Delagardette, Pierre-Claude

Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral, traduits de l'italien de mademoiselle Agnesi; avec des additions. - A Paris : chez Claude Antoine Jombert, fils ainé libraire, rue Dauphine, près le Pont Neuf (de l'imprimerie de Chardon, rue Galande, 1775), 1775. - IV, 500 p., IV, II c. di tav. : ill. calcogr. ; 8º

(IT-MiFBE)958231

TRAITÉS
ÉLÉMENTAIRES
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL,

Traduits de l'Italien de Mademoiselle AGNESI;
avec des Additions.

A PARIS,

Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, Fils aîné,
Libraire, rue Dauphine, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXV.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

Vigarió FA X C 100

AVERTISSEMENT.

EN 1748, Mademoiſelle Agneſi publia à Milan un Ouvrage intitulé : *Inſtituzioni Analytiche, ad uſo della Gioventu Italiana*, en deux volumes *in*-4°. Le premier contient les éléments de l'Algébre ordinaire, avec la ſolution de pluſieurs Problêmes déterminés & indéterminés de Géométrie ; le ſecond regarde entièrement l'Analyſe infinitéſimale. C'eſt de ce dernier qu'on donne ici la traduction. Les principes des Calculs différentiel & intégral y ſont expliqués d'une manière claire & préciſe ; & cet Ouvrage eſt très-propre à guider ceux qui voudront acquérir les connoiſſances néceſſaires pour approfondir certaines branches de la Méchanique, de l'Hydrodynamique, &c.

EXTRAIT des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 30 Août 1775.

MESSIEURS D'ALEMBERT, le Marquis DE CONDORCET & VANDERMONDE, qui avoient été nommés par l'Académie pour examiner un Ouvrage intitulé : *Traités élémentaires de Calcul différentiel & de Calcul intégral, traduits de l'Italien de Mlle Agneſi, avec des Additions*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé que cet Ouvrage méritoit d'être imprimé ſous ſon Privilége. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, ce 30 Août 1775.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Sous le Privilége accordé à l'Académie Royale des Sciences.

TRAITÉS

TRAITÉS
ÉLÉMENTAIRES
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL.

PREMIER TRAITÉ.
Du Calcul différentiel.

L'Analyse des infiniment petits, qu'on appelle autrement calcul *différentiel*, ou calcul des *fluxions*, eſt celle qui traite des différences des quantités variables, de quelqu'ordre que ſoient ces différences. Elle embraſſe les méthodes des tangentes, des *maxima* & *minima*, des points d'inflexion & de rebrouſſement des courbes, des raïons oſculateurs, &c. Ces méthodes vont ſaire l'objet des différents Chapitres dont ce premier Traité ſera compoſé.

CHAPITRE PREMIER.

Idée des Différentielles des différents ordres ; & leur calcul.

1. Nous appellons *quantités variables* celles qui sont susceptibles d'augmentation & de diminution ; & nous imaginons qu'elles *fluent*, & qu'elles sont en quelque sorte engendrées par un mouvement continu.

Fig. 1. Que l'on conçoive la droite ABC (Fig. 1), engendrée par le point A, prolongée à l'infini, & faisant avec une autre droite BD, un angle quelconque. Supposons que tandis que le point B va de B en C, en emportant avec lui la ligne BD qui reste toujours parallèle à elle-même ; le point D parcoure l'espace FE, de sorte que par ce double mouvement il décrive la courbe ADE : il est clair que les abscisses AB, AC, les ordonnées BD, CE, & les arcs AD, AE, seront des quantités continuellement croissantes ou décroissantes, & par conséquent variables.

2. Les quantités *constantes* sont celles qui n'augmentent ni ne diminuent, & que l'on regarde comme déterminées ; tels sont les paramètres, les axes ou diamètres, &c.

On désigne les constantes par les premieres lettres de l'alphabet & les variables par les dernières. C'est ainsi que l'Algèbre ordinaire en use à l'égard des *connues* & des *inconnues*.

3. La *différence*, ou la *fluxion* d'une quantité va-

riable eſt cette portion infiniment petite, dont on conçoit que la variable croît ou décroît à chaque inſtant; partie ſi petite que ſon rapport avec la variable, eſt moindre que celui de toute autre ligne aſſignable, avec la même variable, & qu'elle n'empêche pas que la variable, après cet incrément ou ce décrément, ne puiſſe toujours être priſe & regardée comme la même.

Soit la courbe AM (Fig. 2 & 3) dont l'axe ou diamètre eſt AP: que l'on prenne ſur AP prolongée une partie infiniment petite Pp, elle ſera la différence ou la fluxion de l'abſciſſe AP; & on pourra regarder AP & Ap comme égales, parce qu'il n'y a pas de proportion entre la quantité finie AP & la partie infiniment petite Pp. Des points P & p ſoient élevées, ſous un angle quelconque, les deux ordonnées parallèles PM, pm; & ſoient menées la corde mM prolongée jeſqu'en B, & la droite MR parallèle à AP. Les deux triangles ſemblables BPM, MRm donneront $BP:PM::MR:Rm$. Or, BP & PM ſont des quantités finies, tandis que MR eſt infiniment petite; donc Rm ſera auſſi infiniment petite, & ſera par conſéquent la différence de l'ordonnée PM. Par la même raiſon, la corde Mm eſt auſſi infiniment petite; mais cette corde (comme je le démontrerai ci-après) n'étant pas différente de ſon arc, ſi bien qu'on peut les prendre l'un pour l'autre, le petit arc Mm eſt auſſi infiniment petit, & il eſt par conſéquent la différence de l'arc AM. On voit clairement par-là que l'eſpace $PMmp$ terminé par les deux ordonnées PM, pm, par la différence Pp & par le petit arc Mm, eſt la différence de l'aire AMP compriſe entre les coordonnées AP, PM, & la courbe AM; & que ſi l'on mene les deux cordes AM, Am, le triangle mixtiligne MAm ſera la différence du Fig. 2 & 3.

ſegment AMS compris entre la courbe & ſa corde.

4. On ſe ſert de la lettre d comme caractériſtique pour déſigner les différences. Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que l'abſciſſe AP ſoit x, Pp ou MR ſera dx; ſi l'ordonnée PM eſt y, Rm ſera dy; de même, ſi l'on nomme s l'arc ASM de la courbe, t l'eſpace $APMS$, u le ſegment AMS, on aura $Mm = ds$, $PMmp = dt$, $AMm = du$; & toutes ces différences ſont des différences premières, ou des fluxions du premier ordre.

Ces différences ſont poſitives, lorſqu'elles ſont l'incrément ou l'augmentation de leurs variables, & négatives ſi elles en ſont le décrément. Soit, pour exemple

Fig. 4. du ſecond cas, la courbe NEQ (Fig. 4); en ſuppoſant $AB = x$, $BF = dx$, $BC = y$, on aura $DC = -dy$, différence négative de y.

Il eſt clair que ces quantités différentielles ne ſont pas des chimeres; car outre que la méthode des polygones inſcrits & circonſcrits qui nous vient des Anciens, eſt une preuve de leur réalité, on s'en convaincra ſans peine, ſi l'on imagine que l'ordonnée MN (Fig. 4) s'approche de l'ordonnée BC, juſqu'à ce qu'enfin elle coïncide avec elle; il eſt évident qu'au moment où ces lignes vont ſe réunir, elles ſeront diſtantes d'une quantité inaſſignable, c'eſt-à-dire, moindre qu'aucune quantité donnée. Si l'on ſuppoſe que BC, FE ſoient dans cette poſition, alors BF & CD ſeront de ces quantités inaſſignables, & par conſéquent des différences ou fluxions.

5. On eſt forcé d'admettre dans l'étendue géométrique, les quantités infiniment petites de différents ordres. Pour le prouver, nous n'aurons recours qu'à la Géométrie ordinaire.

En effet ſoient AB le côté & AC la diagonale d'un quarré (Fig. 5). On sait (Géom. 125) que ces deux lignes sont incommensurables. Or, je dis qu'elles sont rendues incommensurables, non pas par une très petite ligne finie EC, quelque petite qu'on la prenne, mais par une autre infiniment plus petite, & qui est par conséquent de la classe des infiniment petits. Fig. 5.

Car, supposons que la ligne EC finie, si on la soustrait de AC, rende commensurables les deux lignes AC, AB; on aura donc AE commensurable avec le côté AB. Soit F leur commune mesure, qui ne sauroit être égale à EC, sans que le côté & la diagonale fussent commensurables; on a donc F plus petit ou plus grand que EC.

Dans le premier cas, soit soustrait F de EC autant de fois qu'il est possible, & que GC soit le reste. Alors, puisque F mesure exactement AB, AE & EG, les deux droites AB, AG seront entr'elles comme nombre à nombre; ce n'étoit donc pas la grandeur EC qui rendoit AB, AC incommensurables, mais c'étoit une quantité plus petite, telle que GC, qui est cependant finie, puisqu'elle provient de la quantité finie EC d'où l'on a soustrait une ou plusieurs fois F. Que l'on prenne la moitié de F, & la moitié de cette moitié, jusqu'à ce qu'on arrive à une partie de F moindre que GC, laquelle étant retranchée de GC, il restera HC; en appliquant à HC le même discours qui a été fait pour EC, on prouvera que ce n'est pas non plus HC qui rend AB & AC incommensurables. Et comme ce raisonnement est bon pour une grandeur finie quelconque, il faut en conclure que l'irrationnalité provient d'une quantité inassignable moindre qu'aucune grandeur donnée; ce qui a lieu aussi dans l'autre cas, savoir lorsque F est plus grand que EC, ce dont on peut s'assurer de la même manière.

Je vais maintenant plus loin, & je dis que les quarrés conſtruits ſur les mêmes droites AB, AC, qui, quoique leurs côtés ſoient irrationnels, ſont comme 1 eſt à 2, ſont rendus commenſurables par une quantité infiniment petite du ſecond ordre. Soient AB, AC
Fig. 6. (Fig. 6) ces deux quarrés; déſignons par ED, FI les quantités égales & infiniment petites qui rendent incommenſurables les côtés AD, AG; AI, AH; & achevons la préparation telle qu'on la voit dans la Figure. Les deux rectangles DK, IK ſont incommenſurables avec le quarré AB, parce qu'ils ſont compris d'une part ſous les côtés EK, FK commenſurables avec AG, GB; & d'autre part ſous les côtés infiniment petits ED, FI, d'où naît l'irrationnalité entre les lignes AD, AG; AI, AH. Si l'on ajoute à ces deux rectangles le quarré AK, le gnomon $ADLKMIA$ composé de ces trois grandeurs ſera incommenſurable avec le quarré AB; mais le quarré entier AC & le quarré AB ſont comme nombre à nombre; c'eſt donc le quarré KC ou LM, infiniment petit du ſecond ordre, qui rend commenſurables entr'eux les quarrés AC, AB.

Remarquez que les cubes des lignes AI, AH ſont incommenſurables, quoique leurs baſes ne le ſoient pas; & il eſt facile de prouver qu'ils ſont rendus tels par une grandeur infiniteſimale du troiſième ordre. On peut raiſonner de même pour les ordres ſupérieurs.

6. DE même qu'il n'y a pas de rapport aſſignable entre les différences premières & les quantités finies, il n'y en a pas non plus entre les différences du ſecond ordre & celles du premier. Celles du ſecond ordre ſont infiniment plus petites, ſi bien que deux quantités infiniteſimales du premier ordre qui diffé-

reroient entr'elles d'une quantité infinitéſimale du ſecond, pourroient être regardées comme égales. Il en faut dire autant des différences troiſièmes à l'égard des différences ſecondes ; & ainſi de ſuite à l'infini.

On déſigne les différences ſecondes par deux d, les différences troiſièmes par trois d, &c. Par exemple, la différence de dx, c'eſt-à-dire, la différence ſeconde de x, s'exprime ainſi ddx ou d^2x. Et que l'on remarque ici que d^2x n'eſt pas la même choſe que dx^2. La première de ces quantités exprime la différence ſeconde de x, & l'autre déſigne le quarré de dx. La différence troiſième de x s'exprime par $dddx$ ou d^3x. De même ddy eſt la différence de dy, ou la différence ſeconde de y, &c.

Les Théorêmes ſuivants pourront ſervir à donner une idée juſte des différences ſecondes, troiſièmes, &c.

THÉORÊME I.

7. *SOIT une courbe quelconque* MBC (Fig. 7), *dont il ſoit pris une partie* BC *infiniment petite du premier ordre ; que des points* B & C *on mène deux droites* BA, CA *perpendiculaires à la courbe ; ces deux droites* BA, CA *pourront être regardées comme égales.* Fig. 7.

DÉMONST. Que l'on mène les tangentes BD, CD, & la corde BC. Si BA, CA ne ſont pas égales, ſoit abaiſſée ſur celle des deux que l'on ſuppoſe la plus grande, par exemple, ſur CA, la perpendiculaire BH. La différence qu'il peut y avoir entre les lignes BA, CA ſera plus petite que la partie interceptée CH, à cauſe de l'angle droit H, & CH ſera plus petite que la corde BC ; mais cette corde eſt un infiniment petit du premier ordre, puiſque l'arc lui-même eſt infiniment petit. Donc la différence qu'il y a entre BA & CA eſt tout au plus auſſi grande qu'une grandeur infinitéſimale du premier ordre; d'où il ſuit que les droites BA, CA peuvent être regardées comme égales.

COROLLAIRE I.

8. DONC le triangle BAC eſt iſoſcèle, & les angles ABC, ACB ſont égaux. De plus, ſi l'on ſouſtrait ces angles des angles droits ABD, ACD, les angles reſtants BCD, DBC ſeront égaux; & par conſéquent les deux tangentes BD, CD ſont auſſi égales.

COROLLAIRE II.

9. SI l'on mène la droite DA, on aura les triangles ADB, ADC ſemblables & égaux, auſſi-bien que les triangles AEB, AEC; & par conſéquent les angles BAC, BDC ſeront coupés en deux parties égales; DE ſera perpendiculaire ſur BC, & paſſera par ſon milieu E.

COROLLAIRE III.

10. LES deux triangles DAC, EDC étant ſemblables, l'angle DCE eſt égal à l'angle DAC; & les deux angles DCE, DBE pris enſemble, ſont égaux à l'angle BAC.

COROLLAIRE IV.

11. ON voit par-là qu'un arc infiniment petit BC d'une courbe quelconque, a les mêmes affections & propriétés que le petit arc de cercle décrit du centre A avec le raïon AB ou AC.

COROLLAIRE V.

12. LES deux triangles AEB, BED étant ſem-

blables, on aura $AE : EB :: EB : ED$; mais AE eſt finie, & EB eſt une infinitéſimale du premier ordre, ED ſera donc une infinitéſimale du ſecond dont la valeur ſera $= \frac{\overline{EB}^2}{AE}$. Mais le produit de $2AE$ par EI eſt égal (par la propriété du cercle) au quarré de EB; on a donc $\overline{EB}^2 = 2AE \times EI = AE \times ED$, & par conſéquent $2AE : AE :: ED : EI$; par où l'on voit que ED eſt double de EI, & que par conſéquent les deux lignes infiniment petites du ſecond ordre IE, ID ſont égales.

COROLLAIRE VI.

13. LA demi-corde BE & la tangente BD ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite du troiſième ordre; car du centre B ſoit tracé avec le raïon BE l'arc EL, infiniment petit du ſecond ordre, & qui ſe confond avec ſon ſinus; les deux triangles BDE, EDL feront ſemblables, parce qu'ils ont un angle droit en E & L, & un angle commun en D; on a donc $BD : DE :: DE : DL$; mais BD eſt une différence du premier ordre, on a vu que DE l'eſt du ſecond, DL l'eſt donc du troiſième. Ainſi, l'arc BI de la courbe qui eſt plus grand que la demi-corde BE, & plus petit que la tangente BD, ne peut tout au plus différer de l'une & de l'autre que d'une grandeur infinitéſimale du troiſième degré.

THÉOREME II.

14. *SOIT une courbe quelconque* DAE (Fig. 8 & 9); *que ſur ſon axe on prenne deux parties* HI, IM *infinitéſimales du premier ordre, & égales; que l'on mène les ordonnées parallèles* HA, IB, ME, *qui coupe-* Fig. 8 & 9.

ront sur la courbe les petits arcs infinitésimaux du premier ordre AB, BE; *& que l'on tire la corde* ABC *qui rencontrera au point* C *l'ordonnée* ME *prolongée s'il est nécessaire ; je dis que la partie* CE *comprise entre la courbe & le prolongement de la corde* AB, *est un infiniment petit du second ordre.*

Soit menée la corde *AE*. Si la droite *IM* étoit une grandeur finie, le triangle *ACE* seroit aussi fini ; mais si l'on imagine que l'ordonnée *ME* s'approche sans cesse de *HA*, de manière que *IM* devienne une fluxion du premier ordre, l'angle *ACE* sera constant, au lieu que l'angle *AEC* ira croissant, & qu'au contraire l'angle *CAE* diminuera toujours, jusqu'à ce qu'enfin il deviendra infiniment petit. Alors, il est clair que de même que le sinus d'un angle infiniment petit du premier ordre, dont le rayon est fini, est un infiniment petit du premier ordre ; de même le sinus de l'angle *CAE* infiniment petit aussi du premier ordre, mais dont le raïon *AE* ou *AC* est aussi infiniment petit, sera une grandeur infinitésimale du second ordre. Mais dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés ; donc la droite *CE* est aussi un infiniment petit du second ordre.

Si l'on désigne donc *DH* par x, *HA* par y, *HI* ou *IM* par dx, on aura *FB* ou $GC = dy$, & $EC = -ddy$, où je mets le signe négatif, parce que le dy décroît dans la Figure 8. S'il s'agissoit au contraire de la Figure 9, où la courbe en cet endroit est convexe vers l'axe *DM*, le ddy seroit positif, parce qu'alors le dy augmente.

COROLLAIRE.

15. Si du point *E* on mène sur *BC* la perpen-

diculaire ES les lignes ES, CS ſont des fluxions du ſecond ordre, puiſqu'elles ſont plus petites que EC.

THÉOREME III.

16. *Si on prend dans un cercle un arc infiniment petit du premier ordre, ſon ſinus verſe eſt un infiniment petit du ſecond, & la différence entre ſon ſinus droit & ſa tangente eſt un infiniment petit du troiſième.*

Soit DC (Fig. 10) l'arc en queſtion, DB ſon ſinus, CE ſa tangente; & qu'on mène DF parallèle à AC. 1°. On a par la propriété du cercle $GB:BD::BD:BC$; mais GB eſt une grandeur finie, & BD eſt un infiniment petit du premier ordre; or, de même que GB eſt infiniment plus grand que BD, de même BD eſt infiniment plus grand que BC, qui par conſéquent eſt infiniment petit du ſecond ordre. 2°. Les triangles ſemblables ABD, DFE donnent $AB:BD::DF:FE$. Or, AB eſt infiniment plus grand que BD, donc DF, quoique du ſecond ordre, eſt infiniment plus grand que FE, qui eſt par conſéquent du troiſième. Fig. 10.

COROLLAIRE I.

17. PUISQUE la tangente eſt toujours plus grande que l'arc, l'arc plus grand que la corde, & la corde plus grande que le ſinus droit, & que la tangente & le ſinus droit ne diffĕrant que d'un infiniment petit du troiſième ordre, peuvent être pris l'un pour l'autre; on pourra donc auſſi regarder comme égaux le ſinus droit, la corde, l'arc & la tangente.

COROLLAIRE II.

18. SI l'on imagine que le cercle ait un raïon AN infiniment petit du premier ordre, l'arc NO & ſon

ſinus OM ſeront des infiniment petits du ſecond, & le ſinus verſe MN le ſera du troiſième.

COROLLAIRE III.

Fig. 11 & 12. 19. SOIENT priſes ſur l'axe DM (Fig. 11 & 12) deux différences premières & égales HI, IM, auxquelles correſpondent deux arcs de courbe infiniment petits AB, BE; que l'on tire les deux cordes BE, AB; que l'on prolonge celle-ci juſqu'à ce qu'elle rencontre en C l'ordonnée ME prolongée auſſi s'il eſt néceſſaire; que l'on mène ES perpendiculaire à BC; & que du centre B on décrive l'arc EO avec le rayon BE. On a vu que CS eſt un infiniment petit du ſecond ordre, & OS du troiſième. Ainſi CO l'eſt du ſecond, parce que l'infiniment petit du troiſième ordre ajouté ou ſouſtrait de celui du ſecond, ne l'augmente ni ne le diminue. Mais $HI = IM$ ou bien $AF = BG$, & $AB = BC$ à cauſe des triangles AFB, BGC ſemblables & égaux; de plus, les arcs peuvent être regardés comme égaux aux cordes; ainſi CO ſera la différence des deux arcs AB, BE. Si l'on fait donc la courbe $DA = s$, on aura AB ou $BC = ds$, & $CO = -dds$, avec le ſigne négatif pour la Fig. 11, où AB eſt plus grand que BE, & va par conſéquent en diminuant; & avec le ſigne poſitif dans la Fig. 12, où AB eſt plus petit que BE.

SCHOLIE I.

20. EN déterminant les ſecondes différences de l'ordonnée & de l'arc de la courbe, j'ai ſuppoſé que HI & IM étoient égales; c'eſt-à-dire, que la différence première de l'abſciſſe étoit conſtante. Alors la différence ſeconde de l'abſciſſe eſt nulle; c'eſt-à-dire, qu'appellant l'abſciſſe x, & la première différence dx, on a $ddx = 0$.

On peut encore faire deux autres ſuppoſitions ; la première, que la différence première de l'ordonnée ſoit conſtante, & que celle de l'abſciſſe & celle de la courbe varient ; la ſeconde, que la différence première de la courbe ſoit conſtante, & alors celle de l'abſciſſe & celle de l'ordonnée ſont variables.

Mais après tout ce qui a été dit, il eſt facile de paſſer à ces deux autres hypothèſes. Suppoſons (Fig. 13 & 14) que $BF = EG$, c'eſt-à-dire, que la fluxion de l'ordonnée ſoit conſtante. Soient menées EP parallèle & PT perpendiculaire à BG ; on aura $BF = PT$, $AF = BT$, $AB = BP$; ainſi GT ou EP eſt la différence qu'il y a entre HI & IM. Soit décrit du centre B, & avec le raïon BE, l'arc EO ; PO ſera la différence entre l'arc AB & l'arc BE, car au lieu d'un arc infiniment petit, on peut prendre ſa corde. Mais les triangles ſemblables BTP, CEP donnent $PT : TB :: CE : EP$ & $PT : PB :: CE : CP$; or, PT, TB, BP ſont des fluxions premières, & CE eſt une fluxion ſeconde ; donc EP, CP, & encore mieux OP ſont des fluxions ſecondes ; par conſéquent ſi $DH = x$, & $DA = s$, on aura pour la Figure 13, TG ou $PE = ddx$, $PO = dds$; & pour la Figure 14, $PE = -ddx$, $PO = -dds$, & le $ddy = 0$. Fig. 13 & 14.

Si la différentielle première de la courbe eſt conſtante, c'eſt-à-dire, ſi $AB = BE$; que du point O on abaiſſe ON parallèle à TP ; puiſque par la ſuppoſition $AB = BE = BO$, on a auſſi $AF = BN$; ainſi VE ou NG eſt la différence qu'il y a entre HI & IM ; mais on a auſſi $FB = NO$; par conſéquent VO eſt la différence entre BF & EG. Or, il eſt évident que EC étant une différence ſeconde, EV & VO le ſont auſſi. Si l'on a donc $DH = x$, $HA = y$, on aura (Fig. 13), $NG = ddx$, $OV = -ddy$;

& (Fig. 14), $NG = -ddx$, $OV = ddy$; & le $dds = 0$, pour les deux figures.

SCHOLIE II.

21. La ſuppoſition de l'une des différentielles conſtante rend les calculs plus faciles & plus courts, comme on le verra par l'uſage. Cependant, dans pluſieurs rencontres, on paſſe, pour donner plus de généralité aux réſultats, des premières différences aux ſecondes, ſans ſuppoſer conſtante aucune des premières; voici comment on les détermine.

Fig. 15 & 16.

Soient HI, IM (Fig. 15 & 16) les différences premières, mais inégales, de l'abſciſſe DH; ſoit leur différence ML qui eſt ainſi la différentielle ſeconde de DH. Conſtruiſant les figures comme ci-deſſus, que l'on mène l'ordonnée LN, & Ei parallèle à BG. Puiſque LM eſt la différence de HI, on a $HI = IL$ ou $AF = BR$, & ainſi les triangles ſemblables & égaux ABF, BRN donnent $BF = NR$. Donc Ni eſt la différence qu'il y a entre BF & EG, c'eſt-à-dire, qu'il eſt la différentielle de BF, ou la différence ſeconde de AH. On a pareillement $AB = BN$, & NO eſt la différence qu'il y a entre l'arc AB & l'arc BE; il eſt donc la différentielle de l'arc AB, ou la différence ſeconde de l'arc DA; puiſqu'il eſt clair que Ni, NO ſont des différentielles du ſecond ordre. Le même raiſonnement ſubſiſte, ſi au lieu de ſuppoſer IM plus grand que IH d'une quantité différentielle du ſecond ordre, on le ſuppoſe moindre.

22. Je remarquerai que tout ce qu'on vient de voir ſur les différences ſecondes, eſt indépendant de l'angle que font entr'elles les coordonnées de la courbe; & quoique cet angle ſoit droit dans nos figures, les mêmes choſes ont lieu ſous un angle oblique quelconque.

LEMME.

23. *Les angles rectilignes sont entr'eux en raison directe des arcs qui les mesurent, & en raison inverse des rayons.*

Soient les deux angles EAB, FAC (Fig. 17). Fig. 17.
Les secteurs semblables ABE, ACD donnent $AB:BE::AC:CD$, & par conséquent $CD = \frac{BE \times AC}{AB}$.
Mais l'angle EAB ou DAC est à l'angle $FAC::CD:CF$; donc l'angle EAB : l'angle $FAC::\frac{BE \times AC}{AB}:CF$, c'est-à-dire $::\frac{BE}{AB}:\frac{CF}{AC}$.

THÉOREME IV.

24. *Si sur la courbe quelconque* ACF (Fig. 18), Fig. 18.
on prend un arc CF *infiniment petit du premier ordre, & qu'ayant mené les perpendiculaires* CI, FI *à la courbe, on décrive du centre* I *& du rayon* IF, *l'arc de cercle* FS, *cet arc tombant vers* C, *sera tout entier en-dedans de la courbe, & l'interceptée* CS *sera une grandeur infiniment petite du troisième ordre.*

Que l'on imagine la courbe AQR enveloppée d'un fil, dont la partie qui est au-dessous de R tient contre la courbe. Si on prend ce fil par son extrémité A, & qu'on le détache de la courbe en s'en éloignant, de manière qu'il soit toujours tendu, le point A décrira la courbe ACF. Le fil dans la position CQ touchera la courbe au point Q; dans la position FR infiniment voisine de CQ, il la touchera en R; & la tangente CQ prolongée rencontrera FR au point I. Cela posé, puisque par la génération de la courbe ACF, la droite QC est égale à la courbe QA, & la droite RF à la courbe RQA, & que les deux tangentes infiniment petites QI, RI sont à elles deux plus grandes que l'élément QR; $CI+IR$ sera aussi plus grand que RQA ou FR. Otant de part & d'autre IR, il restera $IC > IF$; ainsi l'arc FS décrit du centre I avec le raïon IF, tombera en-dedans de la courbe. Mais par les premier & troisième Théorêmes, les deux tangentes QI, RI ne surpassent l'arc QR que d'une fluxion du troisième ordre; donc la courbe AQ jointe aux droites QI, IR surpassera la courbe AQR, ou la droite FR, de la même quantité: ôtant la partie commune IR, il reste $AQ+QI$, c'est-à-dire, IC plus grand que IF, d'une quantité infinitésimale du troisième ordre.

COROLLAIRE.

25. On pourra donc regarder l'arc de cercle FS comme confondu avec l'arc FC de la courbe, & prendre indifféremment l'un pour l'autre; & la tangente QC pourra être regardée comme perpendiculaire à la courbe ACF au point C, de même que RF l'est au point F.

La courbe AQR s'appelle la *développée*, ACF la *développante*, & le cercle FS décrit du point I comme centre, avec le raïon IF, s'appelle le *cercle osculateur*.

THÉOREME V.

26. *Les points* A, B, E, *de la courbe* DAE (Fig. 11 & 12) *étant infiniment voisins; ou, ce qui est la même chose, les arcs* AB, BE *étant infiniment petits du premier ordre; si l'on éleve les perpendiculaires à la courbe* QA, QB, NE, *les angles* AQB, BNE *pourront être regardés comme égaux.*

Fig. 11, & 12.

D'après le Lemme précédent, on a l'angle AQB: l'angle l'angle $BNE :: \frac{AB}{AQ} : \frac{EB}{BN}$, ou $:: AB \times BN : EB \times AQ$; mais le rectangle $EB \times AQ$ est plus petit que le rectangle $AB \times BN$, seulement du rectangle $BE \times QN$, plus du rectangle de BN par la différence qu'il y a entre les petits arcs AB, BE; & puisque QN, BE sont des grandeurs infiniment petites du premier ordre, leur produit est un infiniment petit du second; de même, la différence des petits arcs AB, BE étant du second ordre, le produit de cette différence par BN sera du même ordre. Donc les rectangles $AB \times BN$, $EB \times AQ$ ne différant entr'eux que par deux rectangles infinitésimaux du second degré, peuvent être pris l'un pour l'autre; & par conséquent les angles AQB, BNE sont aussi dans le même cas.

COROLLAIRE I.

27. SOIT menée PBR tangente au point B; elle divisera en deux parties égales l'angle CBE, qui est formé par les deux cordes BE, ABC; car l'angle BQA (Coroll. III. Théorème I) étant double de l'angle $PBA = CBR$, l'angle BNE sera aussi double de l'angle CBR. Mais, par le même Corollaire, l'angle BNE est aussi double de l'angle RBE; donc les angles CBR, RBE sont égaux.

COROLLAIRE II.

28. L'ANGLE CBE est donc égal à l'angle BNE, & par conséquent les secteurs BNE, EBO sont semblables.

THÉOREME VI.

29. *SI dans deux cercles dont les diamètres different infiniment peu, on prend deux sinus droits égaux & infiniment petits du premier ordre, la différence*

des sinus verses sera un infiniment petit du troisième.

Fig. 19. Soient ABC, PFH (Fig. 19) les deux cercles; BE, FG les sinus droits en question; EC, GH les sinus verses; & que l'on tire les cordes AB, BC. Puisque le sinus BE, & par conséquent l'arc BC sont des fluxions premières; l'angle BMC, & par conséquent sa moitié BAC & l'angle EBC qui est égal à BAC, sont infiniment petits du premier ordre. Or, puisque l'angle EBC & ses côtés EB, BC sont du premier ordre, le sinus verse EC l'est du second.

La même chose a lieu pour le sinus verse GH. Mais par la propriété du cercle, le sinus verse $EC = \frac{\overline{EB}^2}{AE}$, & le sinus verse $GH = \frac{\overline{GF}^2}{PG} = \frac{\overline{EB}^2}{PG}$; on a donc la proportion $EC : GH :: PG : AE$. Mais la grandeur finie PG surpasse la grandeur finie AE d'une quantité infiniment petite par rapport à elle, c'est-à-dire, par l'hypothèse, d'une quantité du premier ordre; donc EC, qui est du second ordre, surpasse GH, du même ordre, d'une quantité infiniment petite par rapport à elle, c'est-à-dire du troisième ordre.

THÉOREME VII.

Fig. 20 & 21. 30. SOIT *la courbe* BEG (Fig. 20 & 21) *rapportée au foyer, c'est-à-dire, telle que toutes les ordonnées partent d'un même point donné, tel que* A, *qu'on appelle le foyer; duquel soient menées trois ordonnées infiniment voisines* AB, AE, AG, *qui embrassent les deux arcs infiniment petits du premier ordre* BE, EG; *que l'on tire la corde* BE, *qui, prolongée, rencontrera en* L *l'ordonnée* AG *prolongée aussi, s'il est nécessaire; que du centre* A *on décrive les arcs* BC, EF *dont* BM, EN *sont les sinus; que l'on fasse enfin* *l'angle* NEP *égal à l'angle* MBE: *l'interceptée* GP *sera la différence seconde de l'ordonnée* AB.

Soit tirée la corde EG. Puisque les angles MBE, NEP sont égaux, & que les angles en M & N sont droits, les triangles EBM, PEN sont semblables. De plus, prenant pour constante le sinus BM, c'est-à-dire, faisant $EN = BM$, les mêmes triangles seront parfaitement égaux, & l'on aura $ME = NP$. Mais à cause de $BM = EN$, la différence des sinus verses MC, NF est (Théo. précédent) infiniment petite, par rapport à eux. Donc CE, FP sont aussi égales, & par conséquent GP est la différence qu'il y a entre CE & FG. Maintenant si l'on mene les droites EQ, GQ perpendiculaires à la courbe aux points E, G, l'angle LEG (Coroll. II du Théor. V, qui a lieu soit qu'on rapporte la courbe à l'axe ou au foyer), sera égal à l'angle EQG. Or, celui-ci étant infiniment petit, LEG le sera aussi; & puisque les droites EG, EL sont du premier ordre, GL (& à plus forte raison GP, Fig. 20) sera du second.

Le sinus BM (Coroll. I du Théo. III) est égal à l'arc BC; prenant donc (Fig. 20) pour constant l'arc au lieu du sinus, & faisant ce petit arc $= dx$, $AB = y$, on aura $CE = dy$ & $GP = -ddy$. Enfin, si l'on décrit du centre E & du raïon EG l'arc GV, & qu'on suppose $BE = ds$, VP sera $-dds$.

COROLLAIRE.

31. L'ANGLE LEP est égal à l'angle EAG; car par construction $EPA = BEA$; mais l'angle externe EPA est égal aux deux intérieurs L & LEP; & l'angle $BEA = L + EAG$; ôtant donc l'angle L de part & d'autre, il restera $LEP = EAG$. Et comme cela est vrai, soit que la courbe soit concave au point

A, ſoit qu'elle ſoit convexe, comme il eſt facile de le voir, on aura dans la Fig. 21, l'angle *LEP* infiniment petit, & par conſéquent *LP* eſt du ſecond ordre ; mais on a vu que *GL* eſt auſſi du ſecond; donc la ligne entière *GP* l'eſt auſſi, & exprime le *ddy*. Si du centre *E* avec le raïon *EG*, on décrit l'arc *GV*, *PV* ſera le *dds*.

Si c'eſt *dy* qu'on veut prendre pour conſtante; que du centre *A* & du raïon *AG*, on décrive l'arc *GT*, & que du point *T* on tire la droite *TOA*. Puiſque $FG = EC$ (hypot.), le triangle *TEO* eſt égal & ſemblable au triangle *EBC*; ainſi $BC = EO$, & $BE = ET$. On a donc (Fig. 20) $OF = ddx$, & $TV = dds$; mais (Fig. 21) $OF = -ddx$, & $TV = -dds$.

Si l'on prend *ds* pour conſtante, ſoit menée la droite *VRA*, on aura $EG = EV = BE$; par conſéquent les triangles *EBC*, *EVR* ſont ſemblables & égaux, & $BC = ER$, $CE = RV$. Ainſi, dans la Fig. 20, on a $RF = ddx$, $VI = -ddy$; & dans la Fig. 21, $RF = -ddx$, $VI = ddy$.

Enfin, ſi aucune des fluxions n'eſt conſtante, ſuppoſons *EF* plus grand que *BC*, de la différentielle

Fig. 22 & 23. ſeconde *RF* (Fig. 22 & 23); ſoit menée la droite *ART*, & du point *E* pour centre ſoit décrit l'arc *GV* avec le raïon *EG*. Puiſque $BC = ER$, *CE* ſera auſſi $= RI$, & $BE = EI$; donc la différence entre *CE* & *FG* eſt *TI*, & la différence entre *BE* & *EG* eſt *VI*.

SCHOLIE I.

32. Il n'eſt pas hors de propos de prévenir une difficulté qu'on pourroit me faire. Comme dans le Théorême précédent, on prend pour égales, en vertu du Théorême VI, les petites lignes *CE*, *FP*, tandis que le Théorême VI ſuppoſe égaux les ſinus *BM*,

EN, on pourroit être porté à croire que tout ce qui a été déterminé fur les différentielles fecondes, n'a lieu que lorfqu'on prend la fluxion *BC* pour conftante. Mais cette difficulté s'évanouira fans peine, fi l'on fait attention que lors même qu'on fait varier *BC*, fa différence n'eft qu'un infiniment petit du fecond ordre; ce qui ne nuit point à l'égalité des différentielles premières *BC*, *EF*, ni à celle des finus *BM*, *EN*.

SCHOLIE II.

33. LES Théorêmes précédents renferment les principes fur lefquels eft fondée la théorie des infiniment petits de tous les ordres, & facilitent les moyens de faire un bon ufage des Calculs différentiel & intégral, d'appliquer même aux grandeurs infiniment petites la fynthèfe & l'analyfe des Anciens, & de n'employer que la pure Géométrie; ce qui met dans les calculs une fimplicité & une élégance particulières.

Pour fe garantir des paralogifmes dans lefquels il n'eft que trop facile de tomber, il faut faire attention que dans les lignes infiniment petites de tous les ordres, comme dans celles qui ont une grandeur finie, il y a deux circonftances importantes à confidérer, favoir, leur grandeur & leur pofition. Quant à leur grandeur, je ne crois pas qu'on puiffe s'y tromper, à moins de n'être de l'avis erroné de ceux qui regardent ces grandeurs infiniment petites comme nulles ou chimériques.

Quoique les quantités, en diminuant à l'infini, paffent à des ordres inférieurs, les proportions reftent cependant les mêmes dans tous les ordres. Par exemple, fi trois lignes, toutes du même ordre, forment un triangle, & qu'elles diminuent proportionnellement jufqu'à paffer dans un ordre inférieur, les angles ne changent point, & confervent entr'eux le même rapport. Dans ces rencontres, on ne doit jamais prendre une ligne pour l'autre, ni les ſuppoſer égales; il faut au contraire conſerver les analogies, & comparer les triangles d'un genre avec ceux d'un autre, c'eſt-à-dire les infiniment petits avec les finis; ceux du ſecond ordre avec ceux du premier & avec les finis; & ainſi de ſuite.

Mais ſi deux grandeurs, de quelqu'ordre qu'elles ſoient, différent d'une quantité inaſſignable par rapport à elles, alors ſans héſiter, & ſans craindre aucune erreur, on peut les prendre l'une pour l'autre. La ſuppoſition de leur égalité ne peut entraîner avec elle aucun inconvénient.

Il faut donc être ſoigneuſement ſur ſes gardes, lorſqu'il s'agit de la poſition des lignes, & des angles qu'elles forment. Si on les confond, lorſqu'il ne le faut pas, on tombera néceſſairement dans des paralogiſmes.

34. AYANT établi les principaux fondements de ce calcul, je vais enſeigner à différencier les formules de toute eſpece. Commençons par les réſultats de l'addition ou de la ſouſtraction de pluſieurs quantités; que l'on demande, par exemple, la différence de $a+x+z+y-u$. La différence de x étant dx, celle de z étant dz, &c. & celle de a étant nulle ou zero, ſi l'on regarde chaque quantité comme accrue de ſa différence affectée du ſigne qu'a la quantité même, la formule propoſée ſe changera en celle ci $a+x+dx+z+dz+y+dy-u-du$, d'où ſouſtrayant la première, le reſte $dx+dz+dy-du$ ſera préciſément l'incrément qu'a reçu la quantité propoſée, c'eſt-à-dire, ſa différence.

On tire de-là cette regle générale, que pour différencier un aſſemblage quelconque de quantités analytiques d'une dimenſion, il ſuffit de prendre la différence de chaque variable, en lui donnant le signe de la variable même. Ainsi, la différence de $b-s-z$ est $-ds-dz$; celle de $aa-4bz+by$ est $-4bdz+bdy$.

35. POUR différencier le produit de plusieurs variables, par exemple xy, on remarquera que lorsque x devient $x+dx$, & que y devient $y+dy$, alors xy devient $xy+ydx+xdy+dxdy$, qui est le produit de $x+dx$ par $y+dy$; que l'on retranche xy de ce produit, il restera $ydx+xdy+dxdy$. Mais $dxdy$ étant le produit de deux quantités infiniment petites est infiniment moindre que chacun des deux autres termes ydx & xdy, qui expriment des produits d'une grandeur finie par un infiniment petit. On peut donc le négliger hardiment; on aura donc $xdy+ydx$ pour la différence de xy.

Que l'on ait à différencier xyz. Le produit de $x+dx$ par $y+dy$ par $z+dz$ est $xyz+yzdx+xzdy+xydz+zdxdy+ydxdz+xdydz+dxdydz$; d'où soustrayant la quantitée proposée, il reste $yzdx+xzdy+xydz+zdxdy+ydxdz+xdydz+dxdydz$. Mais le premier, le second & le troisième termes sont chacun le produit de deux grandeurs finies par une troisième infiniment petite; & le quatrième, le cinquième & le sixième sont chacun le produit d'une grandeur finie par deux infiniment petites; ainsi, chacun de ces trois derniers étant infiniment plus petit que chacun des trois premiers, peut être négligé sans crainte, & à plus forte raison le septième ou dernier, qui est le produit de trois grandeurs infinitésimales; on a donc $yzdx+xzdy+xydz$ pour la différence de xyz.

Nous tirerons de-là cette regle : Pour différencier le produit de plusieurs facteurs variables, il faut prendre la somme des produits de la différence de chaque facteur par le produit des autres facteurs. Ainsi la différence de $bxzt$ est $bxzdt + bxtdz + btzdx + xzt \times 0 = bxzdt + bxtdz + btzdx$; car la différence de b est zero. La différence de $(a+x) \cdot (b-y)$ est $dx(b-y) - dy(a+x) = bdx - ydx - ady - xdy$.

36. Si l'on veut différencier une fraction, par exemple, $\frac{x}{y}$: que l'on suppose $\frac{x}{y} = z$; on aura donc $x = zy$; or ces quantités étant égales, leurs différences le sont aussi, c'est-à-dire, que l'on a $dx = zdy + ydz$; d'où l'on tire $dz = \frac{dx - zdy}{y}$. Or $z = \frac{x}{y}$; mettant donc $\frac{x}{y}$ au lieu de z, on a $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$; mais puisque $z = \frac{x}{y}$, dz ou son égale $\frac{ydx - xdy}{yy}$ sera la différence de $\frac{x}{y}$.

Nous établirons donc pour regle, que la différence d'une fraction est une autre fraction qui a pour numérateur le produit de la différence du numérateur de la proposée par son dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par son numérateur, & dont le dénominateur est le quarré du dénominateur de la fraction proposée.

La différence de $\frac{a}{x}$ est par conséquent $-\frac{adx}{xx}$. Celle de $\frac{a+x}{x}$ est $\frac{xdx - adx - xdx}{xx}$, c'est-à-dire, $-\frac{adx}{xx}$. Celle de $\frac{y}{b-y}$ est $\frac{bdy - ydy + ydy}{(b-y)^2} = \frac{bdy}{(b-y)^2}$. Enfin, la différence de $\frac{3xy}{a-x}$ est . . . .

$$\frac{(3xdy+3ydx)(a-x)+dx.3xy}{(a-x)^2} = \frac{3axdy+3aydx-3xxdy}{(a-x)^2}.$$

37. PASSONS à la différenciation des puissances, & prenons d'abord celles qui sont parfaites, c'est-à-dire, qui ont un exposant entier positif, par exemple, xx. Puisque xx est le produit de x par x; en suivant la regle des produits, on trouvera pour sa différence $xdx+xdx$ ou $2xdx$. Si l'on veut différencier x^3 qui est le produit de x par x par x, on trouvera pour sa différence $xxdx+xxdx+xxdx$, ou $3xxdx$. Enfin, en procédant de même, on trouvera qu'en général la différence de x^m est $mx^{m-1}dx$.

Si l'exposant est négatif, si l'on a, par exemple, ax^{-2} ou $\frac{a}{xx}$; il faudra, en suivant la regle des fractions, prendre le produit de la différence du numérateur par le dénominateur, en soustraire le produit de la différence du dénominateur par le numérateur, & diviser le tout par le quarré du dénominateur; or, la différentielle du dénominateur est $2xdx$; donc la différentielle de ax^{-2} ou $\frac{a}{xx}$ est $-\frac{2axdx}{x^4}$, ou $-\frac{2adx}{x^3}$. De même la différentielle de x^{-3} ou $\frac{1}{x^3}$ sera $-\frac{3xxdx}{x^6} = -\frac{3dx}{x^4}$. Et généralement celle de $\frac{ax^{-m}}{b}$ ou $\frac{a}{bx^m}$ sera $-\frac{max^{m-1}dx}{bx^{2m}}$, c'est-à-dire $-\frac{max^{-m-1}dx}{b}$.

