les mêmes extrémités que ces droites (*Princ.* 2). Semblablement la somme des droites ΔΓ, ΓΒ est



plus grande que l'arc ΔΒ; la somme des droites ΑΚ, ΚΘ plus grande que l'arc ΛΘ; la somme des droites ΖΗ, ΗΘ plus grande que l'arc ΖΘ, et enfin la somme des droites ΔΕ, ΕΖ plus grande que l'arc ΔΖ. Donc le contour entier du polygone est plus grand que la circonférence.

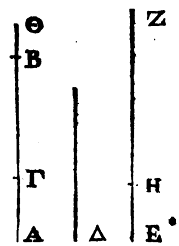
PROPOSITION III.

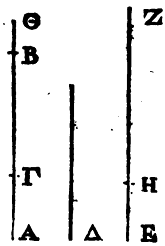
Deux quantités inégales étant données, il est possible de trouver deux droites inégales dont la raison de la plus grande à la plus petite soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Soient deux quantités inégales ΑΒ, Δ; que

AB soit la plus grande : je dis qu'il est possible de trouver deux droites inégales qui remplissent les conditions de ce qui est proposé.

Que la droite BΓ soit égale à la droite Δ; et prenons une certaine droite ZH. Si la droite ΓA est ajoutée à elle-même un certain nombre de fois, cette droite ainsi ajoutée à elle-même surpassera la droite Δ (*Princ.* 5). Que cette droite soit ajoutée à elle-même, et que le multiple de cette droite soit égal à la droite AΘ; et enfin que la droite ZH soit autant de fois multiple de la droite HE, que la droite AΘ l'est de la droite AΓ. La droite ΘA sera à la droite AΓ comme ZH est à HE; et par inversion, la droite EH sera à la droite HZ comme AΓ est à AΘ. Mais la droite AΘ est plus grande que la droite Δ, c'est-à-dire que la droite ΓB; donc la raison de la droite ΓA à la droite AΘ est moindre que la raison de la droite ΓA à la droite ΓB (α). Donc, par addition, la raison de la droite EZ à la droite ZH est moindre que la raison de AB à BΓ. Mais la droite BΓ est égale à la droite Δ; donc la raison de EZ à ZH est





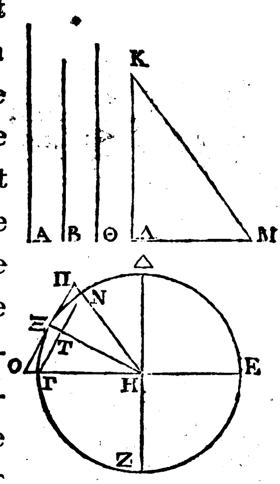
moindre que la raison de AB à Δ. On a donc trouvé deux droites inégales qui remplissent les conditions de ce qui est proposé; c'est-à-dire, qu'on a trouvé deux droites inégales dont la raison de la plus grande à la plus petite est moindre que la raison de la plus grande quantité donnée à la plus petite.

PROPOSITION IV.

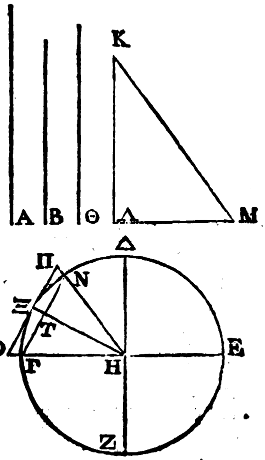
Deux quantités inégales et un cercle étant donnés, il est possible d'inscrire un polygone dans ce cercle, et de lui en circonscrire un autre, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Soient donnés les quantités A, B, et le cercle ΓΔEZ: je dis qu'il est possible de faire ce qui est proposé.

Cherchons deux droites Θ, KΛ, de manière que Θ étant la plus grande, la raison de la droite Θ à la droite KΛ soit moindre que la raison de la plus grande quantité donnée à la plus petite (3). Du point Λ et sur la droite ΚΛ, élevons la perpendiculaire ΛΜ; et du point Κ menons la droite ΚΜ égale à la droite Θ; ce qui peut se faire. Conduisons les deux diamètres ΓΕ, ΔΖ perpendiculaires l'un sur l'autre. Si l'angle ΔΗΓ est partagé en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et ainsi de suite, il restera enfin un certain angle plus petit que le double de l'angle ΛΚΜ. Qu'on ait cet angle et que cet angle soit ΝΗΓ. Menons la corde ΝΓ. La droite ΝΓ sera le côté d'un polygone équilatère; car puisque l'angle ΝΗΓ mesure l'angle droit ΔΗΓ, et que l'arc ΝΓ mesure le quart de la circonférence, l'arc ΝΓ mesurera la circonférence entière. Il est donc évident que la droite ΓΝ est le côté d'un polygone équilatère. Partageons l'angle ΝΗΓ en deux parties égales par la droite ΗΞ; que la droite ΟΞΠ touche le cercle au



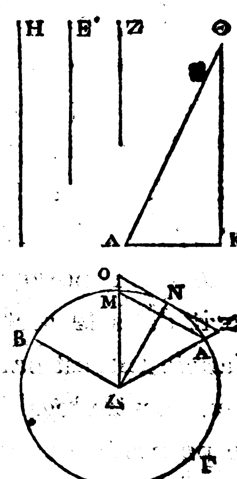
point Ξ; et menons les droites ΗΝΠ, ΗΓΟ; il est évident que la droite ΠΟ sera le côté d'un polygone circonscrit au cercle, équilatère et semblable au polygone inscrit dont le côté est ΝΓ. Puisque l'angle ΝΗΓ est moindre que le double de l'angle ΛΚΜ, et que l'angle ΝΗΓ est double de l'angle ΤΗΓ, l'angle ΤΗΓ sera plus petit que l'angle ΛΚΜ. Mais les angles placés aux points Λ, Τ sont droits; donc la raison de la droite ΜΚ à la droite ΛΚ est plus grande que la raison de la droite ΓΗ à la droite ΗΤ (α). Mais la droite ΓΗ est égale à la droite ΗΞ; donc la raison de ΗΞ à ΗΤ, c'est-à-dire la raison de ΠΟ à ΝΓ est moindre que la raison de ΜΚ à ΚΛ. Mais la raison de ΚΜ à ΚΛ est moindre que la raison de Α à Β, et la droite ΠΟ est le côté du polygone circonscrit, tandis que la droite ΓΝ est le côté du polygone inscrit......(ϐ). Ce qu'il falloit trouver.



PROPOSITION V.

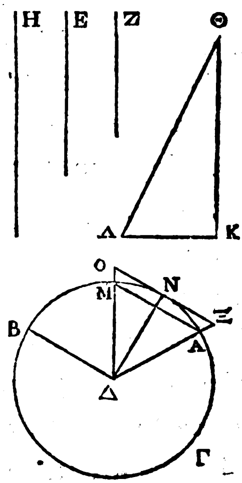
Deux quantités inégales et un secteur étant donnés, il est possible de circonscrire un polygone à ce secteur, et de lui en inscrire un autre, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Soient E, Z deux quantités inégales; que la quantité E soit la plus grande; que ABΓ soit un cercle quelconque ayant pour centre le point Δ; au point Δ construisons le secteur AΔB. Il faut circonscrire un polygone au secteur ABΔ, et lui en inscrire un autre, de manière que celui-ci ayant tous ses côtés, excepté BΔ, ΔA, égaux entre eux, les conditions de ce qui est proposé soient remplies.



Cherchons deux droites inégales H, ΘK,

de manière que H étant la plus grande, la raison de H à ΘK soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite; ce qui peut se faire (3). Ayant mené du point K sur la droite ΘK la perpendiculaire KΛ, conduisons une droite ΘΛ égale à la droite H; ce qui peut se faire, puisque la droite H est plus grande que la droite ΘK.

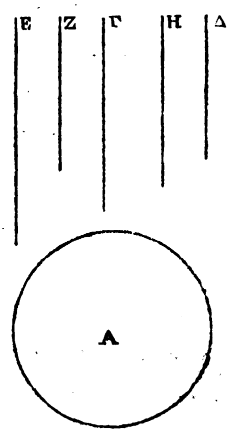


Si nous partageons l'angle AΔB en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et ainsi de suite, il restera enfin un angle plus petit que le double de l'angle ΛΘK. Que l'angle restant soit AΔM; la droite AM sera le côté d'un polygone inscrit dans le secteur. Si l'angle AΔM est partagé en deux parties égales par la droite ΔN, et si par le point N on conduit la droite ΞNO tangente au secteur, cette droite sera le côté d'un polygone circonscrit au secteur et semblable au polygone inscrit; et par la même raison que dans la proposition précédente, la raison de ΞΟ à ΛΜ sera moindre que la raison de la quantité E à la quantité Z.

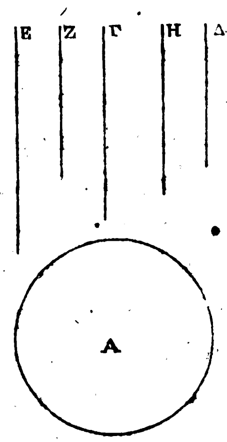
PROPOSITION VI.

Un cercle et deux quantités inégales étant donnés, circonscrire à ce cercle un polygone et lui en inscrire un autre, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Soient le cercle A, et les deux quantités inégales E, Z; que la plus grande soit E. Il faut circonscrire un polygone à ce cercle, et lui en inscrire un autre, de manière que les conditions de ce qui est proposé soient remplies.



Je prends deux droites inégales Γ, Δ, de manière que Γ étant la plus grande, la raison de Γ à Δ soit moindre que la raison de E à Z (3). Prenons une droite H moyenne proportionnelle entre Γ et Δ; la droite Γ sera plus grande que la droite H. Circonscrivons un polygone au cercle A, et inscrivons-lui un autre polygone, ainsi que nous l'avons enseigné (4), de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de Γ à H. Il est évident que la raison doublée du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit sera moindre que la raison doublée de Γ à H. Mais la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est doublée de la raison du côté du premier au côté du second, à cause que ces polygones sont semblables; et la raison de la droite Γ à la droite Δ est doublée de la raison de Γ à H; donc la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que la raison de Γ à Δ; donc la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est encore moindre que la raison de E à Z.



Nous démontrerons semblablement que

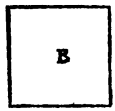
deux quantités inégales et un secteur de cercle étant donnés, on peut circonscrire au secteur et lui inscrire un polygone, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

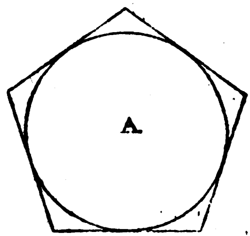
Si un cercle ou un secteur et une surface quelconque sont donnés, il est évident que si l'on inscrit à ce cercle ou à ce secteur et ensuite aux segmens restans des polygones équilatères, il restera enfin des segmens de cercles ou de secteurs qui seront moindres que la surface donnée. Ces choses sont démontrées dans les Elémens (*a*).

PROPOSITION VII.

Il faut démontrer qu'étant donnés un cercle, ou un secteur et une surface, on peut circonscrire à ce cercle ou à ce secteur un polygone, de manière que la somme des segmens du polygone circonscrit soit moindre que la surface donnée. Il me sera permis de transporter au secteur ce que j'aurai dit du cercle.

Soient donnés le cercle A et une surface quelconque B : je dis qu'on peut circonscrire à ce cercle un polygone, de manière que la somme des segmens placés entre ce cercle et ce polygone soit moindre que la surface B.





Puisqu'on a deux quantités inégales, dont la plus grande est composée de la surface B et du cercle A, et dont la plus petite est ce même cercle, on pourra circonscrire au cercle A un polygone et lui en inscrire un autre, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande des quantités dont nous venons de parler à la plus petite ; et le polygone circonscrit sera tel que la somme des segmens placés autour du cercle sera moindre que la surface donnée B.

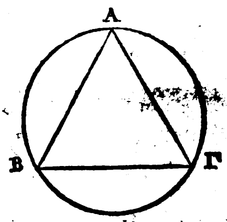
En effet, puisque la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que la raison de la somme de la surface B et du cercle A à ce même cercle, et que le cercle est plus grand que le polygone inscrit, la raison du polygone circonscrit au cercle A sera encore moindre que la raison de la somme de la surface B et du cercle A à ce même cercle. Donc, par soustraction, la raison de la somme des segmens restans du polygone circonscrit au cercle A est moindre que la raison de la surface B au cercle A. Donc la somme des segmens du polygone circonscrit est moindre que la surface B (α). Cela peut se démontrer encore de la manière suivante.

Puisque la raison du polygone circonscrit au cercle A est moindre que la raison de la somme de la surface B et du cercle A à ce même cercle, il s'ensuit que le polygone circonscrit est moindre que la somme de la surface B et du cercle A. Donc la somme des segmens placés autour du cercle est moindre que la surface B. Nous ferons les mêmes raisonnemens par rapport au secteur.

PROPOSITION VIII.

Si dans un cône droit on inscrit une pyramide ayant une base équilatère, la surface de cette pyramide, la base exceptée, est égale à un triangle ayant une base égale au contour de la base de la pyramide, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du sommet sur un des côtés de la base.

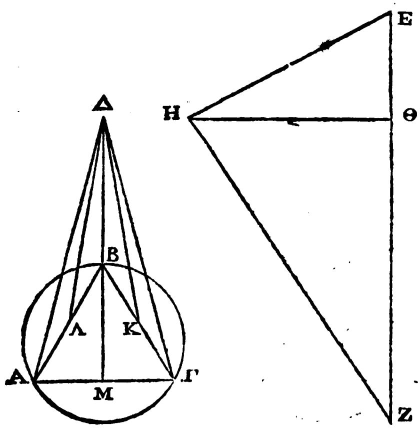
Soit le cône droit dont la base est le cercle ΑΒΓ. Inscrivons-lui une pyramide ayant pour base le triangle équilatéral ΑΒΓ. Je dis que la surface de cette pyramide, la base exceptée, est égale au triangle dont nous avons parlé.



Car puisque le cône est droit, et que la base de la pyramide est équilatère, les hauteurs des triangles qui comprennent la pyramide sont égales entre elles. Mais ces triangles ont pour base les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, et pour hauteur la droite dont nous venons de parler; donc la somme de ces triangles, c'est-à-dire la surface de la pyramide, le triangle ΑΒΓ excepté, est égale à un triangle ayant pour base une droite égale à la somme des droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, et pour hauteur une droite égale à celle dont nous venons de parler.

AUTRE DÉMONSTRATION PLUS CLAIRE.

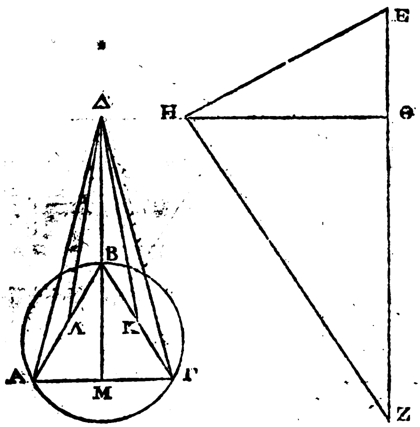
Soit le cône droit dont la base est le cercle ABΓ, et dont le sommet est le point Δ. Inscrivons dans ce cône une pyramide ayant pour base le triangle équilatéral ABΓ; et menons les droites ΔA, ΔΓ, ΔB.



Je dis que la somme des triangles AΔB, AΔΓ, BΔΓ est égale à un triangle dont la base est égale au contour du triangle ABΓ, et dont la perpendiculaire menée du sommet sur la base est égale à la perpendiculaire menée du point Δ sur la droite BΓ.

Menons les perpendiculaires ΔK, ΔΛ, ΔM;

ces droites seront égales entre elles. Supposons un triangle EZH ayant une base égale au contour du triangle ABΓ, et une hauteur HΘ égale à la droite ΔΛ. Puisque la surface comprise sous les droites BΓ, ΔK est double du triangle ΔBΓ (α); que la surface comprise sous les droites AB, ΔΛ est double du triangle ABΔ, et que la surface comprise sous les droites

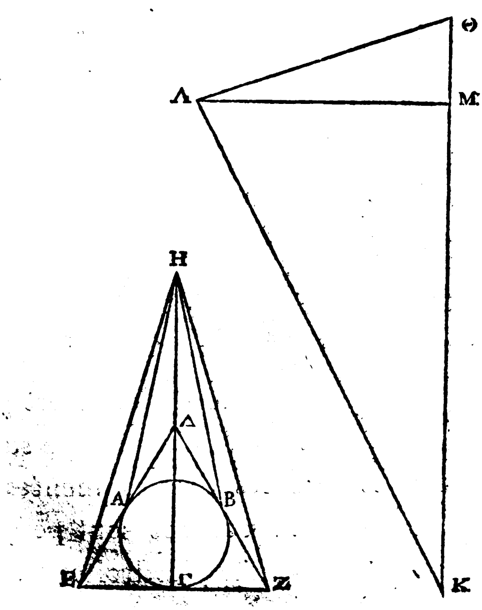


AΓ, ΔM est double du triangle AΔΓ, la surface comprise sous le contour du triangle ABΓ, c'est-à-dire sous la droite EZ, et sous la droite ΔΛ, c'est-à-dire sous la droite HΘ, est double de la somme des triangles AΔB, BΔΓ, AΔΓ. Mais la surface comprise sous les droites EZ, HΘ est double du triangle EZH; donc le triangle EZH est égal à la somme des triangles AΔB, BΔΓ, AΔΓ.

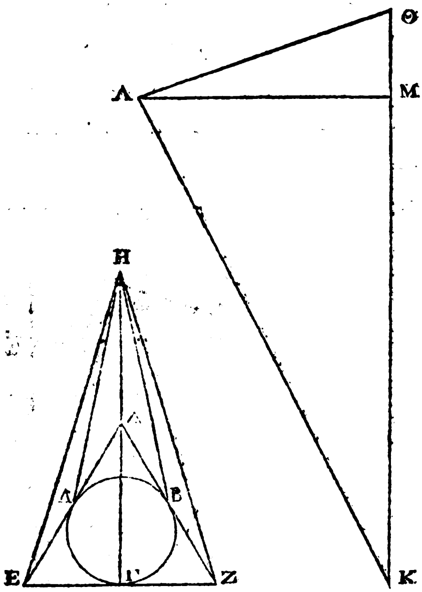
PROPOSITION IX.

Si une pyramide est circonscrite à un cône droit, la surface de cette pyramide, la base exceptée, sera égale à un triangle ayant une base égale au contour de la base de la pyramide et une hauteur égale au côté du cône.

Soit un cône ayant pour base le cercle ABΓ.



Circonscrivons à ce cône une pyramide, de manière que sa base, c'est-à-dire le polygone ΔEZ soit circonscrit au cercle ABΓ. Je dis que la surface de la pyramide, la base exceptée, est égale au triangle dont nous venons de parler.

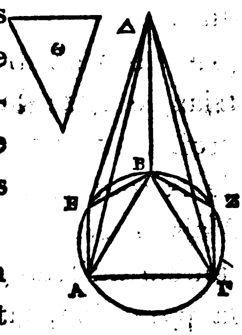


En effet, puisque l'axe du cône est perpendiculaire sur la base, c'est-à-dire sur le cercle ABΓ, et que les droites menées du centre aux points de contact sont perpendiculaires sur les tangentes, les droites menées du sommet du cône aux points de contact, seront perpendiculaires sur les droites ΔE, ZE, ZΔ. Donc les perpendiculaires HA, HB, HΓ, dont nous venons de parler, sont égales entre elles; car ces perpendiculaires sont les côtés du cône. Supposons un triangle ΘKΛ, ayant une base ΘK égale au contour du triangle ΔEZ, et une hauteur ΛM égale à HA. Puisque la surface comprise sous les droites ΔE, AH est double du triangle EΔH; que la surface comprise sous les droites ΔZ, HB est double du triangle ΔZH, et qu'enfin la surface comprise sous les droites EZ, ΓH est double du triangle EHZ; la surface comprise sous les droites ΘK, AH, c'est-à-dire MΛ, est double de la somme des triangles EΔH, ZΔH, EHZ. Mais la surface comprise sous ΘK, ΛM est double du triangle ΛKΘ; donc la surface de la pyramide, la base exceptée, est égale à un triangle ayant une base égale au contour du triangle ΔEZ, et une hauteur égale au côté du cône.

PROPOSITION X.

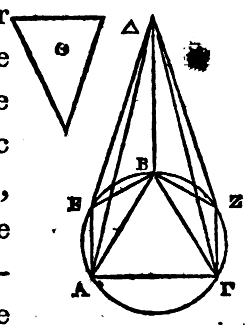
Si l'on mène une corde dans le cercle qui est la base d'un cône droit, et si l'on joint, par des droites, les extrémités de cette corde et le sommet du cône, le triangle terminé par cette corde et les droites qui joignent les extrémités de cette corde et le sommet du cône, sera plus petit que la surface du cône comprise entre les droites qui joignent les extrémités de cette corde et le sommet du cône.

Que le cercle ΑΒΓ soit la base d'un cône droit, dont le point Δ est le sommet. Menons la corde ΑΓ, et joignons les points Α, Γ avec le point Δ par les droites ΑΔ, ΔΓ. Je dis que le triangle ΑΔΓ est plus petit que la surface du cône comprise entre les droites ΑΔ, ΔΓ.



Partageons l'arc ΑΒΓ en deux parties égales au point Β, et menons les droites ΑΒ, ΓΒ, ΔΒ. La somme des triangles ΑΒΔ, ΒΓΔ sera certainement plus grande que le triangle ΑΔΓ. Que la surface Θ soit l'excès de la somme des deux premiers triangles sur le triangle ΑΔΓ. La surface Θ sera ou plus petite que la somme des segmens ΑΒ, ΒΓ, ou elle n'est pas plus petite. Supposons d'abord qu'elle ne soit pas plus petite. Puisque l'on a deux surfaces, dont l'une est celle du cône comprise entre ΑΔ, ΔΒ, avec le segment ΑΕΒ, et dont l'autre est le triangle ΑΔΒ, et que ces deux surfaces ont pour limite le contour du triangle ΑΔΒ, la première qui comprend la seconde sera plus grande que la seconde qui est comprise par la première (*Princ. 4*). Donc la surface du cône comprise entre ΑΔ, ΔΒ, avec le segment ΑΕΒ, est plus grande que le triangle ΑΒΔ. Semblablement la surface du cône comprise entre ΒΔ, ΔΓ, avec le segment ΓΖΒ, est plus grande que le triangle ΒΔΓ. Donc la surface totale du cône comprise entre ΑΔ, ΔΓ, avec la surface Θ, est plus grande que la somme des triangles dont nous venons de parler. Mais la somme des triangles dont nous venons de parler, est égale au triangle ΑΔΓ réuni à la surface Θ; donc si l'on retranche la surface commune Θ, la surface restante du cône qui est comprise entre ΑΔ, ΔΓ, sera plus grande que le triangle ΑΔΓ.

Que la surface Θ soit moindre que la somme des segmens ΑΒ, ΒΓ. Si l'on partage les arcs ΑΒ, ΒΓ en deux parties égales, et leurs moitiés en deux parties égales, et ainsi de suite, il restera enfin des segmens dont la somme sera moindre que la surface Θ. Que les segmens restans soient ceux qui sont appuyés sur les droites AE, EB, BZ, ZΓ; et menons les droites ΔE, ΔZ. Par la même raison, la surface du cône comprise entre AΔ, ΔE, avec le segment appuyé sur AE, sera plus grande que le triangle AΔE; et la surface comprise entre EΔ, ΔB, avec le segment appuyé sur EB, est aussi plus grande que le triangle EΔB. Donc la surface du cône comprise entre



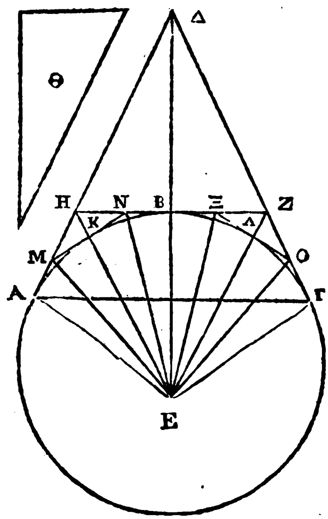
AΔ, ΔB, avec les segmens AE, EB, est plus grande que la somme des triangles AΔE, EBΔ; et puisque la somme des triangles AEΔ, ΔEB est plus grande que le triangle ABΔ, ce qui est démontré, la surface du cône comprise entre AΔ, ΔB, avec les segmens appuyés sur AE, EB sera encore plus grande que le triangle AΔB. Par la même raison, la surface comprise entre BΔ, ΔΓ, avec les segmens appuyés sur BZ, ZΓ, sera plus grande que le triangle BΔΓ. Donc la surface totale comprise entre

ΑΔ, ΔΓ, avec les segmens dont nous venons de parler, est plus grande que la somme des triangles ΑΒΔ, ΔΒΓ. Mais la somme de ces triangles est égale au triangle ΑΔΓ réuni à la surface Θ, et les segmens dont nous venons de parler sont moindres que la surface Θ; donc la surface restante comprise entre ΑΔ, ΔΓ est plus grande que le triangle ΑΔΓ.

PROPOSITION XI.

Si l'on mène des tangentes au cercle qui est la base d'un cône droit; si ces tangentes sont dans le même plan que ce cercle et se rencontrent mutuellement; et si, des points de contact et du point où ces droites se rencontrent, on mène des droites au sommet du cône, la somme des triangles terminés par ces tangentes et par les droites qui joignent leurs extrémités et le sommet du cône, sera plus grande que la surface du cône comprise entre les droites qui joignent les points de contact et le sommet du cône.

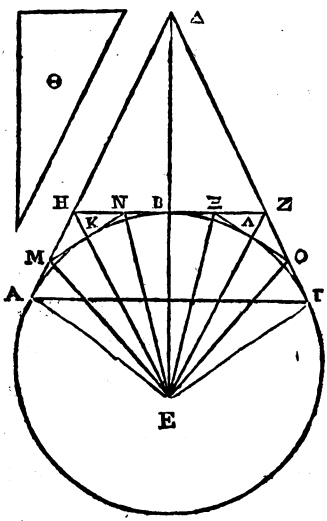
Soit un cône ayant pour base le cercle ΑΒΓ, et pour sommet le point Ε : menons les droites ΑΔ, ΔΓ, tangentes au cercle ΑΒΓ; que ces tangentes soient dans le même plan que ce cercle, et du point E, qui est le sommet du cône, menons aux points A, Δ, Γ les droites EA, EΔ, EΓ. Je dis que la somme des triangles AΔE, ΔEΓ est plus grande que la surface du cône comprise entre les droites AE, ΓE et l'arc ABΓ.



Menons une droite HBZ tangente au cercle et parallèle à la droite AΓ. L'arc ABΓ sera certainement partagé en deux parties égales au point B. Des points H, Z menons au point E les droites HE, ZE. Puisque la somme des droites HΔ, ΔZ est plus grande que la droite HZ, si l'on ajoute de part ou d'autre les droites HA, ZΓ, la somme des droites AΔ, ΔΓ sera plus grande que la somme des droites AH, HZ, ZΓ. Mais les droites AE, EB, EΓ, qui sont les côtés d'un cône droit, sont égales entre elles et ces droites sont perpendiculaires sur les tangentes du cercle ABΓ, ainsi que cela est démontré dans un lemme; donc la somme des surfaces comprises sous ces perpendiculaires et sous les bases des triangles AEΔ, ΔEΓ, est plus grande que la somme des surfaces comprises sous ces mêmes perpendiculaires et sous les bases des triangles AHE, HEZ, ZEΓ; parce que la somme des bases AH, HZ, ZΓ est plus petite que la somme des bases ΓΔ, ΔA, tandis que les hauteurs sont égales, puisqu'il est évident que la droite menée du sommet du cône droit au point de contact de la base est perpendiculaire sur la tangente. Que la surface Θ soit l'excès de la somme des triangles AEΔ, ΔΓE sur la somme des triangles AEH, HEZ, ZEΓ. La surface Θ sera ou plus petite que la somme des segmens AHB, BZΓ placés autour de l'arc ABΓ, ou cette surface ne sera pas plus petite.

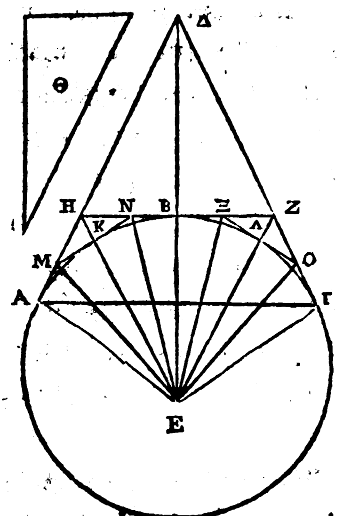
Supposons d'abord que la surface Θ ne

soit pas plus petite. Puisque l'on a deux surfaces composées, dont l'une est la surface de la pyramide, qui a pour base le trapèze HAΓZ et pour sommet le point E, et dont l'autre est la surface du cône comprise entre AE, EΓ avec le segment ABΓ, et que ces deux



surfaces ont pour limite le contour du triangle AEΓ; il est évident que la surface de la pyramide, le triangle AEΓ excepté, est plus grande que la surface du cône comprise entre AE, EΓ, réunie au segment ABΓ (*Princ. 4*). Donc si l'on retranche le segment commun ABΓ, la somme des triangles AHE, HEZ, ZEΓ restans, avec la somme des segmens AHB, BZΓ placés autour du cercle, sera plus grande que la surface du cône comprise entre les droites AE, EΓ. Mais la surface Θ n'est pas plus petite que la somme des segmens AHB, BZΓ placés autour du cercle; donc la somme des triangles AHE, HEZ, ZEΓ, avec la surface Θ, est plus grande que la surface du cône comprise entre AE, EΓ. Mais la somme des triangles AHE, HEZ, ZEΓ, avec la surface Θ, est égale à la somme des triangles AEΔ, ΔEΓ; donc la somme des triangles AEΔ, ΔEΓ est plus grande que la surface du cône dont nous venons de parler.

Supposons en second lieu que la surface Θ soit plus petite que la somme des segmens placés autour du cercle. Si l'on circonscrit continuellement des polygones aux segmens, en partageant les arcs en deux parties égales, et en menant des tangentes, il restera enfin certains segmens dont la somme sera plus petite que la surface Θ. Que les segmens restans soient AMK, KNB, BΞΛ, ΛOΓ, et que la somme de ces segmens soit plus petite que la surface Θ. Menons des droites au point E. Il est encore évident que la somme des triangles AHE, HEZ, ZEΓ sera plus grande que la somme des triangles AEM, MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ; car la somme des bases des premiers triangles est plus grande que la somme des bases des seconds, et que les hauteurs sont égales de part et d'autre. Mais la surface de



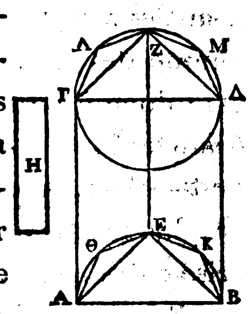
la pyramide qui a pour base le polygone AMNΞOΓ, et pour sommet le point E, le triangle AEΓ excepté, est plus grande que la surface du cône comprise entre AE, EΓ, réunie au segment ABΓ; donc si on retranche de part et d'autre le segment ABΓ, la somme des triangles restans AEM, MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ, avec les segmens restans AMK, KNB, BΞΛ, ΛΟΓ, placés autour du cercle, sera plus grande que la surface du cône comprise entre AE, EΓ. Mais la surface Θ est plus grande que la somme des segmens restans dont nous venons de parler et qui sont placés autour du cercle : et l'on a démontré que la somme des triangles AEH, HEZ, ZEΓ est plus grande que la somme des triangles AEM, MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ; donc à plus forte raison la somme des triangles AEH, HEZ, ZEΓ avec la surface Θ, c'est-à-dire, la somme des triangles AΔE, ΔEΓ est plus grande que la surface du cône comprise entre AE, EΓ.

PROPOSITION XII.

La surface d'un cylindre droit, comprise entre deux droites placées dans sa surface, est plus grande que le parallélogramme terminé par ces deux droites et par celles qui joignent leurs extrémités.

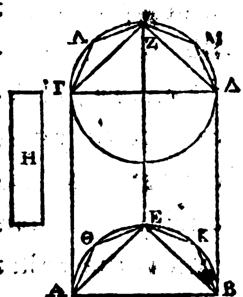
Soit le cylindre droit dont une des bases est le cercle AB, et dont la base opposée est le cercle ΓΔ. Menons les droites AΓ, BΔ. Je dis que la surface du cylindre comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ est plus grande que le parallélogramme ΑΓΔΒ.

Partageons les arcs ΑΒ, ΓΔ en deux parties égales aux points Ε, Ζ; et menons les droites ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ. Puisque la somme des droites ΑΕ, ΕΒ est plus grande que la droite ΑΒ, et que les parallélogrammes construits sur ces droites ont la même hauteur, la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites ΑΕ, ΕΒ sera plus grande que le parallélogramme ΑΒΔΓ; car leur hauteur est la même que celle du cylindre. Que l'excès de la somme des parallélogrammes dont les bases sont ΑΕ, ΕΒ sur le parallélogramme ΑΒΔΓ soit la surface Η. La surface Η sera ou plus petite que la somme des segmens plans ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ou elle ne sera pas plus petite. Supposons d'abord qu'elle ne soit pas plus petite. Puisque la surface du cylindre qui est comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ, avec les segmens ΑΕΒ, ΓΖΔ, a pour limite le plan du parallélogramme ΑΒΔΓ; que la surface qui est composée des parallélogrammes dont les bases



sont AE, EB et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, avec les triangles AEB, ΓΖΔ, a aussi pour limite le plan du parallélogramme ΑΒΔΓ; que l'une de ces surfaces comprend l'autre, et que ces deux surfaces sont concaves du même côté, la surface cylindrique comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ, avec les segmens plans AEB, ΓΖΔ, sera plus grande que la surface qui est composée non-seulement des parallélogrammes dont les bases sont AE, EB, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, mais encore des triangles AEB, ΓΖΔ (*Princ.* 4). Donc si l'on retranche les triangles AEB, ΓΖΔ, la surface cylindrique restante qui est comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ, avec les segmens plans AE, EB, ΓΖ, ΖΔ, sera plus grande que la surface composée des parallélogrammes dont les bases sont les droites AE, EB, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre. Mais la somme des parallélogrammes dont les bases sont AE, EB, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est égale au parallélogramme ΑΓΔΒ réuni à la surface H; donc la surface cylindrique restante qui est comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ est plus grande que le parallélogramme ΑΓΔΒ.

Supposons en second lieu que la surface Η soit plus petite que la somme des segmens plans ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ. Si l'on partage en deux parties égales chacun des arcs ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ aux points Θ, Κ, Λ, Μ; si l'on mène les droites ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ; si l'on retranche les triangles ΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ, ΖΜΔ, dont la somme n'est pas plus petite que la moitié de la somme des segmens plans ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, et si l'on continue de faire la même chose, il restera enfin certains segmens dont la somme sera moindre que la surface Η. Que les segmens restans soient ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ. Nous démontrerons de la même manière que la somme des parallélogrammes dont les bases sont ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, sera plus grande que la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites ΑΕ, ΕΒ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre. Mais la surface du cylindre comprise entre

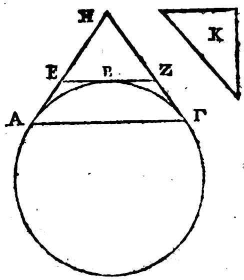


les droites ΑΓ, ΒΔ, avec les segmens plans ΑΕΒ, ΓΖΔ, et la surface qui est composée des parallélogrammes dont les bases sont ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, avec les figures rectilignes ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ, ont pour limite le plan du parallélogramme ΑΓΔΒ; donc si l'on retranche les figures rectilignes ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ, la surface cylindrique restante qui est comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ, avec les segmens plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, sera plus grande que la surface composée des parallélogrammes dont les bases sont les droites ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre. Mais la somme des parallélogrammes dont les bases sont ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est plus grande que la somme des parallélogrammes dont les bases sont ΑΕ, ΕΒ et dont la hauteur est la même que celle du cylindre; donc la surface cylindrique comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ, avec les segmens plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, est plus grande que la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites ΑΕ, ΕΒ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre. Mais la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites ΑΕ, ΕΒ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est égale au parallélogramme ΑΓΔΒ réuni à la surface Η; donc la surface cylindrique comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ, avec les segmens plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, est plus grande que le parallélogramme ΑΓΔΒ réuni à la surface Η. Mais la somme des segmens ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, est plus petite que la surface Η; donc la surface cylindrique restante comprise entre les droites ΑΓ, ΒΔ est plus grande que le parallélogramme ΑΓΔΒ.

PROPOSITION XIII.

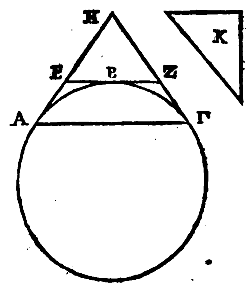
Si par les extrémités de deux droites qui sont dans la surface d'un cylindre droit quelconque, on mène des tangentes aux cercles qui sont les bases du cylindre, si ces droites sont dans le plan de ces cercles et si elles se rencontrent, la somme des parallélogrammes compris sous les tangentes et sous les côtés du cylindre, sera plus grande que la surface cylindrique comprise entre les droites qui sont dans sa surface.

Que le cercle ABΓ soit la base d'un cylindre droit quelconque, et que dans la surface de ce cylindre soient deux droites ayant pour extrémités les points A, Γ; par les points A, Γ menons au cercle ABΓ des tangentes qui soient dans le même plan que lui et qui se coupent mutuellement au point H. Concevons que dans l'autre base du cylindre,



et par les extrémités des droites qui sont dans sa surface on ait mené des droites tangentes au cercle. Il faut démontrer que la somme des parallélogrammes compris sous les tangentes et sous les côtés du cylindre est plus grande que la surface du cylindre construite sur l'arc ABΓ.

Menons au cercle ABΓ la tangente EZ; et des points E, Z menons au plan de la base supérieure des droites parallèles à l'axe du cylindre. La somme des parallélogrammes compris sous les droites AH, HΓ et sous les côtés du cylindre est plus grande que la somme des parallélogrammes compris sous les droites AE, EZ, ZΓ, et sous les côtés du cylindre. Car puisque la somme des droites EH, HZ est plus grande que la droite EZ, si on ajoute de part et d'autre les droites AE, ZΓ, la somme des droites HA, HΓ sera plus grande que la somme des droites AE, EZ, ZΓ. Que l'excès de la somme des parallélogrammes compris sous les droites HA, HΓ, et sous les côtés du cylindre sur la somme des parallélogrammes compris sous les droites AE, EZ, ZΓ et sous les côtés du cylindre, soit la surface K. La moitié de la surface K sera ou plus grande que la somme des figures comprises entre les droites AE, EZ, ZΓ, et les arcs AB, BΓ; ou elle ne sera pas plus grande. Supposons d'abord qu'elle soit plus grande. Puisque le contour du parallélogramme construit sur la droite AΓ est la limite de la surface qui est composée des parallélogrammes construits sur les droites AE, EZ, ZΓ, du trapèze AEZΓ et de celui qui lui est opposé dans l'autre base du cylindre, et que le contour du pa-



rallélogramme construit sur AΓ est aussi la limite de la surface qui est composée de la surface du cylindre construite sur l'arc ABΓ, du segment ABΓ, et de celui qui lui est opposé, les surfaces dont nous venons de parler ont la même limite dans un même plan. Mais l'une et l'autre de ces surfaces sont concaves du même côté, et l'une de ces surfaces est comprise par l'autre, le reste étant commun; donc la surface qui est comprise est la plus petite (*Princ.* 4). Donc si on retranche les parties communes, c'est-à-dire, le segment ABΓ et celui qui lui est opposé, la surface du cylindre construite sur l'arc ABΓ sera plus petite que la surface composée non-seulement des parallélogrammes construits sur les droites AE, EZ, ZΓ, mais encore des segmens AEB, BZΓ et de ceux qui leur sont opposés. Mais la surface composée des parallélogrammes dont nous venons de parler, avec les segmens dont nous venons aussi de parler, est plus petite que la surface composée des parallélogrammes construits sur les droites AH, HΓ; car la somme des parallélogrammes construits sur les droites AE, EZ, ZΓ, avec la surface K, qui est plus grande que la somme des segmens AEB, BZΓ, est égale à la somme des parallélogrammes construits sur AH, HΓ; donc la somme des parallélogrammes compris sous la droite AH, ΓH et sous les côtés du cylindre est plus grande que la surface du cylindre construite sur l'arc ABΓ.

Si la surface K n'étoit pas plus grande que la somme des segmens AEB, BZΓ, on meneroit des tangentes au cercle, de manière que la somme des segmens restans placés autour du cercle fût moindre que la moitié de la surface K (7); et l'on démontreroit le reste comme on l'a fait plus haut.

Ces choses étant démontrées, les propositions suivantes découlent nécessairement de ce qui a été dit plus haut.

La surface d'une pyramide inscrite dans un cône droit, la base exceptée, est plus petite que la surface du cône.

Car chacun des triangles qui renferment la pyramide est moindre que la surface du cône comprise entre les côtés du triangle. Donc la surface totale de la pyramide, la base exceptée, est moindre que la surface du cône.

La surface de la pyramide circonscrite à un cône droit, la base exceptée, est plus grande que la surface du cône.

Si un prisme est inscrit dans un cylindre droit, la surface du prisme, qui est composée de parallélogrammes, est plus petite que la surface du cylindre, la base exceptée.

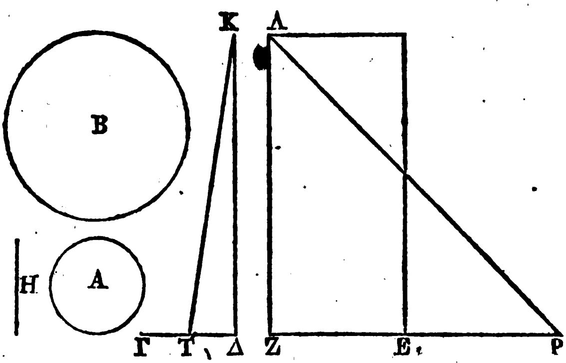
Car chaque parallélogramme du prisme est moindre que la surface du cylindre construite sur ce parallélogramme.

Si un prisme est circonscrit à un cylindre droit, la surface du prisme composée de parallélogrammes est plus grande que la surface du cylindre, la base exceptée.

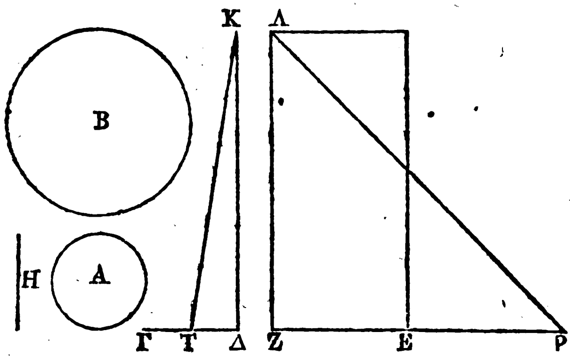
PROPOSITION XIV.

La surface d'un cylindre droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

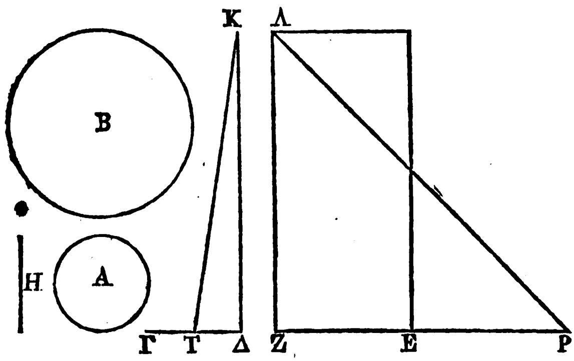
Que le cercle A soit la base d'un cylindre droit quelconque; que la droite ΓΔ soit égale au diamètre du cercle A, et la droite EZ égale au côté du cylindre; que la droite H soit moyenne proportionnelle entre ΔΓ, EZ; et supposons un cercle B dont le rayon soit égal à la droite H. Il faut démontrer que le cercle B est égal à la surface du cylindre, la base exceptée.



Car si ce cercle n'est pas égal à la surface du cylindre, il est plus grand ou plus petit. Supposons, si cela est possible, qu'il soit plus petit. Puisque l'on a deux quantités inégales, la surface du cylindre et le cercle B, on pourra inscrire dans le cercle B un polygone équilatère et lui en circonscrire un autre, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la surface du cylindre au cercle B (6). Supposons que l'on ait circonscrit au cercle A un polygone semblable à celui qui est circonscrit au cercle B; et concevons que le polygone circonscrit au cercle A soit la base d'un prisme circonscrit à ce cylindre; que la droite KΔ soit égale au contour du polygone circonscrit au cercle A; que la droite AZ soit égale à cette même droite KΔ, et que la droite ΓT soit la moitié de la droite ΓΔ. Le triangle KΔT sera égal au polygone circonscrit au cercle A; parce que la base de ce triangle est égale au contour de ce polygone, et que sa hauteur est égale au rayon du cercle A; et le parallélogramme EΛ sera égal à la surface du prisme circonscrit au cylindre, parce que ce parallélogramme est compris sous le côté du cylindre et sous une droite égale au contour de la base du prisme. Faisons la droite EP égale à la droite EZ. Le triangle ZPΛ sera égal au parallélogramme EΛ, et par conséquent à la surface du prisme. Mais les polygones circonscrits aux cercles A, B sont semblables; donc ces polygones sont entre eux comme les quarrés des rayons des cercles A, B. Donc le triangle KTΔ est au polygone circonscrit au cercle B comme le quarré de TΔ est au quarré de H; car les droites TΔ, H sont égales aux rayons des cercles A, B. Mais le quarré de TΔ est au quarré de H comme la droite TΔ est à la droite PZ; car la droite H est moyenne proportionnelle entre TΔ, PZ, attendu qu'elle est moyenne proportionnelle entre ΓΔ, EZ.

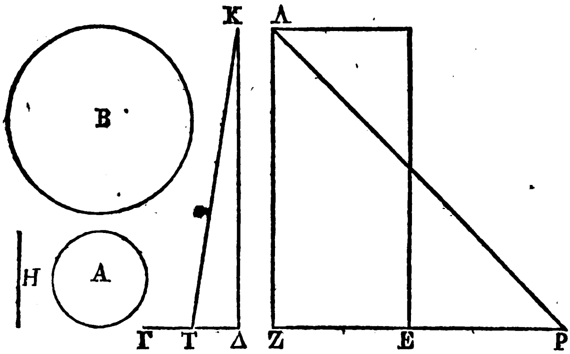


Mais pourquoi la droite H est-elle moyenne proportionnelle entre TΔ, PZ (α)? Le voici: Puisque la droite ΔT est égale à la droite TΓ, et que la droite PE est aussi égale à la droite EZ, la droite ΓΔ est double de la droite TΔ, et la droite PZ double de PE. Donc la droite ΔΓ est à la droite ΔT comme la droite PZ est à la droite ZE. Donc la surface comprise sous les droites ΓΔ, EZ est égale à la surface comprise sous les droites TΔ, PZ. Mais le quarré construit sur la droite H est égal à la surface comprise sous ΓΔ, EZ; donc le quarré construit à la droite H est aussi égal à la surface comprise sous TΔ, PZ. Donc TΔ est à H comme H est à PZ. Donc le quarré construit sur la droite TΔ est au quarré construit sur la droite H comme la droite TΔ est à la droite PZ; car lorsque trois droites sont proportionnelles entre elles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première droite est à la figure semblable construite de la même manière sur la seconde. Mais le triangle KTΔ est au triangle PΛZ comme la droite TΔ est à la droite PZ, parce que les droites KΔ, ΛZ sont égales entre elles; donc le triangle KTΔ est au polygone circonscrit au cercle B comme le triangle KTΔ est au triangle PZΛ. Donc le triangle ZΛP est égal au polygone circonscrit au cercle B. Donc la surface du prisme qui est circonscrit au cylindre est aussi égale au polygone qui est circonscrit au cercle B. Mais la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone qui est inscrit dans ce même cercle, est moindre que la raison de la surface du cylindre A au cercle B; donc la raison de la surface du prisme qui est circonscrit à ce cylindre au polygone qui est inscrit dans le cercle B, est encore moindre que la raison de la surface du cylindre au cercle B, et par permutation. . . . . (ϛ), ce qui est impossible; car la surface du prisme circonscrit au cylindre est plus grande que la surface du



cylindre, ainsi que cela a été démontré (13); et le polygone inscrit dans le cercle B est moindre que le cercle B (1). Donc le cercle B n'est pas plus petit que la surface du cylindre.

Supposons en second lieu, si cela est possible, que le cercle B soit plus grand que la surface du cylindre. Imaginons qu'on ait inscrit dans le cercle B un polygone, et qu'on lui en ait circonscrit un autre, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison du cercle B à la surface du cylindre (6). Inscrivons dans le cercle A un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle B; que le polygone inscrit dans le cercle A soit la base d'un prisme; que la droite KΔ soit égale au contour du polygone inscrit dans ce cercle, et que la droite ZΛ soit égale à cette droite. Le triangle KTΔ sera plus grand que le polygone inscrit dans le cercle A; parce que ce triangle a une base égale au contour de ce polygone, et une hauteur plus grande que la perpendiculaire menée du centre sur un des côtés du polygone; et le parallélogramme EΛ sera égal à la surface du prisme inscrit, qui est composée de parallélogrammes; parce que cette surface est comprise sous le côté du cylindre, et sous une droite égale au contour du polygone qui est la base du prisme; donc le triangle PΛZ est aussi égal à la surface de ce prisme. Mais les polygones inscrits dans les cercles A, B sont semblables; donc ces polygones sont entre eux comme les quarrés des rayons de ces cercles. Mais les triangles KTΔ, ZPΛ sont aussi entre eux comme les quarrés des rayons des cercles A, B (γ); donc le polygone inscrit dans le cercle A est au polygone inscrit dans le cercle B comme le triangle KTΔ est au triangle ΛZP. Mais le polygone inscrit dans le cercle A est plus petit que le triangle KTΔ; donc le polygone inscrit dans le cercle B est

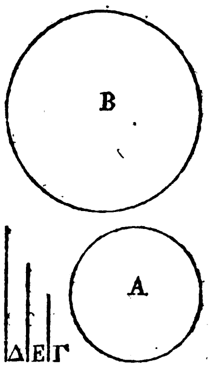


plus petit que le triangle ZPΛ. Donc le polygone inscrit dans le cercle B est aussi plus petit que la surface du prisme inscrit dans le cylindre, ce qui est impossible; car la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone qui lui est inscrit, est moindre que la raison du cercle B à la surface du cylindre; donc par permutation.......(δ). Mais le polygone circonscrit au cercle B est plus grand que ce même cercle B (2); donc le polygone inscrit dans le cercle B est plus grand que la surface du cylindre, et par conséquent plus grand que la surface du prisme. Donc le cercle B n'est pas plus grand que la surface du cylindre. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus petit; donc il lui est égal.

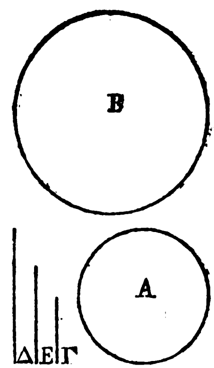
PROPOSITION XV.

La surface d'un cône droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

Soit le cône droit dont le cercle A est la base; que la droite Γ soit le rayon de la base; que la droite Δ soit égale au côté du cône; que la droite E soit moyenne proportionnelle entre Γ, Δ, et enfin que le cercle B ait pour rayon une droite égale à la droite E. Je dis que le cercle B est égal à la surface du cône, la base exceptée.



Car si le cercle B n'est pas égal à la surface du cône, la base exceptée, il est ou plus grand ou plus petit. Supposons d'abord qu'il soit plus petit. Puisqu'on a deux quantités inégales, la surface du cône et le cercle B, et que la surface du cône est la plus grande, on peut inscrire dans le cercle B un polygone équilatère, et lui circonscrire un polygone semblable au premier, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la surface du cône au cercle B (6). Imaginons que l'on ait circonscrit au cercle A un polygone semblable au polygone circonscrit au cercle B; et supposons que le polygone circonscrit au cercle A soit la base d'une pyramide qui ait le même sommet que le cône. Puisque les polygones circonscrits aux cercles A, B sont semblables, ils sont entre eux comme les quarrés des rayons de ces cercles; c'est-à-dire, comme les quarrés des droites Γ, E, ou comme les droites Γ, Δ. Mais le polygone circonscrit au cercle A est à la surface de la pyramide circonscrite au cône, comme la droite Γ est à la droite Δ. En effet, la droite Γ est égale à la



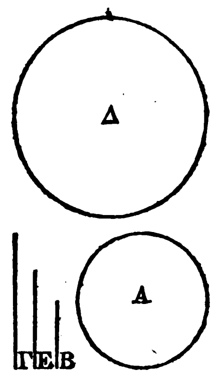
perpendiculaire menée du centre du cercle sur un des côtés du polygone; la droite Δ est égale au côté du cône; et le contour du polygone est la hauteur commune de deux rectangles dont les moitiés sont le polygone circonscrit au cercle A, et la surface de la pyramide circonscrite au cône. Donc le polygone circonscrit au cercle A est au polygone circonscrit au cercle B, comme le polygone circonscrit au cercle A est à la surface de la pyramide circonscrite au cône. Donc la surface de la pyramide est égale au polygone circonscrit au cercle B. Donc puisque la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone inscrit est moindre que la raison de la surface du cône au cercle B, la raison de la surface de la pyramide qui est circonscrite au cône au polygone inscrit dans le cercle B, sera moindre que la raison de la surface du cône au cercle B (α). Ce qui est impossible; car la surface de la pyramide est plus grande que la surface du cône, ainsi que nous l'avons démontré (13); et le polygone inscrit dans le cercle B est au contraire plus petit que le cercle B. Donc le cercle B n'est pas plus petit que la surface du cône.

Je dis à présent que le cercle B n'est pas plus grand que la surface du cône. Car supposons, si cela est possible, que ce cercle soit plus grand. Supposons de nouveau qu'on ait inscrit dans le cercle B un polygone, et qu'on lui en ait circonscrit un autre; de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison du cercle B à la surface du cône (6). Inscrivons dans le cercle A un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle B; et concevons que ce polygone soit la base d'une pyramide, qui ait le même sommet que le cône. Puisque les polygones inscrits dans les cercles A, B sont semblables, ces polygones sont entre eux comme les quarrés des rayons de ces cercles. Donc la raison du polygone inscrit dans le cercle A au polygone inscrit dans le cercle B est égale à la raison de Γ à Δ. Mais la raison de Γ à Δ est plus grande que la raison du polygone inscrit dans le cercle A à la surface de la pyramide inscrite dans le cône; car la raison du rayon du cercle A au côté du cône est plus grande que la raison de la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone à la perpendiculaire menée du sommet du cône sur le côté du même polygone (6). Donc la raison du polygone inscrit dans le cercle A au polygone inscrit dans le cercle B est plus grande que la raison du premier polygone à la surface de la pyramide. Donc la surface de la pyramide est plus grande que le polygone inscrit dans le cercle B. Mais la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone qui lui est inscrit, est moindre que la raison du cercle B à la surface du cône; donc la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B à la surface de la pyramide inscrite dans le cône, est encore moindre que la raison du cercle B à la surface du cône . . . . (7). Ce qui est impossible; car le polygone circonscrit est plus grand que le cercle B (2), tandis que la surface de la pyramide inscrite dans le cône est plus petite que la surface du cône (13). Donc le cercle B n'est pas plus grand que la surface du cône. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus petit : donc il lui est égal.

PROPOSITION XVI.

La surface d'un cône droit quelconque est à sa base comme le côté du cône est au rayon de sa base.

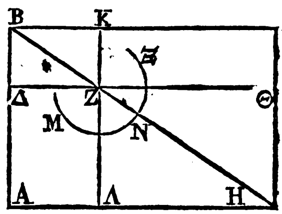
Soit un cône droit qui ait pour base le cercle A. Que la droite B soit égale au rayon du cercle A, et la droite Γ égale au côté de ce cône. Il faut démontrer que la surface du cône est au cercle A comme Γ est à B.



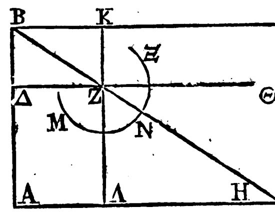
Prenons une droite E moyenne proportionnelle entre B, Γ; et supposons un cercle Δ qui ait un rayon égal à la droite E. Le cercle Δ sera égal à la surface du cône, ainsi que cela a été démontré dans le théorême précédent. Mais on a démontré aussi que le cercle Δ est au cercle A comme la droite Γ est à la droite B; car ces deux raisons sont égales chacune à la raison du quarré de la droite E au quarré de la droite B; parce que les cercles sont entre eux comme les quarrés décrits sur leurs diamètres, et par conséquent comme les quarrés décrits sur leurs rayons, à cause que ce qui convient aux diamètres convient aussi à leurs moitiés; or, les rayons des cercles A, Δ sont égaux aux droites B, E..........(α). Il est donc évident que la surface du cône est à la surface du cercle A comme la droite Γ est à la droite B.

LEMME.

Soit le parallélogramme BAH et que BH soit sa diagonale. Que le côté BA soit coupé en deux parties d'une manière quelconque au point Δ. Par le point Δ menons la droite ΔΘ parallèle au côté AH, et par le point Z la droite KΛ, parallèle au côté BA. Je dis que la surface comprise sous BA, AH est égale à la surface comprise sous BΔ, ΔZ, et à la surface comprise sous ΔA et sous une droite composée de ΔZ, AH (α).



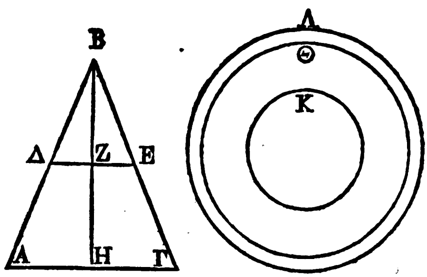
En effet, la surface comprise sous BA, AH est la surface totale BH. Mais la surface comprise sous les droites BΔ, ΔZ est la surface BZ ; la surface comprise sous ΔA, et sous une droite composée de ΔZ, AH, est le gnomon MNΞ, parce que la surface comprise sous les droites ΔA, AH est égale à la surface KH, le complément KΘ étant égal au complément ΔΛ, et enfin la surface comprise sous ΔA, ΔZ est égale à la surface ΔΛ. Donc la surface totale BH, c'est-à-dire celle qui est comprise sous les droites BA, AH est égale à la surface comprise sous les droites BΔ, ΔZ, et au gnomon MNΞ, qui est égal à la surface comprise sous ΔA et sous une droite composée de AH, ΔZ.



PROPOSITION XVII.

Si un cône droit est coupé par un plan parallèle à la base, la surface comprise entre les plans parallèles est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la partie du côté du cône comprise entre les plans parallèles et entre une droite égale à la somme des rayons des cercles qui sont dans les plans parallèles.

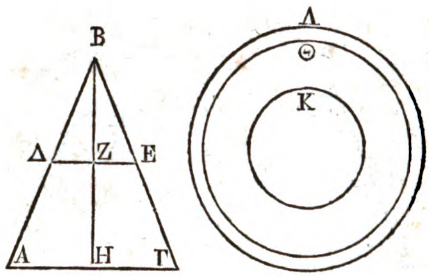
Soit un cône dont le triangle qui passe par l'axe soit égal au triangle ABΓ. Coupons ce



cône par un plan parallèle à la base; que ce plan produise la section ΔE, et que la droite BH soit l'axe de ce cône. Supposons un cercle dont le rayon soit moyen proportionnel entre la droite AΔ et entre la somme des droites ΔZ, HA; et que ce cercle soit Θ. Je dis que ce cercle est égal à la surface du cône comprise entre ΔE, AΓ.

Supposons les deux cercles Λ, K; que le quarré construit sur le rayon du cercle K soit égal à la surface comprise sous les droites BΔ, ΔZ, et que le quarré construit sur le rayon du cercle Λ, soit égal à la surface comprise sous les droites BA, AH. Le cercle Λ sera égal à la surface du cône ABΓ, et le cercle K égal à la surface du cône ΔEB (15).

En effet, la surface comprise sous BA, AH est égale à la surface comprise sous BΔ, ΔZ, et



à la surface comprise sous AΔ et sous une droite composée ΔZ, AH, à cause que la droite ΔZ est parallèle à la droite AH (16, *lemme*). Mais la surface comprise sous AB, AH est égale au quarré construit sur le rayon du cercle Λ; la surface comprise sous BΔ, ΔZ est égale au quarré construit sur le rayon du cercle K; et la surface comprise sous ΔA et sous une droite composée de ΔZ, AH, est égale au quarré construit sur le rayon du cercle Θ. Donc le quarré construit sur le rayon du cercle Λ est égal à la somme des quarrés construits sur les rayons des cercles K, Θ. Donc le cercle Λ est égal aux cercles K, Θ. Mais le cercle Λ est égal à la surface du cône BAΓ, et le cercle K égal à la surface du cône ΔBE; donc la surface restante comprise entre les plans parallèles ΔE, AΓ est égale à la surface du cercle Θ.

LEMMES.

1. Les cônes qui ont des hauteurs égales sont entre eux comme leurs bases, et ceux qui ont des bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs.

2. Si un cylindre est coupé par un plan parallèle à sa base, les deux cylindres seront entre eux comme leurs axes.

3. Lorsque des cônes et des cylindres ont les mêmes bases, les cônes sont entre eux comme les cylindres (*α*).

4. Les bases des cônes égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs de ces cônes; et les cônes dont les bases sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs sont égaux entre eux.

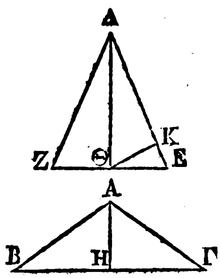
5. Les cônes dont les diamètres des bases et dont les hauteurs, c'est-à-dire les axes sont proportionnels, sont entre eux en raison triplée des diamètres de leurs bases.

Toutes ces choses ont été démontrées par ceux qui ont existé avant nous (*ϐ*).

PROPOSITION XVIII.

Si l'on a deux cônes droits, si la surface de l'un est égale à la base de l'autre, et si la perpendiculaire menée du centre de la base du premier sur son côté, est égale à la hauteur du second, ces deux cônes sont égaux.

Soient les deux cônes droits ABΓ, ΔEZ; que la base du cône ABΓ soit égale à la surface du cône ΔEZ; que la hauteur AH soit égale à la perpendiculaire KΘ, menée du centre Θ sur un côté du cône, savoir sur ΔE. Je dis que ces deux cônes sont égaux.

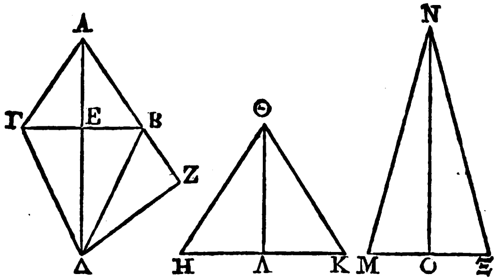


Puisque la base du cône ABΓ est égale à la surface du cône ΔEZ, et que les choses qui sont égales entre elles ont la même raison avec une troisième, la base du cône BAΓ est à la base du cône ΔEZ comme la surface du cône ΔEZ est à la base du cône ΔEZ. Mais la surface du cône ΔEZ est à sa base comme ΔΘ est à ΘK; car on a démontré que la surface d'un cône droit quelconque est à sa base comme le côté du cône est au rayon de la base, c'est-à-dire comme ΔE est à EΘ (16); et la droite EΔ est à la droite EΘ comme la droite ΔΘ est à la droite ΘK, parce que les triangles ΔEΘ, ΔKΘ sont équiangles; et de plus la droite ΘK est égale à la droite AH. Donc la base du cône BAΓ est à la base du cône ΔEZ comme la hauteur du cône ΔEZ est à la hauteur du cône ABΓ. Donc les bases des cônes ABΓ, ΔEZ sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs. Donc le cône BAΓ est égal au cône ΔEZ (17, *lemm.* 4).

PROPOSITION XIX.

Un rhombe quelconque composé de deux cônes droits est égal à un cône qui a une base égale à la surface de l'un des cônes qui composent le rhombe, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du sommet de l'autre cône sur le côté du premier cône.

Soit un rhombe ABΓΔ composé de deux cônes droits, dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BΓ, et dont la hauteur est la droite AΔ. Supposons un autre cône HΘK, qui ait une base égale à la surface du cône ΑΒΓ, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point Δ sur le côté ΑΒ ou sur ce côté prolongé. Que cette perpendiculaire soit ΔΖ, et que la hauteur du cône



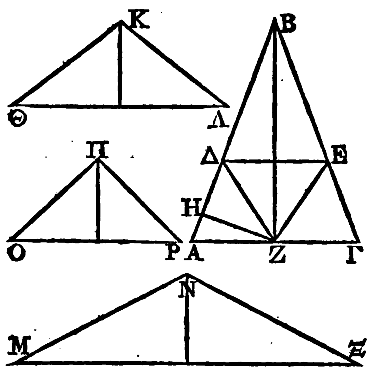
ΘΗΚ soit la droite ΘΛ égale à la droite ΔΖ. Je dis que le rhombe ΑΒΓΔ est égal au cône ΗΘΚ.

Supposons un autre cône ΜΝΞ, dont la base soit égale à celle du cône ΑΒΓ et dont la hauteur soit égale à ΑΔ. Que la hauteur de ce cône soit ΝΟ. Puisque ΝΟ est égal à ΑΔ, la droite ΝΟ est à la droite ΔΕ comme ΑΔ est à ΔΕ. Mais ΑΔ est à ΔΕ comme le rhombe ΑΒΓΔ est au cône ΒΓΔ (α); et ΝΟ est à ΔΕ comme le cône ΜΝΞ est au cône ΒΓΔ; parce que ces deux cônes ont des bases égales. Donc le cône ΜΝΞ est au cône ΒΓΔ comme le rhombe ΑΒΓΔ est au cône ΒΓΔ. Donc le cône ΜΝΞ est égal au rhombe ΑΒΓΔ. Mais la surface du cône ABΓ est égale à la base du cône HΘK ; donc la surface du cône ABΓ est à sa base comme la base du cône HΘK est à la base du cône MNΞ, parce que la base du cône ABΓ est égale à la base du cône MNΞ. Mais la surface du cône ABΓ est à sa base comme AB est à BE (16), c'est-à-dire comme AΔ est à ΔZ ; car les triangles ABE, AΔZ sont semblables. Donc la base du cône HΘK est à la base du cône MNΞ comme AΔ est à ΔZ. Mais la droite AΔ est égale à la droite NO, par supposition, et la droite ΔZ est aussi égale à la droite ΘΛ ; donc la base du cône HΘK est à la base du cône MNΞ comme la hauteur NO est à la hauteur ΘΛ. Donc les bases des cônes HΘK, MNΞ sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs. Donc ces cônes sont égaux (17, *lemm.* 4). Mais on a démontré que le cône MNΞ est égal au rhombe ABΓΔ. Donc le cône HΘK est aussi égal au rhombe ABΓΔ.

PROPOSITION XX.

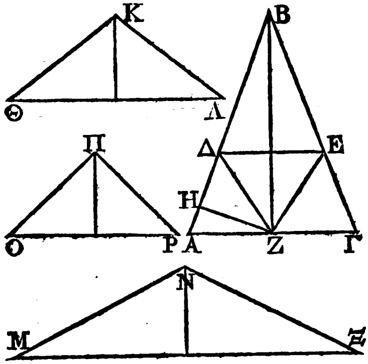
Si un cône droit est coupé par un plan parallèle à la base, et si sur le cercle qui est produit par cette section, on conçoit un cône ayant son sommet au centre de la base; si l'on retranche du cône total le rhombe produit par cette construction, le reste sera égal à un cône ayant une base égale à la surface du cône comprise entre les plans parallèles, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de la base sur un côté du cône.

Soit le cône droit ABΓ; coupons ce cône



par un plan parallèle à la base; que ce plan produise la section ΔE; que le centre de la base soit le point Z, et que le cercle décrit autour du diamètre ΔE soit la base d'un cône ayant son sommet au point Z. Le rhombe BΔZE sera composé de deux cônes droits. Supposons un cône KΘΛ dont la base soit égale à la surface comprise entre les plans ΔE, AΓ, et dont la hauteur soit égale à la perpendiculaire ZH menée du point Z sur le côté AB. Je dis que si l'on retranche le rhombe BΔZE du cône ABΓ, le reste sera égal au cône ΘKΛ.

Soient les deux cônes MNΞ, OΠP; que la base du cône MNΞ soit égale à la surface du cône ABΓ, et que sa hauteur soit égale à la droite ZH. Le cône MNΞ sera égal au cône ABΓ; car lorsque l'on a deux cônes droits, si la surface de l'un est égale à la base de l'autre, et si la perpendiculaire menée du centre de la base du premier sur son côté, est égale à la hauteur du second, ces deux cônes sont égaux (18). Que la base du cône OΠP soit égale à la surface du cône ΔBE, et sa hauteur égale à la droite ZH; le cône OΠP sera égal au rhombe BΔZE, ainsi que cela a été démontré plus haut (19). Puisque la surface du cône ABΓ est composée de la surface du cône BΔE, et de la surface comprise entre ΔE, AΓ; que la surface du cône ABΓ est égale à la base du cône MNΞ; que la surface du cône ΔBE est égale à la base du cône OΠP, et qu'enfin la surface comprise entre ΔE, AΓ est égale à la base du cône ΘKΛ, la base du cône ΜΝΞ sera égale aux bases des cônes ΘΚΛ, ΟΠΡ. Mais ces cônes ont la même hauteur; donc le cône ΜΝΞ est égal aux cônes ΘΚΛ,

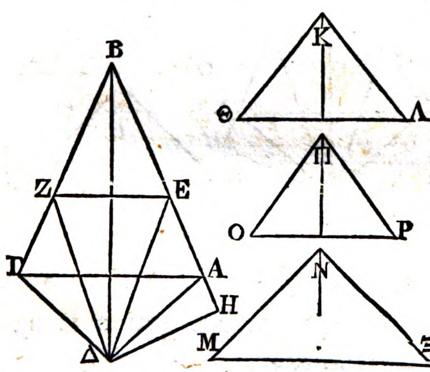


ΟΠΡ. Mais le cône ΜΝΞ est égal au cône ΑΒΓ, et le cône ΠΟΡ est égal au rhombe ΒΔΕΖ; donc ce qui reste du cône ΑΒΓ, après en avoir ôté le rhombe ΒΔΕΖ, est égal au cône ΘΚΛ.

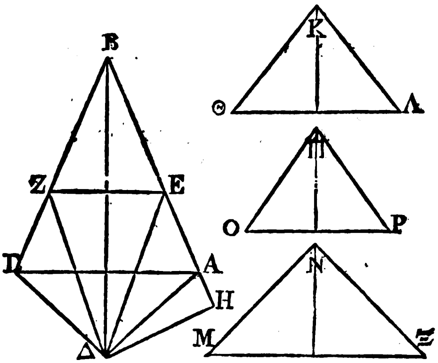
PROPOSITION XXI.

Si un des cônes d'un rhombe composé de cônes droits est coupé par un plan parallèle à la base; si le cercle produit par cette section est la base d'un cône qui a le même sommet que l'autre cône du rhombe; et si du rhombe total, on retranche le rhombe produit par cette construction, ce qui restera du rhombe total sera égal à un cône qui aura une base égale à la surface comprise entre les plans parallèles, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du sommet du second cône sur le côté du premier.

Que ΑΒΓΔ soit un rhombe composé de



deux cônes droits; coupons un de ces cônes par un plan parallèle à la base, et que ce plan produise la section ΕΖ; que le cercle produit par cette section soit la base d'un cône qui ait son sommet au point Δ, cette construction produira le rhombe ΕΒΖΔ. Retranchons ce rhombe du rhombe total; et supposons un cône ΘΚΛ, qui ait une base égale à la surface comprise entre ΑΓ, ΕΖ, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point Δ sur la droite ΒΑ, ou sur son prolongement. Je dis que le reste dont nous avons parlé est égal au cône ΘΚΛ.



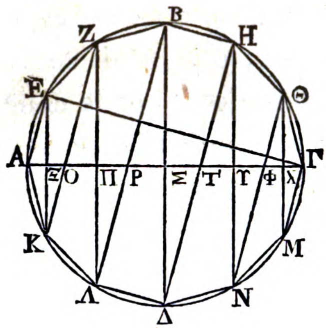
Soient les deux cônes ΜΝΞ, ΟΠΡ. Que la base du cône ΜΝΞ soit égale à la surface du cône ΑΒΓ, et que sa hauteur soit égale à la droite ΔΗ : d'après ce que nous avons démontré (19), le cône ΜΝΞ est égal au rhombe ΑΒΓΔ. Que la base du cône ΟΠΡ soit égale à la surface du cône ΕΒΖ, et sa hauteur égale à la droite ΔΗ ; le cône ΟΠΡ sera aussi égal au rhombe ΕΒΖΔ (19). Mais puisque la surface du cône ΑΒΓ est composée de la surface du cône ΕΒΖ, et de la surface comprise entre ΕΖ, ΑΓ ; que la surface du cône ΑΒΓ est égale à la base du cône ΜΝΞ ; que la surface du cône

EBZ est égale à la base du cône OΠP, et qu'enfin la surface comprise entre EZ, AΓ est égale à la base du cône ΘKΛ, la base du cône MNΞ sera égale à la somme des bases des cônes OΠP, ΘKΛ. Mais ces cônes ont la même hauteur; donc le cône MNΞ est égal à la somme des cônes ΘKΛ, OΠP. Mais le cône MNΞ est égal au rhombe ABΓΔ, et le cône OΠP égal au rhombe EBZΔ; donc le cône restant ΘKΛ est égal à ce qui reste du rhombe ABΓΔ.

PROPOSITION XXII.

Si l'on inscrit dans un cercle un polygone équilatère et d'un nombre pair de côtés; et si l'on joint les côtés de ce polygone par des droites parallèles à une des droites qui soutendent deux côtés de ce même polygone, la somme des droites qui joignent les côtés du polygone est au diamètre du cercle, comme la droite qui soutend la moitié des côtés du polygone inscrit moins un est à un côté de ce polygone.

Soit le cercle ABΓΔ; inscrivons-lui le polygone AEZBHΘΓMNΔΛK; et menons les droites EK, ZΛ, BΔ, HN, ΘM. Il est évident que ces droites seront parallèles à une de celles qui soutendent deux côtés de ce polygone. Je dis que la somme des droites dont nous avons parlé est au diamètre du cercle comme la droite ΓΕ est à la droite ΕΑ.

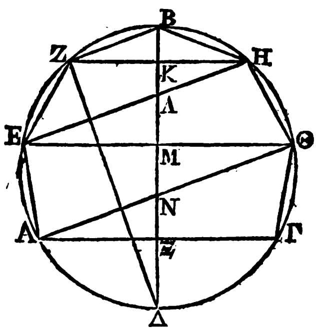


Menons les droites ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ. La droite ΖΚ sera parallèle à la droite ΕΑ; la droite ΒΛ parallèle à la droite ΖΚ; la droite ΔΗ parallèle à la droite ΒΛ; la droite ΘΝ parallèle à ΔΗ; et enfin la droite ΓΜ parallèle à ΘΝ. Puisque les deux droites ΕΑ, ΚΖ sont parallèles, et que l'on a mené les deux droites ΕΚ, ΑΟ, la droite ΕΞ est à la droite ΞΑ comme la droite ΚΞ est à la droite ΞΘ. Par la même raison, la droite ΚΞ est à la droite ΞΟ comme la droite ΖΠ est à la droite ΠΟ; la droite ΖΠ est à la droite ΠΟ comme la droite ΛΠ est à la droite ΠΡ; la droite ΛΠ est à la droite ΠΡ comme la droite ΒΣ est à la droite ΣΡ; la droite ΒΣ est à la droite ΣΡ comme la droite ΔΣ est à la droite ΣΤ; la droite ΔΣ est à la droite ΣΤ comme la droite ΗΥ est à la droite ΥΤ; la droite ΗΥ est à la droite ΥΤ comme la droite ΝΥ est à la droite ΥΦ; la droite ΝΥ est à la droite ΥΦ comme la droite ΘΧ est à la droite ΧΦ; et enfin la droite ΘΧ est à la droite ΧΦ comme la droite ΜΧ est à la droite ΧΓ. Donc la somme de toutes les droites ΕΞ, ΞΚ, ΖΠ, ΠΛ, ΒΣ, ΣΔ, ΗΥ, ΥΝ, ΘΧ, ΧΜ, est à la somme de toutes les droites ΑΞ, ΞΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΦ, ΦΧ, ΧΓ, comme une de ces premières droites est à une des secondes. Donc la somme des droites ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ est au diamètre ΑΓ comme la droite ΕΞ est à la droite ΞΑ. Mais la droite ΕΞ est à la droite ΞΑ comme la droite ΓΕ est à la droite ΕΑ; donc la somme des droites ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ est au diamètre ΑΓ comme la droite ΓΕ est à la droite ΕΑ.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on inscrit dans un segment de cercle un polygone d'un nombre pair de côtés, dont tous les côtés, excepté la base, soient égaux entre eux; si l'on joint les côtés du polygone par des parallèles à la base du segment, la somme de ces parallèles, avec la moitié de la base du segment, est à la hauteur du segment, comme la droite menée de l'extrémité du diamètre à l'extrémité d'un des côtés du polygone est à un côté du polygone.

Conduisons dans le cercle ABΓ une droite

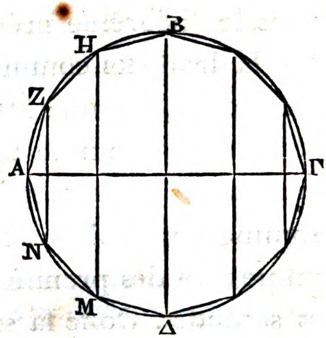


quelconque AΓ. Dans le segment ABΓ, et au-dessus de AΓ, inscrivons un polygone d'un nombre pair de côtés, dont tous les côtés, excepté la base ΑΓ, soient égaux; et menons les droites ΖΗ, ΕΘ parallèles à la base du segment. Je dis que la somme des droites ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ est à la droite ΒΞ comme la droite ΔΖ est au côté ΖΒ.

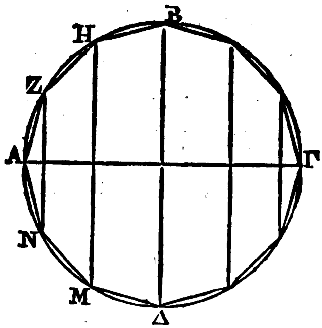
Menons les droites ΗΕ, ΑΘ; ces droites seront parallèles à la droite ΖΒ. Par la même raison que dans le théorême précédent, la droite ΚΖ est à la droite ΚΒ comme la droite ΗΚ est à la droite ΚΛ, comme ΕΜ est à ΜΛ, comme ΜΘ est à ΜΝ et comme ΞΑ est à ΞΝ. Donc la somme des droites ΖΚ, ΚΗ, ΕΜ, ΜΘ, ΑΞ est à la somme des droites ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, comme une des premières droites est à une des secondes. Donc la somme des droites ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ est à la droite ΒΞ comme la droite ΖΚ est à la droite ΚΒ. Mais la droite ΖΚ est à la droite ΚΒ comme la droite ΔΖ est à la droite ΖΒ. Donc la somme des droites ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ est à la droite ΒΞ comme la droite ΔΖ est à la droite ΖΒ.

PROPOSITION XXIV.

Que ABΓΔ soit un grand cercle d'une sphère; inscrivons dans ce cercle un polygone équilatère dont le nombre des côtés soit divisible par quatre (α). Soient AΓ, BΔ deux



diamètres (ϐ). Si le diamètre AΓ restant immobile, le cercle dans lequel le polygone est inscrit fait une révolution, il est évident que sa circonférence se mouvra selon la surface de la sphère, et que les sommets des angles, excepté ceux qui sont placés aux points A, Γ, décriront dans la surface de la sphère des circonférences de cercles dont les plans seront perpendiculaires sur le cercle ABΓΔ. Les diamètres de ces cercles seront des droites qui étant parallèles à la droite BΔ, joignent les angles du polygone. Les côtés du polygone décriront les surfaces de certains cônes, savoir : les côtés AZ, AN décriront la surface d'un cône dont la base est le cercle qui a pour diamètre la droite ZN et dont le sommet est le point A; les côtés ZH, MN décriront la surface d'un cône dont la base est le cercle qui a pour diamètre la droite MH, et dont le sommet est le point où les droites ZH, MN prolongées se rencontrent avec la droite AΓ; et enfin les côtés BH, MΔ décriront la surface du cône dont la base est le cercle qui a pour diamètre la droite BΔ, et dont le sommet est le point où les droites BH, ΔM prolongées se rencontrent avec la droite AΓ. Pareillement dans l'autre demi-cercle, les côtés décriront aussi des surfaces de cônes semblables à celles dont nous venons de parler. De cette manière il sera inscrit dans la sphère une certaine figure qui sera comprise par les surfaces dont nous venons de parler, et dont la surface sera plus petite que la surface de la sphère. En effet, la sphère étant partagée en deux parties par un plan qui est mené par une droite BΔ, et perpendiculaire sur le cercle ABΓΔ, la surface de l'un des hémisphères et la surface de la figure inscrite ont les mêmes limites dans un seul plan, puisque ces deux surfaces ont pour limites la circonférence du cercle qui est décrite autour du diamètre ΒΔ,

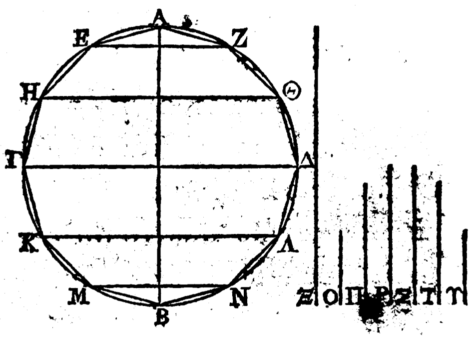


et qui est perpendiculaire sur le cercle ΑΒΓΔ; ces deux surfaces sont concaves du même côté, et l'une de ces surfaces est comprise par l'autre et par un plan qui a les mêmes limites que cette autre (*princ.* 4). Pareillement la surface de la figure qui est inscrite dans l'autre hémisphère, est aussi plus petite que la surface de cet hémisphère. Donc la surface totale de la figure inscrite dans la sphère est plus petite que la surface de la sphère.

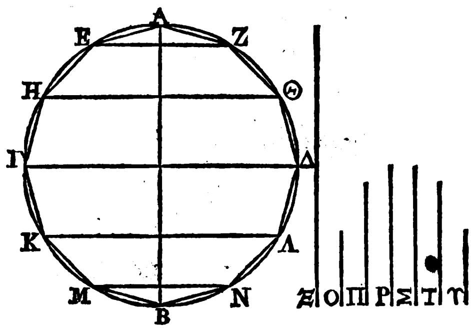
PROPOSITION XXV.

La surface de la figure inscrite dans une sphère est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous le côté du polygone, et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les côtés du polygone, en formant des quadrilatères, et qui sont parallèles à une droite qui soutend deux côtés du polygone.

Que ΑΓΒΔ soit un grand cercle de la sphère. Inscrivons dans ce cercle un polygone



équilatère dont le nombre des côtés soit divisible par quatre. Concevons qu'une figure ait été engendrée dans la sphère par le polygone inscrit. Menons les droites ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, et que ces droites soient parallèles à la droite qui soutend deux côtés du polygone. Supposons un cercle Ξ dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous la droite AE, et sous une droite égale à la



somme des droites EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN. Je dis que ce cercle est égal à la surface de la figure inscrite dans la sphère.

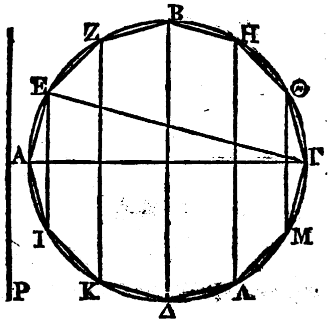
Supposons les cercles O, Π, P, Σ, T, Υ. Que le quarré du rayon du cercle O soit égal à la surface comprise sous EA et sous la moitié de EZ; que le quarré du rayon du cercle Π soit égal à la surface comprise sous la droite EA, et sous la moitié de la somme des droites EZ, HΘ; que le quarré du rayon du cercle P soit égal à la surface comprise sous la droite EA, et sous la moitié de la somme des droites HΘ, ΓΔ; que le quarré du rayon du cercle Σ soit égal à la surface comprise sous la droite AE, et sous la moitié de la somme des droites ΓΔ, ΚΛ; que le quarré du rayon du cercle Τ soit égal à la surface comprise sous la droite AE, et sous la moitié de la somme des droites ΚΛ, MN, et qu'enfin le quarré du rayon du cercle Υ soit égal à la surface comprise sous la droite AE, et sous la moitié de la droite MN. Mais le cercle O est égal à la surface du cône AEZ (15); le cercle Π égal à la surface comprise entre EZ, HΘ (17); le cercle P égal à la surface comprise entre HΘ, ΓΔ; le cercle Σ égal à la surface comprise entre ΔΓ, ΚΛ; le cercle T égal à la surface comprise entre ΚΛ, MN, et enfin le cercle Υ égal à la surface du cône MBN. Donc la somme de ces cercles est égale à la surface inscrite dans la sphère. Mais il est évident que la somme des quarrés des rayons des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ est égale à la surface comprise sous AE, et sous la somme des demi-droites EZ, HΘ, ΓΔ, ΚΛ, MN, prises deux fois, c'est-à-dire la somme des droites totales EZ, HΘ, ΓΔ, ΚΛ, MN. Donc la somme des quarrés des rayons des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ est égale à la surface comprise sous AE, et sous la somme des droites ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ. Mais le quarré du rayon du cercle Ξ est égal à la surface comprise sous la droite ΑΕ, et sous une droite composée de toutes les droites ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ. Donc le quarré du rayon du cercle Ξ est égal à la somme des quarrés des rayons de tous les cercles Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ. Donc le cercle Σ est égal à la somme des cercles Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ (*a*). Mais l'on a démontré que la somme des cercles Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ est égale à la surface de la figure dont nous avons parlé. Donc le cercle Σ est aussi égal à la surface de cette figure.

PROPOSITION XXVI.

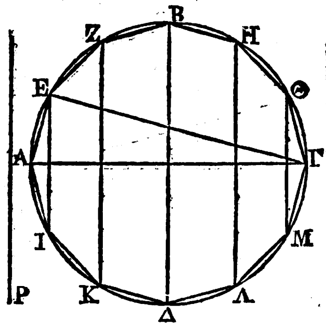
La surface d'une figure inscrite dans une sphère et terminée par des surfaces coniques, est plus petite que quatre grands cercles de la sphère.

Soit ΑΒΓΔ un grand cercle d'une sphère. Inscrivons dans ce cercle un polygone équiangle et équilatère, dont le nombre des côtés soit divisible par quatre. Concevons que sur ce polygone on ait construit une figure terminée par des surfaces coniques. Je dis que la surface de la figure inscrite est plus petite que quatre grands cercles de cette sphère.

Menons les deux droites EI, ΘM, soutendant chacune deux côtés du polygone, et



les droites ZK, ΔB, HΛ parallèles aux droites EI, ΘM. Supposons un cercle P dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous la droite EA, et sous une droite égale à la somme des droites EI, ZK, BΔ, HΛ, ΘM. D'après ce qui a été démontré (25), ce cercle est égal à la surface de la figure dont nous venons de parler. Mais l'on a démontré qu'une droite égale à la somme des droites EI, ZK, BΔ, HΛ, ΘM, est au diamètre AΓ du cercle ABΓΔ comme ΓE est à EA (22). Donc la surface comprise sous une droite égale à la somme des droites dont nous venons de parler, et sous la droite EA, c'est-à-dire le quarré du rayon du cercle P, est égal à la surface comprise sous les droites AΓ, ΓE. Mais la surface comprise sous AΓ, ΓE est plus petite que le quarré de AΓ; donc le quarré du rayon



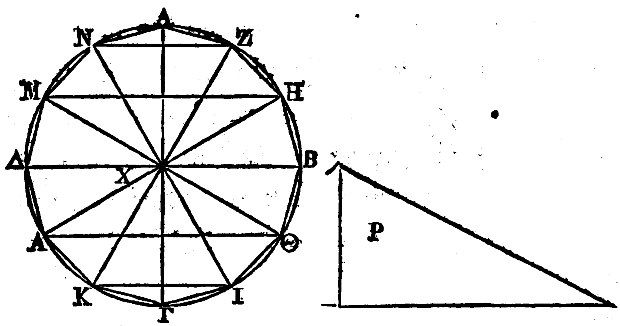
du cercle P est plus petit que le quarré de AΓ. Donc le rayon du cercle P est plus petit que AΓ. Donc le diamètre du cercle P est plus petit que le double du diamètre du cercle ABΓΔ. Donc deux diamètres du cercle ABΓΔ sont plus grands que le diamètre du cercle P. Donc le quadruple du quarré construit sur le diamètre du cercle ABΓΔ, c'est-à-dire sur AΓ, est plus grand que le quarré construit sur le rayon du cercle P. Mais le quadruple du quarré construit sur AΓ est au quarré construit sur le diamètre du cercle P, comme le quadruple du cercle ABΓΔ est au cercle P. Donc le quadruple du cercle ABΓΔ est plus grand que le cercle P. Donc le cercle P est plus petit que le quadruple d'un grand cercle. Mais on a démontré que le cercle P est égal à la surface de la figure dont nous venons de parler (25); donc la surface de la figure dont nous venons de parler est plus petite que le quadruple d'un grand cercle de la sphère.

PROPOSITION XXVII.

Une figure inscrite dans la sphère et terminée par des surfaces coniques, est égale à un cône qui a une base égale à la surface de la figure inscrite dans la sphère, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté du polygone.

Soit une sphère; que ABΓΔ soit un grand cercle de cette sphère, et que le reste soit comme dans le théorème précédent. Que P soit un cône droit, qui ait une base égale à la surface de la figure inscrite dans cette sphère, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de cette sphère sur le côté du polygone. Il faut démontrer que la figure inscrite dans cette sphère est égale au cône P.

Sur les cercles décrits autour des diamètres ZN, HM, ΘΛ, IK, construisons des



cônes qui aient leur sommet au centre de la sphère. On aura un rhombe solide composé du cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre ZN, et dont le sommet est le point A; et du cône dont la base est le même cercle et dont le sommet est le point X. Ce rhombe est égal à un cône qui a une base égale à la surface du cône NAZ, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point X sur la droite AZ (19). Le reste du rhombe terminé par la surface conique placée entre les plans parallèles conduits par les droites ZN, HM, et entre les surfaces des cônes ZNX, HMX, est égal à un cône qui a une base égale à la surface conique comprise entre les plans parallèles conduits par les droites ZN, HM, et pour hauteur une droite égale à la perpendiculaire menée du point X sur la droite ZH, ainsi que cela a été démontré (21). De plus le reste de cône terminé par la surface conique comprise entre les plans parallèles menés par les droites HM, BΔ, entre la surface du cône HMX et entre le cercle décrit autour du diamètre BΔ, est égal à un cône qui a une base égale à la surface conique comprise entre les plans parallèles menés par les droites HM, BΔ, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point X sur la droite BH (20). Dans l'autre hémisphère, on aura pareillement un rhombe XKΓI, et autant de restes de cônes que dans le premier hémisphère; et ce rhombe et ces restes de cônes seront égaux, chacun à chacun, aux cônes dont nous venons de parler. Il est donc évident que la figure totale inscrite dans la sphère est égale à la somme de tous les cônes dont nous venons de parler. Mais la somme de ces cônes est égale au cône P, parce que le cône P a une hauteur égale à la hauteur de chacun des cônes dont nous venons de parler, et une base égale à la somme de leurs bases. Il est donc évident que la figure inscrite dans la sphère est égale au cône P.

PROPOSITION XXVIII.

Une figure inscrite dans une sphère et terminée par des surfaces coniques, est plus petite que le quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère, et une hauteur égale à un rayon de cette même sphère.

En effet, que P soit un cône égal à la

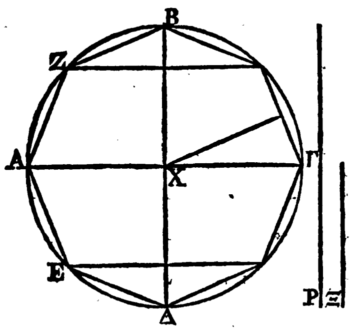
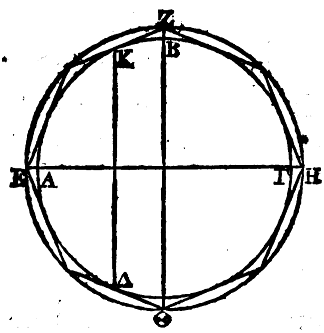


figure inscrite; c'est-à-dire que ce cône ait une base égale à la surface de la figure inscrite et une hauteur égale à la droite menée du centre du cercle sur un des côtés du polygone inscrit. Soit aussi un cône Ξ, qui ait une base égale au cercle ABΓΔ et une hauteur égale au rayon du cercle ABΓΔ.

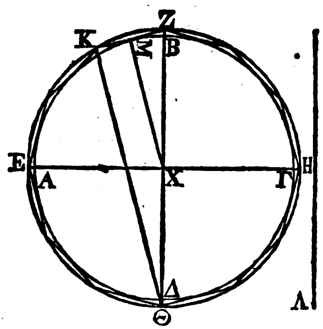
Puisque le cône P a une base égale à la surface de la figure inscrite dans la sphère et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point X sur le côté AZ, et puisqu'il a été démontré que la surface de la figure inscrite est plus petite que le quadruple d'un grand cercle d'une sphère (26), la base du cône P est plus petite que le quadruple de la base du cône Ξ. Mais la hauteur du cône P est plus petite que la hauteur du cône Ξ; donc, puisque le cône P a une base plus petite que le quadruple de la base du cône Ξ, et une hauteur plus petite que celle du cône Ξ, il est évident que le cône P est plus petit que le quadruple du cône Ξ. Mais le cône P est égal à la figure inscrite (27); donc la figure inscrite est plus petite que le quadruple du cône Ξ.

PROPOSITION XXIX.

Que ΑΒΓΔ soit un grand cercle d'une sphère. Circonscrivons à ce cercle un polygone équiangle et équilatère; que le nombre



des côtés de ce polygone soit divisible par quatre. Circonscrivons un cercle au polygone circonscrit. Le centre du cercle circonscrit sera le même que le centre du cercle ΑΒΓΔ. Si le diamètre EH restant immobile, le plan du polygone EZHΘ et le cercle ΑΒΓΔ font une révolution, il est évident que la circonférence du cercle ΑΒΓΔ se mouvra selon la surface de la sphère, et que la circonférence du cercle EZHΘ décrira la surface d'une autre sphère qui aura le même centre que la plus petite. Les points de contact des côtés du polygone décriront dans la surface de la plus petite sphère des cercles perpendiculaires sur le cercle ΑΒΓΔ ; les angles du polygone, excepté les angles placés aux points Ε, Η, décriront des circonférences de cercle dans la surface de la plus grande sphère, dont les plans seront perpendiculaires sur le cercle ΕΖΗΘ ; et les côtés du polygone décriront des surfaces coniques comme dans le théorême précédent. Il est donc évident qu'une figure terminée par des surfaces coniques sera circonscrite à la petite sphère et inscrite dans la grande. Nous démontrerons de la manière suivante, que la surface de la figure circonscrite est plus grande que la surface de la sphère. Que ΚΔ soit le diamètre d'un des cercles de la petite sphère, et Κ, Δ les points où deux côtés du polygone circonscrit touchent le cercle ΑΒΓΔ. La sphère étant partagée en deux parties par un plan conduit par la droite ΚΔ et perpendiculaire sur le cercle ΑΒΓΔ, la surface de la figure circonscrite à la sphère sera aussi partagée en deux parties par le même plan. Or il est évident que les surfaces obtenues de cette manière ont les mêmes limites dans un même plan, car la limite de l'une et de l'autre est la circonférence du cercle qui est décrit autour du diamètre ΚΔ et qui est perpendiculaire sur le cercle ΑΒΓΔ; et de



plus l'une et l'autre de ces surfaces sont concaves du même côté, et l'une est comprise par l'autre et par un plan qui à les mêmes limites que cette autre (*princ.* 4). Donc la surface du segment sphérique qui est comprise est plus petite que la surface de la figure circonscrite à ce même segment. Semblablement, la surface de l'autre segment sphérique est aussi plus petite que la surface de la figure circonscrite à ce même segment. Il est donc évident que la surface totale d'une sphère est plus petite que la surface de la figure circonscrite à cette sphère.

PROPOSITION XXX.

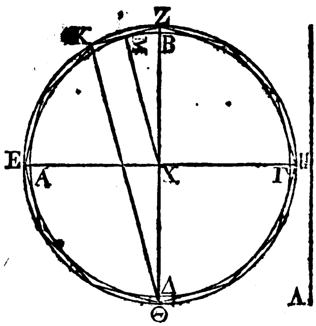
La surface d'une figure circonscrite à une sphère est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous un des côtés du polygone, et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone et qui sont parallèles à une de celles qui soutendent deux côtés du polygone.

En effet, la figure circonscrite à la petite sphère est inscrite dans la grande. Mais on a démontré que la surface de la figure inscrite dans la sphère et terminée par des surfaces coniques est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous le côté du polygone et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone et qui sont parallèles à une des droites qui soutendent deux côtés du polygone (25). Donc ce qui a été proposé plus haut est évident.

PROPOSITION XXXI.

La surface de la figure circonscrite à une sphère est plus grande que le quadruple d'un grand cercle de cette sphère.

Soient une sphère et un grand cercle, et



que le reste soit comme dans les théorêmes précédens. Que le cercle Λ soit égal à la surface de la figure proposée qui est circonscrite à la petite sphère.

Puisqu'on a inscrit dans le cercle EZHΘ un polygone équilatère dont le nombre des angles est pair, la somme des parallèles au diamètre ΘZ, qui joignent les angles du polygone est à ΘZ comme KΘ est à KZ. Donc la surface comprise sous un côté du polygone et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone, est égale à la surface comprise sous ZΘ, ΘK. Donc le quarré du rayon du cercle Λ est égal à la surface comprise sous ZΘ, ΘK (25). Donc le rayon du cercle Λ est plus grand que ΘK. Mais la droite ΘK est égale au diamètre du cercle ABΓΔ (*a*), puisque ΘK est double de XΣ qui est le rayon du cercle ABΓΔ. Il est donc évident que le cercle Λ, c'est-à-dire la surface de la figure circonscrite à une sphère, est plus grand que le quadruple d'un grand cercle de cette sphère.

PROPOSITION XXXII.

La figure circonscrite à la petite sphère est égale à un cône qui a pour base un cercle égal à la surface de cette figure, et pour hauteur une droite égale au rayon de cette sphère.

En effet, la figure circonscrite à la petite sphère est inscrite dans la plus grande. Or on a démontré qu'une figure inscrite et terminée par des surfaces coniques est égale à un cône qui a pour base un cercle égal à la surface de cette figure, et pour hauteur une droite égale à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté du polygone; et cette perpendiculaire est égale au rayon de la petite sphère (27). Donc ce qui a été posé plus haut est évident.

PROPOSITION XXXIII.

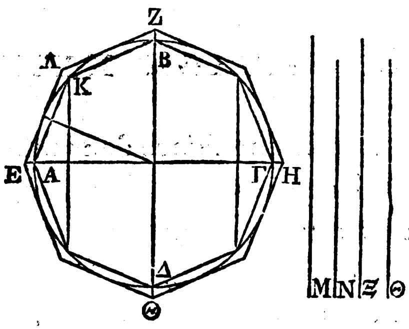
Il suit de-là que la figure circonscrite à la petite sphère est plus grande que le quadruple d'un cône qui a pour base un cercle égal à un grand cercle de cette sphère, et pour hauteur une droite égale au rayon de cette même sphère.

En effet, puisque cette figure est égale à un cône qui a une base égale à la surface de cette même figure, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone, c'est-à-dire au rayon de la petite sphère (32), et que la surface de la figure circonscrite à une sphère est plus grande que quatre grands cercles (31), la figure circonscrite à la petite sphère est plus grande que le quadruple d'un cône qui a pour base un grand cercle de cette sphère, et pour hauteur un rayon de cette même sphère; car cette figure est égale à un cône plus grand que le quadruple du cône dont nous venons de parler, puisque le premier a une base plus grande que le quadruple de la base du second et une hauteur égale.

PROPOSITION XXXIV.

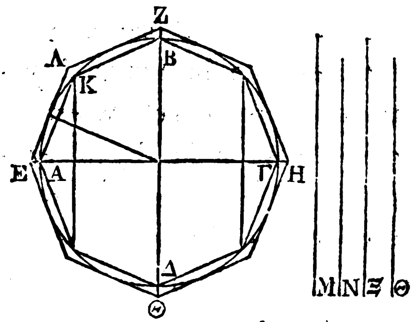
Si l'on inscrit une figure dans une sphère, et si on lui en circonscrit une autre; et si l'on fait faire une révolution aux polygones semblables qui ont été construits plus haut, la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite, sera doublée de la raison du côté du polygone qui est circonscrit à un grand cercle à un des côtés du polygone qui est inscrit dans ce même cercle; et la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite sera triplée de la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit.

Que ABΓΔ soit un grand cercle d'une sphère; inscrivons dans ce cercle un polygone équilatère dont le nombre des côtés soit divisible par quatre. Circonscrivons à ce même cercle un autre polygone semblable au premier; que les côtés du polygone circonscrit soient tangents aux milieux des arcs soutendus par les côtés du polygone inscrit; que les droites EH, ΘZ soient deux



diamètres du cercle qui comprend le polygone circonscrit; que ces diamètres se coupent à angles droits et soient placés de la même manière que les diamètres AΓ, BΔ; et concevons qu'on ait joint les angles opposés du polygone par des droites; ces droites seront parallèles entre elles et aux droites BZ, ΘΔ. Cela posé, le diamètre EH restant immobile, si l'on fait faire une révolution aux polygones, les côtés de ces polygones circonscriront une figure à la sphère et lui en inscriront une autre. Il faut démontrer que la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est doublée de la raison de EA à AK; et que la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est triplée de la raison de EA à AK.

Que M soit un cercle égal à la surface de la figure circonscrite à la sphère, et N un cercle égal à la surface de la figure inscrite. Le quarré du rayon du cercle M est égal à la surface comprise sous la droite EA et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone circonscrit (30); et le quarré du rayon du cercle N est égal à la surface comprise sous la droite AK et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone inscrit (25). Mais les polygones circonscrits et inscrits sont semblables; il est donc évident que les surfaces comprises sous les droites dont nous venons de parler, c'est-à-dire les surfaces comprises sous les sommes des droites qui joignent les angles des polygones et sous les côtés de ces mêmes polygones, sont des figures semblables entre elles (α). Donc ces figures sont entre elles comme les quarrés des côtés des polygones. Mais les surfaces qui sont comprises sous les droites dont nous venons de parler, sont entre elles comme les quarrés des rayons des cercles M, N. Donc les diamètres des cercles M, N sont entre eux comme les côtés



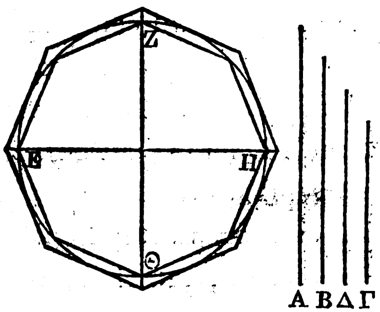
des polygones. Mais les cercles M, N sont entre eux en raison doublée de leurs diamètres; et ces cercles sont égaux aux surfaces des figures circonscrites et inscrites. Il est donc évident que la raison de la surface de la figure qui est circonscrite à la sphère à la surface de la figure inscrite est doublée de la raison du côté EΛ au côté AK.

Soient maintenant deux cônes O, Ξ. Que le cône Ξ ait une base égale au cercle M, et le cône O une base égale au cercle N; que le cône Ξ ait une hauteur égale au rayon de la sphère, et que le cône O ait une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté AK. D'après ce qui a été démontré, le cône Ξ est égal à la figure circonscrite (32), et le cône O égal à la figure inscrite (27). Mais les polygones sont semblables ; donc le côté EA est au côté AK comme le rayon de la sphère est à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté AK. Donc la hauteur du cône Ξ est à la hauteur du cône O comme EA est à AK. Mais le diamètre du cercle M est au diamètre du cercle N comme EA est à AK ; donc les diamètres des bases des cônes Ξ, O sont proportionnels à leurs hauteurs ; donc ces cônes sont semblables. Donc les cônes Ξ, O sont entre eux en raison triplée des diamètres des cercles M, N. Il est donc évident que la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est triplée de la raison du côté EA au côté AK.

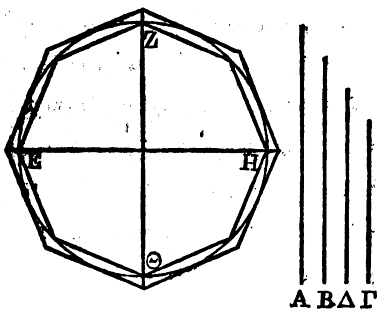
PROPOSITION XXXV.

La surface d'une sphère quelconque est quadruple d'un de ses grands cercles.

Soit une sphère quelconque; que A soit un cercle quadruple d'un des grands cercles de cette sphère. Je dis que le cercle A est égal à la surface de cette sphère.



Car, si le cercle A n'est pas égal à la surface de la sphère, il est ou plus grand ou plus petit. Supposons d'abord que la surface de la sphère soit plus grande que le cercle A. Puisqu'on a deux quantités inégales, la surface de la sphère et le cercle A, on peut prendre deux droites inégales de manière que la raison de la plus grande à la plus petite soit moindre que la raison de la surface de la sphère au cercle A (3). Prenons les droites B, Γ, et que la droite Δ soit moyenne proportionnelle entre les droites B, Γ. Concevons que la sphère soit coupée par un plan conduit par son centre, selon le cercle EZHΘ. Inscrivons un polygone dans ce cercle, et circonscrivons-lui en un autre de manière que le polygone circonscrit soit semblable au polygone inscrit; et que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de la droite B à la droite Δ (4). Il est évident que la raison doublée du côté du premier polygone au côté du second polygone sera encore moindre que la raison doublée de la droite B à la droite Δ. Mais la raison de B à Γ est doublée de la raison de B à Δ, et la raison de la surface du solide circonscrit à la sphère à la surface du solide inscrit est doublée de la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit (34). Donc la raison de la surface de la figure qui est circonscrite à la sphère à la surface de la figure inscrite est moindre que la raison de la surface de la sphère au cercle A (α), ce qui est absurde. En effet, la surface de la figure circonscrite est plus grande que la surface de la sphère, et la surface de la figure inscrite est au contraire



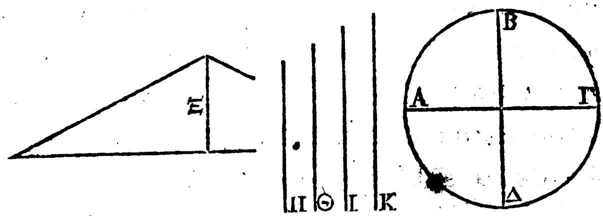
plus petite que celle du cercle A; car on a démontré que la surface de la figure inscrite est plus petite que quatre grands cercles d'une sphère (26), et par conséquent plus petite que le cercle A qui est égal à quatre grands cercles. Donc la surface d'une sphère n'est pas plus grande que le cercle A.

Je dis maintenant que la surface de la sphère n'est pas plus petite que le cercle A. Supposons, si cela est possible, qu'elle soit plus petite. Cherchons pareillement deux droites B, Γ, de manière que la raison de B à Γ soit moindre que la raison du cercle A à la surface de la sphère (3), et que la droite Δ soit moyenne proportionnelle entre B, Γ. Inscrivons dans le cercle EΘHZ un polygone et circonscrivons-lui un autre polygone, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de B à Δ (4). La raison doublée du côté du polygone circonscrit à un côté du polygone inscrit sera encore moindre que la raison doublée de B à Δ. Donc la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est moindre que la raison du cercle A à la surface de la sphère, ce qui est absurde. En effet, la surface de la figure circonscrite est plus grande que le cercle A (31), tandis que la surface de la figure inscrite est plus petite que la surface de la sphère. Donc la surface d'une sphère n'est pas plus petite que le cercle A. Mais nous avons démontré qu'elle n'est pas plus grande. Donc la surface d'une sphère est égale au cercle A, c'est-à-dire à quatre grands cercles.

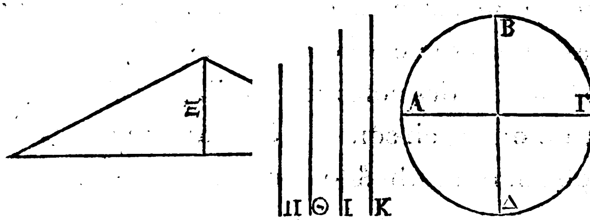
PROPOSITION XXXVI.

Une sphère quelconque est quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère et une hauteur égale au rayon de cette même sphère.

Soit une sphère quelconque; et que ΑΒΓΔ soit un de ses grands cercles. Que cette sphère



ne soit pas le quadruple du cône dont nous venons de parler; et supposons, si cela est possible, qu'elle soit plus grande que le quadruple de ce cône. Soit Ξ un cône qui ait une base quadruple du cercle ΑΒΓΔ, et une hauteur égale au rayon de la sphère; la sphère sera plus grande que le cône Ξ. Nous aurons donc deux quantités inégales, la sphère et ce cône. Nous pourrons donc prendre deux droites telles que la raison de la plus grande à la plus petite soit moindre que la raison de la sphère au cône Ξ (5). Que ces droites soient K, H. Prenons deux autres droites, de manière que K surpasse I de la même quantité que I surpasse Θ, et que Θ surpasse H. Concevons que l'on ait inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ un polygone dont le nombre des côtés soit divisible par quatre, et qu'on ait circonscrit à ce même cercle un polygone semblable au polygone inscrit, comme dans les théorêmes précédens. Que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de K à I (4); et que les diamètres ΑΓ, ΒΔ se coupent entre eux à angles droits. Si le diamètre ΑΓ restant immobile, on fait faire une révolution au plan des polygones, on inscrira une figure dans la sphère et on lui en circonscrira une autre; et la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite sera triplée de la raison du côté du polygone qui est circonscrit au cercle ΑΒΓΔ au côté du polygone qui lui est inscrit. Mais la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit est moindre que la raison de K à I; donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que la raison triplée de K à I. Mais la raison de K à H est plus grande que la raison triplée de K à I; car cela suit évidemment des lemmes (α). Donc la raison de la figure circon-



scrite à la figure inscrite est encore moindre que la raison de K à H. Mais la raison de K à H est moindre que la raison de la sphère au cône Ξ et par permutation. . . . . . . (ϐ) ce qui ne peut être. En effet, la figure circonscrite est plus grande que la sphère, et la figure inscrite est plus petite que le cône Ξ, à cause que le cône Ξ est quadruple d'un cône qui a une base égale au cercle ABΓΔ, et une hauteur égale au rayon de la sphère. Mais la figure inscrite est moindre que le quadruple du cône dont nous venons de parler (28). Donc la sphère n'est pas plus grande que le quadruple du cône dont nous venons de parler.

Supposons, si cela est possible, que la

sphère soit plus petite que le quadruple du cône dont nous avons parlé. Prenons les droites K, H, de manière que la droite K étant plus grande que la droite H, la raison de K à H soit moindre que la raison du cône Ξ à la sphère. Soient encore les deux droites Θ, I, comme dans la première partie du théorême. Concevons que l'on ait inscrit un polygone dans le cercle ΑΒΓΔ et qu'on lui en ait circonscrit un autre, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de K à I (4). Que le reste soit construit de la même manière qu'on l'a fait plus haut. La raison de la figure solide circonscrite à la figure inscrite sera triplée de la raison du côté du polygone circonscrit au cercle ΑΒΓΔ au côté du polygone inscrit dans ce même cercle. Mais la raison du côté du premier polygone au côté du second polygone est moindre que la raison de K à I; donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que la raison triplée de K à I. Mais la raison de K à H est plus grande que la raison triplée de K à I; donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que la raison de K à H. Mais la raison de K à H est moindre que la raison du cône Ξ à la sphère (α), ce qui est impossible. Car la figure inscrite est plus petite que la sphère, tandis que la figure circonscrite est plus grande que le cône Ξ (33). Donc la sphère n'est pas plus petite que le quadruple du cône qui a une base égale au cercle ΑΒΓΔ, et une hauteur égale au rayon de la sphère. Mais on a démontré que la sphère n'est pas plus grande; donc la sphère est quadruple de ce cône.

PROPOSITION XXXVII.

Ces choses étant démontrées, il est évident que tout cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère et une hauteur égale au diamètre de cette sphère, est égal à trois fois la moitié de cette sphère, et que la surface de ce cylindre, les bases étant comprises, est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère.

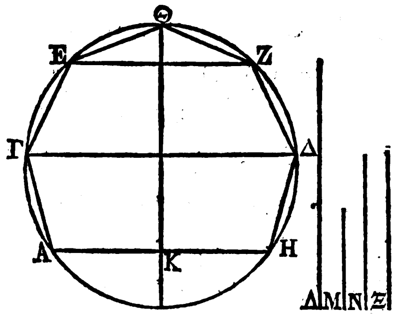
Car le cylindre dont nous venons de parler est le sextuple d'un cône qui a la même base que ce cylindre et une hauteur égale au rayon de la sphère. Mais la sphère est le quadruple de ce cône; il est donc évident que le cylindre est égal à trois fois la moitié de la sphère.

De plus, puisque l'on a démontré que la surface d'un cylindre, les bases exceptées, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base (14), et que le côté du cylindre dont nous venons de parler est égal au diamètre de sa base, à cause que ce cylindre est circonscrit à une sphère; il est évident que cette moyenne proportionnelle est égale au diamètre de la base. Mais le cercle qui a un rayon égal au diamètre de la base du cylindre est le quadruple de la base du cylindre, c'est-à-dire le quadruple d'un grand cercle de la sphère; donc la surface du cylindre, ses bases exceptées, est le quadruple d'un grand cercle de la sphère. Donc la surface totale du cylindre, avec les bases, est le sextuple d'un grand cercle. Mais la surface de la sphère est le quadruple d'un grand cercle; donc la surface totale du cylindre est égale à trois fois la moitié de la surface de la sphère.

PROPOSITION XXXVIII.

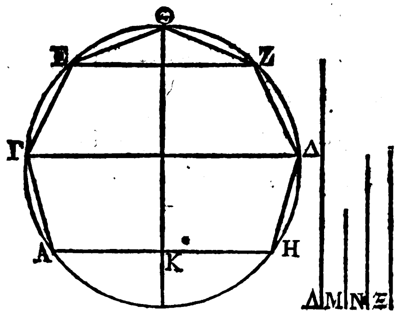
La surface d'une figure inscrite dans un segment sphérique est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous le côté du polygone inscrit dans le segment d'un grand cercle, et sous la somme des droites parallèles à la base du segment, réunie avec la moitié de la base du segment.

Soit une sphère, et dans cette sphère un segment qui ait pour base le cercle décrit



autour du diamètre AH. Inscrivons dans ce segment une figure terminée par des surfaces coniques ainsi que nous l'avons dit. Que AHΘ soit un grand cercle, et AΓEΘZΔH un polygone dont les côtés, excepté le côté AH, soient pairs en nombre. Prenons un cercle Λ dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous le côté ΑΓ et sous la somme des droites ΕΖ, ΓΔ, réunie avec la moitié de la base, c'est-à-dire ΑΚ. Il faut démontrer que le cercle Λ est égal à la surface de la figure inscrite.

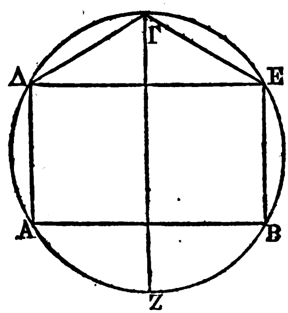
Prenons un cercle Μ dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous le côté ΕΘ et sous la moitié de ΕΖ; ce cercle sera égal à la surface du cône, dont la base est le cercle décrit autour du diamètre ΕΖ, et dont le sommet est le point Θ (15). Prenons un autre cercle Ν dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous ΕΓ, et sous la moitié de la somme des droites ΕΖ, ΓΔ (17); ce cercle sera égal à la surface du cône comprise entre les plans parallèles conduits par les droites ΕΖ, ΓΔ. Prenons semblablement un autre cercle Ξ dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous ΑΓ et sous la moitié de la somme des droites ΓΔ, ΑΗ. Ce cercle sera aussi égal à la surface du cône comprise entre les plans parallèles conduits par les droites ΑΗ, ΓΔ. La somme de ces cercles sera donc égale à la surface totale de la figure inscrite dans le segment; et la somme des quarrés de leurs rayons sera égale à la surface comprise sous un côté ΑΓ et sous la somme des droites ΕΖ,



ΓΔ, réunie avec la moitié de la base ΑΚ. Mais le quarré du rayon Λ étoit aussi égal à cette surface; donc le cercle Λ est égal à la somme des cercles Μ, Ν, Ξ. Donc le cercle Λ est égal à la surface de la figure inscrite dans le segment.

PROPOSITION XXXIX.

Qu'une sphère soit coupée par un plan qui ne passe pas par son centre; et que ΑΕΖ soit un grand cercle de cette sphère, perpendiculaire sur le plan qui le coupe. Inscrivons dans le segment ΑΒΓ un polygone dont les côtés, excepté la base AB, soient égaux et pairs en nombre. Si, comme dans les théorêmes précédens, le diamètre ΓZ restant immobile, on fait faire une révolution

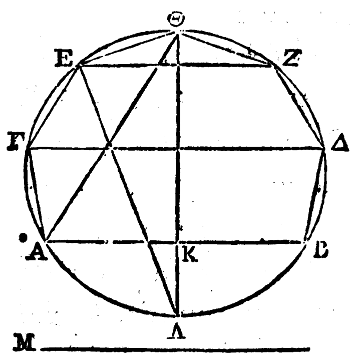


au polygone, les angles Δ, E, A, B décriront les circonférences des cercles, dont les diamètres sont ΔE, AB; et les côtés du polygone décriront des surfaces coniques. De cette manière il sera produit une figure solide terminée par des surfaces coniques, ayant pour base le cercle décrit autour du diamètre AB et pour sommet le point Γ. Cette figure, ainsi que dans les théorêmes précédens, aura une surface plus petite que la surface du segment dans lequel cette figure est comprise, parce que la circonférence du cercle décrit autour du diamètre AB est la limite du segment et de la figure inscrite; que chacune de ces deux surfaces est concave du même côté, et que l'une est comprise par l'autre (*princ.* 4).

PROPOSITION XL.

La surface de la figure inscrite dans un segment de sphère est plus petite qu'un cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Soit une sphère; et que ABZE soit un de



ses grands cercles. Soit dans cette sphère un segment qui ait pour base le cercle décrit autour du diamètre AB. Inscrivons dans ce segment la figure dont nous venons de parler.