S'il s'agit d'une puissance imparfaite & positive, telle que $\sqrt[n]{(x^m)}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ exprimant un nombre rompu positif quelconque; alors que l'on suppose

$x^{\frac{m}{n}} = z$; en élevant chaque membre à la puissance n, on aura $x^m = z^n$; & en différenciant, $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$; ce qui donne $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}$; mais x^m étant égal à z^n, on a aussi $z^{n-1} = x^{m-\frac{m}{n}}$; substituant donc cette valeur au lieu de z^{n-1}, on aura $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$.

Si l'exposant est négatif, comme dans $\frac{1}{\sqrt[n]{(x^m)}}$, ou $x^{-\frac{m}{n}}$, ou $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, on trouvera par la regle des fractions que la différentielle est $-\frac{\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

La regle est donc, que la différentielle d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite, positive ou négative, est le produit de l'exposant de la puissance par la quantité même élevée à une puissance moindre d'une unité que la puissance donnée ; & le tout multiplié par la différence de la quantité.

Ainsi, la différence de $x^{\frac{3}{2}}$ sera $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}dx = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, ou $\frac{3}{2}dx\sqrt{(x)}$. Celle de $x^{\frac{5}{4}}$ sera $\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}dx = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}dx$, ou $\frac{5}{4}dx\sqrt[4]{(x)}$. Celle de $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, ou $x^{-\frac{3}{2}}$, sera $-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}dx = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}dx$, ou $-\frac{3dx}{2x^{\frac{5}{2}}}$.

De même si l'on différencie $(ax+xx)^2$, on trouvera que sa différence est $2(ax+xx)(adx+2xdx) = 2aaxdx+6axxdx+4x^3dx$. Que celle de $(xy+ax)^3$ est $3(xy+ax)^2(xdy+ydx+adx) = 3x^3yydy+6ax^3ydy+3aax^3dy+3y^3xxdx+9ayyxxdx+9aayxxdx+3a^3xxdx$. Que celle de $\sqrt[3]{[ax-xx]}$, ou $(ax-xx)^{\frac{1}{3}}$ est $\frac{1}{3}(ax-xx)^{\frac{1}{3}-1}\times(adx-2xdx) = \frac{adx-2xdx}{3(ax-xx)^{\frac{2}{3}}}$. Que celle de $\frac{1}{\sqrt[3]{[ay+xy]}}$, ou $(ay+xy)^{-\frac{1}{3}}$ est $-\frac{1}{3}(ay+xy)^{-\frac{1}{3}-1}(ady+xdy+ydx) = \ldots\ldots\ldots \frac{-ady-xdy-ydx}{3(ay+xy)^{\frac{4}{3}}}$.

Enfin, pour multiplier les exemples en faveur de ceux qui voudront s'exercer, la différence de $(a-x)\sqrt[3]{[a+x]}$, ou $(a-x)(a+x)^{\frac{1}{3}}$ est $-dx(a+x)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}(a+x)^{\frac{1}{3}-1}dx.(a-x) = -dx\sqrt[3]{[a+x]}+\frac{1}{3}\frac{dx(a-x)}{\sqrt[3]{[a+x]^2}}$.

Celle de $\sqrt{[ax+xx+\sqrt[4]{(a^4-x^4)}]}$, ou $[ax+xx+\sqrt[4]{(a^4-x^4)}]^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{adx+2xdx-\frac{x^3dx}{(a^4-x^4)^{\frac{3}{4}}}}{2\sqrt{[ax+xx+\sqrt{(a^4-x^4)}]}} = \frac{(adx+2xdx)(a^4-x^4)^{\frac{3}{4}}-x^3dx}{2(a^4-x^4)^{\frac{3}{4}}\sqrt{[ax+xx+\sqrt[4]{(a^4+x^4)}]}}$.

Celle de $\frac{aa+xx}{\sqrt{[ax+xx]}}$ est. . . . .

$$\frac{3axxdx + 2x^3dx - a^3dx - 2aaxdx}{2[ax+xx]^{\frac{3}{2}}}.$$

Et celle de $\frac{x\sqrt{[ax+xx]}}{a\sqrt{[ay-xy]}}$ eſt . . . .

$$\frac{3aayxdx + 2ayxxdx - 3yx^3dx - aaxxdy + x^4dy}{2a(ay-xy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[ax+xx]}}.$$

38. ON différencie les quantités infiniteſimales, ſoit du premier ordre, ſoit des ordres inférieurs, de la même maniere que les quantités finies. Ainſi, les regles que je viens d'expoſer ſerviront pour les unes & les autres. Il faut ſeulement faire attention que ſi quelqu'une des fluxions du premier ordre a été priſe pour conſtante, ſa différence doit être nulle ou zero. Je vais donner quelques exemples.

Que l'on ait à différencier la formule $ydx - xdy$, ſans prendre aucune des fluxions pour conſtante, la différence ſera $dxdy + yddx - dxdy - xddy = yddx - xddy$. Si on prend dx pour conſtante, la différence ſera $dxdy - dxdy - xddy$, qui ſe réduit à $-xddy$. Et ſi dy eſt conſtante, on aura pour la différence $dxdy + yddx - dxdy = yddx$.

Si l'on différencie $\frac{ydx}{dy}$ ſans prendre aucune des fluxions pour conſtante, on aura pour la différence $\frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$; en regardant dx comme conſtante, $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2}$; & en prenant dy pour conſtante, $\frac{dy^2dx + ydyddx}{dy^2}$, qui ſe réduit à $\frac{dydx + yddx}{dy}$.

De même la différence de $\frac{y\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dz}$, en faisant dz constante, est....................

$$\frac{dydz\sqrt{[dx^2+dy^2]}+ydz\times\frac{dxddx+dyddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}}{dz^2}=\ldots$$

$\frac{dx^2dy+dy^3+ydxddx+ydyddy}{dz\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$. En faisant dy constante, elle est........................

$$\frac{dydz\sqrt{[dx^2+dy^2]}+\frac{ydzdxddx}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}-yddz\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dz^2}$$

$$=\frac{dx^2dydz+dy^3dz+ydzdxddx-ydx^2ddz-ydy^2ddz}{dz^2\sqrt{[dx^2+dy^2]}}.$$

En faisant dx constante, elle est.............

$$\frac{dydz\sqrt{[dx^2+dy^2]}+\frac{ydz.dyddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}-yddz\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dz^2}$$

$$=\frac{dx^2dydz+dy^3dz+ydzdyddy-ydx^2ddz-ydy^2ddz}{dz^2\sqrt{[dx^2+dy^2]}}.$$

Enfin, si aucune des fluxions premières n'est constante, sa différence sera...................

$$\frac{dydz\sqrt{[dx^2+dy^2]}+\frac{ydz.(dxddx+dyddy)}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}-yddz\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dz^2}$$

$$=\frac{dx^2dydz+dy^3dz+ydzdxddx+ydzdyddy-ydx^2ddz-ydy^2ddz}{dz^2\sqrt{[dx^2+dy^2]}}.$$

Et si dans cette dernière formule, on efface tous les termes où est ddz, c'est-à-dire, si on fait dz constante, on retrouvera la première ; si l'on efface ceux où est ddy, on retrouvera la seconde : enfin en effaçant ceux où est ddx, on aura la troisième.

Si l'on différencie $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{[xx+yy]}}$ en faisant dx constante, on aura . . . .

$$\frac{(dx^2+dy^2+yddy)\sqrt{[xx+yy]}-\frac{(xdx+ydy)(xdx+ydy)}{\sqrt{(xx+yy)}}}{xx+yy}$$

$$=\frac{xxdy^2+xxyddy+yydx^2+y^3ddy-2xydxdy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on fait dy constante, la différence sera . . . . .

$$\frac{(dx^2+xddx+dy^2)\sqrt{[xx+yy]}-\frac{(xdx+ydy)(xdx+ydy)}{\sqrt{[xx+yy]}}}{xx+yy}$$

$$=\frac{x^3ddx+xxdy^2+yydx^2+yyxddx-2xydxdy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Et si aucune des fluxions n'est regardée comme constante, elle sera . . . .

$$\frac{(dx^2+xddx+dy^2+yddy)\sqrt{[xx+yy]}-\frac{(xdx+ydy).(xdx+ydy)}{\sqrt{[xx+yy]}}}{xx+yy}$$

$$=\frac{x^3ddx+xxdy^2+xxyddy+yydx^2+yyxddx+y^3ddy-2xydxdy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Enfin, si on veut différencier la formule différentielle du second ordre $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{-dxddy}$, ou bien $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, en prenant dx pour constante, on trouvera pour sa différence,

$$\frac{3dyddy.(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}.(-dxddy)+dxdddy.(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx^2ddy^2}.$$

L'hypothèſe de dy conſtante, ne peut pas avoir lieu ici, puiſque le ddy ſe trouve déja dans la formule donnée. Mais ſi aucune des fluxions n'eſt conſtante, la différence ſera. . . . .

$$\frac{3(dxddx+dyddy).dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}.(-dxddy)+(dxd^3y+ddxddy)(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx^2ddy^2}.$$

On procédera de la même manière dans d'autres cas plus composés.

CHAPITRE II.

De la Méthode des Tangentes.

---

39. SOIENT la courbe ADF (Fig. 24 & 25), TDG ſa tangente en un point quelconque D, BD ſon ordonnée perpendiculaire à l'axe AB, & CF une ordonnée infiniment voiſine, qui, prolongée s'il eſt néceſſaire, rencontrera la tangente en un point G; & ſoit tirée DE parallèle à l'axe AB. On a vû que GF eſt infiniment petite par rapport à EF, & que la différence entre DF & DG eſt infiniment petite par rapport au petit arc DF; on pourra donc prendre comme égales EF & EG, auſſi bien que DF & DG. Cela poſé, ſi l'on fait $AB = x$, $BD = y$; EF ou EG ſera dy, BC ou DE ſera dx, & DF ou DG ſera $\sqrt{[dx^2+dy^2]}$. Mais les triangles ſemblables GED, DBT donnent cette proportion $GE : ED ::$ Fig. 24 & 25.

$DB:BT$, ou bien en termes analytiques, $dy:dx::y:BT$; ainsi $BT=\frac{ydx}{dy}$, ce qui est la formule générale des sou-tangentes pour une courbe quelconque.

Maintenant, dans le cas où l'on aura une courbe donnée, il faudra, pour en avoir la sou-tangente, différencier son équation, & substituer dans la formule $\frac{ydx}{dy}$ la valeur de dx ou celle de dy tirée de l'équation différenciée; alors les différentielles s'évanouiront, & on aura en termes finis la valeur de la sou-tangente qui convient à un point quelconque de la courbe donnée; & si on vouloit l'avoir pour un point déterminé, il suffiroit de substituer, au lieu des inconnues, les valeurs qu'elles doivent avoir relativement à ce point donné.

40. LE droit que l'on a de regarder EF, EG & DF, DG comme égales, fait que l'on peut considérer le point G comme s'il tomboit en F, c'est-à-dire, que la tangente DG, l'arc DF & sa corde, se confondent. De cette manière, les courbes sont des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits; ce qui ne doit s'entendre que lorsqu'on s'arrête aux différences du premier ordre; car si l'on passe à celles du second, alors le point G ne se confond point avec le point F, puisque GF est une différence seconde.

41. LE même triangle GDE nous fournira l'expression des autres lignes analogues à la sou-tangente.

En effet, les triangles semblables GED, BDT donnent $GE:GD::DB:DT$, c'est-à-dire, $dy:\sqrt{[dx^2+dy^2]}::y:DT$; ainsi $DT=\frac{y\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dy}$, expression générale de la tangente.

Si

Si DN eſt perpendiculaire à la courbe au point D, les triangles GDE, DBN ſeront ſemblables; & on aura $DE : EG :: DB : BN$, c'eſt-à-dire, $dx : dy :: y : BN$; & par conſéquent $BN = \frac{ydy}{dx}$, formule générale de la ſou-normale.

On aura encore $DE : DG :: DB : DN$ ou $dx : \sqrt{[dx^2 + dy^2]} :: y : DN$; ainſi $DN = \frac{y\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}{dx}$, formule de la normale.

Que du point B l'on mène BM, BH perpendiculaires à DN, DT. On aura les triangles ſemblables GDE, DBM qui donneront $GD : GE :: DB : BM$ ou $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} : dy :: y : BM$. Donc $BM = \frac{ydy}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, expreſſion générale de la ligne BM.

Les triangles GDE, DBH ſeront auſſi ſemblables; & on aura $GD : DE :: DB : BH$ ou $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} : dx :: y : BH = \frac{ydx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, expreſſion générale de la ligne BH.

42. La ſimilitude des deux triangles GED, DBT, fera connoître de plus l'angle que la tangente fait avec l'axe à un point quelconque de la courbe; car l'angle DTB ſera connu, dès qu'on aura le rapport du ſinus droit DB au coſinus BT, c'eſt-à-dire, le rapport de GE à ED, ou de dy à dx.

Ainſi l'équation de la courbe étant donnée, ſi on la différentie, & ſi l'on fait de l'équation différentielle une proportion, dont deux des termes ſoient dy & dx, on aura le rapport du ſinus au coſinus de l'angle DTB, qui ſera par conſéquent connu.

43. On aura auſſi en vertu de ce raiſonnement

les mêmes formules pour les courbes rapportées à un foyer (Fig. 26 & 27). On fera seulement attention que si l'on mène du foyer B une perpendiculaire BT à l'ordonnée BD, laquelle rencontrera la tangente en T, les triangles DBT, DGE seront semblables; car les angles TBD, DEG sont droits, & l'angle TDB ne surpasse l'angle DGE que de l'angle infinitésimal DBG, comme on le voit clairement en menant GQ perpendiculaire à TB. On peut donc regarder les angles TDB, DGE comme égaux, & par conséquent aussi les deux angles BTD, GDE, & les deux triangles DTB, GDE comme semblables. Mais de plus GF est infiniment petite par rapport à EF. Donc, &c.

Fig. 26 & 27.

EXEMPLE I.

Fig. 24.

44. SI la courbe ADF (Fig. 24) est une parabole ordinaire dont l'équation est $ax=yy$; en différenciant, on aura $adx=2ydy$, & $dx=\frac{2ydy}{a}$. Substituant cette valeur de dx dans la formule des sou-tangentes $\frac{ydx}{dy}$, on aura $\frac{2yy}{a}$ qui se réduit à $2x$, en mettant au lieu de yy sa valeur ax donnée par l'équation de la courbe. La sou-tangente dans la parabole est donc double de l'abscisse. Ainsi, si l'on prend $AT=AB$, & que par les points T & D on mène la droite TD, elle sera tangente au point D. Si au lieu de la valeur de dx donnée par l'équation de la courbe, on avoit substitué la valeur de dy, qui est $\frac{adx}{2y}$ dans la formule générale, on auroit trouvé, de même qu'auparavant, $\frac{2yy}{a}$. Il me suffira d'en avoir fait la remarque dans cet exemple.

Si on demande la ſou-normale de la même parabole, on prendra la formule générale des ſou-normales $\frac{ydy}{dx}$, dans laquelle on ſubſtituera au lieu de dx, ſa valeur $\frac{2ydy}{a}$ tirée de l'équation de la courbe; & on aura $\frac{a}{2}$ pour la ſou-normale de la parabole, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt la moitié du paramètre. Si l'on prend donc $BN = \frac{a}{2}$, & que du point N au point D, on mène la droite ND, elle ſera perpendiculaire à la courbe en D.

Si c'eſt la tangente DT que l'on cherche; dans la formule des tangentes $\frac{y\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dy}$, on ſubſtituera $\frac{2ydy}{a}$ au lieu de dx, & on aura......
$\frac{y\sqrt{[4yydy^2+aady^2]}}{ady} = \frac{y}{a}\sqrt{[4yy+aa]} =$ (en mettant au lieu de yy ſa valeur ax donnée par l'équation de la courbe) $\sqrt{[4xx+ax]}$, qui eſt la tangente cherchée.

Pour la normale DN, ſubſtituez encore $\frac{2ydy}{a}$ au lieu de dx dans la formule $\frac{y\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dx}$, & vous aurez $\frac{y\sqrt{[4yydy^2+aady^2]}}{2ydy} = \frac{\sqrt{[4yy+aa]}}{2}$ $= \frac{\sqrt{[4ax+aa]}}{2}$.

Pour la droite BM, faites la même ſubſtitution dans la formule $\frac{ydy}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$, & elle deviendra $\frac{aydy}{\sqrt{[4yydy^2+aady^2]}} = \frac{ay}{\sqrt{[4yy+aa]}} = \ldots$ $\frac{a\sqrt{[ax]}}{\sqrt{[4ax+aa]}}$.

Enfin, pour la droite BH, substituez toujours la même valeur de dx dans la formule générale $\frac{ydx}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$, & vous trouverez $\frac{2yydy}{\sqrt{[4yydy^2+aady^2]}}$ $= \frac{2yy}{\sqrt{[4yy+aa]}} = \frac{2ax}{\sqrt{[4ax+aa]}}$.

Lorsque l'on a trouvé la sou-tangente, on n'a pas besoin de recourir aux formules pour trouver les autres lignes ; je ne m'en suis servi ici que pour donner lieu aux Commençants de s'exercer. En effet, BT étant une fois connue, le triangle TBD rectangle en D, fait connoître la tangente TD ; & la similitude des triangles TBD, DBN, DMB, DHB donnera toutes les autres lignes ; c'est pourquoi, dans les exemples suivants, je n'appliquerai la méthode qu'aux sou-tangentes.

Si l'on veut avoir l'angle que la tangente de la parabole fait avec l'axe ; il n'y a qu'à prendre l'équation différentielle $adx = 2ydy$, & en former cette proportion $dy : dx :: a : 2y$; par où l'on voit que quelque part que soit le point D, le sinus droit BD est au cosinus BT comme le paramètre est au double de l'ordonnée. Et si la tangente est déterminée pour un point D, tel, par exemple, que l'abscisse correspondante AB ou $x = \frac{a}{4}$, on tirera de l'équation de la courbe la valeur de y correspondante à l'abscisse

$\frac{a}{4}$, qui eſt ici $y = \frac{a}{2}$, & la proportion précédente ſe changera en celle-ci, $dy : dx :: a : a$; c'eſt-à-dire, que lorſque $y = \frac{a}{2}$, ou que $x = \frac{a}{4}$, l'angle DTB eſt de 45°.

Au ſommet A, on a $y = 0$; ainſi la proportion devient $dy : dx :: a : 0$; ce qui fait voir qu'au ſommet de la courbe dy eſt infini par rapport à dx, c'eſt-à-dire, que le coſinus de l'angle eſt nul, & qu'ainſi la tangente en ce point eſt perpendiculaire à l'axe.

EXEMPLE II.

45. SOIT l'équation générale des paraboles de tous les degrés, $x = y^m$, où je ſuppoſe que l'unité rende les termes homogènes, & que m repréſente un nombre poſitif entier ou rompu. En différentiant, on a $dx = my^{m-1}dy$, & en mettant cette valeur de dx dans la formule $\frac{ydx}{dy}$, on trouvera la ſou-tangente $= my^m = mx$. Soit maintenant $m = 3$, ou qu'il s'agiſſe de la première parabole cubique $x = y^3$, ſa ſou-tangente ſera $= 3x$. Soit $m = \frac{3}{2}$, ou qu'il ſoit queſtion de la ſeconde parabole cubique $xx = y^3$, ſa ſou-tangente ſera $\frac{3}{2}x$, &c.

L'équation différentielle de la courbe $dx = my^{m-1}dy$ donne cette proportion $dy : dx :: 1 : my^{m-1}$. Mais en ſuppoſant $y = 0$, ſi m eſt plus grand que l'unité, la proportion devient $dy : dx :: 1 : 0$; c'eſt-à-dire, que la raiſon de dy à dx eſt infinie, & qu'ainſi la tangente au ſommet eſt perpendiculaire à l'axe. Et ſi m eſt plus petit que l'unité, la proportion devient $dy : dx :: 1 : \frac{m}{y^{1-m}}$, ou en ſuppoſant $y=0$, $dy : dx :: 1 : \frac{m}{0}$; c'eſt-à-dire, que la raiſon de dy à dx eſt infiniment petite, & que par conſéquent la tangente au ſommet eſt parallèle à l'axe.

EXEMPLE III.

Fig. 28. 46. QUE la courbe DCE (Fig. 28) dont on cherche la ſou-tangente, ſoit l'hyperbole entre les aſymptotes, dont l'équation eſt $xy=aa$. En différenciant, on a $xdy+ydx=0$, & $dx=-\frac{xdy}{y}$. La ſubſtitution de cette valeur de dx dans la formule $\frac{ydx}{dy}$ donne la ſou-tangente $=-x$, valeur négative; ce qui veut dire que la ſou-tangente BT doit être priſe du côté oppoſé aux abſciſſes. Si l'on prend donc $BT=BA$, & ſi l'on mène au point C la droite TC, elle touchera la courbe au point C.

Comme dans la courbe DCE, l'ordonnée y décroît tandis que l'abſciſſe augmente, il auroit fallu, en différenciant, faire dy négatif; mais pour la même raiſon le dy auroit auſſi dû être pris négativement dans la formule générale; comme on a négligé de le faire de part & d'autre, le réſultat eſt le même. Dans les autres cas pareils, je me diſpenſerai d'en avertir, me contentant de l'avoir fait ici.

Soit l'équation générale $x=\frac{1}{y^m}$ qui convient à l'infini à toutes les hyperboles entre les aſymptotes, m étant un nombre quelconque poſitif, entier ou fractionnaire. En différenciant, on aura $dx=-\frac{my^{m-1}dy}{y^{2m}}=-\frac{mdy}{y^{m+1}}$; en ſubſtituant cette valeur dans la formule $\frac{ydx}{dy}$, la sou-tangente sera $-\frac{m}{y^m}=$ (d'après l'équation de la courbe) $-mx$.

EXEMPLE IV.

47. SOIT la courbe ADF (Fig. 24) un cercle dont le diamètre étant $=2a$, $AB=x$, $BD=y$, l'équation est $2ax-xx=yy$. Différenciant, on a $2adx-2xdx=2ydy$, & $dx=\frac{ydy}{a-x}$. Ainsi la formule $\frac{ydx}{dy}$ de la sou-tangente deviendra $\frac{yy}{a-x}$, ou, en mettant pour yy sa valeur prise dans l'équation de la courbe, $\frac{2ax-xx}{a-x}$. La sou-tangente du cercle est donc une ligne quatrième proportionnelle à $a-x$, $2a-x$, & x. Fig. 24.

Si l'on compte les abscisses AB depuis le centre (Fig. 29), & qu'ainsi l'équation du cercle soit $aa-xx=yy$; la différenciation donne $-xdx=ydy$, & $dx=-\frac{ydy}{x}$, & par la substitution ordinaire, la formule de la sou-tangente deviendra $-\frac{yy}{x}$; ce qui exprime une ligne troisième proportionnelle à AB & BD, mais prise négativement, ou en allant de B vers T. Fig. 29.

EXEMPLE V.

48. SI la courbe ADF (Fig. 24) représente l'ellipse de l'équation $ax-xx=\frac{ayy}{b}$ dont les abscisses partent du sommet A; on trouvera, après avoir Fig. 24.

différentié, $dx = \frac{2aydy}{b(a-2x)}$; & cette valeur de dx ſubſtituée dans la formule $\frac{ydx}{dy}$ donnera la ſou-tangente $= \frac{2ayy}{b(a-2x)} = \frac{2ax-2xx}{a-2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ ſa valeur $ax-xx$ donnée par l'équation. Si dans cette expreſſion de la ſou-tangente on fait $x = \frac{a}{2}$ qui eſt la moitié de l'un des axes, elle deviendra $\frac{2aa}{0}$, c'eſt-à-dire infinie. Donc la tangente pour le point où le ſecond axe coupe la courbe, eſt parallèle au premièr axe ; ce qu'on trouveroit encore être vrai, ſi l'on cherchoit l'angle que le premier axe fait avec la tangente en ce point.

Qu'il s'agiſſe de l'équation générale aux ellipſes de tous les degrés, $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m(a-x)^n$, m & n étant des nombres poſitifs entiers ou rompus. En différentiant, on a $\frac{m+n}{b}ay^{m+n-1}dy = mx^{m-1}dx(a-x)^n - ndx(a-x)^{n-1}x^m$, & par conſéquent $dx = \frac{(m+n)ay^{m+n-1}dy}{bmx^{m-1}(a-x)^n - bnx^m(a-x)^{n-1}}$; ſubſtituant cette valeur dans la formule générale, & mettant enſuite, au lieu de $\frac{ay^{m+n}}{b}$, ſa valeur donnée par l'équation, on aura pour ſou-tangente . . $\frac{(m+n)x^m(a-x)^n}{mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1}}$, qui, en diviſant le numérateur & le dénominateur par x^{m-1} $(a-x)^{n-1}$, deviendra $\frac{(m+n).(ax-xx)}{ma-mx-nx}$.

Dans le cas de l'ellipſe ordinaire $m=1$, & $n=1$; & par conſéquent la ſou-tangente eſt $\frac{2ax-2xx}{a-2x}$; comme on l'a déja trouvé plus haut. Si $m=3$, $n=2$, c'eſt-à-dire, ſi l'équation eſt $\frac{ay^5}{b}=$ $x^3(a-x)^2$, la ſou-tangente ſera $\frac{5ax-5xx}{3a-5x}$, &c.

S'il s'agiſſoit de l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b}=x^m(a+x)^n$, qui exprime les hyperboles de tous les degrés rapportées à l'axe, en comptant les abſciſſes depuis le ſommet; on trouveroit, en opérant de même, que la ſou-tangente eſt $\frac{(m+n)\ (ax+xx)}{ma+mx+nx}$, réſultat qui ne différe du précédent que par les ſignes, de même que l'équation d'où on l'a tiré. Dans le cas de l'hyperbole ordinaire, $m=1$. $n=1$; & la ſou-tangente eſt $\frac{2ax+2xx}{a+2x}$. Si $m=3$, $n=2$, c'eſt-à-dire ſi l'équation eſt $\frac{ay^5}{b}=x^3(a+x)^2$, la ſou-tangente ſera $\frac{5ax+5xx}{3a+5x}$, &c.

49. LA même méthode des tangentes, fournit le moyen de reconnoitre ſi les courbes ont des aſymptotes, & donne la manière de les mener, lorſqu'elles ſont inclinées à l'axe.

EXEMPLE I.

Fig. 30. 50. SUPPOSONS que la courbe ADE (Fig. 30) soit représentée par l'équation ci-dessus, $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m(a+x)^n$, dont la sou-tangente est $TB = \frac{(m+n).(ax+xx)}{ma+mx+nx}$. L'interceptée AT sera ... $\frac{(m+n).(ax+xx)}{ma+mx+nx} - x = \frac{nax}{ma+mx+nx}$.

Il est clair que la tangente TD deviendra asymptote, si la courbe étant touchée à un point infiniment éloigné, ou si l'abscisse $AB = x$ devenant infinie, l'interceptée AT reste finie; mais si dans l'expression de AT on suppose x infinie, le premier terme ma du dénominateur sera infiniment plus petit que les autres, & devra être négligé; alors AT sera $\frac{nax}{mx+nx} = \frac{na}{m+n}$, quantité finie; la courbe a donc une asymptote qui doit partir du point M, en faisant $MA = \frac{na}{m+n}$. Pour la mener, que l'on éleve AH perpendiculaire à AB, & supposons que l'asymptote soit MHP. Cela posé, si x est infinie, on aura $dx : dy :: MA : AH$; mais alors a est zero par rapport à x, ce qui change l'équation de la courbe en celle-ci $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$, ou en tirant la racine, & faisant pour plus de commodité $m+n=t$, en cette autre, $y\sqrt[t]{a} = x\sqrt[t]{b}$. Maintenant, différenciant, on a $dy\sqrt[t]{a} = dx\sqrt[t]{b}$, & par conséquent $dx : dy :: \sqrt[t]{a} : \sqrt[t]{b}$. Donc $MA : AH :: \sqrt[t]{a} : \sqrt[t]{b}$, ou, à cause de $MA =$

$\frac{na}{t}$, $\frac{na}{t} : AH :: \sqrt[t]{a} : \sqrt[t]{b}$; ainsi $AH = \frac{na\sqrt[t]{b}}{t\sqrt[t]{a}}$.

Si l'on prend donc $AM = \frac{na}{t}$, & qu'on éleve la perpendiculaire $AH = \frac{na\sqrt[t]{b}}{t\sqrt[t]{a}}$, la droite infinie MHP sera l'asymptote de la courbe ADE.

Si $m = 1$, $n = 1$, c'est-à-dire, si l'équation exprime l'hyperbole ordinaire $\frac{ayy}{b} = ax + xx$; t sera $= 2$, $AM = \frac{a}{2}$, & $AH = \frac{a\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$. D'où l'on voit que AM est la moitié du premier axe, & AH la moitié du second, comme il est démontré dans tous les Traités de Sections coniques.

EXEMPLE II.

51. SOIT ADE la courbe de l'équation $y^3 - x^3 = axy$, en faisant $AB = x$, $BD = y$. La différenciation donnera $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$, ou $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$, & $AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay}$, ou, en mettant au lieu de $3y^3 - 3x^3$ sa valeur $3axy$ donnée par l'équation de la courbe, $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$. Mais lorsque x est infinie, c'est-à-dire, dans le cas de l'asymptote où AT devient AM, le terme ay est nul par rapport à $3xx$. Donc alors $AM = \frac{axy}{3xx} = \frac{ay}{3x}$.

Puisqu'on ne peut pas, dans l'équation proposée, séparer les indéterminées, ni par conséquent déterminer la valeur de AM; supposons $AM = \frac{ay}{3x} = t$ (le même artifice pourra servir dans d'autres cas de même nature), on aura $y = \frac{3tx}{a}$; valeur qui substituée dans l'équation proposée, donne $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 3txx$; mais lorsque x est infinie, le dernier terme est zero par rapport aux autres, & l'équation devient $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 0$, ou $t = \frac{a}{3}$. Prenant donc $AM = \frac{a}{3}$, il faudra mener l'asymptote du point M. De plus, on doit avoir $MA : AH :: dx : dy$; & l'équation proposée $y^3 - x^3 = axy$, ou $y^3 = x^3 + axy$ se réduit, lorsque x est infinie, à $x^3 = y^3$, ou $x = y$, & par conséquent $dx = dy$. Si l'on prend donc $MA = AH$, & que du point M & par le point H, on mène une droite; elle sera l'asymptote de la courbe.

52. J'AJOUTERAI ici que la ligne AT a nécessairement une limite au-delà de laquelle elle ne peut pas passer, & qu'il y a des cas où cette limite est infiniment petite ou nulle. En voici un exemple bien simple.

Fig. 31. Soit l'hyberbole équilatère BCF (Fig. 31) dont l'équation est $aa + xx = yy$, en faisant $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$; différentiant, on aura $xdx = ydy$; & la sou-tangente ED ou $\frac{ydx}{dy}$ deviendra $\frac{yy}{x} = \frac{aa+xx}{x}$; & par conséquent $ED - AD = AE = \frac{aa+xx}{x} - x = \frac{aa}{x}$.

Lorſque $x=o$, la ligne AE eſt infinie, & la tangente en B eſt parallèle à l'axe AD ; au contraire, lorſque $x=\infty$, on a $AE=o$. Par où l'on voit que le point E peut parcourir toute la ligne AE infiniment prolongée vers la gauche, & qu'il ne paſſe pas au-delà du point A origine des coordonnées, quoique la courbe tourne ſa convexité vers l'axe. Ainſi l'aſymptote AG part du point A, & fait avec la ligne des abſciſſes un angle de $45°$, puiſque l'équation de la courbe $aa+xx=yy$, devient $xx=yy$, ou $x=y$, lorſque $x=\infty$.

53. J'AI ſuppoſé juſqu'ici que l'angle des coordonnées étoit droit. S'il eſt obtus ou aigu, faiſant comme ci-deſſus $BC=x$, (Fig. 32 & 33), $CE=y$, Fig. 32 & 33.
$CD=dx$, $OG=dy$, la ſou-tangente ſera toujours $\frac{ydx}{dy}$, parce que les triangles GEO, EAC ſont toujours ſemblables; mais les autres formules ont beſoin de quelques changements.

Dans le triangle EOG, l'angle $O=ACE$ eſt ſuppoſé connu; abaiſſant donc GI du point G perpendiculaire à AD, & prolongeant, s'il le faut, EO vers H, on aura le triangle GOH dont l'angle en O eſt connu, & l'angle en H eſt droit; ainſi l'angle en G eſt auſſi donné, & la raiſon de GO à GH eſt connue; je la repréſente par celle de a à m; on aura donc $a:m::dy:GH=\frac{mdy}{a}$; le rapport de GO à OH ſera auſſi connu; en le repréſentant par celui de a à n, on aura $a:n::dy:OH=\frac{ndy}{a}$. Donc $EH=dx\pm\frac{ndy}{a}$, (le ſigne $+$ eſt pour la Figure 32, & le ſigne $-$ pour la Figure 33). De-là $\overline{EG}^2=$

$\frac{aadx^2 \pm 2andxdy + nndy^2 + mmdy^2}{aa}$. Mais ſi OG eſt exprimé par a, GH par m, OH par n, on aura $aa = mm + nn$, & $aady^2 = mmdy^2 + nndy^2$; la ſubſtitution de cette valeur dans l'expreſſion de $\overline{EG}$, donne $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{aa}$, & EG ou $ds = \frac{\sqrt{[aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2]}}{a}$, expreſſion de l'élément de la courbe. Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables EGO, AEC, on a $GO:GE::EC:EA$; c'eſt-à-dire, $dy : \frac{\sqrt{[a^2dx^2 \pm 2andxdy + a^2dy^2]}}{a} :: y : EA = \frac{y\sqrt{[a^2dx^2 \pm 2andxdy + a^2dy^2]}}{dy.a}$, formule de la tangente.

Soient TE, ES perpendiculaires à la courbe & à l'axe AI; on aura, à cauſe des triangles GOH, ECS ſemblables, $ES = \frac{my}{a}$, $CS = \frac{ny}{a}$; & à cauſe des triangles GEH, EST auſſi ſemblables, $EH:HG::ES:ST$, c'eſt-à-dire, $\frac{adx \pm ndy}{a} : \frac{mdy}{a} :: \frac{my}{a} : ST = \frac{mmydy}{a(adx \pm ndy)}$; & par conſéquent $CT = \frac{mmydy}{a(adx \pm ndy)} \pm \frac{ny}{a} = \frac{mmydy + nnydy \pm anydx}{a(adx \pm ndy)} = \frac{aydy \pm nydx}{adx \pm ndy}$, formule de la ſou-normale.

Les autres formules ſe trouveront par la même voie, qu'il nous ſuffit d'avoir indiquée.

54. LES courbes dont on veut avoir les tangentes peuvent être tranſcendantes; j'appelle ainſi celles qui ne peuvent être exprimées par aucune équation algébrique, mais qui dépendent de la rectification d'autres courbes non-rectifiables. Soit la courbe APB (Fig. 34) dont on ſache mener la tangente PTK à un point quelconque P; & prolongeant QP perpendiculaire à AQ juſqu'en M, que le rapport de MP à l'arc PA ſoit exprimé par une équation quelconque. Si l'on demande la tangente MT de la courbe CMA tracée par les points M; on mènera qm infiniment proche de QM, & MR parallèle à PT; & faiſant l'arc AP (ſuppoſé rectifié) $=x$, $PM=y$, on aura $Pp=dx$, $Rm=dy$. De plus, les triangles ſemblables mRM, MPT donnent $mR:RM::MP:PT$, ou $dy:dx::y:PT=\frac{ydx}{dy}$, formule pour la ſou-tangente de la courbe CMA, dont la valeur doit ſe prendre ſur la tangente de la courbe APB. L'équation donnée de la courbe AMC fournira la valeur de dx ou de dy qu'il faut ſubſtituer dans la formule; & on achevera le reſte à l'ordinaire. Fig. 34.

EXEMPLE.

55. SUPPOSONS que tandis que le cercle DPC (Fig. 35) roule uniformément ſur la droite AB en partant du point A, le point C de la circonférence, qui d'abord étoit appliqué en A, laiſſe ſa trace empreinte ſur le plan, & continue ſon mouvement juſqu'à ce qu'il arrive de nouveau dans la droite AB; ce point décrira une courbe ACB, à laquelle la manière dont elle eſt engendrée a fait donner le nom de *cycloïde*. C'eſt la cycloïde ordinaire, ſi le cercle, en appliquant ſucceſſivement tous ſes points ſur ceux de la droite AB, meſure cette ligne par ſa circonférence, de ma- Fig. 35.

nière que le tour entier étant achevé, la circonférence & la droite AB ſoient égales. La cycloïde eſt dite *allongée*, lorſque le mouvement eſt tel que la droite AB, ſoit plus longue que la circonférence, & *raccourcie* ſi la droite AB eſt plus courte.

On voit par la deſcription de la courbe, que ſi l'on mène d'un point quelconque la droite MQ parallèle à AB, la ligne MP compriſe entre la courbe & le cercle CPD ſera à l'arc CP, comme la droite AB à toute la circonférence.

En effet, ſuppoſons le cercle générateur dans les deux poſitions EMF, DPC; menant les cordes ME, PD, puiſque les arcs EM, DP ſont égaux, les cordes ME, PD ſeront égales & parallèles, & on aura par conſéquent $MP = ED$. Mais, par la nature de la courbe, $AE : EM :: AD : EMF :: AB : EMFE :: ED : MF$; or, $MF = PG$, & $ED = MP$; on aura donc auſſi $MP : PC :: AD : EMF :: AB : EMFE$. Si l'on ſuppoſe donc la droite $AB = a$, la circonférence $EMFE$ du cercle générateur $= b$, l'arc quelconque CP pris pour abſciſſe $= x$, & l'ordonnée $PM = y$, on aura pour l'équation de la cycloïde $\frac{by}{a} = x$.

Ayant l'équation de la courbe, je la différentie, & j'ai $\frac{bdy}{a} = dx$; & ſubſtituant cette valeur au lieu de dx dans la formule $\frac{ydx}{dy}$, j'ai $PT = \frac{by}{a} = x$. Prenant donc (Fig. 34) ſur la tangente PK du cercle, que je ſuppoſe menée, une partie PT égale à l'arc de cercle AP, & menant au point M la droite PM, elle ſera tangente de la cycloïde au point M.

Si c'eſt la cycloïde ordinaire; puiſqu'alors $b = a$, & par conſéquent $y = x$, on aura $PM = PT$, &

l'angle

Par la propriété de la courbe, MP : l'arc $PA::a:b$; ainsi les différentielles de MP & de l'arc PA seront dans le même rapport, & on aura $dz - dy : ds :: a : b$; c'est-à-dire que $\frac{ads}{b} = dz - dy$. Mais $ds = \sqrt{[dx^2 + dy^2]}$. & par la propriété du cercle $y = \sqrt{[2rx - xx]}$; donc $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{[2rx - xx]}}$, & $dy^2 = \frac{rrdx^2 - 2rxdx^2 + xxdx^2}{2rx - xx}$, & par conséquent $ds = \frac{rdx}{\sqrt{[2rx - xx]}}$.

Si l'on met ces valeurs au lieu de ds & de dy dans l'équation $\frac{ads}{b} = dz - dy$, on aura $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{[2rx - xx]}}$, équation différentielle de la cycloïde.

Substituant donc dans la formule $\frac{zdx}{dz}$ de la soutangente, la valeur de dz tirée de l'équation de la courbe, on trouvera $QN = \frac{bz\sqrt{[2rx - xx]}}{ar + br - bx}$. Dans la cycloïde ordinaire $a = b$, & par conséquent $QN = \frac{z\sqrt{[2rx - xx]}}{2r - x}$; c'est-à-dire, qu'on a $2r - x : \sqrt{[2rx - xx]} :: z : QN$, ou bien $2r - x : y :: z : QN$. Mais par la propriété du cercle, $2r - x : y :: y : x$. Donc $y : x :: z : QN$, c'est-à-dire, $QP : QA :: QM : QN$, & par conséquent MN est parallèle à PA.

EXEMPLE II.

58. SOIT la courbe APB la parabole de l'équa-

telle que la relation des ordonnées PQ, PM, PN relatives à un point quelconque M, soit exprimée par une équation, & que l'on demande la tangente pour le point M. On mènera pS infiniment voisine de PN, & NS, MR, QO parallèles à AB; PE & PF seront connues par la supposition, & on supposera $PE = s$, $PF = t$, $PQ = x$, $PM = y$, $PN = z$. D'après la similitude des triangles QPE & qOQ, mRM & MPT, on trouvera $QO = \frac{sdx}{x} = MR = NS$, & $PT = \frac{sydx}{xdy}$, formule de la soutangente; mais parce qu'en différentiant l'équation de la courbe MC pour avoir la valeur de dx qui doit être substituée dans cette formule, cette valeur sera donnée en dy & dz, on n'aura pas la sou-tangente exprimée en termes finis. Que l'on fasse donc attention que les triangles semblables NSn, NPF donnent $NP : PF :: nS : SN$, c'est-à-dire, $z : t :: \pm dz : SN = \pm \frac{tdz}{z}$ (le signe $+$ est pour le cas où z croît, tandis que x & y croissent; mais si x & y croissant, z décroît, on se sert du signe négatif). De plus, on a vû que $SN = \frac{sdx}{x}$. Donc $\pm \frac{tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$, & par conséquent $dz = \pm \frac{szdx}{tx}$. Mettant donc cette valeur de dz dans l'équation différentiée de la courbe MC, on aura une valeur de dx donnée en dy, qui étant substituée dans la formule de la sou-tangente $\frac{sydx}{xdy}$, fera évanouir les différences, & la sou-tangente sera exprimée en termes finis.

EXEMPLE I.

60. SOIT $xz=yy$ l'équation de la courbe MC; en différentiant, on a $zdx+xdz=2ydy$, & $zdx \pm \frac{szdx}{t}=2ydy$, en mettant au lieu de dz sa valeur $\pm \frac{szdx}{tx}$; d'où l'on tire $dx=\frac{2tydy}{tz \pm sz}$. Mettant donc cette valeur de dx dans la sou-tangente $\frac{sydx}{xdy}$, on trouve $PT=\frac{2styy}{tzx \pm szx}=\frac{2st}{t \pm s}$ (puisque $yy=xz$). Soit maintenant la courbe AQC une parabole dont le paramètre $=b$; & la courbe BCN un cercle dont le diamètre $AB=2a$. Si le point N tombe dans le premier quart de circonférence, en comptant du point A, alors dz est positif, la formule de la sou-tangente PT est $\frac{2st}{t+s}$, la sou-tangente du cercle (en faisant $AP=q$) est $\frac{2aq-qq}{a-q}=t$, & celle de la parabole est $2q=s$. Mettant donc ces valeurs de t & de s dans l'expression $\frac{2st}{t+s}$, on aura $PT=\frac{8aq-4qq}{4a-3q}$.

Si le point N tombe dans l'autre quart de circonférence, alors dz est négatif, la formule de la sou-tangente PT est $\frac{2st}{t-s}$, la sou-tangente du cercle est $\frac{2aq-qq}{q-a}=t$, celle de la parabole est toujours $2q=s$; & par conséquent en faisant les substitutions, on trouvera, comme dans le premier cas, $PT=\frac{8aq-4qq}{4a-3q}$.

61. MAIS puisqu'ici AP a été nommée q, & que AQ est une parabole, on a PQ ou $x = \sqrt{bq}$; & BCN étant un cercle, PN ou $z = \sqrt{[2aq - qq]}$. Donc l'équation $yy = zx$ de la courbe MC devient $yy = q\sqrt{[2ab - bq]}$; & puisqu'on a ainsi l'équation entre les coordonnées AP, PM, on peut trouver la sou-tangente PT par le moyen de la formule ordinaire $\frac{ydq}{dy}$. En effet, différentiant l'équation $yy = q\sqrt{[2ab - bq]}$, j'ai $ydy = \frac{4abdq - 3bqdq}{4\sqrt{[2ab - bq]}}$. Je multiplie par y le numérateur & le dénominateur de la formule $\frac{ydq}{dy}$ qui devient $\frac{yydq}{ydy}$. Je substitue au lieu de yy & de ydy leurs valeurs respectives, & je trouve, comme auparavant, $\frac{yydq}{ydy} = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q} = PT$.

62. PLUS généralement, soit $x^m z^n = y^{m+n}$ l'équation de la courbe MC : la différentiation donne $mz^m x^{m-1}dx + nx^m z^{n-1}dz = (m+n)y^{m+n-1}dy$; mettant au lieu de dz sa valeur $\pm \frac{szdx}{tx}$, on a $\frac{tmz^n x^{m-1}dx \pm snx^{m-1}zndx}{t} = (m+n)y^{m+n-1}dy$, & par conséquent $dx = \frac{(mt + nt)y^{m+n-1}dy}{(mt \pm ns)z^n x^{m-1}}$. Donc PT ou $\frac{sydx}{xdy} = \frac{(mst + nst)y^{m+n}}{(mt \pm ns)z^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt \pm ns}$, en mettant au lieu de y^{m+n} sa valeur $x^m z^n$.