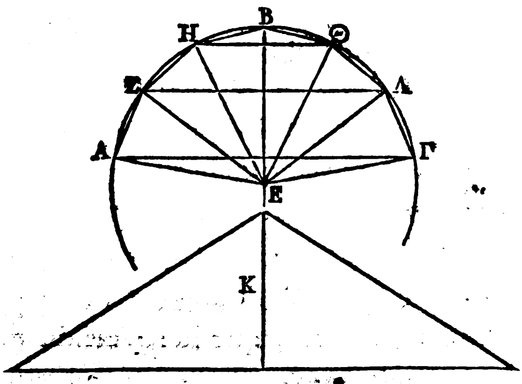
Dans le segment du cercle décrivons un polygone, et faisons le reste comme nous l'avons fait plus haut. Menons le diamètre de la sphère ΑΘ, et les droites ΑΕ, ΘΑ. Soit Μ un cercle qui ait un rayon égal à la droite ΑΘ. Il faut démontrer que le cercle Μ est plus grand que la surface de la figure inscrite.

En effet, nous avons démontré que la surface de la figure inscrite est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous ΕΘ, et sous la somme des droites ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ (38). Nous avons encore démontré que la surface comprise sous ΕΘ et sous la somme des droites ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ est égale à la surface comprise sous les droites ΕΛ, ΚΘ (23). Mais la surface comprise sous ΕΛ, ΚΘ, est plus petite que le quarré construit sur ΑΘ, parce que la surface comprise sous ΑΘ, ΘΚ est égale au quarré construit sur ΑΘ. Il est donc évident que le rayon du cercle qui est égal à la surface de la figure inscrite est plus petit que le rayon du cercle Μ; d'où il suit que le cercle Μ est plus grand que la surface de la figure inscrite.

PROPOSITION XLI.

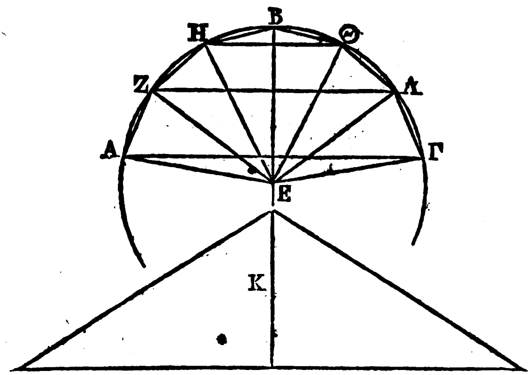
La figure inscrite dans un segment et terminée par des surfaces coniques, avec le cône qui a la même base que la figure inscrite, et qui a son sommet au centre de la sphère, est égale à un cône qui a une base égale à la surface de la figure inscrite, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté du polygone.

Soient une sphère et un grand cercle de cette sphère. Que ABΓ soit un segment plus



petit que le demi-cercle. Que le point E soit le centre. Dans le segment ABΓ inscrivons, comme dans les théorêmes précédens, un polygone dont les côtés, excepté le côté ΑΓ, soient égaux entre eux. Si ΒΕ restant immobile, on fait faire une révolution à la sphère, elle engendrera une figure terminée par des surfaces coniques. Que le cercle décrit autour des diamètres ΑΓ soit la base d'un cône qui ait son sommet au centre de la sphère. Prenons un cône Κ, qui ait une base égale à la surface de la figure inscrite et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre Ε sur un des côtés du polygone. Il faut démontrer que le cône Κ est égal à la figure dont nous venons de parler, réunie au cône ΑΕΓ.

Sur les cercles qui ont pour diamètres les droites ΗΘ, ΖΛ, construisons deux cônes qui aient leurs sommets au point Ε. Le rhombe solide ΗΒΘΕ est égal à un cône qui a une base égale à la surface du cône ΗΒΘ, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point Ε sur ΗΒ (19). Le reste qui est terminé par la surface comprise entre les plans parallèles conduits par les droites ΗΘ, ΖΛ, et par les surfaces coniques ΖΕΛ, ΗΕΘ, est égal à un cône qui a une base égale à la surface comprise entre les plans parallèles conduits par les droites HΘ, ZΛ, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point E sur ZH (20); et enfin le reste qui est terminé par la surface comprise entre les

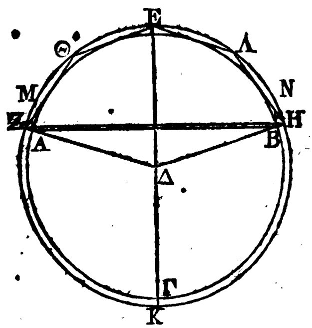


plans parallèles conduits par les droites ZΛ, AΓ, et par les surfaces coniques AEΓ, ZEΛ est égal à un cône qui a une base égale à la surface comprise entre les plans parallèles conduits par les droites ZΛ, AΓ, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point E sur ZA. Donc la somme des cônes dont nous venons de parler est égale à la figure inscrite, réunie au cône AEΓ. Mais tous ces cônes ont une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point E sur un des côtés du polygone, et la somme de leurs bases est égale à la surface de la figure AZHBΘΔΓ; et de plus le cône K a la même hauteur, et sa base est égale à la surface de la figure inscrite. Donc le cône K est égal à la somme des cônes dont nous venons de parler. Mais nous avons démontré que la somme des cônes dont nous venons de parler est égale à la figure inscrite, réunie au cône AEΓ. Donc le cône K est égal à la figure inscrite, réunie au cône EAΓ.

Il suit manifestement de là que le cône qui a pour base un cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment, et une hauteur égale au rayon de la sphère, est plus grand que la figure inscrite, réunie au cône AEΓ. En effet, le cône dont nous venons de parler est plus grand qu'un cône égal à la figure inscrite, réunie au cône qui a la même base que le segment et dont le sommet est le centre de la sphère, c'est-à-dire plus grand qu'un cône qui a une base égale à la surface de la figure inscrite et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone; car nous avons démontré que la base du premier est plus grande que la base du second (50); et la hauteur du premier est plus grande que la hauteur du second.

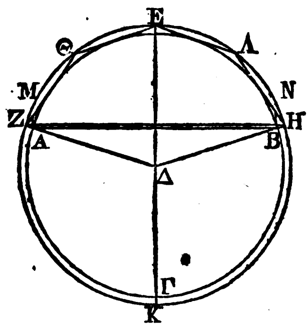
PROPOSITION XLII.

Soit une sphère; que ABΓ soit un de ses grands cercles; que la droite AB coupe un segment plus petit que la moitié de ce cercle; que le point Δ soit le centre du cercle



ABΓ; et du centre Δ aux points A, B menons les droites AΔ, ΔB. Circonscrivons un polygone au secteur produit par cette construction, et circonscrivons aussi un cercle à ce polygone. Ce cercle aura certainement le même centre que le cercle ABΓ. Si le diamètre EK restant immobile, nous faisons faire une révolution au polygone, le cercle circonscrit décrira la surface d'une sphère; les angles du polygone décriront des cercles dont les diamètres sont des droites qui étant parallèles à AB, joignent les angles du polygone; les points où les côtés du polygone touchent le plus petit cercle, décriront dans la petite sphère des cercles dont les diamètres sont des droites qui étant parallèles à AB, joignent les points de contact; et les côtés du polygone décriront des surfaces coniques. De cette manière on circonscrira une figure terminée par des surfaces coniques dont la base sera le cercle décrit autour du diamètre ZH. La surface de la figure dont nous venons de parler est plus grande que la surface du petit segment sphérique dont la base est le cercle décrit autour du diamètre AB.

En effet, menons les tangentes AM, BN; ces tangentes décriront une surface conique, et la figure produite par la révolution du polygone AMΘEΛNB aura une surface plus grande que la surface du segment sphérique dont la base est le cercle décrit autour du diamètre AB, parce que ces deux surfaces ont pour limite, dans un seul et même plan, le cercle décrit autour du diamètre AB, et que le segment est compris par la figure. Or la surface conique engendrée par les droites ZM, HN est plus grande que la



surface conique engendrée par MA, NB; parce que la droite ZM est plus grande que la droite MA, comme étant opposée à un angle droit, et que la droite NH est aussi plus grande que la droite NB: mais lorsque cela arrive, une des surfaces engendrées est plus grande que l'autre (α), ainsi que cela a été démontré dans les lemmes. Il est donc évident que la surface circonscrite est plus grande que la surface du segment de la petite sphère.

PROPOSITION XLIII.

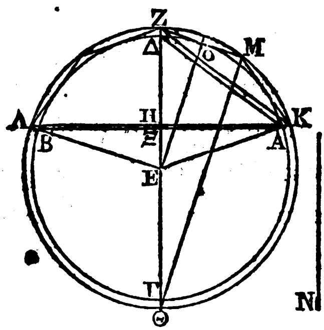
Il suit manifestement du théorême qui précède, que la surface de la figure circonscrite à un secteur sphérique est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous un côté du polygone et sous la somme des droites qui joignent les angles du polygone, réunie avec la moitié de la base du polygone dont nous venons de parler.

Car la figure qui est circonscrite au secteur est inscrite dans le segment de la plus grande sphère. Cela est évident d'après ce que nous avons dit plus haut (38).

PROPOSITION XLIV.

La surface d'une figure circonscrite à un segment sphérique est plus grande que le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Soit une sphère; que AΔBΓ soit un de ses grands cercles, et le point E son centre. Circonscrivons au secteur AΔB un polygone ΛZK, et à ce polygone un cercle. Que cette construction engendre une figure, comme plus haut. Soit aussi un cercle N dont le quarré



du rayon soit égal à la surface comprise sous un des côtés du polygone, et sous la somme des droites qui joignent les angles, réunie à la moitié de la droite KΛ. Or, la surface dont nous venons de parler est égale à la surface comprise sous la droite MΘ, et sous la droite ZH, qui est la hauteur du segment de la plus grande sphère, ainsi que cela a été démontré plus haut (23). Donc le quarré du rayon du cercle N est égal à la surface comprise sous MΘ, HZ. Mais la droite HZ est plus grande que la droite ΔΞ, qui est la hauteur du petit segment; car si l'on mène la droite KZ, cette droite sera parallèle à la droite ΔA. Mais la droite AB est aussi parallèle à la droite KΛ, et la droite ZE est commune; donc le triangle ZKH est semblable au triangle ΔAΞ. Mais la droite ZK est plus grande que la droite AΔ; donc la droite ZH est plus grande que la droite ΔΞ. De plus, la droite MΘ est égale au diamètre ΓΔ. En effet, joignons les points E, O; puisque la droite MO est égale à la droite OZ, et la droite ΘE égale à la droite EZ, la droite EO est certainement parallèle à la droite MΘ. Donc la droite MΘ est double de la droite EO. Mais la droite ΓΔ est aussi double de la droite EΘ; donc la droite MΘ est égale à la droite ΓΔ. Mais la surface comprise sous les droites ΓΔ, ΔΞ est égale au quarré construit sur la droite AΔ. Donc la surface de la figure KZΛ est plus grande que le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment, c'est-à-dire à la circonférence du cercle décrit autour du diamètre AB; car le cercle N est égal à la surface de la figure circonscrite au secteur (*α*).

PROPOSITION XLV.

La figure circonscrite à un secteur, avec le cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre ΚΛ, et pour sommet le centre de la sphère, est égale à un cône qui a une base égale à la surface de la figure circonscrite, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre sur un des côtés du polygone. Il est évident que cette perpendiculaire est égale au rayon de la sphère.

Car la figure circonscrite au secteur est en même temps inscrite dans le segment de la grande sphère, qui a le même centre que la petite. Donc cela est évident d'après ce qui a été dit plus haut (41).

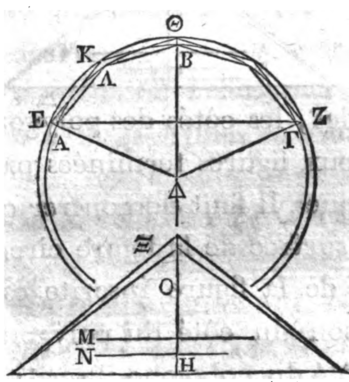
PROPOSITION XLVI.

Il suit du théorême précédent, que la figure circonscrite, avec le cône, est plus grande qu'un cône qui a une base égale à un cercle ayant un rayon égal à la droite menée du sommet du segment de la petite sphère à la circonférence du cercle qui est la base de ce segment, et une hauteur égale au rayon de la sphère.

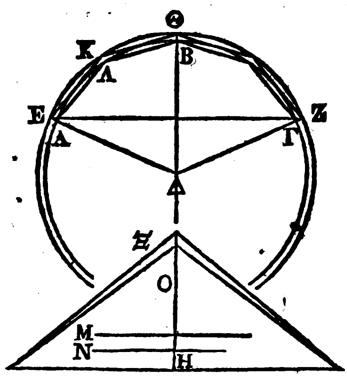
Car le cône qui sera égal à la figure circonscrite, réunie au cône, aura certainement une base plus grande que le cercle dont nous venons de parler, tandis qu'il aura une hauteur égale au rayon de la petite sphère.

PROPOSITION XLVII.

Soient une sphère et un grand cercle de cette sphère; que le segment ΑΒΓ soit plus



petit que la moitié de ce grand cercle, et que le point Δ soit le centre de ce cercle. Inscrivons dans le secteur ΑΒΓ un polygone équiangle; circonscrivons à ce même secteur un polygone semblable au premier, et que les côtés de ces deux polygones soient parallèles. Circonscrivons un cercle au polygone circonscrit. Si, comme dans les théorêmes précédens, la droite ΔB restant immobile, nous faisons faire une révolution



à ces cercles, les côtés des polygones engendreront deux figures terminées par des surfaces coniques. Il faut démontrer que la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est doublée de la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit; et que la raison de ces figures réunies au cône est triplée de la raison de ces mêmes côtés.

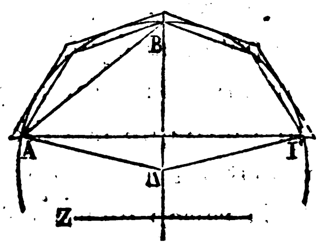
Soit M un cercle dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous le côté du polygone circonscrit, et sous la somme des droites qui joignent les angles, avec la moitié de la droite EZ. Le cercle M sera égal à la surface de la figure circonscrite. Soit N un autre cercle dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous le côté du polygone inscrit, et sous la somme des droites qui joignent les angles, avec la moitié de la droite AΓ. Ce cercle sera égal à la surface de la figure inscrite. Mais les surfaces dont nous venons de parler sont entre elles comme le quarré décrit sur EK et le quarré décrit sur AΛ (*α*). Donc le polygone circonscrit est au polygone inscrit comme le cercle M est au cercle N. Il est donc évident que la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est doublée de la raison de EK à AΛ, c'est-à-dire qu'elle est égale à la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit.

A présent, soit Ξ un cône qui ait une base égale au cercle M, et une hauteur égale au rayon de la petite sphère; ce cône sera égal à la figure circonscrite, réunie au cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre EZ et pour sommet le point Δ (45). Soit O un autre cône qui ait une base égale au cercle N et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point Δ sur AΛ. Ce cône sera égal à la figure inscrite, réunie au cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre AΓ, et pour sommet le point Δ, ainsi que cela a été démontré (41). Mais la droite EK est au rayon de la petite sphère comme la droite AΛ est à la perpendiculaire menée du centre Δ sur AΛ; et il est démontré que EK est à AΛ comme le rayon du cercle M est au rayon du cercle N (ϐ), et comme le diamêtre du premier cercle est au diamètre du second. Donc le diamètre du cercle qui est la base du cône Ξ est au diamètre du cercle qui est la base du cône O, comme la hauteur du cône Ξ est à la hauteur du cône O. Donc ces cônes sont semblables; donc la raison du cône Ξ au cône O est triplée de la raison du diamètre de la base du premier au diamètre de la base du second. Il est donc évident que la raison de la figure circonscrite, réunie au cône, à la figure inscrite, réunie au cône, est triplée de la raison EK à AΛ.

PROPOSITION XLVIII.

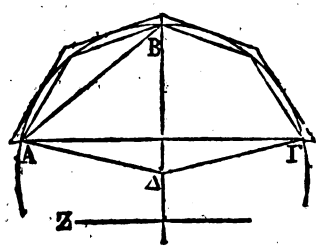
La surface d'un segment sphérique quelconque plus petit que la moitié de la sphère, est égale à un cercle qui a pour rayon une droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Soit une sphère; que ABΓ soit un de ses grands cercles. Soit un segment plus petit que la moitié de cette sphère, qui ait pour



base le cercle décrit autour du diamètre AΓ, et perpendiculaire sur le cercle ABΓ. Prenons un cercle Z dont le rayon soit égal à la droite AB. Il faut démontrer que la surface du segment ABΓ est égale à la surface du cercle Z.

Que la surface de ce segment ne soit point égale au cercle Z; et supposons d'abord qu'elle soit plus grande. Prenons le centre Δ; du centre Δ menons des droites aux points A, Γ, et prolongeons ces droites. Puisque l'on a deux quantités inégales, savoir la surface du



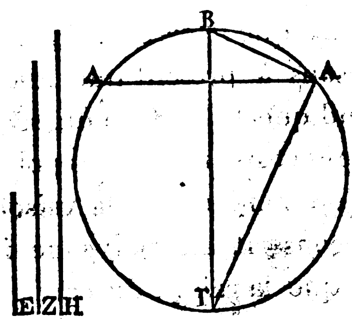
segment et le cercle Z, inscrivons dans le secteur ABΓ un polygone équilatère et équiangle; et circonscrivons-lui un polygone semblable, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la surface du segment au cercle Z (6). Ayant fait faire, comme auparavant, une révolution au cercle ABΓ, on aura deux figures terminées par des surfaces coniques, l'une circonscrite et l'autre inscrite; et la surface de la figure circonscrite sera à la surface de la figure inscrite comme le polygone circonscrit est au polygone inscrit; car chacune de ces raisons est doublée de la raison du côté du polygone circonscrit au polygone inscrit (47). Mais la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que la raison de la surface du segment dont nous venons de parler au cercle z (α); et la surface de la figure circonscrite est plus grande que la surface du segment; donc la surface de la figure inscrite est plus grande que le cercle z. Ce qui ne peut être; car on a démontré que la surface de la figure dont nous venons de parler est moindre que le cercle z (40).

Supposons à présent que le cercle z soit plus grand que la surface du segment. Circonscrivons et inscrivons des polygones semblables, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison du cercle z à la surface du segment........ (β). Donc la surface du segment n'est pas plus petite que le cercle z. Mais on a démontré qu'elle n'est pas plus grande; donc elle lui est égale.

PROPOSITION XLIX.

Si le segment est plus grand que la moitié de la sphère, sa surface sera encore égale à un cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Soient une sphère et un de ses grands cercles; supposons que le cercle ait été coupé



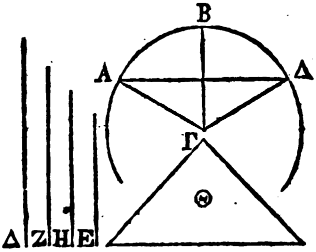
par un plan perpendiculaire conduit par la droite AΔ. Que le segment ABΔ soit plus petit que la moitié de la sphère; que le diamètre BΓ soit perpendiculaire sur AΔ; et des points B, Γ menons au point A les droites BA, AΓ. Soit un cercle E qui ait un rayon égal à AB; soit aussi un cercle Z qui ait un rayon égal à AΓ; et soit enfin un cercle H qui ait un rayon égal à ΓB. Le cercle H est égal à la somme des deux cercles E, Z. Mais le cercle H est égal à la surface totale de la sphère, parce que chacune de ces surfaces est quadruple du cercle décrit autour du diamètre BΓ; et le cercle E est égal à la surface du segment ABΔ, ainsi que cela a été démontré pour un segment moindre que la moitié de la sphère (48); donc le cercle restant Z est égal à la surface du segment AΓΔ; et ce segment est plus grand que la moitié de la sphère.

PROPOSITION L.

Un secteur quelconque d'une sphère est égal à un cône qui a une base égale à la surface du segment sphérique qui est dans le secteur, et une hauteur égale au rayon de cette sphère.

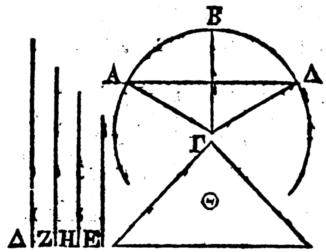
Soit une sphère; que ABΔ soit un de ses grands cercles. Que le point Γ soit le centre de ce cercle. Soit un cône qui ait pour base un cercle égal à la surface décrite par l'arc ABΔ et pour hauteur une droite égale à BΓ. Il faut démontrer que le secteur ABΓΔ est égal au cône dont nous venons de parler.

Car si ce secteur n'est pas égal à ce cône, supposons que ce secteur soit plus grand. Que



le cône dont nous venons de parler soit Θ. Puisque nous avons deux quantités inégales, le secteur et le cône Θ, cherchons deux droites Δ, E, dont la plus grande soit Δ; que la raison de Δ à E soit moindre que la raison du secteur à ce cône (3). Prenons ensuite deux droites Z, H, de manière que l'excès de Δ sur Z soit égal à l'excès de Z sur H, et à l'excès de H sur E. Dans le plan du cercle, circonscrivons au secteur un polygone équilatère dont le nombre des angles soit pair, et inscrivons dans ce même secteur un polygone semblable au premier, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de Δ à Z (6). Ayant fait faire une révolution au cercle ΑΒΔ, comme dans les théorêmes précédens, on aura deux figures terminées par des surfaces coniques. La raison de la figure circonscrite, avec le cône qui a son sommet au point Γ, à la figure inscrite, avec ce même cône, sera triplée de la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit (47). Mais la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit est moindre que la raison de Δ à Ζ; donc la raison de la figure solide circonscrite dont nous venons de parler à la figure inscrite est moindre que la raison triplée de Δ à Ζ. Mais la raison de Δ à Ε est plus grande que la raison triplée de Δ à Ζ (α); donc la raison de la figure solide circonscrite au secteur à la figure inscrite est moindre que la raison de Δ à Ε. Mais la raison de Δ à Ε est moindre que la raison du secteur solide au cône Θ; donc la raison de la figure solide qui est circonscrite au secteur à la figure inscrite est moindre que la raison du secteur solide au cône Θ, et par permutation........(ϛ). Mais la figure solide circonscrite est plus grande que le secteur; donc la figure inscrite au secteur est plus grande que le cône Θ.

Ce qui ne peut être; car on a démontré, dans les théorêmes précédens, que cette figure est plus grande que ce cône, c'est-à-dire qu'un cône qui a pour base un cercle dont le



rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment, et pour hauteur une droite égale au rayon de la sphère (41). Mais le cône dont nous venons de parler est le même que le cône Θ, puisque ce cône a une base égale à la surface du segment, c'est-à-dire au cercle dont nous avons parlé, et pour hauteur une droite égale au rayon de la sphère. Donc le secteur solide n'est pas plus grand que le cône Θ.

Supposons à présent que le cône Θ soit plus grand que le secteur solide. Que la raison de la droite Δ à la droite E, dont la droite Δ est plus grande, soit moindre que la raison du cône au secteur. Prenons également deux droites Z, H, de manière que la raison du côté du polygone qui est circonscrit dans le secteur plan et dont le nombre des angles est pair, au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de Δ à Z; et circonscrivons au secteur solide une figure solide, et inscrivons-lui une autre figure solide. Nous démontrerons de la même manière que la raison de la figure qui est circonscrite au secteur solide à la figure inscrite est moindre que la raison de Δ à E, et que la raison du cône Θ au secteur. Donc la raison du secteur au cône Θ est moindre que la raison de la figure solide inscrite dans le segment à la figure circonscrite. Mais le secteur est plus grand que la figure qui lui est inscrite; donc le cône Θ est plus grand que la figure circonscrite, ce qui ne peut être. Car on a démontré qu'un tel cône est plus petit que la figure circonscrite au secteur (44). Donc le secteur est égal au cône Θ.

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

LIVRE SECOND.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE, SALUT.

Tu m'avois engagé à écrire les démonstrations des problêmes que j'avois envoyés à Conon; mais il est arrivé que la plupart de ces problêmes découlent des théorêmes dont je t'ai déjà envoyé les démonstrations; tels sont, par exemple, les théorêmes suivans:

La surface d'une sphère quelconque est quadruple d'un de ses grands cercles.

La surface d'un segment sphérique quelconque est égale à un cercle qui a un rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence de sa base.

Un cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère, et une hauteur égale au diamètre de cette sphère, est égal à trois fois la moitié de cette sphère, et la surface de ce cylindre est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère.

Et enfin, tout secteur solide est égal à un cône qui a une base égale à la partie de la surface de la sphère comprise dans le secteur, et une hauteur égale au rayon de la sphère.

Tu trouveras dans le livre que je t'envoie tous les théorêmes et tous les problêmes qui découlent des théorêmes dont je viens de parler. Quant aux choses que l'on trouve par d'autres considérations et qui regardent les élices et les canoïdes, je ferai en sorte de te les envoyer le plutôt possible.

Voici quel étoit le premier problême.

PROPOSITION I.

Une sphère étant donnée, trouver une surface plane égale à la surface de cette sphère.

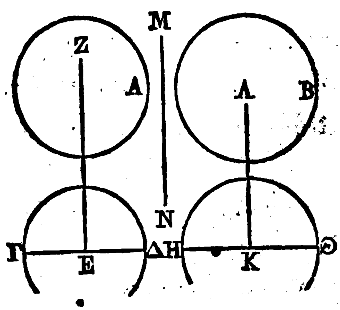
Cela est évident; car la démonstration de ce problême est une suite du théorême dont nous venons de parler; attendu que le quadruple d'un grand cercle, qui est une surface plane, est égal à la surface de la sphère.

PROPOSITION II.

Le problême suivant étoit le second.

Un cône ou un cylindre étant donné, trouver une sphère égale à ce cône ou à ce cylindre.

Soit A le cône ou le cylindre donné. Que la

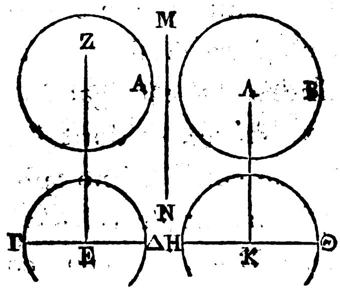


sphère B soit égale à A. Supposons que le cylindre ΓZΔ soit égal à trois fois la moitié du cône ou du cylindre A. Que le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre HΘ, et pour axe la droite KΛ égale au diamètre de la sphère B, soit égal à trois fois la moitié de la sphère B : le cylindre E sera égal au cylindre K. Mais les bases des cylindres égaux sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs; donc le cercle E est au cercle K, c'est-à-dire le quarré construit sur ΓΔ est au quarré construit sur HΘ comme KΛ est à EZ. Mais KΛ est égal à HΘ; car un cylindre qui est égal à trois fois la moitié de la sphère, et dont l'axe est égal au diamètre de cette même sphère, a une base K égale à un grand cercle de cette même spère (1, 37). Donc le quarré construit sur ΓΔ est au quarré construit sur HΘ comme HΘ est à EZ. Que la surface comprise sous ΓΔ, MN soit égale au quarré construit sur HΘ (α). La droite ΓΔ sera à la droite MN comme le quarré construit sur ΓΔ est au quarré construit sur HΘ, c'est-à-dire comme HΘ est à EZ; et par permutation, la droite ΓΔ est à la droite HΘ comme HΘ est à MN, et comme MN est à EZ. Mais les deux droites ΓΔ, EZ sont données (ϐ); donc les deux moyennes proportionnelles HΘ, MN entre les deux droites ΓΔ, EZ sont aussi données. Donc chacune des deux droites HΘ, MN est donnée.

On construira le problême de la manière suivante. Soit A le cône ou le cylindre donné.

Il faut trouver une sphère égale au cône ou au cylindre A.

Que le cylindre dont la base est le cercle décrit autour du diamètre ΓΔ, et dont l'axe



est la droite EZ, soit égal à trois fois la moitié du cône ou du cylindre A. Prenons deux moyennes proportionnelles HΘ, MN entre ΓΔ, EZ, de manière que ΓΔ soit HΘ comme HΘ est à MN, et comme MN est à EZ (γ); et concevons un cylindre qui ait pour base le cercle décrit autour du diamètre HΘ, et pour axe la droite KΛ égale au diamètre HΘ. Je dis que le cylindre E est égal au cylindre K.

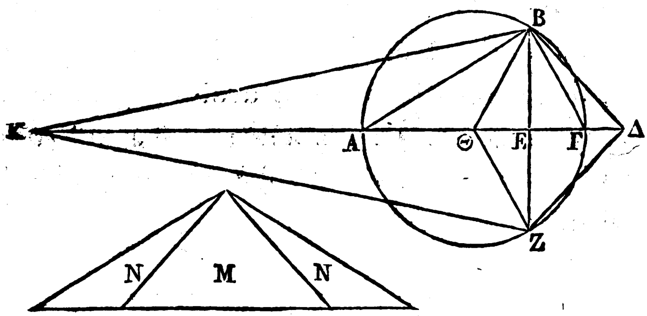
Puisque ΓΔ est à HΘ comme MN est à EZ; par permutation, et à cause que HΘ est égal à KΛ (δ), la droite ΓΔ sera à la droite MN, c'est-à-dire, le quarré construit sur ΓΔ sera au quarré construit sur HΘ comme le cercle

E est au cercle K. Mais le cercle E est au cercle K comme KΛ est à EZ; donc les bases E, K des cylindres sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs; donc le cylindre E est égal au cylindre K. Mais le cylindre K est égal à trois fois la moitié de la sphère qui a pour diamètre la droite HΘ; donc la sphère qui a un diamètre égal à la droite HΘ, c'est-à-dire, la sphère B est égale au cône ou au cylindre A.

PROPOSITION III.

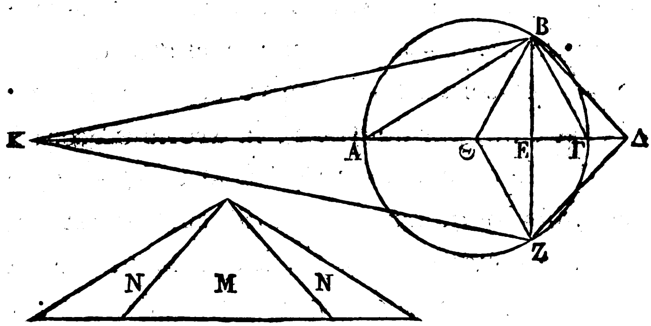
Un segment quelconque d'une sphère est égal à un cône qui a la même base que ce segment, et pour hauteur une droite qui est à la hauteur du segment comme une droite composée du rayon de la sphère et de la hauteur de l'autre segment est à la hauteur de cet autre segment.

Soient une sphère et un de ses grands cercles qui ait pour diamètre la droite AΓ. Coupons cette sphère par un plan mené par la droite BZ, et perpendiculaire sur la droite AΓ. Que le point Θ soit le centre. Que la somme des deux droites ΘA, AE soit à la droite AE comme ΔE est à ΓE; et de plus, que la somme des deux droites ΘΓ, ΓE soit à la droite ΓE comme KE est à EA. Sur le cercle dont BZ est le diamètre, construisons deux



cônes qui aient pour sommets les points K, Δ. Je dis que le cône BΔZ est égal au segment de la sphère qui est du côté Γ, et que le cône BKZ est égal au segment de la sphère qui est du côté A.

Menons les rayons BΘ, ΘZ : concevons un cône qui ait pour base le cercle décrit autour du diamètre BZ, et pour sommet le point Θ. Soit aussi un cône M qui ait une base égale à la surface du segment sphérique BΓZ, c'est-à-dire à un cercle dont le rayon soit égal à la droite BΓ; et que la hauteur de ce cône soit égale au rayon de la sphère. Le cône M sera égal au secteur solide BΓΘZ, ainsi que cela a été démontré dans le premier livre (1, 50). Puisque ΔΕ est à ΕΓ comme la somme des droites ΘΑ, ΑΕ est à la droite ΑΕ; par soustraction, la droite ΓΔ sera à la droite ΓΕ comme ΘΑ est à ΑΕ, c'est-à-dire comme ΓΘ est à ΑΕ; par permutation, la droite ΔΓ sera à la droite ΓΘ comme ΓΕ est à ΕΑ; et enfin par addition, la droite ΘΔ sera à la droite ΘΓ comme ΓΑ est à ΑΕ, c'est-à-dire comme le quarré construit sur ΓΒ est au quarré construit sur ΒΕ. Donc la droite ΘΔ est à la droite ΓΘ comme le quarré construit sur ΓΒ est au quarré construit sur ΒΕ. Mais la droite ΓΒ est égale au rayon du cercle Μ, et la droite ΒΕ est égale au rayon du cercle décrit autour du diamètre ΒΖ; donc ΔΘ est à ΘΓ comme le cercle Μ est au cercle décrit autour du diamètre ΒΖ. Mais la droite ΘΓ est égale à l'axe du cône Μ; donc la droite ΔΘ est à l'axe du cône Μ comme le cercle Μ est au cercle décrit autour du diamètre ΒΖ; donc le cône qui a pour base le cercle Μ, et pour hauteur le rayon de la sphère est égal au rhombe solide ΒΔΖΘ, ainsi que cela a été démontré dans le quatrième lemme du premier livre (1, 17). Ou bien de la manière suivante, puisque la droite ΔΘ est à la hauteur du cône M comme le cercle M est au cercle décrit autour du diamètre BZ, le cône M sera égal au cône qui a pour base le cercle

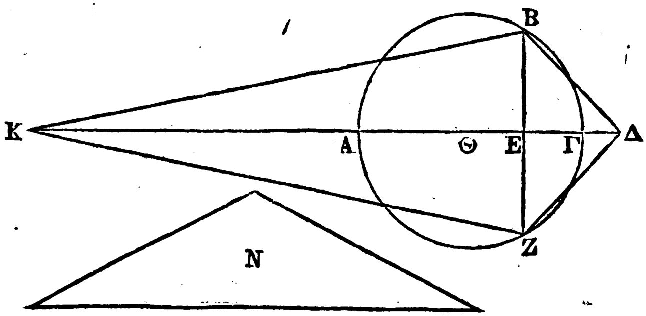


décrit autour du diamètre BZ et pour hauteur la droite ΔΘ ; car les bases de ces cônes sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs. Mais le cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre BZ, et pour hauteur la droite ΔΘ, est égal au rhombe solide BΔZΘ; donc le cône M est aussi égal au rhombe solide BΔZΘ. Mais le cône M est égal au secteur solide BΓZΘ; donc le secteur solide BΓZΘ est égal au rhombe solide BΔZΘ. Donc si l'on retranche le cône commun qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre BZ et pour hauteur la droite EΘ, le cône restant ΒΔΖ sera égal au segment sphérique ΒΖΓ.

On démontrera semblablement que le cône ΒΚΖ est égal au segment sphérique ΒΑΖ. En effet, puisque la droite ΚΕ est à la droite ΕΑ comme la somme des droites ΘΓ, ΓΕ est à la droite ΓΕ; par soustraction, la droite ΚΑ est à la droite ΑΕ comme ΘΓ est à ΓΕ. Mais ΘΓ est égal à ΘΑ; donc, par permutation, la droite ΚΑ est à la droite ΑΘ comme ΑΕ est à ΕΓ. Donc, par addition, la droite ΚΘ est à la droite ΘΑ comme ΑΓ est à ΓΕ, c'est-à-dire comme le quarré construit sur ΒΑ est au quarré construit sur ΒΕ. Supposons de nouveau un cercle Ν, qui ait un rayon égal à la droite ΑΒ. Le cercle Ν sera égal à la surface du segment sphérique ΒΑΖ. Concevons un cône Ν qui ait une hauteur égale au rayon de la sphère; ce cône sera égal au secteur solide ΒΘΖΑ, ainsi que cela a été démontré dans le livre premier (1, 50) (α). Mais nous avons démontré que la droite ΚΘ est à la droite ΘΑ comme le quarré construit sur ΑΒ est au quarré construit sur ΒΕ, c'est-à-dire comme le quarré construit sur le rayon du cercle Ν est au quarré du rayon du cercle décrit autour du diamètre BZ, c'est-à-dire comme le cercle N est au cercle décrit autour du diamètre BZ; et la droite AΘ est égale à la hauteur du cône N; donc la droite KΘ est à la hauteur du cône N comme le cercle N est au cercle décrit autour du diamètre BZ. Donc le cône N, c'est-à-dire le secteur BΘZA est égal à la figure BΘZK. Donc si nous ajoutons à chacun de ces deux solides le cône dont la base est le cercle décrit autour de BZ, et dont la hauteur est la droite EΘ, le segment sphérique total ABZ sera égal au cône BZK (ϐ). Ce qu'il falloit démontrer.

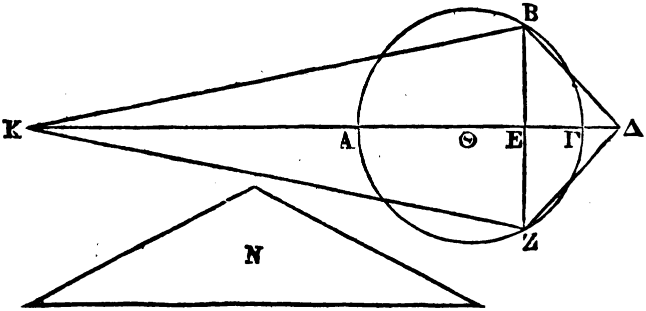
Il est encore évident qu'en général un segment sphérique est à un cône qui a la même base et la même hauteur que ce segment, comme la somme du rayon de la sphère et de la hauteur de l'autre segment est à la hauteur de cet autre segment; car la droite ΔE est à la droite EΓ comme le cône ΔZB, c'est-à-dire le segment BΓZ est au cône BΓZ.

Les mêmes choses étant supposées, nous démontrerons autrement que le cône KBZ est égal au segment sphérique AZB. Soit un cône N qui ait une base égale à la surface de la sphère et une hauteur égale au rayon. Ce cône sera égal à la sphère. En effet, nous avons démontré que la sphère est quadruple du cône qui a pour base un grand cercle



de cette sphère et pour hauteur un rayon de cette même sphère (1, 36); or le cône N est aussi quadruple du cône dont nous venons de parler, parce que la base du premier cône est quadruple de la base du second, et que la surface de la sphère est quadruple d'un de ses grands cercles. Puisque la somme des droites ΘA, AE est à la droite AE comme ΔE est à EΓ; par soustraction et par permutation, la droite ΘΓ sera à la droite ΓΔ comme AE est à EΓ. De plus, puisque la droite KE est à la droite EA comme la somme des droites ΘΓ, ΓE sera à la droite ΓE; par soustraction et par permutation, la droite

KA sera à la droite ΓΘ ou à la droite ΘA comme AE est à EΓ, c'est-à-dire comme ΘΓ est à ΓΔ. Donc, par addition, et à cause que la droite AΘ est égale à la droite ΘΓ, la droite

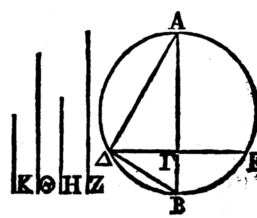


KΘ sera à la droite ΘΓ comme ΘΔ est à ΔΓ; et (γ) la droite totale KΔ est à la droite ΔΘ comme ΔΘ est à ΔΓ, c'est-à-dire comme KΘ est à ΘA. Donc la surface comprise sous ΔΘ, ΘK est égale à la surface comprise sous ΔK, ΘA. De plus, puisque KΘ est à ΘΓ comme ΘΔ est à ΓΔ; par permutation, la droite KΘ sera à la droite ΘΔ comme ΘΓ est à ΓΔ. Mais nous avons démontré que ΘΓ est à ΓΔ comme AE est à EΓ; donc KΘ est à ΘΔ comme AE est à EΓ. Donc le quarré construit sur KΔ est à la surface comprise sous KΘ, ΘΔ comme le quarré construit sur AΓ est à la surface comprise sous AE, EΓ (δ). Mais on a démontré que la surface comprise sous ΚΘ, ΘΔ est égale à la surface comprise sous ΚΔ, ΑΘ; donc le quarré construit sur ΚΔ est à la surface comprise sous ΚΔ, ΑΘ, c'est-à-dire que ΚΔ est à ΑΘ comme le quarré construit sur ΑΓ est à la surface comprise sous ΑΕ, ΕΓ, c'est-à-dire au quarré construit sur ΕΒ. Mais ΑΓ est égal au rayon du cercle Ν; donc le quarré construit sur le rayon du cercle Ν est au quarré construit sur la droite ΒΕ, c'est-à-dire que le cercle Ν est au cercle décrit autour du diamètre ΒΖ comme ΚΔ est à ΑΘ, c'est-à-dire comme la droite ΚΔ est à la hauteur du cône Ν. Donc le cône Ν, c'est-à-dire la sphère, est égal au rhombe solide ΒΔΖΚ (1, 17, *lemm.* 4). Ou bien de cette manière, donc le cercle Ν est au cercle décrit autour du diamètre ΒΖ comme la droite ΚΔ est à la hauteur du cône Ν. Donc le cône Ν est égal au cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre ΒΖ et dont la hauteur est ΔΚ; car les bases de ces cônes sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs (1, 17, *lemm.* 4). Mais le cône Ν est égal au rhombe solide ΒΚΖΔ; donc le cône Ν, c'est-à-dire la sphère, est aussi égal au rhombe solide BKZΔ, qui est composé des cônes BΔZ, BKZ. Mais nous avons démontré que le cône BΔZ est égal au segment sphérique BΓZ; donc le cône restant BKZ est égal au segment sphérique BAZ (ε).

PROPOSITION IV.

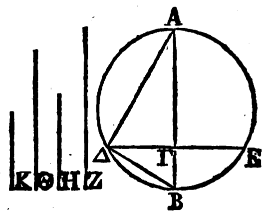
Le troisième problême étoit celui-ci: couper une sphère donnée par un plan, de manière que les surfaces des segmens aient entre elles une raison égale à une raison donnée.

Supposons que cela soit fait. Que AΔBE soit un grand cercle de la sphère, et que AB soit son diamètre; que la section du cercle AΔBE par ce plan soit la droite ΔE, et menons les droites AΔ, BΔ. Puisque la raison de la surface du segment ΔAE à la surface du segment ΔBE est donnée; que la surface du segment ΔAE est égale à un cercle qui a un rayon égal à la droite AΔ (1, 49); et que la surface du segment ΔBE est égale à un cercle qui a un



rayon égal à la droite ΔB (1, 48); et à cause que les cercles dont nous venons de parler sont entre eux comme les quarrés construits sur les droites AΔ, AB, c'est-à-dire comme les droites AΓ, ΓB; il est évident que la raison de AΓ à ΓB est donnée, et par conséquent le point Γ. Mais la droite ΔE est perpendiculaire sur AB; donc le plan qui passe par ΔE est donné de position.

On construira ce problême de la manière suivante : soit la sphère dont AΔBE est un grand cercle et dont AB est le diamètre. Que la raison donnée soit la même que celle de la droite Z à la droite H. Coupons la droite AB au point Γ, de manière que AΓ soit à ΓB comme Z est à H; par le point Γ coupons la sphère par un plan perpendiculaire sur AB; et que la commune section soit ΔE. Menons les droites AΔ, ΔB. Supposons enfin deux cercles Θ, K dont l'un ait un rayon égal à la droite AΔ et l'autre un rayon égal à la droite ΔB. Le cercle Θ sera égal à la surface du segment ΔAE, et le cercle K égal à la surface du segment ΔBE, ainsi que cela a été démontré dans le premier livre (1, 48 et 49). Puisque l'angle AΔB est donné et que la droite ΓΔ est perpendiculaire, la droite ΑΓ est à la droite ΓΒ, c'est-à-dire que Ζ est à Η comme le quarré construit sur ΑΔ est au quarré construit sur ΔΒ, c'est-à-dire comme le quarré construit sur le rayon du cercle Θ est au quarré construit sur le rayon du cercle Κ, c'est-à-dire comme la surface du segment sphérique ΔΑΕ est à la surface du segment sphérique ΑΒΕ.

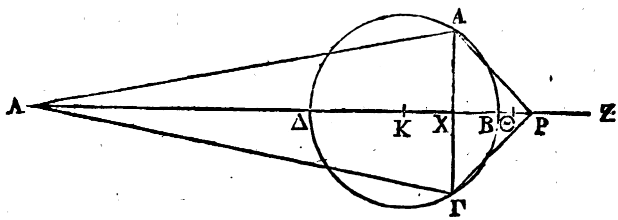


PROPOSITION V.

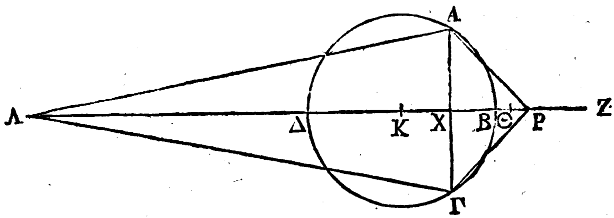
Couper une sphère donnée de manière que les segmens aient entre eux une raison égale à une raison donnée.

Soit ΑΒΓΔ la sphère donnée. Il faut la couper par un plan de manière que les segmens aient entre eux une raison égale à une raison donnée.

Coupons cette sphère par un plan conduit par ΑΓ. La raison du segment sphérique ΑΔΓ au segment sphérique ΑΒΓ sera donnée. Coupons cette sphère par un plan qui passe par son centre ; que cette section soit le grand cercle ΑΒΓΔ ; que le point Κ soit son centre, et ΔΒ son diamètre. Que la somme des droites ΚΔ, ΔΧ soit à la droite ΔΧ comme



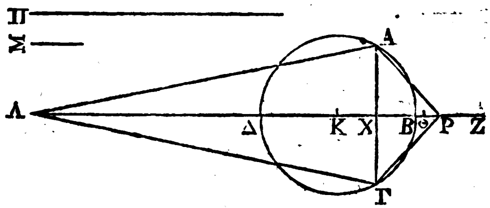
ΡΧ est à ΧΒ ; et que la somme des droites ΚΒ, ΒΧ soit à la droite ΒΧ comme ΛΧ est à ΧΔ. Menons les droites ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ. Le cône ΑΛΓ sera égal au segment sphérique ΑΔΓ ; et le cône ΑΡΓ égal au segment ΑΒΓ (2, 3). Donc la raison du cône ΑΛΓ au cône ΑΡΓ sera donnée. Mais le premier cône est au second comme ΛΧ est à ΧΡ, puisque ces deux cônes ont pour base le cercle décrit autour de la droite ΑΓ ; donc la raison de ΛΧ à ΧΡ est aussi donnée. Par la même raison qu'auparavant, et par construction (2, 3), la droite ΛΔ est à la droite ΚΔ comme ΚΒ est à ΒΡ, et comme ΔΧ est à ΧΒ. Mais la droite ΡΒ est à la droite ΒΚ comme ΚΔ est à ΛΔ ; donc par addition la droite ΡΚ est à ΚΒ, c'est-à-dire à ΚΔ comme ΚΛ est à ΛΔ. Donc (α), la droite totale ΡΛ est à la droite totale ΚΛ comme ΚΛ est à ΛΔ. Donc la surface comprise sous ΡΛ, ΛΔ est



égale au quarré construit sur ΚΛ. Donc ΡΛ est à ΛΔ comme le quarré construit sur ΚΛ est au quarré construit sur ΛΔ (ζ). Mais ΛΔ est à ΔΚ comme ΔΧ est à ΧΒ; donc par inversion et par addition, la droite ΚΛ est à la droite ΛΔ comme ΒΔ est à ΔΧ. Donc le quarré construit sur ΚΛ est au quarré construit sur ΛΔ comme le quarré construit sur ΒΔ est au quarré construit sur ΔΧ. De plus, puisque ΛΧ est à ΔΧ comme la somme des droites ΚΒ, ΒΧ est à ΒΧ; par soustraction, la droite ΛΔ sera à la droite ΔΧ comme ΚΒ est à ΒΧ. Faisons ΒΖ égal à ΚΒ. Il est évident que cette droite tombera au-delà du point Ρ (γ). Mais la droite ΛΔ est à la droite ΔΧ comme ΖΒ est à BX; donc ΔΛ sera à ΛX comme BZ est à ZX (δ). Puisque non-seulement la raison de ΔΛ à ΛX est donnée, mais encore celle de PΛ à ΛX, ainsi que celle de PΛ à ΛΔ; et puisque la raison de PΛ à ΛX est composée de la raison de PΛ à ΛΔ, et de la raison de ΔΛ à ΛX (ε); que PΛ est à ΛΔ comme le quarré construit sur ΔB est au quarré construit sur ΔX, et que ΔΛ est à ΛX comme BZ est à ZX, la raison de PΛ à ΛX est composée de la raison du quarré construit sur BΔ au quarré construit sur ΔX, et de la raison de BZ à ZX (ζ). Faisons en sorte que PΛ soit à ΛX comme BZ est à ZΘ. Or la raison de PΛ à ΛX est donnée; donc la raison de ZB à ZΘ est aussi donnée. Mais la droite BZ est donnée, puisqu'elle est égale au rayon; donc la droite ZΘ est aussi donnée. Donc la raison de BZ à ZΘ est composée de la raison du quarré construit sur BΔ au quarré construit sur ΔX, et de la raison de BZ à ZX. Mais la raison de BZ à ZΘ est composée de la raison de BZ à ZX, et de la raison de ZX à ZΘ; donc si nous retranchons la raison commune de BZ à ZX, la raison restante, c'est-à-dire la raison du quarré construit sur la droite BΔ qui est donné, au quarré construit sur la droite ΔX, sera égale à la raison de XZ à la droite ZΘ, qui est donnée; mais la droite ZΔ est donnée. Il faut donc couper la droite donnée ΔZ en un point X, de manière que la droite XZ soit à la droite donnée ZΘ comme le quarré construit sur BΔ est au quarré construit sur ΔX; et si cela est énoncé d'une manière générale, il y aura une solution; si, au contraire, on ajoute les choses trouvées, c'est-à-dire que ΔB est double de BZ et que BZ est plus grand que ZΘ, il n'y aura aucune solution. Le problême doit donc être posé ainsi: étant données deux droites ΔB, BZ dont ΔB soit double de BZ; étant donné aussi le point Θ dans la droite BZ, couper la droite ΔB en un point X, de manière que le quarré construit sur BΔ soit un quarré construit sur ΔX comme XZ est à ZΘ. Chacune de ces choses aura à la fin sa solution et sa construction (η).

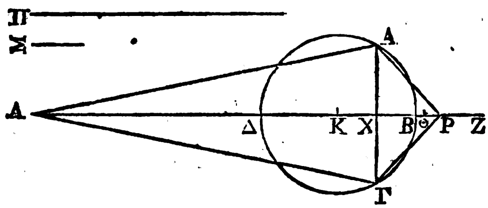
On construira le problême de cette manière: Que la raison donnée soit la même que celle de la droite Π à la droite Σ, la droite Π étant plus grande que la droite Σ. Soit donnée aussi une sphère quelconque;

que cette sphère soit coupée par un plan conduit par le centre. Que la section soit le cercle ΑΒΓΔ ; que ΒΔ soit le diamètre de ce cercle et le point Κ son centre. Faisons ΒΖ



égal à ΚΒ ; et coupons ΒΖ en un point Θ, de manière que ΘΖ soit à ΘΒ comme Π est à Σ. Coupons aussi ΒΔ en un point Χ, de manière que ΧΖ soit à ΘΖ comme le quarré construit sur ΒΔ est au quarré construit sur ΔΧ ; et faisons passer par le point Χ un plan perpendiculaire sur ΒΔ. Je dis que ce plan coupera la sphère de manière que le plus grand segment sera au plus petit comme Π est à Σ.

Faisons en sorte que la somme des droites ΚΒ, ΒΧ soit à la droite ΒΧ comme ΛΧ est à ΔΧ ; et que la somme des droites ΚΔ, ΔΧ soit à la droite ΔΧ comme ΡΧ est à ΧΒ. Menons les droites ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ. La surface comprise sous ΡΛ, ΛΔ, sera par construction, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, égale au quarré construit sur ΛΚ; et la droite ΚΛ sera à la droite ΛΔ comme ΒΔ est à ΔΧ. Donc le quarré construit sur ΚΛ



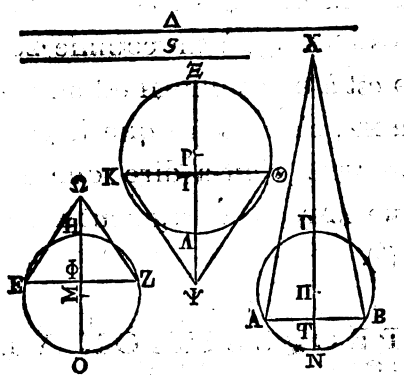
est au quarré construit sur ΛΔ comme le quarré construit sur ΒΔ est au quarré construit sur ΔΧ. Mais la surface comprise sous ΡΛ, ΛΔ est égale au quarré construit sur ΛΚ; donc la droite ΡΛ est à la droite ΛΔ comme le quarré construit sur ΛΚ est au quarré construit sur ΛΔ. Donc aussi la droite ΡΛ est à la droite ΛΔ comme le quarré construit sur ΒΔ est au quarré construit sur ΔΧ, c'est-à-dire, comme ΧΖ est à ΖΘ. Mais la somme des droites ΚΒ, ΒΧ est à la droite ΒΧ comme ΛΧ est à ΔΧ, et la droite ΚΒ est égale à la droite ΒΖ; donc la droite ΖΧ sera à la droite ΧΒ comme ΛΧ est à ΧΔ; et par conversion, la droite ΧΖ sera à ΖΒ comme ΧΛ est à ΛΔ. Donc aussi la droite ΛΔ sera à la droite ΛX comme BZ est à ZX. Mais PΛ est à ΛΔ comme XZ est à ZΘ; et ΔΛ est à ΛX comme BZ est à ZX; donc, par raison d'égalité dans la proportion troublée, la droite PΛ sera à la droite ΛX comme BZ est à ZΘ. Donc aussi ΛX est à XP comme ZΘ est à ΘB. Mais ZΘ est à ΘB comme Π est à Σ; donc aussi ΛX est à XP, c'est-à-dire que le cône AΓΛ est au cône APΓ, c'est-à-dire que le segment sphérique AΔΓ est au segment ABΓ comme Π est à Σ (θ).

PROPOSITION VI.

Construire un segment sphérique semblable à un segment sphérique donné, et égal à un autre segment sphérique aussi donné.

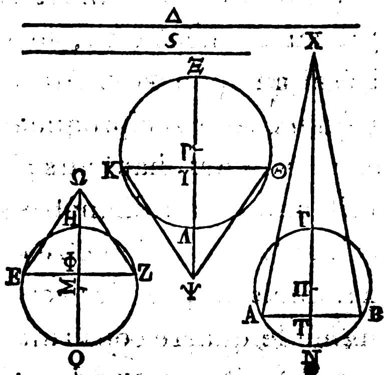
Soient ABΓ, EZH, les deux segmens sphériques donnés. Que la base du segment ABΓ soit le cercle décrit autour du diamètre AB, et que son sommet soit le point Γ; que la base du segment EZH soit le cercle décrit autour du diamètre EZ, et que son sommet soit le point H. Il faut construire un segment qui soit égal au segment ABΓ et semblable au segment EZH.

Supposons que ce segment soit trouvé, et que ce soit le segment ΘΚΛ qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre ΘΚ, et pour sommet le point Λ. Soient aussi dans



ces sphères les cercles ΑΝΒΓ, ΘΞΚΛ, ΕΟΖΗ, dont les diamètres ΓΝ, ΛΞ, ΗΘ soient perpendiculaires sur la base du segment, et dont les centres soient les points Π, Ρ, Σ. Faisons en sorte que la somme des droites ΠΝ, ΝΤ soit à la droite ΝΤ comme ΧΤ est à ΤΓ; que la somme des droites ΡΞ, ΞΥ soit à la droite ΞΥ comme ΨΥ est à ΥΛ, et qu'enfin la somme des droites ΣΟ, ΟΦ soit à ΟΦ comme ΩΦ est à ΦΗ. Concevons des cônes qui aient pour bases les cercles décrits autour des diamètres ΑΒ, ΘΚ, ΕΖ, et pour sommets les points Χ, Ψ, Ω. Le cône ABX sera égal au segment sphérique ABΓ, le cône ΨΘK égal au segment sphérique AKΔ, et enfin le cône EΩZ égal au segment sphérique EHZ, ce qui a été démontré (2, 3). Puisque le segment sphérique ABΓ est égal au segment ΘKΛ, le cône AXB sera aussi égal au cône ΨΘK. Mais les bases des cônes égaux sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs; donc le cercle décrit autour du diamètre AB est au cercle décrit autour du diamètre ΘK comme ΨΥ est à XΥ. Mais le premier cercle est au second comme le quarré construit sur AB est au quarré construit sur ΘK; donc le quarré construit sur AB est au quarré construit sur ΘK comme ΨΥ est à XΥ. Mais le segment EZH est semblable au segment ΘKΛ; donc le cône EZΩ est aussi semblable au cône ΨΘK, ce qui sera démontré (*a*); donc ΩΦ est à EZ comme ΨΥ est à ΘK. Mais la raison de ΩΦ à EZ est donnée; donc la raison de ΨΥ à ΘK est aussi donnée. Que cette dernière raison soit la même que celle de XΥ à Δ. Puisque la droite XΥ est donnée, la droite Δ est aussi donnée. Mais ΨΥ est à XΥ, c'est-à-dire, le quarré construit sur AB est au quarré construit sur

ΘΚ comme ΘΚ est à Δ ; donc si nous supposons que la surface comprise sous ΑΒ, ϛ soit égale au quarré construit sur ΘΚ, le quarré construit sur ΑΒ sera au quarré construit sur



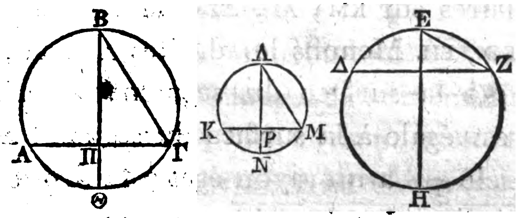
ΘΚ comme ΑΒ est à ϛ. Mais on a démontré que le quarré construit sur ΑΒ est au quarré construit sur ΘΚ comme ΘΚ est à Δ ; donc, par permutation, la droite ΑΒ est à la droite ΘΚ comme ϛ est à Δ. Mais ΑΒ est à ΘΚ comme ΘΚ est à ϛ ; parce que la surface comprise sous ΑΒ, ϛ est égale au quarré construit sur ΘΚ ; donc ΑΒ est à ΘΚ comme ΘΚ est à ϛ, et comme ϛ est à Δ. Donc les droites ΘΚ, ϛ sont deux moyennes proportionnelles entre ΑΒ, Δ.