63. Si les deux courbes AC, BCN deviennent des lignes droites, & que l'équation de la courbe MC ſoit ſimplement $xz = yy$, cette courbe ſera une des ſections coniques ordinaires ; ſavoir, une ellipſe, lorſque l'ordonnée CD tombe entre les points A, B; une hyperbole lorſqu'elle tombe au-delà de ces points, de côté ou d'autre; & une parabole, ſi les points A, B ſont infiniment éloignés, c'eſt-à-dire, lorſque l'une des droites AC, BC eſt parallèle au diamètre. D'où l'on voit clairement que dans les mêmes circonſtances, ces mêmes courbes ſeront toujours coniques, mais d'un ordre ſupérieur & variable juſqu'à l'infini, lorſque l'équation à la courbe MC ſera en général $x^m z^n = y^{m+n}$.

64. Soit la courbe donnée AP (Fig. 37) dont l'origine des coordonnées eſt en A, & dont on ſait mener les tangentes; ſoit une autre courbe CMD telle que menant d'un point donné F, la droite FMP, comme on voudra, le rapport de FM à la partie AP, ſoit exprimé par une équation quelconque. On demande la tangente de la courbe CMD? Fig. 37.

Suppoſons que PH ſoit la tangente de la courbe APB en P; ſoit menée FH perpendiculaire à FP, & Fp infiniment voiſine; du centre F ſoient décrits les petits arcs MR, PO; & imaginons que MT ſoit la tangente cherchée. Faiſons $PH = t$, $FH = s$, $FM = y$, $FP = z$, & l'arc $AP = x$. Tout cela poſé, puiſque les arcs infiniment petits ſe confondent avec leurs ſinus, le triangle MRm eſt rectangle en R; & puiſque l'angle MmR ne differe de l'angle TMF que de l'angle infiniment petit MFm, on pourra regarder les deux triangles MRm, TFM, & les deux triangles POp, HFP, comme ſemblables. On aura donc $mR : RM :: MF : FT$, c'eſt-à-dire, $dy : MR :: y : FT =$

$\frac{MR.y}{dy}$; ainsi la valeur de FT suppose celle de MR que l'on auroit, si on connoissoit PO. Mais les triangles PFH, POp, donnent $PH:FH::Pp:PO$, c'est-à-dire, $t:s::dx:OP=\frac{sdx}{t}$; & à cause des secteurs FPO, FMR semblables, $FP:PO::FM:MR$, ou $z:\frac{sdx}{t}::y:MR=\frac{sydx}{zt}$; ainsi $FT=\frac{syydx}{tzdy}$, formule de la sou-tangente, qui sera exprimée en termes finis, si l'on y substitue la valeur de dx donnée par l'équation de la courbe CMD différentiée.

EXEMPLE I.

Fig. 38. 65. Si l'on suppose que la droite HA (Fig. 38) tournant uniformément sur le point H, son extrémité A décrive la circonférence $ABCD$, tandis que le point H se meut uniformément sur le raïon HA, de manière que le raïon revenant sur sa première situation HA, le point H l'ait parcouru tout entier, & arrive en A; par ce double mouvement, le point H aura décrit la courbe $HEcA$ qui s'appelle la *spirale d'Archiméde*. On voit, par la génération de cette courbe, qu'un arc quelconque AB de la circonférence, est à la partie correspondante HE du raïon, comme la circonférence entière est à tout le raïon. Appellant donc le raïon r, la circonférence c, l'arc $AB=x$, & l'ordonné $HE=y$, on aura $x:y::c:r$, & par conséquent $y=\frac{rx}{c}$, équation de la spirale dont les ordonnées partent du foyer H. Si l'on demande maintenant la tangente ET de la spirale; puis-

que la droite FP de la Figure 37 eſt ici le raïon HB, on aura $z = r$; & puiſque la tangente PH & la ſou-tangente FH de la même Figure 37, ſont ici toutes les deux perpendiculaires au raïon HB (par la nature du cercle), & par conſéquent parallèles entr'elles & égales, on aura $s = t$; ainſi dans ce cas la formule générale $\frac{syydx}{tzdy}$ devient $\frac{yydx}{rdy}$. Différentiant l'équation $y = \frac{rx}{c}$, on a $dy = \frac{rdx}{c}$; & ſubſtituant dans la formule la valeur de dx, on aura $\frac{cyy}{rr} = HT$. Si l'on décrit donc du centre H, avec le raïon $HE = y$, l'arc EQ, & qu'on prenne HT égale à l'arc EQ, HQ ſera la ſou-tangente; car à cauſe des ſecteurs HEQ, HBA ſemblables, $HA(r)$: $AB(x) :: HQ(y) : QE = \frac{xy}{r}$.

Si au lieu de l'équation $y = \frac{rx}{c}$, on avoit $y^m = \frac{r^m x}{c}$, c'eſt-à-dire, que la circonférence fût à l'arc AB, comme une puiſſance quelconque m entière ou rompue, du raïon, eſt à la même puiſſance de l'ordonnée; l'équation différentiée donneroit $dx = \frac{mcy^{m-1}dy}{r^m}$, & $ydx = \frac{mcy^m dy}{r^m}$; & ſubſtituant dans la formule $\frac{yydx}{rdy}$ de la ſou-tangente, on auroit $\frac{mcy^{m+1}}{r^{m+1}} = HT$; mais $y^m = \frac{r^m x}{c}$. Donc $\frac{mxy}{r} = HT = m \cdot EQ$.

66. On auroit plus ſimplement la formule de la

ſou-tangente, ſi l'équation de la courbe APB (Fig. 37) étoit donnée par le rapport de FM à FP; car, par les triangles ſemblables pOP, PFH, on a $PO = \frac{sdz}{z}$; par les ſecteurs ſemblables FPO, FMR, on a $MR = \frac{sydz}{zz}$; & enfin les triangles MRm, TFM auſſi ſemblables, donnent $FT = \frac{syydz}{zzdy}$.

EXEMPLE II.

Fig. 39. 67. SOIT la courbe CMD (Fig. 39) au-deſſus de APB, ce qui ne change rien; & ſoit APB une ligne droite: ſi FM & FP different toujours de la même quantité, c'eſt-à-dire, ſi pour tous les points de la courbe, la ligne PM eſt une conſtante $= a$, la courbe CMD ſera la conchoïde de Nicomede, dont l'équation ſera $y - z = a$; le point F ſera ſon pole, & AB ſon aſymptote. Son équation différentiée donnera $dy = dz$, & par conſéquent la ſou-tangente $FT = \frac{syy}{zz}$.

Si l'on mène donc ME parallèle à PA, & MT parallèle à PE, MT ſera tangente de la courbe en M; car $FA = s$, $FE = \frac{sy}{z}$, & $FT = \frac{syy}{zz}$.

Fig. 40. 68. SI l'on a la courbe quelconque AM (Fig. 40) qui a pour axe EAT, & dont on fait mener la tangente MH à un point quelconque M; & que du point F donné hors de la courbe, on mène la droite FPM, laquelle tournant ſur le point fixe F, faſſe mouvoir le long de la droite ET le plan PAM toujours parallèlement à lui-même, de manière que la ligne

interceptée PA reſte toujours la même ; le point M, qui eſt l'interſection commune de la droite FM & de la courbe AM, décrira par ce mouvement une courbe CMD, dont on demande la tangente. Suppoſons que le plan PAM, commençant à ſe mouvoir, arrive à la poſition infiniment voiſine pam, & ſoit menée SRm parallèle à ET. Si on connoiſſoit les côtés MR, Rm, la ſimilitude des triangles MRm, MHT donneroit la droite HT, qui détermine la tangente demandée. Pour parvenir à les connoître, faiſons FP ou $Fp = x$, FM ou $Fm = y$, $Pp = dz$, $PA = a$, $MH = t$, $PH = s$. Il eſt clair que $Pp = Aa = Rm = dz$; & qu'à cauſe des triangles FPp, FSm ſemblables, $Fp : Pp :: Fm : Sm$, c'eſt-à-dire, $x : dz :: y : Sm = \frac{ydz}{x}$. Donc $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$. De plus, les triangles ſemblables MPH, MSR donnent $HP : MH :: RS : RM$, c'eſt-à-dire, $s : t :: \frac{ydz - xdz}{x} : MR = \frac{tydz - txdz}{sx}$. Enfin, par les triangles ſemblables MRm, MHT, on a $MR : Rm :: MH : HT$, c'eſt-à-dire, $\frac{tydz - txdz}{sx} : dz :: t : HT = \frac{sx}{y - x}$.

On mènera donc du point F la droite FE parallèle à MH, on prendra $HT = PE$, & tirant TM, on aura la tangente de la courbe au point M. Car les triangles ſemblables PMH, PFE donnent $PM : PH :: PF : PE$, c'eſt-à-dire, $y - x : s :: x : \frac{sx}{y - x} = PE = HT$.

69. SI la ligne AM étoit droite, la courbe CMD ſeroit une hyperbole, dont ET ſeroit une des aſymp-

totes. Si AM étoit un cercle dont P fût le centre; la courbe CMD feroit la conchoïde de Nicoméde, qui auroit pour pole F, & pour afymptote ET. Enfin, fi AM étoit une parabole, la courbe CMD feroit la compagne de la paraboloïde de Defcartes, c'eft-à-dire, une des deux conchoïdes paraboliques.

Fig. 41. 70. SOIT un point fixe F (Fig. 41) pris hors d'une courbe quelconque AN, qui a pour diamètre AP, & dont on fait mener les tangentes; & foit une autre courbe CMD, telle que menant comme on voudra du point F, la droite $FMPN$, la relation entre FN, FP & FM foit exprimée par une équation quelconque; on demande la tangente MT de cette courbe pour un point quelconque M?

Que par le point F on mène HK perpendiculaire à FN, elle rencontrera en K le diamètre AP prolongé, & en H la tangente donnée NH. Soit FQ infiniment voifine de FN, & du centre F foient décrits les arcs MR, Po, NQ. Faifant $FK = s$, $FH = t$, $FP = x$, $FM = y$, $FN = z$; mR fera $= dy$, $po = dx$, $Qn = -dz$. Par la fimilitude des triangles NQn, NFH, des fecteurs FNQ, FMR, & des triangles MRm, MFT, on aura, 1°. $NQ = -\frac{tdz}{z}$; 2°. $MR = -\frac{tydz}{zz}$; 3°. $FT = -\frac{yytdz}{zzdy}$, formule cherchée de la fou-tangente. Mais que l'on faffe attention ici qu'en différentiant l'équation de la courbe, la valeur de dy y fera donnée en dx & dz, & qu'ainfi les différences ne s'entre-détruiront pas; cependant les fecteurs FNQ, FPo étant femblables on a $Po = -\frac{txdz}{zz}$. Enfuite les triangles femblables

Pop, *PFK* donnent cette analogie $dx : -\frac{txdz}{zz} ::$ $x : s$, ou cette équation $szzdx = -txxdz$; ainsi $-dz = \frac{szzdx}{txx}$. Mettant donc dans la formule de la ſou-tangente, la valeur de dy tirée de l'équation différentiée de la courbe, & enſuite cette valeur de dz, les différences diſparoîtront, & on aura la ſou-tangente en termes finis.

Si la ligne *AP*, au lieu d'être droite, étoit courbe, on lui mèneroit ſa tangente *PK*, & on trouveroit en raiſonnant de même, la valeur de la ſou-tangente *PT*.

EXEMPLE.

71. Que la courbe *AN* (Fig. 42) ſoit un cercle qui paſſe par le point *F*, & qui ſoit diſpoſé de manière que la droite *FB* menée du point *F* perpendiculairement à *AP*, paſſe par le centre, & qu'on ait toujours *PN* égal à *PM*; la courbe *CMD* de la Figure précédente, qui eſt *FMA* dans celle-ci, ſera la ciſſoïde de Dioclès, dont l'équation eſt $z + y = 2x$. Différentiant donc, on a $dy = 2dx - dz$; ſubſtituant cette valeur de dy dans la formule $-\frac{yytdz}{zzdy}$, elle deviendra $-\frac{yytdz}{2zzdx - zzdz}$; ou mettant au lieu de $-dz$ ſa valeur $\frac{szzdx}{txx}$, on aura $\frac{styy}{2txx + szz}$ $= FT$, ſou-tangente cherchée. Fig. 42.

Il eſt clair que ſi le point *M*, dont on veut la tangente, tomboit en *A*, puiſqu'alors *KH* eſt perpendiculaire à *FA*, on auroit $FN = FP = FM = FA = FK = FH$; & par conſéquent $FT = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}FA$.

72. ON trouveroit peut-être plus promptement la ſou-tangente de la ciſſoïde par le moyen de la formule ordinaire $\frac{ydx}{dy}$. Car menant NE, ML perpendiculaires à FB, & faiſant $FB = 2a$, $FL = x$, $LM = y$, on a par la propriété du cercle, $EN = \sqrt{[2ax - xx]}$. De plus, les triangles ſemblables FLM; FEN donnent $FL : LM :: FE : EN$, & par conſéquent $FL : LM :: EN : EB$, ou $x : y :: \sqrt{[2ax - xx]} : x$; d'où l'on tire $y = \frac{xx}{\sqrt{[2ax - xx]}}$, ou $yy = \frac{x^3}{2a - x}$, équation de la courbe FMA. Différentiant donc, on a $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{(2a - x)^2}$, & faiſant les ſubſtitutions dans la formule ordinaire $\frac{ydx}{dy}$, on trouve la ſou-tangente $LO = \ldots$ $\frac{yy.(2a - x)^2}{3axx - x^3} = \frac{2ax - xx}{3a - x}$, en mettant, au lieu de yy, ſa valeur $\frac{x^3}{2a - x}$.

Fig. 41. 73. SOIENT deux courbes ANB, CPD (Fig. 43) & une droite FK, ſur leſquelles ſoient marqués trois points fixes A, C, F; ſoit de plus la courbe EMG telle que menant par un de ſes points quelconque M la droite FMN paſſant par F, & du point M la droite MP parallèle à FK, la relation de l'arc AN à l'arc CP ſoit exprimée par une équation quelconque. On demande la tangente de la courbe EG pour un point donné M?

Soit MT la tangente cherchée qui rencontre en T la droite FK prolongée s'il eſt néceſſaire; du point T ſoit tirée TH parallèle à FM; par le point M, ſoient menées MRK parallèle à la tangente en P, & MOH parallèle à la tangente en N; & que $FmOn$ ſoit infiniment voiſine de FN. Suppoſons de plus $FM = s$, $FN = t$, $MK = u$, l'arc $AN = y$, l'arc $CP = x$, & par conſéquent $Nn = dy$, $Pp = dx$. Les triangles ſemblables FNn, FMO donnent $FN : Nn :: FM : MO$, ou $t : dy :: s : MO = \frac{sdy}{t}$; & les triangles ſemblables MmR, MTK, & MOm, MHT donnent $MR : Mm :: MK : MT$, & $Mm : MO :: MT : MH$. Donc on a auſſi $MR : MO :: MK : MH$, c'eſt-à-dire, $dx : \frac{sdy}{t} :: u : MH = \frac{usdy}{tdx}$. Ainſi, en différentiant l'équation donnée, on aura la valeur de dy exprimée en dx, & ſubſtituant, il reſtera l'expreſſion de MH en termes finis. On prendra donc MH égale à la valeur trouvée, & parallèle à la tangente de la courbe ANB en N; on mènera HT parallèle à MF; & tirant du point M au point T la droite TM, ce ſera la tangente de la courbe EMG en M.

EXEMPLE.

74. SOIT la courbe ANB (Fig. 44) un quart de circonférence dont le centre eſt F; que le raïon APF perpendiculaire à la droite FKB tienne lieu de la courbe CPD de la Figure 43, & que l'on mène la tangente AR. Si l'on conçoit que tandis que le raïon FA tourne uniformément autour du centre F, la tangente AR, toujours parallèle à elle-même, avance uniformément vers FB, de manière que le raïon FA & la tangente AR arrivent en même-temps ſur FB; le point M, ou plutôt l'interſection continuelle de la tangente & du raïon, formera la courbe AMG, qu'on appelle la *quadratrice de Dinoſtrate*. Fig. 44.

Il est clair, d'après la génération de cette courbe, que l'arc AN est à l'interceptée AP, comme le quart de circonférence AB est au raïon AF. Ainsi, faisant $AN=y$, $AP=x$, $AB=a$, $AF=r$; on a $ry=ax$ & $dy=\frac{adx}{r}$. Or, la substitution de cette valeur de dy dans la formule $\frac{usdy}{tdx}$, donne $MH=\frac{asu}{rt}$; mais dans ce cas, FN est le raïon du cercle, & $MK=AF-AP$. Donc $t=r$, $u=r-x$, & par conséquent $MH=\frac{asr-asx}{rr}=\frac{as-sy}{r}$, en mettant ry au lieu de ax. On élevera donc du point M une perpendiculaire MH à FM, & égale à l'arc MQ décrit du centre F avec le raïon FM; on tirera HT parallèle à FM, & MT sera tangente de la quadratrice au point M; car les deux secteurs semblables FNB, FMQ donnent $FN : NB :: FM : MQ$, c'est-à-dire, $r : a-y :: s : MQ = \frac{as-sy}{r} = MH$.

Fig. 45. 75. SOIENT deux courbes BN, FQ (Fig. 45), dont on sache mener les tangentes, & qui ayent pour axe commun la droite BA, dans laquelle sont deux point fixes A, E; soit une autre courbe LM telle que menant par un de ses points quelconque M la droite AMN, décrivant du centre A avec le raïon AM l'arc MG, & abaissant GQ du point G perpendiculairement à AG, la relation des espaces ANB, $EFQG$, & des lignes AM, AN, QG soit exprimée par une équation quelconque; on demande la tangente de la courbe LM pour le point M?

Que l'on mène la droite ATH perpendiculaire à AMN,

AMN, la droite Amn infiniment voisine de AMN, l'arc mg, & la perpendiculaire gq; qu'on décrive ensuite du centre A le petit arc NS, & qu'on suppose la sou-tangente $HA = a$, la sou-tangente $GK = b$, $AM = y$, $AN = z$, $GQ = u$, l'espace $EGQF = s$, l'espace $ANB = t$, Rm ou Gg sera $= dy$, $Sn = dz$. De plus, à cause des triangles semblables KGQ, Qoq, on a oq ou $-du = \frac{udy}{b}$, & à cause des triangles HAN, NSn aussi semblables, $SN = \frac{adz}{z}$. L'espace $GQqg$ peut être pris pour l'espace $GQog$, parce que leur différence Qoq est une quantité infiniment petite du second ordre; ainsi $GQqg = udy = -ds$; de même $ANn = \frac{1}{2}AN \times NS = \frac{1}{2}adz = -dt$. On substituera donc ces valeurs de du, ds, dt dans la différentielle de l'équation proposée, & on aura une équation de laquelle on tirera la valeur de dz en dy. Maintenant les secteurs semblables ARM, ANS donnent $MR = \frac{aydz}{zz}$; & enfin à cause des triangles semblables mRM, MAT, on a $AT = \frac{ayydz}{zzdy}$, formule de la sou-tangente, dans laquelle si on substitue au lieu de dz sa valeur donnée en dy par l'équation de la courbe, les différences disparoîtront, & il restera la sou-tangente exprimée en termes finis.

EXEMPLE.

76. Si l'espace $EGQF$ est double de ABN, c'est-à-dire, si $s = 2t$, on aura $ds = 2dt$; mais $ds = -udy$, & $dt = -\frac{1}{2}adz$; donc $udy = adz$, $dz = \frac{udy}{a}$, & la sou-tangente $AT = \frac{uyy}{zz}$.

Si l'on suppose que la courbe BN soit un cercle décrit du centre A avec le raïon $AN=c$, que par conséquent $z=c$, & que la courbe FQ soit l'hyperbole de l'équation $uy=ff$; on aura la sou-tangente $AT=\frac{ffy}{cc}$, c'est-à dire, que le rapport de AM à AT sera constant. Dans ce cas, la courbe
Fig. 46. LM (Fig. 46) est la *spirale logarithmique*. Il est clair que cette courbe fait un nombre infini de tours avant d'arriver en A. Car lorsque le point G (Fig. 45) parvient en A, l'espace s est infini, comme on le verra dans le calcul intégral; il faut donc que l'espace r soit aussi infini, & il ne peut l'être qu'après que le raïon AM aura fait une infinité de tours.

77. IL nous reste à considérer un cas particulier des tangentes. On a vû que x & y étant les coordonnées d'une courbe quelconque, la formule générale de la sou-tangente est $\frac{ydx}{dy}$, ou $\frac{xdy}{dx}$, suivant que c'est y ou x qui exprime l'ordonnée; que par conséquent si l'on tire de l'équation de la courbe différentiée, la valeur de dx ou de dy, & qu'on la substitue dans la formule générale, il en résulte une fraction en termes finis qui est l'expression ou la valeur de la sou-tangente pour un point quelconque de la proposée; & enfin que si l'on veut la sou-tangente pour un point déterminé de la courbe, on n'a qu'à substituer dans la fraction, les valeurs de x & de y qui conviennent à ce point. Mais il peut arriver qu'en substituant ainsi des valeurs déterminées de x & de y dans la fraction qui exprime la sou-tangente, ou bien dans le rapport de dx à dy tiré de l'équation différentiée de la courbe, tous les termes tant du numérateur que du dénominateur s'évanouissent, de manière que

l'on ait $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, & par conféquent auffi la fou-tangente $= \frac{0}{0}$; d'où l'on ne doit pas conclure pour cela qu'elle foit nulle en ce point.

Soit, par exemple, la courbe de l'équation $y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 16aayy + 48aaxy + 4aaxx - 64a^3x = 0$, y étant l'abfciffe, x l'ordonnée, & par conféquent $\frac{xdy}{dx}$ la formule de la fou tangente. En différentiant l'équation, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{3ayy - 12aay - 2aax + 16a^3}{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax}$, & la fou-tangente $\frac{xdy}{dx} = \frac{3axyy - 12aaxy - 2aaxx + 16a^3x}{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax}$; mais fi l'on demande la fou-tangente pour le point de la courbe, qui correfpond à l'abfciffe $y = 2a$, comme alors on a auffi $x = 2a$, en faifant les fubftitutions de ces valeurs dans la fraction qui exprime le rapport de dy à dx, elle deviendra $\frac{12a^3 - 24a^3 - 4a^3 + 16a^3}{8a^3 - 24a^3 - 24a^3 + 16a^3 + 24a^3}$, ou $\frac{0}{0}$, & par conféquent la fou-tangente pour ce point devient auffi $\frac{0}{0}$; ce qui n'apprend rien, quoiqu'il y ait vraiment pour ce même point non-feulement une fou tangente, mais deux.

78. Ce cas arrivera toutes les fois que la courbe aura plufieurs branches qui fe rencontreront, & qu'on cherchera la tangente de leur point de concours. En effet, la courbe $NOPQMR$ (Fig. 47) de l'équation propofée, a les deux branches OP, MQ qui fe coupent au point G, auquel précifément correfpondent l'ordonnée $y = 2a$, & l'abfciffe $x = 2a$, en partant du point O, & prenant OT, OQ pour les axes des y & des x. Fig. 47.

Pour rendre raiſon de ce cas, il ſuffira de remarquer deux choſes. La première, qu'au point de concours des branches d'une courbe, il ſe trouve dans l'équation pluſieurs racines égales; ainſi, dans l'exemple propoſé, au point *G* les deux valeurs de x & deux des quatre valeurs de y ſont égales entr'elles. La ſeconde, c'eſt que ſi l'on multiplie les termes d'une équation qui contient des racines égales, par les termes d'une progreſſion arithmétique quelconque, la ſomme des produits ſera zero, & contiendra une racine égale de moins. Si l'on multiplie encore les termes de ce produit par ceux d'une progreſſion arithmétique, la ſomme des nouveaux produits ſera encore égale à zero, & contiendra encore une racine égale de moins; & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on arrive à un produit qui ne contienne plus qu'une des premières racines égales.

Si l'on multiplie donc les termes de l'équation quelconque d'une courbe, où l'on regarde x comme variable, & y comme conſtante, par une ſuite arithmétique dont le dernier terme ſoit zero; dans le cas où il y a des racines égales, le produit ſera égal à zero, même après qu'on l'aura diviſé par x, diviſion qui eſt toujours faiſable, puiſque le dernier terme de l'équation a diſparu, ayant été multiplié par zero. La même choſe arrivera, ſi regardant y comme variable, & x comme conſtante, on multiplie les termes de l'équation par ceux d'une ſuite arithmétique, telle que le zero correſponde au dernier terme de l'équation.

Cela poſé, il eſt clair que c'eſt-là préciſément l'opération qui a lieu lorſqu'on différentie, c'eſt-à-dire, qu'on traite x comme variable, & qu'on multiplie l'équation par une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt le plus grand expoſant de x, & le dernier eſt zero, & il en réſulte une ſomme de produits multipliée par dx; enſuite on regarde y comme variable, & on multiplie l'équation par une ſuite arithmétique, dont le premier terme eſt le plus grand expoſant de y, & le dernier eſt zero, il en réſulte un produit multiplié par dy. Mais lorſqu'il y a des racines égales dans les x & dans les y, les deux produits, tant celui qui eſt multiplié par dx que celui qui l'eſt par dy, ſont zero; & c'eſt préciſément par cette raiſon que le rapport $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, dans le point où les deux branches de la courbe ſe rencontrent.

79. POUR faire voir ceci plus clairement, j'ordonne l'équation de la courbe propoſée par y, & je la multiplie par la ſuite arithmétique, dont zero eſt le dernier terme;

$$\left.\begin{matrix} y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 48aaxy + 4aaxx \\ + 16aayy \qquad\qquad - 64a^3x \end{matrix}\right\} = 0,$$

$$4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0;$$

le produit fait, je le diviſe par $4y$, & j'ai

$$y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax = 0.$$

J'ordonne la même équation par x, je la multiplie par la ſuite arithmétique 2, 1, 0,

$$\left.\begin{matrix} 4aaxx + 48aaxy + y^4 \\ - 64a^3x \quad - 8ay^3 \\ - 12ayyx + 16aayy \end{matrix}\right\} = 0,$$

$$2, \quad 1, \quad 0.$$

Et le produit, diviſé par $4x$, eſt

$$2aax + 12aay - 16a^3 - 3ayy = 0.$$

Cela poſé, je différentie l'équation donnée; enſuite diviſant la différence par 4, & mettant de l'autre côté du signe d'égalité, les termes affectés de dx, j'ai $(y^3-6ayy-6axy+8aay+12aax)dy=(3ayy-12aay-2aax+16a^3)dx$.

Mais le multiplicateur de dy est précisément notre premier produit, qui par conséquent est $=0$, relativement au point G, où y a deux valeurs égales; & le multiplicateur de dx est le second produit avec des signes contraires, ce qui n'empêche pas qu'il ne soit aussi $=0$, relativement au même point G, où x aussi a deux valeurs égales: on a donc au point G, $dy\times 0=dx\times 0$, c'est-à-dire $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$.

Si on multiplie donc une équation quelconque par une suite arithmétique, ou, ce qui revient au même, si on la différentie, il en résulte que, dans le cas des racines égales, on a $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$; il en résulte aussi que l'équation qui naît de cette opération, a une racine égale de moins, & par conséquent si l'équation proposée a deux racines égales, l'équation différentiée n'en aura plus qu'une; si la proposée en avoit trois, & que l'on différentiât de nouveau (en prenant dx & dy pour constantes) l'équation qui en naîtroit, n'en auroit qu'une seule; & ainsi de suite. On regarde dx & dy comme constantes, lorsqu'on différentie pour la seconde fois; parce que dans la supposition de telle ou telle valeur déterminée de x & de y, les termes multipliés par dx comme ceux multipliés par dy se détruisant réciproquement, on verra se détruire de même tant ceux qui sont multipliés par ddx, que ceux qui sont multipliés par ddy. En opérant ainsi, on réduira les équations à n'avoir plus qu'une seule des racines égales qu'elles avoient d'abord; & les différentiant alors pour la dernière fois, pour en tirer le rapport de dx à dy, le cas de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ ne pourra plus s'y rencontrer.

Je reprens donc la même équation, $y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 16aayy + 48aaxy + 4aaxx - 64a^3x = 0$; je la différentie, & j'ai $y^3dy - 6ayydy - 6axydy - 3ayydx + 8aaydy + 12aaxdy + 12aaydx + 2aaxdx - 16a^3dx = 0$.

Mais puisqu'en substituant pour y la valeur $2a$, & pour x sa valeur correspondante, qui est aussi $2a$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, je différentie l'équation déja différentiée, en traitant dx & dy comme constantes; & je trouve $3yydy^2 - 12aydy^2 - 6axdy^2 + 8aady^2 - 12aydydx + 24aadxdy + 2aadx^2 = 0$.

Je mets, au lieu de y & de x, leur valeur $2a$ relative au point G, & je trouve $dx = \pm dy\sqrt{8}$. Substituant enfin dans la formule générale $\frac{xdy}{dx}$ de la sou-tangente, $2a$ au lieu de x & $\pm dy\sqrt{8}$ au lieu de dx, j'ai $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$, pour l'expression de la sou-tangente, ou plutôt des deux sou-tangentes qui correspondent au point G, dont l'une est positive, & l'autre négative & égale à la première.

80. Si au point dont on veut avoir la tangente, la courbe avoit trois racines égales, ou, ce qui revient au même, si elle avoit trois branches qui se rencontrassent à ce point; puisqu'il y auroit encore deux racines égales dans l'équation différentiée, en différentiant de nouveau pour parvenir au rapport de dy à dx, on trouveroit encore, d'après tout ce qui a été dit, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; ainsi, il seroit absolument

néceſſaire de différentier pour la troiſième fois. En général, il faut différentier l'équation autant de fois qu'il y a de racines égales ou de branches de la courbe pour le point dont il s'agit ; c'eſt la dernière équation différentielle qui donne le rapport de dy à dx; & on a autant de tangentes qu'il y a de branches qui ſe croiſent à ce point.

Fig. 48. Soit la courbe $QADHAhdAI$ (Fig. 48) dont l'équation eſt $x^4 - ayxx + by^3 = 0$, & qui a trois branches QAD, IAd, hAH qui ſe croiſent en A; AP étant l'axe des x, AB perpendiculaire à AP l'axe des y, & A l'origine des coordonnées. Différentiant l'équation, on a $4x^3dx - 2ayxdx - axxdy + 3byydy = 0$, ou $\frac{dx}{dy} = \frac{axx - 3byy}{4x^3 - 2ayx}$. Mais s'il s'agit de la tangente au point A, où $x = 0$, $y = 0$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. On différentiera donc de nouveau, & on trouvera $12xxdx^2 - 2aydx^2 - 4axdxdy + 6bydy^2 = 0$; d'où l'on tirera encore $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, puiſque tous les termes ſont multipliés ou par x, ou par y, égaux l'un & l'autre à zero. On différentiera enfin pour la troiſième fois, & on aura $24xdx^3 - 6adydx^2 + 6bdy^3 = 0$; mais puiſque $x = 0$, le premier terme eſt nul, & il reſte $adx^2dy = bdy^3$, équation qui donne trois valeurs de dy; ſavoir, $dy = 0$, & $dy = \pm \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; ainſi on a trois rapports de dx à dy, ou trois tangentes pour le point A, dont l'une eſt infinie, & ſe confond avec l'axe AP, c'eſt celle de la branche haH; pour avoir les deux autres qui touchent les branches QAD & IAd, on n'aura qu'à prendre AS de part & d'autre du point A & de longueur quelconque, élever les

perpendiculaires ST telles que $ST : SA :: \sqrt{a} : \sqrt{b}$, & mener les droites TA.

81. On peut aussi démontrer, *à posteriori*, la vérité de cette méthode. Remarquons pour cela, que lorsqu'on différentie une équation finie par les regles ordinaires, le résultat qu'on trouve, loin d'être la différentielle complette de cette équation, ne contient que les termes affectés de différences premieres ou d'une seule dimension; de maniere que les termes différentiels des ordres inférieurs se trouvent négligés, comme ils doivent l'être en effet dans les calculs ordinaires.

Reprenons pour exemple notre équation .....

$$\left.\begin{array}{l} y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 48aaxy + 4aaxx \\ \qquad + 16aayy \qquad\qquad\qquad - 64a^3x \end{array}\right\} = 0.$$

On a trouvé, en la différentiant selon les regles, $4y^3dy - 24ayydy - 12ayydx - 24axydy + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 8aaxdx - 64a^3dx = 0$.

Mais si l'on conçoit que y & x soient accrues de leurs différences respectives, & qu'on substitue dans l'équation proposée $y + dy$ au lieu de y, & $x + dx$ au lieu de x, on trouvera, en disposant les termes en colonne suivant l'ordre de leurs différentielles,

$$\left.\begin{array}{rllll} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \text{V.} \\ y^4 & + 4y^3dy & + 6yydy^2 & + 4ydy^3 & + dy^4 \\ - 8ay^3 & - 24ayydy & - 24ayoy^2 & - 8ady^3 & \\ - 12axy^2 & - 24axyay & - 12axay^2 & - 12adxdy^2 & \\ + 16aay^2 & - 12ayydx & - 24ayaxdy & & \\ + 48aaxy & + 32aaydy & + 16aady^2 & & \\ + 4aaxx & + 48aaydx & + 48aaaxdy & & \\ - 64a^3x & + 48aaxdy & + 4aadx^2 & & \\ & + 8aaxdx & & & \\ & - 64a^3dx & & & \end{array}\right\} = 0.$$

La ſomme de toutes ces colonnes, en rejettant la première, qui eſt l'équation même propoſée, forme la différence entière & complette de notre équation. Mais comme la dernière colonne, qui eſt la cinquième, eſt infiniment petite par rapport à la quatrième, de même que la quatrième eſt infiniment petite par rapport à la troiſième, & la troiſième par rapport à la ſeconde, on prend ſeulement la ſeconde pour la différentielle de l'équation propoſée; & la manière ordinaire de différentier donne en effet cette ſeconde colonne; mais il ne faut pas regarder pour cela les colonnes ſuivantes comme abſolument nulles. S'il arrive donc que la ſeconde colonne ſoit égale à zero, la troiſième alors n'eſt point nulle par rapport à elle, & loin de pouvoir être négligée, elle eſt la différence de la première. Il en faut dire autant de la quatrième, lorſque la ſeconde & la troiſième ſont zero, & ainſi des autres. C'eſt préciſément ce qui arrive, lorſqu'on cherche le rapport de dx à dy dans l'équation propoſée, pour le point où $y = 2a$, & $x = 2a$; puiſque par ces ſubſtitutions la ſeconde colonne devient zero, & qu'il faut par conſéquent faire uſage de la troiſième; ce qui eſt la même choſe que de différentier deux fois l'équation.

82. C'EST d'après ces principes, & de la même manière qu'on réſout une difficulté qui ſe rencontre quelquefois dans la conſtruction des courbes; ſavoir, lorſque l'ordonnée eſt exprimée par une fraction dont le numérateur & le dénominateur deviennent zero, quand on donne une certaine valeur déterminée à l'abſciſſe.

Pour ſortir d'embarras, on regardera la fraction comme ſi elle exprimoit les ordonnées de deux courbes qui concourroient en quelque point de leur axe commun; & comme en ce point leur rapport ne peut être exprimé que par $\frac{0}{0}$, il faudra chercher quel est leur rapport dans le point infiniment voisin où elles sont accrues d'une quantité infiniment petite, c'est-à-dire, qu'il faudra différentier tant le numérateur que le dénominateur, une, deux, ou un plus grand nombre de fois, jusqu'à ce qu'enfin la fraction ne se réduise plus à $\frac{0}{0}$ lorsqu'on y substituera la valeur déterminée de l'abscisse. On en rendroit raison comme ci-dessus par nos colonnes différentielles des différents ordres.

Soit l'équation $y = \dfrac{\sqrt{[2a^3x - x^4]} - a\sqrt[3]{[aax]}}{a - \sqrt[4]{[ax^3]}}$.

Si l'on prend $x = a$, on aura $y = \frac{0}{0}$; d'où l'on ne doit pas conclure qu'à l'abscisse $x = a$ correspond l'ordonnée $y = 0$. Différentiant donc le numérateur & ensuite le dénominateur de la fraction, on trouvera $y =$

$$\frac{(a^3dx - 2x^3dx).(2a^3x - x^4)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}a^3dx.a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}axxdx.a^{-\frac{3}{4}}x^{-\frac{9}{4}}};$$

divisant le dessus & le dessous par dx, & mettant a pour x, il restera $y = \frac{16}{9}a$.

Soit l'équation $y = \dfrac{a\sqrt[3]{[4a^3 + 4x^3]} - ax - aa}{\sqrt{[2aa + 2xx]} - x - a}$;

en faisant $x = a$, on a $y = \frac{0}{0}$.

Différentiant donc le numérateur & ensuite le dénominateur de la fraction, & ôtant dx qui se trouve dessus & dessous, on a $y = \dfrac{4axx.(4a^3 + 4x^3)^{-\frac{2}{3}} - a}{2x.(2aa + 2xx)^{-\frac{1}{2}} - 1}$, fraction qui, si l'on suppose $x = a$, devient encore $\frac{0}{0}$.

On différentiera donc encore le numérateur, & ensuite le dénominateur de cette fraction, & supprimant dx, on trouvera $\dot{y} = \frac{32a^4x(4a^3+4x^3)^{-\frac{1}{2}}}{4aa.(2aa+2xx)^{-\frac{1}{2}}}$; & mettant enfin a pour x, on aura $y = 2a$.

CHAPITRE III.

Méthode des Maxima & Minima.

83. Si dans une courbe quelconque, dont les ordonnées sont parallèles (Fig. 49, 50, 51 & 52), tandis que les abscisses BC croissent continuellement, l'ordonnée CG croît aussi jusqu'à un certain point E, au-delà duquel ou elle diminue, ou il ne se trouve plus du tout d'ordonnée; ou bien, si l'abscisse croissant continuellement, l'ordonnée CG va toujours diminuant jusqu'à un point E, au-delà duquel ou elle croisse, ou il n'y ait plus d'ordonnée, on appellera EF la plus grande ou la plus petite ordonnée, ou bien encore un *maximum* ou un *minimum*.

Fig. 49, 50, 51 & 52.

Soit EF la plus grande ordonnée de la courbe GHF (Fig. 49), ou la plus petite (Fig. 50). Que l'on prenne une abscisse quelconque BC avec son ordonnée CG; & supposons que GA soit la tangente au point G, que DH soit infiniment voisine de CG, que $BC = x$, & $CG = y$; CD ou sa parallèle GI sera $= dx$, & $IH = dy$. Puisque les triangles ACG, GHI (Fig. 49), & les triangles ATG, GHI (Fig. 50), sont semblables, on aura

$AC:CG::GI:IH$, & $AT:TG::GI:IH$. Cela posé, si l'on imagine que l'ordonnée GC restant toujours parallèle à elle-même, s'approche continuellement de la plus grande ou de la plus petite ordonnée EF, on verra clairement que plus elle sera près, plus la sou-tangente AC ou AT deviendra grande, de manière que lorsque CG tombera sur EF, la tangente sera parallèle à BC, & la sou-tangente sera infinie. Dans ce cas, CG restant toujours finie, le rapport de AC à CG ou de AT à TG, sera infini; celui de GI à IH le sera donc aussi, & par conséquent dy sera nul par rapport à dx, c'est à dire qu'au point de la plus grande ou de la plus petite ordonnée, on aura $dy=0$.

Soient la courbe GHF (Fig. 51 & 52), EF sa plus petite ou sa plus grande ordonnée, BC une abscisse quelconque, CG l'ordonnée correspondante, GA la tangente, DH l'ordonnée infiniment voisine de CG, & GI parallèle à BC. Je fais $BC=x$, $CG=y$, & par conséquent GI ou $CD=dx$, $IH=dy$. Les triangles semblables ACG, GIH (Fig. 51), & les triangles semblables ATG, GIH (Fig. 52), donnent $AC:CG::GI:IH$, & $AT:TG::GI:IH$. Si l'on conçoit, comme ci-dessus, que l'ordonnée CG, restant toujours parallèle à elle-même, s'approche continuellement de la plus grande ou de la plus petite ordonnée, la sou-tangente AC ou AT ira en diminuant, de manière que lorsque CG tombera sur EF, la tangente deviendra perpendiculaire à BC, & par conséquent la sou-tangente sera nulle. Dans ce cas, le rapport de AC à CG, ou de AT à TG, sera le rapport de zero à une quantité finie; or, GI & IH étant dans le même rapport, dx sera nul relativement à dy, c'est-à-dire, qu'au point de la plus grande ou de la plus petite ordonnée $dy = \infty$. Donc la formule générale du *maximum* ou du *minimum*, est $dy = 0$, ou bien $dy = \infty$.

84. IL faudra donc différentier l'équation de la courbe dont on demande la plus grande ou la plus petite ordonnée, pour en tirer la valeur de la fraction $\frac{dy}{dx}$, & faire la supposition de $dy = 0$, ou bien de $dx = 0$, qui revient à celle de $dy = \infty$; & on aura la valeur de l'abscisse x, à laquelle répond la plus grande ou la moindre y; & substituant cette valeur dans l'équation proposée, on trouvera la plus grande ou la moindre ordonnée qu'on cherchoit. J'avertirai seulement que dans la supposition de $dy = \infty$, ou de $dx = 0$, les x représentent les ordonnées, si les y les représentoient dans l'autre supposition. Si aucune des deux suppositions, ni celle de $dy = 0$, ni celle de $dy = \infty$, ne donnent de valeur réelle de y, il faudra en conclure que la courbe proposée n'a ni *maxima* ni *minima*.

85. CETTE méthode est propre à donner une idée exacte & complette des courbes, à faire connoître les points où les tangentes sont parallèles aux axes, &c. Elle peut s'appliquer de plus à une infinité de questions, tant géométriques que physiques, sur les *maxima* & *minima*; comme seroit de rechercher dans le nombre infini de parallélépipèdes de la même solidité donnée, celui qui a la moindre surface; de déterminer dans le nombre infini de chemins que peut prendre un mobile, entre deux points qui sont dans un même plan vertical, mais non dans la même verticale, celui qui sera parcouru en moins de temps, dans une loi donnée de mouvement; & autres semblables. Dans toutes ces questions, lorf-

qu'on a trouvé l'expression analytique du *maximum* ou du *minimum* qu'on cherche, on l'égalera à y; ce qui donne une équation qu'on différentiera, & qu'on traitera suivant les regles que nous avons données.

EXEMPLE I.

86. SOIT la courbe de l'équation $2ax - xx = yy$; on demande à quel point de l'axe des abscisses x, correspond la plus grande ordonnée y, & la valeur de cette ordonnée?

L'équation différentiée donne $2adx - 2xdx = 2ydy$, $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$. Faisant la supposition de $dy = 0$, le numérateur de la seconde fraction $a-x$ sera aussi zero; ainsi $x = a$. La plus grande ordonnée correspond donc à l'endroit où l'abscisse $= a$. Mettant cette valeur au lieu de x dans l'équation proposée, elle devient $2aa - aa = yy$, c'est-à-dire, $y = \pm a$. La plus grande ordonnée est donc positive & négative, & égale à a. En faisant la supposition de $dy = \infty$, c'est le dénominateur de la fraction y qui est zero; mettant donc o au lieu de y dans l'équation proposée, on a $x = 0$ & $x = 2a$; c'est-à-dire que $x = 0$ est la plus petite des abscisses, & $x = 2a$ la plus grande, ou plutôt que lorsque $x = 0$, & $x = 2a$, dy étant infinie par rapport à dx, la sou-tangente sera nulle, ou la tangente sera parallèle aux ordonnées y.

EXEMPLE II.

87. PRENONS la courbe de l'équation $xx - ax = yy$; d'où l'on tirera en différentiant, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-a}{2y}$. La supposition de $dy = 0$ donne $x =$

$\frac{a}{2}$; & si l'on substitue cette valeur de x dans l'équation de la courbe, on trouvera y imaginaire; ainsi la courbe n'a pas d'ordonnée correspondante à cette abscisse, ni par conséquent de *maximum* ou de *minimum*. La supposition de $dy = \infty$, ou de $dx = 0$, donne $y = 0$, ce qui veut dire que la tangente est perpendiculaire à l'axe des x au point où $y = 0$, point qui répond aux deux abscisses $x = 0$, & $x = a$; puisqu'en mettant 0 au lieu de y dans l'équation proposée, elle devient $xx - ax = 0$, d'où l'on tire $x = 0$, & $x = a$.

EXEMPLE III.

88. SOIT la courbe de l'équation $2axy = a^3 + axx - bxx$, dans laquelle x représente les abscisses, y les ordonnées. En différentiant, on trouve $2axdy + 2aydx = 2axdx - 2bxdx$; & par conséquent $\frac{dy}{dx} = \frac{ax - bx - ay}{ax}$. La supposition de $dy = 0$ donne $x = \frac{ay}{a-b}$; & mettant cette valeur de x dans l'équation proposée, on a $\frac{2aayy}{a-b} = a^3 + \frac{a^3yy - aabyy}{(a-b)^2}$; d'où l'on tire $y = \pm\sqrt{[aa - ab]}$, qui est le *maximum* ou le *minimum*. Mais puisque $x = \frac{ay}{a-b}$, si l'on met au lieu de y sa valeur, on aura $x = \pm \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{[a-b]}}$, qui est l'abscisse à laquelle correspond la plus grande ou la plus petite ordonnée qu'on vient de déterminer. La supposition de $dy = \infty$, donne $ax = 0$, c'est-à-dire, $x = 0$; fai-

fant

ſant la ſubſtitution dans l'équation propoſée, elle devient $a^3=0$; mais il implique qu'une quantité donnée & finie ſoit zero. Ainſi la courbe n'aura pas d'autre *maximum* ou d'autre *minimum* que ceux qu'a donnés la première ſuppoſition.

89. LA méthode donne indifféremment les *maxima* & les *minima*, & n'enſeigne pas à les diſtinguer les uns des autres; on peut cependant les diſtinguer, lorſqu'on connoît la marche de la courbe. Sans cela même, voici comment on peut procéder. Donnez à l'abſciſſe une valeur un peu plus grande ou un peu plus petite que celle qui correſpond au *maximum* ou *minimum* dont il s'agit; la valeur de l'ordonnée qui en proviendra, réſoudra la queſtion; car ſi elle eſt plus grande que l'ordonnée qu'on a trouvée en ſuppoſant $dy=0$, ou $dy=\infty$, on avoit un *minimum*, & un *maximum* ſi elle eſt plus petite. On peut s'aſſurer par cette voie, que la courbe de l'exemple précédent a deux *minima*, qui, comme on a vû, ſont égaux, l'un poſitif qui correſpond à l'abſciſſe poſitive, l'autre négatif & correſpondant à l'abſciſſe négative.

EXEMPLE IV.

90. SOIT la courbe *MADEAN* (Fig. 53) de l'équation $x^3+y^3=axy$, où $AB=x$, $BE=y$. Fig. 53.
La différentiation donne $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-3xx}{3yy-ax}$; ſuppoſant $dy=0$, on a $y=\frac{3xx}{a}$; & en ſubſtituant cette valeur de y dans l'équation de la courbe, on trouve $x=\frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$. On aura donc $y=\frac{a}{3}\sqrt[3]{4}=$ BE la plus grande des ordonnées qui correſpond à

l'abſciſſe $x = \frac{a}{3}\sqrt{2} = AB$. La ſuppoſition de $dx = 0$ donneroit $x = \frac{3yy}{a}$; & ſi l'on mettoit cette valeur de x dans l'équation, on auroit $y = \frac{a}{3}\sqrt{2}$; ainſi $x = \frac{a}{3}\sqrt{4}$ eſt la plus grande des abſciſſes AC, à laquelle correſpond l'ordonnée $y = CD = \frac{a}{3}\sqrt{2}$, qui eſt tangente de la courbe en D.

91. AVANT de paſſer à d'autres exemples, il eſt néceſſaire de prévenir mes Lecteurs ſur un cas qui peut arriver. Lorſque les deux ſuppoſitions de $dy = 0$ & de $dy = \infty$, donnent l'une & l'autre la même valeur de l'ordonnée ou de l'abſciſſe, elles n'indiquent pas alors un *maximum* ou un *minimum*, mais plutôt un point d'interſection de deux branches de la courbe. La raiſon en eſt évidente; car la valeur de $\frac{dy}{dx}$ étant exprimée par une fraction, ſi le numérateur & le dénominateur donnent la même valeur, par exemple, de x, la ſubſtitution de cette valeur ou de cette racine rendra l'un & l'autre égal à zero; on aura par conſéquent à ce point de la courbe $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; or, on a vû (n°. 78 & 79) que $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, indiquoit toujours l'interſection de deux branches de la courbe.

EXEMPLE V.

Fig. 51. 92. SI la courbe GFM (Fig. 51) eſt la parabole cubique de l'équation $y - a = \sqrt[3]{[a^3 - 2aax + axx]}$, $BE = EF$ étant $= a$, $BC = x$, $CG = y$; on a,

en différentiant, $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3.(a^3 - 2aax + axx)^{\frac{2}{3}}}$.
La ſuppoſition de $dy = 0$, donne $x = a$; mais celle de $dy = \infty$, donne auſſi $x = a$; ainſi la courbe a un point d'interſection ou de rencontre F qui correſpond à l'abſciſſe $x = a$, & à la moindre ordonnée $y = a$ qui ſe tire de l'équation propoſée en y ſubſtituant la valeur de x.

Prenons la même équation délivrée de radicaux, c'eſt-à-dire, $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + axx$. En différentiant, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa}$; la ſuppoſition de $dy = 0$ donnera encore $x = a$; & mettant cette valeur de x dans l'équation, on en tirera $y = a$. La ſuppoſition de $dy = \infty$ donne auſſi $y = a$. D'où l'on doit conclure que le point F, où $x = a$ & $y = a$, eſt le point de rencontre ou de contact des deux branches GF, FM, & en même-temps le point de la moindre y.

Mais ſi on opéroit ſur l'équation $y - a = a^{\frac{1}{3}}.(a - x)^{\frac{2}{3}}$, qui exprime la ſeule branche GF; ($y - a = a^{\frac{1}{3}}.(x - a)^{\frac{2}{3}}$ exprimeroit l'autre branche FM); on auroit $\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3.(a - x)^{\frac{1}{3}}}$; la ſuppoſition de $dy = 0$ n'apprendroit rien; mais celle de $dy = \infty$ donne $x = a$, & par conſéquent $y = a$; par où l'on voit que le point F fournit un *maximum* par rapport aux x, & un *minimum* par rapport aux y.

93. J'AI dit que la ſuppoſition de $dy = 0$, qui

donne $2a^{\frac{1}{3}}=0$ n'apprenoit rien, ce qui ne doit s'entendre que des *maxima* finis, car elle désigne deux *maxima* infiniment grands. En effet, puisque $2a^{\frac{1}{3}}=0$, on a donc aussi $a=0$: cette valeur substituée dans l'équation proposée, la réduit à $\frac{y}{0}=\sqrt[3]{xx}$ ou $x=\pm\sqrt{\frac{y^3}{0}}$; par où l'on voit que x & y sont infinis. Ainsi, lorsque $a=0$, l'équation exprime deux *maxima*, l'un pour la branche FG, & l'autre pour la branche FM.

Ce cas aura lieu toutes les fois que la supposition de $dy=0$, ou de $dy=\infty$, donnera une expression finie constante, ou un diviseur constant égal à zero, & que cette valeur substituée dans l'équation proposée, n'amènera pas des imaginaires ou quelque contradiction. La raison en est qu'une grandeur finie ne peut devenir nulle ou zero, que relativement à quelque grandeur infinie.

EXEMPLE VI.

Fig. 54. 94. SOIT la courbe (Fig. 54) de l'équation $x^4-2ax^3+aaxx=y^4$, dans laquelle $AB=a$, AC ou $AP=x$, CM ou $PM=y$; on aura $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-6axx+2aax}{4y^3}$. La supposition de $dy=0$, donne trois valeurs de x, savoir $x=0$, $x=a$, $x=\frac{a}{2}$; la valeur $x=0$ substituée dans l'équation proposée, rend $y=0$; la valeur $x=a$ rend $y=0$, & la valeur $x=\frac{a}{2}$ rend $y=\pm\frac{a}{2}$. La supposition de $dy=\infty$ donne $y=0$; donc lorsque $x=0$, & lorsque $x=a$, y a la même valeur dans l'une & l'autre

ſuppoſition, ce qui indique que les points A, B ſont communs à deux branches de la courbe. Ainſi $x = \frac{a}{2} = AC$, donnera une plus grande ordonnée y qui eſt double & égale $\pm \frac{a}{2} = CM$ ou Cm. On peut dire que le lieu de cette courbe eſt un double lieu, qui provient d'avoir élevé au quarré l'une ou l'autre des deux équations ſimples $ax - xx = yy$ & $xx - ax = yy$, dont la première eſt au cercle & la ſeconde à l'hyperbole. Ainſi, il n'auroit pas ſuffi de réduire ſimplement l'équation à l'hyperbole ou au cercle; il étoit à propos de conſidérer ces deux courbes réunies, & dans leur état de complication.

EXEMPLE VII.

95. SOIT la courbe de la Figure 55, dont l'équation eſt $yy = \frac{aax - 2axx + x^3}{2a - x}$, AP étant $= x$, $PM = y$, $AD = 2a$. On trouvera $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{y \cdot (2a - x)^2} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{(a - x)\sqrt{x} \cdot (2a - x)^{\frac{3}{2}}}$. Fig. 55.

Avant d'aller plus loin, j'obſerve que le numérateur & le dénominateur de la fraction ſont tous deux diviſibles par $a - x$. Donc, dans les deux ſuppoſitions de $dy = 0$, & de $dy = \infty$, on aura $a - x = 0$, c'eſt-à-dire, $x = a$, qui étant ſubſtituée, donnera $y = 0$; & par conſéquent la courbe aura un nœud dans l'axe au point B déterminé en prenant $AB = a$. Diviſant par $a - x$, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{aa - 3ax + xx}{(2a - x)\sqrt{(2ax - xx)}}$.

La ſuppoſition de $dy = 0$, donne $x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$;

la valeur $x = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}$ ne ſert à rien, puiſqu'en la ſubſtituant dans l'équation propoſée, elle rend l'ordonnée imaginaire; & il eſt évident que l'ordonnée le ſera en général toutes les fois qu'on prendra x plus grande que $2a$. Subſtituons donc l'autre valeur $x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, nous aurons $y = \pm a\sqrt{\frac{[7a - 3a\sqrt{5}]}{a + a\sqrt{5}}}$. Faiſant donc $AP = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, nous aurons les deux *maxima* PM, PM, l'un poſitif & l'autre négatif, & exprimés l'un & l'autre par $a\sqrt{\frac{[7a - 3a\sqrt{5}]}{a + a\sqrt{5}}}$.

La ſuppoſition de $dy = \infty$ donne $x = 0$ & $x = 2a$; en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation propoſée, on trouve $y = 0$ & $y = \infty$; c'eſt-à-dire, qu'au point A, où $x = 0$, la tangente eſt parallèle aux ordonnées PM; & qu'au point D, où $x = 2a$, l'ordonnée eſt infinie, ou devient l'aſymptote des branches BH, BI de la courbe.

EXEMPLE VIII.

96. SOIT la conchoïde de l'équation $yy = \frac{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb}{xx}$; on trouvera $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - bx^3 - aabx - aabb}{\pm xx\sqrt{[aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb]}}$. On voit que cette courbe préſente trois cas, ſavoir, lorſque $a = b$, lorſque $b < a$, & lorſque $b > a$.

Dans le premier cas, la courbe eſt celle de la Figure

Fig. 56. 56, dont l'équation (en ſuppoſant GA ou $GP = a$, $GE = x$, $EM = y$) eſt $yy = \frac{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}{xx}$.

& donne $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - ax^3 - a^3x - a^4}{\pm xx\sqrt{[a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4]}}$. La supposition de $dy = 0$ rend le numérateur égal à zero, c'est-à-dire, $(x+a)(x^3+a^3) = 0$; & par conséquent $x = -a$, valeur qui substituée dans l'équation de la courbe, donne $y = 0$. La supposition de $dy = \infty$, rend le dénominateur $xx\sqrt{[(x+a)^2 \times (aa - xx)]} = 0$, & par conséquent $x = 0$, $x = -a$, & $x = a$; mais on a trouvé aussi la valeur $x = -a$ dans la supposition de $dy = 0$. Donc lorsque $x = -a$, c'est-à-dire, si l'on prend $GP = a$, le point P sera commun à deux branches de la courbe.

La valeur $x = a$ substituée dans l'équation, donne $y = 0$; ainsi à l'abscisse $x = a = GA$ correspond l'ordonnée $y = 0$. La valeur $x = 0$ substituée, donne $y = \infty$; ainsi, si par le point G, où $x = 0$, on mène une parallèle aux ordonnées, elle ira toucher la courbe à une distance infinie, c'est-à-dire qu'elle sera une asymptote.

Quant aux deux autres cas (Fig. 57 & 58); soient Fig. 57 & 58.
$GA = GK = a$, $GP = b$, & le reste comme ci-dessus. La supposition de $dy = 0$ donne $-x^4 - bx^3 - aabx - aabb = 0$, ou bien $(x+b)(-x^3 - aab) = 0$, & par conséquent $x = -b$, & $x = \sqrt[3]{[-aab]}$. La supposition de $dy = \infty$ donne $xx\sqrt{[aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb]} = 0$, c'est-à-dire, $xx\sqrt{[(x+b)^2 \times (aa - xx)]} = 0$, & par conséquent $x = 0$, $x = -b$, $x = a$, $x = -a$.

La valeur $x = -b$, qui dans le second cas, rend $y = 0$, est donnée par les deux suppositions; ainsi, si l'on prend GP du côté négatif & $= -b$, le point P sera commun aux deux branches de la courbe. La même valeur $x = -b$, substituée dans l'équation de la courbe $\pm y = \frac{b+x}{x}\sqrt{[aa - xx]}$, rend négative dans le troisième cas, la quantité qui est sous le signe, parce que $b > a$; ainsi la courbe étant imaginaire, cette valeur ne sert à rien.

La valeur $x = \sqrt[3]{[-aab]}$, donne $y = \pm$

$$\sqrt{\left[\frac{(aa-bb)\sqrt[3]{[abb]}+3ab\sqrt[3]{[-aab]}+2abb}{\sqrt[3]{[abb]}}\right]},$$

qui est aussi imaginaire, lorsque b est plus grand que a (Fig. 58), mais qui est réelle lorsque b est plus petit que a; si l'on prend donc (Fig. 57) $GI = \sqrt[3]{[-aab]}$, on aura un *maximum* IN de part & d'autre de l'axe des abscisses. La valeur $x = 0$ donne $y = \infty$, c'est l'indice d'une asymptote; & la valeur $x = \pm a$, donne $y = 0$, c'est-à-dire que la tangente aux points A & K est parallèle aux ordonnées.

EXEMPLE IX.

Fig. 59. 97. SOIT la demi-cicloïde raccourcie AMF (Fig. 59); supposant $AB = 2a$, $BF = b$, $AP = x$, $PM = z$, la demi-circonférence $ANB = c$, l'arc $AN = q$; on aura $PN = \sqrt{[2ax - xx]}$, $NM = z - \sqrt{[2ax - xx]}$, & par la propriété de la courbe, $ANB : BF :: AN : NM$, c'est-à-dire, $c : b :: q : NM = \frac{bq}{c}$. Donc $\frac{bq}{c} = z - \sqrt{[2ax - xx]}$; & différentiant, $\frac{bdq}{c} = dz - \frac{(adx - xdx)}{\sqrt{[2ax - xx]}}$. Mais si l'on mène mp infiniment voisine de MP, on aura $Nn = dq = \frac{adx}{\sqrt{[2ax - xx]}}$; & substituant cette valeur de dq, on aura $\frac{dz}{dx} = \frac{ab + ac - cx}{c\sqrt{[2ax - xx]}}$. La supposition de $dz = 0$ donne $x = \frac{ab}{c} + a$; en supposant donc que H soit le centre du cercle, si l'on prend

HE quatrième proportionnelle à la demi-circonférence ANB, à la droite BF & au raïon, l'ordonnée correſpondante ſera le *maximum* cherché.

La ſuppoſition de $dz=\infty$ donne $x=0$ & $x=2a$; c'eſt-à-dire, qu'aux points A & F, la tangente ſera parallèle aux ordonnées.

PROBLEME I.

98. *Le rectangle* $ADCB$ (Fig. 60) *étant donné, on demande la plus petite droite* QH, *qui puiſſe être menée par le point* C *dans l'angle* QAH? Fig. 60.

Soient $AB=a$, $BC=b$, $BH=x$; CH ſera $=\sqrt{[bb+xx]}$, & les triangles ſemblables HBC, HAQ, donneront $HB:HC::HA:HQ$, c'eſt-à-dire,

$$x:\sqrt{[bb+xx]}::x+a:HQ=\frac{x+a}{x}\sqrt{[bb+xx]}.$$

Si l'on regarde donc HQ comme l'ordonnée y d'une courbe, on aura l'équation $y=\frac{x+a}{x}\sqrt{[bb+xx]}$,

& en différentiant, $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-abb}{xx\sqrt{[bb+xx]}}$. La ſuppoſition de $dy=0$, donne $x=\sqrt[3]{[abb]}$; ainſi faiſant $BH=\sqrt[3]{[abb]}$, & menant HCQ, ce ſera le *minimum* cherché. La ſuppoſition de $dy=\infty$ donne $x=\sqrt{[-bb]}$ imaginaire, & $x=0$, qui ne ſert à rien, puiſqu'elle déſigne la droite BC menée par le point C, & infiniment prolongée, *maximum* qu'on ne cherche pas certainement dans la queſtion préſente.

Dans les queſtions de cette eſpece, il ſuffira donc de différentier l'expreſſion du *maximum* ou du *minimum* cherché, & de ſuppoſer égal à zero, le numérateur, & enſuite le dénominateur.

PROBLEME II.

Fig. 61. 99. *La droite* AB (Fig. 61) *étant divisée en trois parties données* AC, CF, FB; *on demande le point* E *dans la partie du milieu* CF, *tel que le produit* AE×EB *soit au produit* CE×EF *dans le moindre rapport possible, ou que la fraction* $\frac{AE \times EB}{CE \times EF}$, *soit un minimum?*

Faisons $AC = a$, $CF = b$, $CB = c$, $CE = x$, & par conséquent $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$. Ainsi, la fraction proposée ...... $\frac{AE.EB}{CE.EF} = \frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$; sa différentielle sera $\frac{cxxdx - bxxdx - axxdx + 2acxdx - abcdx}{(bx - xx)^2}$; son numérateur étant égalé à zero, donnera $x = \frac{-ac \pm \sqrt{[abcc - abbc - aabc + aacc]}}{c - b - a}$. La valeur positive de x donne le point cherché E en allant de C vers B, la négative donneroit le point E en allant de C vers A. Si l'on suppose le dénominateur égal à zero, on trouvera $x = 0$, & $x = b$; dans ces deux cas, la fraction est un *maximum*; car x étant zero, le point E tombe en C, & x étant $= b$, il tombe en F, c'est-à-dire que le rectangle $CE \times EF$ est zero.

PROBLEME III.

100. *Couper la droite donnée* AB *au point* C, *de manière que le produit* $\overline{AC}^2 \times CB$ *soit le plus grand de tous les produits semblables?*

Faisant $AB = a$, $AC = x$, CB sera $= a - x$, $\overline{AC}^2 \times CB = axx - x^3$, & sa différence $= 2axdx -$

$3xxdx$. En égalant cette différence à zero, on trouvera $x = \frac{2a}{3}$, & $x = 0$; ainſi, lorſque AC ou $x = \frac{2a}{3}$, le produit $\overline{AC}^2 \times CB$ eſt le plus grand poſſible. Il ſeroit en quelque ſorte le moindre poſſible, ſi l'on prenoit $x = 0$, car alors le point C tombant en A, ce produit ſeroit lui-même zero. Comme la différentielle n'eſt pas une fraction, l'autre ſuppoſition du dénominateur égal à zero, ne peut pas avoir lieu; mais ſi l'on veut conſidérer l'expreſſion du produit $axx - x^3$ comme une ordonnée de courbe, on ſera obligé, par la loi des homogènes, de diviſer ce produit par une quantité conſtante de deux dimenſions; alors la différentielle ſera une fraction dont le dénominateur ſera conſtant; or cette conſtante ne peut être zero que dans le cas où x ſeroit infinie, ce qui ſeroit certainement le cas d'un *maximum*, AC ou x étant $= \infty$.

J'ai dit que le produit $\overline{AC}^2 \times CB$ étoit un *maximum*, lorſque $AC = \frac{2a}{3}$; on le verra clairement ſi on décrit la courbe de l'équation $\frac{axx - x^3}{aa} = y$; car toutes les ordonnées entre A & B ſeront plus petites que celle qui correſpond à l'abſciſſe $x = \frac{2a}{3}$. Si l'on ſubſtitue dans l'équation l'autre valeur $x = 0$; on aura $y = 0$; d'où l'on voit que cette valeur eſt inutile.

101. DANS le Problême précédent, & dans tous ceux du même genre, on pourra faire uſage de cette méthode, pour ſavoir ſi les queſtions appartiennent aux *maxima* ou aux *minima*.

PROBLEME IV.

102. *Entre tous les parallélépipédes égaux à un cube connu, & dont un côté soit donné, on demande quel est celui qui a la moindre surface?*

Soient a^3 le cube donné, b le côté connu du parallélépipéde, x un des côtés cherchés, le troisième côté sera $\frac{a^3}{bx}$, puisque le produit des trois côtés du parallélépipéde est égal à a^3. Les produits des trois côtés pris deux à deux, savoir, bx, $\frac{a^3}{x}$, $\frac{a^3}{b}$, forment trois plans qui sont la moitié de la surface du parallélépipéde, & par conséquent leur somme $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$, est le *minimum* demandé, dont la différence est $bdx - \frac{a^3dx}{xx}$, ou $\frac{bxxdx - a^3dx}{xx}$. La supposition du numérateur égal à zero, donne $x = \sqrt{\left[\frac{a^3}{b}\right]}$; ainsi les trois côtés du parallélépipéde sont b, $\sqrt{\left[\frac{a^3}{b}\right]}$. & $\frac{a^3}{b\sqrt{\left[\frac{a^3}{b}\right]}} = \sqrt{\left[\frac{a^3}{b}\right]}$, c'est-à-dire, que les deux côtés cherchés sont égaux. La supposition du dénominateur égal à zero, ne sert à rien, puisqu'elle donne $x = 0$, ce qui détruit le Problême.

Si on demandoit le parallélépipéde avec les mêmes conditions, mais sans assigner aucun des côtés, on appelleroit le côté cherché x; or, les deux autres sont égaux & exprimés chacun par $\sqrt{\left[\frac{a^3}{x}\right]}$; ainsi la somme des trois plans qui doit être un *minimum*, eft $2x\sqrt{\left[\frac{a^3}{x}\right]}+\frac{a^3}{x}$; différentiant, on a...

$$\frac{a^3dx}{x\sqrt{\left[\frac{a^3}{x}\right]}}-\frac{a^3dx}{xx}\text{, ou }\frac{a^3xdx-a^3dx\sqrt{\left[\frac{a^3}{x}\right]}}{xx\sqrt{\left[\frac{a^3}{x}\right]}};$$

& égalant le numérateur à zero, on trouvera $x=a$, & les deux autres côtés auffi $=a$, c'eft-à-dire que le parallélépipéde qu'on cherche eft le cube même donné.

PROBLEME V.

103. *Dans le nombre infini de cones droits qu'on peut infcrire dans une fphère, déterminer celui qui a la plus grande furface convexe?* On voit qu'il ne faut pas compter la bafe du cone.

Que l'on imagine dans le demi-cercle ABD (Fig. 62) tant de triangles qu'on voudra, tels que ABC, AEH; fi l'on fait tourner le demi-cercle fur le diamètre AC, il engendrera la fphère, tandis que chaque triangle engendrera un cone. Mais il eft clair (Géom. 315) que les furfaces des cones infcrits font entr'elles comme les produits $AE\times EH$, $AB\times BC$; ainfi la queftion fe réduit à déterminer fur le diamètre AD le point C, tel que le produit $AB\times BC$ foit un *maximum*. Fig. 62.

Soit donc $AC=x$, $AD=a$; la propriété du cercle donnera $CB=\sqrt{[ax-xx]}$, $AB=\sqrt{ax}$, & $AB\times BC=\sqrt{ax}.\sqrt{[ax-xx]}=\sqrt{[aaxx-ax^3]}$, dont la différence eft $\frac{2aaxdx-3axxdx}{2\sqrt{[aaxx-ax^3]}}$. Le numérateur égalé à zero, donne $x=\frac{2a}{3}$, & $x=0$; & le dénominateur égalé à zero, donne $x=a$, & $x=0$. Si l'on prend donc $AC=\frac{2}{3}AD$, la furface du cone engendré par le triangle ABC sera la plus grande possible. Il est clair que les deux autres valeurs $x=0$, & $x=a$ sont inutiles.

PROBLEME VI.

Fig. 63. 104. *L'angle* FDG (Fig. 63) *étant donné, & le point* A *étant donné de position, trouver la plus petite droite qu'on puisse mener par le point* A *comprise dans l'angle donné ?*

Soit CB la droite cherchée, & soient menées AQ, FAP, CK perpendiculaires respectivement aux droites FD, DG, FP. Puisque l'angle FDG est donné, & que l'angle FPD est droit, l'angle AFQ sera connu; de plus, le point A étant donné, on connoîtra aussi les lignes QA, QF, FA, QD. Soient donc $QF=a$, $QA=c$, $QD=b$, $QC=x$, & par conséquent $FA=\sqrt{[aa+cc]}$, $CA=\sqrt{[cc+xx]}$, $FD=b+a$, $FC=a-x$. Mais les triangles semblables FAQ, FDP donnent $FA:FQ::FD:FP$; ainsi $FP=\frac{aa+ab}{\sqrt{[aa+cc]}}$, & par conséquent $AP=\frac{ab-cc}{\sqrt{[aa+cc]}}$. Les triangles semblables FCK, FAQ, donnent $AF:FQ::FC:FK$; ainsi $FK=\frac{aa-ax}{\sqrt{[aa+cc]}}$, & par conséquent $AK=\frac{cc+ax}{\sqrt{[aa+cc]}}$. Enfin les triangles semblables ACK, ABP donnent $AK:CA::AP:AB$; donc $AB=\frac{(ab-cc)\sqrt{[cc+xx]}}{cc+ax}$, & par conséquent $CB=\sqrt{[cc+xx]}+\frac{ab-cc}{cc+ax}\times\sqrt{[cc+xx]}$, qui doit être un *minimum*. Différentiant, on trouvera $\frac{xdx}{\sqrt{[cc+xx]}}+\ldots\ldots$

$$\frac{xdx(ab-cc)(cc+ax)-adx(ab-cc)(cc+xx)}{(cc+ax)^2.(cc+xx)^{\frac{1}{2}}}.$$

En supposant le numérateur $=0$, après avoir tout réduit à un commun dénominateur, on aura cette équation du troisième degré $x^3+\frac{2ccxx}{a}+\frac{bccx}{a}+\frac{c^4}{a}-bcc=0$.

Pour la construire, je prens l'équation à la parabole $xx=ay$; & faisant la substitution, j'ai $xy+\frac{2ccy}{a}+\frac{bccx}{aa}+\frac{c^4}{aa}-\frac{bcc}{a}=0$, lieu à l'hyperbole entre les asymptotes.

Cela posé, que sur la droite QD on prenne $QM=\frac{2cc}{a}$; que du point M on mène parallèlement à AQ la droite $MN=\frac{bcc}{aa}$; que l'on tire NS parallèle à QD; que l'on décrive entre les asymptotes NS, NT l'hyperbole HOV dont la puissance soit $\frac{2bc^4+aabcc-ac^4}{a^3}$; que l'on prenne les x sur la droite QF, en partant du point Q, & les y perpendiculaires aux x. Ensuite, que sur l'axe AQ, avec le paramètre a & le point Q pour sommet, on décrive la parabole QO de l'équation $xx=ay$. Alors, si du point O, intersection de la parabole & de l'hyperbole, on mène OC parallèle à AQ; & que par le point C & le point A, on tire la droite CAB, elle sera le *minimum* cherché.

En effet, on a par construction $NS=x+\frac{2cc}{a}$; $SO=y+\frac{bcc}{aa}$; & par la propriété de l'hyperbole

$NS \times SO$ est égal au rectangle constant ou puissance de la courbe. Donc $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{2bc^4}{a^3} = \frac{2bc^4 + aabcc - ac^4}{a^3}$; mais, à cause de la parabole, $CO = y = \frac{xx}{a}$; mettant au lieu de y cette valeur, on trouvera $\frac{x^3}{a} + \frac{2ccxx}{aa} + \frac{bccx}{aa} = \frac{bcc}{a} - \frac{c^4}{aa}$, c'est-à dire, $x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^4}{a} - bcc = 0$, qui est précisément l'équation dont il falloit tirer la valeur de x.

On a vu ce qui résulte, en égalant à zero le numérateur de la fraction qui exprime le *minimum*. L'autre supposition, qui est celle du dénominateur égal à zero, donne $(cc + ax)^2 . \sqrt{[cc + xx]} = 0$, c'est-à-dire, $\sqrt{[cc + xx]} = 0$ & $cc + ax = 0$; de $\sqrt{[cc + xx]} = 0$, on tire $x = \sqrt{[-cc]}$, imaginaire qui ne sert à rien. Mais $cc + ax = 0$ donne $x = -\frac{cc}{a}$; prenant donc $Qc = x = -\frac{cc}{a}$, & menant Ac, on aura le triangle QAc semblable aux triangles QFA & PFD; ainsi l'angle QcA = l'angle FDP, & cA est parallèle à DP; c'est-à-dire, que la droite menée du point c par le point A dans l'angle FDG est infinie, & est par conséquent une espece de *maximum*.

On peut s'assurer encore plus aisément que dans ce cas la droite cherchée est infinie; car en substituant au lieu de x sa valeur $-\frac{cc}{a}$ dans l'expresfion $\sqrt{[cc+xx]}+\frac{ab-cc}{cc+ax}\sqrt{[cc+xx]}=CB$, le dénominateur devient zero, ce qui désigne que la ligne est infinie.

CHAPITRE IV.

Des Points d'inflexion & de rebroussement.

105. LORSQU'UNE courbe, qui étoit concave vers une ligne ou vers un point, devient convexe vers cette même ligne ou vers ce même point, ou qu'au contraire, de convexe elle devient concave; le point qui sépare la partie concave de la partie convexe, s'appelle point *d'inflexion* si la courbe continue son chemin vers le même côté, & point de *rebroussement*, lorsqu'elle revient du côté de son origine.

106. SOIT la courbe $ADEM$ (Fig. 64) aux coordonnées parallèles, & qui ait en E un point d'inflexion ou de rebroussement. Si l'on prend une abscisse quelconque $AB=x$, l'ordonnée $BD=y$, & qu'on mène CF parallèle & infiniment voisine à BD; il est évident qu'en regardant $dx=BC$, comme constante, à mesure que l'abscisse x croîtra, dy ou la différence GF de l'ordonnée BD deviendra de plus en plus petite, jusqu'à ce que l'ordonnée tombe sur le point E d'inflexion ou de rebroussement, au-delà duquel, dans l'un & dans l'autre cas, elle deviendra Fig. 64.

toujours de plus en plus grande. Donc aux points d'inflexion & de rebroussement, le dy est un *minimum*; ainsi la formule de ces deux especes de points, d'après la méthode des *maxima* & *minima*, sera $ddy = 0$, ou bien $ddy = \infty$.

Fig. 65. Si la courbe est d'abord convexe vers l'axe AB & ensuite concave, comme dans la Figure 65, alors l'abscisse croissant, la différence de l'ordonnée va croissant jusqu'au point E, après lequel elle va en diminuant; le dy est donc un *maximum* à ce point, & par conséquent il faudra encore supposer $ddy = 0$, ou bien $ddy = \infty$.

On pourra conclure la même chose, en considérant que dans les courbes qui d'abord sont concaves vers l'axe, le ddy est négatif jusqu'au point E d'inflexion ou de rebroussement, & qu'au-delà il devient positif; & que dans les courbes qui commencent par être convexes, le ddy est positif jusqu'au point E, & devient ensuite négatif; mais une quantité quelconque ne peut pas devenir de négative, positive, ou de positive, négative, à moins qu'elle ne passe par zero ou par l'infini; donc au point E d'inflexion ou de rebroussement, on doit avoir $ddy = 0$, ou $ddy = \infty$.

Fig. 64. Dans la courbe AEM (Fig. 64) qui d'abord est concave vers l'axe, supposons que les droites DT, EP soient tangentes aux points D & E; tandis que l'abscisse AB croîtra, la partie AT de l'axe comprise entre la tangente & l'origine des abscisses, croîtra aussi, jusqu'à ce que le point B tombe sur le point H, au-delà duquel, s'il y a inflexion en E, l'interceptée diminuera. Donc, au point d'inflexion E, l'interceptée $AP = \frac{ydx}{dy} - x$ sera un *maximum*; ainsi différentiant (en prenant dx pour cons-

tante), on aura $\frac{dy^2dx - ydxddy - dy^2dx}{dy^2}$ égal à zero ou à l'infini ; c'est-à-dire (en réduisant, divisant par $-ydx$, & multipliant par dy^2), $ddy = 0$, ou bien $ddy = \infty$. S'il y a un rebroussement au point E ; tandis que l'interceptée AT croîtra, l'abscisse AB croîtra aussi jusqu'à ce que le point T tombe en P, & l'abscisse alors deviendra AH ; mais après cela, l'abscisse diminuera ; ainsi AH sera un *maximum* dont la différence est égale à zero ou à l'infini. Donc, relativement à cette différence, la différence de AP sera elle-même zero ou infinie ; ce qui donne encore, comme auparavant, $ddy = 0$, ou $ddy = \infty$.

Si la courbe étoit d'abord convexe vers l'axe (Fig. 65), l'interceptée AT seroit $= x - \frac{ydx}{dy}$, Fig. 65.
dont la différence est $\frac{dxdy^2 - dxdy^2 + ydxddy}{dy^2} = \frac{ydxddy}{dy^2}$, qui, en multipliant par dy^2 & divisant par ydx, se réduit encore à $ddy = 0$, ou $ddy = \infty$.

Dans la courbe DEM (Fig. 66), A étant l'origine des x, & E le point d'inflexion, l'interceptée Fig. 66.
AP sera $= AH + HP$; mais dans ce cas, la sou-tangente est négative, c'est-à-dire, qu'elle est exprimée par $-\frac{ydx}{dy}$: donc $AP = x - \frac{ydx}{dy}$; par où l'on voit que dans aucun cas l'interceptée AP ne peut être $x + \frac{ydx}{dy}$.

107. La formule $ddy = 0$ ou $ddy = \infty$ regarde les courbes qui ont les ordonnées parallèles, ou qui sont rapportées à un axe ; mais la formule sera différente, s'il s'agit des courbes rapportées à un foyer.

Fig. 67 & 68. Soit la courbe ADE (Fig. 67 & 68); Q ſon foyer; QD, Qd deux ordonnées infiniment voiſines. Ayant mené QT, Qt perpendiculaires à QD, Qd, que l'on tire DT, dt tangentes aux points D, d; la ligne Qt prolongée, s'il eſt néceſſaire, rencontrera DT au point o. Il eſt clair maintenant que les ordonnées croiſſant, Qt ſera plus grande que QT, ſi la courbe eſt concave vers le foyer Q (Fig. 67); mais QT ſera plus petite que QT, ſi la courbe eſt convexe vers le foyer (Fig. 68). Donc lorſque la courbe de concave deviendra convexe, & réciproquement lorſque de convexe elle deviendra concave, c'eſt-à-dire aux points d'inflexion & de rebrouſſement, la quantité ot deviendra de poſitive négative, ou au contraire; elle paſſera par conſéquent par le zero ou par l'infini.

Soient donc $QD = y$, $DM = dx$, & du centre Q ſoient décrits les arcs infiniment petits DM, TH; les deux triangles dMD, dQT, ſeront ſemblables, & donneront $dM : MD :: dQ$ ou $DQ : QT$, c'eſt-à-dire, $dy : dx :: y : QT = \frac{ydx}{dy}$; les deux ſecteurs ſemblables DQM, TQH donnent $QD : DM :: QT : TH$, c'eſt-à-dire, $y : dx :: \frac{ydx}{dy} : TH = \frac{dx^2}{dy}$; de plus à cauſe des triangles ſemblables dQo, THo, on a dQ ou $DQ : Qo$ ou $QT :: TH : Ho$, c'eſt-à-dire, $y : \frac{ydx}{dy} :: \frac{dx^2}{dy} : Ho = \frac{dx^3}{dy^2}$. Mais Ht (Fig. 67) eſt la différence de QT, c'eſt-à-dire que Ht (en prenant dx pour conſtante) $= \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$. Donc $to = tH + Ho = \frac{dxdy^2 - ydxddy + dx^3}{dy^2}$, qu'il faudra égaler à zero, ou à l'infini; ou bien encore, en multipliant par dy^2, & divisant par dx, il restera $dy^2 - yddy + dx^2$, qui doit être égal à zero ou à l'infini.

Dans la Figure 68, la ligne er est négative, & est par conséquent $= \frac{-dxdy^2 + ydxddy - dx^3}{dy^2}$;

& en divisant par $-dx$, & multipliant par dy^2, on aura $dx^2 + dy^2 - yddy$ égal à zero ou à l'infini.

On voit donc par-là que si une courbe polaire quelconque (Fig. 69) qui a pour foyer le point Q, pour ordonnées les droites $QB = y$, & dont les petits arcs BC sont les dx, a un point d'inflexion ou de rebroussement; la formule générale pour le déterminer sera $dy^2 + dx^2 - yddy = 0$, ou $dy^2 + dx^2 - yddy = \infty$. Fig. 69.

Si l'on suppose y infinie, les deux termes dx^2, dy^2 seront nuls par rapport au troisième; on aura donc alors $-yddy$ égal à zero ou à l'infini; & en divisant par $-y$, il reste $ddy = 0$ ou $ddy = \infty$, qui est la formule des courbes rapportées à un axe; ce qui doit être en effet, puisque la supposition de y infinie rend les ordonnées parallèles.

108. LA nature d'une courbe étant donc exprimée par une équation, on différentiera deux fois si l'équation est algébrique, en prenant dx pour constante; une fois seulement, si c'est déja une équation différentielle du premier ordre; on prendra la valeur de ddy en dx; & on l'égalera successivement à zero & à l'infini; ce qui donnera la valeur de l'abscisse x correspondante à l'ordonnée qui rencontre la courbe au point d'inflexion ou de rebroussement. Il faut cependant que ces valeurs de x substituées dans l'équation de la courbe donnent des valeurs

réelles à y; car si y étoit imaginaire ou impossible la courbe n'auroit pas de points de cette espece.

109. LA méthode donne indifféremment les inflexions & les rebroussements ; pour distinguer les uns des autres, il faut chercher la marche de la courbe au voisinage de ces points.

110. LES courbes peuvent encore avoir des rebroussements d'un genre différent de ceux qu'on a considérés jusqu'ici, savoir, lorsque la courbe, en revenant vers son origine, tourne sa concavité du même côté qu'elle la tournoit avant son rebroussement. A la fin du Chapitre suivant, c'est-à-dire lorsque j'aurai traité des raions osculateurs, je donnerai la formule générale pour les rebroussements de cette seconde espece.

EXEMPLE I.

Fig. 51. 111. SOIT la parabole cubique (Fig. 51) de l'équation $y=a+\sqrt[3]{[a^3-2aax+axx]}$, qui comme on a vu (n°. 92) a un point double; la différence première est $dy=-\frac{2aadx+2axdx}{3(a^3-2aax+axx)^{\frac{2}{3}}}$; & la différence seconde, en prenant dx pour constante, est $ddy=-\frac{2adx^2}{9(a^3-2aax+axx)^{\frac{5}{3}}}$.

La supposition de $ddy=0$ donne $-2adx^2=0$, qui ne sert à rien; mais celle de $ddy=\infty$, donne $9(a^3-2aax+axx)^{\frac{5}{3}}=0$, c'est-à-dire, $aa-2ax+xx=0$, & par conséquent $x=a$. Substituant a pour x dans l'équation proposée, on trouvera $y=a$; donc au point où l'abscisse & l'ordonnée sont chacune égale à a, la courbe a un point d'inflexion ou de rebroussement; mais comme on sait d'ailleurs que c'est un point de rencontre de deux branches de la courbe, ce ne pourra pas être un point d'inflexion; d'où l'on conclura que c'en est un de rebroussement.

Soit la même parabole cubique, mais dont on compte les abscisses depuis le sommet A (Fig. 70), Fig. 70.
AB étant $=x$, & $BC=y$. L'équation est $axx=y^3$; d'où l'on tire, en différentiant deux fois, $ddy=\frac{2adx^2-6ydy^2}{3yy}$. Mais l'équation donne $3yy=3x\sqrt[3]{[aax]}$, & on a par la première différentiation, $dy=\frac{2axdx}{3x\sqrt[3]{[aax]}}$; ainsi faisant les substitutions, on aura $ddy=-\frac{2adx^2}{9x\sqrt[3]{[aax]}}$. La supposition de $ddy=0$, ne sert à rien; celle de $ddy=\infty$ donne $9x\sqrt[3]{[aax]}=0$, c'est-à-dire, $x=0$, valeur qui substituée dans l'équation, rend $y=0$; la courbe a donc un rebroussement à son sommet A.

EXEMPLE II.

112. SOIT la courbe DFM (Fig. 71) de l'équation $y=a\sqrt{\left[\frac{a-x}{x}\right]}$; AB étant $=x$, $BF=y$, $AD=a$. En différentiant, j'ai $dy=\frac{-aadx}{2x\sqrt{[ax-xx]}}$; & différentiant encore en regardant dx comme constante, je trouve $ddy=\frac{3a^3dx^2-4aaxdx^2}{4x.(ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$. Fig. 71.

La supposition de $ddy=0$ donne $3a^3-4aax=0$; d'où l'on tire $x=\frac{3a}{4}$, valeur qui substituée dans l'équation de la courbe, rend $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; ainsi, si l'on prend $AB = \frac{3}{4}a$, & qu'au point B on élève l'ordonnée $BF = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, le point F sera le point d'inflexion. La supposition de $ddy = \infty$ donne $4x \cdot (ax - xx)^{\frac{3}{2}} = 0$, c'est-à dire, $x = 0$ & $x = a$; la première de ces valeurs substituée dans l'équation, rend $y = \infty$, & la seconde $y = 0$; mais ni l'un ni l'autre cas ne donne d'inflexion; ils indiquent seulement que l'asymptote AQ & la tangente au point D sont parallèles l'une & l'autre aux ordonnées.

EXEMPLE III.

Fig. 72, 73 & 74. 113. SOIT (Fig. 72, 73 & 74) la cycloïde de l'équation $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{[2rx - xx]}}$, (n°. 57).

En différentiant, on a $ddz = \frac{(arx - arr - brr).dx^2}{b.(2rx - xx)^{\frac{3}{2}}}$.

La supposition de $ddz = 0$ donne $arx - arr - brr = 0$, c'est à-dire, $x = r + \frac{br}{a}$. Si $a > b$, la cycloïde est allongée; ainsi, prenant, à compter du centre, CE quatrième proportionnelle à BF, à la demi-circonférence & au rayon (Fig. 73), & menant l'ordonnée ED, elle rencontrera la courbe au point d'inflexion D. Si $a < b$ (Fig. 74), la cycloïde est raccourcie, & $x = r + \frac{br}{a}$ est plus grand que $2r$ ou que AB; mais dans ce cas, les ordonnées sont imaginaires, puisqu'il n'y a plus de courbe au-dessous du point F; donc la courbe n'a ni inflexion ni rebroussement. Si $a = b$ (Fig. 72), la cycloïde est l'ordinaire; alors x ou $r + \frac{br}{a}$ devient $= 2r =$

AB, & $y=BF$; ce qui n'indique ni inflexion ni rebrouſſement, mais ſeulement que la tangente en F eſt parallèle aux abſciſſes, ou bien au diamètre AB.

La ſuppoſition de $dd\zeta=\infty$ donne $b(2rx-xx)^{\frac{1}{2}}=0$, c'eſt-à-dire, $x=0$ & $x=2r$. Dans les trois cas, la valeur $x=0$ indique que la tangente au point A eſt parallèle aux ordonnées. La valeur $x=2r$ montre dans le premier & le ſecond cas que la tangente au point F eſt auſſi parallèle aux ordonnées; mais elle donne une contradiction pour le troiſième cas, puiſque l'équation étant alors $d\zeta=\frac{dx\sqrt{(2r-x)}}{\sqrt{x}}$, ſi l'on ſubſtitue, au lieu de x ſa valeur $2r$, on aura $d\zeta=0$; or, on ne peut pas avoir tout à-la-fois $d\zeta=0$ & $dd\zeta=\infty$; ainſi dans le troiſième cas, cette valeur ne mène à rien.

EXEMPLE IV.

114. SOIT la conchoïde de Nicomede, dont nous avons déja parlé, n°. 96, & dont l'équation eſt

$$yy=\frac{aaxx-x^4+2aabx-2bx^3-bbxx+aabb}{xx},$$

ou $y=\frac{(b+x)\sqrt{[aa-xx]}}{x}$. En différentiant on a $dy=\frac{-x^3dx-aabdx}{xx\sqrt{[aa-xx]}}$; différentiant de nouveau, en prenant dx pour conſtante, on trouve

$$ddy=\frac{(2a^4b-aax^3-3aabxx)dx^2}{x^3.(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Commençons par le cas où $a=b$, l'équation alors devient $ddy=\frac{(2a^5-aax^3-3a^3xx)dx^2}{x^3.(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}$.