On construira ce problême de cette manière. Soient deux segmens sphériques ΑΒΓ, ΕΖΗ; que ΑΒΓ soit celui auquel il faut construire un segment égal, et ΕΖΗ celui auquel il faut construire un segment semblable. Soient les grands cercles ΑΓΒΝ, ΗΕΘΣ; que ΓΝ, ΗΘ soient leurs diamètres, et Π, Σ leurs centres. Faisons en sorte que la somme des droites ΠΝ, ΝΤ soit à la droite ΝΤ comme ΧΤ est à ΤΓ; et que la somme des droites ΣΘ, ΘΦ soit à ΘΦ comme ΩΦ est à ΦΗ. Le cône ΧΑΒ sera égal au segment sphérique ΑΒΓ, et le cône ΖΩΕ sera égal au segment sphérique ΕΗΖ. Faisons en sorte que ΩΦ soit à ΕΖ comme ΧΤ est à Δ; entre les deux droites ΑΒ, Δ, prenons deux moyennes proportionnelles ΘΚ, ϛ, de manière que ΑΒ soit à ΘΚ comme ΘΚ est à ϛ, et comme ϛ est à Δ. Sur ΘΚ construisons un segment circulaire ΘΚΔ semblable au segment circulaire ΕΖΗ; achevons le cercle, et que son diamètre soit ΛΞ. Concevons enfin une sphère dont ΛΘΞΚ soit un grand cercle, et dont le centre soit le point Ρ; et par la droite ΘΚ, faisons passer un plan perpendiculaire sur ΛΞ. Le segment sphérique construit du côté où est la lettre Λ sera semblable au segment sphérique ΕΖΗ, puisque les segmens circulaires sont semblables. Je dis aussi que ce segment sphérique sera égal au segment ABΓ. Faisons en sorte que la somme des droites PΞ, ΞΥ soit à la droite ΞΥ comme ΨΥ est à ΥΛ. Le cône ΨΘΚ sera égal au segment sphérique ΘΚΛ (2, 3). Mais le cône ΨΘΚ est semblable au cône ZΩE; donc la droite ΩΦ est à la droite EZ, c'est-à-dire, la droite XΥ est à Δ comme ΨΥ est à ΘΚ. Donc, par permutation, et par inversion, la droite ΨΥ est à XΥ comme ΘΚ est à Δ. Mais les droites AB, KΘ, ϛ, Δ sont tour à tour proportionnelles (6); donc le quarré construit sur AB est au quarré construit sur ΘΚ comme ΘΚ est à Δ. Mais la droite ΘΚ est à la droite Δ comme ΨΥ est à XΥ; donc le quarré construit sur AB est au quarré construit sur KΘ, c'est-à-dire, le cercle décrit autour du diamètre AB est au cercle décrit autour du diamètre ΘΚ comme ΨΥ est à XΥ; donc le cône XAB est égal au cône ΨΘΚ. Donc le segment sphérique ABΓ est aussi égal au segment sphérique ΘΚΛ. Donc on a construit un segment sphérique ΘΚΛ égal au segment donné ABΓ, et semblable à l'autre segment sphérique donné EZH (7).

PROPOSITION VII.

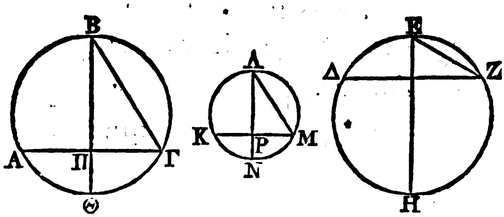
Étant donnés deux segmens de la même sphère, ou de différentes sphères, trouver un segment sphérique qui soit semblable à l'un des deux et qui ait une surface égale à celle de l'autre.

Soient deux segmens sphériques construits dans les portions de circonférence ΑΒΓ, ΔΕΖ; que le segment construit dans la portion de circonférence ΑΒΓ soit celui auquel le segment qu'il faut trouver doit être semblable;



et que le segment construit dans la portion de circonférence ΔΕΖ soit celui à la surface duquel la surface du segment qu'il faut trouver doit être égale. Supposons que cela soit fait. Que le segment sphérique ΚΛΜ soit semblable au segment ΑΒΓ et que la surface de ce segment soit égale à la surface du segment

ΔEZ. Concevons les centres de ces sphères; par leurs centres conduisons des plans perpendiculaires sur les bases de ces segmens; que les sections des sphères soient les grands cercles KΛMN, BAΘΓ, EZHΔ; que KM, AΓ, ΔZ,



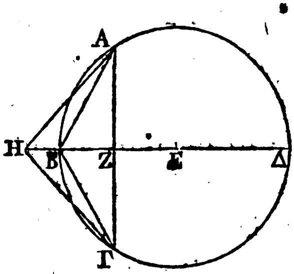
soient dans les bases des segmens, et enfin que dans ces sphères les diamètres perpendiculaires sur KM, AΓ, ΔZ soient les droites ΛN, BΘ, EH. Menons les droites ΛM, BΓ, EZ. Puisque la surface du segment sphérique KΛM est égale à la surface du segment ΔEZ, le cercle qui a un rayon égal à la droite MΛ sera égal au cercle qui a un rayon égal à la droite EZ, parce que nous avons démontré que les surfaces des segmens dont nous venons de parler sont égales à des cercles qui ont des rayons égaux aux droites menées des sommets des segmens aux circonférences de leurs bases (1, 48). Donc la droite MΛ est aussi égale à la droite EZ. Mais puisque le segment ΚΑΜ est semblable au segment ΑΒΓ ; la droite ΡΑ est à la droite ΡΝ comme ΒΠ est à ΠΘ ; et par inversion et par addition, la droite ΝΑ est à la droite ΑΡ comme ΘΒ est à ΒΠ. Mais ΡΑ est à ΑΜ comme ΒΠ est à ΓΒ, à cause des triangles semblables ΑΜΡ, ΒΓΠ ; donc ΝΑ est à ΑΜ, c'est-à-dire, à ΕΖ comme ΘΒ est à ΒΓ et par permutation.......... Mais la raison de la droite ΕΖ à la droite ΒΓ est donnée, puisque ces deux droites sont données ; donc la raison de ΑΝ à ΒΘ est aussi donnée. Mais la droite ΒΘ est donnée ; donc la droite ΑΝ est aussi donnée. Donc la sphère est donnée.

On construira le problème de cette manière. Soient ΑΒΓ, ΔΕΖ les deux segmens donnés ; que ΑΒΓ soit le segment auquel celui qu'il faut trouver doit être semblable, et que ΔΕΖ soit le segment à la surface duquel la surface de celui qu'il faut trouver doit être égale. Que la construction soit la même que dans la première partie ; et faisons en sorte que ΒΓ soit à ΕΖ comme ΒΘ est à ΝΑ ; décrivons un cercle autour du diamètre ΑΝ ; et enfin concevons une sphère dont ΑΚΝΜ soit un grand cercle. Coupons la droite ΝΑ au point Ρ, de manière que ΘΠ soit à ΠΒ comme ΝΡ est à ΡΑ; coupons le cercle ΑΚΝΜ au point Ρ par un plan perpendiculaire sur la droite ΑΝ; et menons la droite ΑΜ. Les segmens circulaires appuyés sur les droites ΚΜ, ΑΓ sont semblables. Donc les segmens sphériques sont aussi semblables. Mais ΘΒ est à ΒΠ comme ΝΑ est à ΑΡ, car cela s'ensuit de la construction, et ΠΒ est à ΒΓ comme ΡΑ est à ΑΜ; donc la droite ΘΒ est à ΝΑ comme ΒΓ est à ΑΜ. Mais ΘΒ est à ΝΑ comme ΒΓ est à ΕΖ; donc ΕΖ est égal à ΑΜ. Donc le cercle qui a pour rayon la droite ΕΖ est égal au cercle qui a un rayon égal à la droite ΑΜ. Mais le cercle qui a pour rayon la droite ΕΖ est égal à la surface du segment ΔΕΖ; et le cercle qui a un rayon égal à la droite ΑΜ est égal à la surface du segment ΚΑΜ, ainsi que cela a été démontré dans le premier livre (1, 48). Donc la surface du segment sphérique ΚΑΜ est égale à la surface du segment ΔΕΖ; et ce même segment ΚΑΜ est semblable au segment ΑΒΓ.

PROPOSITION VIII.

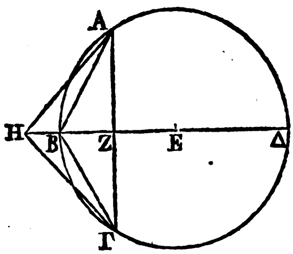
Couper un segment d'une sphère par un plan de manière que la raison de ce segment au cône qui a la même base et la même hauteur que ce segment, soit égale à une raison donnée.

Que la sphère donnée soit celle dont ΑΒΓΔ est un grand cercle, et ΒΔ le diamètre. Il faut couper la sphère par un plan conduit par ΑΓ de manière que la raison du seg-



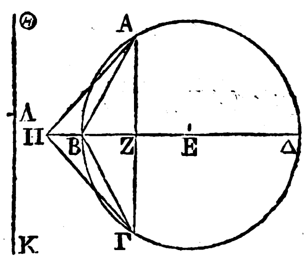
ment ΑΒΓ au cône ΑΒΓ soit égale à une raison donnée.

Supposons que cela soit fait. Que le point Ε soit le centre de la sphère. Que la somme des droites ΕΔ, ΔΖ soit à ΔΖ comme ΗΖ est à ΖΒ; le cône ΑΓΗ sera égal au segment ΑΒΓ (2, 3). Donc la raison du cône ΑΗΓ au cône ΑΒΓ est donnée. Donc la raison de HZ à ZB est aussi donnée. Mais HZ est à ZB comme la somme des droites EΔ, ΔZ est à la droite ΔZ; donc la raison de la somme des droites EΔ, ΔZ à la

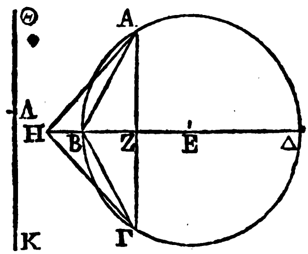


droite ΔZ est donnée, et par conséquent la raison de EΔ à ΔZ. Donc la droite ΔZ est donnée, et par conséquent la droite AΓ. Mais la raison de la somme des droites EΔ, ΔZ à la droite ΔZ est plus grande que la raison de la somme des droites EΔ, ΔB à la droite ΔB; et la somme des droites EΔ, ΔB est égale à la droite EΔ prise trois fois, et enfin la droite ΔB est égale à la droite EΔ prise deux fois. Donc la raison de la somme des droites EΔ, ΔZ à ΔZ est plus grande que la raison de trois à deux. Mais la raison de la somme des droites EΔ, ΔZ à la droite ΔZ est la même que la raison donnée. Il faut donc, pour que la construction soit possible, que la raison donnée soit plus grande que la raison de trois à deux.

On construira le problême de cette manière. Que la sphère donnée soit celle dont ΑΒΓΔ est un grand cercle, la droite ΒΔ le diamètre, et le point Ε le centre; que la raison donnée soit la même que celle de ΚΘ à ΚΛ, et que cette raison soit plus grande



que celle de trois à deux. Mais trois sont à deux comme la somme des droites ΕΔ, ΔΒ est à la droite ΔΒ; donc la raison de ΘΚ à ΚΛ est plus grande que la raison de la somme des droites ΕΔ, ΔΒ à la droite ΔΒ. Donc, par soustraction, la raison de ΘΛ à ΛΚ est plus grande que la raison de ΕΔ à ΔΒ. Faisons en sorte que ΘΛ soit à ΛΚ comme ΕΔ est à ΔΖ; par le point Ζ, menons la droite ΑΖΓ perpendiculaire sur ΒΔ, et par la droite ΑΓ, conduisons un plan perpendiculaire sur ΒΔ. Je dis que la raison du segment sphérique ΑΒΓ au cône ΑΒΓ est la même que la raison de ΘΚ à ΚΛ. Car faisons en sorte que la somme

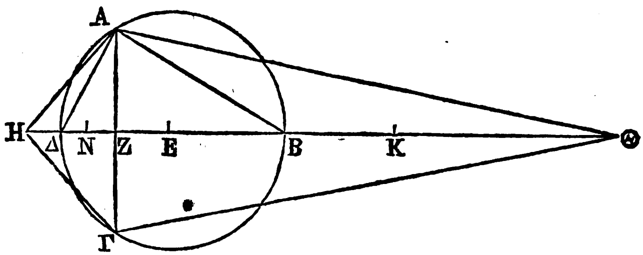


des droites ΕΔ, ΔΖ soit à la droite ΔΖ comme ΗΖ est à ΖΒ; le cône ΓΑΗ sera égal au segment sphérique ΑΒΓ (2, 3). Mais ΘΚ est à ΚΛ comme la somme des droites ΕΔ, ΔΖ est à la droite ΔΖ, c'est-à-dire comme ΗΖ est à ΖΒ, c'est-à-dire comme le cône ΑΗΓ est au cône ΑΒΓ (2, 3); et le cône ΑΗΓ est égal au segment sphérique ΑΒΓ. Donc le segment ΑΒΓ est au cône ΑΒΓ comme ΘΚ est à ΚΛ.

PROPOSITION IX.

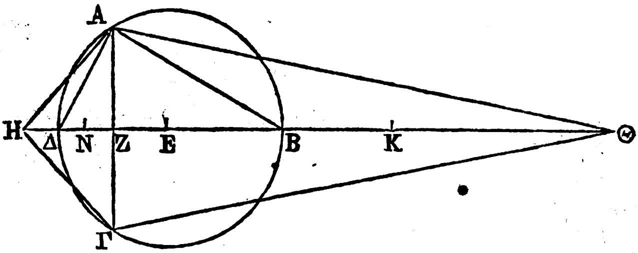
Si une sphère est coupée par un plan qui ne passe pas par le centre; la raison du grand segment au petit sera moindre que la raison doublée de la surface du grand segment à la surface du petit segment, et plus grande que la raison sesquialtère (α).

Soit une sphère; que ΑΒΓΔ soit un de ses



grands cercles, et ΒΔ le diamètre de ce cercle; par la droite ΑΓ, conduisons un plan perpendiculaire sur le cercle ΑΒΓΔ, et que ΑΒΓ soit le plus grand segment. Je dis que la raison du segment ΑΒΓ au segment ΑΔΓ est moindre que la raison doublée de la surface du grand segment à la surface du petit, et plus grande que la raison sesquialtère.

Menons les droites ΒΑ, ΑΔ; que le centre soit le point Ε; et faisons en sorte que la somme des droites ΕΔ, ΔΖ soit à la droite ΔΖ comme ΘΖ est à ΖΒ; et que la somme des droites ΕΒ, ΒΖ soit à la droite ΒΖ comme ΗΖ est à ΖΔ. Concevons deux cônes qui aient pour base le cercle décrit autour du diamètre $A\Gamma$, et leurs sommets aux points Θ, H. Le cône $A\Theta\Gamma$ sera égal au segment $AB\Gamma$, et le cône $A\Gamma H$ égal au segment $A\Delta\Gamma$ (2, 3). Mais le quarré construit sur BA sera au quarré



construit sur $A\Delta$ comme la surface du segment $AB\Gamma$ est à la surface du segment $A\Delta\Gamma$; ainsi que cela a été démontré plus haut (1,48); il faut donc démontrer que la raison du grand segment au petit segment est moindre que la raison doublée de la surface du grand segment à la surface du petit segment : ou ce qui est la même chose, il faut démontrer que la raison du cône $A\Theta\Gamma$ au cône $AH\Gamma$, c'est-à-dire que la raison de $Z\Theta$ à ZH est moindre que la raison doublée du quarré construit sur EA au quarré construit sur $A\Delta$, c'est-à-dire que la raison doublée de BZ à $Z\Delta$.

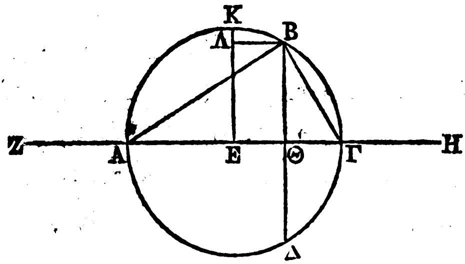
Puisque la somme des droites $E\Delta$, ΔZ est à la droite ΔZ comme ΘZ est à ZB, et que la somme des droites EB, BZ est à la droite BZ comme ZH est à ZΔ, la droite BZ sera à la droite ZΔ comme ΘB est à BE (ϐ), la droite BE étant égale à la droite EΔ; cela a été démontré dans les théorêmes précédens. De plus, puisque la somme des droites EB, BZ est à la droite BZ comme HZ est à ZΔ, si nous faisons BK égal à BE, il est évident que ΘB sera plus grand que BE, à cause que BZ est plus grand que ZΔ (γ); et la droite KZ sera à la droite ZB comme HZ est à ZΔ (δ). Mais nous avons démontré que ZB est à ZΔ comme ΘB est à BE, et la droite BE est égale à la droite KB; donc ΘB est à BK comme KZ est à ZH. Mais la raison de ΘZ à ZK est moindre que la raison de ΘB à BK (ε), et nous avons démontré que ΘB est à BK comme KZ est à ZH; donc la raison de ΘZ à ZK est moindre que la raison de KZ à ZH. Donc la surface comprise sous ΘZ, ZH est plus petite que le quarré construit sur ZK. Donc la raison de la surface comprise sous ΘZ, ZH au quarré construit sur ZH, c'est-à-dire la raison de ZΘ à ZH est moindre que la raison du quarré construit sur KZ au quarré construit sur ZH. Mais la raison du quarré construit sur KZ au quarré construit sur ZH est doublée de la raison de KZ à ZH; donc la raison de ΘZ à ZH est moindre que la raison doublée de KZ à ZH. Mais KZ est à ZH comme BZ est à ZΔ; donc la raison de ΘZ à ZH est moindre que la raison doublée de BZ à ZΔ, et c'est là ce que nous cherchions.

Puisque BE est égal à EΔ, la surface comprise sous BZ, ZΔ sera plus petite que la surface comprise sous BE, EΔ (ζ). Donc la raison de BZ à BE est moindre que la raison de EΔ à ΔZ, c'est-à-dire que la raison de ΘB à BZ. Donc le quarré construit sur ZB est moindre que la surface comprise sous ΘB, BE, c'est-à-dire que la surface comprise sous ΘB, BK. Que le quarré construit sur BN soit égal à la surface comprise sous ΘB, BK; la droite ΘB sera à la droite BK comme le quarré construit sur ΘN est au quarré construit sur NK (θ). Mais la raison du quarré construit sur ΘZ au quarré construit sur ZK est plus grande que la raison du quarré construit sur ΘN au quarré construit sur NK; donc aussi la raison du quarré construit sur ΘZ au quarré construit sur ZK est plus grande que la raison de ΘB à BK, c'est-à-dire que la raison de ΘB à BE, c'est-à-dire que la raison de KZ à ZH. Donc la raison de ΘZ à ZH est plus grande que la raison sesquialtère de KZ à ZH, ce que nous démontrerons à la fin (ι). Mais ΘZ est à ZH comme le cône AΘΓ est au cône AHΓ, c'est-à-dire comme le segment ABΓ est au segment AΔΓ. Mais KZ est à ZH comme BZ est à ZΔ; c'est-à-dire comme le quarré construit sur BΔ est au quarré construit sur AΔ; c'est-à-dire comme la surface du segment ABΓ est à la surface du segment AΔΓ; donc la raison du grand segment au petit segment est moindre que la raison doublée de la surface du grand segment à la surface du petit segment, et plus grande que la raison sesquialtère.

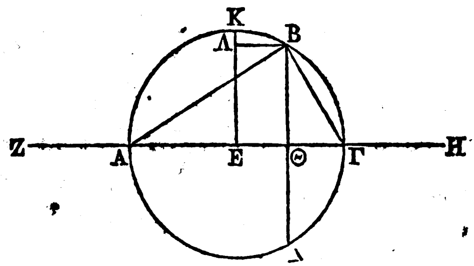
AUTREMENT (κ).

Soit la sphère dont ABΓΔ est un grand cercle, la droite AΓ le diamètre, et le point E le centre; et que cette sphère soit coupée par un plan conduit par BΔ et perpendiculaire sur AΓ. Je dis que la raison du grand segment ΔAB au petit BΓΔ est moindre que la raison doublée de la surface du segment ABΔ à la surface du segment ΒΓΔ, et plus grande que la raison sesquialtère.

Menons les droites ΑΒ, ΒΓ. La raison de la surface du segment ΑΒΔ à la surface



du segment ΒΓΔ est égale à la raison du cercle qui a pour rayon la droite ΑΒ au cercle qui a pour rayon la droite ΒΓ, c'est-à-dire à la raison de ΑΘ à ΘΓ. Supposons que chacune des droites ΑΖ, ΓΗ soit égale au rayon du cercle. La raison du segment ΒΑΔ au segment ΒΓΔ est composée de la raison du segment ΒΑΔ au cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre ΒΔ et pour sommet le point Α, de la raison du même cône au cône qui a la même base et qui a pour sommet le point Γ, et enfin de la raison du cône dont nous venons de parler au segment ΒΓΔ (λ). Mais la raison du segment ΒΑΔ au cône ΒΑΔ est la même que celle de ΗΘ à ΘΓ, la raison du cône ΒΑΔ au cône ΒΓΔ est la même que celle de ΑΘ à ΘΓ, et enfin la raison du cône ΒΓΔ au segment ΒΓΔ est la même que la raison de ΑΘ à ΘΖ : et de plus la raison qui est composée de la raison de ΗΘ à ΘΓ et de la raison de ΑΘ à ΘΓ est la même que celle de la surface comprise sous ΑΘ, ΘΗ au quarré construit sur ΘΓ ; et la raison qui est composée de la raison de la surface comprise sous ΗΘ, ΘΑ au quarré construit sur ΓΘ, et de la raison de ΑΘ à ΘΖ est la même que la raison de la surface comprise sous ΗΘ, ΘΑ et multipliée par ΘΑ au quarré construit sur ΘΓ et multiplié par ΘΖ (μ) ; et la raison de la surface comprise sous ΗΘ, ΘΑ et multipliée par ΘΑ au quarré construit sur ΘΓ et multiplié par ΘΖ est la même que la raison du quarré construit sur ΑΘ et multipliée par ΘΗ au quarré construit sur ΘΓ et multiplié par ΘΖ ; et enfin la raison de la surface comprise sous ΗΘ, ΘΑ et multipliée par ΘΑ au quarré construit sur ΘΓ et multiplié par ΘΗ est la même que celle du quarré construit sur ΘΑ au quarré construit sur ΘΓ. Donc, puisque la raison du quarré construit sur ΘΑ et multiplié par ΘΗ au quarré construit sur ΓΘ et multiplié par ΖΘ est moindre que la raison doublée de ΑΘ à ΘΓ; et que la raison du quarré construit sur ΑΘ au quarré construit par ΘΓ est dou-



blée de la raison de ΑΘ à ΘΓ; la raison du quarré construit sur ΑΘ et multiplié par ΗΘ au quarré construit sur ΘΓ et multiplié par ΘΖ sera moindre que la raison du quarré construit sur ΑΘ et multiplié par ΗΘ au quarré construit sur ΓΘ et multiplié par ΘΗ. Il faut donc démontrer que le quarré construit par ΓΘ et multiplié par ΖΘ est plus grand que le quarré construit sur ΓΘ et multiplié par ΘΗ; c'est pourquoi il faut démontrer que ΘΖ est plus grand que ΘΗ.

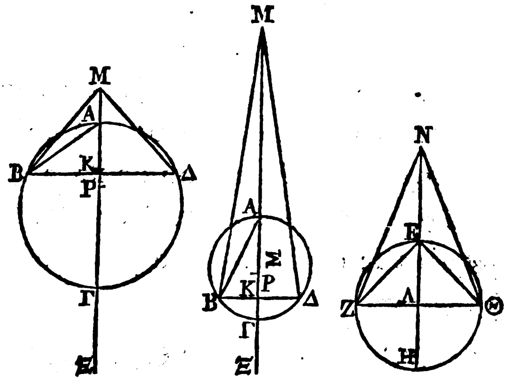
Je dis maintenant que la raison du grand segment au plus petit est plus grande que la raison sesquialtère de la surface du grand segment à la surface du petit segment. Mais on a démontré que la raison des segmens est la même que celle du quarré construit sur AΘ et multiplié par ΘH au quarré construit sur ΓΘ et multiplié par ΘZ, et la raison du cube construit sur AB au cube construit sur BΓ est sesquialtère de la raison de la surface du grand segment à la surface du petit segment. Je dis donc que la raison du quarré construit sur AΘ et multiplié par ΘH au quarré construit sur ΓΘ et multiplié par ΘZ est plus grande que la raison du cube construit sur AB au cube construit sur BΓ, c'est-à-dire que la raison du cube construit sur AΘ au cube construit sur ΘB; c'est-à-dire que la raison du quarré construit sur AΘ au quarré construit sur BΘ, et que la raison de AΘ à ΘB. Mais la raison du quarré construit sur AΘ au quarré construit sur ΘB, avec la raison de AΘ à ΘB est la même que celle du quarré construit sur AΘ à la surface comprise sous ΓΘ, ΘB; et la raison du quarré construit sur AΘ à la surface comprise sous ΓΘ, ΘB est la même que celle du quarré construit sur AΘ et multiplié par ΘH à la surface comprise sous ΓΘ, ΘB et multipliée par ΘH. Je dis donc que la raison du quarré construit sur BΘ et multiplié par ΘH au quarré construit sur ΓΘ et multiplié par ΘZ est plus grande que celle du quarré construit sur AΘ à la surface comprise sous BΘ, ΘΓ; c'est-à-dire que celle du quarré construit sur AΘ et multiplié par ΘH à la surface comprise sous BΘ, ΘΓ et multipliée par ΘH. Il faut donc démontrer que le quarré construit sur ΓΘ et multiplié par ΘZ est plus petit que la surface comprise sous BΘ, ΘΓ et multipliée par ΘH; ce qui est la même chose que de démontrer que la raison du quarré construit sur ΓΘ à la surface comprise sous BΘ, ΘΓ est moindre que celle de HΘ à ΘZ. Il faut donc démontrer que la raison de HΘ à ΘZ est plus grande que celle de ΓΘ à ΘB. Du point E menons la droite EK perpendiculaire sur EΓ, et du point B la droite BΛ perpendiculaire sur la droite EK. Il reste à démontrer que la raison de HΘ à ΘZ est plus grande que la raison de ΓΘ à ΘB. Mais la droite ΘZ est égale à la somme des droites AΘ, KE; il faut donc démontrer que la raison de HΘ à la somme des droites ΘA, KE, est plus grande que la raison de ΓΘ à ΘB. C'est pourquoi ayant retranché ΓΘ de ΘH et EΛ qui est égale à BΘ de

KE, il faudra démontrer que la raison de la droite restante ΓΗ à la somme des droites restantes ΑΘ, ΚΑ est plus grande que celle de ΓΘ à ΘΒ, c'est-à-dire que celle de ΘΒ à ΘΑ; c'est-à-dire que celle de ΛΕ à ΘΑ; et que, par permutation, la raison de ΚΕ à ΕΑ sera plus grande que la raison de la somme des droites ΚΑ, ΘΑ à la droite ΘΑ, et qu'enfin, par soustraction, la raison de ΚΑ à ΛΕ sera plus grande que celle de ΚΑ à ΘΑ et que par conséquent la droite ΛΕ sera plus petite que ΘΑ (ν).

PROPOSITION X.

Parmi les segmens sphériques qui ont des surfaces égales, celui qui comprend la moitié de la sphère est le plus grand.

Soit une sphère dont ΑΒΓΔ soit un de ses grands cercles, et ΑΓ son diamètre; soit aussi une autre sphère dont ΕΖΗΘ soit un de ses grands cercles, et ΕΗ son diamètre. Que l'une soit coupée par un plan qui passe par son centre, et que l'autre soit coupée par un plan qui ne passe pas par son centre. Que les plans coupans soient perpendiculaires sur les diamètres ΑΓ, ΕΗ et que ces plans soient conduits par les lignes ΔB, ZΘ. Le segment sphérique construit dans l'arc ZEΘ est la moitié de la sphère; et parmi les segmens construits dans la circonférence BAΔ, un

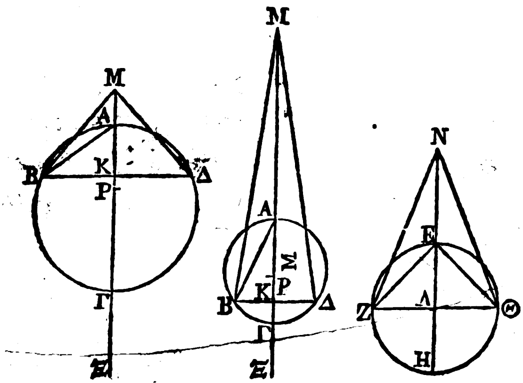


des segmens de la figure où se trouve la lettre Σ est plus grand que la moitié de la sphère, tandis que l'autre est plus petit que la moitié de cette même sphère. Que les surfaces des segmens dont nous venons de parler soient égales. Je dis que la demi-sphère qui est construite dans l'arc ZEΘ est plus grande que le segment construit dans l'arc BAΔ.

Car puisque les surfaces des segmens dont nous venons de parler sont égales, il est évident que la droite BA est égale à la droite EZ.

Car on a démontré que la surface d'un segment quelconque est égale à un cercle qui a un rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence de sa base(1, 48). Mais dans la figure où se trouve la lettre Σ, l'arc ΒΑΔ est plus grand que la moitié de la circonférence; il est donc évident que le quarré construit sur ΑΒ est moindre que le double du quarré construit sur ΑΚ, et plus grand que le double du quarré construit sur le rayon. Que la droite ΓΞ soit égale au rayon du cercle ΑΒΔ, et faisons en sorte que ΓΞ soit à ΓΚ comme ΜΑ est à ΑΚ. Sur le cercle décrit autour du diamètre ΒΔ, construisons un cône qui ait son sommet au point Μ; ce cône sera égal au segment sphérique qui est construit dans l'arc ΒΑΔ (2, 3). Faisons ΕΝ égal à ΕΛ, et sur le cercle décrit autour du diamètre ΘΖ construisons un cône qui ait son sommet au point Ν; ce cône sera égal à la demi-sphère construite dans l'arc ΘΕΖ. Mais la surface comprise sous ΑΡ, ΡΓ est plus grande que la surface comprise sous ΑΚ, ΚΓ, parce que le plus petit côté de l'une de ces surfaces est plus grand que le plus petit côté de l'autre (α);

et le quarré construit sur ΑΡ est égal à la surface comprise sous ΑΚ, ΓΞ, à cause que ce quarré est égal à la moitié du quarré construit sur ΑΒ (ϐ). Donc la somme de la



surface comprise sous ΑΡ, ΡΓ et du quarré construit sur ΑΡ est plus grande que la somme de la surface comprise sous ΑΚ, ΚΓ et de la surface comprise sous ΑΚ, ΓΞ. Donc la surface comprise sous ΓΑ, ΑΡ est plus grande que la surface comprise sous ΞΚ, ΚΑ (γ). Mais la surface comprise sous ΜΚ, ΚΓ est égale à la surface comprise sous ΞΚ, ΚΑ. Donc la surface comprise sous ΓΑ, ΑΡ est plus grande que la surface comprise sous ΜΚ, ΚΓ. Donc la raison de ΓΑ à ΓΚ est plus grande que la raison de ΜΚ, à ΑΡ. Mais la droite ΑΓ est à la droite ΓΚ comme le quarré construit sur ΑΒ est au quarré construit sur ΒΚ; il est donc évident que la raison de la moitié du quarré construit sur ΑΒ, qui est égal au quarré construit sur ΑΡ, au quarré construit sur ΒΚ est plus grande que la raison de la droite ΜΚ au double de ΑΡ, laquelle est égale à ΑΝ. Donc la raison du cercle décrit autour du diamètre ΘΖ au cercle décrit autour du diamètre ΒΔ est plus grande que la raison ΜΚ à ΝΑ. Donc le cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre ΖΘ et pour sommet le point Ν est plus grand que le cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre ΒΔ et pour sommet le point Μ. Il est donc encore évident que la demi-sphère construite dans l'arc ΕΖΘ est plus grande que le segment construit dans l'arc ΒΑΔ.

FIN DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

DE LA MESURE DU CERCLE.

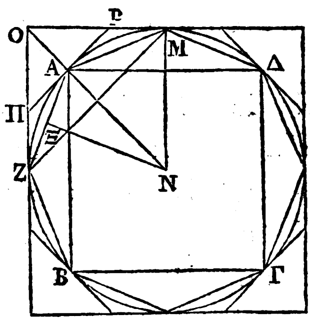
PROPOSITION I.

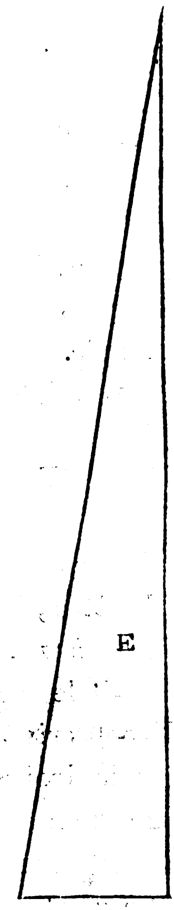
Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.

Que ΑΒΓΔ soit le cercle ~~proposé~~. Je dis que ce cercle est égal au triangle E.

Que le cercle soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le quarré ΑΓ, et ~~partageons les arcs~~ en deux parties égales jusqu'à ce que la somme des segmens restans soit plus petite que l'excès du cercle sur le triangle (1, 6); on aura une figure rectiligne qui sera encore plus grande que le triangle (α). Prenons le centre N, et menons la perpendiculaire ΝΞ; la perpendiculaire ΝΞ sera plus petite qu'un des côtés de l'angle droit du triangle E. Mais le contour de la figure rectiligne est encore plus petit que l'autre côté de l'angle droit de ce même triangle, puisque le contour de cette figure est plus petit que la circonférence du cercle (1, 1). Donc la figure rectiligne est plus petite que le triangle, ce qui est absurde (Ϛ).

Que le cercle soit plus petit que le triangle E, si cela est possible. Circonscrivons un quarré à ce cercle, et partageons les arcs en deux parties égales, et par les points de division, menons des tangentes. Puisque l'angle OAP est droit, la droite





OP est plus grande que la droite MP, à cause que MP est égal à PA. Donc le triangle POΠ est plus grand que la moitié de la figure

ΟΖΑΜ (γ). Que les segmens restans soient tels que ΠΖΑ; et que la somme de ces segmens soit moindre que l'excès du triangle E sur le cercle ΑΒΓΔ. La figure rectiligne sera encore plus petite que le triangle E: Ce qui est absurde, puisque cette figure est plus grande, à cause que ΝΑ est égale à la hauteur du triangle, et que le contour de cette figure est plus grand que la base de ce même triangle.

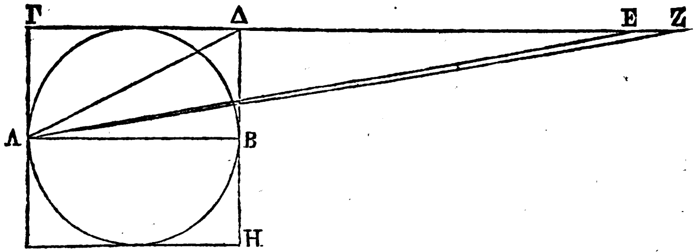
Donc le cercle est égal au triangle E.

PROPOSITION II.

Un cercle est au quarré construit sur son diamètre, à très-peu de chose près, comme 11 est à 14.

Soit le cercle dont le diamètre est à ΑΒ. Circonscrivons à ce cercle le quarré ΓΗΔ; que la droite ΔΕ soit double du côté ΓΔ, et que ΕΖ en soit la septième partie. Puisque le triangle ΑΓΕ est au triangle ΑΓΔ comme 21 est à 7, et que le triangle ΑΓΔ est au triangle ΑΕΖ comme 7 est à 1, le triangle ΑΓΖ sera au triangle ΑΓΔ comme 22 est à 7. Mais le quarré ΓΗ est quadruple du triangle ΑΓΔ;

donc le triangle AΓZ est au quarré de ΓH comme 22 est à 28; ou comme 11 est à 14. Mais le triangle AΓZ est égal au cercle AB, puisque la hauteur AΓ est égale au rayon

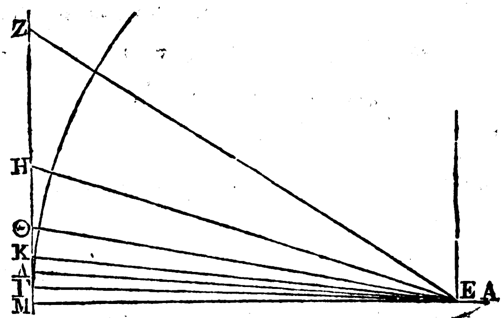


du cercle, et que sa base est égale à la circonférence du même cercle, cette circonférence étant, à peu de chose près, égale au triple du diamètre réuni au septième de ce diamètre, ainsi que cela sera démontré; donc le cercle est au quarré ΓH, à très-peu de chose près, comme 11 est à 14.

PROPOSITION III.

La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les $\frac{10}{71}$ de ce même diamètre.

Soit le cercle dont ΑΓ est le diamètre et dont le point Ε est le centre; que la droite



ΓΛΖ soit une tangente, et que l'angle ΖΕΓ soit la troisième partie d'un angle droit. La droite ΕΖ sera à la droite ΖΓ comme 306 est à 153; et la raison de ΕΓ à ΓΖ sera plus grande que la raison de 265 à 153 (*a*).

Partageons l'angle ΖΕΓ en deux parties égales par la droite ΕΗ; la droite ΖΕ sera à la droite ΕΓ comme ΖΗ est à ΗΓ. Donc, par permutation et par addition, la somme des droites ΖΕ, ΕΓ est à la droite ΖΓ comme ΕΓ est à ΓΗ. Donc la raison de la droite ΓΕ à la droite ΓΗ est plus grande que la raison de 571 à 153. Donc la raison du quarré de ΕΗ au quarré de ΗΓ est plus grande que la raison de 349450 à 23409, et la raison de EH à HΓ plus grande que la raison de 591 $\frac{1}{8}$ à 153 (ϛ).

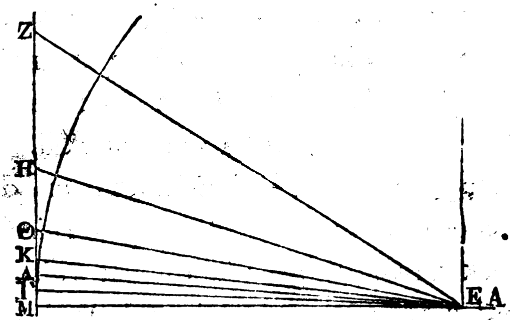
Partageons l'angle HEΓ en deux parties égales par la droite EΘ; la raison de EΓ à ΓΘ sera plus grande que la raison de 1162 $\frac{1}{8}$ à 153. Donc la raison de ΘE à ΘΓ est plus grande que la raison de 1172 $\frac{1}{8}$ à 153.

Partageons encore l'angle ΘEΓ en deux parties égales par la droite EK; la raison de EΓ à ΓK sera plus grande que la raison de 2334 $\frac{1}{4}$ à 153. Donc la raison de EK à ΓK est plus grande que la raison de 2339 $\frac{1}{4}$ à 153.

Partageons enfin l'angle KEΓ en deux parties égales par la droite ΛE; la raison de EΓ à ΛΓ sera plus grande que la raison de 4673 $\frac{1}{2}$ à 153.

Donc, puisque l'angle ZEΓ qui est la troisième partie d'un angle droit, a été partagé quatre fois en deux parties égales, l'angle ΛEΓ sera la quarante-huitième partie d'un angle droit. Construisons au point E un angle ΓEM égal à l'angle ΛEΓ et prolongeons ZΓ vers le point M; l'angle ΛEM sera la vingt-quatrième partie d'un angle droit. Donc la droite ΑΜ est le côté d'un polygone de 96 côtés, circonscrit au cercle.

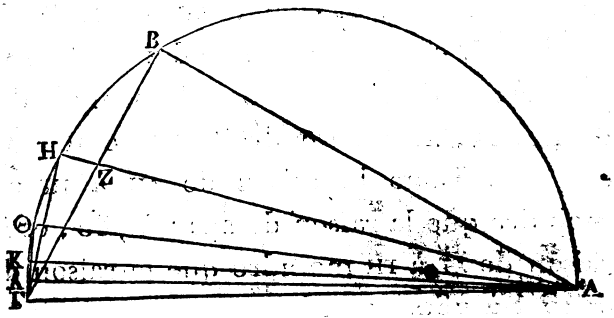
Donc, puisque nous avons démontré que la raison de ΕΓ à ΓΑ est plus grande que la



raison de $4673\frac{1}{2}$ à 153, et à cause que ΑΓ est double de ΕΓ, et ΑΜ double de ΓΑ, la raison de ΑΓ à ΑΜ sera encore plus grande que la raison de $4673\frac{1}{2}$ à 153. Donc la raison de la droite ΑΓ au contour d'un polygone de 96 côtés est plus grande que la raison de $4673\frac{1}{2}$ à 14688.

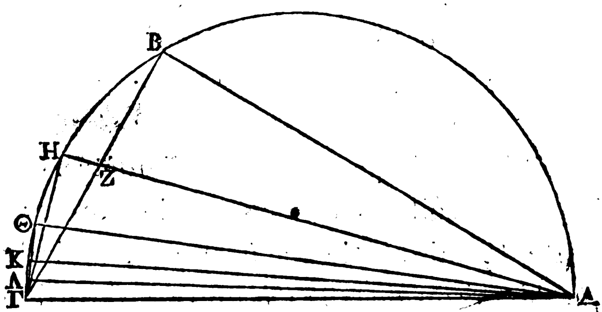
Donc la raison du contour de ce polygone à son diamètre est moindre que la raison de 14688 à $4673\frac{1}{2}$. Mais parmi ces deux nombres, le premier contient trois fois le second avec un reste qui est de $667\frac{1}{2}$, et ce reste est plus petit que la septième partie du nombre $4673\frac{1}{2}$; donc le contour du polygone circonscrit contient le diamètre trois fois, plus une partie de ce diamètre qui est moindre que sa septième partie et demie. Donc, à plus forte raison, la circonférence du cercle est moindre que le triple du diamètre augmenté d'un septième et demi de ce même diamètre.

Soit le cercle dont AΓ est le diamètre. Que l'angle BAΓ soit la troisième partie d'un angle droit; la raison de AB à BΓ sera moindre que la raison de 1351 à 780; et la raison



de AΓ à ΓB sera la même que celle de 1560 à 780.

Partageons l'angle BAΓ en deux parties égales par la droite AH. Puisque l'angle BAH est non-seulement égal à l'angle HΓB, mais encore à l'angle HAΓ, l'angle HΓB sera égal à l'angle HAΓ. Mais l'angle droit AHΓ est commun; donc le troisième angle HZP sera égal au troisième angle AΓH. Donc les triangles AHΓ, ΓHZ sont équiangles; donc AH est à HΓ



comme ΓH à HZ, ~~et comme~~ AΓ est à ΓZ. Mais AΓ est à ΓZ comme la somme des droites ΓA, AB est à la droite BΓ; donc la somme des droites BA, AΓ est à la droite BΓ comme AH est à HΓ. Donc la raison de AH à HΓ est moindre que la raison de 2911 à 780, et la raison de AΓ à ΓH moindre que la raison de 3013 $\frac{3}{4}$ à 780.

Partageons l'angle ΓAH en deux parties égales par la droite AΘ; la raison de AΘ à ΘΓ sera pareillement moindre que la raison de 5924 $\frac{3}{4}$ à 780, ou bien que la raison de 1823 à 240; car ces deux derniers nombres sont chacun les $\frac{4}{13}$ des deux premiers. Donc la raison de AΓ à ΓΘ est moindre que la raison de 1838 $\frac{9}{11}$ à 240.

Partageons encore l'angle ΘAΓ en deux parties égales par la droite KA ; la raison de KA à KΓ sera moindre que la raison de 3661 $\frac{9}{11}$ à 240, ou bien que la raison de 1007 à 66 ; car ces deux derniers nombres sont chacun les $\frac{11}{40}$ des deux premiers. Donc la raison de AΓ à ΓK est moindre que la raison de 1009 $\frac{1}{6}$ à 66.

Partageons enfin l'angle KAΓ en deux parties égales par la droite ΛA ; la raison de ΛA à ΛΓ sera moindre que la raison de 2016 $\frac{1}{6}$ à 66, et la raison de AΓ à ΓΛ moindre que la raison de 2017 $\frac{1}{4}$ à 66.

Donc la raison de ΛΓ à ΓA est plus grande que la raison de 66 à 2017 $\frac{1}{4}$. Donc, la raison du contour du polygone au diamètre est plus grande que la raison de 6336 à 2017 $\frac{1}{4}$. Mais parmi ces nombres, le premier contient le second trois fois avec un reste qui est plus grand que les $\frac{10}{71}$ du second. Donc le contour d'un polygone de 96 côtés inscrit dans un cercle est plus grand que le triple de son diamètre augmenté des $\frac{10}{71}$ de ce diamètre. Donc, à plus forte raison, la circonférence du cercle est plus grande que le triple du diamètre augmenté des $\frac{10}{71}$ de ce diamètre.

Donc, la circonférence d'un cercle est égale au triple de son diamètre augmenté d'une portion de son diamètre qui est plus petite que le septième de ce diamètre et plus grande que les $\frac{10}{71}$ de ce même diamètre.

FIN DE LA MESURE DU CERCLE.

DES CONOÏDES

ET DES SPHÉROÏDES.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE, SALUT.

JE t'envoie dans ce livre, non-seulement les démonstrations du reste des théorêmes qui ne se trouvoient pas parmi celles qui t'ont déjà été adressées, mais encore les démonstrations d'autres théorêmes que j'ai découverts dans la suite et qui ont tenu long-temps mon esprit incertain, parce que après les avoir examinés à plusieurs reprises, ils me paroissoient présenter beaucoup de difficultés. Voilà pourquoi ces théorêmes n'avoient pas été donnés avec les autres. Mais les ayant de nouveau considérés avec plus de soin, j'ai trouvé les solutions qui m'avoient échappé.

Ce qui restoit des premiers théorêmes

regardoit le conoïde parabolique. Quant à ceux qui ont été découverts en dernier lieu, ils regardent le conoïde hyperbolique et les sphéroïdes.

Parmi les sphéroïdes, j'appelle les uns alongés et les autres aplatis.

Relativement au conoïde parabolique, on posoit ce qui suit :

Si une parabole tourne autour de son diamètre immobile jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, la figure comprise par la parabole s'appelle conoïde parabolique ; le diamètre immobile s'appelle l'axe du conoïde ; et le point où l'axe rencontre la surface du conoïde s'appelle le sommet du conoïde.

Si un plan touche un conoïde parabolique, et si l'on conduit un autre plan qui soit parallèle au plan tangent et qui retranche un certain segment du conoïde, la partie du plan coupant comprise par la section du conoïde, s'appelle la base du segment qui est coupé ; le point où l'autre plan touche le conoïde s'appelle le sommet, et la partie de la droite qui est menée du sommet du segment parallèlement à l'axe du conoïde et qui est comprise dans le conoïde, s'appelle l'axe du segment.

On proposoit d'examiner ce qui suit:

Pourquoi lorsque des segmens d'un conoïde parabolique sont coupés par un plan perpendiculaire sur l'axe, le segment retranché est-il égal à trois fois la moitié d'un cône qui a la même base et le même axe que ce segment?

Pourquoi lorsqu'un conoïde parabolique est coupé par deux plans conduits d'une manière quelconque, les segmens retranchés sont-ils entre eux en raison doublée de leurs axes?

Relativement au conoïde hyperbolique, on posoit ce qui suit:

Une hyperbole, son diamètre et ses asymptotes étant placés dans un même plan, si le plan dans lequel sont placées les lignes dont nous venons de parler tourne autour du diamètre immobile, jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avoit commencé à se mouvoir, il est évident que les asymptotes comprendront un cône droit dont le sommet sera le point où les asymptotes se rencontrent, et dont l'axe sera le diamètre immobile. La figure comprise par l'hyperbole s'appelle conoïde hyperbolique; le diamètre immobile s'appelle l'axe du conoïde; et le point de la surface du conoïde rencontré par l'axe s'appelle le sommet; le cône compris par les asymptotes s'appelle le cône contenant le conoïde; la droite comprise entre le sommet du conoïde et le sommet du cône s'appelle l'ajoutée à l'axe (α).

Si un plan touche un conoïde hyperbolique, et si l'on conduit un autre plan qui soit parallèle au premier ~~et qui~~ retranche un certain segment du conoïde, la partie du plan coupant comprise par la section du conoïde s'appelle la base du segment; le point où un des plans touche le conoïde s'appelle le sommet du segment; et la droite qui est comprise dans le segment et qui fait partie de celle qui est menée par le sommet du conoïde et par le sommet du cône qui contient le conoïde s'appelle l'axe du segment; et la droite qui est comprise entre les sommets dont nous venons de parler s'appelle l'ajoutée à l'axe.

Tous les conoïdes paraboliques sont semblables; et parmi les conoïdes hyperboliques, ceux dont les cônes contenans sont semblables s'appellent semblables (6).

On propose d'examiner ce qui suit:

Pourquoi lorsqu'un conoïde hyperbolique est coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe, le segment retranché est-il au cône qui a la même base et le même axe que le segment comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe?

Pourquoi lorsqu'un conoïde hyperbolique est coupé par un plan non perpendiculaire sur l'axe, le segment retranché est-il à la figure qui a la même base et le même axe que le segment, et qui est un segment de cône comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe?

Relativement aux sphéroïdes, nous posons ce qui suit:

Si une ellipse tourne autour de son grand diamètre immobile jusqu'à ce qu'elle soit revenue dans le même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, la figure produite par l'ellipse s'appelle sphéroïde alongé. Si l'ellipse tourne autour du petit diamètre immobile jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, la figure qui est décrite par l'ellipse s'appelle sphéroïde aplati; et le diamètre immobile s'appelle l'axe de ces deux sphéroïdes; le point de la surface du sphéroïde rencontré par l'axe s'appelle le sommet; le milieu ~~de l'axe~~ s'appelle le centre; et la droite perpendiculaire sur le milieu de l'axe s'appelle le diamètre.

Si des plans parallèles touchent un de ces sphéroïdes sans le couper, et si un autre plan parallèle aux plans tangens coupe le sphéroïde, la partie du plan coupant comprise dans les sphéroïdes s'appelle la base des segmens; les points où les plans parallèles touchent le sphéroïde s'appellent les sommets; et enfin les droites qui sont comprises dans les segmens et qui font partie de la droite qui joint leurs sommets s'appellent les axes des segmens.

On démontrera que les plans qui touchent un sphéroïde ne touchent sa surface qu'en un seul point, et que la droite qui joint les points de contacts passe par le centre du sphéroïde.

On appelle sphéroïdes semblables ceux dont les axes sont proportionnels aux diamètres.

Parmi les segmens de sphéroïdes et de conoïdes, on appelle semblables ceux qui, étant retranchés de figures semblables, ont des bases semblables, et dont les axes soit qu'ils soient perpendiculaires sur les plans des bases, soit qu'ils fassent des angles égaux avec les diamètres homologues des bases ont entre eux la même raison que les diamètres homologues de leurs bases.

On propose d'examiner ce qui suit, relativement aux sphéroïdes :

Pourquoi lorsqu'un de ces sphéroïdes est coupé par un plan conduit par son centre et perpendiculaire sur l'axe, chacun des segmens produits par cette section est-il double du cône qui a la même base et le même axe que le segment ?

Pourquoi lorsqu'un de ces sphéroïdes est coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe, mais non mené par le centre, le plus grand des segmens produits par cette section est-il au cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment?

Pourquoi le petit segment est-il au cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme une droite composée du demi-axe du sphéroïde et de l'axe du grand segment est à l'axe du grand segment?

Pourquoi lorsqu'un de ces sphéroïdes est coupé par un plan mené par son centre et non perpendiculaire sur l'axe, chacun des segmens produits par cette section est-il double de la figure qui a la même base et le même axe que le segment? Cette figure est un segment de cône.

Pourquoi lorsqu'un de ces sphéroïdes est coupé par un plan qui n'est point mené par le centre, ni perpendiculaire sur l'axe, le plus grand des segmens produits par cette section est-il à la figure qui a la même base et le même axe que le segment comme une droite composée de la moitié de celle qui joint les sommets des segmens et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment?

Pourquoi enfin le petit segment est-il à la figure qui a la même base et le même axe que le segment comme une droite composée de la moitié de celle qui joint les sommets des segmens et de la moitié de l'axe du grand segment est à l'axe du grand segment? Cette figure est aussi un segment de cône.

Les théorêmes dont nous venons de parler étant démontrés, à l'aide de ces théorêmes on trouve non-seulement plusieurs théorêmes, mais plusieurs problêmes. Tels sont, par exemple, les théorêmes suivans :

Les sphéroïdes semblables, et les segmens semblables des sphéroïdes et des conoïdes sont entre eux en raison triplée de leurs axes.

Les quarrés construits sur les diamètres des sphéroïdes égaux sont réciproquement proportionnels à leurs axes, et les sphéroïdes sont égaux entre eux lorsque les quarrés construits sur leurs diamètres sont réciproquement proportionnels aux axes.

Tel est aussi le problême suivant :

Un segment de sphéroïde ou de conoïde

étant donné, en retrancher un segment par un plan parallèle à un autre plan donné de manière que le segment produit par cette section soit égal à un cône, ou à un cylindre, ou à une sphère donnée.

Je vais d'abord exposer les théorêmes et tout ce qui est nécessaire pour démontrer les propositions dont je viens de parler, et j'écrirai ensuite les démonstrations de ces propositions. Sois heureux.

Si un cône est coupé par un plan qui rencontre tous ses côtés, la section sera ou un cercle ou une ellipse. Si la section est un cercle, il est évident que le segment retranché du côté du sommet sera un cône. Si la section est une ellipse, la figure retranchée du côté du sommet sera appelée un segment de cône. La base du segment sera le plan compris par l'ellipse. Son sommet sera le point qui est le sommet du cône, et son axe sera la ligne droite menée du sommet du cône au centre de l'ellipse.

Si un cylindre est coupé par deux plans parallèles qui rencontrent tous les côtés du cylindre, les sections seront ou des cercles ou des ellipses égales et semblables entre elles. Si les sections sont des cercles, il est évident que la figure comprise entre les plans parallèles est un cylindre. Si les sections sont des ellipses, la figure comprise entre les plans parallèles sera appelée un segment de cylindre. La base du segment sera l'un ou l'autre des plans compris dans les ellipses, son axe sera la droite qui joint les centres des ellipses, et qui fait partie de l'axe du cône.

PROPOSITION I.

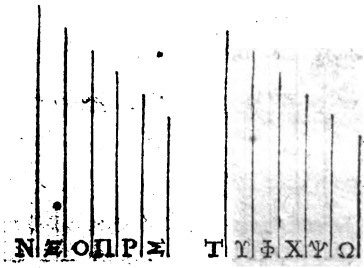
Si l'on a un certain nombre de quantités inégales qui se surpassent également et dont l'excès soit égal à la plus petite, et si l'on a d'autres quantités en nombre égal dont chacune soit égale à la plus grande des premières, la somme des quantités égales sera plus petite que le double de la somme des quantités qui se surpassent également ; et si l'on retranche la plus grande des quantités inégales, la somme des quantités égales sera plus grande que le double de la somme des quantités inégales restantes.

Cela est évident (α).

PROPOSITION II.

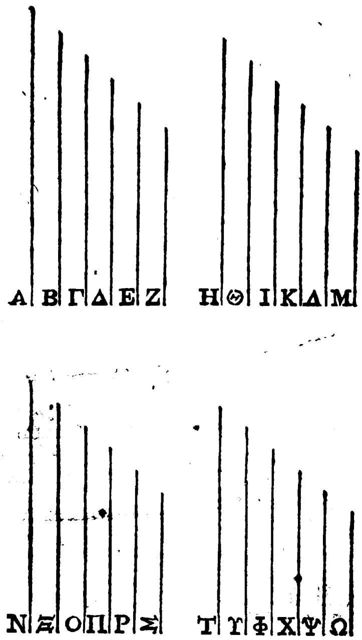
Si un certain nombre de quantités sont proportionnelles deux à deux à d'autres quantités semblablement arrangées et en nombre égal; si les premières, ou seulement quelques-unes d'entre elles sont comparées avec certaines autres quantités sous des raisons quelconques; et si les secondes quantités sont aussi comparées avec certaines autres quantités correspondantes sous les mêmes raisons, la somme des premières quantités sera à la somme des quantités avec lesquelles elles sont comparées comme la somme des dernières est à la somme des quantités avec lesquelles elles sont aussi comparées (α).

Soient certaines quantités Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Que ces quantités soient proportionnelles deux à deux à d'autres quantités Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ, en nombre égal; de manière que Α soit à Β comme Η est à Θ, que Β soit à Γ comme Θ est à Ι, et ainsi de suite. Que les quantités Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ soient comparées avec certaines autres quantités Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ correspondantes sous certaines raisons; et que les quantités Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ soient comparées avec certaines autres quantités correspondantes Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω



sous les mêmes raisons, de manière que Α soit à Ν comme Η est à Τ, et que Β soit à Ξ comme Θ est à Υ, et ainsi de suite. Il faut démontrer que la somme des quantités Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ est à la somme des quantités Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ comme la somme des quantités H, Θ, I, K, Λ, M est à la somme des quantités T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω.

Car puisque N est à A comme T est à H; que A est à B comme H est à Θ; et qu'en-



fin B est à Ξ comme Θ est à Υ, il s'ensuit que N est à Ξ comme T est à Υ. Pareillement Ξ sera à O comme Υ est à Φ, et ainsi de suite. Puisque la somme des quantités A, B, Γ, Δ, E, Z est à A comme la somme des quantités H, Θ, I, K, Λ, M est à H; que A est à N comme

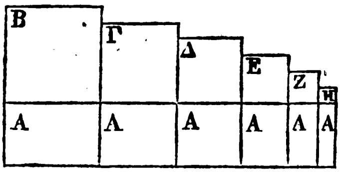
H est à T, et qu'enfin la quantité N est à la somme des quantités N, Ξ, O, Π, P, Σ comme la quantité T à la somme des quantités T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω; il est évident que la somme des quantités A, B, Γ, Δ, E, Z est à la somme des quantités N, Ξ, O, Π, P, Σ comme la somme des quantités H, Θ, I, K, Λ, M est à la somme des quantités T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω.

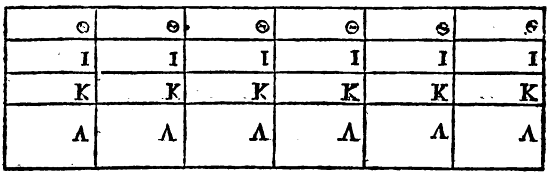
Si parmi les quantités A, B, Γ, Δ, E, Z, les quantités A, B, Γ, Δ, E seulement sont comparées avec les quantités N, Ξ, O, Π, P, la quantité Z n'étant point comparée avec une autre quantité, et si parmi les quantités H, Θ, I, K, Λ, M, les quantités H, Θ, I, K, Λ sont comparées avec les quantités correspondantes T, Υ, Φ, X, Ψ, la quantité M n'étant point comparée avec une autre quantité, il est encore évident que la somme des quantités A, B, Γ, Δ, E, Z est à la somme des quantités N, Ξ, O, Π, P comme la somme des quantités H, Θ, I, K, Λ, M est à la somme des quantités T, Υ, Φ, X, Ψ (6).

PROPOSITION III.

Si l'on a un certain nombre de lignes égales entre elles ; si l'on applique à chacune d'elles une surface dont la partie excédente soit un quarré. Si les côtés des quarrés se surpassent également et si leur excès est égal au côté du plus petit côté quarré ; si de plus, on a d'autres surfaces en même nombre que les premières et égales chacune à la plus grande de celles-ci, la raison de la somme des surfaces égales à la somme des surfaces inégales sera moindre que la raison d'une droite composée du côté du plus grand quarré et d'une des lignes égales à une droite composée du tiers du côté du plus grand quarré et de la moitié d'une des lignes égales : et la raison de la somme des surfaces égales à la somme des surfaces inégales, la plus grande exceptée, sera plus grande que cette même raison (α).

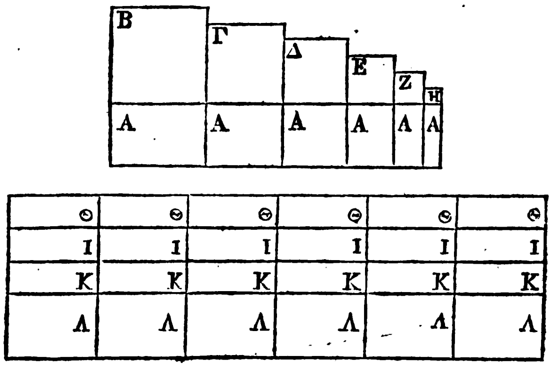
Soit un certain nombre de lignes égales désignées par A ; qu'à chacune d'elles soit appliquée une surface dont la partie excédente soit un quarré. Que les côtés B, Γ, Δ, E, Z, H de ces quarrés se surpassent également entre eux ; que leur excès soit égal au côté du plus petit quarré ; que B soit le plus grand côté et H le plus petit. Soient





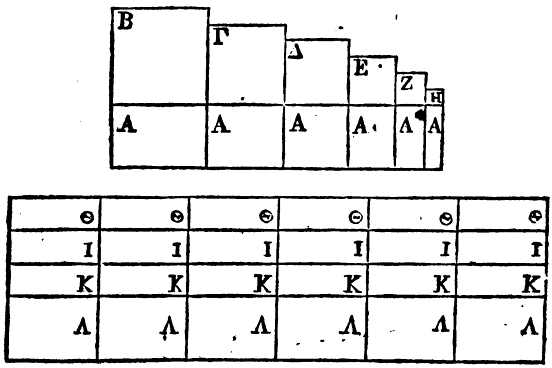
de plus d'autres surfaces dans chacune desquelles se trouvent les lettres ΘΙΚΛ ; que ces surfaces soient en même nombre que les premières, que chacune d'elles soit égale à la plus grande, c'est-à-dire à celle qui est appliquée sur AB. Que la ligne ΘΙ soit égale à A et la ligne ΚΛ égale à B ; que chacune des lignes ΘΙ soit double de Ι et que chacune des lignes ΚΛ soit triple de Κ. Il faut démontrer que la raison de la somme des surfaces dans lesquelles se trouvent les lettres ΘΙΚΛ à la somme des surfaces AB, AΓ, AΔ ;

AE, AZ, AH est moindre que la raison de la ligne ΘΙΚΛ à la ligne ΙΚ; et que la raison de la somme des surfaces égales à la somme des surfaces inégales, la plus grande excep-



tée, est plus grande que cette même raison.

En effet, les surfaces où se trouve la lettre A se surpassent également entre elles, et leur excès est égal à la plus petite; car les surfaces appliquées sur les droites A et les largeurs de ces surfaces se surpassent également; de plus les surfaces où se trouvent les lettres ΘΙ sont en même nombre que ces surfaces inégales, et chacune d'elles est égale à la plus grande de celles-ci. Donc la somme des surfaces où se trouvent les lettres ΘΙ sera plus petite que le double de la somme des surfaces où se trouve la lettre A ; et si l'on retranche la plus grande des surfaces où se trouve la lettre A, la somme des surfaces où se trouvent les lettres ΘΙ sera plus grande que la somme des surfaces restantes où se trouve la lettre A (1). Donc la somme des surfaces où se trouve la lettre I est plus petite que la somme des surfaces où se trouve la lettre A, et plus grande que la somme de ces surfaces, si l'on en retranche la plus grande. On a de plus certaines lignes B, Γ, Δ, E, Z, H qui se surpassent également et dont l'excès est égal à la plus petite, et l'on a aussi d'autres lignes où se trouvent les lettres KΛ qui sont en même nombre que les premières, et dont chacune est égale à la plus grande de celles-ci. Donc la somme des quarrés décrits sur les droites qui sont chacune égales à la plus grande, est plus petite que le triple de la somme des quarrés décrits sur les droites qui se surpassent également, et si l'on retranche le quarré décrit sur la plus grande ligne des droites inégales, la somme des quarrés décrits sur les droites qui sont égales chacune à la plus grande des droites inégales, sera plus grande que le triple des quarrés restans, ainsi que cela est démontré dans le livre des Hélices (*prop.* 10, *cor.*) (ϛ). Donc la somme des surfaces où se trouve la lettre K est plus petite que la somme des



surfaces où se trouvent les lettres B, Γ, Δ, E, Z, H et plus grande que la somme des surfaces où se trouvent les lettres Γ, Δ, E, Z, H. Donc la somme des surfaces où se trouvent les lettres IK est plus petite que la somme des surfaces où se trouvent les lettres AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH et plus grande que la somme des surfaces où se trouvent les lettres AΓ, AΔ, AE, AZ, AH. Il est donc évident que la raison de la somme des surfaces dans lesquelles sont les lettres ΘI, KΛ à la somme des surfaces dans lesquelles sont les lettres

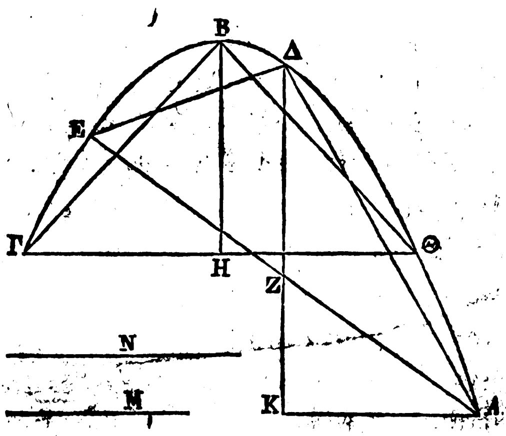
AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH est moindre que la raison de la ligne ΘΛ à la ligne IK; et que si l'on retranche la surface où se trouvent les lettres AB, la première raison sera plus grande que la seconde (γ).

Si des droites menées du même point sont tangentes à une section quelconque d'un cône, et si d'autres droites parallèles à ces tangentes se coupent mutuellement dans la section du cône, les surfaces comprises sous les segmens de ces droites seront entre elles comme les quarrés des tangentes. La surface comprise sous les segmens de l'une des droites correspond au quarré de la tangente parallèle à cette droite. Cela est démontré dans les Elémens (δ).

PROPOSITION IV.

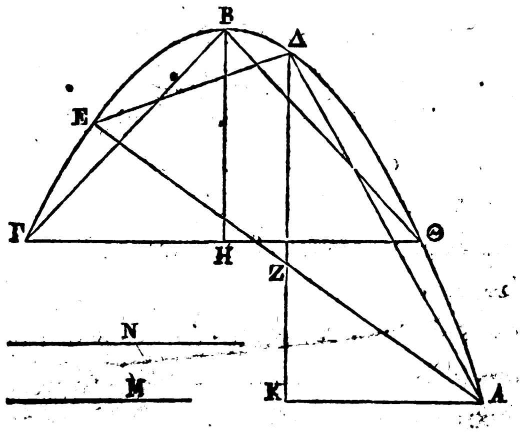
Si d'une même parabole, on retranche deux segmens quelconques qui aient des diamètres égaux, ces segmens seront égaux entre eux, ainsi que les triangles qui leur sont inscrits et qui ont la même base et la même hauteur que les segmens. J'appelle diamètre d'un segment quelconque une droite qui coupe en deux parties égales toutes les parallèles à la base.

Que ΑΒΓ soit une parabole; qu'on re-



tranche de cette parabole les deux segmens ΑΔΕ, ΘΒΓ. Que ΔΖ soit le diamètre du segment ΑΔΕ et ΒΗ celui du segment ΘΒΓ; que les diamètres ΔΖ, ΒΗ soient égaux entre eux. Il faut démontrer que les segmens ΑΔΕ, ΘΒΓ sont égaux entre eux, ainsi que les triangles qui leur sont inscrits de la manière que nous l'avons dit.

D'abord, que la droite ΘΓ qui retranche un des segmens soit perpendiculaire sur le diamètre de la parabole. Que la droite Μ soit le paramètre (α), et du point A conduisons la droite AK perpendiculaire sur ΔZ. Puisque la droite ΔZ est le diamètre du segment, la droite AE est coupée en deux parties égales au point Z, et cette même droite ΔZ est parallèle au diamètre de la parabole. La droite ΔZ coupe donc en deux parties égales toutes les parallèles à la droite AE (β). Que le quarré de AZ soit au quarré de AK comme N est à M. Les quarrés des ordonnées parallèles à AE seront égaux aux surfaces comprises sous la droite N et sous les abscisses; ce qui est démontré dans les élémens des sections coniques (γ). Le quarré de AZ est donc égal à la surface comprise sous N et ΔZ. Mais le quarré de ΘH est égal à la surface comprise sous la droite M et sous la droite BH, parce que ΘH est perpendiculaire sur l'axe (δ); donc le quarré de AZ est au quarré de ΘH comme N est à M; parce que les droites ΔZ, BH sont supposées égales. Mais le quarré de AZ est au quarré de AK comme N est à M; donc les droites ΘH, AK sont égales. Mais les droites BH, ΔZ sont aussi égales entre elles; donc la surface comprise sous ΘH, BH est égale à la surface comprise sous AK, ΔZ; donc le triangle ΘΗΒ est égal au triangle ΔΑΖ; donc leurs doubles sont aussi égaux. Mais le segment ΑΔΕ est égal à quatre fois le tiers du triangle ΑΔΕ et le segment ΘΒΓ égal à quatre fois le



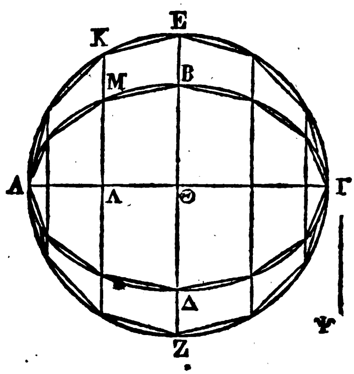
tiers du triangle ΘΒΓ (*quadr. de la Parabole, prop.* 24); il est donc évident que non-seulement les segmens, mais encore les triangles inscrits dans les segmens sont égaux entre eux.

Si aucune des droites qui retranchent les segmens n'est perpendiculaire sur le diamètre, on prendra sur le diamètre de la parabole une droite égale au diamètre d'un des segmens, et l'on menera par l'extrémité de cette droite une perpendiculaire sur le diainètre de la parabole. Ce nouveau segment sera égal à chacun des deux autres segmens. Donc ce qui avoit été proposé est évident.

PROPOSITION V.

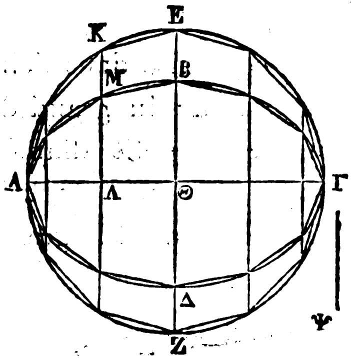
La surface comprise dans l'ellipse est au cercle décrit autour du grand diamètre de l'ellipse comme le petit diamètre est au grand, c'est-à-dire, au diamètre du cercle.

Soit l'ellipse ΑΒΓΔ dont le grand diamètre



est la droite ΑΓ et le petit la droite ΒΔ. Décrivons un cercle autour de ΑΓ comme diamètre. Il faut démontrer que la surface comprise dans l'ellipse est à ce cercle comme ΒΔ est à ΓΑ, c'est-à-dire à ΕΖ.

Que le cercle Ψ soit au cercle AEΓZ comme BΔ est à EZ. Je dis que le cercle Ψ est égal à la surface comprise dans l'ellipse. Car si le cercle Ψ n'est pas égal à la surface comprise



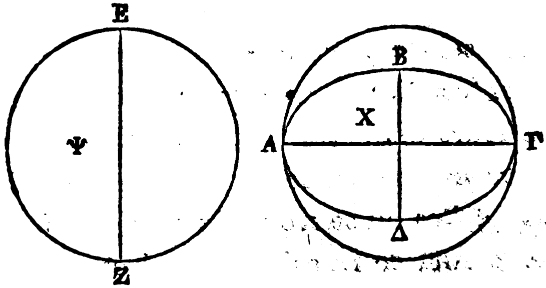
dans l'ellipse, supposons d'abord qu'il soit plus grand, si cela est possible. On peut inscrire dans le cercle Ψ un polygone dont le nombre des angles soit pair et qui soit plus grand que la surface comprise dans l'ellipse ABΓΔ. Supposons qu'il soit inscrit. Inscrivons dans le cercle AEΓZ un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle Ψ. Menons des angles de ce polygone des perpendiculaires sur le diamètre AΓ, et joignons par des droites les points où ces perpendiculaires rencontrent l'ellipse; nous aurons un certain polygone inscrit dans l'ellipse qui sera au polygone inscrit dans le cercle ΑΕΓΖ comme ΒΔ est à ΕΖ. Car les perpendiculaires ΕΘ, ΚΛ étant coupées proportionnellement aux points Μ, Β, il est évident que le trapèze ΛΕ sera au trapèze ΘΜ comme ΘΕ est à ΒΘ (α). Par la même raison, les autres trapèzes placés dans le cercle sont aux autres trapèzes placés dans l'ellipse chacun à chacun comme ΕΘ est à ΒΘ. Mais les triangles placés dans le cercle vers les points Α, Γ sont aussi aux triangles placés dans l'ellipse vers ces mêmes points chacun à chacun comme ΕΘ sera à ΒΘ. Donc le polygone entier inscrit dans le cercle sera au polygone entier inscrit dans l'ellipse comme ΕΖ est à ΒΔ. Mais le polygone inscrit dans le cercle ΑΕΓΖ est au polygone inscrit dans le cercle Ψ comme ΕΖ est à ΒΔ, parce que ces cercles sont entre eux comme ces polygones. Donc le polygone inscrit dans le cercle Ψ est égal au polygone inscrit dans l'ellipse: ce qui ne peut être, car on avoit supposé le polygone inscrit dans le cercle Ψ plus grand que la surface comprise dans l'ellipse.

Supposons enfin que le cercle Ψ soit plus petit. On peut inscrire dans l'ellipse un polygone dont le nombre des côtés soit pair et qui soit plus grand que le cercle Ψ (ℰ). Que ce polygone soit inscrit. Prolongeons jusqu'à la circonférence du cercle les perpendiculaires menées des angles du polygone sur le diamètre ΑΓ. On aura encore un certain polygone inscrit dans le cercle ΑΕΓΖ qui sera au polygone inscrit dans l'ellipse comme ΕΖ est à ΒΔ. Inscrivons dans le cercle Ψ un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle ΑΕΓΖ. Nous démontrerons que le polygone inscrit dans le cerle Ψ est égal au polygone inscrit dans l'ellipse. Ce qui est impossible. Donc le cercle Ψ n'est pas plus petit que l'ellipse. Il est donc évident que la surface comprise dans l'ellipse est au cercle ΑΕΓΖ comme ΒΔ est à ΕΖ.

PROPOSITION VI.

La surface comprise dans l'ellipse est à un cercle quelconque comme la surface comprise sous les deux diamètres de l'ellipse est au quarré du diamètre du cercle.

Que la surface comprise dans l'ellipse soit celle où se trouve la lettre X. Que les diamètres de l'ellipse soient les droites AΓ, BΔ et que AΓ soit le plus grand. Que le cercle soit



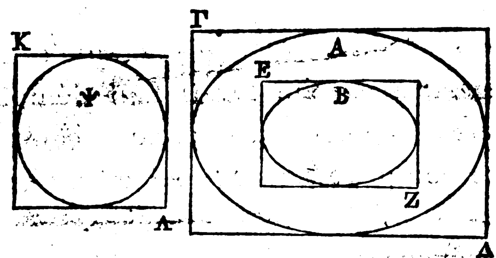
celui où se trouve la lettre Ψ, et que son diamètre soit la droite EZ. Il faut démontrer que la surface X est au cercle Ψ comme la surface comprise sous AΓ, BΔ est au quarré de EZ.

Décrivons un cercle autour de AΓ comme diamètre. La surface X sera au cercle dont le diamètre est la droite AΓ comme la surface comprise sous AΓ, BΔ est au quarré de AΓ; car on a démontré que l'ellipse est au cercle comme BΔ est à AΓ (5). Mais le cercle qui a pour diamètre AΓ est au cercle qui a pour diamètre EZ comme le quarré de AΓ est au quarré de EZ (*a*); il est donc évident que la surface X est au cercle Ψ comme la surface comprise sous AΓ, BΔ est au quarré de EZ.

PROPOSITION VII.

Les surfaces comprises dans les ellipses sont entre elles comme les surfaces comprises sous leurs diamètres.

Que les surfaces comprises dans les ellipses soient celles où se trouvent les lettres A, B. Que la surface ΓΔ soit celle qui est comprise



sous les diamètres de l'ellipse qui comprend la surface A et que la surface EZ soit celle qui est comprise sous les diamètres de l'autre ellipse. Il faut démontrer que la surface A est à la surface B comme ΓΔ est à EZ.

Prenons le cercle où se trouve la lettre Ψ. Que le quarré construit sur son diamètre soit KΛ. La surface A sera au cercle Ψ comme

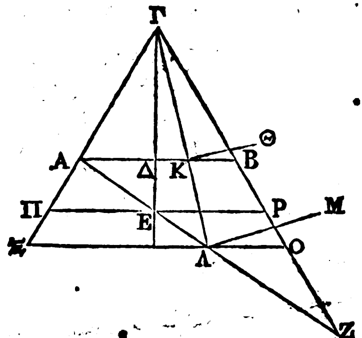
ΓΔ est à ΚΛ, et le cercle Ψ sera à la surface B comme ΚΛ est à EZ (α). Il est donc évident que la surface A est à la surface B comme ΓΔ est à EZ.

Il suit évidemment de-là que les surfaces contenues dans des ellipses semblables sont entre elles comme les quarrés des diamètres homologues.

PROPOSITION VIII.

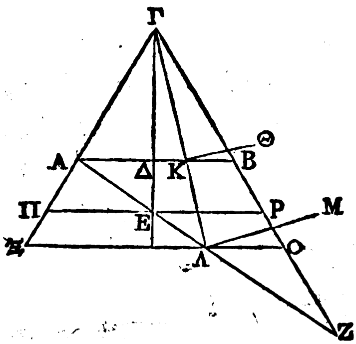
Etant données une ellipse et une ligne élevée du centre de cette ellipse perpendiculairement sur son plan, il est possible de trouver un cône qui ait pour sommet l'extrémité de cette perpendiculaire et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

Soient données une ellipse et une ligne élevée du centre de l'ellipse perpendiculairement sur son plan. Faisons passer un plan par cette perpendiculaire et par le petit diamètre. Que le petit diamètre soit la droite AB. Que le centre de l'ellipse soit le point Δ; que la perpendiculaire élevée du centre de l'ellipse soit la droite ΓΔ et que son extrémité soit le point Γ. Supposons que l'ellipse donnée ait été décrite autour de AB comme diamètre dans un plan perpendiculaire sur ΓΔ. Il faut trouver un cône qui ait pour sommet le point Γ et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.



Du point Γ aux points A, B conduisons deux droites et que ces droites soient prolongées. Du point A, conduisons la droite AZ, de manière que la surface comprise sous AE, EZ soit au quarré de EΓ comme le quarré de la moitié du grand diamètre est au quarré de ΔΓ; ce qui peut se faire, parce que la raison de la surface comprise sous AE, EZ au quarré de EΓ est plus grande que la raison de la surface comprise sous AΔ, ΔB au quarré de ΔΓ (*a*). Par la droite AZ faisons passer un plan perpendiculaire sur le plan dans lequel se trouvent les droites ΓΑ, ΑΖ. Décrivons dans ce plan un cercle autour de ΑΖ comme diamètre; et que ce cercle soit la base d'un cône qui ait pour sommet le point Γ. On démontrera que l'ellipse donnée se trouve dans la surface de ce cône.

Car si l'ellipse ne se trouve pas dans la surface de ce cône, il faut qu'il y ait quelque point dans l'ellipse qui ne soit pas dans la surface de ce cône. Supposons qu'on ait pris dans l'ellipse un point quelconque Θ qui ne soit pas dans la surface du cône; et du point Θ, conduisons ΘΚ perpendiculaire sur ΑΒ. Cette droite sera perpendiculaire sur le plan ΓΑΖ. Du point Γ au point Κ conduisons une droite et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle rencontre ΑΖ en un point Λ, et ensuite du point Λ et dans le cercle décrit autour de ΑΖ élevons sur ΑΖ la perpendiculaire ΛΜ. Supposons que le point Μ soit dans la circonférence de ce même cercle; et par le point Λ et le point Ε, conduisons les droites ΞΟ, ΠΡ parallèles à ΑΒ. Puisque la surface comprise sous ΑΕ, ΕΖ est au quarré de ΕΓ comme le quarré de la moitié du grand diamètre est au quarré de ΔΓ, et que le quarré de ΕΓ est à la surface comprise sous ΕΠ, ΕΡ comme le quarré de ΔΓ est à la surface comprise sous ΑΔ, ΔΒ, la surface comprise sous ΑΕ, ΕΖ sera à la surface comprise sous ΠΕ, ΕΡ comme le quarré de la moitié du grand

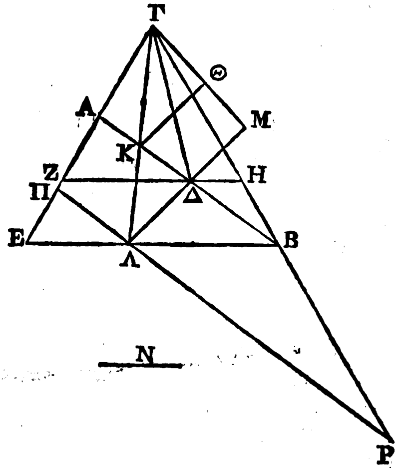


diamètre est à la surface comprise sous ΑΔ, ΒΔ (ϐ). Mais la surface comprise sous ΑΕ, ΕΖ est à la surface comprise sous ΕΠ, ΕΡ comme la surface comprise sous ΑΛ, ΛΖ est à la surface comprise sous ΛΞ, ΛΟ (γ); et le quarré de la moitié du grand diamètre est à la surface comprise sous ΑΔ, ΔΒ comme le quarré de ΘΚ est à la surface comprise sous ΑΚ, ΚΒ (δ). Donc la surface comprise sous ΑΛ, ΛΖ est à la surface comprise sous ΞΛ, ΛΟ comme le quarré de ΘΚ est à la surface comprise sous ΑΚ, ΚΒ. Mais la surface comprise sous ΞΛ, ΛΟ est au quarré de ΓΛ comme la surface comprise sous AK, KB est au quarré de ΓK (ε). Donc la surface comprise sous AΛ, ΛZ est au quarré de ΓΛ comme le quarré de ΘK est au quarré de KΓ. Mais le quarré de ΛM est égal à la surface comprise sous AΛ, ΛZ, car on a mené la droite ΛM perpendiculaire dans le demi-cercle décrit autour de AZ. Donc le quarré de ΛM est au quarré de ΛΓ comme le quarré de ΘK est au quarré de KΓ. Donc les points Γ, Θ, M sont dans une même droite. Mais la droite ΓM est dans la surface du cône; il est donc évident que le point Θ est dans la surface du cône. Mais on avoit supposé qu'il n'y étoit pas. Il n'est donc aucun point de l'ellipse qui ne soit dans la surface du cône dont nous avons parlé. Donc l'ellipse est toute entière dans la surface de ce cône.

PROPOSITION IX.

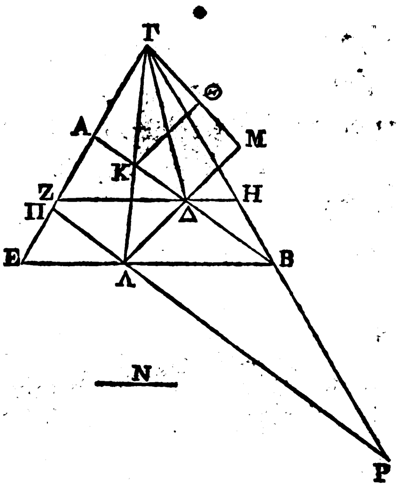
Étant données une ellipse et une oblique élevée de son centre dans le plan qui passe par un de ses diamètres et qui est perpendiculaire sur le plan de l'ellipse, il est possible de trouver un cône qui ait pour sommet l'extrémité de cette oblique et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

Que la droite ΒΑ soit un des diamètres de



l'ellipse; que le centre soit le point Δ, et que l'oblique élevée du centre, ainsi qu'il a été dit, soit ΔΓ. Supposons que l'on ait décrit l'ellipse donnée autour de ΑΒ comme centre, dans un plan perpendiculaire sur celui où se trouvent les droites ΑΒ, ΓΔ. Il faut trouver un cône qui ait son sommet au point Γ, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

Les droites ΑΓ, ΓΒ ne sont pas égales*, car la droite ΓΔ n'est pas perpendiculaire sur le plan dans lequel se trouve l'ellipse. Que la droite ΕΓ soit égale à la droite ΓΒ, et que la droite Ν soit égale à la moitié de l'autre diamètre qui est le diamètre conjugué de ΑΒ et par le point Δ menons la droite ΖΗ parallèle à ΕΒ. Par la droite ΕΒ faisons passer un plan perpendiculaire sur celui où se trouvent les droites ΑΓ, ΓΒ; et autour de ΕΒ comme diamètre décrivons un cercle ou une ellipse (α). Décrivons un cercle, si le quarré de Ν est égal à la surface comprise sous ΖΔ, ΔΗ (ϐ). Si le contraire arrive, décrivons une ellipse de manière que le quarré de son autre diamètre soit au quarré de ΕΒ comme le quarré de Ν est à la surface comprise sous ΖΔ, ΔΗ (γ). Prenons ensuite un cône dont le sommet soit le point Γ et dans la surface duquel se trouvent le cercle ou l'ellipse décrits autour de ΕΒ comme diamètre; ce qui est possible, parce que la droite menée du point Γ sur le milieu de ΕΒ est perpendiculaire sur le plan conduit par la droite ΕΒ. L'ellipse décrite autour du diamètre ΑΒ se trouvera aussi dans la surface de ce cône; car si cela n'est point, il y aura quelque point dans l'ellipse qui ne sera pas dans la surface du cône. Supposons donc qu'on ait pris un point quelconque Θ dans l'ellipse qui ne soit pas dans la surface du cône; et par ce point Θ



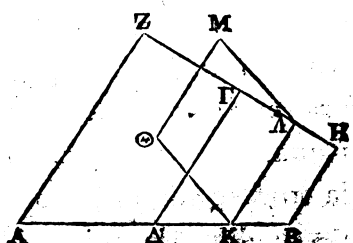
conduisons la droite KΘ perpendiculaire sur AB; menons la droite ΓK, et prolongeons-la de manière qu'elle rencontre EB au point Λ. Par le point Λ et dans le plan perpendiculaire qui passe par EB, menons une droite ΛM perpendiculaire sur EB; supposons que le point M soit dans la surface du cône et par le point Λ menons ΠP parallèle à AB. Le quarré de N sera à la surface comprise sous

ZΔ, ΔH comme le quarré de AM est à la surface comprise sous EA, AB (δ). Mais la surface comprise sous ZΔ, ΔH est à la surface comprise sous AΔ, ΔB comme la surface comprise sous EA, AB est à la surface comprise sous ΠA, AP (ε). Donc le quarré de N est à la surface comprise sous AΔ, ΔB comme le quarré de AM est à la surface comprise sous ΠA, AP. Mais le quarré de N est à la surface comprise sous AΔ, ΔB comme le quarré de ΘK est à la surface comprise sous AK, KB; parce que dans une même ellipse on a mené des perpendiculaires sur le diamètre AB. Donc la raison du quarré AM à la surface comprise sous ΠA, AP est la même que la raison du quarré de ΘK à la surface comprise sous AK, KB. Mais la raison de la surface comprise sous ΠA, AP au quarré de AΓ est la même que la raison de la surface comprise sous AK, KB au quarré de KΓ; donc la raison du quarré de AM au quarré de AΓ est la même que la raison du quarré de ΘK au quarré de KΓ. Donc les points Γ, Θ, M sont en ligne droite. Mais la droite ΓM est dans la surface du cône; donc le point Θ est aussi dans la surface du cône. Mais on avoit supposé qu'il n'y étoit pas ; donc ce qu'il falloit démontrer est évident.

PROPOSITION X.

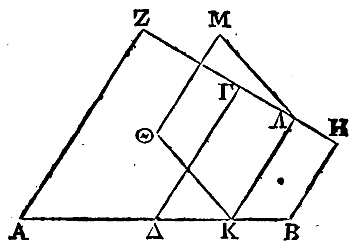
Étant données une ellipse et une oblique élevées de son centre dans un plan qui passe par un de ses diamètres et qui est perpendiculaire sur le plan de l'ellipse, on peut trouver un cylindre dont l'axe soit sur cette oblique et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

Que BA soit le diamètre conjugué de l'ellipse ; que le point Δ en soit le centre et que



ΓΔ soit la droite élevée du centre ainsi qu'il a été dit. Supposons qu'on ait décrit l'ellipse donnée autour de AB comme diamètre, dans un plan perpendiculaire sur le plan dans lequel sont les droites AB, ΓΔ. Il faut trouver un cylindre dont l'axe soit sur la droite ΓΔ et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

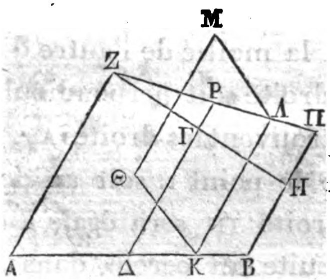
Des points A, B menons les droites AZ, BH parallèles à ΓΔ. L'autre diamètre de l'ellipse sera ou égal à l'intervalle des droites AZ, BH, ou plus grand, ou plus petit. Qu'il soit d'abord égal à la droite ZH menée perpendiculairement sur ΓΔ. Par la droite ZH, conduisons un plan perpendiculaire sur ΓΔ, et dans ce plan décrivons un cercle autour de ZH comme diamètre, et que ce cercle soit la base d'un cylindre qui ait pour axe la droite ΓΔ. L'ellipse donnée sera dans la surface de ce cylindre. Car si elle n'y est pas, il y aura quelque point dans cette ellipse qui ne sera point dans la surface du cylindre. Supposons qu'on ait pris un point quelconque Θ dans l'ellipse qui ne soit pas dans la surface du cylindre. Du point Θ, menons la droite ΘK perpendiculaire sur AB. Cette droite sera perpendiculaire sur le plan dans lequel se trouvent les droites AB, ΓΔ. Du point K menons la droite KΛ parallèle à ΓΔ, et du point Λ et dans le plan du cercle décrit autour de ZH comme diamètre, élevons la droite ΛM perpendiculaire sur ZH. Supposons que le point M est dans la demi-circonférence décrite autour de ZH comme diamètre. La raison du quarré de la perpendiculaire ΘK à la surface comprise sous AK, KB sera la même



que la raison du quarré de ZΓ à la surface comprise sous AΔ, ΔB; parce que ZH est égal à l'autre diamètre de l'ellipse (α). Mais la raison de la surface comprise sous ZΛ, ΛH à la surface comprise sous AK, KB est aussi la même que la raison du quarré de ZΓ au quarré du demi-diamètre AΔ de l'ellipse (ϐ). Donc la surface comprise sous ZΛ, ΛH est égale au quarré de ΘK. Mais le quarré de ΛM est aussi égal à cette surface; donc les perpendiculaires ΘK, MΛ sont égales. Donc les droites ΛK, MΘ sont parallèles. Donc les droites ΔΓ, MΘ sont aussi parallèles. Donc ΘM est dans la surface du cylindre; parce que cette droite est menée parallèlement à l'axe du point M qui est dans la surface du cylindre. Il est donc évident que le point Θ est aussi dans la surface du cylindre. Mais on avoit supposé qu'il n'y étoit pas. Donc ce qu'il falloit démontrer est évident.

Il est encore évident que le cylindre qui comprend l'ellipse sera droit, si l'autre diamètre est égal à la distance des droites qui sont menées des extrémités du diamètre AB parallèlement à l'oblique élevée menée du centre.

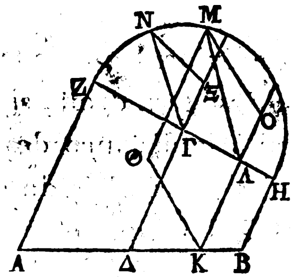
Que l'autre diamètre soit plus grand que ZH; et supposons qu'il soit égal à ΠZ. Par la



droite ΠZ, conduisons un plan perpendiculaire sur celui où se trouvent les droites AB, ΓΔ; et dans ce plan et autour de ΠZ comme diamètre décrivons un cercle et que ce cercle soit la base d'un cylindre qui ait pour axe la droite ΔP.

On démontrera de la même manière que l'ellipse est dans la surface de ce cylindre.

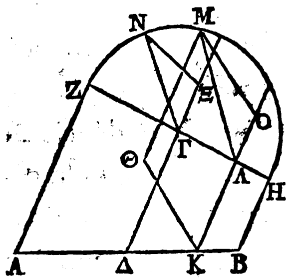
Que l'autre diamètre soit plus petit que



ZH et que l'excès du quarré de ZΓ sur le quarré de la moitié de l'autre diamètre soit le quarré de ΓΞ. Du point Ξ menons la droite ΞN égale à la moitié de l'autre diamètre, et que cette droite soit perpendiculaire sur le plan où se trouvent les droites AB, ΓΔ, et supposons que le point N soit au-dessus de ce plan. La droite ΓN sera égale à ΓZ (δ). Décrivons ensuite un cercle dans le plan où se trouvent les droites ZH, ΓN, autour de ZH comme diamètre; ce cercle passera par le point N. Que ce cercle soit la base d'un cylindre qui ait pour axe la droite ΓΔ. Je dis que l'ellipse sera dans la surface de ce cylindre.

Car si l'ellipse n'est pas dans la surface de ce cylindre, il y aura quelque point dans l'ellipse qui ne sera pas dans cette surface. Prenons un point quelconque Θ dans cette ellipse; de ce point menons la droite ΘΚ perpendiculaire sur ΑΒ; du point Κ menons la droite ΚΛ parallèle à ΓΔ, et du point Λ et dans le demi-cercle décrit autour de ΖΗ comme diamètre, menons la droite ΛΜ perpendiculaire sur ΖΗ. Supposons que le point Μ soit dans la demi-circonférence décrite autour de ΖΗ; et de ce point conduisons la perpendiculaire ΜΟ sur la droite ΚΛ prolongée. Cette droite sera perpendiculaire sur le plan où se trouvent les droites ΑΒ, ΓΔ; parce que ΚΛ est perpendiculaire sur ΖΗ. Donc le quarré de ΜΟ est au quarré de ΜΛ comme le quarré de ΞΝ est au quarré de ΝΓ (ε). Mais le quarré de ΜΛ est à la surface comprise sous ΑΚ, ΚΒ comme le quarré de ΓΝ est au quarré de ΑΔ; car le quarré de ΜΛ est égal à la surface comprise sous ΛΖ, ΛΗ; et le quarré de ΓΝ est égal au quarré de ΓΖ. Donc le quarré de ΜΟ est à la surface comprise sous ΑΚ, ΚΒ comme le quarré de ΝΞ est au quarré de ΑΔ. Mais le quarré de

KΘ est à la surface comprise sous AK, KB comme le quarré de ΞN est au quarré de AΔ, parce que ΞN est égal à la moitié de l'autre diamètre (γ). Il est donc évident que les



perpendiculaires MO, OK sont égales et par conséquent les droites KO, ΘM (ζ). Mais la droite MΘ est parallèle à l'axe du cylindre, et le point M est dans la surface de ce même cylindre; donc le point Θ est aussi dans cette surface, mais on avoit supposé qu'il n'y étoit pas; il est donc évident que l'ellipse est nécessairement dans la surface du cylindre.

PROPOSITION XI.

Il a été démontré par ceux qui ont vécu avant nous que deux cônes sont entre eux en raison composée des bases et des hauteurs. On démontrera de la même manière que deux segmens quelconques de cône sont entre eux en raison composée des bases et des hauteurs. On démontrera aussi qu'un segment quelconque de cylindre est triple du segment de cône qui a la même base et la même hauteur que le premier segment, de la même manière que l'on démontre qu'un cylindre est le triple d'un cône qui a la même base et la même hauteur (α).

PROPOSITION XII.

Si un conoïde parabolique est coupé par un plan conduit par l'axe ou parallèlement à l'axe, la section sera une parabole, et cette parabole sera la même que celle qui comprend le conoïde. Son diamètre sera la commune section du plan coupant et de celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe. Si ce conoïde est coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe, la section sera un cercle ayant son centre dans l'axe.

Si un conoïde hyperbolique est coupé par un plan conduit par l'axe ou parallèlement à l'axe ou enfin par le sommet du cône qui comprend le conoïde, la section sera une hyperbole. Si le plan coupant passe par l'axe, l'hyperbole sera la même que celle qui comprend le conoïde, et si le plan coupant est parallèle à l'axe, l'hyperbole sera semblable à celle qui comprend le conoïde; et enfin si le plan coupant passe par le sommet du cône qui comprend le conoïde, l'hyperbole ne sera pas semblable à l'hyperbole qui comprend le conoïde. Le diamètre de l'hyperbole sera la commune section du plan coupant et de celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe. Si le plan coupant est perpendiculaire sur l'axe, la section sera un cercle ayant son centre dans l'axe du conoïde.

Si un sphéroïde alongé ou aplati est coupé par un plan conduit par l'axe ou parallèlement à l'axe, la section sera une ellipse. Si le plan coupant passe par l'axe, l'ellipse sera la même que celle qui comprend le sphéroïde; et si le plan coupant est parallèle à l'axe, elle sera semblable à celle qui comprend le sphéroïde. Le diamètre sera la commune section du plan coupant et de celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe.

Si le plan coupant est perpendiculaire sur l'axe, la section sera un cercle ayant son centre dans l'axe.

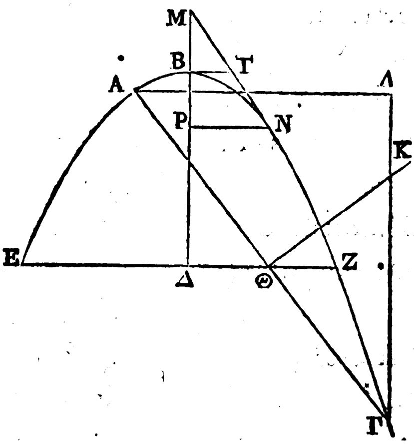
Si chacune des figures dont nous venons de parler est coupée par un plan mené par l'axe, les perpendiculaires menées sur le plan coupant des points qui sont dans la surface de ces figures et non dans la section tombent en dedans de la section de la figure.

Les démonstrations de toutes ces propositions sont connues (α).

PROPOSITION XIII.

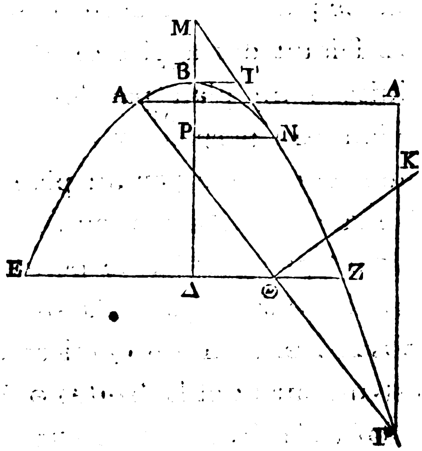
Si un conoïde parabolique est coupé par un plan qui ne soit pas conduit par l'axe, ni parallèle à l'axe, ni perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse dont le grand diamètre sera la section du plan coupant par celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe du conoïde; et le petit diamètre sera égal à l'intervalle des droites menées parallèlement à l'axe par les extrémités du grand diamètre.

Coupons un conoïde parabolique par un plan, comme nous l'avons dit; coupons ensuite le conoïde par l'axe par un autre plan perpendiculaire sur le plan coupant, que la section du conoïde soit la ligne ABΓ; que la section du plan coupant par le second plan



soit la droite AΓ; et que BΔ soit l'axe du conoïde et le diamètre de la section par l'axe. Il faut démontrer que la section du conoïde par un plan conduit par la droite AΓ est une ellipse; que son grand diamètre est la droite AΓ, et que son petit diamètre est égal à la droite AΛ: la droite ΓΛ étant parallèle à BΔ et la droite AΛ perpendiculaire sur ΓΛ.

Supposons qu'on ait pris dans la section un point quelconque K. Du point K conduisons la droite ΚΘ perpendiculaire sur ΓΑ. La droite ΚΘ sera perpendiculaire sur le plan dans lequel se trouve la parabole ΑΓΒ ; parce que le plan coupant est aussi perpendiculaire sur ce même plan. Par le point Θ menons la droite ΕΖ faisant des angles droits avec ΒΔ, et conduisons un plan par les droites ΕΖ, ΚΘ. Ce plan sera perpendiculaire sur ΒΔ ; et le conoïde sera coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe. La section sera donc un cercle ayant pour centre le point Δ. Donc le quarré de ΚΘ sera égal à la surface comprise sous ΖΘ, ΘΕ ; car un demi-cercle ayant été construit sur ΕΖ et la droite ΚΘ étant perpendiculaire, la droite ΚΘ sera une moyenne proportionnelle (κ), et son quarré sera par conséquent égal à la surface comprise sous ΕΘ, ΘΖ. Menons la droite ΜΝ tangente à la parabole et parallèle à ΑΓ ; et que cette droite soit tangente au point Ν. Conduisons aussi la droite ΒΓ, tangente à la parabole et parallèle à ΕΖ. La surface comprise sous ΑΘ, ΘΓ sera à la surface comprise sous ΕΘ, ΘΖ comme le quarré de ΝΤ est au quarré de ΒΤ ; ce qui est démontré (ϐ). Mais ΤΜ est égal à ΝΤ ; parce que ΒΡ est égal à ΒΜ ; donc la surface comprise sous AΘ, ΘΓ est au quarré de KΘ comme le quarré de TM est au quarré de TB. Donc, par conversion, le quarré de la perpendiculaire ΘK est à la surface com-

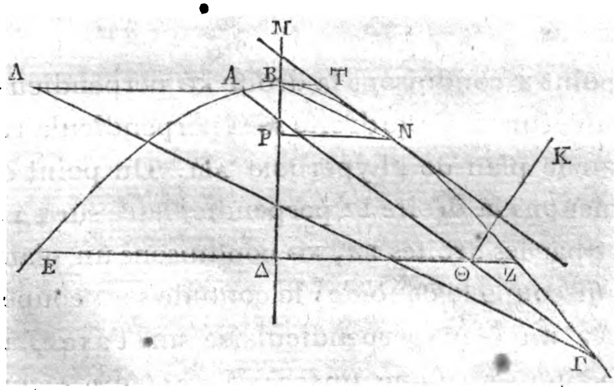


prise sous AΘ, ΘΓ comme le quarré de BΓ est au quarré de TM. Mais les triangles ΓAΛ, TMB sont semblables (γ); donc le quarré de la perpendiculaire ΘK est au rectangle compris sous AΘ, ΘΓ comme le quarré de AΛ est au quarré de AΓ. Nous démontrerons semblablement que les quarrés des autres perpendiculaires menées de la section sur AΓ sont aux surfaces comprises sous les segmens de AΓ comme le quarré de AΛ au quarré de AΓ. Il est donc évident que la section AΓ est une ellipse (ε); que le grand diamètre est la droite ΑΓ et que le petit diamètre est égal à ΑΛ.

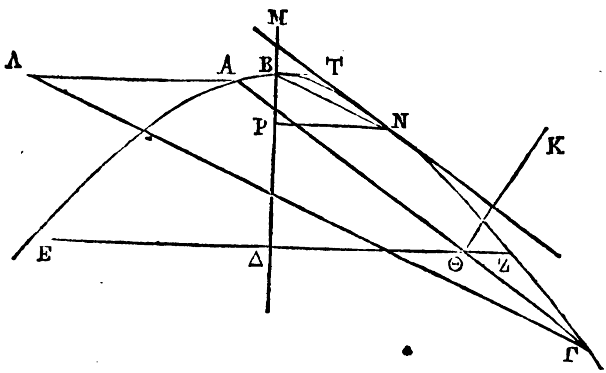
PROPOSITION XIV.

Si un conoïde hyperbolique est coupé par un plan qui rencontre tous les côtés du cône comprenant le conoïde, et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse; son grand diamètre sera la section du plan coupant par celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe.

Coupons un conoïde parabolique par un



plan, ainsi qu'il a été dit; que ce même conoïde soit coupé par l'axe par un plan perpendiculaire sur le plan coupant; que la section du conoïde soit l'hyperbole ABΓ; que AΓ soit la section du plan qui coupe le conoïde; que BΔ soit l'axe du conoïde, et le diamètre de la section. Supposons que dans la section l'on ait pris un point quelconque K. Du

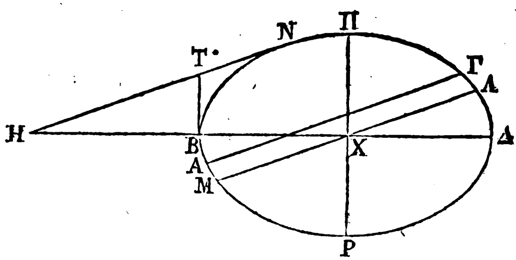


point K conduisons la droite KΘ perpendiculaire sur AΓ. Cette droite sera perpendiculaire sur le plan de l'hyperbole ABΓ. Du point Θ menons la droite EZ perpendiculaire sur BΔ, et par les droites EZ, KΘ conduisons un plan qui coupe le conoïde; le conoïde sera coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe. La section sera donc un cercle qui aura pour centre le point Δ. Le quarré de la perpendiculaire KΘ sera donc égal à la surface comprise sous EΘ, ΘZ. Menons une droite MN qui étant parallèle à AΓ touche l'hyperbole au point N, et menons aussi la droite BT tangente à l'hyperbole et parallèle à EZ. La surface comprise sous EΘ, HZ sera à la surface comprise sous AΘ, ΘΓ comme le quarré de BT est au quarré de TN (α). Donc le quarré de ΘK est à la surface comprise sous AΘ, ΘΓ comme le quarré de BT est au quarré de TN. On démontrera semblablement que les autres quarrés des perpendiculaires menées de la section sur AΓ sont aux surfaces comprises sous les segmens de AΓ formés par ces perpendiculaires comme le quarré de BΓ est au quarré de TN. Mais la droite BT est plus petite que la droite TN, à cause que la droite MT est plus petite que la droite TN, la droite MB étant plus petite que la droite BP, ce qui est une propriété de l'hyperbole (β). Il est donc évident que cette section est une ellipse. Semblablement si la droite ΓΛ est parallèle à BN, et la droite AΛ perpendiculaire sur BΔ, le grand diamètre sera la droite AΓ, et le petit diamètre la droite AΛ (γ).

PROPOSITION XV.

Si un sphéroïde alongé est coupé par un plan qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse. Le grand diamètre sera la section du plan coupant par un plan qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe.

Si le plan coupant passe par l'axe, ou s'il est parallèle à l'axe, la chose est évidente. Que le conoïde soit coupé différemment. Coupons le même conoïde par un



autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le plan coupant; que cette section soit l'ellipse ΑΒΓΔ; que ΓΑ soit la section du plan coupant; que ΒΔ soit l'axe du sphéroïde et le diamètre de l'ellipse; que le point Χ soit le centre, et que ΠΡ soit le petit diamètre. Menons la droite BT perpendiculaire sur BΔ, et la droite HN parallèle à AΓ et tangente à l'ellipse au point N; et par le point X menons la droite MΛ parallèle à AΓ. Nous démontrerons, comme nous l'avons fait plus haut, que les quarrés des perpendiculaires menées de la section sur AΓ sont aux surfaces comprises sous les segmens de AΓ comme le quarré de BT est au quarré de TN. Il est donc évident que la section est une ellipse et que AΓ est un de ses diamètres. Mais il faut démontrer que AΓ est son grand diamètre. En effet, la surface comprise sous ΠX, XP est à la surface comprise sous MX, XΛ comme le quarré de BT est au quarré de NT, parce que les droites ΠP, MN sont parallèles aux tangentes (α). Mais la surface comprise sous ΠX, XP est plus petite que la surface comprise sous MX, XΛ, parce que XΠ est plus petit que XΛ. Donc le quarré de BT est plus petit que le quarré de TN (β). Donc les quarrés des perpendiculaires menées de la section sur AΓ sont moindres que les surfaces comprises sous les segmens de AΓ. Il est donc évident que ΓA est le plus grand diamètre.

Si un sphéroïde aplati est coupé par un

plan, la démonstration sera la même; et le petit diamètre sera celui qui est compris dans le sphéroïde (γ).

Il suit de ce que nous venons de dire, que si toutes ces figures sont coupées par des plans parallèles, leurs sections seront semblables; car la raison des quarrés des perpendiculaires aux surfaces comprises sous les segmens est toujours la même (δ).

PROPOSITION XVI.

Dans un conoïde parabolique, parmi les droites qui sont menées par un point quelconque de sa surface parallèlement à l'axe, celles qui sont menées vers le côté où le conoïde est convexe tombent hors du conoïde, et celles qui sont menées vers le côté opposé tombent en dedans.

Car ayant conduit un plan par l'axe et par le point par lequel l'on a mené une parallèle à l'axe, la section sera une parabole dont le diamètre sera l'axe du conoïde. Mais dans la parabole, parmi les droites qui sont conduites parallèlement au diamètre, celles qui sont menées vers le côté où la parabole est convexe sont hors de la parabole, et celles qui sont menées vers le côté opposé sont dans la parabole. Donc la proposition est évidente.

Dans un conoïde hyperbolique, parmi les droites qui sont menées par un point quelconque de sa surface parallèlement à une droite menée du sommet du cône qui comprend le conoïde dans le conoïde même, celles qui sont menées vers le côté où le conoïde est convexe tombent hors du conoïde, et celles qui sont menées vers le côté opposé tombent en dedans.

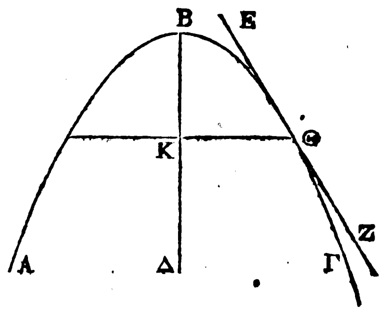
Car ayant conduit un plan par la droite qui est menée dans le conoïde par le sommet du cône qui comprend le conoïde, et par le point par lequel on a mené une parallèle à cette droite, la section sera une hyperbole, et son diamètre sera la droite menée du sommet du cône dans le conoïde (12). Mais dans une hyperbole, parmi les droites qui sont menées par un de ses points parallèlement à une droite, comme nous l'avons dit, celles qui sont menées vers le côté où l'hyperbole est convexe, tombent hors de l'hyperbole, et celles qui sont menées vers le côté opposé tombent en dedans.

Si un plan touche des conoïdes sans les couper, il ne les touchera qu'en un seul point; et le plan conduit par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire sur le plan tangent.

Car qu'un plan touche un conoïde en plusieurs points, si cela est possible. Prenons deux points où ce plan touche le conoïde. Menons par ces points des parallèles à l'axe. Si par ces droites on fait passer un plan, ce plan passera par l'axe ou sera parallèle à l'axe. La section du conoïde sera donc une section conique (12), et ces deux points seront dans cette section. Donc, puisque ces points sont dans une surface, ils sont aussi dans un plan. Donc la droite qui joint ces points sera en dedans de la section conique, et par conséquent en dedans de la surface du conoïde. Mais cette même droite est dans le plan tangent, puisque ces points sont dans ce plan; donc une certaine partie du plan tangent est en dedans du conoïde. Ce qui est impossible, car on avoit supposé qu'il ne le coupoit point. Donc ce plan ne touchera le conoïde qu'en un seul point.

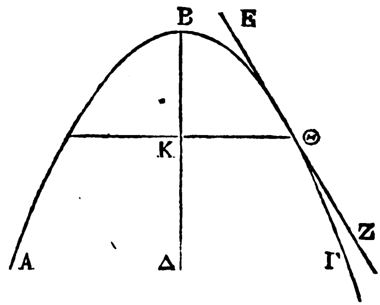
Il est évident que le plan conduit par le point de contact et par l'axe est perpendiculaire sur le plan tangent, si ce plan est tangent au sommet du conoïde; car ayant conduit par l'axe deux plans, les sections du conoïde seront des sections coniques ayant pour diamètre l'axe même. Mais les droites qui sont les sections du plan tangent et qui sont tangentes à l'extrémité du diamètre forment des angles droits avec le même diamètre. Il y aura donc deux droites dans le plan tangent qui seront perpendiculaires sur l'axe. Donc le plan tangent sera perpendiculaire sur l'axe et par conséquent sur le plan conduit par l'axe.

Que le plan ne soit pas tangent au sommet du conoïde. Conduisons un plan par le



point de contact et par l'axe; que la section du conoïde soit la section conique ABΓ; que

ΒΔ soit l'axe du conoïde et le diamètre de cette section, et que la section du plan tangent soit la droite ΕΘΖ qui touche la section



conique au point Θ. Par le point Θ conduisons la droite ΘΚ perpendiculaire sur le diamètre ΒΔ, et par cette droite menons un plan perpendiculaire sur l'axe. Ce plan engendrera un cercle dont le centre sera le point Κ. La section de ce plan par le premier sera une droite tangente au cercle et faisant des angles droits avec la droite ΘΚ. Cette droite sera donc perpendiculaire sur le plan où se trouvent les droites ΚΘ, ΒΔ. Il est donc évident que le plan tangent est perpendiculaire sur ce plan, puisque les droites qui sont dans ce plan lui sont perpendiculaires.

PROPOSITION XVII.

Si un plan touche un sphéroïde alongé ou aplati sans le couper, il ne le touchera qu'en un seul point, et le plan qui passe par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire sur le plan tangent.

Que ce plan touche un sphéroïde en plusieurs points. Prenons deux points où ce plan touche le sphéroïde; par chacun de ces points, menons des droites parallèles à l'axe; si par ces droites nous menons un plan, la section du sphéroïde sera une ellipse et ces points seront dans cette section. Donc la droite placée entre ces deux points sera en dedans de la section conique, et par conséquent en dedans de la surface du sphéroïde. Mais cette même droite est aussi dans le plan tangent, parce que les deux points s'y trouvent placés. Donc une certaine partie du plan tangent sera en dedans du sphéroïde. Mais cela n'est point, car on avoit supposé qu'il ne le coupoit point. Il est donc évident que ce plan ne touche le sphéroïde qu'en un seul point.

Nous démontrerons de la même manière que nous l'avons fait dans les conoïdes, que le plan conduit par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire sur le plan tangent.

Si un conoïde ou un sphéroïde alongé ou aplati est coupé par un plan conduit par l'axe; si l'on mène une droite tangente à la section qui est engendrée, et si par la tangente on conduit un plan perpendiculaire sur le plan coupant, ce plan touchera la figure au même point où cette droite touche la section conique.

Car ce plan ne touchera pas en un autre point la surface de cette figure; s'il en étoit autrement, la perpendiculaire menée de ce point sur le plan coupant tomberoit hors de la section conique, puisqu'elle tomberoit sur la tangente, à cause que ces plans sont perpendiculaires entre eux; ce qui ne peut être, car il est démontré qu'elle tombe en dedans (12).

PROPOSITION XVIII.

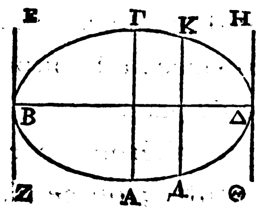
Si deux plans parallèles touchent un sphéroïde alongé ou aplati, la droite qui joindra les points de contact passera par le centre du sphéroïde.

Si les plans font des angles droits avec l'axe, la chose est évidente. Supposons que les angles ne soient pas droits. Le plan conduit par l'axe et par un des points de contact sera perpendiculaire sur le plan qu'il coupe et par conséquent sur le plan parallèle à celui-ci. Il faut donc qu'un même plan passe par l'axe et par les deux points de contact, sans quoi il y auroit deux plans perpendiculaires sur un même plan qui seroient conduits par une même droite non perpendiculaire sur ce plan; car on a supposé que l'axe n'étoit pas perpendiculaire sur les plans parallèles. Donc les points de contact et l'axe seront dans le même plan; et le sphéroïde sera coupé par un plan conduit par l'axe. Donc la section sera une ellipse et les sections des plans tangens qui touchent l'ellipse aux points de contact des plans seront parallèles. Or si des droites parallèles sont tangentes à une ellipse, le centre de l'ellipse et les points de contact sont dans une même droite.

PROPOSITION XIX.

Si deux plans parallèles touchent un sphéroïde alongé ou aplati, et si par le centre du sphéroïde on conduit un plan parallèle aux plans tangens, les droites menées de la section qui est engendrée parallèlement à la droite qui joint les points de contact tombent hors du sphéroïde.

Que ce que nous avons dit soit fait; prenons un point quelconque dans la section qui est engendrée, et par ce point et par la droite qui joint les points de contact conduisons un plan, ce plan coupera le sphéroïde et les plans parallèles. Que la section du sphéroïde soit l'ellipse ΑΒΓΔ; que les sections des plans tangens soient les droites ΕΖ, ΗΘ; que le point pris à volonté soit Α, et que la droite qui joint les points de contact soit ΒΔ. Cette droite passera par le centre (18). Que la section du plan parallèle aux plans tangens soit ΓA. Cette droite passera aussi par le centre, parce que le plan où elle est passe par le centre. Donc, puisque la section ABΓΔ est ou



un cercle ou une ellipse; que les deux droites EZ, HΘ sont tangentes à cette section et que par le centre on leur a conduit une parallèle AΓ, il est évident que les droites menées des points A, Γ parallèlement à BΔ sont tangentes à la section et tombent en dehors du sphéroïde (α).

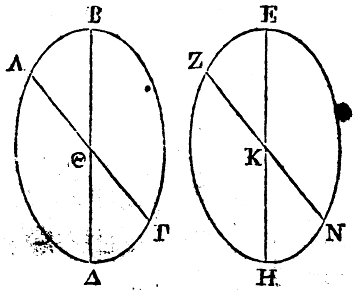
Si le plan parallèle aux tangentes n'est pas conduit par le centre, comme KΛ, il est évident que parmi les droites menées de la section, celles qui sont menées vers le côté où est le petit segment tombent hors du sphéroïde, et que celles qui sont menées vers le côté opposé tombent en dedans (ϐ).

PROPOSITION XX.

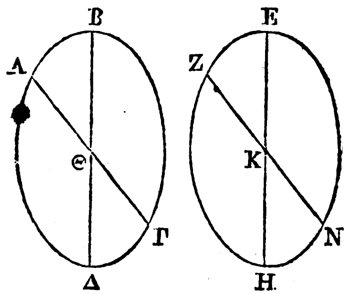
Si un sphéroïde quelconque est coupé par un plan conduit par le centre, ce sphéroïde ainsi que sa surface, est coupé en deux parties égales par ce plan.

Coupons un sphéroïde par un plan conduit par son centre; ou ce plan coupera le sphéroïde par l'axe, ou bien il le coupera à angles droits ou obliques. Si ce plan coupe le sphéroïde par l'axe ou s'il est perpendiculaire sur l'axe, non-seulement le sphéroïde, mais encore sa surface sera coupée en deux parties égales; car il est évident qu'une partie du sphéroïde convient avec l'autre partie, et qu'une partie de sa surface convient aussi avec l'autre partie.