La ſuppoſition de $ddy=0$, rend $2a^5-aax^3-$

$3a^3xx = 0$, c'eſt-à-dire, $x^3 + 3axx - 2a^3 = 0$; en réſolvant cette équation, on trouve $x = \sqrt{[3aa]} - a$, $x = -\sqrt{[3aa]} - a$, $x = -a$; or, à la première
Fig. 56. valeur $x = \sqrt{[3aa]} - a = GE$ (Fig. 56), correſpond l'ordonnée $y = \frac{\sqrt{[3aa]}\sqrt{[2a\sqrt{(3aa)} - 3aa]}}{\sqrt{[3aa]} - a} =$ EM qui rencontre la courbe au point d'inflexion M; la ſeconde valeur ne ſert à rien; & la troiſième indique le rebrouſſement qui ſe fait au point P.

Paſſons aux deux autres cas; la ſuppoſition de $ddy = 0$ donne $2aab - x^3 - 3bxx = 0$, ou bien $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$. Pour avoir les racines de cette équation, je ſuppoſe $xx = bz$, lieu à la parabole ordinaire; & faiſant les ſubſtitutions, il en naît l'équation $xz + 3bz - 2aa = 0$, qui eſt un lieu à l'hyperbole.

Fig. 75. Entre les aſymptotes AQ, AD (Fig. 75), (faiſant $AC = 2a$, la perpendiculaire $CN = a$, $AD = 3b$, & prenant l'origine des x en D) ſoit décrite l'hyperbole GNF, dont la puiſſance $= 2aa$; elle paſſera par le point N. Elevant enſuite DM perpendiculairement ſur DA, que du point D comme ſommet, avec DM pour axe & b pour paramètre, on décrive la parabole de l'équation $xx = bz$.

Maintenant, puiſque $AD = 3b$ & $AC = 2a$, ſi b eſt plus grand que a, CD ſera plus grande que b; prenons dans la parabole l'abſciſſe $z = a = CN$, l'ordonnée x ſera $= \sqrt{ab}$; mais a étant plus petit que b, $\sqrt{ab}$ ſera auſſi plus petite que b, & par conſéquent plus petite que CD; donc la parabole coupe l'hyperbole entre N & D, par exemple en I.

Cela poſé, ſi l'on prend $x = -a$, on aura dans la parabole $z = \frac{aa}{b}$, & dans l'hyperbole $z =$

$\frac{2aa}{-a+3b}$; mais $\frac{aa}{b}$ eſt plus grande que $\frac{2aa}{-a+3b}$; donc la parabole coupe l'hyperbole en un point I tel que HI ou $-x$ eſt plus petite que a; & par conſéquent cette abſciſſe rapportée à la conchoïde de la Figure 58, aura une ordonnée réelle qui déterminera l'inflexion de la branche inférieure KN en quelque point N. L'ordonnée GM menée du point G, qui eſt une autre interſection de la parabole & de l'hyperbole, ſera néceſſairement plus grande que a; par conſéquent, en la rapportant à la conchoïde comme abſciſſe, il n'y aura point d'ordonnée réelle; ainſi cette valeur eſt inutile. Enfin la troiſième valeur TF donnera l'abſciſſe à laquelle correſpond l'ordonnée de la branche ſupérieure, qui rencontre la courbe au point d'inflexion M.

Dans le cas où b eſt moindre que a; alors CD (Fig. 76) eſt plus petite que b; prenant dans la parabole l'abſciſſe $z = a = CN$, l'ordonnée x ou $\sqrt{ab}$ ſera plus grande que b, & par conſéquent plus grande que CD; donc la parabole paſſera entre N & C; & ſi elle ne coupe pas l'hyperbole, les deux valeurs négatives de x dans l'équation $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$, ſeront imaginaires; ſi elle la coupe, ces valeurs ſeront toujours plus grandes que a; ainſi en les rapportant à la conchoïde (Fig. 57) les ordonnées en ſeront imaginaires; ces valeurs ſont donc inutiles. Mais la parabole coupera immanquablement l'hyperbole du côté des x poſitives, par exemple, au point F; ainſi TF qui ſera plus petite que a ſera la valeur de x, à laquelle correſpond l'ordonnée de la conchoïde, qui rencontre la branche AM au point d'inflexion M. Fig. 76. Fig. 57.

J'ai dit que ſi la parabole coupoit l'hyperbole entre N & C; les deux valeurs négatives de x ſeroient plus grandes que a ; en effet, si l'on prend dans la parabole $x = -a$, on aura $z = \frac{aa}{b}$, & dans l'hyperbole $z = \frac{2aa}{3b-a}$; mais $\frac{aa}{b} < \frac{2aa}{3b-a}$; donc tant que x négative n'est pas plus grande que a, la parabole ne coupera pas l'hyperbole ; elle ne pourra donc la couper qu'en quelque point où x sera plus grande que a. Mais si l'on prend x positive $= a$; alors la parabole donne $z = \frac{aa}{b}$, & l'hyperbole $z = \frac{2aa}{3b+a}$; or $\frac{aa}{b} > \frac{2aa}{3b+a}$; donc la parabole coupera l'hyperbole en quelque point F, tel que TF sera moindre que a.

La supposition de $ddy = \infty$ donne $x^3(aa-xx)^{\frac{1}{2}} = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ & $x = \pm a$; ce qui signifie que l'asymptote & la tangente en A sont parallèles aux ordonnées dans les trois cas, aussi-bien que la tangente en K dans le second & le troisième cas ; & que dans le premier cas, il y a en P un point de rencontre de deux branches (& cela se prouve aussi par les rebroussements), parce que la valeur de $x = -a$ résulte des deux suppositions de $ddy = 0$, & de $ddy = \infty$; nous avons déja trouvé ce point de rencontre ci-dessus, n°. 96.

115. FAISONS les mêmes recherches, en considérant la conchoïde comme une courbe polaire dont toutes les ordonnées partent du point P.

F. 56, & 57. Soit donc $PM = y$ (Fig. 56, 57 & 58) ; de plus, ayant mené PF infiniment voisine de PM, & décrit du centre P les petits arcs MB, DH, soient

$MB=dx$, $AG=a$, $GP=b$, $PD=z$, $HO=dz$. L'équation de la courbe sera $y=z\pm a$; c'est-à-dire $y=z+a$ pour la courbe supérieure à l'asymptote GR, & $y=z-a$ pour la courbe inférieure. Différentiant, on aura dans les deux cas $dy=dz$. Or les deux angles GDP, DOH ne différant entr'eux que de l'angle infiniment petit DPH, & les angles en G & en H étant droits; les triangles PGD, DHO sont semblables, & donnent $PG:GD::DH:HO$, c'est-à-dire $b:\sqrt{[zz-bb]}::\frac{zdx}{y}:dz=\frac{zdx.\sqrt{[zz-bb]}}{by}$; mais $dz=dy$; donc aussi $dy=\frac{zdx\sqrt{[zz-bb]}}{by}$; & différentiant en prenant dx pour constante, $ddy=\frac{(2byzz-b^3y-bz^3+b^3z).dxdz}{bbyy\sqrt{[zz-bb]}}$; qui devient, en mettant dz au lieu de dy, & en substituant à dz sa valeur, $ddy=$ . . . . $\frac{(2yz^3-bbyz-z^4+bbzz)dx^2}{bby^3}$, ou enfin $ddy=\frac{(z^4\pm 2az^3\mp abbz).dx^2}{bb.(z\pm a)^3}$, en mettant pour y sa valeur $z\pm a$.

Nous avons vû que la formule pour les courbes polaires étoit dx^2+dy^2-yddy égal à zero ou à l'infini; mettons donc dans cette formule les valeurs de y, de dy & de ddy, nous aurons . . . . $\frac{(a^2bb\pm 3abbz\mp 2az^3)dx^2}{bb.(z\pm a)^3}=0$, ou $=\infty$.

La première de ces suppositions donne $abb\pm 3bbz\mp 2z^3=0$.

Soit en premier lieu $a=b$, & supposons que l'on veuille considérer la partie supérieure de la courbe, on aura $z^3 - \frac{3aaz}{2} - \frac{a^3}{2} = 0$, équation d'où l'on tire $z = -a$, $z = \frac{a - \sqrt{[3aa]}}{2}$, $z = \ldots \frac{a + \sqrt{[3aa]}}{2}$; mais $y = z + a$, & on a par conséquent $y = 0$, $y = \frac{3a + \sqrt{[3aa]}}{2}$, $y = \frac{3a - \sqrt{[3aa]}}{2}$. Or la troisième valeur est inutile, puisqu'elle donne l'ordonnée $y < 2a$, ce qui rend la courbe imaginaire. La seconde donne l'ordonnée y qui rencontre la courbe en un point d'inflexion *M*. La première regarde la partie inférieure, & détermine le point P de rebroussement. En effet, relativement à la courbe inférieure, l'équation est $z^3 - \frac{3aaz}{2} + \frac{a^3}{2} = 0$, qui donne $z = a$, $z = \frac{-a \pm \sqrt{[3aa]}}{2}$; mais dans ce cas, $y = z - a$; on aura donc $y = 0$, $y = \frac{-3a \pm \sqrt{[3aa]}}{2}$; les deux dernières valeurs ne servent à rien, parce qu'elles donnent les y négatives, & que la courbe est toute du côté des y positives.

Fig. 57 & 58. A l'égard des deux autres cas (Fig. 57 & 58), on a $z^3 - \frac{3bbz}{2} \mp \frac{abb}{2} = 0$. Pour avoir les racines de cette équation, je suppose $zz = \frac{bp}{2}$ qui est un lieu à la parabole ordinaire; & faisant les substitutions, j'ai pour second lieu $pz - 3bz = \pm ab$ qui est à l'hyperbole, (le signe + qui précède ab

eſt pour la branche ſupérieure, & le ſigne — pour la branche inférieure). Entre les aſymptotes perpendiculaires PQ, MN, ſoient décrites les hyperboles oppoſées (Fig. 77) dans les angles PAN, MAQ lorſque le ſecond membre ab de l'équation eſt poſitif, & dans les angles PAM, NAQ lorſqu'il eſt négatif; & ſuppoſant $b > a$, ſoient $AB = b$, $BC = a$: les hyperboles paſſeront par les points C; que l'on prenne $AM = 3b$; & qu'en comptant les p du point M ſur l'aſymptote MN, on décrive la parabole EMD de l'équation $zz = \frac{bp}{2}$, dont M ſoit le ſommet, MN l'axe, & $\frac{b}{2}$ le paramètre. Puiſqu'en prenant $p = Mb = 2b$, l'ordonnée de la parabole eſt $z = b$ qui eſt plus grande que a ou bc, la parabole paſſera hors des points C, & coupera les hyperboles DC, CT aux points D, T, I, deſquels menant les droites DH, TV, IO parallèles à l'aſymptote QP, ces droites ſeront les trois racines z de l'équation $z^3 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, relativement à la partie ſupérieure de la conchoïde. Mais $y = z + a$; donc $DH + a$ ſera l'ordonnée y qui rencontre la courbe au point d'inflexion vers M (Fig. 58). Les deux autres racines VT, OI ſont inutiles, parce qu'étant négatives, ſi à $-VT$ on ajoute a, leur différence qui eſt y, ſera négative; & ſi à OI on ajoute a, la différence ſera poſitive, mais moindre que a. Or, dans le cas préſent, lorſque y eſt négative ou moindre que a, il n'y a pas de courbe. A l'égard de la partie inférieure de la conchoïde, c'eſt-à-dire, dans l'équation $z^3 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$, Fig. 77.

les trois racines feront OG, VK, HE; mais fi de la première & de la troifième, on fouftrait a, la différence, c'eft-à-dire y, fera négative, & il n'y aura pas de courbe; ainfi ces deux racines font inutiles. Mais fi de la feconde VK on fouftrait a, la différence LK fera l'ordonnée y qui rencontre le point d'inflexion que la courbe a vers N.

Si l'on fuppofe $b < a$, la parabole paffera par les points c, C, des hyperboles GcK, ICT; par conféquent, fi l'on ajoute a aux deux valeurs négatives de z de l'équation $z^3 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, on aura $y < a$, & il n'exifte pas de courbe correfpondante à ces y; mais en ajoutant a à la troifième racine qui eft pofitive, on aura l'ordonnée y qui rencontre l'inflexion que la courbe a vers M. Quant à la partie inférieure dont l'équation eft $z^3 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$, fi l'on fouftrait a, tant des deux racines pofitives qui font moindres que b, que de la racine négative, on aura toujours y négative & plus grande que PK; or, il n'y a pas de courbe pour cette efpece de y; ainfi lorfque $b < a$, la branche inférieure de la conchoïde n'a ni inflexion ni rebrouffement.

La fuppofition de la formule $= \infty$ donne dans les trois cas $z = \mp a$, & par conféquent $y = 0$. Dans la Figure 58, la valeur $y = 0$ ne fert à rien, puifqu'il n'y a pas de courbe en P: dans les Figures 56 & 57, elle défigne la tangente au point P, qui eft en même-temps un point de rebrouffement dans la Figure 56, mais non dans la Figure 57.

EXEMPLE

EXEMPLE V.

116. SUPPOSONS un cercle AED décrit du centre B (Fig. 78), & une courbe AFK telle que menant un raïon quelconque BFE, le quarré de FE soit toujours égal au rectangle de l'arc correſpondant AE par une droite donnée b; on demande le point d'inflexion de cette courbe? Fig. 72.

Faiſons l'arc $AE = z$, BA ou $BE = a$, $BF = y$; menons Be infiniment voiſine de BE, & du centre B décrivons avec le raïon BF le petit arc FG, qui ſera dx. On aura, par la nature de la courbe, $bz = aa - 2ay + yy$; & en différentiant, $bdz = -2ady + 2ydy$, ou $dz = \frac{-2ady + 2ydy}{b}$. De plus, les ſecteurs ſemblables BEe, BFG donnent $BE : BF :: Ee : FG$, c'eſt-à-dire, $a : y :: \frac{2ydy - 2ady}{b} : dx = \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$; & différentiant de nouveau, en ſuppoſant dx conſtant, $4ydy^2 + 2yyddy - 2ady^2 - 2ayddy = 0$, d'où l'on tire $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y-a}$.

Si l'on ſubſtitue dans la formule générale $dx^2 + dy^2 - yddy$ les valeurs de dx^2 & de $yddy$ données en dy, on aura $\frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb} + \frac{ydy^2 - ady^2}{y-a}$, ou en réduiſant au même dénominateur, $\frac{4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb}{aabb.(y-a)}$ égal à zero ou à l'infini. Si l'on conſtruiſoit par conſéquent l'équation, il y auroit une des racines qui donneroit la valeur de l'ordonnée y qui rencontre la courbe au point d'inflexion.

CHAPITRE V.

Des Développées & des Rayons osculateurs.

Fig. 79. 117. Si l'on imagine que la courbe BDF (Fig. 79) soit recouverte ou enveloppée d'un fil $ABDF$, fixé par une de ses extrémités en F, & dont la partie AB tombe sur la tangente AR de la courbe au point B; & que l'on fasse mouvoir l'extrémité A du fil, en le développant de dessus la courbe, mais de manière qu'il soit toujours tendu, & toujours tangent à la courbe: le point A par ce mouvement décrira la courbe AHK.

La courbe BDF s'appelle la *développée* de la courbe AHK; la courbe AHK est la *développante* de BDF; & les parties AB, HD, KF du fil s'appellent les raïons de la développée, & plus communément les raïons *osculateurs*.

118. PUISQUE la longueur du fil est toujours la même, il est clair que la différence des raïons osculateurs AB, HD sera égale à la partie BD de la courbe; que l'autre partie DF est égale à la différence des raïons HD, KF; que la courbe entière BDF est égale à la différence des raïons AB, KF; & que si le raïon AB étoit nul, c'est-à-dire, si le point A tomboit en B, le raïon HD seroit égal à la partie BD de la courbe, & le raïon FK à la courbe entière BDF. On voit aussi que les raïons

HD, KF ſont les tangentes de la développée aux points D & F.

119. SUPPOSONS que l'arc HK de la courbe AHK ſoit infiniment petit, l'arc correſpondant DF de la développée, ſera auſſi infiniment petit. Et puiſque nous avons démontré (n°. 11) qu'un arc infiniment petit d'une courbe quelconque a les mêmes propriétés qu'un arc de cercle; & (n°. 24) que ſi l'on prolonge le raïon HD, de manière qu'il rencontre en S le raïon KF, les lignes SH, SK, ne différent que d'une quantité infinitéſimale du troiſième ordre; ces lignes peuvent être priſes pour égales, & ſont perpendiculaires à la courbe AHK aux points H & K. Mais les lignes HD, DS étant des quantités finies, qui ne différent que d'une quantité infinitéſimale, peuvent auſſi être priſes pour égales; ainſi pour déterminer un point quelconque D de la développée, ou pour déterminer la longueur d'un raïon oſculateur HD, il ſuffira que la perpendiculaire HS de la courbe connue AHK étant donnée de poſition (ce que la méthode des tangentes enſeigne), on détermine le point S dans lequel elle s'entrecoupe avec la perpendiculaire infiniment voiſine KS. Ce qui ſe fait de la manière ſuivante.

120. SOIT en premier lieu la courbe $DABE$ (Fig. 80) rapportée aux axes, & dont AB, BE ſont des arcs infinitéſimaux, BQ, EQ deux perpendiculaires voiſines qui ſe rencontrent au point cherché Q. Que l'on ſuppoſe à l'ordinaire $DH = x$, $HA = y$; que l'on tire les deux cordes $PABC$, EBR dont la première rencontre le prolongement de ME en C; & que du centre B avec les raïons BE, BP on décrive les petits arcs ES, PO; on aura $AF = dx$, $FB = dy$, l'élément AB de la courbe $= ds = \sqrt{[dx^2 + dy^2]}$. Fig. 80.

Mais (n°. 28) les ſecteurs QBE, BES ſont ſemblables; on aura donc $QB:BE::BE:ES$, c'eſt-à-dire $QB = \frac{ds^2}{ES}$. Maintenant, puiſque le petit arc PO (n°. 17) ſe confond avec ſon ſinus, les triangles RPO, BEG ſeront ſemblables, & donneront $BE:EG::RP:PO$, c'eſt-à-dire $ds:dy::RP:PO = \frac{RP.dy}{ds}$. Mais les ſecteurs BPO, BES ſont auſſi ſemblables, & donnent $BP:PO::BE:ES$, ou bien $\frac{yds}{dy}$: $\frac{RP.dy}{ds}::ds:ES = \frac{RP.dy^2}{yds}$. Donc enfin $QB = \frac{yds^3}{RP.dy^2}$, formule générale des raïons oſculateurs, dans laquelle il ne reſte plus qu'à ſubſtituer la valeur de RP qui convient, ſuivant la fluxion première qu'on a regardée comme conſtante; or, RP eſt la différence de DP ou de $\frac{ydx}{dy} - x$.

Si aucune des fluxions n'eſt priſe pour conſtante, on aura $RP = \frac{ydyddx - ydxddy}{dy^2}$, & par conſéquent $QB = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$.

Si on a fait dx conſtante, on aura $RP = -\frac{ydxddy}{dy^2}$, & par conſéquent $QB = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$.

Si c'eſt dy qui eſt conſtante, on aura $RP = \frac{yddx}{dy}$, & par conſéquent $QB = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$.

Enfin, si c'est ds, c'est-à-dire $\sqrt{[dx^2+dy^2]}$ qui est constante, alors on a $dxddx+dyddy=0$, $-ddy=\frac{dxddx}{dy}$, & $RP=\frac{yddx.(dx^2+dy^2)}{dy^3}$; par conséquent $QB=\frac{dy}{ddx}\sqrt{[dx^2+dy^2]}$, ou bien en mettant la valeur de ddx, $QB=\frac{dx\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{-ddy}$. Donc si de l'expression de $QB=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx-dxddy}$, où aucune des fluxions n'a été prise pour constante, on veut passer à la supposition de dx constante, on n'aura qu'à effacer le terme où est ddx; pour passer à celle de dy constante, on effacera le terme où est ddy; & pour passer à celle de ds constante, il n'y aura qu'à mettre au lieu de $-ddy$ sa valeur $\frac{dxddx}{dy}$.

121. Il peut se faire que la courbe soit rapportée à un diamètre, c'est à-dire que ses coordonnées fassent entr'elles un angle oblique. Soient l'abscisse $DV=x$, $VK=dx$, l'ordonnée $VA=y$, & tout le reste comme ci-dessus. Puisque l'angle DKB est connu, on connoîtra aussi l'angle BNF, & le rapport que les côtés du triangle BNF ont entr'eux; or, $NB=dy$; ainsi NF & FB, & par conséquent AB ou ds, seront connus. Mais le triangle RPO est semblable au triangle ABF, puisque les angles en O & F sont droits, & que l'angle ORP ne differe de l'angle FAB que de l'angle infinitésimal RBP. Donc RP & PO seront connus, & par conséquent ES & QB le seront aussi.

122. Si de l'extrémité du raïon osculateur BQ

on tire QT parallèle à l'axe DM, qui rencontre en T l'ordonnée BI prolongée, la droite BT s'appelle la *sous-osculatrice* ou le *co-raïon*. Le raïon BQ étant donné, le co-raïon l'est aussi, parce que la méthode des tangentes donne la normale Bm de la courbe, & que par conséquent la similitude des triangles BmI, BQT fera connoître BT.

Mais si l'on veut l'expression du co-raïon indépendamment de celle du raïon ; que l'on appelle $BT = z$. Les triangles BTQ & BGC ou BAF sont semblables, puisque les angles en T & G sont droits, & que les deux angles TBG, QBC étant aussi droits, si l'on en soustrait QBG, il restera les angles égaux TBQ, CBG; on aura donc $dx : ds :: z : BQ = \frac{z ds}{dx} = \frac{z\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}{dx}$. Mais (n°. 24) $BQ = EQ$, puisque ces lignes ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite du troisième ordre ; ainsi la différence de BQ sera nulle ; différentiant donc, sans regarder aucune fluxion comme constante, on aura

$$\frac{dxdz.(dx^2+dy^2)+zdx^2ddx+zdxdyddy-zddx(dx^2+dy^2)}{dx^2\sqrt{[dx^2+dy^2]}} = 0.$$

Mais $dz = dy$, puisque les différences de TB & de IB sont les mêmes ; donc $z = \frac{dx.(dx^2+dy^2)}{dyddx - dxddy} = BT$, formule du co-raïon, où aucune des fluxions n'est constante. Si dx étoit constante, le terme $dyddx$ feroit nul, & la formule deviendroit $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = BT$. Si dy est constante, le terme $-dxddy$ sera nul, & la formule deviendra $\frac{dx.(dx^2+dy^2)}{dyddx} = BT$. Enfin, si l'élément de la courbe est constant, on a alors $-ddy = \frac{dxddx}{dy}$; par conséquent la formule dans cette supposition est $\frac{dxdy}{ddx} = BT$, si l'on substitue la valeur de ddy; ou bien $\frac{dx^2}{-ddy} = BT$ si l'on substitue la valeur de ddx.

Réciproquement, si le co-raïon est donné, la similitude des triangles BmI, BQT fera connoître le raïon QB.

123. Si les coordonnées font un angle oblique, il faudra, dans l'analogie $dx:ds::y:BQ$, mettre au lieu de dx & de ds, les valeurs respectives qui conviennent dans ce cas aux lignes AF, AB, faire tout le reste comme ci-dessus, & on trouvera la formule du co-raïon BT.

124. On parvient à la même formule du raïon osculateur par d'autres voies. Du centre Q avec Qm pour raïon, soit décrit l'arc mn. En regardant cet arc infinitésimal mn comme la tangente au point n, on aura les triangles BCG, mnq semblables, qui donneront $BC:BG::mq:mn$, c'est-à-dire $\sqrt{[dx^2+dy^2]}:dx::mq:mn = \frac{mq.dx}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$; mais mq est la différence de Dm, c'est-à-dire de la sou-normale Im jointe à l'abscisse DI ou même à DH; or $Dm = x + \frac{ydy}{dx}$; différentiant donc en ne regardant aucune des fluxions comme constante, on aura $mq = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$; donc $mn = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$; mais à cause des

fecteurs femblables Qmn, QBE, on a $BE-mn$: $BE :: Bm \frac{(y\cdot\sqrt{(dx^2+dy^2)})}{dx} : QB$; ainfi en fubftituant les valeurs analytiques, $QB = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, formule qui eft la même que celle qu'on a déja trouvée, & qui, modifiée d'après la fuppofition que l'une des fluxions fût conftante, donnera l'expreffion du raïon QB qui correfpond à cette fuppofition.

125. *Autre méthode.* QUE l'on prolonge EM jufqu'en t, & BG jufqu'en L. Puifque les triangles EGL, BIm font femblables, on aura $GL = \frac{dy^2}{dx}$, & par conféquent $BL = \frac{dx^2+dy^2}{dx}$; mais on a vu que $mq = \frac{dx^2+ydxddy+dxdy^2-ydyddx}{dx}$, & les triangles femblables QEL, Qmq donnent $EL-mq$: $BL :: Bm : BQ$; donc en fubftituant les valeurs analytiques, on aura $BQ = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$.

126. VENONS maintenant aux courbes polaires. Fig. 81. Soit la courbe BEG (Fig. 81) dont A eft le foyer. BE, EG en font deux arcs voifins infiniment petits; & AB, AE, AG trois ordonnées voifines. On décrira du centre A les petits arcs BC, EF; on abaiffera les perpendiculaires AI, AD fur les cordes GE, EB prolongées; la derniere de ces cordes rencontrera l'ordonnée AG en quelque point L; & du centre E on décrira le petit arc GR. Suppofons $AB = y$, $CE = dy$, $BC = dx$, $AD = p$; fi du centre A on décrit le petit arc DH, on aura $HI = dp$; mais HM

eſt un infiniment petit du ſecond ordre (n°. 16). Donc on pourra regarder HI & IM comme égales, & par conſéquent MI ſera $= dp$. La ſimilitude des triangles EBC, EAD donne $ED = \frac{ydy}{ds} = EI$, qui n'en differe que d'une quantité infiniment petite. L'arc GR ſe confondant avec ſa tangente, les triangles EIM, EGR ſeront ſemblables ; d'où on tirera $GR = \frac{dpds^2}{ydy}$. Si l'on mène EQ, QG perpendiculaires à la courbe aux points E & G, les ſecteurs QEG, EGR feront ſemblables ; ainſi on aura $QE = \frac{ydy}{dp}$. Enfin les triangles ſemblables EBC, EAD donnent $p = \frac{ydx}{ds} = \frac{ydx}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$; & différentiant ſans prendre de conſtante, $dp = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{(yddx+dxdy).(dx^2+dy^2)-(dxddx+dyddy).ydx}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

c'eſt-à-dire, $dp = \frac{dx^3dy+ydy^2ddx+dxdy^3-ydxdyddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$;

ſubſtituant donc cette valeur de dp dans l'expreſſion de QE, on trouvera $QE = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+ydyddx+dxdy^2-ydxddy}$; & c'eſt-là la formule du raïon oſculateur pour les courbes rapportées à un foyer, en ne prenant aucune des premières fluxions pour conſtante.

Si on veut regarder dx comme conſtante, on n'aura qu'à chercher la valeur de dp d'après cette hypothèſe, & la ſubſtituer dans l'expreſſion de QE ;

ou bien encore il suffira d'effacer dans la formule qu'on vient de trouver, le terme $ydyddx$, & on aura $QE = \frac{y.(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+dxdy^2-ydxddy}$.

Si on veut que dy soit constante, on effacera dans la formule générale le terme $-ydxddy$, & il restera $QE = \frac{y.(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+dxdy^2+ydyddx}$.

Enfin, si l'on prend pour constante ds, c'est-à-dire $\sqrt{[dx^2+dy^2]}$, on aura alors $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$; en mettant cette valeur au lieu de ddx dans la formule générale, on trouvera $QE = \frac{ydx.\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dx^2-yddy}$, ou bien en y substituant la valeur de ddy, $QE = \frac{ydy.\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{dxdy+yddx}$.

127. SI dans toutes ces formules on suppose y infinie, tous les termes où y ne se trouvera pas, s'évanouiront, & les formules deviendront les mêmes que celles que nous avons trouvées pour les courbes rapportées aux axes; & c'est précisément ce qui doit arriver, puisque si y est infinie, le point A est infiniment éloigné, & par conséquent les ordonnées sont parallèles.

Fig. 82. 128. *Autre méthode.* SUPPOSONS que ER touche au point E le petit arc EG (Fig. 82), que QE, QG soient deux raïons osculateurs infiniment voisins, & que QG soit prolongé jusqu'en R. Du foyer A soient menées AN, AK perpendiculaires à QG, QE; & soit $EK = t$, KM sera $= dt$. Puisque le

triangle AKM eſt ſemblable au triangle QNM, & que celui-ci eſt ſemblable au triangle QER, on aura $QE : ER :: AK : KM = dt$. Mais à cauſe des triangles ſemblables ELC ou EGC & EAK, on a $AK = \frac{ydy}{ds}$; d'ailleurs on peut prendre ER pour EG; ainſi $QE : ds :: \frac{ydy}{ds} : dt$, & par conſéquent $QE = \frac{ydy}{dt}$; mais $EK = t = \frac{ydx}{ds}$; donc ſi l'on acheve comme ci-deſſus, c'eſt-à-dire, ſi l'on prend la valeur de dt en différentiant, & qu'on la ſubſtitue dans l'expreſſion de QE, on trouvera les mêmes formules.

129. SI l'on mène QP perpendiculaire ſur EA prolongée en P, les triangles EAK, EQP feront ſemblables, & donneront $EA : EK :: EQ : EP$; mais on a vu que $QE = \frac{ydy}{dt}$; donc $y : t :: \frac{ydy}{dt} : EP = \frac{tdy}{dt}$; & ſi l'on met au lieu de t ſa valeur $\frac{ydx}{ds}$, & au lieu de dt la différentielle . . . . $\frac{dx^2dy + ydy^2ddx + dxdy^3 - ydxdyddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$, où aucune fluxion n'a été priſe pour conſtante, on trouvera $EP = \frac{ydxds^2}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy} = \frac{ydx^3 + ydxdy^2}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$, formule du rayon où aucune des fluxions n'eſt conſtante, & de laquelle on tirera ſans peine les formules qui conviennent à la ſuppoſition de l'une des premières diffé-

rences regardée comme conſtante. Si enſuite dans ces nouvelles formules on ſuppoſe y infinie, c'eſt à-dire ſi on y efface les termes où y ne ſe trouve pas, on aura les mêmes formules qu'on a déja trouvées pour les courbes rapportées aux axes.

130. PUISQUE quelle que ſoit la courbe, on ne trouve qu'une ſeule expreſſion du raïon oſculateur & du co-raïon, tant pour les courbes rapportées aux axes, que pour celles qui ſont rapportées à un foyer, il s'enſuit que toute courbe ne pourra avoir qu'une ſeule développée.

131. AINSI, une courbe dont on veut le raïon oſculateur ou le co-raïon, étant donnée au moyen d'une équation quelconque; il faudra différentier cette équation, afin d'en tirer les valeurs de dy, dy^2, & ddy en dx, ou les valeurs de dx, dx^2, ddx, en dy, & ſubſtituer ces valeurs dans les formules que nous avons trouvées; & l'on aura en termes finis & dégagés de différences, l'expreſſion du raïon oſculateur ou du co-raïon.

132. SI la valeur du raïon oſculateur ou du co-raïon eſt poſitive, on les prendra du côté de l'axe
Fig. 80 & 81. DM (Fig. 80), ou du côté du foyer A (Fig. 81), comme on l'a vu juſqu'ici, & la courbe alors ſera concave vers cet axe ou vers ce foyer; mais ſi elles ſont négatives, il faudra les prendre du côté oppoſé, & dans ce cas la courbe ſera convexe. Il ſuit de-là qu'aux points d'inflexion ou de rebrouſſement, ſi la courbe en a, le co-raïon de poſitif deviendra négatif, & que deux raïons oſculateurs qui convergeoient, divergeront au-delà de ces points; ce qui ne peut arriver, à moins qu'ils ne ſoient auparavant parallèles, auquel cas le raïon de la développée de-

vient infini, ou à moins que les deux raïons voiſins ne tombent l'un ſur l'autre & ſe confondent, & qu'ainſi le raïon de la développée ſoit nul. En effet, il eſt évident que ſi les raïons de la développée, en s'approchant du point B d'inflexion ou de rebrouſſement (Fig. 83 & 84), vont toujours croiſſant, les Fig. 83 & 84.
parties AD, FE étant la développée de la courbe ABF, il faudra néceſſairement qu'ils deviennent parallèles, pour paſſer de la convergence à la divergence. Mais ſi la développée de la courbe ABF (Fig. 85 & 86) eſt DBE, le fil ſe développant de Fig. 85 & 86.
B vers A pour la partie BA de la courbe, & de B vers F pour la partie BF, puiſqu'alors le raïon eſt d'autant plus petit qu'il s'approche plus du point B; il faudra qu'il devienne nul ou zero pour paſſer de l'état poſitif à l'état négatif.

EXEMPLE I.

133. ON demande le raïon oſculateur pour un point quelconque B de la parabole ordinaire AB (Fig. 87), dont l'équation eſt $ax = yy$. Différentiant deux fois en prenant dx pour conſtante, on Fig. 87.
trouvera $dy = \frac{adx}{2y}$, & $ddy = -\frac{aadx^2}{4y^3}$. Subſtituant donc ces valeurs dans la formule du co-raïon, on trouvera $BE = \frac{4y^3 + aay}{aa} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

Du point B ſoit tirée la tangente BT qui rencontre l'axe en T, & du point T ſoit menée TE parallèle à la normale BM; elle rencontrera le prolongement de BP au point cherché E. Car l'angle BTE étant droit, on a $BP : PT :: PT : PE$, c'eſt-à-dire, d'après la propriété de la parabole, $\sqrt{ax} : 2x ::$

$2x : PE = \frac{4xx}{\sqrt{4x}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; donc $BP + PE$ ou $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$. La droite BE étant déterminée, que l'on mene EQ parallèle à l'axe AP, & la normale BQ prolongée rencontrera EQ en un point Q qui appartient à la développée.

Ou bien encore, à cause des triangles ſemblables BPM, BEQ, on a $BP : PM :: BE : EQ$; mais par la nature de la parabole, $PM = \frac{1}{2}a$; ainſi $\sqrt{ax} : \frac{1}{2}a :: \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax} : EQ = 2x + \frac{a}{2} = PK$; donc $MK = 2x$. Si l'on prend donc MK double de AP, ou bien $PK = TM$, & ſi l'on mene KQ parallèle à PB, elle rencontrera la normale BM prolongée en un point Q qui appartiendra à la développée. Et puiſque $BP : BM :: BE : BQ$, & que $BM = \frac{\sqrt{(4ax + aa)}}{2}$, on aura $\sqrt{ax} : \frac{\sqrt{(4ax+aa)}}{2} :: \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax} : BQ = \frac{(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, qui eſt le raïon oſculateur.

Si l'on prend la formule $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ du raïon oſculateur, & qu'on y faſſe les ſubſtitutions, on trouvera tout de même $QB = \frac{(4yy + aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa} = \frac{(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$.

Si l'on paſſoit aux ſecondes différences de l'équation $yy = ax$, sans faire aucune des fluxions constante, puisque $adx = 2ydy$, on auroit $ddy = \frac{addx - 2dy^2}{2y}$. Il faudroit prendre alors la formule du raïon osculateur $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$ qui convient à ce cas; en y substituant la valeur de ddy, on trouveroit $QB = \frac{2y \cdot (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{2ydyddx - adxddx + 2dxdy^2}$, & enfin $QB = \frac{(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, en y mettant les valeurs de y & de dy.

On trouveroit la même chose dans les suppositions de dy, ou de ds constantes; pour abréger, je n'en mettrai point ici les calculs.

Si l'on veut avoir le raïon osculateur pour un point déterminé de la courbe, il suffira de substituer dans l'expression finie qu'on a déja trouvée de ce raïon, la valeur de x qui convient à ce point. Si l'on demande, par exemple, le raïon osculateur du point A, ou, ce qui revient au même, si l'on demande le point N auquel l'axe AN de la parabole touche la développée NQ; puisqu'au sommet A on a $x = 0$, on effacera le terme $4ax$ de l'expression $\frac{(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$ du raïon osculateur, & on aura $AN = \frac{a}{2}$; ce qui doit être en effet, car en ce cas le raïon AN est la même chose que la sou-normale qui, comme on sait, est toujours la moitié du paramètre dans la parabole.

134. IL ne sera pas difficile maintenant de trouver l'équation algébrique de la développée NQ, ou la relation de ses coordonnées NK, KQ.

Faisons $NK = u$, $KQ = t$. Puisque $KQ = PE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, on aura $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; mais $AK = AP + PK = 3x + \frac{1}{2}a$, & $AN = \frac{1}{2}a$; donc $NK = 3x = u$, & $x = \frac{u}{3}$. Mettant par conséquent cette valeur de x dans l'équation $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, on aura $t = \frac{4u\sqrt{\left[\frac{au}{3}\right]}}{3a}$, & élevant tout au quarré, $27att = 16u^3$, équation à la seconde parabole cubique qui auroit pour paramètre $\frac{27a}{16}$, & qui est la développée de la parabole ordinaire.

Il est clair que la seconde parabole cubique entière sera la développée de toute la parabole, c'est-à-dire, que la branche NQ (Fig. 88) sera la développée de la partie supérieure AB, & la branche Nq le sera de la partie inférieure Ab; & que les deux branches Nq, NQ se regardent par leur côté convexe, & ont un rebroussement en N.

Fig. 11.

135. ON remarquera que si les courbes proposées sont algébriques, leurs développées le seront aussi, & qu'on pourra toujours avoir en termes finis l'équation qui exprimera le rapport de leurs coordonnées; que de plus, ces développées seront rectifiables, c'est-à-dire, qu'on pourra toujours assigner une ligne droite égale à une quelconque de leurs parties, par exemple à NQ. Car si la courbe proposée

pofée

posée est algébrique, on aura toujours les raïons osculateurs BQ, AN exprimés en termes finis, & de BQ soustrayant AN, le reste sera l'arc NQ.

EXEMPLE II.

136. SOIT la courbe MBM (Fig. 89) l'hyperbole entre ses asymptotes, de l'équation $aa = xy$. La première différentiation donne $xdy + ydx = 0$; & la seconde, en faisant dx constante, $ddy = -\frac{2dxdy}{x}$; mettant les valeurs de dy & de ddy dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ du co-raïon, on aura $BE = \frac{xx+yy}{-2y}$, quantité négative. Si donc AP étant $= x$, & $PB = y$, on prend sur AB prolongée, $BN = \frac{1}{2} BA = \frac{\sqrt{[xx+yy]}}{2}$, & qu'on éleve la perpendiculaire NE qui rencontrera en E l'ordonnée BP prolongée, BE sera le co-raïon cherché; car puisque les triangles BPA, BNE sont semblables, on a $BP : BA :: BN : BE$, c'est-à-dire, $y : \sqrt{[xx+yy]} :: \frac{\sqrt{[xx+yy]}}{2} : BE = \frac{xx+yy}{2y}$, ou bien, parce qu'on prendra cette ligne du côté négatif, $BE = \frac{xx+yy}{-2y}$. Si l'on mene ensuite EQ parallèle à AP, & qu'on prolonge jusqu'en Q la perpendiculaire FB au point B de la courbe, le point Q appartiendra à la développée, & BQ sera le raïon osculateur. Fig. 89.

Si l'on fait maintenant $x = AH = a$, & par conséquent $y = HD = a$, le co-raïon $\frac{xx+yy}{-2a}$ devient dra $= -a$, & le raïon $= -\sqrt{[2aa]}$; c'eſt le co-raïon & le raïon oſculateur du ſommet D de l'hyperbole.

Pour peu qu'on réfléchiſſe à la figure de la courbe MBM, on verra que la développée a deux branches avec un rebrouſſement au point L, où le raïon oſculateur DL eſt le moindre de tous; par conſéque ſi l'on différentie la formule $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ du raïon oſculateur, la différence ſera égale à zero ou à l'infini; c'eſt-à-dire que dx étant ſuppoſée conſtante, on aura.........................

$$\frac{-3dxdyddy^2\sqrt{[dx^2+dy^2]}+dxdddy\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}=0,$$

ou $=\infty$, qui ſe réduit à $dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2=0$, ou $=\infty$. Mais l'équation de la courbe donne $dy=\frac{-aadx}{xx}$, $ddy=\frac{2aadx^2}{x^3}$, $dddy=\frac{-6aadx^3}{x^4}$; faiſant donc les ſubſtitutions, on trouvera $x=a=AH$, ce qui indique que le rebrouſſement eſt dans le raïon oſculateur du ſommet D de la courbe; mais on a vû qu'en ce point le raïon eſt $=-\sqrt{[2aa]}$; on aura donc $DL=-\sqrt{[2aa]}=DA$.

Si l'on ſubſtituoit dans la formule des raïons oſculateurs la valeur dy & de ddy, on auroit $BQ=\frac{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}{-2xy}=\frac{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}{-2aa}$; & en différentiant, afin d'avoir le plus petit raïon ou le rebrouſſement qui eſt en L, on trouveroit $(3xdx+3ydy)$

$\sqrt{[xx+yy]}=0$, ou en mettant pour dy sa valeur, $(3xxdx-3yydx)\sqrt{[xx+yy]}=0$, c'est-à-dire, $x=y=a$. Enfin cette valeur mise dans l'expression du raïon osculateur, le rendroit $=-\sqrt{[2aa]}=DL$, comme on l'a déja trouvé.

On peut encore construire le raïon BQ de cette manière. Puisque $ddy=-\frac{2dxdy}{x}$; en substituant au lieu de x & de dx leurs valeurs données en y, on a $ddy=\frac{2dy^2}{y}$, & par conséquent le co-raïon $BE=\frac{ydx^2+ydy^2}{-2dy^2}$; & à cause des triangles semblables BPF, BEQ, on a $EQ=-\frac{ydy}{2dx}-\frac{ydx}{2dy}$. Que l'on mène maintenant BT tangente au point B; du point T qu'on abaisse TS perpendiculaire à BT, ou parallèle à BQ; & que l'on prenne $BE=\frac{1}{2}BS$ ou $PK=\frac{1}{2}FT$: si l'on tire EQ parallèle à AT ou KQ perpendiculaire, ces lignes rencontreront la normale BQ au point Q de la développée. En effet, on a $BS=\frac{ydx^2+ydy^2}{dy^2}$, & par conséquent $BE=\frac{ydx^2+ydy^2}{2dy^2}$; on a de plus $FP+PT=FT=-\frac{ydy}{dx}-\frac{ydx}{dy}$; donc $EQ=-\frac{ydy}{2dx}-\frac{ydx}{2dy}$.

S'il s'agit de l'équation $y^m=x$, qui lorsque m est positif, exprime toutes les paraboles à l'infini, & par conséquent celle du premier exemple, & qui lorsque m est négatif, exprime à l'infini toutes les hyperboles entre les asymptotes, & par conséquent aussi celle de l'exemple présent ; on aura en différentiant $my^{m-1}dy = dx$, & en différentiant encore, dans la supposition de dx constante, $(mm-m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$, & en divisant tout par my^{m-1}, $-ddy = (m-1) \cdot \frac{dy^2}{y}$. Si l'on prend donc la formule $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ du co-raïon, & qu'on y substitue la valeur de ddy, on aura $BE = \frac{ydx^2+ydy^2}{(m-1)dy^2}$, & par conséquent EQ ou $PK = \frac{ydx}{(m-1)dy} + \frac{ydy}{(m-1)dx}$.

Fig. 87 & 89. Du point T (Fig. 87 & 89) où la tangente BT rencontre l'axe AP, on tirera pareillement TS parallèle à la normale BQ de la courbe, qui rencontrera en S l'ordonnée PB prolongée ; ensuite on prendra $BE = \frac{BS}{m-1}$ du côté négatif, si m est un nombre négatif, comme dans les hyperboles (Fig. 89) qui sont convexes vers l'axe AP, c'est-à-dire, vers l'asymptote ; on prendra encore BE négatif, si m est un nombre positif moindre que l'unité, comme dans les paraboles qui tournent leur convexité vers l'axe AP ; mais on le prendra du côté positif, si m est un nombre positif plus grand que l'unité, cas auquel les paraboles (Fig. 87) sont concaves vers leur axe.