Mais supposons que le plan coupant ne passe pas par l'axe, et qu'il ne soit pas perpendiculaire sur l'axe. Coupons le sphéroïde par un plan qui passe par l'axe et qui soit perpendiculaire sur le plan coupant; que la section du sphéroïde soit l'ellipse ΑΒΓΔ; que la droite ΒΔ soit le diamètre de l'ellipse et l'axe du sphéroïde; que le point Θ soit le centre, et que la section du plan que coupe le sphéroïde par le centre soit la droite ΑΓ. Prenons un autre sphéroïde égal et semblable au premier ; coupons-le par un plan



conduit par l'axe ; que sa section soit l'ellipse ΕΖΗΝ ; que ΕΗ soit le diamètre de l'ellipse et l'axe du sphéroïde, et le point Κ le centre. Par le centre Κ, menons la droite ΖΝ, faisant l'angle Κ égal à l'angle Θ ; et par la droite ΖΝ conduisons un plan perpendiculaire sur le plan où se trouve la section ΕΖΗΝ. On aura deux ellipses ΑΒΓΔ, ΕΖΗΝ égales et semblables. C'est pourquoi ayant posé ΕΗ sur ΒΔ et ΖΝ sur ΑΓ, ces deux ellipses conviendront parfaitement. Mais le plan conduit par ΝΖ et le plan conduit par ΑΓ conviennent encore parfaitement, puisqu'ils sont conduits l'un et l'autre par une même droite dans un même plan ; donc le segment qui est retranché du sphéroïde, du côté où se trouve le point E, par le plan conduit par NZ, et l'autre segment qui est



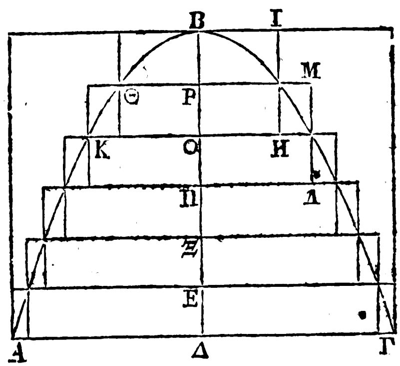
retranché de l'autre sphéroïde, du côté où se trouve le point B, par le plan conduit par la droite AΓ, conviennent parfaitement. Donc les segmens restans, et les surfaces de ces segmens conviennent encore parfaitement.

Si l'on pose la droite EH sur BΔ, de manière que le point E soit posé sur le point Δ, le point H sur le point B, et enfin si l'on pose la droite qui est entre les points N, Z sur la droite qui est entre les points A, Γ, il est évident que les ellipses conviendront parfaitement, que le point Z tombera sur le point Γ et le point N sur le point A. Semblablement, le plan conduit par NZ, et le plan conduit par AΓ conviennent parfaitement, et le segment qui est retranché, du côté où se trouve le point H, par le plan conduit par NZ, et le segment qui est retranché, du côté où se trouve le point B, par le plan conduit par AΓ, conviennent encore parfaitement. Mais celui qui est du côté où se trouve le point E, et celui qui est du côté où se trouve le point A conviennent encore parfaitement; donc, puisque le même segment convient parfaitement avec l'un et avec l'autre segment, il est évident que ces segmens sont égaux, et que leurs surfaces sont aussi égales.

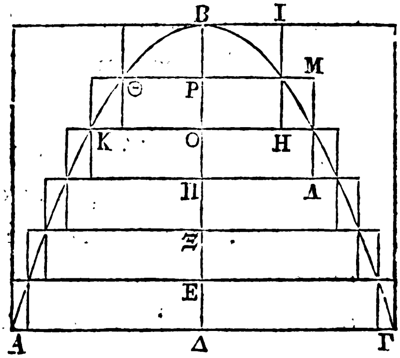
PROPOSITION XXI.

Etant donné un segment d'un conoïde parabolique ou hyperbolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, ou bien un segment d'un sphéroïde alongé ou aplati retranché semblablement, de manière cependant que celui-ci ne soit pas plus grand que la moitié du sphéroïde, on peut inscrire dans chaque segment une figure solide composée de cylindres ayant tous la même hauteur, et lui en inscrire une autre de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que toute quantité solide proposée.

Soit donné un segment tel que ABΓ. Coupons ce segment par un plan conduit par



l'axe; que la section de ce segment soit la section conique ABΓ, et que celle du plan qui coupe le segment soit la droite AΓ. Que la droite BΔ soit l'axe du segment, et le diamètre de la section conique. Puisque l'on a supposé que le plan coupant est perpendiculaire sur l'axe, la section sera un cercle ayant pour diamètre la droite ΓA. Que ce cercle soit la base d'un cylindre qui ait pour axe la droite BΔ. La surface de ce cylindre tombera hors du segment, parce que c'est un segment de conoïde, ou bien un segment de sphéroïde qui n'est pas plus grand que la moitié du sphéroïde (16 et 19). C'est pourquoi, si le cylindre est coupé continuellement en deux parties par un plan perpendiculaire sur l'axe, ce qui restera sera à la fin moindre que la quantité solide proposée. Que le reste qui est moindre que la quantité solide proposée soit le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de ΑΓ comme diamètre, et pour axe la droite ΕΔ. Partageons, aux points Ρ, Ο, Π, Ξ, la droite ΒΔ en parties égales chacune à ΕΔ; par les points de division conduisons à ΑΓ des parallèles terminées à la section conique, et par ces parallèles faisons passer des plans perpendiculaires sur ΒΔ. Les sections seront des cercles qui auront leurs centres dans ΒΔ. Sur chacun de ces cercles construisons deux cylindres dont chacun ait un axe égal à ΕΔ; que l'un d'eux soit du côté du cylindre où est le point Δ; et l'autre du côté du cylindre où est le point Β. Il est évident que l'on aura inscrit dans le segment une certaine figure solide composée des cylindres qui sont construits du côté où est le point Δ, et qu'on lui en aura aussi circonscrit une autre composée des cylindres qui sont construits du côté où est le point B. Il reste à



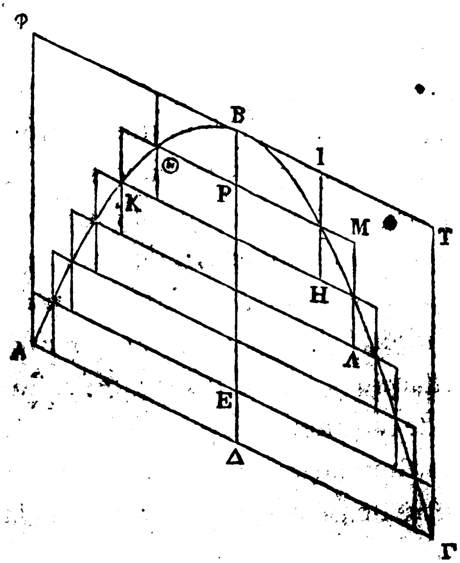
démontrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est moindre que la quantité solide proposée. Or, chacun des cylindres qui sont dans la figure inscrite est égal au cylindre qui est construit sur le même cercle du côté où est le point B; c'est-à-dire que le cylindre ΘH sera égal au cylindre ΘI; le cylindre KΛ au cylindre KM, et ainsi de suite. Donc la somme des uns de ces cylindres est égale à celle des autres. Il est donc évident que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de

ΑΓ comme diamètre et pour axe la droite ΕΔ. Or, ce cylindre est moindre que la quantité solide proposée.

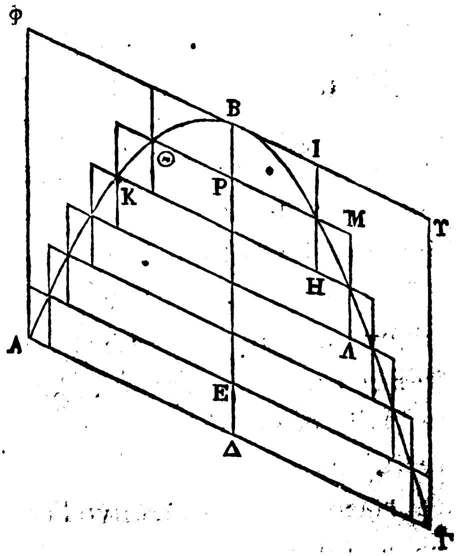
PROPOSITION XXII.

Etant donné un segment d'un conoïde parabolique ou hyperbolique retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, ou un segment de sphéroïde alongé ou aplati retranché semblablement de manière cependant que celui-ci ne soit pas plus grand que la moitié du sphéroïde, on peut inscrire dans chaque segment une figure solide composée de segmens de cylindre ayant tous une hauteur égale, et lui en circonscrire une autre de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre qu'une quantité solide donnée.

Soit donné un segment tel que nous l'avons dit. Coupons ce segment par un autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le plan qui retranche le segment donné. Que la section du segment soit la section conique ΑΒΓΗ, et la section du plan qui retranche le segment, la droite ΓΑ. Puisqu'on suppose que le plan qui retranche le segment n'est point perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse, ayant pour diamètre la droite ΑΓ (15). Que la droite ΦΥ parallèle à ΓΑ



soit tangente à la section conique au point Β ; et par la droite ΦΥ faisons passer un plan parallèle au plan conduit par ΑΓ. Ce plan touchera le conoïde au point Β (17). Si le segment appartient à un conoïde parabolique, du point Β menons la droite ΒΔ parallèle à l'axe ; si le segment appartient à un conoïde hyperbolique, du sommet du cône contenant le conoïde conduisons une droite au point B; prolongeons cette droite, et que son prolongement soit BΔ; si enfin le segment appartient à un sphéroïde, de son centre conduisons une droite au point B, et que la partie de cette droite comprise dans le segment soit BΔ. Il est d'abord évident que la droite BΔ partagera en deux parties égales la droite AΓ. Donc le point B sera le sommet du segment, et la droite BΔ son axe. On a donc une ellipse décrite autour de AΓ comme diamètre, et une oblique BΔ menée de son centre dans un plan qui passe par un de ses diamètres et qui est perpendiculaire sur le plan de l'ellipse. On peut donc trouver un cylindre qui ait son axe sur la droite BΔ, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse qui est décrite autour de AΓ comme diamètre (10). La surface de ce cylindre tombera hors du segment; car c'est un segment de conoïde, ou bien un segment de sphéroïde qui n'est pas plus grand que la moitié du sphéroïde (16 et 19). L'on aura donc un certain segment de cylindre ayant pour base une ellipse décrite autour de AΓ comme diamètre, et pour axe la droite BΔ. C'est pourquoi si l'on coupe continuellement ce segment en deux parties égales par des plans parallèles au plan conduit par AΓ, ce qui restera sera moindre que la quantité solide pro-



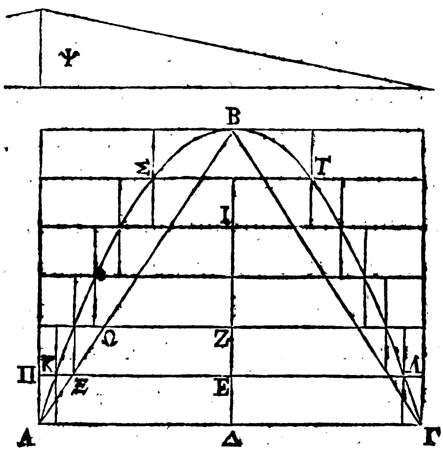
posée. Que le segment qui a pour base l'ellipse décrite autour de AΓ comme diamètre, et pour axe la droite EΔ soit moindre que la quantité solide proposée. Partageons ΔB en parties égales chacune à ΔE; par les points de division menons à AΓ des droites parallèles et terminées à l'ellipse; et par ces droites faisons passer des plans parallèles au plan conduit par AΓ. Ces plans couperont la surface du segment, et les sections seront des ellipses semblables à celle qui est décrite autour de AΓ comme diamètre, parce que ces plans sont parallèles entre eux (15. *Cor.*) Construisons sur chaque ellipse deux segmens de cylindre; que l'un soit du côté de l'ellipse où est le point Δ et l'autre du côté où est le point B. Que ces segmens de cylindre aient pour axe une droite égale à ΔE. On aura donc certaines figures solides composées de segmens de cylindre ayant la même hauteur, dont l'une sera inscrite et l'autre circonscrite. Il reste à démontrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est moindre que la quantité solide proposée. On démontrera comme dans la proposition précédente que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est un segment qui a pour base l'ellipse décrite autour de AΓ comme diamètre et pour axe la droite EΔ. Or, ce segment est moindre que la grandeur solide proposée.

Ces choses étant établies, nous allons démontrer celles qui ont été proposées relativement à ces figures.

PROPOSITION XXIII.

Un segment quelconque d'un conoïde parabolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe est égal à trois fois la moitié du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

Soit un segment d'un conoïde parabolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe. Coupons ce segment par un autre plan

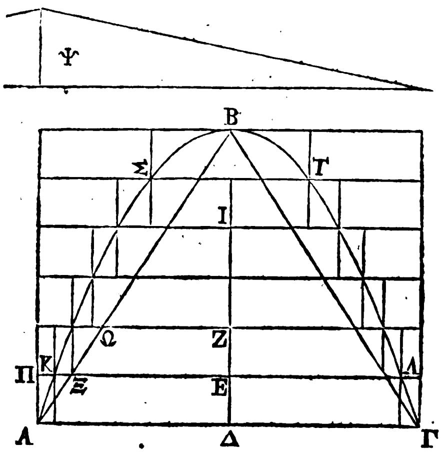


conduit par l'axe; que la section de sa surface soit la parabole ABΓ; que la section du plan qui retranche le segment soit la droite ΓA, et que l'axe du segment soit la droite BΔ.

Soit aussi un cône qui ait la même base et le même axe que le segment, ayant pour sommet le point B. Il faut démontrer que le segment du conoïde est égal à trois fois la moitié de ce cône.

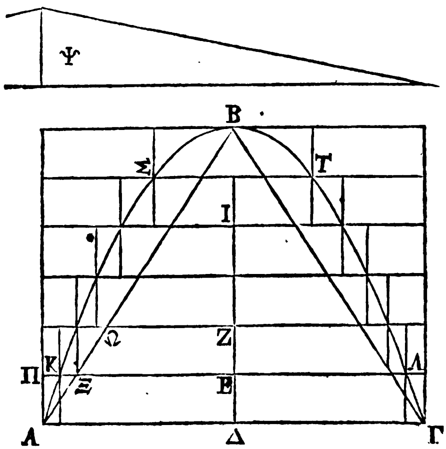
Supposons que le cône Ψ soit égal à trois fois la moitié du cône dont la base est le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre et dont l'axe est BΔ. Soit aussi un cylindre qui ait pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre, et pour axe la droite BΔ. Le cône Ψ sera égal à la moitié du cylindre total; parce que le cône Ψ est égal à trois fois la moitié de l'autre cône. Je dis que le segment du conoïde est égal au cône Ψ.

Car si le segment du conoïde n'est pas égal au cône Ψ, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de cylindres qui aient la même hauteur; circonscrivons-lui en une autre de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du segment sur le cône Ψ. Que parmi les cylindres dont la figure circonscrite est composée, le plus grand soit celui qui a pour base le cercle décrit autour de ΑΓ comme diamètre, et pour axe la droite ΕΔ; et que le plus petit soit celui qui a pour base le cercle décrit autour de ΣΤ comme dia-



mètre et pour axe la droite ΒΘ. Que parmi les cylindres dont la figure inscrite est composée, le plus grand soit celui qui a pour base le cercle décrit autour de ΚΛ comme diamètre et pour axe la droite ΔΕ; et que le plus petit soit celui qui a pour base le cercle décrit autour de ΣΓ comme diamètre et pour axe la droite ΘΙ. Que les plans de tous ces cylindres soient prolongés jusqu'à la surface du cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de ΑΓ comme diamètre et pour axe la droite BΔ. Le cylindre total sera partagé en autant de cylindres qu'il y en a dans la figure circonscrite, et chacun de ces cylindres sera égal au plus grand des cylindres circonscrits. Mais l'excès de la figure circonscrite au segment sur la figure inscrite est moindre que l'excès du segment sur le cône Ψ; il est donc évident que la figure inscrite dans le segment est plus grande que le cône Ψ (α).

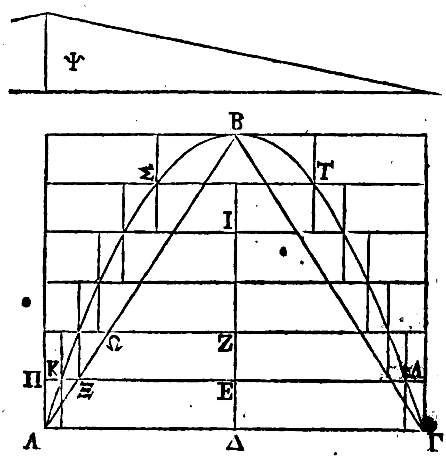
Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite ΔE est au premier des cylindres placés dans la figure inscrite, qui a pour axe la droite ΔE comme le quarré de la droite ΔA est au quarré de la droite KE; et le quarré de la droite ΔA est au quarré de la droite KE comme BΔ est à BE, et comme ΔA est à EΞ (ϐ). On démontrera semblablement que le second des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite EZ est au second des cylindres placés dans la figure inscrite comme ΠE, c'est-à-dire ΔA, est à ZΩ. De plus, chacun des autres cylindres placés dans le cylindre total sera à chacun des cylindres qui sont placés dans la figure inscrite, et qui ont le même axe comme le rayon de la base est à la partie de ce rayon placée entre les droites AB, BΔ. Donc la somme de tous les cylindres placés dans le cylindre qui a



pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre et pour axe la droite BΔ, est à la somme de tous les cylindres placés dans la figure inscrite comme la somme des rayons des cercles qui sont dans les bases des cylindres dont nous venons de parler est à la somme des droites qui sont placées entre les droites AB, BΔ (2) (γ). Mais si des secondes droites dont nous venons de parler, on retranche les droites AΔ, la somme des premières droites dont nous venons de parler est plus grande que le double de la somme des secondes droites restantes (1) (δ). Donc la somme des cylindres placés dans le cylindre total qui a pour axe la droite ΔB est plus grande que le double de la figure inscrite. Donc le cylindre total qui a pour axe BΔ est plus grand que le double de la figure inscrite. Mais ce cylindre est double du cône Ψ; donc la figure inscrite est plus petite que le cône Ψ. Ce qui ne peut être; car on a démontré qu'elle est plus grande. Donc le segment du conoïde n'est pas plus grand que le cône Ψ.

Je dis à présent que ce segment n'est pas plus petit. Inscrivons dans le segment une figure, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de l'une sur l'autre soit moindre que l'excès du cône Ψ sur le segment. Faisons le reste comme auparavant. Puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, et que la figure inscrite diffère moins de la figure circonscrite que le segment ne diffère du cône, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ.

Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite ΔE est au premier des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a pour axe la même

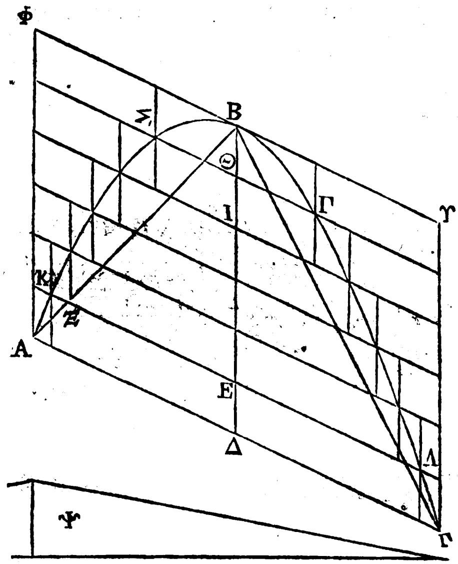


droite EΔ comme le quarré de AΔ est à ce même quarré (ε); le second des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite EZ est au second des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a pour axe la droite EZ comme le quarré de ΔA au quarré de KE; et le quarré de ΔA est au quarré de KE comme BΔ est à BE et comme ΔA est à EΞ. De plus, chacun des autres cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe une droite égale à ΔE est à chacun des cylindres qui sont placés dans la figure circonscrite, et qui ont le même axe comme le rayon de la base est à la partie de ce rayon placée entre les droites AB, BΔ. Donc la somme des cylindres placés dans le cylindre total qui a pour axe la droite BΔ est à la somme des cylindres placés dans la figure circonscrite comme la somme des premières droites est à la somme des secondes (2). Mais la somme des premières droites, c'est-à-dire la somme des rayons des cercles qui sont les bases des cylindres est moindre que le double de la somme des droites qui sont retranchées de ces rayons, réunie à la droite AΔ (1); il est donc évident que la somme des cylindres placés dans le cylindre total est moindre que le double de la somme des cylindres placés dans la figure circonscrite. Donc le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre et pour axe la droite BΔ est plus petit que le double de la figure circonscrite. Mais ce cylindre n'est pas plus petit que le double de la figure circonscrite, puisqu'il est au contraire plus grand que le double de cette figure; car ce cylindre est double du cône Ψ, et l'on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ. Donc le segment du conoïde n'est pas plus petit que le cône Ψ. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus grand ; donc le segment du conoïde est égal à trois fois la moitié du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

PROPOSITION XXIV.

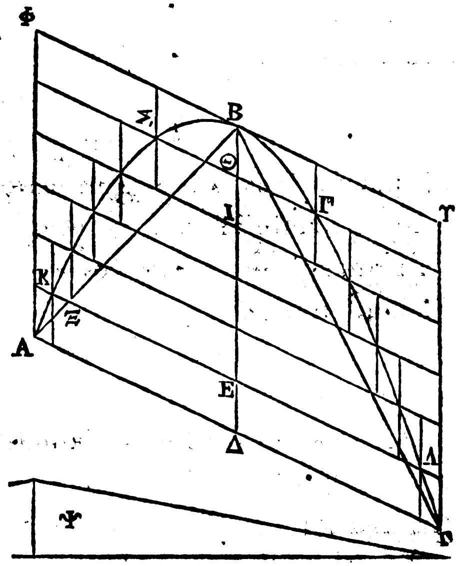
Si un segment d'un conoïde parabolique est retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, ce segment sera parallèlement égal à trois fois la moitié du segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

Qu'un segment d'un conoïde parabolique soit retranché comme nous l'avons dit. Coupons ce même segment par un autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur celui qui coupe la figure ; que la section de la figure soit la parabole ABΓ, et que la section du plan coupant soit la droite AΓ. Menons à la droite AΓ une parallèle ΦΥ qui soit tangente à la parabole au point B ; et menons la droite BΔ parallèle à l'axe. Cette droite coupera en deux parties égales la droite ΑΓ (a). Faisons passer par la droite ΦΥ un plan parallèle à celui qui est conduit par ΑΔ. Ce plan sera tangent au



conoïde au point Β ; le point Β sera le sommet du segment et la droite ΒΔ son axe. Puisque le plan conduit par ΑΓ n'est point perpendiculaire sur l'axe et que ce plan coupe le conoïde, la section sera une ellipse ayant pour grand diamètre la droite ΑΓ (13). Puisque l'on a une ellipse décrite autour de ΑΓ comme diamètre et une oblique menée de son centre dans un plan qui est conduit par le diamètre de l'ellipse et qui est perpendiculaire sur son plan, on peut trouver un cylindre qui ait son axe sur la droite ΒΔ et dans la surface duquel se trouve l'ellipse (10). On peut de même trouver un cône qui ait pour sommet le point Β et dans la surface duquel se trouve l'ellipse (9). On aura donc un certain segment de cylindre ayant pour base l'ellipse décrite autour de ΑΓ comme diamètre et pour axe la droite ΒΔ; on aura de plus un segment de cône ayant la même base et le même axe que le segment de cylindre et le segment du conoïde. Il faut démontrer que le segment du conoïde est égal à trois fois la moitié du segment de cône.

Que le cône Ψ soit égal à trois fois la moitié du segment de cône. Le segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde sera double du cône Ψ; parce que ce cône est égal à trois fois la moitié du segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde; et que le segment de cône dont nous venons de parler est le tiers du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde (11). Il est donc nécessaire que le segment du conoïde soit égal au cône Ψ.

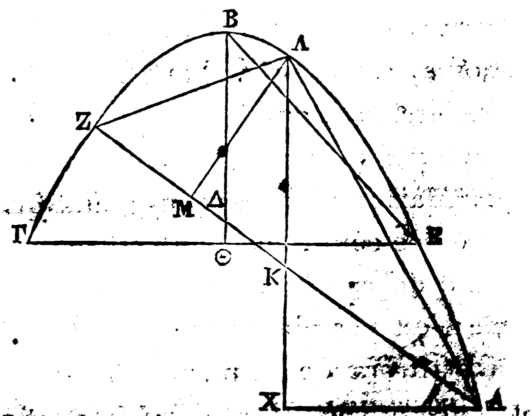


Car si ce segment ne lui est pas égal, il sera plus grand ou plus petit. Supposons d'abord qu'il soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de segmens de cylindre qui aient la même hauteur, et circonscrivons-lui ensuite une autre figure solide, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du segment du conoïde sur le cône Ψ. Prolongeons les plans des segmens de cylindre jusqu'à la surface du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde. Le premier des segmens placés dans le segment de cylindre total, qui a pour axe la droite ΔE, est au premier des segmens placés dans la figure inscrite, qui a pour axe la droite ΔE comme le quarré de AΔ est au quarré de KE; car ces segmens qui ont une hauteur égale sont entre eux comme leurs bases. Mais les bases de ces segmens qui sont des ellipses semblables, sont entre elles comme les quarrés de leurs diamètres correspondans (ϛ); et les moitiés de ces diamètres sont les droites AΔ, KE; et de plus, le quarré de AΔ est au quarré de KE comme BΔ est à BE; parce que la droite BΔ est parallèle au diamètre, que les droites AΔ, KE sont parallèles à la droite qui touche la parabole au point B, et que BΔ est à BE comme AΔ est à EΞ (γ). Donc, le premier des segmens placés dans le segment de cylindre total est au premier des segmens placés dans la figure inscrite comme ΑΔ est à ΕΞ. De même, chacun des autres segmens placés dans le segment de cylindre total, qui a pour axe une droite égale à ΕΔ, est à chacun des segmens correspondans qui sont placés dans la figure inscrite, et qui ont le même axe comme le demi-diamètre des bases est à la partie de ce demi-diamètre placée entre les droites ΑΒ, ΒΔ. Nous démontrerons, comme nous l'avons fait plus haut, que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ, et que le segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde, est plus grand que le double de la figure inscrite. Donc, le segment de cylindre sera aussi plus grand que le double du cône Ψ. Mais il n'est pas plus grand que le double de ce cône, puisqu'il est seulement le double de ce cône. Donc le segment du conoïde n'est pas plus grand que le cône Ψ. On démontrera de la même manière qu'il n'est pas plus petit. Il est donc évident qu'il lui est égal. Donc, le segment du conoïde est égal à trois fois la moitié du segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

PROPOSITION XXV.

Si deux segmens d'un conoïde parabolique sont retranchés par deux plans dont l'un soit perpendiculaire sur l'axe et dont l'autre ne lui soit pas perpendiculaire, et si les axes des segmens sont égaux, ces segmens seront égaux entre eux.

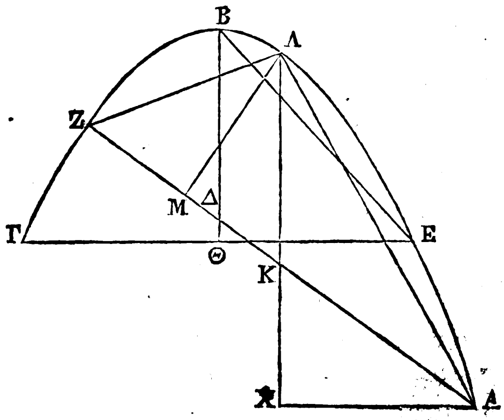
Retranchons deux segmens d'un conoïde parabolique, ainsi que nous l'avons dit. Cou-



pons ensuite le conoïde par un plan conduit par l'axe et par un plan perpendiculaire sur l'axe. Que la section du conoïde soit la parabole ABΓ, ayant pour diamètre la droite BΔ.

Que les sections des plans soient les droites AZ, ET, dont l'une EΓ est perpendiculaire sur l'axe, et dont l'autre ZA ne lui est pas perpendiculaire. Que les droites BΘ, KΛ qui sont les axes des segmens soient égales entre elles et que les sommets des segmens soient les points B, Λ. Il faut démontrer que le segment du conoïde dont le sommet est le point B, est égal au segment du conoïde dont le sommet est le point A.

Puisque d'une même parabole, on a retranché deux segmens, dont l'un est AΛZ et l'autre EBΓ, et que leurs diamètres KΛ, ΘB sont égaux entre eux, le triangle AΛK sera égal au triangle EΘB; car on a démontré que le triangle AΛZ est égal au triangle EBΓ (4). Menons la droite AX perpendiculaire sur la droite KΛ prolongée. Puisque les droites BΘ, KΛ sont égales entre elles, les droites EΘ, AX seront aussi égales entre elles (4). Dans le segment dont le sommet est le point B, inscrivons un cône qui ait la même base et le même axe que ce segment; et dans le segment dont le sommet est le point Λ, inscrivons un segment de cône qui ait la même base et le même axe que ce segment. Du point Λ, conduisons sur ΔZ la perpendiculaire ΛM. Cette perpendiculaire sera la hauteur du segment de cône dont le sommet est le point Λ. Mais le segment de

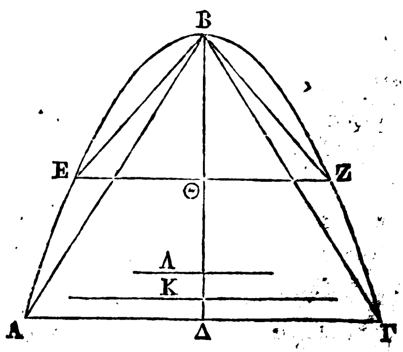


cône dont le sommet est le point Λ et le cône dont le sommet est le point B sont entre eux en raison composée des bases et des hauteurs (11). Donc, ce segment de cône et ce cône sont entre eux en raison composée de la raison de la surface comprise dans l'ellipse décrite autour de AZ comme diamètre au cercle décrit autour de EΓ comme diamètre, et de la raison de ΛM à BΘ. Mais la raison de la surface comprise dans l'ellipse à ce même cercle est la même que la raison de la surface comprise sous les diamètres de l'ellipse au quarré du diamètre EΓ (6); donc le segment de cône dont le sommet est le point Λ, et le cône dont le sommet est le point B sont entre eux en raison composée de la raison de KΛ à EΘ, et de la raison de ΛM à BΘ; car la droite KΛ est la moitié du diamètre de la base du segment de cône qui a pour sommet le point Λ; la droite EΘ est la moitié du diamètre de la base du cône, et les droites ΛM, BΘ sont les hauteurs du segment de cône et du cône (γ). Mais ΛM est à BΘ comme ΛM est à KΛ, parce que BΘ est égal à KΛ; et ΛM est à KΛ comme XΛ est à ΛK (δ); de plus la raison du segment de cône au cône est composée de la raison de KΛ à ΛX, car ΛX est égal à EΘ, et de la raison de ΛM à BΘ; et parmi les raisons dont nous venons de parler, la raison de ΛK à ΛX est la même que la raison de ΛK à ΛM. Donc le segment de cône est au cône comme ΛK est à ΛM et comme ΛM est à BΘ. Mais BΘ est égal à KΛ (ε); il est donc évident que le segment de cône qui a pour sommet le point Λ est égal au cône qui a pour sommet le point B. Il suit évidemment de-là que les segmens du conoïde sont égaux, puisque l'un d'eux est égal à trois fois la moitié d'un cône (23), et que l'autre est égal à trois fois la moitié d'un segment de cône qui est égal à ce même cône (24).

PROPOSITION XXVI.

Si deux segmens d'un conoïde parabolique sont retranchés par un plan conduit d'une manière quelconque, ces segmens sont entre eux comme les quarrés de leurs axes.

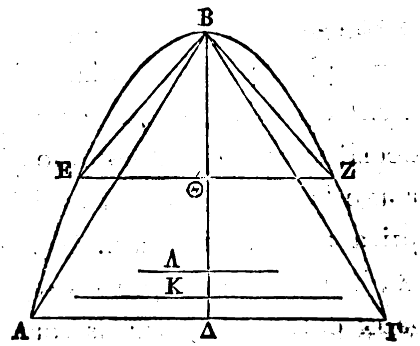
Que deux segmens d'un conoïde parabo-



lique soient retranchés comme on voudra; que K soit égal à l'axe de l'un et Λ égal à l'axe de l'autre. Il faut démontrer que ces segmens sont entre eux comme les quarrés des droites K, Λ.

Coupons le conoïde par un plan conduit par l'axe du segment, et que sa section soit la parabole ABΓ, ayant pour axe la droite BΔ. Prenons BΔ égal à K; et par le point Δ conduisons un plan perpendiculaire sur l'axe. Le segment du conoïde qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre, et pour axe la droite BΔ, est égal à un segment qui a un axe égal à K. Si K est aussi égal à Λ, il est évident que les segmens seront égaux entre eux; car ils seront égaux chacun à une même quantité solide; mais les quarrés des droites K, Λ seront égaux entre eux; donc les segmens seront entre eux comme les quarrés de leurs axes.

Si Λ n'est pas égal à K, que Λ soit égal à BΘ. Par le point Θ conduisons un plan perpendiculaire sur l'axe. Le segment qui a pour base le cercle décrit autour de EZ comme diamètre, et pour axe la droite BΘ est égal à un segment qui a un axe égal à Λ. Construisons deux cônes qui aient pour base les cercles décrits autour de AΓ, EZ comme diamètres, et pour sommet le point B. Le cône qui a pour axe la droite BΔ, et le cône qui a pour axe la droite BΘ sont entre eux en raison composée de la raison du quarré de AΔ au quarré de ΘE, et de la raison de BΔ

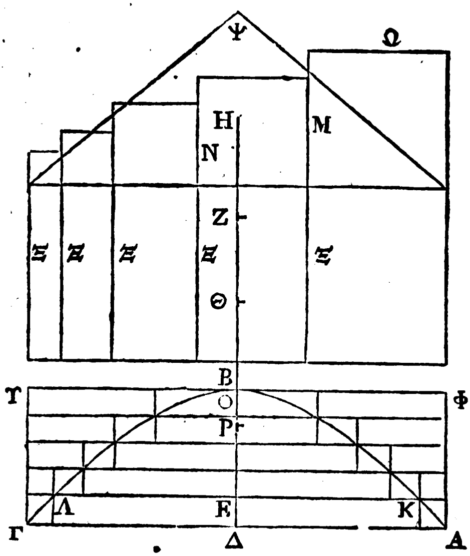


à BΘ (α). Mais le quarré de AΔ est au quarré de ΘE comme BΔ est à BΘ (β); donc, le cône qui a pour axe BΔ, et le cône qui a pour axe BΘ sont entre eux en raison composée de la raison de BΔ à ΘB et de la raison de BΔ à BΘ. Mais cette raison est la même que celle du quarré de ΔB au quarré de ΘB; et le cône qui a pour axe la droite BΔ est au cône qui a pour axe la droite ΘB comme le segment du conoïde qui a pour axe la droite ΔB au segment qui a pour axe la droite ΘB; car chacun de ces segmens est égal à trois fois la moitié de chacun de ces cônes (23); de plus, le segment du conoïde qui a un axe égal à K est égal au segment qui a pour axe la droite BΔ; le segment du conoïde qui a pour axe une droite égale à Λ est égal au segment qui a pour axe la droite ΘB (25); et la droite K est égale à la droite BΔ, et la droite Λ est égale à la droite ΘB. Il est donc évident que le segment du conoïde qui a un axe égal à K est au segment du conoïde qui a un axe égal à Λ comme le quarré de K est au quarré de Λ.

PROPOSITION XXVII.

Un segment d'un conoïde hyperbolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe est à un cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe.

Retranchons un segment d'un conoïde hyperbolique par un plan perpendiculaire sur l'axe. Coupons ce même segment par un autre plan conduit par l'axe. Que la section du conoïde soit l'hyperbole ABΓ; et que la section du plan qui retranche le segment soit

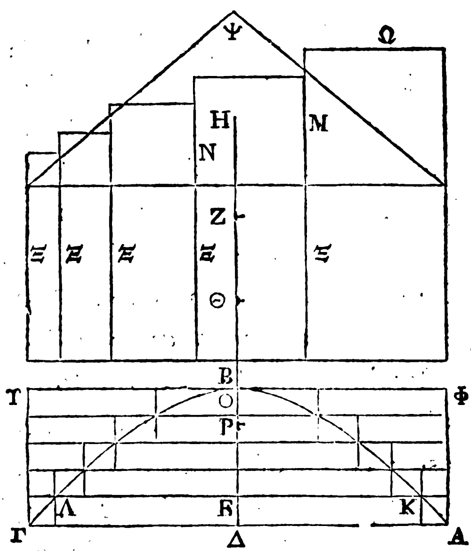


la droite AΓ; que l'axe du segment soit BΔ, et que la droite ajoutée à l'axe soit la droite BΘ, et que les droites ZΘ, ZH soient égales chacune à BΘ. Il faut démontrer que le segment est au cône qui a la même base et le même axe que le segment comme HΔ est à ZΔ.

Soit un cylindre qui ait la même base et le même axe que le segment, et dont les côtés soient ΦA, ΓΥ. Soit de plus un cône Ψ; et que ce cône soit à celui qui a la même base et le même axe BΔ que le segment comme HΔ est à ΔZ. Je dis que le segment du conoïde est égal au cône Ψ.

Car si le segment du conoïde n'est pas égal au cône Ψ, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de cylindres ayant une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du segment du conoïde sur le cône Ψ. Prolongeons les plans de tous ces cylindres jusqu'à la surface du cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre et pour axe la droite BΔ. Le cylindre total sera partagé en autant de cylindres qu'il y en a dans la figure circonscrite, et chacun de ces cylindres sera égal au plus grand de ceux-ci. Puisque l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est moindre que l'excès du segment sur le cône Ψ, et que la figure circonscrite est plus grande que le segment, il est évident que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ.

Que BP soit le tiers de BΔ; la droite HΔ sera triple de ΘP. Puisque le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre, et pour axe la droite BΔ est au cône



qui a la même base et le même axe comme HΔ est à ΘP, et que le cône dont nous venons de parler est au cône Ψ comme ZΔ est à HΔ; par raison d'égalité dans la proportion troublée, le cylindre dont nous venons de parler sera au cône Ψ comme ZΔ est à ΘP. Soient les droites où se trouve la lettre Ξ; que leur nombre soit le même que celui des segmens de la droite BΔ, que chacune d'elles soit égale à la droite ZB, et qu'à chacune d'elles on applique une surface dont la partie excédante soit un quarré; que la plus grande de ces surfaces soit égale à la surface comprise sous ZΔ, ΔB, et que la plus petite soit égale à la surface comprise sous ZO, OB (α). Les côtés des quarrés se surpasseront également, parce que les segmens de BΔ qui leur sont égaux se surpassent également. Que le côté du plus grand quarré où se trouve la lettre M soit égal à BΔ, et le côté du plus petit quarré égal à BO. Soient ensuite d'autres surfaces dans lesquelles se trouve la lettre Ω; qu'elles soient en même nombre que les premières, et que chacune de ces surfaces soit égale à la plus grande des premières qui est comprise sous ZΔ, ΔB (β). Le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre, et pour axe la droite ΔE est au cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de KΛ comme diamètre, et pour axe la droite ΔE comme le quarré de ΔA est au quarré de KE. Mais cette dernière raison est la même que la raison de la surface comprise sous ZΔ, ΔB à la surface comprise sous ZE, BE. Ce qui est une propriété de l'hyperbole; car la droite qui est double de l'ajoutée à l'axe, c'est-à-dire de celle qui est menée du centre est le côté transverse de l'hyperbole (γ). Mais la surface ΞM est égale à la surface comprise sous ZΔ, BΔ, et la surface ΞN est égale à la surface comprise sous ZE, BE; car la droite Ξ est égale à ZB, la droite N à BE, et la droite M à BΔ. Donc, le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre, et pour axe la droite ΔE est au cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de KA comme diamètre, et pour axe la droite ΔE comme la surface Ω est à la surface ΞN. Nous démontrerons semblablement que chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et qui ont pour axe une droite égale à ΔE est au cylindre qui est dans la figure inscrite et qui a le même axe comme la surface Ω est à la surface qui lui est correspondante parmi celles qui sont appliquées à la ligne Ξ, et dont les parties excédantes sont des quarrés (δ). On a donc certaines quantités, savoir les cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et dont chacun a un axe égal à la droite ΔE, et certaines autres quantités, savoir les surfaces où se trouve la lettre Ω, qui sont en même nombre que les premières; et ces quantités sont proportionnelles deux à deux, parce que ces cylindres sont égaux entre eux ainsi que les surfaces Ω. Or, quelques-uns de ces cylindres sont comparés avec d'autres cylindres qui sont dans la figure inscrite, le dernier n'étant point comparé avec un autre; et de plus, parmi les surfaces dans lesquelles se trouve la lettre Ω, quelques-unes sont comparées avec d'autres surfaces correspondantes qui sont appliquées à la ligne Ξ, et dont les parties excédantes sont des quarrés, sous les mêmes raisons, la dernière n'étant point comparée avec une autre. Il est donc évident que la somme des cylindres qui sont placés dans le cylindre total est à la somme des cylindres qui sont placés dans la figure inscrite comme la somme des surfaces Ω est à la somme de toutes celles qui sont appliquées, la plus grande étant exceptée (2). Mais on a démontré que la raison de la somme de toutes les surfaces Ω à la somme de toutes les surfaces qui sont appliquées, la plus grande étant exceptée, est plus grande que la raison de la droite MΞ à une droite composée de la moitié de Ξ et de la troisième partie de M (3). Donc la raison du cylindre total à la figure inscrite est plus grande que la raison de ZΔ à ΘP, et cette dernière raison est la même que celle du cylindre total au cône Ψ, ainsi que cela a été démontré. Donc la raison du cylindre total à la figure inscrite est plus grande que la raison du cylindre au cône Ψ. Donc le cône Ψ est plus grand que la figure inscrite. Ce qui ne peut être; car on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ. Donc le segment du conoïde n'est pas plus grand que le cône Ψ.

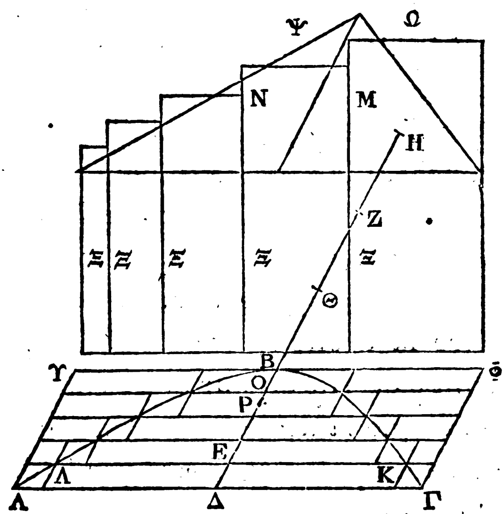
Mais il n'est pas plus petit. Car qu'il soit plus petit, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de cylindres ayant une hauteur égale et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du cône sur le segment; et faisons le reste comme auparavant. Puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, et que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est plus petit que l'excès du cône sur le segment, il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le cône Ψ.

Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite ΔE est au premier des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a pour axe la droite ΔE comme la surface Ω est à la surface ΞM; car ces cylindres sont égaux entre eux, ainsi que ces surfaces. De plus, chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et qui ont pour axe une droite égale à ΔE est au cylindre qui lui est correspondant dans la figure inscrite, et qui a le même axe, comme la surface Ω est à la surface correspondante parmi celles qui sont appliquées à la droite Ξ, et dont les parties excédantes sont des quarrés; parce que chacun des cylindres circonscrits, le plus grand étant excepté, est égal à chacun des cylindres inscrits, le plus grand n'étant pas excepté. Donc le cylindre total est à la figure inscrite comme la somme des surfaces Ω est à la somme des surfaces qui sont appliquées, et dont les parties excédantes sont des quarrés. Mais on a démontré que la raison de la somme des surfaces Ω à la somme de toutes les autres surfaces est moindre que la raison de la droite ΞΜ à une droite composée de la moitié de Ξ et du tiers de Μ. Donc la raison du cylindre total à la figure circonscrite sera moindre que la raison de ΖΔ à ΘΡ. Mais ΖΔ est à ΘΡ comme le cylindre total est au cône Ψ. Donc la raison de ce même cylindre à la figure circonscrite est moindre que la raison de ce cylindre au cône Ψ. Donc la figure circonscrite est plus grande que le cône Ψ. Ce qui est impossible; car on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ. Donc le segment du conoïde n'est pas plus petit que le cône Ψ. Donc, puisqu'il n'est ni plus grand ni plus petit, la proposition est démontrée.

PROPOSITION XXVIII.

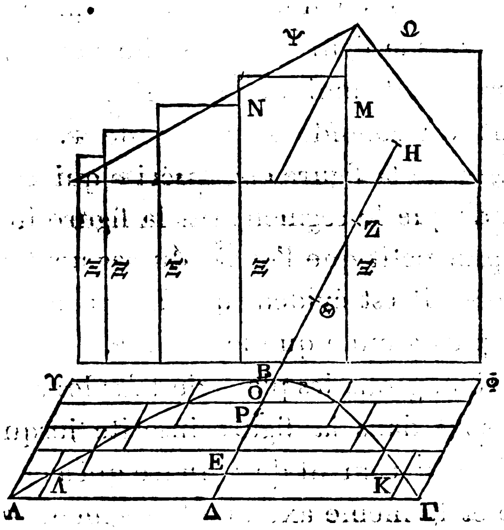
Si un segment d'un conoïde hyperbolique est retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, le segment du conoïde sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment, comme une droite composée de l'axe du segment, et du triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment, et du double de la droite ajoutée à l'axe.

Qu'un segment d'un conoïde hyperbolique soit retranché par un plan, comme



nous l'avons dit. Coupons le segment par un autre plan conduit par l'axe, et perpendiculaire sur le premier. Que cette section soit l'hyperbole ABΓ; que la section du plan qui retranche le segment soit la droite ΓA; et enfin que le sommet du cône qui contient le conoïde soit le point Θ. Par le point B, conduisons la droite ΦΥ parallèle à AΓ;

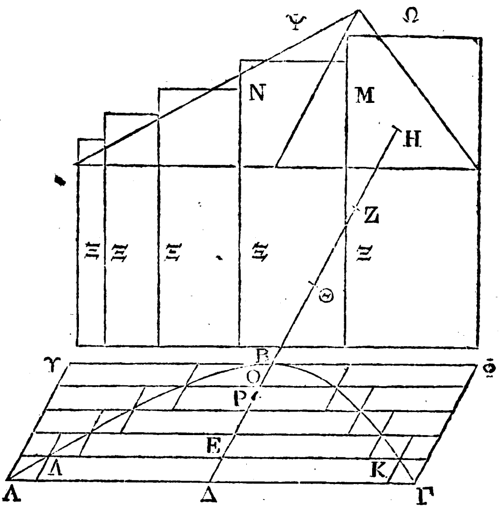
cette droite sera tangente à l'hyperbole au point Β. Prolongeons la droite qui joint le point Θ et le point Β ; cette droite partagera ΑΓ en deux parties égales (α) ; le point Β sera le sommet du segment ; la droite ΒΔ, son axe, et enfin la droite ΒΘ, l'ajoutée à l'axe. Que les droites ΘΖ et ΖΗ soient égales chacune à ΒΘ, et par la droite ΦΥ, faisons passer un plan parallèle au plan conduit par ΑΓ ; ce plan touchera le conoïde au point Β. Puisque le plan conduit par ΑΓ coupe le conoïde sans être perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse qui aura pour grand diamètre la droite ΓΑ (14). Puisque l'on a une ellipse décrite autour de ΑΓ comme diamètre, et que la droite ΒΔ est menée de son centre dans le plan qui passe par le diamètre, et qui est perpendiculaire sur le plan de l'ellipse, on peut trouver un cylindre qui ait son axe sur la droite ΒΔ, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de ΑΓ comme diamètre (10). Ce cylindre étant trouvé, on aura un certain segment de cylindre ayant la même base et le même axe que le segment du conoïde et dont l'autre base sera le plan conduit par ΦΥ. De plus, on pourra trouver un cône qui ait pour sommet le point B, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de AΓ comme diamètre (9). Ce cône étant trouvé, on aura un segment de cône ayant la même base et



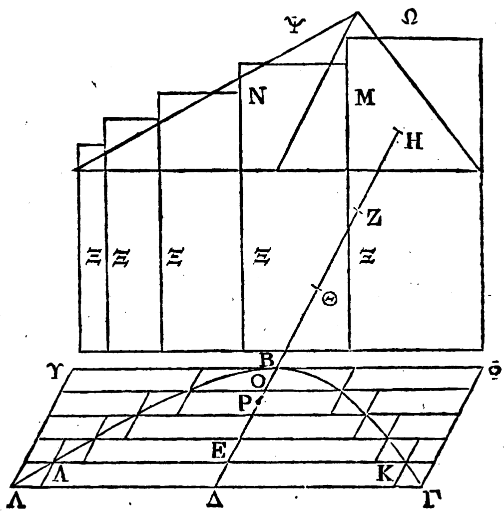
le même axe que le segment du cylindre et le segment du conoïde. Il faut démontrer que le segment du conoïde est au segment de cône dont nous venons de parler comme HΔ est à ΔZ.

Que HΔ soit à ΔZ comme le cône Ψ est au segment de cône. Je dis que le segment du conoïde sera égal au cône Ψ; car si le segment du conoïde n'est pas égal au cône Ψ, qu'il soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment du conoïde une figure solide composée de segmens de cylindres qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du segment du conoïde sur le cône Ψ. Puisque l'excès de la figure circonscrite qui est plus grande que le segment sur la figure inscrite est plus petit que l'excès du segment sur le cône Ψ, il est évident que la figure inscrite sera plus grande que le cône Ψ.

Prolongeons les plans de tous les segmens qui sont dans la figure inscrite jusqu'à la surface du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde. Que BP soit la troisième partie de BΔ; et faisons le reste comme auparavant. Le premier des segmens placés dans le segment total de cylindre, qui a pour axe la droite ΔE est au premier des segmens placés dans la figure inscrite, qui a pour axe ΔE comme le quarré de AΔ est au quarré de KE; car les segmens qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases. Mais les bases sont des ellipses semblables; donc ces bases sont entre elles comme les quarrés des diamètres correspondans (7). Mais le quarré de AΔ est au



quarré de KE comme la surface comprise sous ZΔ, ΔB est à la surface comprise sous ZE, EB; parce que l'on a mené la droite ZΔ du point Θ où les asymptotes se rencontrent, et que les droites AΔ, KE sont parallèles à la tangente menée par le point B (6): de plus, la surface comprise sous ZΔ, ΔB est égale à la surface Ω, et la surface comprise sous ZE, EB est égale à la surface ΞN. Donc le premier des segmens placés dans le segment total, qui a pour axe la droite ΔE est au premier segment qui est placé dans la figure inscrite, et qui a pour axe la droite ΔE comme la surface Ω est à la surface ΞN. De même chacun des autres segmens qui sont placés dans le segment total, et qui ont pour axe une droite égale à ΔE est au segment correspondant qui est placé dans la figure inscrite, et qui a pour axe une droite égale à ΔE, comme la surface Ω est à la surface correspondante parmi les surfaces qui sont appliquées à la droite ΞX, et dont les parties excédantes sont des quarrés. On a donc certaines quantités, savoir les segmens qui sont placés dans le cylindre total, et certaines autres quantités, savoir les surfaces où se trouve la lettre Ω, qui sont en même nombre que les segmens, et qui sont proportionnelles deux à deux. Mais ces segmens sont comparés avec d'autres segmens qui sont dans la figure inscrite; et le dernier n'est point comparé avec un autre; et de plus, les surfaces Ω sont comparées, sous les mêmes raisons, avec d'autres surfaces correspondantes qui sont appliquées à la ligne Ξ, et dont les parties excédantes sont des quarrés; et la dernière n'est point comparée avec une autre. Il est donc évident que la somme des premiers segmens est à la somme des seconds comme



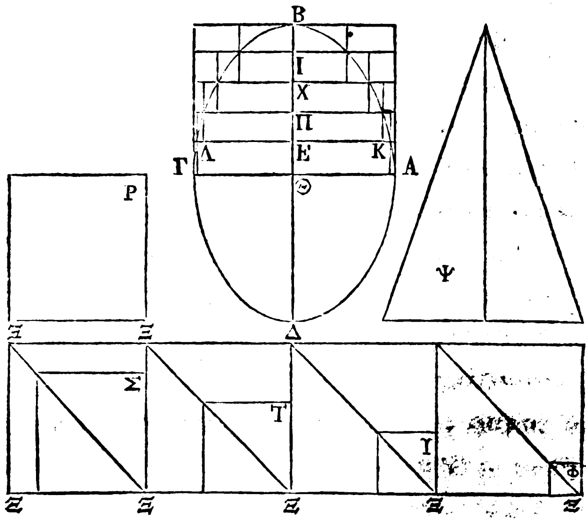
la somme de toutes les surfaces Ω est à la somme de toutes celles qui sont appliquées, la plus grande étant exceptée (2). Mais la raison de la somme des surfaces Ω à la somme de toutes surfaces appliquées, la plus grande étant exceptée, est plus grande que la raison de la droite ΜΞ à une droite composée de la moitié de Ξ et du tiers de Μ (2). Donc, la raison du segment total à la figure inscrite est plus grande que la raison de la droite ΞΜ à une droite composée de la moitié de Ξ et du tiers de Μ; et par conséquent plus grande que la raison de ΖΔ à ΘΡ. Donc, la raison du segment total à la figure inscrite est plus grande que la raison du segment total au cône Ψ. Ce qui est impossible; car on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ. Donc le segment du conoïde n'est pas plus grand que le cône Ψ.

Si l'on suppose que le segment du conoïde est plus petit que le cône Ψ, nous inscrirons dans ce segment une figure solide composée de segmens de cylindre qui aient la même hauteur, et nous lui en circonscrirons une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du cône Ψ sur le segment. Nous démontrerons de la même manière que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ; et que la raison du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde à la figure circonscrite est moindre que la raison de ce segment de cylindre au cône Ψ. Ce qui ne peut être. Donc le segment du conoïde n'est pas plus petit que le cône Ψ; donc la proposition est évidente.

PROPOSITION XXIX.

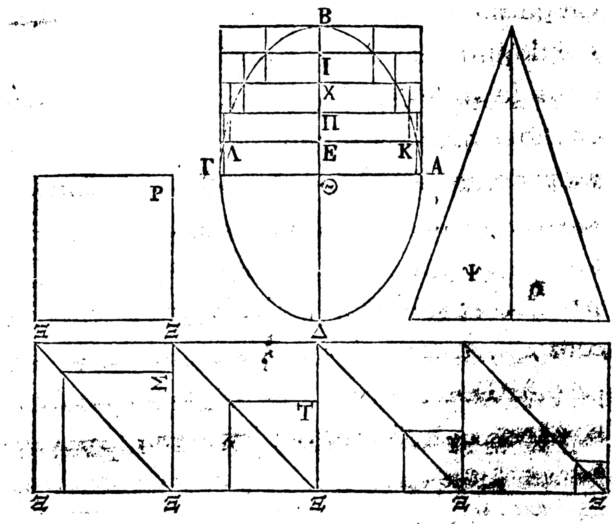
La moitié d'un sphéroïde quelconque coupé par un plan conduit par le centre, et perpendiculaire sur l'axe est double du cône qui a la même base et le même axe que le segment.

Qu'un sphéroïde soit coupé par un plan conduit par le centre et perpendiculaire sur l'axe; qu'il soit encore coupé par un autre plan conduit par l'axe; que la section du sphéroïde soit l'ellipse ΑΒΓΔ, ayant pour diamètre l'axe du sphéroïde ΒΔ, et pour centre le point Θ: il est indifférent que ΒΔ soit le grand ou le petit diamètre de l'ellipse. Que la section du plan qui coupe le segment soit la droite ΓΑ. Cette droite passera par le centre, et fera des angles droits avec ΒΔ; parce que l'on suppose que ce plan passe par le centre, et qu'il est perpendiculaire sur l'axe. Il faut démontrer que le segment qui est la moitié du sphéroïde, et qui a pour base le cercle décrit autour de ΑΓ comme diamètre, et pour sommet le point B, est double du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.



Que le cône Ψ soit double de celui qui a la même base et le même axe ΘB que le segment. Je dis que la moitié du sphéroïde est égale au cône Ψ. Car si la moitié du sphéroïde n'est pas égale au cône Ψ, supposons d'abord qu'elle soit plus grande, si cela est possible. Dans le segment qui est la moitié du sphéroïde, inscrivons une figure solide composée de cylindres, ayant une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du demi-sphéroïde sur le cône Ψ. Puisque la figure circonscrite est plus grande que le demi-sphéroïde, l'excès du demi-sphéroïde sur la figure inscrite sera plus petit que l'excès du demi-sphéroïde sur le cône Ψ, il est évident que la figure inscrite dans le demi-segment sera plus grande que le cône Ψ.

Soit un cylindre qui ait pour base le cercle décrit autour de ΑΓ comme diamètre, et pour axe la droite ΒΘ. Puisque ce cylindre est triple du cône qui a la même base et le même axe que le segment, et que le cône Ψ est double de ce cône, il est évident que ce cylindre sera égal à trois fois la moitié du cône Ψ. Prolongeons les plans de tous les cylindres dont la figure inscrite est composée jusqu'à la surface du cylindre qui a la même base et le même axe que le segment. Le cylindre total sera partagé en autant de cylindres qu'il y en a dans la figure circonscrite, et chacun de ces cylindres sera égal au plus grand de ceux-ci. Prenons des droites où se trouve la lettre Ξ; que ces droites soient en même nombre que les segmens de la droite BΘ, et que chacune d'elles soit égale à la droite BΘ : sur chacune d'elles décrivons un



quarré. Du dernier de ces quarrés retranchons un gnomon qui ait pour largeur la droite BI ; ce gnomon sera égal à la surface comprise sous BI, IΔ (ϛ). Du quarré suivant retranchons un gnomon qui ait une largeur double de BI ; ce gnomon sera égal à la surface comprise sous BX, XΔ. Continuons de retrancher de chaque quarré qui suit un gnomon qui ait une largeur plus grande d'un segment que la largeur du gnomon qui précède; chacun de ces gnomons sera égal à une surface comprise sous deux segmens de ΒΔ, un de ces segmens étant égal à la largeur du gnomon. Mais le quarré qui reste du second quarré a un côté égal à la droite ΘΕ (γ); donc le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite ΘΕ est au premier des cylindres placés dans la figure inscrite, qui a pour axe la même droite ΘΕ comme le quarré de ΑΘ est au quarré de ΚΕ, et par conséquent comme la surface comprise sous ΒΘ, ΘΔ est à la surface comprise sous ΒΕ, ΕΔ (δ). Donc le premier cylindre est au second cylindre comme le premier quarré est au gnomon qui a été retranché du second quarré. Semblablement, chacun des autres cylindres qui ont pour axe une droite égale à ΘΕ sera au cylindre qui est dans la figure inscrite, et qui a le même axe comme le quarré qui lui correspond est au gnomon qui a été retranché du quarré suivant. On a donc certaines quantités, savoir les cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et certaines autres quantités, savoir les quarrés des droites Ξ, Ξ qui sont en même nombre que les cylindres; et ces quantités sont proportionnelles deux à deux. Mais ces cylindres sont comparés à d'autres quantités, savoir aux cylindres placés dans la figure inscrite, et le dernier n'est point comparé à un autre; et les quarrés sont comparés à d'autres quantités dans les mêmes raisons, savoir aux gnomons correspondans qui sont retranchés des quarrés, et le dernier quarré n'est point comparé à un autre. Donc la somme de tous les cylindres placés dans le cylindre total est à la somme de tous les autres cylindres comme la somme de tous les quarrés est à la somme de tous les gnomons qui en sont retranchés (3). Donc le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est à la figure inscrite comme la somme de tous les quarrés est à la somme de tous les gnomons qui en sont retranchés. Mais la somme de ces quarrés est plus grande que trois fois la moitié de la somme des gnomons qui en sont retranchés. En effet, on a pris certaines lignes ΞΡ, ΞΣ, ΞΤ, ΞΥ, ΞΦ qui se surpassent également, et dont la plus petite est égale à leur excès; l'on a pris de plus d'autres lignes désignées par les lettres Ξ Ξ qui sont en même nombre que les premières, et dont chacune est égale à la plus grande des dernières. Donc la somme des quarrés construits sur les lignes dont chacune est égale à la plus grande est plus petite que le triple de la somme des quarrés construits sur les droites qui se surpassent également; et si l'on retranche le quarré construit sur la plus grande droite, cette somme sera plus grande que le triple de la somme des quarrés restans; ce qui a été démontré dans les choses que nous avons publiées sur les hélices (10, *cor.*). Mais puisque la somme de tous ces quarrés est plus petite que le triple de la somme des autres quarrés qui ont été retranchés de ceux-ci; il est évident que cette somme est plus grande que trois fois la moitié de la somme des surfaces restantes (α). Donc cette somme est plus grande que trois fois la moitié de la somme des gnomons. Donc aussi le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est plus grand que trois fois la moitié de la figure inscrite (ϐ). Ce qui est impossible; car ce cylindre est égal à trois fois la moitié du cône Ψ, et l'on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ. Donc la moitié du sphéroïde n'est pas plus grande que le cône Ψ.

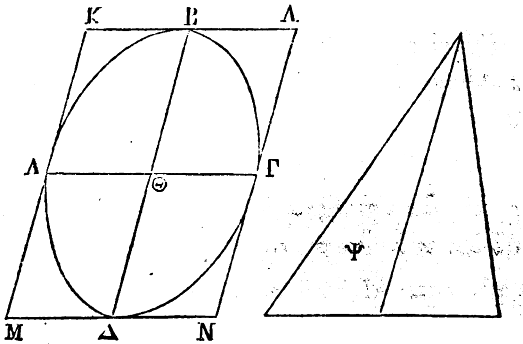
La moitié du sphéroïde n'est pas plus petite que le cône Ψ. Qu'elle soit plus petite, si cela est possible. Inscrivons de nouveau dans la moitié du sphéroïde une figure solide composée de cylindres qui aient la même hauteur ; et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du cône Ψ sur la moitié du sphéroïde ; et faisons le reste comme auparavant. Puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le cône Ψ.

Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite ΘE est au premier des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a pour axe la droite ΘE, comme le premier quarré est à ce même quarré. Le second des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite EΠ est au second des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a pour axe la droite EΠ, comme le second quarré est au gnomon qui en est retranché. De même, chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et qui ont pour axe une droite égale à ΘE est au cylindre correspondant qui est placé dans la figure circonscrite, et qui a le même axe, comme le quarré correspondant est au gnomon qui en est retranché. Donc la somme de tous les cylindres qui sont placés dans le cylindre total est à la somme de tous les cylindres qui sont placés dans la figure circonscrite comme la somme de tous les quarrés est à une surface égale à la somme du premier quarré, et des gnomons qui sont retranchés des autres quarrés (2). Mais la somme de tous les quarrés est plus petite trois fois la moitié d'une surface égale à la somme du premier quarré, et des gnomons qui sont retranchés des autres quarrés; parce que cette somme est plus grande que le triple de la somme des quarrés construits sur les droites inégales, le quarré construit sur la plus grande droite étant excepté (*Hélices*, *pro.* 10. *cor.*). Donc, le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est plus petit que trois fois la moitié de la figure circonscrite. Ce qui ne peut être; car ce cylindre est égal à trois fois la moitié du cône Ψ; et l'on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ. Donc la moitié du sphéroïde n'est pas plus petite que le cône Ψ. Donc elle lui est égale, puisqu'elle n'est ni plus grande ni plus petite.

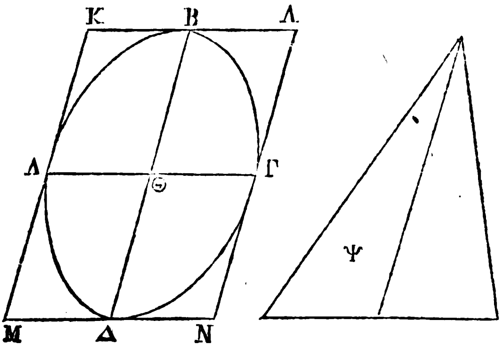
PROPOSITION XXX.

Si un sphéroïde quelconque est coupé par un plan conduit par le centre et non perpendiculaire sur l'axe, la moitié du sphéroïde sera encore double d'un segment de cône qui aura la même base et le même axe que le segment.

Coupons le sphéroïde. Coupons-le ensuite par un autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le plan coupant; que la section du sphéroïde soit l'ellipse ΑΒΓΔ, dont le centre est le point Θ; et que la section du plan coupant soit la droite ΑΓ. Cette droite passera par le point Θ; parce qu'on a supposé que le plan étoit conduit par le centre. On aura donc une certaine ellipse décrite autour de ΑΓ comme diamètre ΑΓ, parce qu'on a supposé que le plan coupant n'étoit pas perpendiculaire sur l'axe. Menons les droites ΚΛ, ΜΝ parallèles à ΑΓ; et que ces droites soient tangentes à l'ellipse



aux points Β, Δ; et par ces droites faisons passer des plans parallèles à celui qui a été conduit par la droite ΑΓ. Ces plans toucheront le sphéroïde aux points Β, Δ, la droite qui joint les points Β, Δ passera par le point Θ (18); les sommets des segmens seront les points Β, Δ, et les axes les droites ΒΘ, ΘΔ. On peut donc trouver un cylindre dont l'axe soit la droite ΒΘ, dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de ΑΓ comme diamètre (10). Ce cylindre étant trouvé, on aura un segment de cylindre qui aura la même base et le même axe que la moitié du sphéroïde. On peut de plus trouver un cône qui ait son sommet au point B, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de AΓ comme diamètre (9). Ce cône étant



trouvé, on aura un certain segment de cône qui aura la même base et le même axe que le segment du sphéroïde. Je dis que la moitié du sphéroïde est double de ce cône.

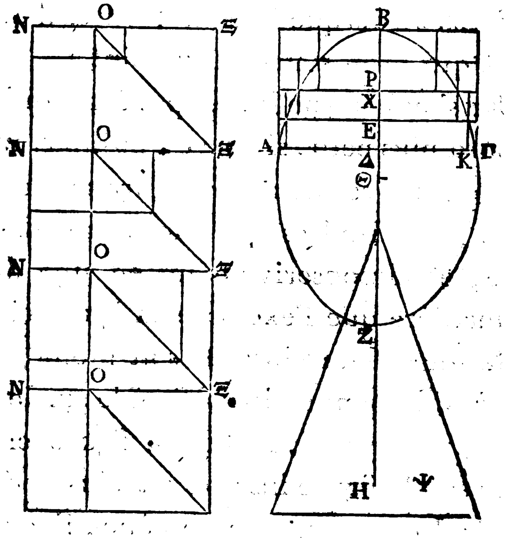
Que le cône Ψ soit double de ce segment de cône. Si la moitié du sphéroïde n'est pas égale au cône Ψ, qu'il soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans la moitié du sphéroïde une figure composée de segmens de cylindre qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès de la moitié du sphéroïde sur le cône Ψ. Nous démontrerons de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ; que le segment de cylindre qui a la même base et le même axe que ce segment est égal à trois fois la moitié du cône Ψ; et que ce segment est plus grand que trois fois la moitié de la figure inscrite dans la moitié du sphéroïde. Ce qui ne peut être. Donc la moitié du sphéroïde n'est pas plus grande que le cône Ψ.

Que la moitié du sphéroïde soit plus petite que le cône Ψ. Inscrivons dans la moitié du sphéroïde une figure solide composée de segmens de cylindres qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du cône Ψ sur la moitié du sphéroïde. Nous démontrerons encore, comme nous l'avons fait plus haut, que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ; que le segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du sphéroïde est égal à trois fois la moitié du cône Ψ; et que ce segment est plus petit que trois fois la moitié de la figure circonscrite. Ce qui ne peut être. Donc la moitié du sphéroïde n'est pas plus petite que le cône Ψ. Mais si la moitié du sphéroïde n'est ni plus grande ni plus petite que ce cône, elle lui est égale. Donc la proposition est évidente.

PROPOSITION XXXI.

Le segment d'un sphéroïde quelconque coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe qui ne passe pas par le centre est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde, et de l'axe du plus grand segment est à l'axe du plus grand segment.

Qu'un segment quelconque d'un sphéroïde soit retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, sans passer par le centre; que ce même segment soit coupé par un autre plan conduit par l'axe; que la section du sphéroïde soit l'ellipse ABΓ, dont le diamètre BZ est l'axe du sphéroïde, et dont le centre est le point Θ; et que la section du plan qui retranche le segment soit la droite ΑΓ. Cette droite sera perpendiculaire sur ΒΖ; parce



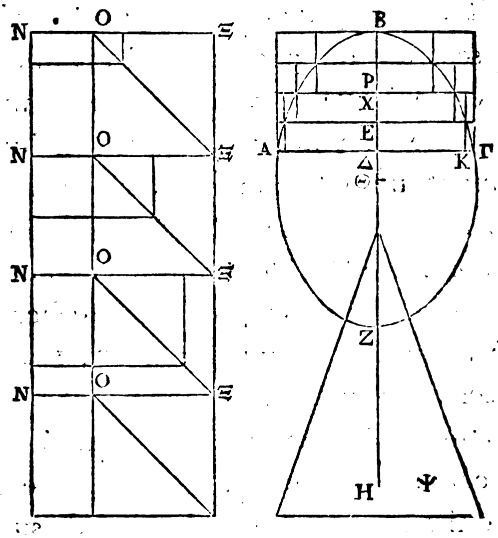
que l'on a supposé que le plan coupant étoit perpendiculaire sur l'axe. Que le segment qui est produit par cette section, et qui a son sommet au point Β soit plus petit que la moitié du sphéroïde; et que ΖΗ soit égal à ΒΘ. Il faut démontrer que le segment qui a pour sommet le point Β est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme ΔΗ est à ΔΖ.

Soit un cylindre qui ait la même base et le même axe que le plus petit segment. Prenons de plus un cône Ψ qui soit au cône qui a la même base et le même axe comme ΔH est à ΔZ. Je dis que le cône Ψ est égal au segment qui a son sommet au point B.

Car si ce cône ne lui est pas égal, qu'il soit d'abord plus petit, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de cylindres qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du segment du sphéroïde sur le cône Ψ (21). Puisque l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est plus petit que l'excès du segment sur ce cône, il est évident que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ.

Que BP soit la troisième partie de BΔ. Puisque BH est triple de BΘ, et BΔ triple de BP, la droite ΔH sera triple de ΘP. Donc le cylindre qui a la même base que le segment, et pour axe la droite BΔ est au cône qui a la même base et le même axe comme ΔH est à ΘP. Mais le cône dont nous venons de parler est au cône Ψ comme ΔZ est à ΔH.

Donc, par raison d'égalité dans la proportion troublée, le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est au



cône Ψ comme ΔZ est à ΘP. Prenons à présent les lignes dans lesquelles sont les lettres Ξ N; supposons que ces droites soient en même nombre que les segmens qui sont dans la droite BΔ, et qu'elles soient égales chacune à la droite ZΔ. Que chacune des droites ΞO soit égale à la droite BΔ. Chacune des droites restantes NO sera double de la droite ΘΔ (6). Appliquons à chacune des droites NΞ une surface qui ait une largeur égale à BΔ;

dans chacune de ces surfaces construisons un quarré, et menons sa diagonale. Retranchons de la première de ces surfaces un gnomon qui ait une largeur égale à BE; retranchons de la seconde un gnomon qui ait une largeur égale à BX; retranchons de la même manière de chaque surface qui suit immédiatement un gnomon qui ait une largeur plus petite d'un segment de BΔ que le gnomon précédent. Il est évident que le gnomon qui a été retranché de la première surface sera égal à la surface comprise sous BE, EZ, et le reste sera une surface appliquée sur NO, dont la partie excédante sera un quarré qui a pour côté une droite égale à ΔE (γ). Le gnomon qui est retranché de la seconde surface sera égal à la surface comprise sous ZX, XB, et le reste sera une surface appliquée sur NO dont la partie excédante sera un quarré; et ainsi de suite. Cela étant ainsi, prolongeons les plans de tous les cylindres dont la figure inscrite dans le segment est composée jusqu'à la surface du cylindre qui a la même base et le même axe que le segment. Le cylindre total sera partagé en autant de cylindres qu'il y en a dans la figure circonscrite, et chacun de ces cylindres sera égal au plus grand de ces derniers. Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite ΔE, est au premier des cylindres placés dans la figure inscrite, qui a pour axe la droite ΔE comme le quarré de ΔΓ est au quarré de KE. Mais cette dernière raison est la même que celle de la surface comprise sous BΔ, ΔZ à la surface comprise sous BE, EZ. Donc le premier des cylindres placés dans le cylindre total est au premier des cylindres placés dans la figure inscrite comme la première surface est au gnomon qui en a été retranché. Semblablement, chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et qui ont pour axe une droite égale à ΔE sera au cylindre correspondant qui est placé dans la figure inscrite et qui a le même axe, comme la surface qui lui correspond est au gnomon qui en a été retranché. On a donc certaines quantités, savoir les cylindres qui sont placés dans le cylindre total; on a de plus certaines autres quantités, savoir les surfaces qui sont appliquées sur ZN, et qui ont pour largeur une droite égale à BΔ; et ces dernières quantités sont en même nombre que les cylindres, et leur sont proportionnelles deux à deux. Mais ces cylindres sont comparés à d'autres cylindres qui sont dans la figure inscrite, le dernier n'étant point comparé à un autre; et ces surfaces sont comparées à d'autres semblablement placées, dans des raisons égales, c'est-à-dire aux gnomons qui sont retranchés de ces premières surfaces, et la dernière surface n'est point comparée avec une autre. Il est donc évident que la somme de tous les premiers cylindres est à la somme de tous les autres cylindres comme la somme de toutes ces surfaces est à la surface de tous les gnomons (2). Donc le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est à la figure inscrite comme la somme de toutes ces surfaces est à la somme de tous les gnomons. Mais l'on a certaines lignes égales dans lesquelles sont les lettres N O, et à chacune desquelles on a appliqué une surface dont la partie excédante est un quarré; les côtés des quarrés se surpassent également, et cet excès est égal au côté du plus petit quarré: on a de plus d'autres surfaces appliquées à NΞ, qui ont pour largeur une droite égale à ΒΔ, qui sont en même nombre que les premières, et dont chacune est égale à la plus grande de celles-ci. Il est donc évident que la raison de la somme de toutes les surfaces dont chacune est égale à la plus grande, à la somme de toutes les autres est moindre que la raison de ΞΝ à une droite composée de la moitié de ΝΟ et du tiers de ΞΟ (3). Il est donc évident que la raison de la somme de ces surfaces à la somme des gnomons est plus grande que la raison de la droite ΞΝ à une droite composée de la moitié de ΝΟ et des deux tiers de ΞΟ (α). Donc la raison du cylindre qui a la même base et le même axe que le segment à la figure inscrite dans le segment est plus grande que la raison de ΞΝ à une droite composée de la moitié de ΝΟ et des deux tiers de ΟΞ. Mais la droite ΔΖ est égale à ΞΝ; la droite ΔΘ est égale à la moitié de ΝΟ, et la droite ΔΡ égale aux deux tiers de ΞΟ; donc la raison du cylindre total à la figure inscrite dans le segment est plus grande que la raison de ΔΖ à ΘΡ. Mais l'on a démontré que le cylindre est au cône Ψ comme ΔΖ est à ΘΡ; donc la raison du cylindre à la figure inscrite est plus grande que la raison de ce même cylindre au cône Ψ. Ce qui ne peut être ; car on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ. Donc le segment du sphéroïde n'est pas plus grand que le cône Ψ.

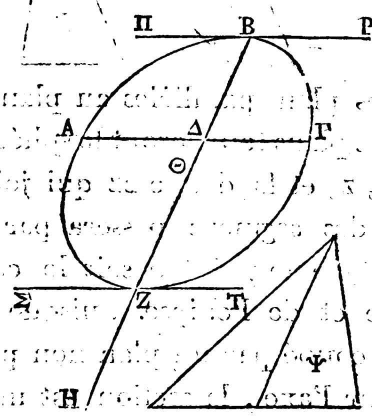
Que ce segment soit plus petit que le cône Ψ, si cela est possible. Inscrivons de nouveau dans le segment une figure solide composée de cylindres qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du cône Ψ sur le segment, et faisons le reste comme auparavant. Puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, et que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est plus petit que l'excès du cône Ψ sur le segment, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ.

Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite ΔE est au premier des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a le même axe, comme la dernière des surfaces qui sont appliquées à ΞN, et qui ont une largeur égale à la droite BΔ est à cette même surface; car ces cylindres sont égaux, ainsi que ces surfaces; le second des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe une droite égale à ΔE est au cylindre correspondant dans la figure circonscrite comme la première des surfaces qui sont appliquées à ΞΛ, et qui ont une largeur égale à BΔ est au gnomon qui en est retranché; et chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total et qui ont un axe égal à la droite ΔE est au cylindre qui lui est correspondant dans la figure circonscrite comme la surface qui lui est correspondante parmi celles qui sont appliquées à ΞN est au gnomon qui en a été retranché avant celui qu'on nomme le dernier. Donc, par la même raison qu'auparavant, la somme de tous les cylindres placés dans le cylindre total est à la somme de tous les cylindres placés dans la figure circonscrite comme la somme de toutes les surfaces qui sont appliquées à ΞN est à une surface composée de la dernière surface et de tous les gnomons qui sont retranchés des autres surfaces. Puisque l'on a démontré que la raison de la somme de toutes les surfaces appliquées à ΞN à la somme de toutes les surfaces qui sont appliquées à NO, et dont les parties excédantes sont des quarrés, la plus grande étant exceptée, est plus grande que la raison de ΞN à une droite égale composée de la moitié de NO et du tiers de ΞO, il est évident que la raison de la somme de ces mêmes surfaces à la somme des surfaces restantes, savoir la dernière surface et les gnomons qui sont retranchés des surfaces restantes est moindre que la raison de la droite de ΞN à une droite composée de la moitié de NO et des deux tiers de ΞO. Il est donc évident que la raison du cylindre qui a la même base et le même axe que le segment à la figure circonscrite est moindre que la raison de ZΔ à ΘP. Mais la raison du cylindre dont nous venons de parler au cône Ψ est la même que celle de ΔZ à ΘP, donc la raison du cylindre à la figure circonscrite est moindre que la raison de ce même cylindre au cône Ψ. Ce qui ne peut être; car on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ. Donc le segment du sphéroïde n'est pas plus petit que le cône Ψ. Donc il lui est égal, puisqu'il n'est ni plus grand ni plus petit.

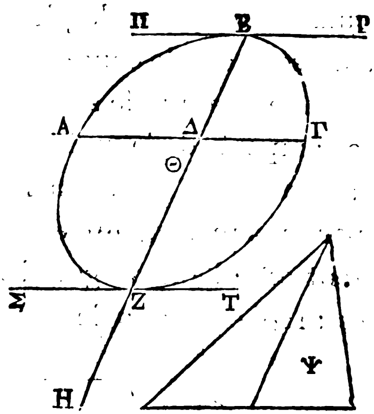
PROPOSITION XXXII.

Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre, et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, le plus petit segment sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des segmens qui sont produits par le plan coupant et de l'axe du petit segment est à l'axe du grand segment.

Coupons un sphéroïde quelconque, comme



nous venons de le dire. Coupons ensuite le sphéroïde par un plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le premier; que cette section du sphéroïde soit l'ellipse ABΓΔ, et que la section du plan qui retranche le segment soit la droite ΓA. Menons à la droite AΓ les parallèles ΠP, ΣT qui touchent l'ellipse aux points B, Z; et par ces parallèles faisons



passer des plans parallèles au plan conduit par AΓ. Ces plans toucheront le sphéroïde aux points B, Z, et la droite BZ qui joindra les sommets des segmens passera par le centre (18). Que le point Θ soit le centre du sphéroïde et de l'ellipse. Puisque le sphéroïde est coupé par un plan non perpendiculaire sur l'axe, la section est une ellipse qui a pour diamètre la droite AΓ (15). Prenons un cylindre dont l'axe soit la droite BΔ, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de $A\Gamma$ comme diamètre (10). Prenons aussi un cône qui ait son sommet au point B, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de $A\Gamma$ comme diamètre (9). On aura un certain segment de cylindre ayant la même base et le même axe que le segment du sphéroïde; on aura aussi un certain segment de cône ayant la même base et le même axe que le segment du sphéroïde. Il faut démontrer que le segment du sphéroïde dont le sommet est le point B est au segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme ΔH est à ΔZ.

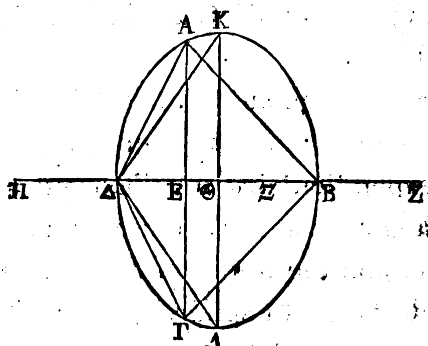
Que la droite ZH soit égale à la droite ΘZ. Prenons un cône Ψ qui soit au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment du sphéroïde, comme ΔH est à ΔZ. Si le segment du sphéroïde n'est pas égal au cône Ψ, qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment du sphéroïde une figure solide composée de segmens de cylindre qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du segment du sphéroïde sur le cône Ψ. On démontrera, comme nous l'avons fait plus haut, que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ, et que la raison du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment à la figure inscrite est plus grande que la raison de ce segment de cylindre au cône Ψ. Ce qui ne peut être. Donc le segment du sphéroïde n'est pas plus grand que le cône Ψ.

Qu'il soit plus petit, si cela est possible. Inscrivons de nouveau dans le segment du sphéroïde une figure solide composée de segmens de cylindre qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du cône Ψ sur le segment du sphéroïde. On démontrera de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ, et que la raison du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du sphéroïde à la figure circonscrite est moindre que la raison du segment de cylindre au cône Ψ. Ce qui ne peut être. Donc le segment du sphéroïde n'est pas plus petit que le cône Ψ. Donc ce qu'il falloit démontrer est évident.

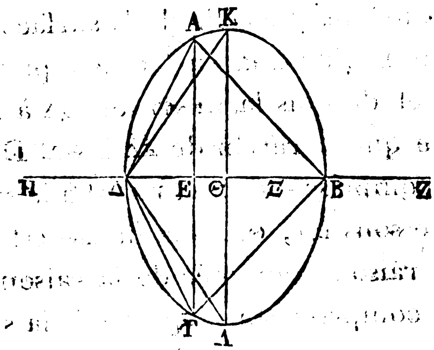
PROPOSITION XXXIII.

Le grand segment d'un sphéroïde quelconque coupé non par son centre par un plan perpendiculaire sur l'axe est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment.

Coupons un sphéroïde quelconque comme on vient de le dire; que ce même sphéroïde soit coupé par un autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le premier; que cette section soit l'ellipse ΑΒΓ ayant pour diamètre la droite ΒΔ qui est l'axe du sphéroïde, et que la section du plan qui retranche le segment soit la droite ΓΑ. Cette droite sera perpendiculaire sur ΒΔ. Que le grand segment soit celui qui a son sommet au point Β, et que le centre du sphéroïde soit le point Θ. Faisons les droites ΔΗ, ΒΖ chacune égale à ΔΘ. Il faut démontrer que le segment du sphéroïde dont le sommet est le point B est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme EH est à EΔ.



Coupons le sphéroïde par un plan conduit par le centre et perpendiculaire sur l'axe, et que le cercle qui est produit par cette section soit la base d'un cône qui ait son sommet sur Δ. Le sphéroïde total sera double du segment qui a pour base le cercle décrit sur KΛ comme diamètre et qui a pour sommet le point Δ. Mais le segment dont nous venons de parler est double du cône qui a la même base et le même axe que le segment. Ce qui a été démontré (29). Donc le sphéroïde total est quadruple du cône dont nous venons de parler. Mais ce cône et celui qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre et pour sommet le point Δ sont en raison composée de la raison de ΘΔ à EΔ, et de la raison du quarré de KΘ au quarré de EA; et la raison du quarré de KΘ au quarré de EA est la même que celle de la surface comprise sous BΘ, ΘΔ à la surface comprise sous BE, EΔ; et de plus la raison de ΘΔ à EΔ est la même que la raison de ΞΔ à ΘΔ. Donc la surface comprise sous ΞΔ, BΘ est à la surface comprise sous BΘ, ΘΔ comme ΔΘ est à ΔE. Mais la raison composée de la raison de la surface comprise sous ΞΔ, ΘB à la surface comprise sous BΘ, ΘΔ, et la raison de la surface comprise sous BΘ, ΘΔ à la surface comprise sous BE, EΔ sont les mêmes que la raison de la surface comprise sous ΞΔ, BΘ à la surface comprise sous BE, EΔ. Donc le cône qui a pour base le cercle décrit autour de KΛ comme diamètre, et qui a pour sommet le point Δ est au cône qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre et pour sommet le point Δ, comme la surface comprise sous ΞΔ, BΘ est à la surface comprise sous BE, EΔ. Mais le cône qui a pour base le cercle décrit autour de AΓ comme diamètre et pour sommet le point Δ est au segment du sphéroïde qui a la même base et le même axe, comme la surface comprise sous BE, EΔ est à la surface comprise sous ZE, EΔ, c'est-à-



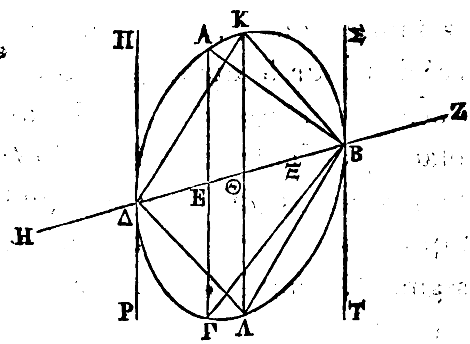
dire comme BE est à EZ; car on a démontré qu'un segment plus petit que la moitié du sphéroïde est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du grand segment est à l'axe du grand segment, c'est-à-dire comme ZE est à BE (32). Donc le cône qui est dans la moitié du sphéroïde est au segment qui est plus petit que la moitié du sphéroïde comme la surface comprise sous ΞΔ, BX est à la surface comprise sous ZE, ΔE. Mais le sphéroïde total est au cône qui est dans la moitié du sphéroïde comme la surface comprise sous ZH, ΞΔ est à la surface comprise sous BΘ, ΞΔ; car le sphéroïde total et la première surface sont quadruples du cône et de la seconde surface; et le cône qui est dans la moitié du sphéroïde est au segment qui est plus petit que la moitié du sphéroïde comme la surface comprise sous ΞΔ, BΘ est à la surface comprise sous ZE, EΔ; et de plus, le sphéroïde total est au plus petit segment comme la surface comprise sous ZH, ΞΔ est à la surface comprise sous ZE, EΔ; donc le plus grand segment du sphéroïde est au plus petit comme l'excès de la surface comprise sous ZH, ΞΔ sur la surface comprise sous ZE, ΔE est à la surface comprise sous ZE, EΔ. Mais l'excès de la surface comprise sous ZH, ΞΔ sur la surface comprise sous ZE, EΔ est égal à la surface comprise sous ΞΔ, EH, conjointement avec la surface comprise sous ZE, ΞE; donc le plus grand segment du sphéroïde est au plus petit comme la surface comprise sous ΞΔ, EH, conjointement avec la surface comprise sous ZE, ΞE est à la surface comprise sous ZE, EΔ. Mais le plus petit segment du sphéroïde est au cône qui a la même base et le même axe que lui, comme la surface comprise sous ZE, EΔ est à la surface comprise sous BE, EΔ; car la première raison est la même que celle de ZE à BE; et le cône qui est dans le plus petit segment est au cône qui est dans le plus grand segment comme la surface comprise sous BE, EΔ est au quarré de BE; car ces cônes qui ont la même base sont entre eux comme leurs hauteurs. Donc le plus grand segment du sphéroïde est au cône qui est dans ce segment comme la surface comprise sous ΞΔ, EH, conjointement avec la surface comprise sous ZE, ΞE est au quarré de BE. Mais cette raison est la même que celle de EH à EΔ; parce que la surface comprise sous ΞΔ, EH est à la surface comprise sous ΞΔ, EΔ comme EH est à EΔ; et que la surface comprise sous ZE, ΞE est à la surface comprise sous ZE, ΘE comme la surface EH est à EΔ; car ΞE est à ΘE comme EH est à EΔ, les droites ΞΔ, ΘΔ, ΔE étant successivement proportionnelles, et ΘΔ étant égal à HΔ. Donc la surface comprise sous ΞΔ, EH, conjointement avec la surface comprise sous ZE, ΞE, est à la surface comprise sous ΞΔ, EΔ, conjointement avec la surface comprise sous ZE, ΘE comme EH est à EΔ. Mais le quarré de BE est égal à la surface comprise sous ΞΔ, EΔ, conjointement avec la surface comprise sous ZE, ΘE; parce que le quarré de BΘ est égal à la surface comprise sous ΞΔ, EΔ, et que l'excès du quarré de BE sur le quarré de BΘ est égal à la surface comprise sous ZE, ΘE, les droites BΘ, BZ étant égales entre elles. Il est donc évident que le grand segment du sphéroïde est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme EH est à EΔ.

PROPOSITION XXXIV.

Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre, et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, le plus grand segment du sphéroïde sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que lui, comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des segmens qui ont été produits par cette section, et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment.

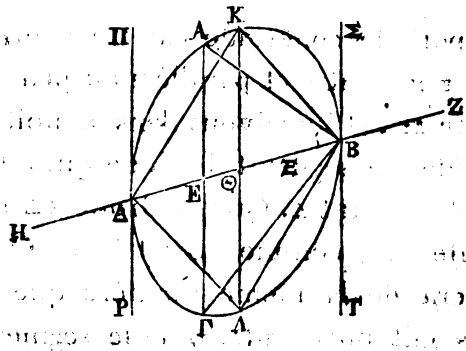
Coupons un sphéroïde par un plan, comme

nous venons de le dire. Coupons ensuite le sphéroïde par un autre plan qui passe par l'axe, et qui soit perpendiculaire sur le plan coupant. Que la section du sphéroïde soit



l'ellipse ABΓΔ, et la section du plan coupant, la droite ΓA. Menons à la droite AΓ les parallèles ΠP, ΣT qui touchent l'ellipse aux points Δ, B; et par ces parallèles conduisons des plans parallèles au plan conduit par AΓ. Ces plans toucheront le sphéroïde aux points B, Δ, et les points B, Δ seront les sommets des segmens. Menons la droite BΔ qui joigne les sommets des segmens qui ont été engendrés; cette droite passera par le centre (18). Que le centre soit le point Θ. Que le plus grand segment du sphéroïde soit celui dont le sommet est le point B. Faisons la droite ΔH égale à ΔΘ, et la droite BZ égale aussi à ΔΘ. Il faut démontrer que le plus grand segment est à un segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme EH est à EΔ.

Coupons le sphéroïde par un plan conduit par le centre et parallèle au plan conduit par AΓ; et inscrivons dans la moitié du sphéroïde un segment de cône qui ait son sommet au point Δ. Que la droite ΞΔ soit à la droite ΘΔ, comme ΔΘ est à EΔ. On démontrera de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que le segment de cône inscrit dans la moitié du sphéroïde est au segment de cône inscrit dans le plus petit segment, comme la surface comprise sous ΞΔ, BΘ est à la surface comprise sous BE, EΔ; et que le segment de cône inscrit dans le plus petit segment est au segment dans lequel il est inscrit, comme la surface comprise sous BE, EΔ est à la surface comprise sous ZE, EΔ. Donc le segment de cône inscrit dans la moitié du sphéroïde est au plus petit segment de ce sphéroïde, comme la surface comprise sous ΞΔ, BΘ est à la surface comprise sous ZE, EΔ. Donc le sphéroïde total sera au segment de cône inscrit dans la moitié du sphéroïde, comme la surface comprise sous ZH, ΞΔ est à la surface comprise sous BΘ, ΞΔ; car le sphéroïde total et la première surface



sont quadruples du cône et de la surface comprise sous BΘ, ΞΔ. Mais le segment de cône dont nous venons de parler est au plus petit segment du sphéroïde, comme la surface comprise sous ΞΔ, BΘ est à la surface comprise sous ZE, EΔ; donc le sphéroïde total est au plus petit segment du sphéroïde comme la surface comprise sous ZH, ΞΔ est à la surface comprise sous EZ, EΔ. Mais le plus grand segment du sphéroïde est au plus petit comme l'excès de la surface comprise sous ZH, ΞΔ sur la surface comprise sous ZE, EΔ est à la surface comprise sous ZE, EΔ; et le plus petit segment du sphéroïde est au segment de cône qui lui est inscrit comme la surface comprise sous ZE, EΔ est à la surface comprise sous BE, EΔ; car on a démontré que cette raison est la même que celle de ZE à BE; et enfin le segment de cône inscrit dans le plus petit segment est au segment de cône inscrit dans le plus grand segment comme la surface comprise sous BE, EΔ est au quarré de BE; car les segmens de cône dont nous venons de parler ayant la même base, sont entre eux comme leurs hauteurs, et ces hauteurs sont entre elles comme les droites ΔE, EB. Donc le plus grand segment du sphéroïde est au segment de cône qui lui est inscrit comme l'excès de la surface comprise sous HZ, ΞΔ sur la surface comprise sous ZE, EΔ est au quarré de BE. On démontrera de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que cette raison est la même que celle de EH à EΔ.

FIN DES CONOÏDES ET DES SPHÉROÏDES.

COMMENTAIRE

SUR LES ŒUVRES

D'ARCHIMÈDE.

COMMENTAIRE

SUR LES DEUX LIVRES

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

LIVRE PREMIER.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE.

(α) La section du cône rectangle est une parabole.

Un cône rectangle est un cône droit dont les côtés, c'est-à-dire les intersections de sa surface convexe et du plan conduit par l'axe, forment un angle droit. Si ces côtés forment un angle aigu, le cône s'appelle cône acutangle, et il s'appelle cône obtus-angle, si ces côtés forment un angle obtus.

Il suit évidemment de là que, si l'on coupe perpendiculairement un des côtés d'un cône rectangle par un plan, la section du cône rectangle sera une parabole; puisque le plan coupant sera parallèle à l'autre côté du cône. La section du cône acutangle, seroit une ellipse, et la section du cône obtus-angle, une hyperbole. C'est ainsi que les anciens Géomètres, avant Apollonius, considéroient les sections du cône qui donnent la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. *Voyez* la note (*a*) de la lettre d'Archimède à Dosithée, qui est à la tête du Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes.

Dans Archimède, la parabole est toujours nommée section du cône rectangle; l'ellipse, section du cône acutangle, et l'hyperbole, section du cône obtus-angle. Pour éviter ces circonlocutions, et à l'exemple d'Apollonius, j'emploierai désormais les mots *parabole, ellipse* et *hyperbole*.

(*c*) Ce passage d'Archimède est très-obscur; j'ai suivi la leçon de M. Delambre. Voici la lettre qu'il me fit l'honneur de m'écrire au sujet de ce passage:

Paris, ce 14 décembre 1806.

« A peine étiez-vous sorti, Monsieur, qu'il m'est venu un doute sur le sens que nous donnons au passage obscur de la lettre à Dosithée. Voici comme on pourroit l'entendre: « Ces » propositions étoient renfermées dans la na- » ture de ces figures, quoiqu'aucun géomètre » avant nous ne les eût apperçues; mais pour

» se convaincre de leur vérité, il suffira de com-
» parer mes théorèmes aux démonstrations que
» j'ai données sur ces figures. La même chose
» est arrivée à Eudoxe. Ses théorèmes sur la
» pyramide et le cône étoient aussi dans la na-
» ture, et n'avoient été reconnus par aucun
» géomètre avant lui. Je laisse le jugement sur
» mes découvertes à ceux qui seront en état de
» les examiner. Plût à Dieu que Conon vécût
» encore, il auroit été bien en état d'en dire son
» avis ».

» Ainsi il ne s'agit pas dans la comparaison des figures aux théorèmes, de juger si ces théorèmes sont nouveaux, mais s'ils sont vrais. De ce qu'ils n'ont été vus par personne, il ne s'ensuit pas qu'on doive les regarder comme douteux; la même chose est arrivée à Eudoxe, qui a trouvé sur la pyramide et le cône des théorèmes nouveaux et qui pourtant ont été admis; que les géomètres examinent donc mes propositions et les jugent. Voilà je pense le vrai sens de la lettre. Les mots *ut quivis facile intelliget* ne sont pas exactement dans le grec; *ut* y manque, et cet *ut* change le sens. Au lieu de *ut* le grec porte *et*. *Ces propositions sont dans la nature, et pour les comprendre il suffit de comparer les théorèmes aux figures et aux démonstrations*. J'avoue pourtant que l'expression grecque me paroît trop peu développée, καὶ νοήσειεν ὅς, *et comprendra celui qui*. Remarquons que ce mot νοήσειεν, *comprendra, se mettra dans la tête*, ne seroit pas le mot propre s'il s'agissoit de reconnoître seulement la nouveauté du théorème. Pour décider si un théorème est nouveau, l'*intelligence* ne fait rien ; il suffit d'avoir des yeux et de savoir lire; mais pour s'assurer de la vérité d'un théorème, il faut être en état de suivre une démonstration, et souvent celles d'Archimède ont besoin qu'on ait quelque intelligence et quelque force de tête.

» Je serois tenté de croire le passage altéré, et qu'il a dû être originairement à-peu-près ainsi : Καὶ νοήσειεν ὃς ἂν τούτων τῶν θεωρημάτων ταῖς ἀποδείξεσι ἀντιπαραβάλῃ αὐτὰ τὰ σχήματα. Je mets θεθεωρημένων, au lieu de σχημάτων, et σχήματα au lieu de θεθεωρημένα. C'est une simple transposition, alors le sens est clair, et alors Archimède dira : *Pour comprendre mes propositions, en sentir l'exactitude, il suffit de comparer la figure à la démonstration des théorèmes*, c'est-à-dire de suivre sur la figure la démonstration des théorêmes. Cependant on peut soutenir la leçon de Torelli, en entendant littéralement le mot *démonstration*. Aujourd'hui par ce mot nous entendons une preuve claire et irrésistible; mais dans le fait il ne signifie que l'action d'exposer, de *montrer*. *Pour* *sentir la vérité de ces propositions, il suffit de les comparer à ce que montrent ces figures; ou l'inspection seule de la figure mettra dans tout son jour la vérité des théorèmes.*

» Au reste, ce passage est tellement tronqué dans un manuscrit n° 2360, qu'il est impossible d'en rien tirer; heureusement il est en lui-même très-peu important. *Voyez* les variantes édit. de Torelli.

» J'ai l'honneur d'être, etc. »

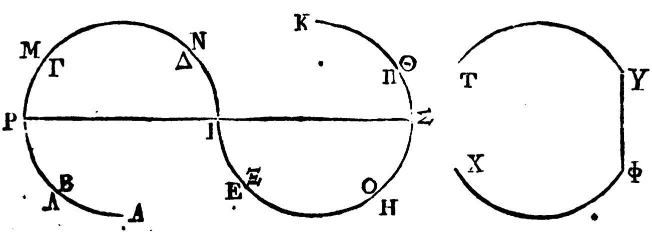
AXIOMES.

(α) Archimède appelle lignes courbes, non-seulement les lignes qui ne sont ni droites, ni composées de lignes droites, mais encore les lignes brisées et les lignes mixtilignes.

D'après le premier axiôme, un arc de cercle est une courbe, qui est toute entière du même côté de la droite, qui joint ses extrémités. Si une courbe étoit composée d'une demi-circonférence de cercle et d'un rayon qui joindroit une de ses extrémités, cette courbe n'auroit aucune de ses parties de l'autre côté de la droite qui joindroit ses extrémités, quand même cette droite seroit prolongée : alors seulement une partie de la courbe seroit sur le prolongement de la droite qui joindroit ses extrémités. Ce qui n'arriveroit point, si l'arc étoit plus grand que la demi-circonférence.

(ϛ) Cet axiôme, qui a beaucoup embarrassé les commentateurs, est cependant de la plus grande clarté. Il suffit pour le comprendre de faire attention qu'une ligne courbe, quelle qu'elle soit, a deux côtés aussi bien qu'une ligne droite.

Soit la courbe ΑΡΙΣΚ. Les lettres ΒΓΔΕΗΘ



sont placées d'un des côtés de cette courbe, et les lettres ΛΜΝΞΟΠ sont placées de l'autre côté. Si l'on s'imaginoit que le point Α se mût dans la courbe ΑΡΙΣΚ jusqu'à ce qu'il fût arrivé au point Κ; on pourroit dire que les lettres ΒΓΔΕΗΘ sont à la droite de la courbe, et que les lettres ΛΜΝΟΠ sont à sa gauche.

Cela posé, joignons les deux points ΡΣ de cette courbe par la droite ΡΖ. Il est évident que la droite ΡΣ sera de différens côtés de cette courbe; la portion ΡΙ sera d'un côté, et la portion ΙΣ sera de l'autre; ou si l'on veut, la première portion sera à la droite de la courbe, et la seconde à sa gauche. Donc cette courbe n'est pas concave du même côté, puisque la droite ΡΣ, qui joint deux de ses points, est de différens côtés de cette courbe.

Une circonférence de cercle, une portion de sa circonférence, une ellipse, une portion de l'ellipse, une parabole et une hyperbole, sont au contraire des courbes concaves du même côté, parce que les droites qui joindroient deux points quelconques de ces courbes, seroient nécessairement des mêmes côtés de ces courbes.

Soit la ligne courbe ΤΥΦΧ, qui est composée de deux arcs ΤΥ, ΧΦ appartenant à un même cercle, et d'une droite ΥΦ menée du point Υ au point Φ; cette courbe sera encore concave du même côté, parce que les droites qui joignent deux points quelconques de cette courbe tombent toutes du même côté, excepté la droite menée du point Υ au point Φ, qui tombe sur cette ligne courbe.

Il sera facile d'appliquer au quatrième axiôme ce que je viens de dire du second.

PRINCIPES.

(*a*) Ce principe n'est point, comme beaucoup de Géomètres l'ont cru, une définition de la ligne droite : c'est simplement l'énoncé d'une de ses propriétés.

(ϐ) Il est des personnes qui pensent que l'injure des temps a fait périr une partie des Élémens d'Euclide, qui regardent le cylindre, le cône et la sphère : ces personnes sont dans l'erreur. Tous les théorêmes qu'on regrette de ne pas trouver dans Euclide, ne peuvent être démontrés qu'à l'aide des principes 2 et 4 : or, Euclide n'a jamais fait usage de ces deux principes ; on ne doit donc pas être surpris de ne pas trouver dans ses Élémens les théorêmes, dont nous venons de parler, et qu'Archimède démontre dans ce traité.

Plusieurs Géomètres ont tenté, mais en vain, de démontrer ces deux principes, lorsque les lignes courbes et les surfaces courbes ne sont point des assemblages de lignes droites et de surfaces planes. Si ces deux principes pouvoient être démontrés, ils l'auroient été par Archimède. Je dis dans la Préface la raison pourquoi il est impossible de démontrer ces deux principes.

(γ) Ce principe est une conséquence de la première proposition du dixième livre d'Euclide.

PROPOSITION III.

(α) Mais ΓΑ est à ΑΘ comme ΗΕ est à ΖΗ; donc la raison de ΕΗ à ΖΗ est moindre que la raison de ΓΑ à ΓΒ.

PROPOSITION IV.

(α) Si l'angle ΤΗΓ étoit égal à l'angle ΛΚΜ, il est évident que la raison de ΜΚ à ΛΚ seroit la même que la raison de ΓΗ à ΗΤ. Si nous supposons ensuite que l'angle ΤΗΓ diminue, la droite ΓΗ diminuera aussi, et la raison de ΓΗ à ΗΤ deviendra plus petite; donc alors la raison de ΜΚ à ΛΚ sera plus grande que la raison de ΓΗ à ΗΤ.

(ϐ) Donc la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit est moindre que la raison de Α à Β.

PROPOSITION VI.

(α) Cette proposition est démontrée dans les Elémens d'Euclide. *Voyez* la proposition II, livre XII.

PROPOSITION VII.

(α) Appelons P le polygone circonscrit, et p le polygone inscrit. Puisque $P : p < A + B : A$, et que $P < A$, on aura à plus forte raison $P : A < A + B : A$. Donc par soustraction $P - A : A < B : A$. Donc $P - A$, c'est-à-dire la somme des segmens placés autour du cercle est plus petite que la surface B.

PROPOSITION VIII.

(α) Lorsqu'Archimède parle d'une surface comprise sous deux droites, il entend toujours parler d'un rectangle, dont une de ces droites est la base et dont l'autre est la hauteur.

PROPOSITION XIV.

(α) La raison en est simple; car puisque $\Gamma\Delta : H :: H : EZ$, il est évident qu'on aura $\frac{\Gamma\Delta}{2} : H :: H : 2 \times EZ$, ou bien $T\Delta : H :: H : PZ$.

(β) La raison de la surface du prisme à la surface du cylindre est moindre que la raison du polygone inscrit dans le cercle B au cercle B. Voilà ce qui est sousentendu, et ce qu'Archimède sousentend toujours dans la suite, lorsqu'il a un raisonnement semblable à faire. Pour que le lecteur puisse, dans ce cas, suppléer ce qui manque, il faut qu'il se souvienne que, lorsqu'on a quatre quantités, et que la raison de la première à la seconde est moindre que la raison de la troisième à la quatrième, la raison de la première à la troisième est encore moindre que la raison de la seconde à la quatrième.

(γ) Parce que ces triangles sont entre eux comme les droites ΤΔ, ΡΖ, et que nous avons vu dans la première partie de la démonstration que ΤΔ est à ΡΖ comme $\overline{\mathrm{T}\Delta}^2$ est à $\overline{\mathrm{H}}^2$.

(δ) La raison du polygone qui est circonscrit au cercle Β à ce même cercle, est moindre que la raison du polygone inscrit dans le cercle Β à la surface du cylindre.

PROPOSITION XV.

(α) Donc, par permutation, la raison de la surface de la pyramide qui est circonscrite au cône à la surface du cône est moindre que la raison du polygone inscrit dans le cercle Β au cercle Β.

(β) En effet, la raison du rayon du cercle A au côté du cône est la même que la raison de la perpendiculaire menée du centre du cercle A sur le côté du polygone à la parallèle au côté du cône menée du milieu du côté du polygone et terminée à l'axe du cône. Mais la perpendiculaire menée du sommet du cône sur le côté du polygone est plus longue que la parallèle dont nous venons de parler; donc la raison du rayon du cercle A au côté du polygone est plus grande que la raison de la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone à la perpendiculaire menée du sommet du cône sur le côté de ce même polygone.

(γ) Donc, par permutation, la raison du polygone circonscrit au cercle B est moindre que la raison de la surface de la pyramide inscrite à la surface du cône.

PROPOSITION XVI.

(α) Donc le cercle Δ est au cercle A comme le quarré de E est au quarré de B. Mais à cause que E est moyen proportionnel entre Γ et B, la droite Γ est à la droite B comme le quarré de E est au quarré de B; donc le cercle Δ est au cercle A comme Γ est à B; mais le cercle Δ est égal à la surface du cône.

LEMME.

(α) Le parallélogramme BH pourroit n'être pas un rectangle, mais alors par les surfaces comprises sous BA, AH; sous BΔ, ΔZ, etc. il faudroit entendre des rectangles dont les droites AH, ΔZ seroient les bases et les droites BA, BΔ les hauteurs.

LEMMES.

(α) Les cylindres qui ont la même base sont entre eux comme leurs hauteurs; donc les cônes qui ont la même base sont aussi entre eux comme leurs hauteurs: ce qui est l'inverse du premier lemme. Je pense qu'il y a une omission, et que le lemme doit être posé ainsi: Lorsque des cônes et des cylindres ont les mêmes bases et les mêmes hauteurs, les cônes sont entre eux comme les cylindres.

(β) Voyez le douzième livre d'Euclide.

PROPOSITION XIX.

(α) Car puisque les cônes BAΓ, BΔΓ ont la même base, la droite AE est à la droite ΔE comme le cône BAΓ est au cône BΔΓ (17, *lemm.* 1). Donc, par addition, la droite ΑΔ est à la droite ΔΕ comme le rhombe ΑΒΓΔ est au cône ΒΔΓ.

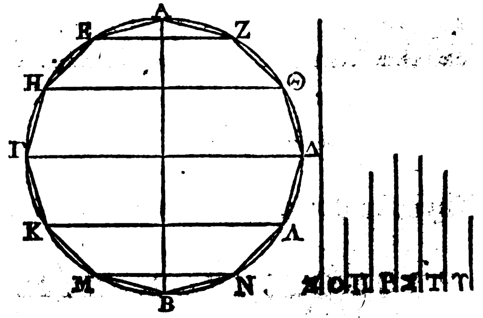
PROPOSITION XXIV.

(α) Archimède veut que le nombre des côtés soit divisible par quatre, afin que deux diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre aient leurs extrémités aux angles du polygone inscrit.

(β) Perpendiculaires l'un sur l'autre.

PROPOSITION XXV.

(α) En effet, puisque les cercles sont proportionnels aux quarrés de leurs rayons, le quarré



du rayon du cercle Ξ est au cercle Ξ, comme le quarré du rayon du cercle Ο est au cercle Ο, comme le quarré du rayon du cercle Π est au cercle Π, comme le quarré du rayon du cercle Ρ est au cercle Ρ, comme le quarré du rayon du cercle Σ est au cercle Σ, comme le quarré du rayon du cercle Τ est au cercle Τ, comme le quarré du rayon du cercle Υ est au cercle Υ. Donc le quarré du rayon du cercle Ξ est au cercle Ξ comme la somme des quarrés des rayons des cercles Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ est à la somme des cercles Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ. Mais le quarré du rayon du cercle Ξ est égal à la somme des quarrés des rayons des cercles Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ; donc le cercle Ξ est égal à la somme des cercles Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ.

PROPOSITION XXXI.

(α) Car les deux triangles ΚΘΖ, ΣΧΖ étant semblables, la droite ΘΖ est à ΧΖ comme ΘΚ est à ΧΣ. Mais ΘΖ est double de ΧΖ; donc ΘΚ est double du rayon ΧΣ; donc ΘΚ est égal au diamètre du cercle ΑΒΓΔ.

PROPOSITION XXXIV.

(α) Car puisque les droites qui joignent les angles du polygone circonscrit, et les droites qui joignent les angles du polygone inscrit sont entre elles comme les côtés des polygones, la somme des premières droites est à la somme des secondes droites comme EΛ est à AK: Donc les surfaces comprises sous les sommes des droites qui joignent les angles des polygones et les côtés des polygones sont des figures semblables.

PROPOSITION XXXV.

(α) Donc, par permutation, la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la sphère est moindre que la raison de la surface de la figure inscrite au cercle A.

PROPOSITION XXXVI.

(α) Soient a, $a - d$, $a - 2d$, $a - 3d$, quatre termes d'une progression arithmétique décroissante, et que ces quatre termes soient ou tous positifs ou tous négatifs. Je dis que la raison du premier terme au quatrième est plus grande que la raison triplée du premier au second; c'est-à-dire, que

$$\frac{a}{a - 3d} > \frac{a^3}{(a - d)^3}.$$

J'élève $a - d$ au cube; je fais disparoître les dénominateurs. La réduction étant faite, la première quantité devient $3ad^2$, et la seconde

d^3. Mais $3ad^2$ est plus grand que d^3, puisque a est plus grand que d; donc

$$\frac{a}{a-3d} > \frac{a^3}{(a-d)^3}.$$

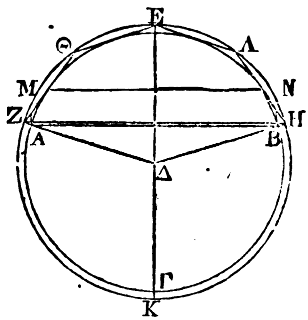
Donc la raison du premier terme d'une progression arithmétique décroissante au quatrième terme est plus grande que la raison triplée du premier terme au second.

(ϐ) Mais la raison de K à H est moindre que la raison de la sphère au cône Ξ; donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est encore moindre que la raison de la sphère au cône. Donc, par permutation, la raison de la figure circonscrite à la sphère est encore moindre que la raison de la figure inscrite au cône.

(γ) Donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est encore moindre que la raison du cône Ξ à la sphère. Donc, par permutation, la raison de la figure circonscrite au cône Ξ est moindre que la raison de la figure inscrite à la sphère.

PROPOSITION XLII.

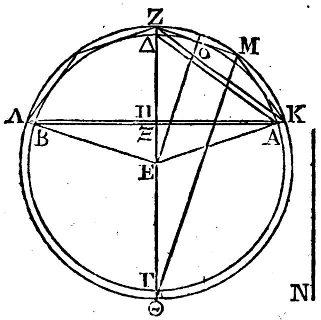
(α) En effet, la surface engendrée par la droite MZ est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la droite ZM et la moitié de la somme des droites ZH, MN (17), et la surface décrite par la droite MA est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la droite MA et la moitié de la somme des



droites AB, MN. Mais ZM est plus grand que MA, et ZH plus grand que AB ; donc la première moyenne proportionnelle est plus grande que la seconde. Donc la surface décrite par ZM est plus grande que la surface décrite par MA.

PROPOSITION XLIV.

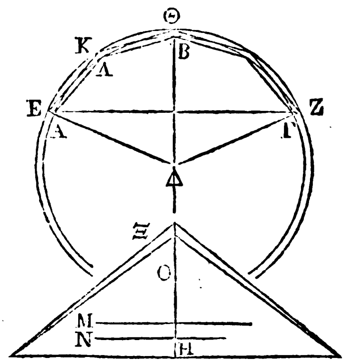
(a) Ce qui précède, à partir de ces mots *mais la surface*, etc. est un peu obscur, voici ce qu'on pourroit mettre à sa place. Donc le quarré du rayon du cercle N, qui est égal à la surface comprise sous MΘ, HZ est encore égal à la surface comprise sous ΓΔ, HZ. Mais le quarré de la droite ΔA est égal à la surface comprise sous ΓΔ, ΔΞ, et nous venons de démontrer que HZ est plus grand que ΔΞ; donc la surface comprise sous ΓΔ, HZ est plus grande que la surface comprise sous ΓΔ, ΔΞ. Donc le quarré du rayon du cercle N, qui est égal à la pre-



mière surface, est plus grand que le quarré de la droite ΔA, qui est égal à la seconde surface. Donc le rayon du cercle N est plus grand que le droite ΔA. Donc le cercle N, et par conséquent la surface de la figure circonscrite au segment sphérique KZΛ, est plus grande que le cercle décrit autour du diamètre ΔA.

PROPOSITION XLVII.

(α) En effet, les droites qui joignent les angles du polygone circonscrit, et les droites qui joignent les angles du polygone inscrit sont proportionnelles aux côtés des polygones; donc la somme des droites qui joignent les angles du polygone circonscrit est à la somme des droites qui joignent les angles du polygone inscrit, comme EK est à AΛ. Donc la surface comprise sous EK et sous la somme des droites qui joignent les angles du polygone circonscrit, conjointement avec la moitié de EZ, est semblable



à la surface comprise sous AΛ et sous la somme des droites qui joignent les angles du polygone inscrit, conjointement avec la moitié de AΓ. Donc la première figure est à la seconde comme le quarré de EK est au quarré de AΛ. Mais le quarré du rayon du cercle M est égal à la première figure, et le quarré du rayon du cercle N est égal à la seconde; donc le premier quarré est au second comme le quarré de EK est au quarré de AΛ. Donc le cercle M, c'est-à-dire la surface de la figure circonscrite est au cercle N, c'est-à-dire à la surface de la figure inscrite comme le quarré de EK est au quarré de AΛ.

(ϵ) Puisque dans la première partie de cette démonstration, l'on a vu que le quarré de EK est au quarré de AΛ comme le cercle M est au cercle N, il est évident que EK est à AΛ comme le rayon du cercle M est au rayon du cercle N.

PROPOSITION XLVIII.

(α) Donc la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est moindre que la raison de la surface du segment au cercle Z. Donc, par permutation, la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface du segment est moindre que la raison de la surface de la figure inscrite au cercle Z.

(ϵ) Puisque le polygone circonscrit est au polygone inscrit comme la surface de la figure circonscrite est à la surface de la figure inscrite, la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est moindre que la raison du cercle Z à la surface du segment. Donc, par permutation, la surface de la figure circonscrite au cercle Z est moindre que la raison de la surface de la figure inscrite à la surface du segment. Mais la surface de la figure circonscrite est plus grande que le cercle Z (44); donc la surface de la figure inscrite est plus grande que la surface du segment; ce qui ne peut être.

PROPOSITION L.

(α) *Voyez* la note (α) de la prop. XXXVI.

(ϐ) Donc la raison de la figure solide circonscrite au secteur est moindre que la raison de la figure inscrite au cône Θ.

LIVRE SECOND.

PROPOSITION II.

(α) Alors au lieu de $\overline{\Gamma\Delta}^2 : \overline{H\Theta}^2 :: H\Theta : EZ$, on aura $\overline{\Gamma\Delta}^2 : \Gamma\Delta \times MN :: H\Theta : EZ$; ou bien $\Gamma\Delta : MN :: H\Theta : EZ$, et par permutation $\Gamma\Delta : H\Theta :: MN : EZ$. Mais $\overline{H\Theta}^2 = \Gamma\Delta \times MN$; donc $\Gamma\Delta : H\Theta :: H\Theta : MN$. Mais $\Gamma\Delta : H\Theta :: MN : EZ$; donc $\Gamma\Delta : H\Theta :: H\Theta : MN :: MN : EZ$. Cette note se rapporte à la fin de la phrase précédente.

(β) Car le cylindre $\Gamma Z \Delta$ étant construit, il est évident que le diamètre de sa base et son axe sont nécessairement donnés.

(γ) Archimède n'en donne pas le moyen. Eutocius expose très au long les différentes manières de résoudre le problême des deux moyennes proportionnelles. J'aurois fait avec plaisir un extrait de son commentaire, si je n'avois pas craint de trop grossir le volume. Je me contenterai de dire que ce problême a été résolu par Platon, Archytas, Héron, Philon de Byzance, Apollonius, Dioclès, Pappus, Sporus, Menechime, Eratosthène et Nicomède. On sait qu'avec la ligne droite et le cercle seulement le problême n'a point de solution, c'est-à-dire qu'on ne sauroit résoudre ce problême avec la géométrie ordinaire.

(δ) Puisque ΓΔ : HΘ :: MN : EZ ; par permutation et à cause que HΘ = KΛ, on aura ΓΔ : MN :: KΛ : EZ. Mais ΓΔ : MN :: $\overline{\Gamma\Delta}^2 : \overline{H\Theta}^2$; donc $\overline{\Gamma\Delta}^2 : \overline{H\Theta}^2$ :: KΛ : EZ. Donc cer. ΓΔ : cer. HΘ :: KΛ : EZ. Donc les bases E, K des cylindres sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs.

PROPOSITION III.

(α) Il est entendu que la base de ce cône doit être égale au cercle qui a pour rayon la droite BΓ.

(ϐ) La démonstration du premier livre ne regarde qu'un secteur sphérique dont la surface est plus petite que la moitié de la surface de la sphère; mais il est facile d'en conclure que l'autre secteur BΘZA est aussi égal à un cône qui a pour base le cercle décrit autour de BΓ comme diamètre, et pour hauteur le rayon de la sphère.