Pour déterminer le point dans lequel l'axe de la parabole touche la développée, on prendra la formule des raïons osculateurs $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$; on y substituera les valeurs de $dx = my^{m-1}dy$, & de

$-ddy = \frac{(m-1)dy^2}{y}$, & on aura $BQ = \ldots\ldots$

$\frac{(mmy^{2m-2}+1)^{\frac{3}{2}}}{m.(m-1)y^{m-2}}$, où il faut entendre que l'unité supplée les homogènes. Alors si on suppose $m > 1$, c'est-à-dire les paraboles concaves vers l'axe AP, lorsque m sera plus petit que 2, y^{m-2} qui est dans le dénominateur deviendra un facteur du numérateur; & en faisant $y = 0$, comme l'exige le cas dont il s'agit, on aura $BQ = 0$, c'est-à-dire que l'axe touchera la développée au sommet A de la parabole; comme cela arrive, par exemple à la seconde parabole cubique $axx = y^3$ (Fig. 70). Mais lorsque m sera plus grand que 2, y^{m-2} du dénominateur sera une puissance positive, & par conséquent en faisant $y = 0$, on aura BQ infinie, c'est-à-dire que l'axe de la parabole est une asymptote de la développée; comme cela arrive dans la première cubique AB (Fig. 90) dont l'axe AP est l'asymptote de la développée LQ. Fig. 70. Fig. 90.

La développée CLQ de la demi-parabole cubique ABM, dont l'équation est $aax = y^3$, a un point de rebroussement L, & par conséquent deux branches LQ, LC; le développement de la branche LQ engendre la partie BA, celui de la branche LC engendre la partie infinie BM.

Pour déterminer le rebroussement L, je prends la valeur du raïon osculateur, qui dans cette courbe est $\frac{(9y^4+a^4)^{\frac{3}{2}}}{6a^4y}$, & qui doit être un *minimum*; différentiant donc, j'ai $\ldots\ldots$

$\frac{3 \times 18a^4y^3dy.(9y^4+a^4)^{\frac{1}{2}} - a^4dy.(9y^4+a^4)^{\frac{3}{2}}}{6a^8yy} = 0$, qui se réduit à $45y^4 - a^4 = 0$; d'où je tire $y = \sqrt[4]{\left[\frac{a^4}{45}\right]}$; & mettant cette valeur au lieu de y dans l'équation $aax = y^3$, j'ai $x = \sqrt[4]{\left[\frac{a}{91125}\right]}$. Je prendrai donc $AP = \sqrt[4]{\left[\frac{a^4}{91125}\right]}$, & menant l'ordonnée PB, le rebrouſſement L ſera dans la normale du point B de la courbe; & pour avoir la valeur de BL, il n'y aura qu'à mettre $\sqrt[4]{\left[\frac{a^4}{45}\right]}$, au lieu de y dans l'expreſſion du raïon oſculateur.

Autre manière. On différentiera l'équation $aax = y^3$, ou $y = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$; on aura $dy = \frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}dx$, $ddy = -\frac{2}{9}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{5}{3}}dx^2$, $dddy = \frac{10}{27}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{8}{3}}dx^3$; & ſubſtituant ces valeurs dans la formule $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$, on aura encore $AP = \sqrt[4]{\left[\frac{a^4}{91125}\right]}$.

EXEMPLE III.

Fig. 91. 137. SOIT la courbe ABD (Fig. 91) une ellipſe ou une hyperbole, dont l'axe ſoit $AH = a$, le paramètre $AF = b$, les coordonnées $AP = x$, $PB = y$, & l'équation $y = \sqrt{\left[\frac{abx \mp bxx}{a}\right]}$.

La différentiation donne $dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{[aabx \mp abxx]}}$, & prenant dx pour conſtante, $ddy = \ldots\ldots$ $\frac{-a^2bbdx^2}{4(aabx \mp abxx)^{\frac{3}{2}}}$. En ſubſtituant ces valeurs dans la formule du raïon oſculateur $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, on a

$BGQ = \frac{(4aabx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4bbxx)^{\frac{3}{2}}}{2a^{2}bb}$.

Mais on trouvera la normale $BG = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{(4aabx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4bbxx)^{\frac{1}{2}}}{2a}$; donc le raïon $BGQ = \frac{4\overline{BG}^{3}}{bb}$, qui, comme on ſait, ſe conſtruit en prenant des troiſième & quatrième proportionnelles. Si dans l'expreſſion du raïon oſculateur, on fait $x = 0$, on aura $BGQ = AM = \frac{b}{2}$; & en faiſant $x = AO = \frac{1}{2}a$, on aura dans l'ellipſe, $BGQ = DOQ = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, c'eſt-à-dire, BGQ égal à la moitié du paramètre de l'axe conjugué; il y aura un rebrouſſement en Q; la développée de la partie $AD = DH$ ſera MQ, & celle de la partie DH ſera RQ. Mais dans l'hyperbole, le raïon ſera infini.

Si dans l'ellipſe on fait $a = b$, le raïon oſculateur BGQ ſera $= \frac{a}{2}$, quel que ſoit le point B; donc les raïons oſculateurs feront tous égaux, & la développée ne ſera qu'un point; c'eſt-à-dire, que l'ellipſe, qui dans ce cas devient un cercle, a pour développée le centre même du cercle.

EXEMPLE IV.

138. SUPPOSONS que la courbe ABD (Fig. 92) ſoit la logarithmique ordinaire dont l'équation eſt Fig. 92.

$\frac{ady}{y} = dx$.

La différentiation, dx étant constante, donne $ddy = \frac{dxdy}{a} = \frac{ydx^2}{aa}$. En faisant les substitutions dans la formule du co-raïon $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, on aura $BE = \frac{-aa-yy}{y}$; & comme dans la logarithmique, la sou-normale $PH = \frac{yy}{a}$, on aura $EQ = -a - \frac{yy}{a}$. Si l'on prend donc $PK = TH$, & qu'on éleve la perpendiculaire KQ, elle rencontrera la normale HBQ au point cherché Q qui appartient à la développée.

Si l'on demande le point où la logarithmique est le plus courbe, c'est-à-dire, où le raïon osculateur est le moindre, en faisant les substitutions dans la formule $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ du raïon osculateur, on aura $\frac{(aa+yy)^{\frac{3}{2}}}{-ay}$, dont la différence égalée à zero, donne $\frac{-3ayydy.(aa+yy)^{\frac{1}{2}} + ady.(aa+yy)^{\frac{3}{2}}}{aayy} = 0$, & par conséquent $PB = y = \sqrt{\left[\frac{aa}{2}\right]}$.

Ou bien encore, on prendra la formule du n°. 136, $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$; on y fera les substitutions de $dy = \frac{ydx}{a}$, $ddy = \frac{ydx^2}{aa}$, $dddy = \frac{ydx^3}{a^3}$, & on trouvera de même $PB = \sqrt{\left[\frac{aa}{2}\right]}$.

EXEMPLE V.

139. SOIT ABD (Fig. 93) la ſpirale logarithmique, dont la propriété eſt que ſi l'on mène à un de ſes points quelconque B la tangente BT, & du pole A l'ordonnée AB, l'angle ABT ſera toujours le même. Menant donc AM infiniment voiſine de AB, le rapport de MR à RB ſera conſtant; ainſi, en ſuppoſant $AB = y$, & l'arc $BR = dx$, l'équation de la courbe ſera $adx = bdy$; & ſi l'on différentie en prenant dx pour conſtante, on aura $ddy = 0$. Prenant donc la formule du co-raïon (n°. 129).... Fig. 93.

$\frac{ydx^3 + ydxdy^2}{dx^2 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$, qui dans l'hypothèſe de dx conſtante, devient $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$; effaçant le terme $-yddy$, parce que la courbe donne $ddy = 0$, & ſubſtituant la valeur de dx ou celle de dy, on trouvera le co-raïon $BA = y$.

On mènera donc AC perpendiculaire à AB, & elle rencontrera la perpendiculaire BC au point cherché C de la développée; & puiſque la ſou-normale $AC = \frac{ay}{b}$, on aura $BC = \frac{y\sqrt{[aa+bb]}}{b}$.

Ayant mené BT tangente de la courbe au point B, les triangles TCB, CBA feront ſemblables, & les angles TBA, ACB égaux; mais l'angle TBA eſt conſtant, l'angle ACB le ſera donc auſſi; par où l'on voit que la développée AC ſera une ſpirale logarithmique toute pareille à ABD, mais dans une ſituation renverſée.

EXEMPLE VI.

140. SOIT la courbe ABD (Fig. 93) la ſpirale

hyperbolique, dont la sou-tangente est toujours constante.

Opérant de même que dans l'exemple précédent, on trouvera son équation $\frac{ydx}{dy} = a$, ou $ydx = ady$, & par conséquent $ddy = \frac{dxdy}{a}$. Substituant donc les valeurs de dy & de ddy données par l'équation, dans la formule $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ du coraïon, on aura $BA = \frac{y(aa+yy)}{aa}$. Or la sou-tangente $AT = a$, la sou-normale $AC = \frac{yy}{a}$; ainsi $TC = \frac{aa+yy}{a}$; on aura donc le co-raïon en prenant une quatrième proportionnelle à la sou-tangente TA, à TC, & à l'ordonnée AB. Si l'on mène donc du point C la ligne CQ parallèle à la tangente BT, & qui coupera en Q l'ordonnée BA prolongée, BQ sera le co-raïon cherché.

Car puisque les triangles BAT, CAQ sont semblables, on a $CA : AQ :: TA : AB$, ou *alternando*, $CA : TA :: AQ : AB$; & faisant successivement sur cette dernière proportion les changements *componendo* & *invertendo*, on aura $TA : TC :: BA : BQ$.

EXEMPLE VII.

141. SUPPOSONS que dans le secteur de cercle ADN (Fig. 94) on mène un raïon quelconque ABP, & qu'on le coupe en B, de manière que $ND : NP :: \overline{AP}^{m} : \overline{AB}^{m}$; le point B appartiendra à une courbe ABD, qui est une des spirales à l'infini, dont l'équa-

Fig. 54.

tion (en faiſant $NPD = b$, $NP = z$, le raïon $AP = a$, $AB = y$) eſt $y^m = \frac{a^m z}{b}$, & en différentiant, $my^{m-1}dy = \frac{a^m dz}{b}$. Que l'on mène le raïon Ap infiniment voiſin de AP, & que l'on ſuppoſe $BR = dx$. A cauſe des ſecteurs ſemblables APp, ABR, on aura $dz = \frac{adx}{y}$; ſubſtituant donc cette valeur de dz dans l'équation différentielle, elle deviendra $my^m dy = \frac{a^{m+1}dx}{b}$; alors en différentiant de nouveau dans la ſuppoſition de dx conſtante, on aura $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0$, c'eſt-à-dire, $yddy = -mdy^2$. Enfin ſi l'on ſubſtitue cette valeur, & celle de dx dans la formule du co-raïon, on trouvera $BE = \frac{y.(mmbby^{2m} + a^{2m+2})}{mmbby^{2m} + (1+m)a^{2m+2}}$.

Que l'on mène TAC perpendiculaire à AB, & que l'on tire BT tangente de la courbe en B, & BC normale; on aura $AT = \frac{mby^{m+1}}{a^{m+1}}$, $AC = \frac{a^{m+1}}{mby^{m-1}}$, & par conſéquent $TC = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mba^{m+1}y^{m-1}}$; ainſi la quatrième proportionnelle de $TA + (m+1)AC$, de TC & de AB ſera $\frac{y.(mmbby^{2m} + a^{2m+2})}{mmbby^{2m} + (1+m)a^{2m+2}} = BE$. Si l'on mène donc EQ parallélement à TC, elle rencontrera la normale BC en quelque point C qui appartiendra à la développée.

EXEMPLE VIII.

Fig. 95. 142. SOIT ABD (Fig. 95) la moitié de la cycloïde ordinaire, dont l'équation est $dy=dx\sqrt{\left[\frac{2a-x}{x}\right]}$, AC étant $=2a$, $AP=x$, $PB=y$.

La différentiation, en prenant dx pour constante, donne $ddy=\frac{-adx^2}{x\sqrt{[2ax-xx]}}$. En mettant ces valeurs de dy & de ddy dans la formule $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ du raïon osculateur, on trouvera $BQ=2\sqrt{[4aa-2ax]}$; mais la normale $BG=\sqrt{[4aa-2ax]}=$ la corde EC; donc le raïon osculateur $BQ=2BG=2EC$.

Si l'on fait $x=0$ pour avoir le raïon osculateur au point A, on aura $BQ=AN=4a$; & par conséquent $CN=CA=2a$.

Si l'on fait $x=2a$, on trouvera qu'au point D le raïon osculateur est zero; par conséquent la développée commence en D, & se termine en N.

Puisque la tangente de la cycloïde au point B est parallèle à la corde EA (n°. 55), la normale BQ sera parallèle à la corde EC. Cela posé, qu'on achève le parallélogramme $DCNS$; que sur le diamètre $DS=CN=AC$, on décrive le demi-cercle DIS, & qu'on mène la corde DI parallèle à BQ, ou à EC. Les angles CDI, DCE seront égaux, & par conséquent il y aura aussi égalité entre les arcs DI, CE, & les cordes de ces arcs. Donc les lignes DI, GQ sont égales & parallèles; & si l'on mène la droite IQ, elle sera égale & parallèle à DG; mais par la propriété de la cycloïde, la droite DG est égale à l'arc EC, & par conſéquent à l'arc DI; donc l'arc $DI = IQ$, & la demi-circonférence $DIS = SN$; par où l'on voit que la développée DQN eſt une cycloïde toute pareille à la cycloïde DBA, mais dans une ſituation renverſée.

143. AYANT donné une connoiſſance ſuffiſante des raïons oſculateurs, & de la manière de les trouver, il ne ſera pas difficile de parvenir à la formule des rebrouſſements de la ſeconde eſpece, que j'ai promiſe ci-deſſus, n°. 110.

Suppoſons que la courbe BAC (Fig. 96) qui a un point d'inflexion en A, ſoit développée, & qu'on commence ſon développement à un point quelconque D, différent du point d'inflexion A. Le développement de la partie DC engendrera la courbe DG, celui de la partie DA la courbe DE, & celui de la partie AB la courbe EF, de manière que la courbe entière BAC aura pour développante la courbe totale $FEDG$, laquelle a deux rebrouſſements, l'un en D de la forme ordinaire, puiſque les deux branches DE, DG ſe regardent par leurs convexités, & l'autre en E de la ſeconde eſpece, puiſque les deux branches ED, EF tournent leurs concavités vers le même côté. Soient NM, Nnm deux raïons quelconques infiniment voiſins de la développée DA; & NH, nH les deux normales correſpondantes. Les deux ſecteurs infinitéſimaux NmM, HNn ſont ſemblables, & donnent $HN : NM :: Nn : Mm$; mais au point d'inflexion A (n°. 132) le raïon HN eſt ou infini ou zero, & le raïon NM qui devient AE reſte fini; donc à l'endroit du point d'inflexion A, c'eſt-à-dire, au point E de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, le rapport de Nn à Mm, ou (ce qui eſt la même choſe) Fig. 96.

le rapport de la différentielle du raïon MN à l'élément de la courbe, doit être ou infiment grand ou infiniment petit. Mais la formule du raïon MN, en prenant dx pour constante, est $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, dont la différentielle est. . . . .

$$\frac{-3dxdyddy^2\sqrt{[dx^2+dy^2]}+dxdddy(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2},$$

& $Mm=\sqrt{[dx^2+dy^2]}$; donc $\frac{Nn}{Mm}=\ldots$ $\frac{dx^2dddy+dy^2ddy-3dyddy^2}{dxddy^2}$, fraction qu'on égalera à zero ou à l'infini, & qui est la formule pour les rebroussements de la seconde espece.

Cette formule est la même que celle qu'on a déja trouvée, n°. 136; mais ci-dessus elle est employée à trouver les rebroussements de la première espece dans les développées, & ici à trouver ceux de la seconde espece dans les développantes, x & y étant les coordonnées des développantes dans l'un & dans l'autre cas.

Fin du Calcul différentiel.

SECOND TRAITÉ.

Du CALCUL *INTÉGRAL.*

LE Calcul intégral est la méthode de remonter d'une quantité différentielle à la quantité dont elle est la différence ; ainsi les opérations du Calcul intégral sont le contraire de celles du Calcul différentiel ; c'est pourquoi on l'a encore appellé *méthode inverse* des fluxions ou des différences. Par exemple, la différentielle de x est dx ; par conséquent l'intégrale de dx sera x. Ce sera donc un signe certain qu'une intégrale est exacte, si en la différentiant on retrouve la quantité qu'on s'étoit proposé d'intégrer. Le Calcul intégral a plusieurs branches que nous traiterons successivement.

PREMIÈRE PARTIE.

De l'intégration des formules différentielles à une seule variable.

ON cherche les intégrales des formules différentielles de deux manières ; dans l'une on les exprime algébriquement & en termes finis, ou on les réduit à la quadrature des courbes supposée connue ; dans l'autre on fait usage des séries, qui véritablement ne donnent les intégrales que par approximation. Je donnerai dans le premier Chapitre les regles qui menent aux intégrales de la première espece; le second sera sur l'intégration par les séries; je ferai voir dans le troisième l'usage de ces regles pour la rectification des courbes, la quadrature des espaces qu'elles renferment, &c; enfin aux Chapitres précédents, j'en joindrai un quatrième qui traitera du Calcul exponentiel.

CHAPITRE PREMIER.

Regles des Intégrations exprimées par des formules algébriques finies, ou réduites aux quadratures supposées connues des courbes.

1. PUISQUE la différentielle d'une quantité incomplexe élevée à une puissance quelconque, est le produit de l'exposant de la variable même élevée à la même puissance diminuée d'une unité, & multipliée par sa différence; il s'ensuit que l'intégrale du produit d'une variable élevée à une puissance quelconque par la différence de cette variable, est la variable même élevée à une puissance dont l'exposant soit plus grand d'une unité, & divisée par ce même exposant ainsi augmenté; ce qui a toujours lieu, soit que l'exposant de la variable soit positif ou négatif, entier ou rompu. Par exemple, l'intégrale de

$mx^{m-1}dx$

$mx^{m-1}dx$ eſt $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1}$, c'eſt-à-dire x^m. L'intégrale de $x^{\pm\frac{m}{n}}dx$, eſt $\frac{x^{\pm\frac{m}{n}+1}}{\pm\frac{m}{n}+1}$, c'eſt-à-dire, $\frac{nx^{\frac{\pm m+n}{n}}}{\pm m+n}$.

2. Les quantités conſtantes incomplexes ou complexes, qui multiplient ou diviſent la formule différentielle ne portent aucune atteinte à cette regle; elles paſſent dans l'intégrale telles qu'elles étoient dans la formule différentielle; ainſi l'intégrale de $\frac{aax^n dx}{mb-cc}$ eſt $\frac{aax^{n+1}}{(n+1).(mb-cc)}$.

3. Si la formule différentielle étoit une fraction, dont le dénominateur fût auſſi une puiſſance quelconque de la variable multipliée encore, ſi l'on veut, par une conſtante quelconque, telle qu'eſt la formule $\frac{x^m dx}{aax^n-bbx^n}$ ou $\frac{x^m dx}{(aa-bb).x^n}$, qui eſt encore la même que celle-ci $\frac{x^{m-n}dx}{aa-bb}$, elle ſeroit ſujette à la même regle.

4. Mais je dois avertir ici, qu'afin que les intégrales ſoient complettes, il faut leur ajouter ou en retrancher une quantité conſtante arbitraire, que l'on détermine enſuite dans les cas particuliers, comme je l'enſeignerai en ſon lieu.

Ainſi l'intégrale complette, par exemple, de dx eſt $x\pm a$ (entendant par a une quantité conſtante quelconque); celle de $xxdx$ eſt $\frac{x^3}{3}\pm a^3$, & ainſi des autres. La raison en est que les quantités constantes n'ayant pas de différentielles, dx peut aussi bien être la différentielle de x, que de $x+a$, que de $x-b$, &c; & par conséquent x, tout comme $x+a$, tout comme $x-b$, &c, peuvent être les intégrales de dx. Il faut en dire autant d'une formule quelconque.

5. LA même regle d'intégration sert pour les formules différentielles complexes, c'est-à-dire, composées de plusieurs termes, pourvu que le dénominateur, si elles en ont un, soit tout constant, ou que s'il contient la variable, il soit incomplexe, c'est-à-dire d'un seul terme, ou réductible à un seul terme. Car alors la formule différentielle complexe se résout en autant de formules incomplexes qu'elle a de termes; & chacune de ces formules partielles est sujette à la regle.

Qu'il s'agisse, par exemple, de la formule.... $\frac{bx^m dx + aax^{n-1}dx}{aa-bb}$; puisqu'elle équivaut à ces deux-ci, $\frac{bx^m dx}{aa-bb} + \frac{aax^{n-1}dx}{aa-bb}$, son intégrale sera l'intégrale de ces deux dernières, c'est-à-dire, $\frac{bx^{m+1}}{(m+1).(aa-bb)} + \frac{aax^n}{n.(aa-bb)} \pm f$.

De même, pour intégrer $\frac{bx^3 dx - a^4 dx}{axx - cxx}$, on prendra l'intégrale de $\frac{bx^3 dx}{(a-c)xx} - \frac{a^4 dx}{(a-c)xx}$, c'est-à-dire de $\frac{bxdx}{a-c} - \frac{a^4 x^{-2} dx}{a-c}$, qui est $\frac{bxx}{2(a-c)} - \frac{a^4 x^{-1}}{-1.(a-c)} \pm f = \frac{bxx}{2a-2c} + \frac{a^4}{(a-c).x} \pm f$.

Soit encore la formule $\frac{bx^m dx - aax^n dx}{xx}$, qui équivaut à ces deux termes $bx^{m-2}dx - aax^{n-2}dx$; son intégrale sera $\frac{bx^{m-1}}{m-1} - \frac{aax^{n-1}}{n-1} \pm f$.

6. SI la formule différentielle complexe qu'on veut intégrer est élevée à quelque puissance dont l'exposant soit positif & entier; en l'élevant réellement à la puissance indiquée par l'exposant, chaque terme s'intégrera par la même regle.

7. TOUT cela cependant n'a lieu que lorsque la formule différentielle ne contient aucun terme dans lequel l'exposant de la variable soit l'unité négative, tel que $\frac{adx}{x}$, ou $ax^{-1}dx$; car suivant la regle, l'intégrale seroit $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$ ou $\frac{ax^0}{0}$; ce qui semble désigner une quantité infinie, & n'apprend rien.

8. DANS ces cas, il faudra recourir à d'autres méthodes. Il y en a deux dont on fait usage; la premiere consiste à se servir de la courbe *logarithmique* ou *logistique*; & la seconde des suites infinies, dont on peut aussi faire usage dans plusieurs autres cas, & dont j'ai promis de parler dans le second Chapitre.

9. LA logarithmique est une courbe dont la propriété est que si l'on prend sur son axe des abscisses en proportion arithmétique, les ordonnées correspondantes sont en proportion géométrique. Ainsi, pour la construire, on prendra sur l'axe AD (Fig. 1) Fig. 1.

des parties égales AB, BC, CD, &c; on élevera aux points A, B, C, D, les perpendiculaires AE, BF, CG, DH, &c, telles qu'elles soient en progression géométrique; & les points E, F, G, H, &c, appartiendront à la courbe. On divisera encore en parties égales les parties AB, BC, CD, &c; aux points de division on élevera des perpendiculaires qui soient dans la même progression géométrique, & on aura d'autres points intermédiaires. En continuant ces divisions à l'infini, on aura une infinité de points qui formeront la courbe.

L'axe étant donc divisé en parties infiniment petites & égales, supposons que $CM = dx$ soit une de ces parties, que $CG = y$ est une ordonnée, & que MO est une ordonnée infiniment voisine; NO sera $= dy$. Soit une autre ordonnée $DH = z$, & tant d'autres ordonnées qu'on voudra, correspondantes à des abscisses arithmétiquement proportionnelles. Ces ordonnées auront donc entr'elles le même rapport, & par conséquent ce rapport regnera aussi entre leurs différentielles; on aura donc $dy : dz :: y : z$, ou $dy : y :: dz : z$; par où l'on voit que la raison de dy à y est constante. Par conséquent, en prenant dx pour constante, on aura $dy : y :: dx : a$, c'est-à-dire, $\frac{a\,dy}{y} = dx$, qui est l'équation de la courbe.

Il est bien facile de voir que dans cette courbe la sou-tangente est constante; car substituant au lieu de y dans la formule générale des sou-tangentes $\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$, la valeur que donne l'équation de la courbe, on aura $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{a\,dy\,dx}{dx\,dy} = a$.

Puisque la progression géométrique des ordonnées croiſſantes peut s'étendre à l'infini, les abſciſſes croiſſant auſſi continuellement, la courbe s'étendra auſſi à l'infini, en s'éloignant toujours de l'axe. Et comme la même progreſſion décroiſſante peut auſſi ſe continuer à l'infini, les abſciſſes croiſſant toujours tandis que les termes de la progreſſion géométrique décroîtront, la courbe s'étendra auſſi vers l'autre côté à l'infini, en ſe rapprochant continuellement de ſon axe, ſans pouvoir jamais l'atteindre; de manière que l'axe eſt aſymptote de la courbe.

10. ENTRE pluſieurs autres manières de décrire la logarithmique, j'indiquerai encore celle-ci.

Soit la droite indéfinie MH (Fig. 2) diviſée en parties égales MN, NB, BK, &c. Ayant pris NI à volonté, que l'on éleve au point I la perpendiculaire IO de la grandeur qu'on voudra; que l'on mène NO, & que ſur le point A on éleve la perpendiculaire AC qui rencontrera NO prolongée, en quelque point C; que du point B on mène BC, & que ſur le point E on éleve la perpendiculaire ED qui rencontrera BC en D; que du point K on tire KD, & qu'au point F, on éleve la perpendiculaire FP qui rencontrera KD au point P; qu'on continue ainſi à l'infini: les points O, C, D, P, &c, feront à la logarithmique. Pour avoir les points intermédiaires aux points O, C, D, P, &c, on prendra le milieu des parties MN, NB, & on répétera l'opération précédente; enfin, en prenant continuellement le milieu de ces parties ſou-doubles, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant les parties MN, NB, &c, infiniment petites & égales, on aura une infinité de points qui traceront la logarithmique, dont la ſou-tangente, comme on le voit par la conſtruction, ſera toujours conſtante. En faiſant donc $NI = a$, & ſuppoſant Fig. 2.

la partie constante & infiniment petite de l'axe, telle que $GH=dx$; soient l'ordonnée $GR=y$, & $IS=dy$: on aura, à cause des triangles STR, KGA semblables, $dy:dx::y:a$, c'est-à-dire, $\frac{ady}{y}=dx$, équation de la courbe.

On déduit de cette construction de la logarithmique, ce que la première supposoit, & qui est la propriété fondamentale de cette courbe, savoir, que les ordonnées qui correspondent à des abscisses en proportion arithmétique sont en proportion géométrique. Car les parties égales de l'axe étant supposées infiniment petites, les petits arcs OC, CD, PD, &c, sont le prolongement des tangentes NO, BC, KD, &c; ainsi les triangles OIN, CAN sont semblables, & donnent $OI:CA::NI:NA$; pareillement les triangles semblables CAB, DEB donnent $CA:DE::BA:BE$; mais $NI=BA$, $NA=BE$; on aura donc $OI:CA::CA:DE$, & ainsi de suite; par où l'on voit que les ordonnées sont en progression géométrique. Maintenant si l'on considere l'axe divisé, je ne dis plus en parties infiniment petites, mais en parties finies & égales; puisque les ordonnées intermédiaires qui sont, par exemple, entre IO & CA, ne sont ni en plus grand, ni en plus petit nombre que les intermédiaires entre CA & DE, entre DE & PF, &c, les ordonnées IO, CA, DE correspondantes à des abscisses en progression arithmétique, seront aussi en progression géométrique. De plus, si l'on prend deux ordonnées à volonté, & deux autres où l'on voudra, pourvu que la distance entre les deux dernières soit égale à la distance qui est entre les deux premières, comme sont, par exemple IO, CA, RG, SH; la première sera à la seconde, comme la troisième à la quatrième.

Les moyens qu'on a pour décrire la logarithmique sont méchaniques, & on ne peut pas la décrire géométriquement; ainsi c'est une courbe méchanique. On verra ci-après que cette impossibilité de la décrire géométriquement, est la même chose que l'impossibilité de quarrer les espaces hyperboliques; c'est pour cela que les formules différentielles qu'on intégre par le moyen de la logarithmique, sont dites aussi dépendre de la quadrature de l'hyperbole.

Ainsi, dans la logarithmique, les parties de l'axe, ou les abscisses prises en partant d'un point fixe, correspondent à leurs ordonnées, précisément comme les logarithmes dans les Tables de Trigonométrie correspondent à la suite naturelle des nombres.

11. CELA posé, soit la logarithmique DC (Fig. 3) dont la sou-tangente est égale à l'unité, ou même égale à la constante a; & soit l'ordonnée AD égale à la sou tangente, c'est-à-dire, $= 1$, ou $= a$ que je prens pour l'unité. Soit l'abscisse $AB = x$, & $BC = y$; l'équation de la courbe est $\frac{ady}{y} = dx$; par conséquent l'intégrale de $\frac{ady}{y}$ sera x, la même que celle de dx. Mais $x = AB$, & AB est le logarithme de BC ou de y; ainsi, si l'on se sert du signe $\int$, qui veut dire *somme*, pour désigner les intégrales, & du signe L pour désigner les logarithmes, on aura $\int \frac{ady}{y} = \text{L}.y$, dans la logarithmique dont la sou tangente $= a$. On a de même $\int \frac{dy}{y} = \text{L}.y$, dans la logarithmique dont la sou-tangente $= 1$; $\int \frac{bdy}{y} = \text{L}.y$, dans celle dont la sou-tangente $= b$; Fig. 1.

& $\int \frac{a\,dy}{b+y} = L.(b+y)$ dans celle dont la soutangente $= a$, c'est-à-dire, qu'ayant pris l'ordonnée $BC = AH = y$, si on lui ajoute $HK = b$, que l'on mène KG parallèle à l'asymptote, & que l'on abaisse GE parallèlement à AD, on aura $GE = y + b$, & par conséquent $AE = L.(b+y)$.

12. On voit clairement par la nature de la logarithmique, que toutes les fois que la quantité dont on veut le logarithme est infinie, l'ordonnée de la logarithmique qui représente cette quantité sera infiniment grande, & que l'abscisse comprise entre cette ordonnée & le point A, sera aussi infinie, c'est à dire, que le logarithme est infini; que si cette quantité est égale à la première ordonnée AD, c'est-à-dire, à la sou tangente, le logarithme est zero; que si elle est plus petite que AD, comme est uA, le logarithme est uA quantité négative; & qu'enfin si elle est zero, le logarithme est infini négatif. Si la formule différentielle étoit $-\frac{dy}{y}$, son intégrale seroit $-L.y$; de même, l'intégrale de $-\frac{dy}{a+y}$ est $-L.(a+y)$; celle de $-\frac{dy}{a-y}$ est $L.(a-y)$; Et celle de $\frac{dy}{a-y}$ est $-L.(a-y)$; j'entens que tous ces logarithmes soient pris dans la logarithmique dont la sou-tangente $= 1$. La raison de cela est que, de même que l'intégrale de $\frac{dy}{y}$ est $L.y$, de même la différence de $L.y$ est $\frac{dy}{y}$; & qu'en gé-

néral la différence d'une quantité logarithmique est une fraction qui a pour numérateur le produit de la sou tangente par la différence de la quantité, & pour dénominateur la quantité même; donc la différence de $-$ L. $(a+y)$ est $\frac{-dy}{a+y}$; la différence de L. $(a-y)$ est $\frac{-dy}{a-y}$; la différence de $-$ L. $(a-y)$ est $\frac{dy}{a-y}$, en supposant toujours que la sou-tangente de la logarithmique soit 1; si elle n'étoit pas 1, il faudroit multiplier par la sou-tangente les numérateurs des fractions différentielles.

13. MAIS la logarithmique n'ayant pas d'ordonnées négatives, on croiroit qu'on ne pourra pas trouver, par son moyen, la quantité qui correspond à l'expression L. $(a-y)$, ou le logarithme de $a-y$, lorsque $a-y$ sera une quantité négative, c'est-à-dire lorsque y sera plus grand que a. On remarquera pour ce cas que L. $(a-y)$ est la même chose que L. $(y-a)$, & que dans cette supposition $y-a$ étant positif, il peut être exprimé par une ordonnée de la logarithmique. En effet, en différentiant le premier logarithme, on a $\frac{-dy}{a-y}$; & en différentiant le second on a $\frac{dy}{y-a}$, ou en changeant les signes tant au numérateur qu'au dénominateur, $\frac{-dy}{a-y}$, comme pour le premier.

14. DE la propriété de la logarithmique on dé-

duit d'autres propriétés des quantités logarithmiques; & en premier lieu que le multiple ou le sou-multiple d'un logarithme, est le logarithme de la même quantité élevée à la puissance indiquée par le nombre qui exprime cette multiplicité; par exemple, $2 L. x = L. xx$; $3 L. x = L. x^3$; $\frac{1}{2} L. x = L. \sqrt{x}$; $\frac{1}{3} L. x = L. \sqrt[3]{x}$; $n L. x = L. x^n$; $\frac{1}{n} L. x = L. x^{\frac{1}{n}}$. La raison en est qu'en prenant dans la logarithmique, une ordonnée quelconque $OP = y$, dont le logarithme est AO (Fig. 3); si on fait AO, OS, SV, &c, égales; AO, AS, AV feront arithmétiquement proportionnelles, & les ordonnées AD, OP, ST, VI, géométriquement proportionnelles; ainsi supposant $AD = 1$, $OP = y$, on aura $ST = yy$, $VI = y^3$, &c; mais AS, double de AO, est le logarithme de yy, & AV, triple de AO, est le log. de y^3; donc $2 L. y = L. yy$, $3 L. y = L. y^3$, &c. Pareillement, supposant $AO = L. y$, l'ordonnée MN menée par son milieu M sera $\sqrt{y}$, & par conséquent $AM = \frac{1}{2} AO$, ou $\frac{1}{2} L. y$ sera $L. y^{\frac{1}{2}}$. De même, si l'on suppose $QR = r$, & qu'on divise AQ en trois parties égales AM, MO, OQ, on aura $MN = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$; mais $AM = \frac{1}{3} L. y$; donc $\frac{1}{3} L. y = L. y^{\frac{1}{3}}$; & ainsi des autres.

Je dois remarquer ici que l'intégrale de $\frac{-dy}{y}$ n'est pas seulement $- L. y$, comme on l'a vû au n°. 12; mais qu'on peut encore l'exprimer par $L. \frac{1}{y}$, ou par $L. y^{-1}$. Car si l'on prend dans la logarithmique une ordonnée quelconque $OP = y$, & que l'on fasse $A\omega = AO$; on aura par la nature de la courbe, OP:

$AD :: AD : \omega\lambda$, c'eſt-à dire, $y : 1 :: 1 : \omega\lambda = \frac{1}{y}$; mais $A\omega$ eſt le logarithme négatif de OP, c'eſt-à-dire, de y, & il eſt auſſi le log. de $\omega\lambda$; donc $-L.y = L.\frac{1}{y} = L.y^{-1}$; ce qui fait voir que le log. négatif d'une quantité quelconque, eſt le même que le log. poſitif de la fraction qui a l'unité pour numérateur, & cette même quantité pour dénominateur, ou de cette quantité même affectée de l'expoſant négatif; ainſi $-mL.y = L.\frac{1}{y^m} = L.y^{-m}$.

15. En ſecond lieu, la ſomme de deux, de trois, ou en général de pluſieurs logarithmes, eſt égale au logarithme du produit des quantités logarithmiques qui ſont ſous le ſigne L.; & la différence de deux ou de pluſieurs logarithmes, eſt égale au logarithme de la fraction qui a pour numérateur le produit de toutes les quantités dont les logarithmes ſont poſitifs, & pour dénominateur le produit de celles dont les logarithmes ſont négatifs. Car ſoit $OP = y$, $QR = z$, & par conſéquent $AO = L.y$, $AQ = L.z$. Que l'on prenne $QB = AO$, AB ſera $= L.y + L.z$; mais AB eſt auſſi le logarithme de BC, & par la propriété de la logarithmique, BC eſt quatrième proportionnelle à AD, OP, QR, c'eſt-à-dire, que $BC = yz$; donc $AB = L.y + L.z = L.zy$. Soit une autre ordonnée $MN = p$, & ſoit pris $BV = AM$; on aura $AV = AM + AB = L.p + L.yz$; mais AV eſt le logarithme de VI, & $VI = pyz$; donc $L.p + L.y + L.z = L.pyz$.

Soit encore $QR = z$, $OP = y$; & qu'on prenne $QM = AO$, on aura $AM = AQ - AO = L.z -$

$L. y$; mais AM eſt le log. de MN, & par la même propriété de la logarithmique, $MN = \frac{z}{y}$; donc $AM = L. z - L. y = L. \frac{z}{y}$. Soit une autre ordonnée $BC = p$; & qu'on prenne $\Sigma A = BM$, on aura $\Sigma A = - AB + AM = - L. p + L. \frac{z}{y}$; mais ΣA eſt le log. de $\Sigma\pi$, & $\Sigma\pi$ eſt $= \frac{z}{py}$ (puiſqu'il eſt quatrième proportionnelle à BC, MN, AD), donc $L. z - L. y - L. p = L. \frac{z}{py}$; &c.

16. IL faut, quand on intégre par logarithmes, comme dans tous les autres cas, ajouter une conſtante, c'eſt à-dire le log. d'une quantité conſtante arbitraire, que l'on détermine enſuite dans les cas particuliers.

17. LORSQUE les formules qu'on veut intégrer ſont des fractions dont le dénominateur eſt complexe, il y a des cas où l'on parvient facilement à l'intégrale par le moyen de la logarithmique; ce qui arrive toutes les fois que le numérateur de la fraction eſt préciſément la différence de ſon dénominateur, ou ſeulement un multiple, ou un ſou-multiple, ou même une partie proportionnelle de cette différence; dans ces cas, l'intégrale de la formule eſt le logarithme du dénominateur, ou ſon multiple, ou ſon ſou-multiple, ou enfin une partie proportionnelle de ce logarithme.

Par exemple, l'intégrale de $\frac{2xdx}{aa+xx}$ eſt $L.(aa+xx)$;

celle de $-\frac{2xdx}{aa-xx}$ eſt $L.(aa-xx)$; celle de $\frac{4xdx}{aa+xx}$ eſt $2\,L\,(aa+xx)$, ou $L.(aa+xx)^2$; l'intégrale de $\frac{xdx}{aa+xx}$ eſt $\frac{1}{2}\,L.\,(aa+xx) = L.(aa+xx)^{\frac{1}{2}}$; celle de $\frac{xxdx}{a^3+x}$ eſt $\frac{1}{3}\,L.(a^3+x^3) = L.\sqrt[3]{[a^3+x^3]}$; Et généralement celle de $\frac{mx^{n-1}dx}{a^n \pm x^n}$ eſt $\pm\frac{m}{n}\,L.\,(a^n \pm x^n) = \pm m L.(a^n + x^n)^{\frac{1}{n}} = \pm L.(a^n \pm x^n)^{\frac{m}{n}}$. De même, l'intégrale de $\frac{adx-2xdx}{ax-xx}$ eſt $L.(ax-xx)$; & celle de $\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{ax-xx}$ eſt $L.\sqrt{[ax-xx]}$, & ainſi des autres ; j'ai ſuppoſé que tous ces logarithmes étoient pris dans la logarithmique dont la ſou-tangente $=1$.

18. MAIS ſi le numérateur de la fraction n'a pas la forme que nous venons de conſidérer, pourvu cependant que le dénominateur ſoit tel qu'aucun de ſes facteurs linéaires ne ſoit imaginaire, c'eſt-à dire lorſque toutes les racines de ce dénominateur conſidéré comme un produit, ſont réelles ; il faudra alors procéder de la manière ſuivante.

19. LES racines de ce dénominateur ſeront ou toutes égales, ou ne le ſeront pas. Et premièrement ſi elles ſont égales comme dans la formule $\frac{x^m dx}{(x \pm a)^n}$; ſoit ſuppoſé $x \pm a = z$, & par conſéquent $dx = dz$, $x^m = (z \mp a)^m$, $(x \pm a)^n = z^n$,

& que l'on ſubſtitue ces valeurs dans la formule, elle deviendra $\frac{(z \mp a)^m dz}{z^n}$. Maintenant que l'on éleve réellement $z \mp a$ à la puiſſance m, & chaque terme ſera intégrable ou algébriquement ou par logarithmes. On remettra enſuite au lieu de z ſa valeur donnée en x, & on aura l'intégrale de la formule propoſée.

Prenons pour exemple $\frac{x^3 dx}{(x-a)^3}$. Je ſuppoſe $x-a=z$, & par conſéquent $dx=dz$, $x^3=z^3+3azz+3aaz+a^3$, $(x-a)^3=z^3$; & faiſant les ſubſtitutions, j'ai $\frac{z^3dz+3az^2dz+3aazdz+a^3dz}{z^3}$; & intégrant, $z+3\,\mathrm{L}.\,z-\frac{3aa}{z}-\frac{a^3}{2zz}$; je reſtitue, au lieu de z ſa valeur donnée en x, & j'aurai enfin $\int\frac{x^3 dx}{(x-a)^3}=x-a+\mathrm{L}.(x-a)^3-\frac{3aa}{x-a}-\frac{a^3}{2.(x-a)^2}$, intégrale qui différentiée, redonnera la formule qu'on s'étoit propoſé d'intégrer.

20. SECONDEMENT, ſi les racines du dénominateur ne ſont pas toutes égales, & qu'elles ſoient ou toutes inégales, ou partie égales & partie inégales; on commencera par préparer la formule, en rendant poſitif le terme du dénominateur où la variable eſt élevée à la plus haute puiſſance (s'il étoit négatif); on le délivrera auſſi de coéfficients, s'il en a; enſuite, ſi la variable étoit élevée à une plus haute puiſſance dans le numérateur que dans le dénomi-

nateur, ou à une puiſſance égale, il faudroit réellement diviſer le numérateur par le dénominateur juſqu'à ce que l'expoſant de la variable ſoit moindre dans le premier que dans le dernier; enfin on trouvera algébriquement les racines du dénominateur. Soit, par exemple, la formule $\frac{-a^2 dx}{aa - 4xx}$; en changeant les ſignes, & diviſant par 4, elle devient $\frac{\frac{1}{4} aadx}{xx - \frac{1}{4} aa} = \frac{\frac{1}{4} aadx}{(x - \frac{1}{2} a)(x + \frac{1}{2} a)}$. Soit encore... $\frac{aadx}{2xx + 4ax + 2bx + 4ab}$; en diviſant par 2, on aura $\frac{\frac{1}{2} aadx}{xx + 2ax + bx + 2ab} = \frac{\frac{1}{2} aadx}{(x + 2a)(x + b)}$. Si la variable s'étoit trouvée dans le numérateur, & qu'elle y eût été élevée à une plus grande puiſſance que dans le dénominateur, on auroit fait la diviſion, & le quotient auroit eu des entiers & des quantités fractionnaires; les entiers s'intégrent par les méthodes que nous avons expliquées juſqu'ici, & les quantités fractionnaires de la manière qui ſuit.

21. UNE fraction telle que $\frac{\frac{1}{2} aadx}{(x + 2a)(x + b)}$, eſt égale à deux fractions qui auroient toutes les deux le même numérateur que celle ci, & dont la première auroit pour dénominateur le produit d'une des racines, de la première, par exemple, par la différence de la quantité conſtante de la ſeconde racine à la quantité conſtante de la première; & dont la ſeconde fraction auroit pour dénominateur le produit de la ſeconde racine par la différence de la conſtante de la première racine à la conſtante de la

deuxième ; c'est-à-dire que $\frac{\frac{1}{2}aadx}{(x+2a)(x+b)} = \frac{\frac{1}{2}aadx}{(x+2a)(b-2a)} + \frac{\frac{1}{2}aadx}{(x+b)(2a-b)}$; & s'il y avoit trois racines, ou quatre, &c, on procéderoit suivant la même méthode. En effet, en réduisant ces dernières fractions à un dénominateur commun, on retrouveroit la première fraction d'où elles ont pris leur origine.

Les intégrales de ces fractions ainsi divisées ou dépecées, qu'il est toujours facile d'avoir en supposant la logarithmique, seront donc l'intégrale de la formule proposée. Par conséquent $\int \frac{\frac{1}{2}aadx}{(x+2a)(x+b)} = \frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\,\text{L.}(x+b) - \frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\,\text{L.}\,(x+2a) = \frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\,\text{L.}\,\frac{x+b}{x+2a} = \frac{a}{2a-b}\,\text{L.}\,\frac{\sqrt{[x+b]}}{\sqrt{[x+2a]}}$, dans la logarithmique dont la sou-tangente est a.

Soit la fraction $\frac{\frac{1}{4}aadx}{(x+\frac{1}{2}a)(x-\frac{1}{2}a)}$ qui se divise en ces deux-ci $\frac{\frac{1}{4}adx}{x-\frac{1}{2}a} - \frac{\frac{1}{4}adx}{x+\frac{1}{2}a}$; on trouvera $\int \frac{\frac{1}{4}aadx}{\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)} = \frac{1}{4}\,\text{L.}\,\frac{x-\frac{1}{2}a}{x+\frac{1}{2}a} = \ldots$ $\text{L.}\,\frac{\sqrt{[x-\frac{1}{2}a]}}{\sqrt{[x+\frac{1}{2}a]}}$, la sou-tangente étant $= a$.