(γ) Par permutation et addition,

(δ) Dans toute proportion géométrique, le quarré de la somme des deux premiers termes est à leur produit comme le quarré de la somme des deux derniers est à leur produit. Soit la proportion géométrique $a : aq :: b : bq$; je dis qu'on aura :

$$(a + aq)^2 : a^2 q :: (b + bq)^2 : b^2 q.$$

En effet, ces quatre quantités peuvent être mises sous la forme suivante :

$$(1 + q)^2 a^2, \; a^2 q, \; (1 + q)^2 b^2, \; b^2 q.$$

Divisant les deux premiers termes par a^2, et les deux derniers par b^2, on aura les deux raisons égales :

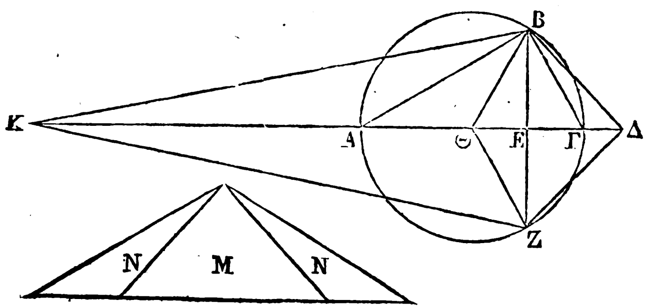
$$(1 + q)^2 : q, \text{ et } (1 + q)^2 : q.$$

(ε) On pourroit démontrer de la manière suivante que ΔΕ : ΕΓ :: ΘΑ + ΑΕ : ΑΕ, lorsque le segment solide ΑΒΓ est égal au cône ΑΔΘ, ou ce qui est la même chose, lorsque le secteur solide ΒΓΖΘ est égal au rhombe solide ΒΔΖΘ.

Supposons donc que le secteur solide ΒΓΖΘ, ou le cône Μ soit égal au rhombe solide ΒΔΖΘ. Nous aurons, ΘΔ : ΘΓ :: cer. ΒΓ : cer. ΒΕ :: $\overline{\text{ΒΓ}}^2$: $\overline{\text{ΒΕ}}^2$ :: $\overline{\text{ΑΓ}}^2$: $\overline{\text{ΑΒ}}^2$ :: ΑΓ : ΑΕ. Donc ΘΔ : ΘΓ :: ΑΓ : ΑΕ. D'où l'on déduit, par soustraction, ΓΔ : ΘΓ :: ΕΓ : ΑΕ; par permutation, ΓΔ : ΕΓ :: ΘΓ : ΑΕ;

et enfin par addition, $\Delta E : E\Gamma :: A\Theta + AE : AE$. Ce qu'il falloit démontrer.

Je démontrerois ensuite que $KE : EA :: \Theta\Gamma + \Gamma E : \Gamma E$, lorsque le segment solide BAZ est égal au cône BKZ, ou lorsque le secteur solide



BΘZA est égal à la figure solide BΘZK, en me conduisant de la même manière.

Supposons en effet que le secteur solide BΘZA, ou que le cône N soit égal à la figure solide BΘZK; nous aurons, $K\Theta : A\Theta ::$ cer. BA : cer. BE $:: \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 :: \overline{A\Gamma}^2 : \overline{B\Gamma}^2 :: A\Gamma : E\Gamma$. Donc $K\Theta : A\Theta :: A\Gamma : E\Gamma$. D'où l'on déduit par soustraction, $KA : A\Theta :: AE : E\Gamma$; par permutation, $KA : AE :: A\Theta : E\Gamma$; et enfin par addition, $KE : AE :: \Theta\Gamma + E\Gamma : E\Gamma$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

(α) Par permutation et par addition.

(β) Parce que dans la proportion continue, le premier terme est au troisième comme le quarré du premier est au quarré du second.

(γ) En effet, puisque $X\Delta : XB :: KB : BP$, et que ΔX est plus grand que BX, la droite KB sera plus grande que la droite BP.

(δ) Parce que la somme des deux premiers termes d'une proportion est au premier comme la somme des deux derniers est au troisième.

(ε) Si l'on a trois quantités a, b, c, la raison de la première à la seconde est la même que la raison composée de la raison de la première à la troisième, et de la raison de la troisième à la seconde; c'est-à-dire, que la raison de $a : b$ est composée de la raison de la raison a à b, et de la raison de $c : b$; c'est-à-dire, que la raison a à b est égale à la raison de ac à bc.

(η) Cette solution et cette construction ne se trouvent point dans Archimède. Voyez sur ce problême la note suivante. Cette note, qui m'a paru très-intéressante, m'a été communiquée par M. Poinsot.

(θ) Il est bien aisé de voir que la construction d'Archimède résoudroit le problême; car il faut que le plus grand segment soit au plus petit comme Π à Σ, ou le plus grand segment à la sphère comme Π à $\Pi + \Sigma$; or, en nommant r le rayon, et x l'apothème KX, la première proportion d'Archimède,

$$\Theta Z : \Theta B :: \Pi : \Sigma, \text{ donne } \Theta Z : r :: \Pi : \Pi + \Sigma.$$

La deuxième, (A)

$$XZ : \Theta Z :: \overline{B\Delta}^2 : \overline{\Delta X}^2, \text{ devient } 2r - x : \Theta Z :: 4r^2 : (r + x)^2.$$

D'où, en multipliant par ordre, on tire:

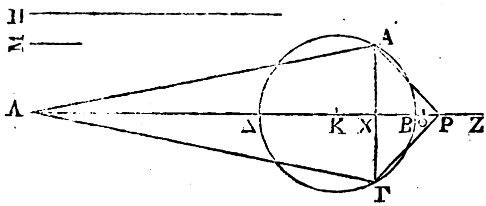
$$2r - x : r :: 4r^2 \Pi : (r + x)^2 (\Pi + \Sigma), \quad \text{(B)};$$

ou bien, en faisant passer le facteur $(r + x)^2$ à l'autre extrême, et le facteur $4r^2$ à l'autre moyen, ce qui est permis:

$$(2r - x)(r + x)^2 : 4r^3 :: \Pi : \Pi + \Sigma.$$

Mais le premier terme $(2r - x)(r + x)^2$ étant multiplié par le tiers du rapport ϖ de la circonférence au diamètre, donne le volume du segment dont x est l'apothème et $r + x$ la flèche; et le deuxième $4r^3$ étant multiplié par le même nombre donne la sphère. Donc, etc.

Réciproquement, si l'on vouloit poser immédiatement la proportion du problème, il faudroit faire : le segment, ou $\frac{\varpi}{3}(2r-x)(r+x)^2$, à la sphère, ou $\frac{\varpi}{3}4r^3$, comme Π à $\Pi+\Sigma$. D'où l'on déduiroit la proportion (B), qu'on pourroit regarder comme le résultat des deux pro-



portions (A) qu'Archimède a su découvrir par son génie.

Archimède en promet pour la fin la solution; mais cette solution ne se trouve pas; et s'il entend une solution ordinaire, c'est-à-dire, par la règle et le compas, comment l'a-t-il pu trouver? La proportion donne pour x l'équation du troisième degré :

$$x^3 - 3r^2x + r^2 . \, 2r\left(\frac{\Pi-\Sigma}{\Pi+\Sigma}\right) = o,$$

laquelle, comparée à la formule générale $x^2 + px + q = o$, donne p essentiellement négatif, et $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, et par conséquent tombe dans le cas irréductible, et a ses trois racines essentiellement réelles. Cette équation répond à la trisection d'un arc φ dont la corde c seroit égale à $2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right)$ dans le cercle dont le rayon est r. Car en nommant x la corde du tiers de cet arc, on a par la géométrie, $x^3 - 3r^2x + r^2.c = o$; de sorte que l'une des racines de l'équation est la corde de l'arc $\frac{\varphi}{3}$; et les deux autres sont les cordes respectives des arcs $\frac{u+\varphi}{3}$, $\frac{2u+\varphi}{3}$ (en nommant u la circonférence entière). Car on sait que la même corde c répond, non-seulement à l'arc φ, mais encore aux arcs $u + \varphi$, $2u + \varphi$; et encore à une infinité d'autres $3u + \varphi$, etc. $u - \varphi$, $2u - \varphi$, etc., mais dont les tiers redonneroient les mêmes cordes que les trois premiers.

Ainsi Archimède auroit, par sa construction, exprimé des radicaux cubes par des radicaux quarrés, et résolu le problême de la trisection de l'angle, ce qui est impossible. Il faut donc penser que s'il a donné la construction qu'il annonce, elle n'étoit pas *géométrique*, c'est-à-dire qu'elle se faisoit par le moyen du cercle et de quelqu'autre section conique, telle que la parabole. Mais d'un autre côté, comme il n'emploie jamais dans ses constructions que la règle et le compas, il est plus probable qu'il n'avoit pas encore de solution ; et que ne la jugeant pas d'abord supérieure au cercle, il ne l'annonce pour la fin, que dans l'espérance où il est de la trouver lorsqu'il viendra à s'en occuper d'une manière particulière. Et cela devient plus probable encore, si l'on observe que l'inconnue de sa proportion ayant nécessairement trois valeurs réelles différentes, il est impossible que sa construction, quelle qu'elle fût, les ait distinguées pour lui en donner une de préférence aux autres. Or, dans ce cas, il n'auroit pu s'empêcher d'en faire la remarque, et de dire un mot sur ce singulier paradoxe, d'avoir trois valeurs différentes, pour résoudre un problême qui n'a évidemment qu'une seule solution ; car il est évident qu'il n'y a qu'une manière de couper la sphère en deux segmens qui soient dans une raison donnée. Il est donc peu probable que la construction d'Archimède soit perdue, puisqu'il est très-probable qu'elle n'a point existé.

Au reste, si l'on veut voir ce que signifient les trois valeurs qu'on trouve pour l'apothème inconnue x, on considérera que la corde c de l'arc φ étant $2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right)$, et par conséquent plus petite que le diamètre $2r$; $\frac{\varphi}{3}$ est nécessairement moindre qu'un sixième de la circonférence u. Par conséquent la première racine $x = \text{cord.} \frac{\varphi}{3}$ est nécessairement plus petite que le rayon, et les deux autres $x' = \text{cord.} \frac{u+\varphi}{3}$, $x'' = \text{cord.} \frac{2u+\varphi}{3}$, sont nécessairement plus grandes. De ces trois valeurs, il n'y a donc que la première qui puisse résoudre le problème que l'on a en vue, puisque l'apothème du segment est toujours plus petite que le rayon de la sphère. Les deux autres racines résolvent donc quelqu'autre problême analogue intimement lié à celui-là. Elles indiquent deux sections à faire dans le solide décrit par la révolution de l'hyperbole équilatère de même axe que le cercle générateur de la sphère; et ces sections faites aux distances x' et x'' du centre, déterminent en effet deux segmens hyperboliques respectivement égaux à ceux de la sphère proposée. Car si l'on nomme x la perpendiculaire abaissée du centre sur la base du segment hyperbolique, de sorte que $x - r$ en soit la flèche, on trouve, pour le volume de ce segment,

$$\frac{\varpi}{3}(2r^3 - 3r^2 x + x^3);$$

ce qui est aussi l'expression du segment sphérique dont la flèche est $r - x$. Ainsi la liaison intime de l'hyperbole équilatère au cercle, fait qu'on ne peut résoudre le problême proposé dans la sphère, sans le résoudre en même temps dans l'hyperboloïde de révolution.

La suite des signes dans l'équation,

$$x^3 - 3r^2x + r^2 . 2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right) = o,$$

fait voir que des trois racines x, x', x'', deux sont nécessairement positives et la troisième négative; et l'absence du second terme montre que celle-ci est égale à la somme des deux autres. On prendra donc les deux plus petites cordes, qui sont x et x'', en plus; et l'autre x' en moins. La première portée à droite à partir du centre sur le diamètre répondra aux deux segmens sphériques qui sont entre eux comme Π à Σ; la deuxième portée du même côté sur la même ligne répondra au segment hyperbolique égal au segment sphérique adjacent; et la troisième portée à gauche répondra, dans l'autre partie de l'hyperboloïde, à un segment égal au second segment sphérique adjacent: de sorte que ces deux segmens de l'hyperboloïde seront aussi entre eux comme Π et Σ, et que leur somme sera aussi égale à la sphère proposée.

Telle est l'analyse de ce problême dont les divers exemples peuvent vérifier ce qu'on vient de dire. Qu'on suppose, par exemple, $\Pi = \Sigma$, auquel cas on veut partager la sphère en deux parties égales. On aura,

$$\text{cord.}\ \varphi = 2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right) = o;$$

par conséquent,

$$x = \text{cord.}\ \frac{\varphi}{3} = o.$$

Ce qui indique d'abord la section à faire par le centre, comme cela doit être. Ensuite on aura:

$$x' = \text{cord.}\ \frac{u}{3} = -r\sqrt{3}, \text{ et } x'' = \text{cord.}\ \frac{2u}{3} = r\sqrt{3};$$

ce qui répond à deux segmens hyperboliques égaux entre eux et à la demi-sphère, comme on peut s'en assurer.

Si l'on suppose $\Sigma = o$, on a cord. $\varphi = 2r$, et par conséquent $\varphi = \frac{u}{2}$. On a donc $x =$ cord. $\frac{u}{6} = r$; ce qui indique un segment nul et un autre égal à la sphère. Ensuite $x'' =$ cord. $\frac{1}{6}u = r$, et $x' =$ cord. $\frac{u}{2} = 2r$, ou plutôt $-2r$; ce qui indique deux segmens dans l'hyperboloïde, l'un nul et l'autre égal à la sphère. Au reste, dans ces deux cas, l'équation offre d'elle-même ses racines; car dans le premier elle devient, $x^3 - 3r^2 x = o$, qui donne sur-le-champ $x = o$, et $x = \pm \sqrt{3r^2} = \pm r\sqrt{3}$; ce qui est le côté du triangle équilatéral inscrit.

Dans le second cas, elle devient $x^3 - 3r^2 x + 2r^3 = o$, et se décompose en ces trois facteurs, $(x - r)$, $(x - r)$, $(x - 2r)$.

Si l'on vouloit construire l'équation par le moyen du cercle et de la parabole, on pourroit employer le cercle dont l'équation est :

$$y^2 + x^2 - 4ry + 2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right)x = o,$$

et la parabole dont l'équation est, $x^2 - ry = o$; car en éliminant y entre ces équations, afin d'avoir les abscisses x qui répondent aux points d'intersection des deux courbes, on trouve :

$$x^4 - 3r^2x^2 + r^2.2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right)x = o,$$

et divisant par x,

$$x^3 - 3r^2x + r^2.2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right) = o;$$

ce qui est l'équation proposée.

Enfin, nous observerons que le problême dont il s'agit étant proposé pour l'ellipsoïde de révolution, conduit absolument à la même équation. Ainsi, en nommant a le demi-grand axe de l'ellipse, on a, pour déterminer l'apothème x de deux segmens qui sont entre eux comme Π et Σ, l'équation

$$x^3 - 3a^2x + a^2 . 2a\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right) = o,$$

et comme le second axe b n'entre pas dans cette équation, on peut conclure qu'on aura toujours les mêmes solutions pour tous les ellipsoïdes de révolution de même axe a; et pour tous les hyperboloïdes conjugués, puisque l'équation de l'ellipse ne diffère de celle de l'hyperbole que par le signe du quarré de ce second axe : et c'est ce qui confirme encore ce que nous avons déjà dit, que la question ne peut être proposée pour l'ellipsoïde, sans l'être en même temps pour l'hyperboloïde conjugué.

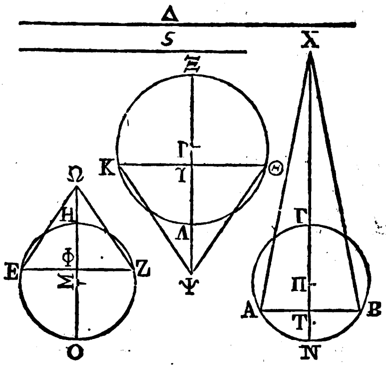
PROPOSITION VI.

(α) Puisque les segmens EZH, ΘΚΛ sont semblables, on aura ΣΟ : ΦΟ :: ΡΞ : ΥΞ, et par addition, ΣΟ + ΦΟ : ΦΟ :: ΡΞ + ΥΞ : ΥΞ. Mais on a d'ailleurs,

ΣΟ + ΦΟ : ΦΟ :: ΩΦ : ΗΦ,
ΡΞ + ΥΞ : ΥΞ :: ΨΥ : ΛΥ;

donc ΩΦ : ΗΦ :: ΨΥ : ΛΥ. Donc par permutation ΩΦ : ΨΥ :: ΗΦ : ΛΥ. Mais ΗΦ : ΛΥ :: ΕΖ : ΚΘ, à cause que les segmens sont semblables; donc

ΩΦ : ΨΥ :: EZ : KΘ. Donc les cônes EZΩ, ΨΘK



sont semblables, puisque leurs hauteurs sont proportionnelles aux diamètres de leurs bases.

(ϐ) C'est-à-dire, qu'elles forment une progression géométrique.

PROPOSITION IX.

(α) Une raison doublée d'une autre raison est cette seconde raison multipliée par elle-même, et une raison sesquialtère d'une autre raison est cette seconde raison multipliée par sa racine quarrée.

(ϐ) Car la proportion EΔ + ΔZ : ΔZ :: ΘZ : ZB donne par soustraction la proportion suivante, EΔ : ΔZ :: BΘ : ZB, qui devient, en échangeant les extrêmes, BZ : ZΔ :: BΘ : EΔ = BE.

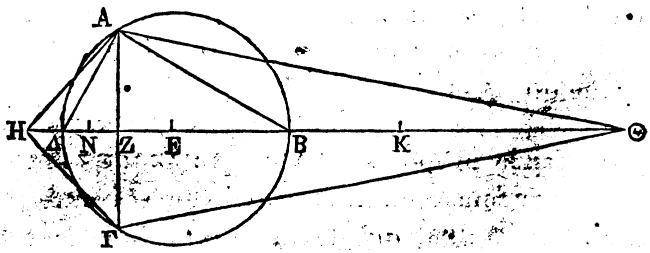
(γ) En effet, dans la proportion $BZ : Z\Delta :: \Theta B : BE$, la droite BZ étant plus grande que la droite $Z\Delta$, il est évident que ΘB sera plus grand que BE.

(δ) Et par permutation, $KZ : HZ :: ZB : Z\Delta$.

(ϵ) Car puisque $B\Theta > BK$, il est évident que $\Theta B : BZ > BK : BZ$. Donc, par addition, $\Theta Z : BZ > KZ : BZ$, et par conversion, $\Theta Z : \Theta B < KZ : BK$. Donc, par permutation, $\Theta Z : KZ < \Theta B : BK$.

(ζ) La première surface étant égale au quarré de l'ordonnée AZ, et la seconde étant égale au quarré du rayon, la première surface est plus petite que la seconde, parce que toute ordonnée qui ne passe pas par le centre est plus petite que le rayon.

(θ) Puisque $\overline{BN}^2 = \Theta B \times BK$, on aura, $\Theta B : BN :: BN : BK$. Donc $\Theta B : BK :: \overline{BN}^2 : \overline{BK}^2$. Mais ΘB



$: BN :: BN : BK$; donc, par addition, $\Theta N : BN$

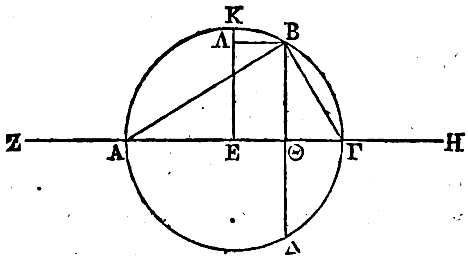
:: KN : BK. Donc $\overline{\Theta N}^2 : \overline{BN}^2 :: \overline{KN}^2 : \overline{BK}^2$; et par permutation, $\overline{\Theta N}^2 : \overline{KN}^2 :: \overline{BN}^2 : \overline{BK}^2$. Mais $\Theta B : BK :: \overline{BN}^2 : \overline{BK}^2$; donc $\Theta B : BK :: \overline{\Theta N}^2 : \overline{KN}^2$.

(ι) Que les trois quantités a, b, c soient telles que $a^2 : b^2 > b : c$; je dis que $a : c > b^{\frac{3}{2}} : c^{\frac{3}{2}}$.

Prenons une moyenne proportionnelle d entre b et c, de manière qu'on ait $b : d :: d : c$; puisque $a^2 : b^2 > b : c$, et que $b : c :: b^2 : d^2$, nous aurons $a^2 : b^2 > b^2 : d^2$; ou bien $a : b > b : d$. Faisons en sorte que $\div\div\ c : d : b : e$. Puisque ces quatre quantités forment une progression géométrique, on aura $e : c :: b^3 : d^3$. Mais $b : d :: b^{\frac{1}{2}} : c^{\frac{1}{2}}$, parce que $b : c :: b^2 : d^2$; donc $b^3 : d^3 :: b^{\frac{3}{2}} : c^{\frac{3}{2}}$. Donc $e : c :: b^{\frac{3}{2}} : c^{\frac{3}{2}}$. Mais $a > e$; car si a étoit égal à e, on auroit $\div\div\ a : b : d : c$, et par conséquent $a^2 : b^2 :: b : c$, et si a étoit plus petit que e, on auroit $a^2 : b^2 < b : c$. Mais $a^2 : b^2 > b : c$; donc $a > e$. Donc $a : c > b^{\frac{2}{3}} : c^{\frac{2}{3}}$. Or, Archimède a démontré que $\overline{\Theta Z}^2 : \overline{ZK}^2 > ZK : ZH$; donc $\Theta Z : ZH > \overline{ZK}^{\frac{3}{2}} : \overline{ZH}^{\frac{3}{2}}$.

(λ) En effet, puisque le segment BAΔ : cône BAΔ :: HΘ : ΘΓ (2, 3); que le cône BAΔ : cône BΓΔ :: AΘ : ΘΓ, ces deux cônes ayant la même base, et que le cône BΓΔ : segment BΓΔ :: AΘ

: ΘZ (2, 3). Multipliant ces trois proportions, terme par terme, on aura : segment BAΔ × cône BAΔ × cône BΓΔ : cône BAΔ × cône BΓΔ × segment BΓΔ :: HΘ × AΘ × AΘ : ΘΓ × ΘΓ × ΘZ;



ou bien, segment BAΔ : segment BΓΔ :: segment BAΔ × cône BAΔ × cône BΓΔ : cône BAΔ × segment BΓΔ :: HΘ × AΘ × AΘ : ΘΓ × ΘΓ × ΘZ.

(μ) Soient quatre droites a, c, d, b; je dis que la raison composée de la raison de la surface comprise sous a, b, au quarré construit sur c, et de la raison de b à d, est égale à la raison de la surface comprise sous a, b, multipliée par b, au quarré de c, multiplié par d, ou ce qui est la même chose, je dis que la raison composée de la raison de ab à ac^2 et de la raison de b à d, est égale à la raison de ab multiplié par b, au quarré de c multiplié par d; c'est-à-dire, que la raison composée de la raison ab à c^2, et de la raison de b à d, est égale à la raison de $ab \times b$ à $c^2 d$. Ce qui est évident.

(ν) Cette proposition peut se démontrer algébriquement avec la plus grande facilité.

Appelons r le rayon de la sphère, et x la droite EZ. La droite ΔZ sera égale à $r - x$; et le plus grand segment de la sphère, qui est ABΓ, sera égal à $\frac{\Pi \times \overline{AZ}^2}{3} \times \Theta Z$, c'est-à-dire à

$$\frac{\Pi \times AZ}{3}\,\frac{(2r - x)(r + x)}{r - x},$$

et le plus petit segment, qui est AΔΓ, sera égal à

$\frac{\Pi \times \overline{AZ}^2}{3} \times HZ$, c'est-à-dire à

$$\frac{\Pi \times \overline{AZ}^2}{3}\,\frac{(2r + x)(r - x)}{x}.$$

Il faut démontrer d'abord que la raison de

$$\frac{\Pi \times AZ}{3}\,\frac{(2r - x)(r + x)}{r - x}$$

à

$$\frac{\Pi \times AZ}{3}\,\frac{(2r + x)(r - x)}{x}$$

est moindre que la raison doublée de la surface du plus grand segment à la surface du plus petit; c'est-à-dire que

$$\frac{(2r - x)(r + x)}{r - x} : \frac{(2r + x)(r - x)}{x}$$
$$< (r + x)^2 : (r - x)^2.$$

Il faut démontrer ensuite que

$$\frac{(2r-x)(r+x)}{r-x} : \frac{(2r+x)(r-x)}{x}$$
$$> (r+x)^{\frac{3}{2}} : (r-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Ou ce qui est la même chose, il faut démontrer d'abord que

$$\frac{\frac{(2r-x)(r+x)}{r-x}}{\frac{(2r+x)\cdot(r-x)}{x}} < \frac{(r+x)^2}{(r-x)^2};$$

et il faut démontrer ensuite que

$$\frac{\frac{(2r-x)(r+x)}{r-x}}{\frac{(2r+x)(r-x)}{x}} > \frac{(r+x)^{\frac{3}{2}}}{(r-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce qui sera évident, quand on aura fait les opérations convenables.

PROPOSITION X.

(α) Si une droite est coupée en deux parties inégales en un point et encore en deux autres parties inégales dans un autre point, le rectangle compris sous les deux segmens qui s'éloignent moins du milieu de cette droite, est plus grand que le rectangle compris sous les deux segmens qui s'en éloignent davantage ; d'où il suit que si le plus petit côté de l'un de ces rectangles est plus grand que le plus petit de l'autre rectangle, le premier rectangle est plus grand que le second.

Cette proposition est démontrée généralement dans Euclide., mais ici c'est un cas particulier facile à démontrer.

En effet, le rectangle $\text{AP} \times \text{P}\Gamma$ est égal au quarré de l'ordonnée qui passe par le point P, et le rectangle $\text{AK} \times \text{K}\Gamma$ est égal au quarré de l'ordonnée KB. Mais l'ordonnée qui passe par le point P est plus grande que l'ordonnée KB ; donc le rectangle $\text{AP} \times \text{P}\Gamma$ est plus grand que le rectangle $\text{AK} \times \text{K}\Gamma$.

(ϐ) Le quarré de AP est égal à $\text{AK} \times \Gamma\Xi$; car puisque $\text{AP} = \text{E}\Lambda$, et que $\overline{\text{E}\Lambda}^2 = \frac{\overline{\text{EZ}}^2}{2}$, il est évident que $\overline{\text{AP}}^2 = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{2}$, puisque $\text{AB} = \text{EZ}$.

(γ) En effet, puisque $\text{AP} \times \text{P}\Gamma + \overline{\text{AP}}^2 > \text{AK} \times \text{K}\Gamma + \text{AK} \times \Gamma\Xi$, on aura $(\text{P}\Gamma + \text{AP})\,\text{AP} < (\text{K}\Gamma + \Gamma\Xi)\,\text{AK}$, ou bien $\Gamma\text{A} \times \text{AP} > \Xi\text{K} \times \text{KA}$.

FIN DU COMM. SUR LA SPHÈRE ET LE CYLINDRE.

COMMENTAIRE

SUR

LA MESURE DU CERCLE.

PROPOSITION I.

(α) En effet, puisque la somme des segmens restans est égale au cercle moins la figure rectiligne inscrite, le cercle moins cette figure rectiligne sera plus petit que le cercle moins le triangle. Donc la figure rectiligne est plus grande que le triangle.

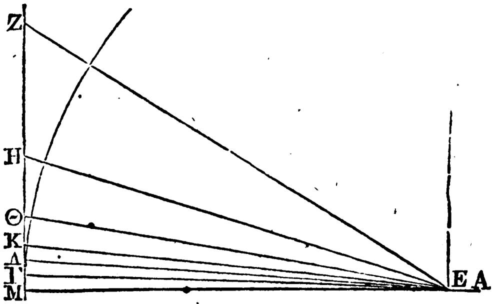
(β) Car nous venons de démontrer que la figure rectiligne est plus grande que ce triangle.

(γ) En effet, puisque OP > PM, le triangle OAP est plus grand que le triangle PAM; par la même raison le triangle OAΠ est plus grand que le triangle ΠAZ.

PROPOSITION III.

(α) Car le sinus du tiers d'un angle droit étant égal à la moitié du rayon, et le rayon étant au sinus comme la sécante est à la tangente, il est évident que EZ sera double de $Z\Gamma$, c'est-à-dire que $EZ : Z\Gamma :: 306 : 153$. Mais $ZE = 306$, et $Z\Gamma = 153$; donc la droite ΓE égalera $\sqrt{\overline{306}^2 - \overline{153}^2}$; c'est-à-dire 265 et une fraction. Donc $\Gamma E : Z\Gamma > 265 : 153$.

(ϐ) Puisque la raison de $\Gamma E : \Gamma H > 571 : 153$, il est évident que si ΓH vaut 153, la droite ΓE



surpassera 571. Donc $\overline{\Gamma E}^2 + \overline{\Gamma H}^2 : \overline{\Gamma H}^2 > \overline{571}^2 + \overline{153}^2 : \overline{153}^2$. Mais $\overline{\Gamma E}^2 + \overline{\Gamma H}^2 = \overline{EH}^2$; donc $\overline{EH}^2 : \overline{\Gamma H}^2$

$> \overline{571}^2 + \overline{153}^2 : \overline{153}^2$; c'est-à-dire, $\overline{\mathrm{EH}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{H}}^2 >$ 349450 : 23409; et si l'on extrait les racines quarrées, on aura EH : ΓH $> 591\frac{1}{8}$: 153.

FIN DU COMMENT. SUR LA MESURE DU CERCLE.

COMMENTAIRE

SUR

LES CONOÏDES ET LES SPHÉROÏDES.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE.

(α) DANS Archimède l'ellipse, la parabole et l'hyperbole sont toujours nommées section du cône acutangle, section du cône rectangle et section du cône obtusangle.

Par cône acutangle, il entend un cône droit dont les côtés qui sont les intersections de sa surface et du plan conduit par l'axe, forment un angle aigu. Si ces intersections forment un angle droit, le cône s'appelle rectangle, et si elles forment un angle obtus, le cône s'appelle obtusangle.

En effet, que chacun de ces cônes soit coupé par un plan perpendiculaire sur un des côtés de l'angle formé par le plan qui passe par l'axe, il est évident que la section du cône acutangle sera une ellipse, puisque le plan coupant rencontrera l'autre côté du cône; que la section du cône rectangle sera une parabole, puisque le plan coupant sera parallèle à l'autre côté, et que la section du cône obtusangle sera une hyperbole, puisque le plan coupant rencontrera le prolongement de l'autre côté.

Archimède ayant nommé section du cône rectangle, ce que nous appelons parabole, et section du cône obtusangle, ce que nous appelons hyperbole, il nomme conoïde rectangle, le solide de révolution engendré par une parabole, et conoïde obtusangle, le solide de révolution engendré par une hyperbole. Pour éviter les circonlocutions, et à l'exemple d'Apollonius, j'emploierai les mots *ellipse*, *parabole* et *hyperbole*, et par conséquent les mots *conoïde parabolique* et *conoïde hyperbolique*.

(ϐ) Toutes les paraboles sont semblables; donc tous les conoïdes paraboliques sont encore semblables. Les hyperboles semblables sont celles dont les axes sont proportionnels. Donc les conoïdes hyperboliques semblables sont ceux qui sont engendrés par des hyperboles semblables.

PROPOSITION I.

(*a*) Soit a la plus petite des quantités inégales, et n le nombre de ces quantités; la plus grande égalera an; leur somme égalera

$\left(\frac{an+a}{2}\right)n$, et le double de leur somme égalera $(an+a)n$, c'est-à-dire an^2+an; mais la somme des quantités égales est égale à an^2; donc la somme des quantités égales est plus petite que le double de la somme de celles qui se surpassent également de la quantité an, c'est-à-dire de la plus grande des quantités inégales. Mais la somme des quantités inégales, la plus grande étant exceptée, est égale à a

$$\frac{(n-1)(n-1)}{2};$$

et le double de cette somme est égale à $a(n-1)(n-1)$, c'est-à-dire à $an^2-2an+a$; donc la somme des quantités égales surpasse le double de la somme des quantités inégales, la plus grande étant exceptée, de $2an-a$, c'est-à-dire du double de la plus grande des quantités inégales, moins la plus petite de ces quantités. Donc la somme des quantités égales est plus grande que la somme des quantités inégales, la plus grande étant exceptée.

PROPOSITION II.

(α) Soient les quantités

a, ab, abc, etc.	d, db, dbc, etc.
ae, abf, $abcg$, etc.	de, dbf, $dbcg$, etc.

l'on aura $a : ab :: d : db$; $ab : abc :: db : dbc$; $a : ae :: d : de$; $ab : abf :: db : dbf$; $abc : abcg :: dbc : dbcg$, etc. Je dis que $a + ab + abc : ae + abf + abcg :: d + db + dbc : de + dbf + dbcg$. Ce qui est évident; car en échangeant les moyens et en décomposant, on a $a(1 + b + bc) : d(1 + b + bc) :: a(e + bf + bcg) : d(e + bf + bcg)$, c'est-à-dire $a : d :: a : d$.

(β) Cela est évident, car dans ce cas au lieu de la proportion $a(1 + b + bc) : d(1 + b + bc) :: a(e + bf + bcg) : d(e + bf + bcg)$, on auroit $a(1 + b) : d(1 + b) :: a(e + bf) : d(e + bf)$.

PROPOSITION III.

(α) Appliquer à une ligne une surface dont la partie excédante soit un quarré, c'est appliquer à cette ligne un rectangle tel que l'excès de sa hauteur sur cette même ligne soit égal à sa base.

(β) Voyez cette proposition et la note (α) qui l'accompagne.

(γ) Cette proposition d'Archimède pourroit se démontrer algébriquement de la manière suivante.

Que le côté du plus petit quarré soit 1, et le nombre des quarrés n. Que a soit une des lignes qu'Archimède appelle A. La somme des quarrés sera égale à $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, et la somme des rectangles où est la lettre A sera égale à $\left(\frac{a + an}{2}\right)n$, c'est-à-dire $\frac{an + an^2}{2}$. Donc la somme des quarrés, conjointement avec la somme des rectangles, sera égale à

$$\tfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \tfrac{1}{2}(an + an^2).$$

La somme de tous les rectangles où sont les lettres Θ, I, K, Λ est égale à $(a + n)n^2$.

Il faut démontrer que la raison de $(a + n)n^2$ à

$$\tfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \tfrac{1}{2}(an + an^2)$$

est moindre que la raison de $n + a$ à $\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}a$, et que la raison de $(n + a)n^2$ à

$$\tfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \tfrac{1}{2}(an + an^2) - (a + n)n,$$

est plus grande que la raison de $n + a$ à $\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire qu'il faut démontrer que

$$\frac{(n + a)n^2}{\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{2}(an + an^2)}$$

est plus petit que $\frac{n + a}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}a}$, et que

$$\frac{(a + n)n^2}{\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{2}(an + an^2) - (n + a)n}$$

est plus grand que $\frac{n + a}{\frac{1}{3} n + \frac{1}{2} a}$. Dans le premier cas, je fais disparoître les dénominateurs, je supprime les facteurs communs, et la première quantité devient $2 n^2 + 3 an$, et la seconde devient $2 n^2 + 3 an + 3 a + 3 n + 1$. Or, la première quantité est plus petite que la seconde; donc le premier cas est démontré. Pour le second cas, je me conduis d'une manière semblable. La première quantité devient $2 n^2 + 3 an + 3 a + 6 n$, et la seconde devient $2 n^2 + 3 an + 1$. Or, la première quantité est plus grande que la seconde; donc le second cas est aussi démontré.

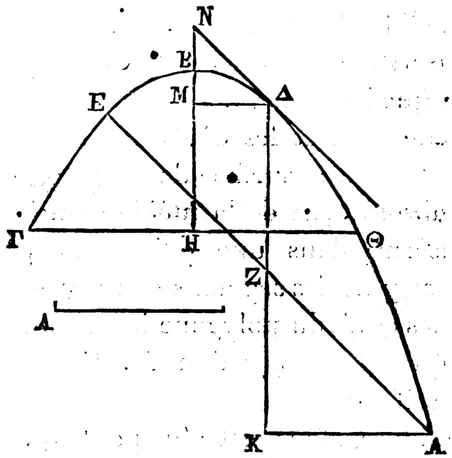
(δ) Apollonius, liv. III, prop. 17 et 18.

PROPOSITION IV.

(ε) Apollonius, liv. I, prop. 46.

(γ) Conduisons la droite ΔN tangente à la parabole au point Δ; prolongeons HB, et du point Δ menons la perpendiculaire ΔM sur BH. Nommons ΔM, y, et BM, x; que Λ soit le paramètre. On aura $\Delta M = \sqrt{\Lambda x}$, $MN = 2x$, $\Delta N = \sqrt{4x^2 + \Lambda x}$, $AZ = \sqrt{(4x + \Lambda)\,\Delta Z}$.

Les deux triangles AKZ, ΔMN étant semblables, on aura $AZ : AK :: \sqrt{4x^2 + \Lambda x} : \sqrt{\Lambda x}$; ou bien $\overline{AZ}^2 : \overline{AK}^2 :: 4x^2 + \Lambda x : \Lambda x$; c'est-à-dire $\overline{AZ}^2 : \overline{AK}^2 :: 4x + \Lambda : \Lambda$. Donc $N = 4x + \Lambda$. Mais



$4x + \Lambda$ est égal au paramètre du diamètre ΔK; donc $\overline{AZ}^2 = N \times \Delta Z$.

(δ) Apollonius, liv. I, prop. II.

PROPOSITION V.

(α) En effet, puisque $M\Lambda : K\Lambda :: B\Theta : E\Theta$, on aura $M\Lambda + B\Theta : K\Lambda + E\Theta :: B\Theta : E\Theta$. Multipliant la première raison par $\Lambda\Theta$, on aura $(M\Lambda + B\Theta)\,\Lambda\Theta : (K\Lambda + E\Theta)\,\Lambda\Theta :: B\Theta : E\Theta$. Mais le premier produit est égal au trapèze compris entre les ordonnées du cercle, et le second produit est égal au trapèze compris entre les ordonnées de l'ellipse; donc trapèze ΕΛ : trapèze ΘΜ :: ΘΕ : ΒΘ.

(ϐ) Euclide, liv. XII, prop. 2, démontre qu'on peut inscrire dans un cercle un polygone de manière que la somme des segmens placés entre la circonférence et les côtés du polygone soit plus petite qu'une surface donnée. On démontreroit absolument de la même manière qu'on peut inscrire dans une ellipse un polygone dont la somme des segmens compris entre l'ellipse et les côtés du polygone inscrit seroit plus petite qu'une surface donnée. Cela posé, si l'on inscrit dans l'ellipse un polygone dont la somme des segmens soit plus petite que l'excès de la surface comprise dans l'ellipse sur le cercle Ψ, il est évident que le polygone inscrit sera plus grand que le cercle Ψ.

PROPOSITION VI.

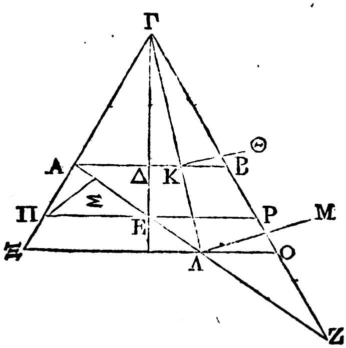
(α) Donc si l'on multiplie ces deux proportions termes par termes, et si l'on supprime les facteurs communs des deux termes de chaque raison, la surface Χ sera au cercle Ψ comme la surface comprise sous ΑΓ, ΒΔ est au quarré de ΕΖ.

PROPOSITION VII.

(α) Donc par raison d'égalité, la surface A sera à la surface B comme $\Gamma\Delta$ est à EZ.

PROPOSITION VIII.

(α) Par le point E menons la droite ΠE parallèle à AB, on aura les deux proportions suivantes, $A\Delta : \Pi E :: \Delta\Gamma : \Gamma E$; $\Delta B : EP :: \Delta\Gamma : E\Gamma$. Ces deux proportions donnent $A\Delta \times \Delta B : \Pi E$



$\times EP :: \overline{\Delta\Gamma}^2 : \overline{E\Gamma}^2$; ou bien $A\Delta \times \Delta B : \overline{\Delta\Gamma}^2 :: \Pi E \times EP : \overline{E\Gamma}^2$. Mais l'angle Z est plus petit que l'angle $P\Pi\Gamma$, qui est égal à l'angle $\Pi P\Gamma$. Donc l'angle Z est plus petit, que l'angle $P\Pi\Gamma$. Faisons l'angle $E\Pi\Sigma$ égal à l'angle Z. Les deux triangles ZEP, $E\Pi\Sigma$ seront semblables. Donc $\Pi E : EZ :: \Sigma E : EP$;

donc $\Pi E \times EP = \Sigma E \times EZ$. Mais $\Pi E \times EP : \overline{E\Gamma}^2 :: A\Delta \times \Delta B : \overline{\Delta\Gamma}^2$; donc $\Sigma E \times EZ : \overline{E\Gamma}^2 :: A\Delta \times \Delta B : \overline{\Delta\Gamma}^2$. Donc la raison de $AE \times EZ$ à $\overline{E\Gamma}^2$ est plus grande que la raison de $A\Delta \times \Delta B$ à $\overline{\Delta\Gamma}^2$.

(β) Par raison d'égalité.

(γ) En effet, $AE : E\Pi :: A\Lambda : \Lambda\Xi$, et $EZ : EP :: \Lambda Z : \Lambda O$. Donc $AE \times EZ : E\Pi \times EP :: A\Lambda \times \Lambda Z : \Lambda\Xi \times \Lambda O$.

(δ) Parce que dans l'ellipse le quarré de la moitié du grand diamètre est au quarré de la moitié du petit diamètre comme le quarré d'une ordonnée est au produit des abscisses correspondantes.

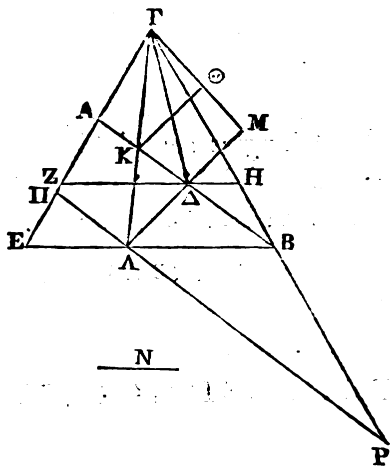
(ε) Par raison d'égalité.

PROPOSITION IX.

(α) Dans cet endroit, Archimède se sert pour la première fois du mot ελλειψις, *ellipsis*.

(β) Dans ce cas, le problême seroit résolu.

(γ) Dans l'ellipse le quarré d'une ordonnée est au produit des abscisses correspondantes comme le quarré du diamètre conjugué est au quarré du diamètre. Donc N^2 est à $Z\Delta \times \Delta H$ comme le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour du diamètre ZH est au quarré de ZH. Mais le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour du diamè-



tre E est au quarré de EB comme N^2 est à $Z\Delta \times \Delta O$. Donc le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour du diamètre EB est au quarré de son autre diamètre EB comme le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour de ZH est au quarré de son autre diamètre ZH. Donc ces ellipses sont semblables.

(δ) En effet, on a supposé que le quarré de N est à $Z\Delta \times \Delta H$ comme le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour de EB est au quarré du diamètre EB, c'est-à-dire comme le quarré du demi-diamètre conjugué est au quarré de la moitié de EB. Mais le quarré du demi-diamètre conjugué est au quarré du demi-diamètre EB, comme le quarré de l'ordonnée ΛM est à EΛ × ΛB (Apoll. liv. 1, prop. 21). Donc le quarré de N est à ZΔ × ΔH comme $\overline{\Lambda M}^2$ est à EΛ × ΛB.

(ε) Car les triangles semblables ZΔΑ, EΛΠ, et les triangles semblables ΔBH, ΛPB donnent ZΔ : ΑΔ :: EΛ : ΠΛ; ΔH : ΔB :: ΛB : ΛP. D'où l'on déduit ZΔ × ΔH : ΑΔ × ΔB :: EΛ × ΛB ou $\overline{\Lambda M}^2$: ΠΛ × ΛP.

PROPOSITION X.

(α) C'est-à-dire que la raison du quarré de l'ordonnée ΘK au produit des abscisses correspondantes AK, KΛ, est la même que la raison du quarré du demi-diamètre ZΓ au quarré du demi-diamètre ΑΔ (Apoll. liv. 1, prop. 21).

(ϐ) Car les droites ZΑ, ΓΔ, HB étant parallèles, on aura ZΑ : AK :: ZΓ : ΑΔ; ΛH : KB :: ZΓ : ΑΔ; ce qui donne ZΑ × ΛH : AK × KB :: $\overline{Z\Gamma}^2$: $\overline{A\Delta}^2$.

(δ) En effet, puisque $\overline{\Gamma\Xi}^2 = \overline{Z\Gamma}^2 - \overline{N\Xi}^2$, nous aurons $\overline{Z\Gamma}^2 = \overline{\Gamma\Xi}^2 + \overline{N\Xi}^2$. Mais $\overline{\Gamma N}^2 = \overline{\Gamma\Xi}^2 + \overline{N\Xi}^2$; donc $\overline{\Gamma N}^2 = \overline{Z\Gamma}^2$.

(ε) A cause que les deux triangles ΛΜΟ, ΓΝΞ sont semblables.

(ζ) Car lorsque l'on a deux proportions, et que ces deux proportions ne diffèrent que par les deux premiers termes, les deux premiers termes sont égaux entre eux.

PROPOSITION XI.

(α) Ces propositions se démontrent comme Euclide a démontré celles qui leur sont analogues.

PROPOSITION XII.

(α) Ces propositions sont démontrées par Fr. Commandin et par Torelli.

PROPOSITION XIII.

(α) Entre ΕΘ, ΘΖ.

(β) Apollonius, liv. III, prop. 17.

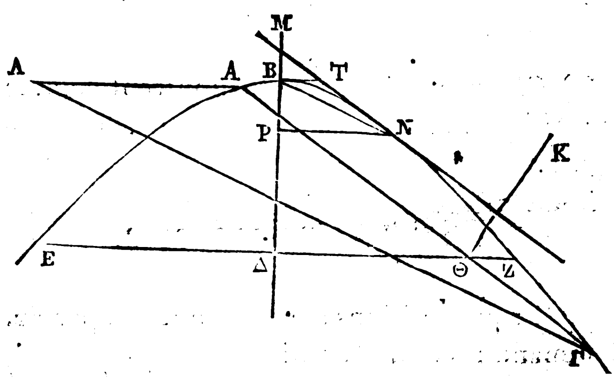
(γ) Donc TB est à TM comme AΛ est à AΓ, et par conséquent $\overline{TB}^2$ est à $\overline{TM}^2$ comme $\overline{A\Lambda}^2$ est à $\overline{A\Gamma}^2$.

(ι) Apollonius, liv. I, prop. 21.

PROPOSITION XIV.

(α) Apollonius, liv. III, prop. 17.

(β) La droite BT est plus petite que la droite TN; car la droite BT est plus petite que la droite MT, qui est plus petite que la droite



TN, à cause que la droite MB est plus petite que BP, ce qui arrive dans l'hyperbole; et c'est ce qu'il est facile de démontrer. En effet, soit y une ordonnée de l'hyperbole; x l'abscisse, et a le grand diamètre. La droite MP égalera

$\frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$, et MB égalera $\frac{\frac{1}{2}ax}{x + \frac{1}{2}a}$. Or, $\frac{\frac{1}{2}ax}{x + \frac{1}{2}a}$ est plus petit que $\frac{\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x}{x + \frac{1}{2}a}$; donc MB est plus petit que $\frac{1}{2}$ MP. Donc MB est plus petit que BP.

(2) Archimède ne démontre point que ΑΓ est le grand diamètre de l'ellipse, et que ΑΛ en est le petit, parce que cela peut se démontrer, à peu de chose près, de la même manière que dans la proposition précédente. Si l'on vouloit compléter la démonstration précédente, après ces mots *il est donc évident que cette section est une ellipse*, il faudroit ajouter ce qui suit: Joignons les points B, N par la droite BN; menons la droite ΓΛ parallèle à NB, et la droite ΛΑ perpendiculaire sur ΒΔ. Les deux triangles BTN, ΛΑΓ seront semblables. Donc ΒΓ : TN :: ΛΑ : ΑΓ; ou bien $\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 : \overline{\mathrm{TN}}^2 :: \overline{\mathrm{\Lambda A}}^2 : \overline{\mathrm{A\Gamma}}^2$. Mais $\overline{\mathrm{K\Theta}}^2 : \mathrm{A\Theta} \times \mathrm{\Theta\Gamma} :: \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 : \overline{\mathrm{TN}}^2$; donc $\overline{\mathrm{K\Theta}}^2 : \mathrm{A\Theta} \times \mathrm{\Theta\Gamma} :: \overline{\mathrm{\Lambda A}}^2 : \overline{\mathrm{A\Gamma}}^2$. Il est donc encore évident que le grand diamètre est la droite ΑΓ, et que le petit diamètre est la droite ΑΛ.

La dernière phrase de cette démonstration est tout-à-fait altérée dans le texte grec. Dans les manuscrits et dans toutes les éditions, les lignes ΑΓ, ΛΑ, BN manquent dans la figure. Voici le texte grec de cette dernière phrase:

Δῆλον ὦν ὅτι ἁ τομα ἐστιν ὀξυγωνίω κώνω τομά· καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ΑΓ. Ὁμοίως καθετῶ ὤσης τᾶς ΝΡ ἐν τᾷ τῶ ἀμβλογωνίω κώνω τομᾶ, διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ ΓΛ. Ce qui étant traduit mot à mot veut dire : « Il est donc encore certain que c'est » une section du triangle acutangle, et que » son grand diamètre est la droite ΑΓ. La droite » ΝΡ étant semblablement perpendiculaire dans » la section du cône obtusangle, son grand dia- » mètre est la droite ΓΛ ».

Ce qui ne présente aucun sens. En effet, si le grand diamètre de l'ellipse est la droite ΑΓ, ce même diamètre ne pourroit pas être une droite différente désignée par ΓΛ qui n'existe pas dans la figure. Heureusement la proposition précédente nous offre le moyen de rétablir la figure, ainsi que le texte grec dans toute son intégrité. J'ai rétabli la figure, et voici le texte grec tel qu'il doit être : Δῆλον ὦν ὅτι ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίω κώνω τομά· καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ ΑΓ· ἁ δὲ ἐλλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ τᾷ ΛΑ, τᾶς μὲν ΓΛ παρὰ τὰν ΒΝ ἐυσας, τᾶς δὲ ΑΛ καθετῶ ἐπὶ τὰν ΒΔ.

PROPOSITION XV.

(*a*) Apollonius, liv. III, prop. 17.

PROPOSITION XIX.

(α) Apollonius, liv. II, prop. 6.

(β) D'après la proposition 47 du premier livre d'Apollonius.

PROPOSITION XXIII.

(α) Car puisque fig. cir. — fig. ins. $<$ seg. — Ψ, à plus forte raison seg. — fig. ins. $<$ seg. — Ψ. Donc fig. ins. $>$ Ψ.

(β) Apollonius, liv. I, prop. 20.

(γ) En effet, on a six cylindres égaux et six droites égales, qui sont les rayons de ces cylindres, et ces cylindres sont proportionnels deux à deux à ces droites; de plus cinq de ces cylindres sont comparés aux cylindres inscrits, et les droites égales sont comparées aux droites placées entre les droites BΔ, BA, sous les mêmes raisons (2).

(δ) C'est-à-dire la somme des rayons des bases des cylindres compris dans le cylindre total.

(ϵ) Parce que le premier cylindre, placé dans le cylindre total, est égal au premier des cylindres circonscrits.

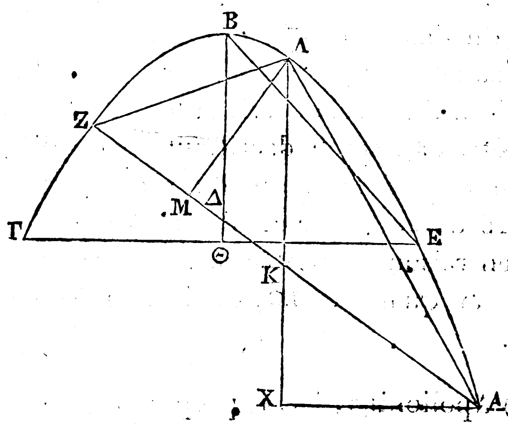
PROPOSITION XXIV.

(α) Apollonius, liv. II, prop. 46.

(β) *Idem*, liv. I, prop. 20.

PROPOSITION XXV.

(γ) Pour rendre cette conclusion évidente, je vais faire voir que la raison de ΚΑ à ΕΘ est la même que la raison de la surface comprise sous les diamètres de l'ellipse au quarré du diamètre ΕΓ. Pour cela je suppose une parallèle à ΒΔ menée par le point Α, et une parallèle à ΓΕ menée par le point Ζ. La parallèle menée par le point Ζ et prolongée jusqu'à l'autre parallèle, sera égale au petit diamètre de l'ellipse (13). En effet, la portion de la parallèle à ΓΕ menée par le point Ζ, et qui est placée entre le point Ζ et la droite ΒΔ, est à la portion de cette même parallèle qui est placée entre la droite ΒΔ et la parallèle à ΒΔ menée par le point Α, comme ΖΚ est à ΚΑ. Mais ΖΚ est égal à ΚΑ; donc la parallèle à ΓΕ placée entre le point Ζ et la parallèle à ΒΔ menée par le point Α, est partagée en deux parties égales par la droite ΒΔ. Mais une des parties de cette parallèle est égale à XA, et XA est égal à EΘ (4); donc la parallèle à ΓE, menée du point Z et prolongée jusqu'à la parallèle à BΔ menée par le point A, est égale à ΓE. Mais cette parallèle est égale au petit diamètre de l'ellipse décrite autour de AZ comme



diamètre (13); donc la droite ΓE est aussi égale au petit diamètre de cette ellipse.

Cela posé, il est évident que KA : EΘ :: AZ × ΓE : ΓE × ΓE ; car supprimant le facteur commun, et divisant la dernière raison par deux, on a KA : EΘ :: KA : EΘ.

(δ) A cause des triangles semblables KAM, KAX.

(ε) C'est-à-dire que le segment de cône est au cône comme la surface comprise sous ΑΚ, ΑΜ est à la surface comprise sous ΑΚ, ΚΜ.

PROPOSITION XXVI.

(α) Car ces deux cônes sont entre eux en raison composée de la raison du cercle décrit autour du diamètre ΑΓ, au cercle décrit autour du diamètre ΕΖ, et de la raison ΒΔ à ΒΘ. Mais la raison du cercle décrit autour de ΑΓ comme diamètre, au cercle décrit autour du diamètre ΕΖ est égale à la raison du quarré de ΑΔ au quarré de ΕΘ. Donc ces deux cônes sont entre eux en raison composée de la raison du quarré de ΑΔ au quarré de ΕΘ, et de la raison de ΒΔ à ΒΘ.

(ϐ) Apollonius, liv. I, prop. 21.

PROPOSITION XXVII.

(α) Voyez la note (γ) de la proposition 3.

(γ) Apollonius, liv. I, prop. 21.

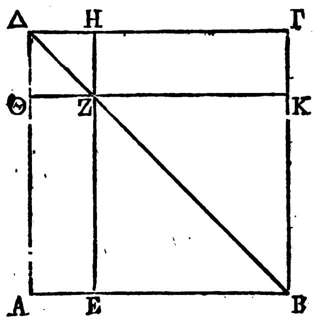
PROPOSITION XXVIII.

(α) Apollonius, liv. I, prop. 46.

(ϐ) *Idem*, liv. I, prop. 21.

PROPOSITION XXIX.

(ϐ) Dans le quarré ΑΓ, menons la diagonale ΒΔ; et par le point Ζ de cette diagonale menons les droites ΘΚ, ΗΕ parallèles aux côtés ΑΒ, ΑΔ. La réunion des deux rectangles ΑΖ, ΖΓ et le quarré ΘΗ, forment le gnomon du quarré ΑΓ.



La largeur du gnomon étant ΑΕ, qui est égal à ΒΙ dans la figure d'Archimède, et le côté du quarré étant égal au demi-diamètre de l'ellipse, le rectangle ΑΗ sera égal à la surface comprise sous ΘΔ, ΒΙ, et la droite ΗΓ étant égale à ΒΙ, le rectangle ΖΓ sera égal à la surface comprise sous ΙΘ, ΒΙ. Donc le gnomon sera égal à la surface comprise sous ΒΙ, ΙΔ.

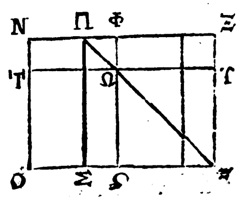
(γ) Le second quarré est le premier de la rangée à droite, le premier étant celui qui est seul.

PROPOSITION XXXI.

(α) Que $\mathrm{BH} = 3\,\mathrm{B\Theta}$; que $\mathrm{B\Delta} = 3\,\mathrm{BP}$. Il est évident que $\mathrm{BH} - \mathrm{B\Delta} = 3\,\mathrm{B\Theta} - 3\,\mathrm{BP} = 3\,(\mathrm{B\Theta} - \mathrm{BP})$, c'est-à-dire que $\mathrm{\Delta H} = 3\,\mathrm{\Theta P}$.

(β) Puisque $\mathrm{N\Xi} = \mathrm{Z\Delta}$, que $\mathrm{O\Xi} = \mathrm{B\Delta}$, il est évident que $\mathrm{N\Xi} - \mathrm{\Theta\Xi} = \mathrm{Z\Delta} - \mathrm{B\Delta}$, c'est-à-dire que $\mathrm{NO} = 2\,\mathrm{\Delta\Theta}$.

(γ) C'est-à-dire, retranchons du rectangle $\mathrm{N\Xi}$ un gnomon dont la largeur $\mathrm{\Phi\Xi}$, qui est égale à TO, soit égale à $\mathrm{B\Delta}$. Ce gnomon renfermera le rectangle $\mathrm{N\Xi}$, moins le rectangle $\mathrm{N\Omega}$. Or, ce gnomon égale le rectangle $\mathrm{O\Upsilon}$ + le rectangle $\mathrm{\Phi\Upsilon}$, c'est-à-dire $\mathrm{N\Xi} \times \mathrm{TO} + \mathrm{\Phi\Omega} \times \mathrm{\Omega\Upsilon} = (\mathrm{N\Xi} + \mathrm{\Phi\Omega}) \times \mathrm{\Omega\Upsilon} = \mathrm{BE} \times \mathrm{EZ}$.



FIN DU PREMIER VOLUME.

TABLE.

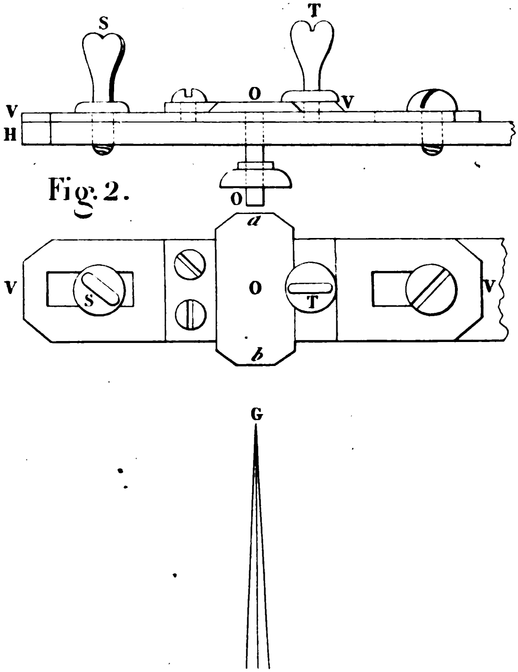


Fig. 2.

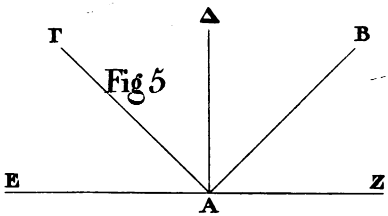


Fig 5