Soit la fraction $\frac{a^3dx}{(x+a)(x-b)(x+c)}$, qui se partage en ces trois-ci, $\frac{a^3dx}{(x+a)(-b-a)(c-a)} +$
$\frac{a^3dx}{(x-b)(a+b)(c+b)} +$

$\frac{a^3dx}{(x-b)(a+b)(c+b)} + \frac{a^3dx}{(x+c)(a-c)(-b-c)}$;

on trouvera $\int \frac{a^3dx}{(x+a)(x-b)(x+c)} = \frac{aa}{(a+b)(a-c)}$ L. $(x+a) + \frac{aa}{(a+b)(c+b)}$ L. $(x-b) - \frac{aa}{(a-c)(b+c)}$ L. $(x+c)$, dans la logarithmique dont la sou-tangente $= a$.

Soit encore $\frac{-a^3dx}{x^3-aax}$, c'est-à-dire, . . . $\frac{-a^3dx}{(x+a)(x-a)(x+o)}$, qui se partage en ces trois fractions, $\frac{-a^3dx}{(x+a)(-2a)(o-a)}$, $\frac{-a^3dx}{(x-a).2a.(o+a)}$, $\frac{-a^3dx}{(x+o)(a-o)(-a-o)}$, qui se réduisent à $\frac{-adx}{2.(x+a)} - \frac{adx}{2.(x-a)} + \frac{adx}{x}$. Par conséquent $\int \frac{-a^3dx}{x^3-aax} =$ L. $x - \frac{1}{2}$ L. $(xx-aa) =$ L. $\frac{x}{\sqrt{[xx-aa]}}$, dans la logarithmique dont la sou-tangente $= a$.

22. 3°. Si le dénominateur de la fraction a des racines mêlées, les unes égales, les autres inégales, comme celle-ci, $\frac{a^3dx}{(x-b)^2.(x+c)}$; on considérera d'abord la formule comme si elle étoit $\frac{a^3dx}{(x-b)(x+c)}$, & l'ayant séparée ou divisée à l'ordi-

naire, on aura $\frac{a^3dx}{(x-b)(x+c)} = \frac{a^3dx}{(x-b)(c+b)} + \frac{a^3dx}{(x+c)(-b-c)}$; ainsi, en multipliant les dénominateurs par $x-b$, qui est l'autre racine de la formule proposée, on aura encore $\frac{a^3dx}{(x-b)^2(x+c)} = \frac{a^3dx}{(x-b)^2.(c+b)} + \frac{a^3dx}{(x+c).(x-b)(-b-c)}$; mais le premier terme n'a, à son dénominateur, que des racines égales, & le second que des racines inégales; donc en traitant l'un & l'autre comme il a été dit, on trouvera que l'intégrale totale de $\frac{a^3dx}{(x-b)^2.(x+c)}$, est $\frac{aa}{(b+c)^2}$ L. $\frac{x+c}{x-b} - \frac{a^3}{(x-b)(b+c)}$, en prenant le logarithme dans la logarithmique dont la sou-tangente $=a$.

S'il y a un plus grand nombre de racines égales, on répétera l'opération de la même manière, autant qu'il sera nécessaire.

23. Il reste à considérer le cas où les fractions ont de plus la variable dans le numérateur élevée à une puissance quelconque; nous supposons cependant que le plus grand exposant de la variable soit moindre dans le numérateur que dans le dénominateur; s'il ne l'étoit pas, on l'y réduiroit en faisant réellement la division.

Dans ces cas, on traite la formule comme si le numérateur ne contenoit aucune puissance de la variable, en la partageant de la manière qu'on a enseignée en autant de fractions qu'il y a de racines au dénominateur; ensuite si l'exposant de la variable dans le numérateur est impair, on changera dans les fractions partielles les ſignes des numérateurs, & on ne les changera pas ſi cet expoſant eſt pair; après cela on multipliera chaque fraction par la conſtante de la racine qui eſt au dénominateur, élevée à la même puiſſance que la variable du numérateur, & affectée du ſigne qui convient à cette puiſſance d'après le ſigne que cette conſtante a dans le dénominateur.

Prenons pour exemple $\frac{bbxdx}{(x+a)(x-a)}$. En conſidérant cette fraction comme ſi le numérateur ne contenoit pas la variable, elle ſe partage en ces deux-ci $\frac{bbdx}{(x+a)(-2a)} + \frac{bbdx}{(x-a).2a}$; mais l'expoſant de la variable dans le numérateur étant 1, on changera les ſignes des numérateurs, & on les multipliera chacun reſpectivement par la conſtante de la racine qu'ils ont à leurs dénominateurs, c'eſt ici a pour la première fraction, & $-a$ pour la ſeconde. On aura donc $\frac{bbxdx}{(x+a)(x-a)} = \frac{-bbdx.a}{(x+a)(-2a)} - \frac{bbdx.(-a)}{(x-a).2a} = \frac{bbdx}{2.(x+a)} + \frac{bbdx}{2.(x-a)}$; & par conſéquent $\int \frac{bbxdx}{(x+a).(x-a)} = b\,\text{L}.\sqrt{[x+a]} + b\,\text{L}.\sqrt{(x-a)} = b\,\text{L}.\sqrt{[xx-aa]}$, dans la logarithmique dont la ſou-tangente $= b$; ou bien encore cette intégrale ſera $bb\,\text{L}.\sqrt{[xx-aa]}$, dans la logarithmique dont la ſou-tangente $= 1$.

Il n'étoit pas néceſſaire de recourir à cette voie pour intégrer cette formule, qui eſt la même que $\frac{bbxdx}{xx-aa}$, puiſque le numérateur eſt préciſément la moitié de la différence du dénominateur, par où l'on voit, sans aucune autre opération, que son intégrale (n°. 17) est bb L. $\sqrt{[xx-aa]}$ dans la logarithmique dont la sou-tangente $=1$.

Que l'on se propose d'intégrer $\frac{x^4dx}{(xx-aa)(x+b)}$, c'est-à-dire, $\frac{x^4dx}{x^3+bxx-aax-aab}$. En divisant le numérateur par le dénominateur, on aura $xdx-bdx+\frac{aaxxdx+bbxxdx-aabbdx}{(xx-aa)(x+b)}$. Les deux premiers termes sont des entiers, & le dernier ne contient pas la variable au numérateur; ainsi on sait les intégrer. Il ne reste par conséquent à considérer que le terme $\frac{(aa+bb)xxdx}{(xx-aa)(x+b)}$. En ôtant pour un moment la variable du numérateur, ce terme devient $\frac{(aa+bb).dx}{(xx-aa)(x+b)}=\frac{(aa+bb)dx}{(x+b)(-aa+bb)}+\frac{(aa+bb)dx}{(x+a)(-2ab+2aa)}+\frac{(aa+bb).dx}{(x-a)(2ab+2aa)}$.

On aura par conséquent $\frac{(aa+bb)xxdx}{(x+b)(xx-aa)}=\frac{(aa+bb).bbdx}{(x+b)(-aa+bb)}+\frac{(aa+bb).aadx}{(x+a)(-2ab+2aa)}+\frac{(aa+bb).aadx}{(x-a)(2ab+2aa)}$; & enfin $\frac{x^4dx}{(xx-aa).(x+b)}=xdx-bdx-\frac{aabbdx}{(x+b)(xx-aa)}+\dots\frac{(aa+bb)bbdx}{(x+b)(-aa+bb)}+\frac{(aa+bb)aadx}{(x+a)(-2ab+2aa)}+\frac{(aa+bb).aadx}{(x-a)(2ab+2aa)}$. Si l'on sépare aussi en ses parties le terme $\frac{-aabbdx}{(x+b)(xx-aa)}$, on aura la formule proposée $\frac{x^4dx}{(xx-aa)(x+b)} = xdx - bdx + \frac{b^4dx}{(x+b)(-aa+bb)} + \frac{a^4dx}{(x+a)(2aa-2ab)} + \frac{a^4dx}{(x-a)(2ab+2aa)}$; & en intégrant......

$$\int\frac{x^4dx}{(xx-aa)(x+b)} = \frac{xx}{2} - bx - \frac{b^4}{aa-bb}\,\mathrm{L.}(x+b) + \frac{a^4}{2aa-2ab}\,\mathrm{L.}(x+a) + \frac{a^4}{2aa+2ab}\,\mathrm{L.}(x-a),$$

la sou-tangente de la logarithmique étant 1.

Dans ces intégrations, comme dans toutes les autres qu'on pourra faire, on n'oubliera pas d'ajouter la constante ; c'est pour abréger que je l'ai omise ici ; j'en avertis une fois pour toutes.

24. Les formules différentielles ont quelquefois des dénominateurs dont on ne peut pas avoir algébriquement les racines ; la regle que nous venons de donner pour les fractions, peut aussi servir dans ces cas. On regardera le dénominateur comme une équation dont on auroit à trouver les racines, & par le moyen des intersections des courbes, on déterminera les valeurs de la variable ; on appellera ces valeurs A, B, C, &c, en leur donnant les signes + ou —, suivant qu'elles seront positives ou négatives, & on les soustraira chacune de la variable ; on aura ainsi les racines du dénominateur, de maniere que la formule différentielle proposée prendra cette forme $\frac{x^m dx}{(x-A)(x+B)(x-C)\,\&c.}$; enfin on opérera sur

cette dernière fraction, comme on a fait, lorsque les racines étoient algébriques.

25. ON voit aisément que cette regle n'est bonne que dans les cas où toutes les racines du dénominateur sont réelles; car les racines imaginaires du dénominateur se retrouveroient dans les fractions partielles dans lesquelles on auroit partagé la formule proposée, & passeroient par conséquent aussi dans leurs intégrales.

26. LORS donc que les racines du dénominateur sont imaginaires, toutes ou en partie, il faut recourir à d'autres méthodes.

Examinons d'abord les fractions dont le dénominateur a seulement deux dimensions, c'est-à dire, deux racines imaginaires, par exemple, $\frac{bbdx}{xx+aa}$. L'intégrale de cette formule, & de toutes les autres semblables, dépend de la rectification ou de la quadrature du cercle; je dis de l'une ou de l'autre, puisque la quadrature suit de la rectification, & réciproquement.

Fig. 4. Soit donc le quart de cercle ACG (Fig. 4), dont le raion $AC = a$, la tangente $CD = x$; AB sera $= \frac{aa}{\sqrt{(aa+xx)}}$, $CB = a - \frac{aa}{\sqrt{(aa+xx)}}$, & $EB = \frac{ax}{\sqrt{(aa+xx)}}$.

Que l'on mène AK infiniment voisine de AD, EO sera la différence de l'arc CE; & menant du point O la droite OM parallèle à EB, & EH parallèle à AC, HE sera la différence de CB, & HO la différence de EB;

on aura donc $EH = \frac{aaxdx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$, $HO = \frac{a^3dx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$; ainsi l'arc $EO = \sqrt{\left[\overline{HE}^2 + \overline{HO}^2\right]} = \ldots\ldots$ $\sqrt{\left[\frac{a^6dx^2+a^4xxdx^2}{(aa+xx)^3}\right]} = \frac{aadx}{aa+xx}$; donc l'intégrale de la formule $\frac{aadx}{aa+xx}$, sera l'arc CE, qui a pour raïon $CA = a$, & pour tangente $CD = x$.

Reprenons la formule $\frac{bbdx}{aa+xx}$; en multipliant le dessus & le dessous par aa, elle devient $\frac{bb}{aa} \times \frac{aadx}{aa+xx}$. Mais l'intégrale de $\frac{aadx}{aa+xx}$ est un arc de cercle dont le raïon est a, & la tangente est x; donc l'intégrale de $\frac{bbdx}{aa+xx}$ sera la quatrième proportionnelle à aa, à bb, & à l'arc de cercle dont le raïon est a, & la tangente x.

Si la formule étoit $\frac{aamdx}{nxx+nab}$, puisqu'en multipliant le numérateur & le dénominateur par b, on auroit $\frac{am}{nb} \times \frac{abdx}{xx+ab}$; il est clair que son intégrale est la quatrième proportionnelle de nb, de am, & de l'arc de cercle qui auroit pour raïon $\sqrt{ab}$, & x pour tangente. On en dira autant des autres fractions semblables.

27. RÉCIPROQUEMENT donc la différence d'un arc quelconque de cercle est une fraction qui a pour numérateur le produit du quarré du raïon par la

différence de la tangente, & pour dénominateur la somme du quarré du raïon & du quarré de la tangente.

Ici comme dans les autres cas, pour avoir les intégrales complettes, il faut ajouter une constante qui, dans les intégrales dépendantes de la rectification de la circonférence, sera un arc constant de la même circonférence; car la différence ou fluxion dont peut croître ou décroître l'arc ainsi composé d'une partie variable & d'une partie constante, ne sera jamais que la différence ou fluxion de la partie variable; donc une pareille différence peut avoir pour intégrale la somme de l'arc variable, & d'un arc constant quelconque de la même circonférence. Supposons que la tangente d'un arc dont le raïon est a, soit x, & que b soit la tangente d'un autre arc constant de la même circonférence. On sait (Géom. 382) que la tangente de la somme de ces deux arcs, est $= \frac{aab+aax}{aa-bx}$; or en multipliant la différence de cette tangente par le quarré du raïon, & divisant le produit par la somme du quarré du raïon, & du quarré de la même tangente, on aura $\frac{aadx}{aa+xx}$, qui est précisément la différence de l'arc variable. Donc, &c.

Si la formule à intégrer est $\frac{aadx}{aa+xx-2bx+bb}$; on fera attention que $xx-2bx+bb$ est le quarré de $x-b$, & on supposera $x-b=z$; on fera la substitution, & on aura $\frac{aadz}{aa+zz}$. Donc $\int\frac{aadz}{aa+zz}$ $=$ l'arc dont le raïon est a, & la tangente z;

mais $z = x - b$; donc $\int \frac{aadx}{aa + xx - 2bx + bb} =$ l'arc dont le raïon est a, & la tangente $x - b$, dans le cas où $x > b$; mais si x étoit moindre que b, l'intégrale seroit — l'arc du même raïon & de la même tangente : en effet, en différentiant, on retrouvera la formule proposée $\frac{aadx}{aa + bb - 2bx + xx}$.

Soit proposée la formule $\frac{4abdx + 3bxdx}{xx - 4ax + 6aa}$. On sera évanouir le second terme du dénominateur, en supposant $x = y + 2a$; & l'on aura.........

$$\frac{4abdy + 3bydy + 6abdy}{yy + 2aa} = \frac{10abdy}{yy + 2aa} + \frac{3bydy}{yy + 2aa};$$

L'intégrale du premier terme est la quatrième proportionnelle de a, de $5b$, & de l'arc de cercle dont le raïon $= \sqrt{[2aa]}$, & la tangente $= y$; celle du second est $\text{L}.(yy + 2aa)^{\frac{1}{2}}$, dans la logarithmique qui a la sou-tangente $= b$. Remettant donc au lieu de y sa valeur $x - 2a$, l'intégrale de $\frac{4abdx + 3bxdx}{xx - 4ax + 6aa}$ sera la quatrième proportionnelle de a, de $5b$, & de l'arc de cercle dont le raïon est $\sqrt{[2aa]}$, & la tangente $x - 2a$, plus $\text{L}.(xx + 4ax + 6aa)^{\frac{1}{2}}$, dans la logarithmique qui a b pour sou-tangente.

28. PASSONS maintenant aux formules irrationnelles, c'est-à dire qui contiennent des quantités radicales, ou élevées à des puissances dont l'exposant est un nombre rompu. Si on peut réduire la variable qui est sous le signe radical, à n'avoir qu'une

dimenſion, & que hors du ſigne l'expoſant de la puiſſance ſoit poſitif, la formule ſera toujours intégrable algébriquement, au moyen d'une ſubſtitution très-ſimple, c'eſt-à-dire en ſuppoſant la quantité qui eſt ſous le ſigne, égale à une nouvelle variable. Donnons-en quelques exemples.

Pour intégrer $a\,dx\sqrt{[ax-aa]}$, on fera $\sqrt{[ax-aa]}=z$, & par conſéquent $x=\frac{zz+aa}{a}$, $dx=\frac{2z\,dz}{a}$; faiſant les ſubſtitutions, on aura $2zz\,dz$, dont l'intégrale eſt $\frac{2z^3}{3}$; & remettant au lieu de z ſa valeur donnée en x, on trouvera $\frac{2}{3}(ax-aa)^{\frac{3}{2}}$, intégrale de la formule propoſée. Si la quantité à intégrer avoit été $\frac{a\,dx}{\sqrt{[ax-aa]}}$, en procédant de la même manière, on auroit trouvé $2(ax-aa)^{\frac{1}{2}}$ pour ſon intégrale.

Soit propoſé $x\,dx\sqrt[4]{[a-x]}$. On ſuppoſera $\sqrt[4]{[a-x]}=z$, & par conſéquent $x=a-z^4$, $dx=-4z^3dz$; & $x\,dx\sqrt[4]{[a-x]}=-4az^4dz+4z^8dz$; l'intégrale eſt $-\frac{4az^5}{5}+\frac{4z^9}{9}$; ou bien $-\frac{4a}{5}(a-x)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{9}(a-x)^{\frac{9}{4}}$, en mettant pour z ſa valeur donnée en x. Si la formule étoit $\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{[a-x]}}$, on trouveroit par la même voie que ſon intégrale eſt $-\frac{4a}{3}(a-x)^{\frac{3}{4}}+\frac{4}{7}(a-x)^{\frac{7}{4}}$.

Si l'on veut intégrer $xx\,dx\sqrt{[a+x]}$; on ſuppoſera $\sqrt{[a+x]}=z$, & la formule deviendra

$2z^6dz - 4az^4dz + 2aazzdz$, dont l'intégrale est $\frac{2z^7}{7} - \frac{4az^5}{5} + \frac{2aaz^3}{3}$; on remettra au lieu de z sa valeur donnée en x, & on aura l'intégrale cherchée $= \frac{2}{7}(a+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4a}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2aa}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}}$. On auroit trouvé de même que $\int \frac{xxdx}{\sqrt{[a+x]}} = \frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4a}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}} + 2a(a+x)^{\frac{1}{2}}$.

Pour intégrer $xdx\sqrt{[(a+x)^3]}$, c'est-à-dire $xdx(a+x)^{\frac{3}{2}}$; on supposera à l'ordinaire $(a+x)^{\frac{1}{2}} = z$, & par conséquent $x = z^{\frac{2}{1}} - a$, $dx = \frac{2}{1}z^{\frac{2}{1}-1}dz$; les substitutions faites, on aura $\frac{2z^{\frac{6}{1}}dz}{1} - \frac{2az^{\frac{4}{1}}dz}{1}$; & l'intégration donnera $\frac{2z^{\frac{7}{1}}}{7} - \frac{2az^{\frac{5}{1}}}{5}$, c'est-à-dire, $\frac{2}{7}(a+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{2a}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}}$. On trouveroit de la même manière que l'intégrale de $\frac{xdx}{(a+x)^{\frac{1}{2}}}$ est $2\sqrt{[a+x]} + \frac{2a}{\sqrt{[a+x]}}$.

29. SOIT en général la formule $ax^r dx(a+x)^{\frac{m}{n}}$; r, m, n étant des exposants entiers & positifs. On supposera $(a+x)^{\frac{m}{n}} = z$, & par conséquent $a+x = z^{\frac{n}{m}}$, $dx = \frac{n}{m}z^{\frac{n}{m}-1}dz$, $x^r = (z^{\frac{n}{m}} - a)^r$; la formule se changera en celle-ci $(z^{\frac{n}{m}} - a)^r \cdot \frac{an}{m} z^{\frac{m}{n}}dz$. On élevera réellement $z^{\frac{n}{m}} - a$ à la puissance r; &

chaque terme, comme il est clair, sera intégrable algébriquement; remettant ensuite au lieu de z la valeur donnée en x, on aura l'intégrale algébrique de la formule proposée.

30. SI l'exposant m étoit négatif, ce qui feroit passer le radical dans le dénominateur, c'est-à-dire que la formule seroit $\frac{ax^t dx}{(a+x)^{\frac{m}{n}}}$; on auroit après les substitutions faites, $(z^{\frac{n}{m}} - a)^t \cdot \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m} - 2} dz$; on éleveroit réellement $z^{\frac{n}{m}} - a$ à la puissance t, & tous les termes seroient encore intégrables algébriquement, excepté ceux qui contiendroient la puissance $z^{-1}dz$, qui oblige de recourir aux logarithmes.

Mais si l'exposant t étoit négatif, ces deux formules ne seroient pas intégrables algébriquement; on pourroit cependant les délivrer des radicaux, & les réduire à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, comme on le verra en son lieu.

31. LORSQUE la variable qui est sous le signe radical est élevée à une puissance plus grande que l'unité; pourvu que la quantité qui est hors du signe, soit précisément la différentielle de celle qui est sous le signe, ou une partie proportionnelle quelconque de cette différentielle, on pourra encore avoir par cette simple substitution les intégrales des formules; & ces intégrales seront toujours algébriques.

Ainsi, pour intégrer $2xdx\sqrt{[xx+aa]}$, je fais $\sqrt{[xx+aa]} = z$; & la quantité proposée devient $2zzdz$, dont l'intégrale est $\frac{2z^3}{3}$, ou, en remettant au lieu de z sa valeur, $\frac{2}{3}(xx+aa)^{\frac{3}{2}}$. On trouvera de même que l'intégrale de $\frac{2xdx}{\sqrt{[xx+aa]}}$ est $2\sqrt{[xx+aa]}$.

Pour intégrer $(2adx-4xdx)\sqrt{[ax-xx+bb]}$, c'est-à-dire $2.(adx-2xdx)\sqrt{[ax-xx+bb]}$, je suppose $\sqrt{[ax-xx+bb]}=z$, & par conséquent $ax-xx+bb=zz$, & $adx-2xdx=2zdz$; & les substitutions me donnent $4zzdz$, dont l'intégrale est $\frac{4z^3}{3}$, & par conséquent $\frac{4}{3}(ax-xx+bb)^{\frac{3}{2}}$, en remettant au lieu de z sa valeur donnée en x. On trouveroit de même que $\int\frac{2adx-4xdx}{\sqrt{[ax-xx+bb]}} = 4.(ax-xx+bb)^{\frac{1}{2}}$.

Soit proposé d'intégrer $(xxdx-\frac{2}{3}axdx)\sqrt[4]{[x^3-axx]}$, c'est-à-dire, $\frac{3xxdx-2axdx}{3}\sqrt[4]{[x^3-axx]}$. Je fais $\sqrt[4]{[x^3-axx]}=z$; & par conséquent $z^4=x^3-axx$, $3xxdx-2axdx=4z^3dz$; ainsi la formule proposée devient $\frac{4z^4dz}{3}$, & en intégrant, $\frac{4z^5}{15}$. Je remets au lieu de z sa valeur donnée en x, & j'ai $\frac{4}{15}(x^3-axx)^{\frac{5}{4}}$. On trouveroit de même que $\int\frac{3xxdx-2axdx}{3\sqrt[4]{[x^3-axx]}} = \frac{4}{9}(x^3-axx)^{\frac{3}{4}}$.

Soit encore la formule $2xdx\sqrt[3]{[(xx+aa)^2]}$, ou $2xdx(xx+aa)^{\frac{2}{3}}$. Je suppose $(xx+aa)^{\frac{2}{3}}=z$, & par conséquent $xx+aa=z^{\frac{3}{2}}$, $2xdx=\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz$;

& les substitutions donnent $\frac{1}{2} z^{\frac{2}{3}} d z$, dont l'intégrale est $\frac{3}{5} z^{\frac{5}{3}}$; ainsi l'intégrale cherchée est $\frac{3}{5}(xx+aa)\sqrt[3]{[(xx+aa)^2]}$. Pareillement l'intégrale de.. $\frac{2xdx}{\sqrt[3]{[(xx+aa)^2]}}$ est $3\sqrt[3]{[xx+aa]}$.

Pour intégrer la formule générale $p x^{m-1} d x (x^m + a^m)^{\frac{n}{u}}$, dans laquelle p & m peuvent être des nombres entiers ou rompus ; on supposera $(x^m + a^m)^{\frac{n}{u}} = z$, & par conséquent $z^{\frac{u}{n}} = x^m + a^m$, $m x^{m-1} d x = \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} d z$; & faisant les substitutions, on aura $\frac{pu}{mn} z^{\frac{u}{n}} d z$, dont l'intégrale est $\frac{pu}{mu+mn} z^{\frac{u+n}{n}}$. On remettra au lieu de z sa valeur en x, & l'intégrale cherchée sera $\frac{pu}{mu+mn}$ $(x^m + a^m).(x^m + a^m)^{\frac{n}{u}}$. Si n avoit été négatif, c'est-à-dire si la formule avoit été $\frac{p x^{m-1} d x}{(x^m + a^m)^{\frac{n}{u}}}$, on auroit eu pour intégrale $\frac{pu}{mu-mn}(x^m + a^m)^{\frac{u-n}{u}}$.

Nous établirons donc pour règle générale que l'intégrale des formules de cette espece, est la quantité même qui est sous le signe avec un exposant augmenté d'une unité, divisée par cet exposant ainsi augmenté; ou bien c'est une quantité qui est avec celle que nous venons d'assigner, dans le même rapport que la quantité différentielle qui est hors du signe, est avec la différentielle exacte de ce qui est sous le signe.

32. PLUS généralement encore, soit la formule $px^{rm-1}dx.(x^m+a^m)^{\frac{n}{u}}$, dans laquelle r est un nombre entier & positif, & qui revient à celle-ci, $px^{rm-m}.x^{m-1}dx.(x^m+a^m)^{\frac{n}{u}}$. On supposera à l'ordinaire $z=(x^m+a^m)^{\frac{n}{u}}$, & par conséquent $x^m+a^m=z^{\frac{u}{n}}$, $mx^{m-1}dx=\frac{u}{n}z^{\frac{u}{n}-1}dz$, $x^{rm-m}=(z^{\frac{u}{n}}-a^m)^{r-1}$. Faisant donc les substitutions, on aura $p.(z^{\frac{u}{n}}-a^m)^{r-1}.\frac{u}{mn}z^{\frac{u}{n}}dz$. Mais puisque r est un nombre entier positif, $r-1$ sera encore entier & positif; on élevera donc réellement $z^{\frac{u}{n}}-a^m$ à la puissance $r-1$, & tous les termes seront intégrables algébriquement. On remettra dans l'intégrale, au lieu de z sa valeur donnée en x, & on aura l'intégrale demandée.

Si n étoit négatif, c'est-à-dire, si on avoit proposé la formule $\frac{px^{rm-1}dx}{(x^m+a^m)^{\frac{n}{u}}}$, dans laquelle n est positif, on auroit eu, après les substitutions, $p.(z^{\frac{u}{n}}-a^m)^{r-1}.\frac{u}{mn}z^{\frac{u}{n}-2}dz$, qui est pareillement intégrable. Donc, &c.

Si dans tous ces cas, la quantité sous le signe au lieu d'être x^m+a^m, étoit x^m-a^m, ou bien a^m-x^m, on procéderoit de la même manière, & l'opération réussiroit également. On trouvera par cette méthode que

$\int a x^{n-1} dx \sqrt{[e+fx^n]} = \frac{2a}{3mf}(e+fx^n)^{\frac{3}{2}}$.

$\int \frac{a x^{n-1} dx}{\sqrt{[e+fx^n]}} = \frac{2a}{mf}(e+fx^n)^{\frac{1}{2}}$;

$\int a x^{2n-1} dx \sqrt{[e+fx^n]} = \frac{-4e+6fx^n}{15mff} a.$ $(e+fx^n)^{\frac{3}{2}}$

$\int \frac{a x^{2n-1} dx}{\sqrt{[e+fx^n]}} = \frac{-4e+2fx^n}{3mff} a.(e+fx^n)^{\frac{1}{2}}$;

$\int a x^{3m-1} dx \sqrt{[e+fx^m]} = \frac{a.(16ee-24efx^m+30ffx^{2m})}{105f^3m}$ $(e+fx^m)^{\frac{3}{2}}$;

$\int \frac{a x^{3m-1} dx}{\sqrt{[e+fx^m]}} = \frac{a.(16ee-8efx^m+6ffx^{2m})}{15mf^3}$ $(e+fx^m)^{\frac{1}{2}}$. Et ainsi des autres.

33. DANS le cas où la variable hors du signe se trouve dans le dénominateur, la formule sera encore intégrable algébriquement par le moyen de deux substitutions, pourvu cependant que l'exposant de la variable hors du signe ait la condition indiquée par cette formule $\frac{dx(x^m+a^m)^{\frac{n}{u}}}{x^{rm+\frac{mn}{u}+1}}$. Supposons, en effet, qu'on veuille intégrer la même formule; on fera $x = \frac{aa}{y}$, $dx = -\frac{aady}{yy}$, $x^m = \frac{a^{2m}}{y^m}$, $(x^m+a^m)^{\frac{n}{u}} = \frac{(a^{2m}+a^m y^m)^{\frac{n}{u}}}{y^{\frac{mn}{u}}}$; & après avoir fait

les

les substitutions, on aura $\frac{-aady.(a^{2m}+a^m y^m)^{\frac{n}{u}}}{yy.y^{\frac{mn}{u}}.\frac{a^{2rm+\frac{mn}{u}+2}}{y^{rm+\frac{mn}{u}+2}}} = \frac{(a^{2m}+a^m y^m)^{\frac{n}{u}}}{a^{2rm+\frac{2mn}{u}}} \times -y^{m-1}dy$, formule qui a les conditions dont il a été question au n°. 32, & qui s'intégrera algébriquement au moyen de la substitution qu'on y a enseignée.

Si la formule proposée étoit $\frac{a^r dx}{x \cdot \sqrt{(ax+xx)}}$ ou $\frac{a^r dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(a+x)}}$; comme elle a les conditions demandées, elle s'intégreroit algébriquement, ce qui aura lieu dans toutes les formules semblables.

34. MAIS que l'on fasse attention que dans la formule générale, u peut être égal à l'unité; or, dans ce cas, la puissance de x^m+a^m est rationnelle, c'est-à-dire que son exposant est un nombre entier. Dans ce même cas, en supposant n négatif, (puisqu'il n'y a pas de difficulté lorsqu'il est positif), si l'on employe la même substitution & la même méthode, on trouvera encore les intégrales, qui pourront bien n'être pas entiérement algébriques, mais qui dépendront tout au plus en partie de la quadrature de l'hyperbole, c'est-à-dire des logarithmes.

On trouvera donc que $\int \frac{x^{m-1}dx}{(x^m+a^m)^2} = -\frac{1}{m}(x^m+a^m)^{-1}$;

$\int \frac{x^{2m-1}dx}{(x^m+a^m)^2} = \frac{1}{m} L.(a^m+x^m) + \frac{a^m}{m(a^m+x^m)}$;

$$\int \frac{x^{3n-1}dx}{(x^n+a^n)^2} = \frac{a^n+x^n}{m} - \frac{2a^n \text{L.} (a^n+x^n)}{m} - \frac{a^{2n}}{m.(a^n+x^n)};$$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(a^n+x^n)^3} = \frac{-1}{2m(a^n+x^n)^2};$$

$$\int \frac{x^{2n-1}dx}{(a^n+x^n)^3} = \frac{-1}{m(a^n+x^n)} + \frac{a^n}{2m(a^n+x^n)^2};$$

$$\int \frac{x^{3n-1}dx}{(a^n+x^n)^3} = \frac{1}{m}\text{L.}(a^n+x^n) + \frac{2a^n}{m(a^n+x^n)} - \frac{a^{2n}}{2m(a^n+x^n)^2}.$$ Et ainſi des autres.

35. MAIS il faudra s'y prendre bien autrement pour intégrer les formules différentielles qui contiennent des radicaux, lorſque les quantités hors du ſigne n'ont pas les conditions dont j'ai parlé ci-deſſus. On pourra toujours rendre ces formules, rationnelles, pourvu qu'elles ne contiennent qu'un radical quarré, & que la variable dans ce radical ne monte qu'à la ſeconde puiſſance. C'eſt à quoi on parviendra par le choix de ſubſtitutions convenables.

Ces ſubſtitutions faites, on intégrera ſoit algébriquement, ſoit par les quadratures du cercle & de l'hyperbole, comme il a été expliqué plus haut; & ſi les nouvelles formules ne ſont pas dans le cas d'être intégrées par ces voies, on aura recours à d'autres regles que je donnerai bientôt.

Si le radical de la formule propoſée eſt $\sqrt{[ax \pm xx]}$, ou bien $\sqrt{[xx \pm ax]}$, on le ſuppoſera $= \frac{xz}{b}$, z étant une nouvelle variable, & b une conſtante quelconque.

Si le radical eſt $\sqrt{[xx \pm aa]}$, on le ſuppoſera $= x + z$, ou, ſi on l'aime mieux, $= x - z$.

Si le radical eſt $\sqrt{[aa - xx]}$, ou $\sqrt{[fp - xx]}$, on le ſuppoſera $= \sqrt{fp} + \frac{zx}{b}$, ou bien $= \sqrt{fp} - \frac{zx}{b}$. On tirera, d'après ces ſuppoſitions, les valeurs de x & de dx données en z & en conſtantes; on ſubſtituera ces valeurs dans les formules données, & on aura d'autres formules données en z, & délivrées de radicaux; on intégrera alors, s'il eſt poſſible, & remettant dans les intégrales la valeur de z donnée en x, on aura les intégrales des formules propoſées.

36. Si la quantité ſous le ſigne avoit trois termes, ſavoir, le quarré de la variable, le rectangle de la variable par une conſtante, & un terme tout conſtant, on fera évanouir le ſecond terme de la même manière que dans les équations algébriques; ou bien, ſi le terme conſtant eſt poſitif, comme dans $\sqrt{[xx + ax + aa]}$, ſoit que les autres termes ſoient poſitifs ou négatifs, pourvu que la quantité ne ſoit pas imaginaire, on ſuppoſera $\sqrt{[xx + ax + aa]} = a + \frac{xz}{b}$, & ſi le terme conſtant eſt négatif, commé dans $\sqrt{[xx + ax - aa]}$ on fera $\sqrt{[xx + ax - aa]} = x + z$.

Tout l'artifice conſiſte donc à comparer la quantité radicale à une autre quantité compoſée de la variable donnée, d'une autre variable & de conſtantes, de manière qu'il en réſulte une équation de laquelle on puiſſe tirer les valeurs de x & de dx délivrées de radicaux.

Soit propoſé d'intégrer la quantité $x^3 dx \sqrt{[ax - xx]}$.

Je suppose $\sqrt{[ax-xx]}=\frac{xz}{b}$; j'ai par conséquent $a-x=\frac{xzz}{bb}$; c'est-à-dire $x=\frac{abb}{zz+bb}$, $dx=-\frac{2abbzdz}{(zz+bb)^2}$, $x^3=\frac{a^3b^6}{(zz+bb)^3}$, & $\sqrt{[ax-xx]}=\frac{xz}{b}=\frac{abz}{zz+bb}$. Faisant les substitutions dans la formule proposée, elle se changera en celle-ci $-\frac{2a^5b^9zzdz}{(zz+bb)^4}$, où il n'y a pas de radicaux, mais qui cependant ne s'intégre pas par les méthodes que j'ai données jusqu'ici.

Soit la quantité $\frac{aadx}{x\sqrt{[ax+xx]}}$. Je suppose $\sqrt{[ax+xx]}=\frac{xz}{b}$; ce qui donne $x=\frac{abb}{zz-bb}$, $dx=-\frac{2abbzdz}{(zz-bb)^2}$, $\sqrt{[ax+xx]}=\frac{xz}{b}=\frac{abz}{zz-bb}$. Par les substitutions, la quantité proposée devient $-\frac{2adz}{b}$, dont l'intégrale est $-\frac{2az}{b}$; & mettant au lieu de z sa valeur donnée en x, j'ai $\int\frac{aadx}{x\sqrt{[ax+xx]}}=-\frac{2a\sqrt{[ax+xx]}}{x}$.

Pour intégrer $\frac{xdx}{\sqrt{[ax+xx]}}$, on supposera $\sqrt{[ax+xx]}=\frac{xz}{b}$; & faisant les substitutions nécessaires, la formule deviendra $-\frac{2ab^3dz}{(zz-bb)^2}$, ou $-\frac{2ab^2dz}{(z+b)^2.(z-b)^2}$, que l'on fait intégrer par la regle des fractions. Son intégrale est $\frac{abz}{zz-bb}+\frac{a}{2}\text{L}.\frac{z-b}{z+b}$, dans la logarithmique dont la soutangente $=1$. Mettant au lieu de z sa valeur donnée en x, on aura $\int\frac{xdx}{\sqrt{[ax+xx]}}=\sqrt{[ax+xx]}+\frac{a}{2}\text{L}.\frac{\sqrt{[ax+xx]}-x}{\sqrt{[ax+xx]}+x}$, toujours dans la logarithmique dont la sou-tangente est 1.

Pour intégrer $\frac{xdx}{\sqrt{[xx+ax-aa]}}$, on supposera $\sqrt{[xx+ax-aa]}=x+z$; on aura par conséquent $x=\frac{zz+aa}{a-2z}$, $dx=\frac{2azdz-2zzdz+2aadz}{(a-2z)^2}$, & $\sqrt{[xx+ax-aa]}=x+z=\frac{aa+az-zz}{a-2z}$: Les substitutions faites, on aura $\frac{(zz+aa).2dz}{(a-2z)^2}$, ou $\frac{2zzdz+2aadz}{(a-2z)^2}$, qui s'intègre par les regles que j'ai données. Si dans son intégrale qui est $\frac{5aa}{4.(a-2z)}-\frac{(a-2z)}{4}+\frac{a}{2}\text{L}.(a-2z)$, on remet au lieu de z sa valeur donnée en x, on aura enfin.....
$\int\frac{xdx}{\sqrt{[xx+ax-aa]}}=\frac{5aa}{4.(a+2x-2\sqrt{[xx+ax-aa]})}-\frac{a-2x+2\sqrt{[xx+ax-aa]}}{4}+\frac{2a}{4}\text{L}.(a+2x-$

$2\sqrt{[xx+ax-aa]}$), dans la logarithmique dont la sou-tangente est égale à l'unité.

37. IL y a des formules différentielles radicales qu'il est inutile de délivrer de leurs radicaux, en les transformant au moyen des substitutions indiquées, pour en préparer l'intégration ; toutes celles qui dépendent de la rectification ou de la quadrature du cercle, sont dans ce cas ; car si l'on parvient à chasser les radicaux, elles n'en dépendront pas moins du cercle.

Fig. 5. Soit donc le demi-cercle GMD (Fig. 5), dont le raïon $AD=a$, $AB=x$, & par conséquent $BF=\sqrt{[aa-xx]}$; si l'on mène CH infiniment voisine de BF, on aura $BC=dx$, $EF=\frac{xdx}{\sqrt{[aa-xx]}}$. Ainsi le rectangle infinitésimal $BCHE$ sera exprimé par $dx\sqrt{[aa-xx]}$; & $\int dx\sqrt{[aa-xx]}=$ l'espace $ABFM$. L'arc infinitésimal FH sera exprimé par $\frac{adx}{\sqrt{[aa-xx]}}$, & par conséquent $\int\frac{adx}{\sqrt{[aa-xx]}}=$ l'arc MF. Et si l'on multiplie le petit arc FH par la moitié du raïon, $\frac{aadx}{2\sqrt{[aa-xx]}}$ sera l'expression du secteur infinitésimal AFH ; & par conséquent $\int\frac{aadx}{2\sqrt{[aa-xx]}}$ exprimera le secteur AFM.

Dans le même cercle, supposons $DC=x$, & $CB=dx$, CH sera $=\sqrt{[2ax-xx}$, $EF=\frac{adx-xdx}{\sqrt{(2ax-xx]}}$. On aura donc alors $\int dx\sqrt{[2ax-xx]}=$ l'espace HCD ; $\int\frac{adx}{\sqrt{[2ax-xx]}}=$ l'arc HD ;

& $\int \frac{aadx}{2\sqrt{[2ax-xx]}}$ = le secteur AHD. Ce seroit inutilement qu'on se donneroit la peine de transformer ces formules; car supposons pour le premier cas $\sqrt{[aa-xx]} = a - \frac{xz}{b}$; & par conséquent $x = \frac{2abz}{zz+bb}$, $dx = \frac{2ab^3dz - 2abzzdz}{(zz+bb)^2}$, $\sqrt{[aa-xx]} = a - \frac{xz}{b} = \frac{abb-azz}{zz+bb}$. Les substitutions donnent $\frac{adx}{\sqrt{[aa-xx]}} = \frac{2abdz}{zz+bb}$, formule de la rectification de l'arc de circonférence dont la tangente $= z$, comme on l'a vû au n°. 26.

Pareillement $\frac{aadx}{2\sqrt{[aa-xx]}} = \frac{aabdz}{zz+bb}$, formule qui renferme la même rectification.

Et $dx\sqrt{[aa-xx]} = \frac{2aabdz \times (bb-zz)^2}{(zz+bb)^3}$; formule qu'on ne sait pas encore traiter jusqu'ici; mais qui dépend encore du même cercle, comme on le verra ci-après.

Dans le second cas, supposons $\sqrt{[2ax-xx]} = \frac{xz}{b}$, & par conséquent $x = \frac{2abb}{zz+bb}$, $dx = -\frac{4ab^2zdz}{(zz+bb)^2}$, $\sqrt{[2ax-xx]} = \frac{xz}{b} = \frac{2abz}{zz+bb}$; les substitutions donneront $\frac{adx}{\sqrt{[2ax-xx]}} = -\frac{2abdz}{zz+bb}$, formule de la rectification de la circonférence; $\frac{aadx}{2\sqrt{[2ax-xx]}} = -\frac{aabdz}{zz+bb}$, qui appartient à la même rectification; & $dx\sqrt{[2ax-xx]} = -\frac{8aab^3zzdz}{(zz+bb)^3}$ qui dépend du même cercle.

38. Si les formules différentielles contiennent deux quantités radicales, au lieu d'une opération, on en aura deux à faire, qui réussiront tout aussi-bien, pourvu que sous le radical le second terme manque ou soit éliminé, & que la formule soit multipliée par une puissance impaire de la variable. On supposera à cet effet une des deux quantités radicales égale à une nouvelle variable; ce qui transformera la formule en une autre qui ne contiendra qu'un radical, & qu'on traitera par conséquent à la manière ordinaire.

Qu'il s'agisse, par exemple, de la quantité $\frac{x^3dx\sqrt{[aa+xx]}}{\sqrt{[bb+xx]}}$. On fera $\sqrt{[aa+xx]}=y$, & par conséquent $xx=yy-aa$, $xdx=ydy$. Les substitutions faites, on aura $\frac{yydy(yy-aa)}{\sqrt{[yy-aa+bb]}}$, c'est-à-dire, $\frac{y^4dy}{\sqrt{[yy-aa+bb]}} - \frac{aayydy}{\sqrt{[yy-aa+bb]}}$, fractions que l'on a enseigné d'intégrer.

39. Pour peu que l'on réfléchisse à ces opérations, il est facile de reconnoître qu'on ne pourra réussir à délivrer généralement de radicaux les formules de ce genre, que lorsque le radical désignera une racine quarrée, & que la variable, sous le signe, n'ira pas au-dessus du second degré. Je dis généralement, parce qu'il y a quelques cas où cette méthode réussit, quelle que soit la puissance de la variable sous le signe, & nommément dans tous les

cas compris dans les deux formules suivantes. La première est $\frac{dy\,.\,(y^m + b^m)^{\pm\frac{1}{n}}}{y^{tm+1}}$, m, n, t étant des nombres entiers & positifs qui peuvent aussi être zero ; on en chassera les radicaux en faisant $(y^m + b^m)^{\frac{1}{n}} = z$, & par conséquent $y^m = z^n - b^m$, $dy = \frac{nz^{n-1}dz}{my^{m-1}}$; les substitutions donneront $\frac{nz^{n-1}dz\,.\,z^{\pm 1}}{my^{tm+m}}$, c'est-à-dire $\frac{nz^{n-1}dz\,.\,z^{\pm 1}}{my^{(t+1).m}}$; or $y^{(t+1).m} = (z^n - b^m)^{t+1}$; & puisque t est un nombre entier, $t+1$ indique aussi une puissance entière; ainsi la formule proposée est dégagée de radicaux.

Si t étoit négatif, la formule donneroit le cas qui a été examiné au n°. 32, & s'intégreroit algébriquement. Dans les autres cas, l'intégrale dépendra des quadratures du cercle & de l'hyperbole, comme on le verra en son lieu.

La seconde formule est $y^n dy\,.\,(y^m + b^m)^{\pm\frac{t}{p}}$, qui lorsque $\frac{n+1}{m}$ sera un nombre entier, pourra toujours être délivrée des signes radicaux, ou totalement, ou du moins de ceux qui affectent des quantités complexes, ce qui est suffisant. Que l'on fasse donc $(y^m + b^m)^{\frac{t}{p}} = z$, & par conséquent $y^m = z^{\frac{p}{t}} - b^m$, $y = (z^{\frac{p}{t}} - b^m)^{\frac{1}{m}}$, $dy = \frac{p}{tm} z^{\frac{p}{t}-1} dz\,.\,(z^{\frac{p}{t}} - b^m)^{\frac{1}{m}-1}$, $y^n = (z^{\frac{p}{t}} - b^m)^{\frac{n}{m}}$; les substitutions faites, la formule sera $\frac{pz^{\frac{p}{t}-1}dz}{tm} \times z^{-\frac{p}{t}} \times (z^{\frac{p}{t}} - b^m)^{\frac{1}{m}+\frac{n}{m}-1}$; mais $\frac{n+1}{m}$ étant un nombre entier, $\frac{1+n}{m} - 1$, indiquera aussi une puissance entière; ainsi la formule n'aura jamais de radicaux qui embrassent des quantités complexes. Lors donc que $\frac{n+1}{m} - 1$ sera un nombre entier positif, l'intégrale que l'on trouvera par les regles que j'ai données, dépendra tout au plus de la quadrature de l'hyperbole, c'est-à-dire de la logarithmique; & lorsque $\frac{n+1}{m} - 1$ sera un nombre entier négatif, l'intégrale dépendra des quadratures du cercle & de l'hyperbole, & on la trouvera en suivant des regles que je donnerai dans la suite.

40. JE passe maintenant aux fractions qui n'ayant pas de radicaux, ont à leur dénominateur la variable élevée à une puissance quelconque; & je suppose que les racines du dénominateur soient imaginaires, puisqu'il n'y a de difficulté que dans ce cas. Dans les fractions de ce genre, toutes les fois que le dénominateur pourra se décomposer en facteurs réels, dans lesquels la variable ne surpasse pas la seconde dimension, la formule se décomposera elle-même en autant de fractions qu'il y aura de ces facteurs réels; & chacune de ces fractions pourra être intégrée, en admettant cependant les quadratures du cercle & de l'hyperbole. Par exemple, si l'on propose la formule

$\frac{aadx}{(xx+ax+bb).(xx+cx+cb)}$; on ſuppoſera l'équation ſuivante, ſavoir que. . . . .]

$$\frac{acdx}{(xx+ax+bb).(xx+cx+cb)} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+ax+bb} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+cx+cb}$$

, A, B, C, D étant des quantités conſtantes arbitraires dont on déterminera les valeurs par des calculs aſſez faciles.

Si la formule étoit $\frac{abdx}{(xx+ax+bb).(xx\pm aa)(x\pm c)}$; on ſuppoſeroit $\frac{abdx}{(xx+ax+bb)(xx\pm aa)(x\pm c)} = \frac{Axdx+Bdx}{(xx+ax+bb)} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx\pm aa} + \frac{Hdx}{x\pm c}$; & ainſi des autres en procédant de la même manière, s'il y avoit un plus grand nombre de facteurs dans le dénominateur. On réduira enſuite tous les termes de ces équations au même dénominateur, & on ſera tout paſſer d'un même côté du ſigne d'égalité. Alors, en égalant à zero les premiers termes, on aura une équation d'où l'on tirera la valeur de l'indéterminée A. De même, la comparaiſon des ſeconds, des troiſièmes, des quatrièmes termes, &c, donnera les valeurs des indéterminées B, C, D, &c, exprimées par les conſtantes qui ſe trouvent dans la formule propoſée. Ces valeurs ſubſtituées dans l'équation à la place des majuſcules A, B, C, D, &c, donneront de nouvelles fractions qui toutes enſemble équivalent à la formule propoſée, & qui la reſtitueront en effet ſi on les ajoute après les avoir réduites au même dénominateur.

Venons à un exemple particulier; ſoit propoſé d'intégrer la fraction $\frac{aadx}{(xx+2ax-aa).(xx+aa)}$;

On supposera que $\frac{aadx}{(xx+2ax-aa)(xx+aa)} =$ $\frac{Axdx+Bdx}{xx+2ax-aa} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+aa}$. On réduira tous les termes de cette équation à un commun dénominateur, on fera passer $aadx$ de l'autre côté du signe d'égalité, & on aura

$$\left.\begin{array}{l} Ax^3dx + Bxxdx + Aaaxdx + Baadx + \\ Cx^3dx + Dxxdx + 2Daxdx - Daadx \\ \qquad + 2Caxxdx - Caaxdx - aadx \end{array}\right\} = 0.$$

Alors les premiers termes égalés à zero donnent $A+C=0$, ou $A=-C$; les seconds, $B+D+2Ca=0$, c'est-à-dire, $B=2Aa-D$, en mettant $-A$ au lieu de C; les troisièmes, $Aaa+2Da-Caa=0$, d'où l'on tire $C=A+\frac{2D}{a}$; & les derniers, $Baa-Daa-aa=0$, qui, en mettant au lieu de B sa valeur donnée en D & en A, devient $D=Aa-\frac{1}{3}$; on a donc $C=\frac{3Aa-1}{3a}$; mais $C=-A$; donc $A=\frac{1}{4a}$, $D=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{4a}$; ce qui donnera enfin. . . . .

$\frac{aadx}{(xx+2ax-aa)(xx+aa)} = \frac{xdx+3adx}{4a(xx+2ax-aa)}$ $\frac{-xdx-adx}{4a(xx+aa)}$. Mais ces deux fractions, en faisant évanouir le second terme du dénominateur de la première sont intégrables par les quadratures du cercle

& de l'hyperbole. En effet, on trouvera, par les regles que l'on a données, que l'intégrale est $\frac{1}{4}$L.$\sqrt{[xx+2ax-aa]}+\frac{1}{2\sqrt{(2aa)}}$ L.$\sqrt{[x+a-\sqrt{(2aa)}]}-\frac{1}{2\sqrt{(2aa)}}$ L.$\sqrt{[x+a+\sqrt{(2aa)}]}-\frac{1}{4a}$ L.$\sqrt{[xx+aa]}$ — une quatrième proportionnelle à $4aa$, à l'unité, & à l'arc de cercle, qui auroit a pour raïon & x pour tangente.

41. Si de plus la fraction est multipliée par une puissance quelconque, mais positive, de la variable; s'il s'agissoit, par exemple, de la fraction $\frac{aax^n dx}{(xx+2ax-aa)(xx+aa)}$, il faudroit la supposer égale à $\frac{Ax^{n+1}dx+Bx^n dx}{xx+2ax-aa}+\ldots\ldots$ $\frac{Cx^{n+1}dx+Dx^n dx}{xx+aa}$, & on trouveroit de la même maniere que ci-dessus les valeurs des indéterminées A, B, C, &c; ou bien encore, on pourroit opérer comme si la puissance x^n n'y étoit pas; on multiplieroit ensuite les fractions résultantes par cette puissance, & on parviendroit également à de nouvelles fractions, qui n'exigeroient pas des quadratures supérieures à celles du cercle & de l'hyperbole, & qu'on intégreroit en suivant les regles que j'ai données.

42. Si la puissance de la variable, qui multiplie la fraction, est négative, c'est-à-dire, si elle devient positive en passant au dénominateur; on multipliera par cette puissance tous les dénominateurs des frac-

tions résultantes, qui auront, par ce moyen, la forme que l'on va voir.

Soit, par exemple, la fraction............
$\frac{x^{-n}dx}{(xx+ax+bb)(xx\pm aa)(x\pm c)}$; on la décomposera, & on opérera comme si x^{-n} n'y étoit point, & ayant multiplié ensuite chaque terme par x^{-n}, on aura $\frac{x^{-n}dx}{(xx+ax+bb)(xx\pm aa)(x\pm c)} =$
$\frac{Axdx+Bdx}{(xx+ax+bb).x^{n}} + \frac{Cxdx+Ddx}{(xx\pm aa).x^{n}} + \ldots\ldots$
$\frac{Hdx}{(x\pm c).x^{n}}$; par les lettres majuscules A, B, C, D, &c. j'entens désigner ici les valeurs déja trouvées des indéterminées, qui rendent la somme de ces fractions égale à la fraction proposée.

Il n'est pas besoin d'autre artifice, pour la derniere fraction $\frac{Hdx}{(x\pm c).x^{n}}$; on la fait intégrer par les regles que j'ai données.

Quant à la premiere, supposons, pour donner plus de clarté à notre exemple, que $A = aa$, & $B = abb$, cette fraction deviendra $\frac{aaxdx+abbdx}{(xx+ax+bb).x^{n}}$. On fera $\frac{aaxdx+abbdx}{(xx+ax+bb).x^{n}} = \frac{Mxdx+Ndx}{xx+ax+bb} +$
$\frac{Px^{n-1}dx+Hx^{n-2}dx+Ex^{n-3}dx+\&c.}{x^{n}}$, en continuant ainsi jusqu'à ce que le dernier terme soit constant, ou que la puissance de x soit zero. On réduira ensuite ces fractions au même dénominateur, on fera tout passer du même côté du signe d'égalité,

& on trouvera comme ci-dessus les valeurs des indéterminées. On traitera de même l'autre fraction $\frac{Cx\,dx + D\,dx}{(xx \pm aa).x^m}$, & on aura enfin l'intégrale de la formule proposée.

Donc en général l'intégration de la formule.. $\frac{x^{\pm m}dx}{(xx+ax+bb)(xx\pm aa)(x\pm c)\,\&c.}$, dépend seulement des quadratures du cercle & de l'hyperbole; & on en trouvera toujours l'intégrale, quels que soient les facteurs réels du dénominateur, pourvu cependant que la variable n'y ait pas plus de deux dimensions.

43. MAIS si le dénominateur de la fraction proposée n'est pas décomposé en ses facteurs réels de deux dimensions au plus, ni ne peut l'être par les regles ordinaires de l'Algèbre; on pourra cependant, avec un peu d'artifice, parvenir à cette décomposition toutes les fois que la formule sera convertible, ou qu'elle sera le produit de plusieurs formules convertibles. J'appelle *formules convertibles* celles où le plus grand exposant de la variable, que je désigne par n, est pair & positif, qui ont ensuite a^n pour dernier terme, & dont les termes intermédiaires également éloignés des extrêmes, ont le même coëfficient, le même signe, & sont rendus homogènes par la constante dont le dernier terme est composé; telles sont les trois formules suivantes x^6+a^6, $x^4+bx^3+ccxx+aabx+a^4$, $x^6-bx^5+b^3x^3-a^4bx+a^6$. S'il s'agissoit de la formule $x^5+bx^4+a^4x+a^4b$, on l'écriroit sous cette forme $(x^4+a^4).(x+b)$; or x^4+a^4 est une formule convertible, & le facteur $x+b$ étant linéaire ne peut présenter aucune

difficulté. Il faut l'entendre de même d'une infinité d'autres.

44. QUE l'on ait donc à décomposer $x^m - a^m$ en facteurs réels, dans lesquels x n'ait pas plus de deux dimensions, & n'ait pas d'exposant fractionnaire; & supposons en premier lieu que m soit un nombre entier pair & positif. Dans ce cas, $x^m - a^m$ se résoudra en ces deux facteurs $x^{\frac{m}{2}} + a^{\frac{m}{2}}$, & $x^{\frac{m}{2}} - a^{\frac{m}{2}}$, dont les exposants ne sont pas fractionnaires, puisque m est un nombre entier pair. Le premier de ces facteurs se décomposera par les regles que je donnerai bientôt pour le facteur $x^m + a^m$. Pour le second $x^{\frac{m}{2}} - a^{\frac{m}{2}}$, si $\frac{m}{2}$ est encore un nombre pair, on le décomposera de nouveau en ces deux facteurs $x^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{4}}$, & $x^{\frac{m}{4}} - a^{\frac{m}{4}}$, dont les exposants sont des entiers; mais si $\frac{m}{2}$ est un nombre impair, on le résoudra par les regles que l'on verra bientôt pour le binome $x^m - a^m$ lorsque m est impair.

En second lieu, si on se propose de résoudre le binome $x^m + a^m$, m étant un nombre entier pair & positif, cas dans lequel ce binome est convertible. On supposera $x^m + a^m = 0$; on prendra une autre formule convertible, dans laquelle le plus grand exposant de x soit $m - 2$, qui de plus ait tous ses termes, dont le dernier soit a^{m-2}, & qui ait, par exemple, b pour coëfficient du second terme, cc pour celui du troisième, d^3 pour celui du quatrième, &c; on égalera le tout à zero; & on aura ainsi une équation qu'il faudra multiplier par $xx + fx + aa$; le produit qui en résultera sera une autre équation convertible, dans laquelle le plus grand exposant de x sera

chacun

$=m$. On comparera les termes de cette équation, chacun à chacun, avec ceux de l'équation fictice $x^m + a^m = 0$, dans laquelle les coëfficients des termes intermédiaires sont zero. La comparaison des seconds termes donnera la valeur de b, celle des troisièmes termes donnera cc, celle des quatrièmes donnera d^3, & ainsi de suite, jusqu'au terme du milieu inclusivement; (les équations qu'on trouveroit au-delà seroient les mêmes que celles qu'on a déja eues, parce que les équations que l'on compare sont convertibles); la derniere comparaison donnera la valeur de f exprimée par une équation qui aura $\frac{m}{2}$ dimensions, & dont les racines qui seront toutes réelles, donneront les valeurs de f; & ces valeurs substituées chacune dans le trinome $xx + fx + aa$ donneront tout autant de trinomes, qui multipliés tous ensemble, reproduiront le binome $x^m + a^m$.

Que l'on propose $x^4 + a^4$. Je prends une équation convertible du second degré, telle que $xx + hx + aa = 0$; je la multiplie par $xx + fx + aa = 0$, ce qui donne l'équation convertible

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + hx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 \\ \quad + fx^3 + \ \ hfxx + aahx \end{array}\right\} = 0.$$

Je la compare à l'équation fictice $x^4 + a^4 = 0$; & la comparaison des seconds termes donne $h + f = 0$, ou $h = -f$; celle des termes du milieu donne $2aa + hf = 0$, ou $ff - 2aa = 0$, en mettant $-f$ au lieu de h, & par conséquent $f = \pm \sqrt{[2aa]}$.

Soit proposée $x^6 + a^6$. Je prends l'équation convertible $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$; je la multiplie par $xx + fx + aa = 0$; il en résulte l'équation

$$\left.\begin{array}{l} x^6+bx^5+ccx^4+2aabx^3+a^4xx+a^4fx+a^6 \\ \quad +fx^5+bfx^4+fccx^3+aabfxx+a^4bx \\ \qquad +aax^4 \qquad\quad +aaccxx \end{array}\right\}=0.$$

Je la compare à l'équation proposée $x^6+a^6=0$; & par la comparaison des seconds termes, je trouve $b+f=0$; par celle des troisièmes termes $cc+bf+aa=0$, c'est-à-dire en y substituant la valeur de b, $cc-ff+aa=0$; enfin par la comparaison des termes du milieu, j'ai $2aab+fcc=0$, ou en mettant au lieu de b & de cc leurs valeurs, $f^3-3aaf=0$.

Enfin, par de semblables opérations, on trouve que
si $m=4$, on a $ff-2aa=0$;
si $m=6$, on a $f^3-3aaf=0$;
si $m=8$, on a $f^4-4aaff+2a^4=0$;
si $m=10$, on a $f^5-5aaf^3+5a^4f=0$;
si $m=12$, on a $f^6-6aaf^4+9a^4ff-2a^6=0$;
si $m=14$, on a $f^7-7aaf^5+14a^4f^3-7a^6f=0$;
&c.

Pour résoudre la formule $x^4+2bx^3+2aabx+a^4$ qui est aussi convertible, je multiplie l'équation convertible $xx+hx+aa=0$, par $xx+fx+aa=0$; j'aurai comme ci-dessus,

$$\left.\begin{array}{l} x^4+hx^3+2aaxx+aafx+a^4 \\ \quad +fx^3+\ hfxx+aahx \end{array}\right\}=0.$$

Comparant cette dernière équation avec l'équation proposée $x^4+2bx^3+2aabx+a^4=0$, les seconds termes donnent $h+f=2b$, c'est-à-dire $h=2b-f$; les termes du milieu donnent $2aa+hf=0$, qui, en substituant la valeur de h, devient $2aa+2bf-ff=0$, ou bien $ff-2bf-2aa=0$.

Soit proposée $x^6+a^3x^3+a^6$. Je prends l'équation convertible $x^4+bx^3+ccxx+aabx+a^4=0$, & la multipliant par $xx+fx+aa$, j'ai

$$\left.\begin{array}{l} x^6+bx^5+ccx^4+2aabx^3+a^4xx+a^4fx+a^6 \\ \quad +fx^5+bfx^4+ccfx^3+aabfxx+a^4bx \\ \qquad +aax^4 \qquad\quad +aaccxx \end{array}\right\}=0.$$

Cette équation comparée avec l'équation $x^6+a^3x^3+a^6=0$, donne, 1°. $b+f=0$; 2°. $cc+bf+aa=0$, qui se réduit à $cc-ff+aa=0$; 3°. $2aab+ccf=a^3$, qui se réduit à $f^3-3aaf-a^3=0$. Et ainsi des autres.

Que l'on ait donc à décomposer $x^4+2bx^3+2aabx+a^4$ en facteurs réels, dans lesquels x n'ait pas d'exposants fractionnaires, ni plus grands que 2. L'équation qui doit donner les valeurs de f, est donc $ff-2bf=2aa$, de laquelle on tire les valeurs de f toutes réelles, savoir $f=b+\sqrt{[2aa+bb]}$, $f=b-\sqrt{[2aa+bb]}$. Chacune de ces valeurs étant mise au lieu de f dans le trinome $xx+fx+aa$, on trouvera que $x^4+2bx^3+2aabx+a^4$ est le produit des deux facteurs réels $xx+bx+x\sqrt{[2aa+bb]}+aa$, $xx+bx-x\sqrt{[2aa+bb]}+aa$. De même, si l'on vouloit décomposer $x^6+aax^4+a^4xx+a^6=0$; l'équation qui donne les valeurs de f étant $f^3-2aaf=0$ de laquelle on tire les valeurs $f=0$, $f=\sqrt{[2aa]}$, $f=-\sqrt{[2aa]}$, on trouveroit que $x^6+aax^4+a^4xx+a^6$ est le produit des trois facteurs réels $xx+aa$, $xx+x\sqrt{[2aa]}+aa$, $xx-x\sqrt{[2aa]}+aa$.

Soit proposée $x^{10}+a^{10}$. L'équation qui doit donner les valeurs de f est $f^5-5aaf^3+5a^4f=0$, de laquelle on tirera ces cinq valeurs de f toutes réelles, $f=0$, $f=a\sqrt{\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]}$, $f=-a\sqrt{\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]}$, $f=a\sqrt{\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]}$, $f=$

$-a\sqrt{\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]}$. Substituant donc chacune de ces valeurs à f dans le trinome $xx+fx+aa$, on trouvera que $x^{10}+a^{10}$ est le produit des cinq facteurs réels $xx+aa$, $xx+ax\sqrt{\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]}+aa$, $xx-ax\sqrt{\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]}+aa$, $xx+ax\sqrt{\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]}+aa$, $xx-ax\sqrt{\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]}+aa$.

On conclura de-là que l'intégrale d'une formule différentielle dont le numérateur est dx multiplié par des constantes quelconques, & dont le dénominateur a les conditions que nous venons de considérer, ne dépendra jamais de quadratures plus relevées que celles du cercle & de l'hyperbole, & pourra toujours se trouver par les regles qu'on a données.

45. QU'IL soit question maintenant de résoudre la formule $x^m \pm a^m$, m étant un nombre entier positif, mais impair.

On divisera la formule par $x \pm a$; le quotient dans le premier cas, est $x^{m-1} - ax^{m-2} + aax^{m-3} - a^3x^{m-4}$ &c, jusqu'au dernier terme qui sera $+a^{m-1}$; & dans le second cas, il est $x^{m-1} + ax^{m-2} + aax^{m-3} + a^3x^{m-4}$ &c, jusqu'au dernier terme qui sera $+a^{m-1}$. On égalera le quotient à zero, ce qui donnera une équation fictice qui est convertible, & que l'on comparera terme à terme avec le produit du trinome $xx+fx+aa$ par une équation convertible dans lequel le nombre des dimensions de l'inconnue x soit $m-3$; de la comparaison des seconds termes, on tirera la valeur du premier coëfficient supposé, par exemple de b; de celle des troisièmes la valeur de cc, de celle des quatrièmes, la valeur de d^3, & enfin de celle des termes du milieu, on tirera les valeurs de f exprimée par une équation du degré $\frac{m-1}{2}$, qui aura toutes ses racines réelles; ces valeurs réelles de f substituées dans le trinome $xx+fx+aa$ fourniront autant de trinomes, qui, multipliés ensemble, & multipliés par $x \pm a$, redonneront la formule proposée $x^m \pm a^m$.

C'est par cette voie qu'on trouvera les équations suivantes qui serviront à résoudre le binome $x^m + a^m$ lorsque m est un nombre entier, positif & impair.

Si $m = 3$, on a $f + a = 0$;
si $m = 5$, on a $ff + af - aa = 0$;
si $m = 7$, on a $f^3 + aff - 2aaf - a^3 = 0$;
si $m = 9$, on a $f^4 + af^3 - 3aaff - 2a^3f + a^4 = 0$;
si $m = 11$, on a $f^5 + af^4 - 4aaf^3 - 3a^3ff + 3a^4f + a^5 = 0$;
si $m = 13$, on a $f^6 + af^5 - 5aaf^4 - 4a^3f^3 + 6a^4ff + 3a^5f - a^6 = 0$.
&c.

S'il s'agissoit du binome $x^m - a^m$, m étant toujours un nombre entier, positif & impair; après l'avoir divisé comme il a été dit par $x - a$, les mêmes équations auroient lieu en changeant seulement les signes des termes second, quatrième, sixième, huitième, &c.

46. SI au lieu de la formule $x^m \pm a^m$, où m est supposé un nombre entier positif impair, on avoit à réduire une autre formule, telle qu'en la divisant par $x \pm$ une constante, il en résultât une formule convertible, par exemple celle-ci $x^5 + hx^4 - aax^3 - aahxx + a^4x + a^4h$, qui divisée par $x+h$, donne $x^4 - aaxx + a^4$; il faudroit opérer sur cette dernière à l'ordinaire, & les valeurs de f étant trouvées, si on les substituoit dans $xx + fx + aa$, on auroit autant de trinomes que de valeurs de f, qui

multipliés ensemble, & multipliés par $x+h$, rétabliroient la formule proposée.

Qu'on ait, par exemple, à décomposer x^5+a^5. L'équation qui doit donner les valeurs de f, (suivant tout ce qui a été dit) est $ff+af-aa=0$; les valeurs de f qu'elle donne, sont $f=\frac{-a\pm a\sqrt{5}}{2}$; Substituant ces valeurs dans le trinome $xx+fx+aa$, on verra que la formule proposée x^5+a^5 est le produit de ces trois facteurs $xx-\frac{ax+ax\sqrt{5}}{2}+aa$, $xx-\frac{ax-ax\sqrt{5}}{2}+aa$, $x+a$.

Si l'on veut décomposer la formule $x^5+hx^4-aax^3-aahxx+a^4x+a^4h$, qui, divisée par $x+h$, donne $x^4-aaxx+a^4$; l'équation convenable ici pour f, sera $ff=3aa$, d'où l'on tire $f=\pm\sqrt{[3aa]}$. Ces valeurs de f substituées dans $xx+fx+aa$, donneront deux trinomes réels $xx+x\sqrt{[3aa]}+aa$, $xx-x\sqrt{[3aa]}+aa$, dont le produit multiplié par $x+h$, redonnera la formule proposée.

47. ON conclura de-là que l'intégrale d'une formule différentielle dont le numérateur est le produit de dx par des constantes quelconques, & dont le dénominateur est de la nature de ceux que nous venons de considérer, ne dépendra jamais de quadratures plus relevées que celles du cercle & de l'hyperbole, & qu'on pourra toujours la trouver par les regles qu'on a données.

48. LORSQUE l'équation qui donne les valeurs de f est des degrés supérieurs, & qu'on n'en peut pas avoir algébriquement les racines, on se contentera de les chercher par des constructions géométriques. Ainsi, pour trouver les facteurs de x^7+a^7, &

ensuite l'intégrale de la fraction $\frac{dx}{x^7+a^7}$, on divisera x^7+a^7 par $x+a$; le quotient sera $x^6-ax^5+aax^4-a^3x^3+a^4xx-a^5x+a^6$. On tirera les valeurs de f, convenables à cette formule, de l'équation $f^3+aff-2aaf-a^3=0$. On trouvera par les méthodes que donne l'Algèbre, soit au moyen de l'intersection des courbes, soit par quelqu'autre voie, les valeurs de f positives & négatives, qui seront toutes réelles; que l'une, par exemple, soit A, l'autre $-B$, & l'autre $-C$; la grandeur x^7+a^7 sera le produit de ces quatre facteurs $x+a$, $xx+Ax+aa$, $xx-Bx+aa$, $xx-Cx+aa$; & puisque les quantités A, B, C, sont réelles & connues, on pourra intégrer la formule $\frac{dx}{x^7+a}$ par les seules quadratures du cercle & de l'hyperbole.

49. AVEC le même artifice par lequel on est parvenu aux équations qui servent à décomposer le binome $x^m \pm a^m$, on trouvera celles qui donneront la décomposition du trinome $x^{2m} \pm 2aax^m + aa$, m désignant un nombre entier positif pair; & en général toutes les fois qu'on se proposera de décomposer une formule, pourvu qu'elle soit convertible, ou qu'elle soit un produit de formules convertibles & de quantités linéaires, on en viendra à bout par la méthode que j'ai exposée.

Le cas du produit d'une formule convertible par une linéaire, se trouve entr'autres lorsque m est un nombre impair.

Soit $x^8+b^4x^4-a^4x^4-a^4b^4$, ou (x^4+b^4). (x^4-a^4), ou $(x^4+b^4)(xx+aa)(xx-aa)$; on n'aura qu'à résoudre x^4+b^4 en ses facteurs réels de deux dimensions, qui seront, par exemple, $xx+$

$Ax+bb$, $xx+Bx+bb$; & on aura $(x^4+b^4)(x^4-a^4)=(xx+Ax+bb)(xx+Bx+bb)(xx+aa)(xx-aa)$. Si la formule proposée eut été $(x^4+b^4).(x^4+a^4)$, on auroit aussi décomposé x^4+a^4 en deux facteurs tels que $xx+Cx+aa$, & $xx+Dx+aa$, & on auroit eu $(x^4+b^4).(x^4+a^4)=(xx+Ax+bb).(xx+Bx+bb)(xx+Cx+aa)(xx+Dx+aa)$.

50. POUR avoir l'intégrale de la formule... $\frac{ma^m dx}{x^m \pm a^m}$ dans laquelle m exprime un nombre quelconque entier positif, que l'on appelle A, B, C les valeurs de f affectées de leur signe, qui doivent servir à la décomposition du dénominateur $x^m \pm a^m$, & que l'on fasse attention qu'il y a des cas où l'une de ces valeurs est $=0$; ce qui arrivera toutes les fois que le dénominateur étant x^m+a^m, m sera un des termes de cette suite 2, 6, 10, 14, 18, &c; & toutes les fois que le dénominateur étant x^m-a^m, m sera un nombre de cette autre suite 4, 8, 12, 16, 20, &c. Cela posé, l'intégrale cherchée sera $\pm\frac{A}{a}$ L. $\sqrt{[xx+Ax+aa]}\pm\frac{B}{a}$ L. $\sqrt{[xx+Bx+aa]}\pm\frac{C}{a}$ L. $\sqrt{[xx+Cx+aa]}$, &c (je suppose ces logarithmes pris dans la logarithmique dont la soutangente $=a$) $\pm$ le double de la somme d'autant d'arcs de cercle qu'il y a de valeurs A, B, C de f, arcs qui ayent respectivement pour raïons $\sqrt{[aa-\frac{1}{4}AA]}$. $\sqrt{[aa-\frac{1}{4}BB]}$, $\sqrt{[aa-\frac{1}{4}CC]}$, &c, & pour tangentes $x+\frac{1}{2}A$, $x+\frac{1}{2}B$, $x+\frac{1}{2}C$, &c. Telle sera l'intégrale de la formule $\frac{ma^m dx}{x^m+a^m}$, lorf-

que m sera un nombre pair positif; mais si dans cette même formule m est un nombre impair positif, il faudra ajouter au tout le logarithme de $x+a$, parce que le dénominateur a encore $x+a$ pour racine. Et si la formule est $\frac{m a^m dx}{x^n - a^n}$, & que m soit un nombre impair positif, il faudra ajouter, non pas le log. de $x+a$, mais celui de $x-a$. Enfin la formule étant toujours $\frac{m a^m dx}{x^n - a^n}$, si m est un nombre pair positif, on ajoutera le logarithme de $x-a$, & on soustraira celui de $x+a$, prenant toujours ces logarithmes dans la logarithmique dont la sou-tangente est a.

51. MAIS si dans la formule proposée $\frac{dx}{x^n \pm a^n}$ le nombre m étoit un entier négatif, c'est-à-dire si la formule étoit $\frac{dx}{x^{-n} \pm a^{-n}}$, on la mettra sous cette forme $\frac{dx}{\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{a^n}}$, qui, en réduisant au même dénominateur, deviendra $\frac{a^n x^n dx}{a^n \pm x^n}$. Alors faisant la division réelle, afin que la plus grande puissance de x soit moindre dans le numérateur que dans le dénominateur, on aura enfin $\pm a^n dx \pm \frac{a^{2n} dx}{x^n \pm a^n}$, formule dans laquelle m est positif. Au moyen de cet artifice, les regles qu'on a données serviront donc aussi dans la formule $\frac{dx}{x^n \pm a^n}$ où m est un nombre entier négatif.

52. SI la fraction $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ étoit encore multipliée par x^n, n étant un entier positif ou négatif, on décomposeroit le dénominateur en ses facteurs réels de deux dimensions, & on se trouveroit dans le cas que j'ai considéré aux n^{os}. 41 & 42, & qui se rapporte aux quadratures du cercle & de l'hyperbole.

53. CEPENDANT lorsque n est négatif, voici une voie plus expéditive. Soit en premier lieu n plus petit que m; on mettra la formule $\frac{dx}{(x^m + a^m).x^n}$ sous cette forme $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{x^{m-n}dx}{a^m(x^m + a^m)}$, & la formule $\frac{dx}{(x^m - a^m).x^n}$, sous celle-ci $\frac{-dx}{a^m x^n} + \frac{x^{m-n}dx}{a^m(x^m - a^m)}$.

Si en second lieu n est plus grand que m, on exprimera la formule $\frac{dx}{(x^m + a^m).x^n}$ par l'équivalente $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{dx}{a^{2m} x^{n-m}} + \frac{dx}{a^{3m} x^{n-2m}} - \frac{dx}{a^{4m} x^{n-3m}}$, &c, jusqu'au terme où l'exposant de x est sur le point d'être plus grand que m, $\pm$ (suivant que le demande l'alternative des signes) $\frac{dx}{(x^m + a^m).a^r x^t}$, où r est l'exposant qu'avoit a dans le terme précédent, & t est ce qui reste après avoir divisé le nombre n par le nombre m. Et s'il s'agit de la formule $\frac{dx}{(x^m - a^m).x^n}$, tous les termes de la férie feront affectés du figne négatif, & le terme $\frac{dx}{(x^m - a^m)a^r x^t}$, qui eft hors la férie, fera toujours précédé du figne pofitif. Soit donnée pour exemple la formule $\frac{dx}{(x^3 + a^3)x^5}$; elle fe change en $\frac{dx}{a^3 x^5} - \frac{dx}{(x^3 + a^3)a^3 xx}$; & l'on fait que $-\frac{dx}{(x^3 + a^3)a^3 xx} = -\frac{dx}{a^6 xx} + \frac{xdx}{a^6(x^3 + a^3)}$. On a donc $\frac{dx}{(x^3 + a^3).x^5} = \frac{dx}{a^3 x^5} - \frac{dx}{a^6 xx} + \frac{xdx}{a^6.(x^3 + a^3)}$, quantités que l'on fait intégrer toutes.

54. MAIS fi m eft un nombre rompu, pofitif ou négatif, foit appellé t le numérateur de cette fraction que je fuppofe réduite à fes moindres termes, & p fon dénominateur, de maniere que la formule donnée foit exprimée par $\frac{dx}{x^{\frac{t}{p}} \pm a^{\frac{t}{p}}}$; on fuppofera $x = y^p$ & $a = b^p$, & la formule fe changera en celle-ci $\frac{py^{p-1}dy}{y^t \pm b^t}$ qui n'a plus d'expofants fractionnaires, & qu'on peut décompofer par les regles qu'on connoit.

Prenons pour exemple la formule $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \pm a^{\frac{1}{2}}}$; je fuppofe $x = yy$, $a = bb$; ainfi $dx = 2ydy$, & les ſubſtitutions étant faites, j'ai $\frac{2y\,dy}{y^2 \pm b^2}$, où les expoſants ne ſont plus fractionnaires.

55. SI l'on propoſe la formule $\frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$ dans laquelle m & n ſoient des nombres rompus; appellant r le numérateur de la fraction n, p ſon dénominateur, t le numérateur de la fraction m, & q ſon dénominateur, (j'entens toujours que ces fractions ſoient exprimées par leurs moindres termes): la formule alors ſera $\frac{x^{\frac{r}{p}} dx}{x^{\frac{t}{q}} \pm a^{\frac{t}{q}}}$, r, p, q, t étant des nombres entiers poſitifs ou négatifs. Que l'on ſuppoſe maintenant $x = y^{pq}$, & $a = b^{pq}$; la formule ſe changera en celle-ci, $\frac{pq\,y^{qr+pq-1}dy}{y^{pt} \pm b^{pt}}$ qui n'a plus de fractions aux expoſants.

Par exemple, ſoit la formule $\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{4}{5}} \pm a^{\frac{4}{5}}}$; je ſuppoſe $x = y^{10}$, $a = b^{10}$; ainſi $dx = 10y^9 dy$, $x^{\frac{1}{2}} = y^5$, $x^{\frac{4}{5}} = y^8$, & après les ſubſtitutions, la formule eſt $\frac{10y^{14}dy}{y^8 \pm b^8}$ qui n'a plus d'expoſant fractionnaire.

56. ENFIN, s'il s'agit de la formule $\frac{x^n dx}{(x^m \pm a^m)^u}$, ($m$, n & u étant des nombres entiers poſitifs), on pourra toujours en avoir l'intégrale par les ſeules quadratures du cercle & de l'hyperbole; & cette intégrale ſera composée de quantités algébriques, & d'une

quantité à intégrer, de la forme qui a été considérée dans les articles précédents.

Supposons que la formule $\int \frac{x^n dx}{(x^m \pm a^m)^\mu} =$

$$\frac{Bx^{n+\mu m-2m+1} + Cx^{n+\mu m-2m} + Dx^{n+\mu m-2m-1} + \&c.}{(x^m \pm a^m)^{\mu-1}},$$

jusqu'au terme constant, c'est-à-dire, jusqu'à celui où l'exposant de x est zero; appellons ce terme K, & ajoutons à la quantité précédente, $A\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$;

c'est-à-dire, faisons $\int \frac{x^n dx}{(x^m \pm a^m)^\mu} = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{Bx^{n+\mu m-2m+1} + Cx^{n+\mu m-2m} + Dx^{n+\mu m-2m-1}, \&c, + K}{(x^m \pm a^m)^{\mu-1}} +$$

$A\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$. On différentiera l'équation; on la réduira à zero, en faisant tout passer du même côté, & on en ordonnera les termes; alors les premiers termes égalés à zero donneront la valeur de l'indéterminée B, les seconds termes égalés aussi à zero, donneront la valeur de C, & ainsi des autres; on mettra ces valeurs à la place des majuscules; & puisque l'intégrale $\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$ ne dépend que des quadratures du cercle & de l'hyperbole, & que les autres termes sont algébriques, il est clair que la formule proposée n'exige pas de quadratures supérieures.

57. IL peut se faire que quelqu'un des coéfficients B, C, D, &c, soit arbitraire, ce qui n'arrivera cependant que lorsque n sera plus grand que $m - 1$. Il faut remarquer aussi que toutes les fois que $m = n + 1$, le coéfficient A sera égal à zero, & par conséquent l'intégrale de la formule sera algébrique.

58. MAIS si dans la formule différentielle proposée, l'exposant n étoit négatif, de manière que la formule fût $\frac{dx}{x^r(x^n \pm a^n)^\mu}$, l'intégrale seroit.....

$$\frac{Bx^{\mu n - 2n} + Cx^{\mu n - 2n - 1} + Dx^{\mu n - 2n - 2} + \&c + K}{x^{r-1}.(x^n \pm a^n)^{\mu - 1}} +$$

$A\int \frac{dx}{x^r(x^n \pm a^n)}$; & l'on détermineroit les coëfficiens B, C, D, &c, de la même manière que ci-dessus.

Soit proposée, par exemple, $\frac{x\,dx}{(x^3 + a^3)^2}$. Dans ce cas on a $n = 1$, $m = 3$, $\mu = 2$; on aura par conséquent $\int \frac{x\,dx}{(x^3 + a^3)^2} = \frac{Bxx + Cx + K}{x^3 + a^3} +$ $A\int \frac{x\,dx}{x^3 + a^3}$; & en différentiant, $\frac{x\,dx}{(x^3 + a^3)^2} =$

$$\frac{(2Bxdx + Cdx)(x^3 + a^3) - 3xxdx(Bxx + Cx + K)}{(x^3 + a^3)^2} +$$

$\frac{Ax\,dx}{x^3 + a^3}$. Réduisant tout au même dénominateur, & ordonnant l'équation, on trouvera

$$\left.\begin{array}{llll} 2Bx^4dx + & Cx^3dx - 3Kxxdx & + 2Ba^3xdx & + Ca^3dx \\ -3Bx^4dx & - 3Cx^3dx & + Aa^3xdx & \\ + Ax^4dx & & - xdx & \end{array}\right\} = 0.$$

Les premiers, les seconds, les troisièmes termes, &c, égalés à zero donnent $A - B = 0$, ou $A = B$; $C = 0$; $K = 0$, $2Ba^3 + Aa^3 - 1 = 0$; c'est-à-dire $Aa^3 = 1 - 2Ba^3$, & (en mettant A au lieu de B) $A = \frac{1}{3a^3} = B$; ce qui donne enfin.........

$$\int\frac{xdx}{(x^3+a^3)^2}=\frac{xx}{3a^3(x^3+a^3)}+\frac{1}{3a^3}\int\frac{xdx}{x^3+a^3}.$$

Mais $\int\frac{xdx}{x^3+a^3}=\frac{1}{3aa}\times\left(\mathrm{L}.\sqrt{[xx-ax+aa]}-\mathrm{L}.(x+a)\right)+\frac{2}{3aa}$ multiplié par l'arc de cercle qui a pour raïon $\sqrt{\left[\frac{3aa}{4}\right]}$, & pour tangente $x-\frac{a}{2}$. On a donc $\int\frac{xdx}{(x^3+a^3)^2}=\frac{xx}{3a^3(x^3+a^3)}+\frac{1}{9a^5}\mathrm{L}.\sqrt{[xx-ax+aa]}-\frac{1}{9a^5}\mathrm{L}.(x+a)+\frac{2}{9a^5}\times$ l'arc de cercle dont le raïon $=\sqrt{\left[\frac{3aa}{4}\right]}$ & la tangente $=x-\frac{a}{2}$; je suppose les log. pris dans la logarithmique dont la sou-tang. $=a$.

59. Si l'exposant m étoit négatif, il faudroit transformer la formule en une autre équivalente dans laquelle l'exposant fut positif, comme on l'a indiqué au n°. 51.

60. Si m & n étoient tous les deux des nombres rompus, on feroit les substitutions du n°. 55.

61. Si de plus l'exposant u est un nombre rompu positif ou négatif, il suffira que la formule soit dans un des cas considérés au n°. 39, pour qu'elle puisse être transformée en une autre qu'on pourroit traiter d'après les regles qu'on a données.

Ainsi la formule $\frac{x^n dx}{(x^m\pm a^m)^u}$ (les exposants n, m, u étant des nombres entiers ou rompus, mais rationnels, positifs ou négatifs), sera intégrable, ou du moins réductible aux quadratures connues, toutes les fois que ces exposants seront tels que $u-\frac{1}{m}-1-\frac{n}{m}$, ou bien $\frac{1}{m}-1+\frac{n}{m}$ soit un nombre entier quelconque. Si ce nombre entier est positif, la formule s'intégrera algébriquement à la réserve des seuls termes où se trouveroit la puissance $x^{-1}dx$ qui oblige de recourir aux logarithmes. Si ce nombre entier est négatif, la formule pourra toujours être ramenée aux quadratures du cercle & de l'hyperbole.

Dans le premier cas, lorsque $u-\frac{1}{m}-\frac{n}{m}-1$, est égal à un nombre entier, il faudra faire $x^m+a^m=zx^m$, & par conséquent $x^m=\frac{a^m}{z-1}$, $x=\frac{a}{(z-1)^{\frac{1}{m}}}$, $x^n=\frac{a^n}{(z-1)^{\frac{n}{m}}}$, $x^{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(z-1)^{\frac{1+n}{m}}}$; $x^n dx=-\frac{a^{n+1}dz}{m}(z-1)^{\frac{-n-1}{m}-1}$; mais $x^m+a^m=zx^m=\frac{a^m z}{z-1}$, & $(x^m+a^m)^u=\frac{a^{mu}z^u}{(z-1)^u}$. Par conséquent la formule proposée deviendra . . . $-\frac{a^{n+1-mu}z^{-u}dz}{m}\times(z-1)^{\frac{-n-1}{m}-1+u}$, qui, comme on le voit clairement, est intégrable algébriquement (hors les termes exceptés) lorsque $\frac{-n-1}{m}-1+u$ est un nombre entier positif. Si $\frac{-n-1}{m}-1+u$ est un nombre entier négatif,

l'intégrale

l'intégrale de la formule, suivant ce qui a été dit dans les articles précédents, ne tiendra pas à des quadratures plus élevées que celles du cercle & de l'hyperbole.

Je passe au second cas, c'est-à-dire, lorsque $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$ est un nombre entier; on fera $x^m + a^m = z$, & par conséquent $x^m = z - a^m$, $x = (z - a^m)^{\frac{1}{m}}$, $x^n = (z - a^m)^{\frac{n}{m}}$, $x^{n+1} = (z - a^m)^{\frac{1+n}{m}}$, $x^n\, dx = \frac{dz}{m}(z - a^m)^{\frac{n+1}{m} - 1}$; mais $x^m + a^m = z$, & $(x^m + a^m)^r = z^r$; donc par les substitutions la formule deviendra $\frac{dz}{m} \times \frac{(z - a^m)^{\frac{n+1}{m} - 1}}{z^r} = \frac{z^{-r}dz}{m}(z - a^m)^{\frac{n+1}{m} - 1}$, quantité intégrable algébriquement (sauf l'exception expliquée), pourvu que $\frac{n+1}{m} - 1$ soit un nombre entier positif; & si c'est un nombre entier négatif, l'intégrale dépendra (d'après les articles précédents) des quadratures du cercle & de l'hyperbole.

62. Si le dénominateur élevé à une puissance quelconque n'étoit pas un binome, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, mais un multinome quelconque; pourvu qu'il fût réductible en facteurs réels de deux dimensions au plus, soit au moyen des équations convertibles, soit par une autre voie, on pourroit toujours réduire la formule aux quadratures connues.

Soit prise pour exemple la fraction ....
$\frac{dx}{(xx+bx+aa)^2 \cdot (x+c)^3}$. On formera réellement les puissances indiquées dans le dénominateur, & on supposera cette équation $\frac{dx}{(xx+bx+aa)^2 \cdot (x+c)^3}$
$= \frac{Ax^3dx + Bxxdx + Cxdx + Ddx}{x^4 + 2bx^3 + 2aaxx + bbxx + 2aabx + a^4} + \frac{Fxxdx + Gxdx + Hdx}{x^3 + 3cxx + 3ccx + c^3}$, où l'on voit que le second membre a autant de termes qu'il y a de facteurs dans le dénominateur de la fraction proposée, que ces termes ont autant de lettres majuscules ou d'indéterminées qu'il y a d'unités au plus grand exposant de la variable dans leurs dénominateurs respectifs, que dans chaque terme la première majuscule est multipliée par la plus grande puissance de la variable dans son dénominateur diminuée d'une dimension, la seconde majuscule par la même puissance abaissée de deux dimensions, & ainsi des autres. Il faudra déterminer toutes ces constantes à l'ordinaire; le premier terme donnera pour chaque constante une fraction qui sera divisée par $(xx+bx+aa)^2$, dénominateur dans lequel on fera évanouir le terme du milieu, & la fraction deviendra un cas particulier de la formule générale $\frac{x^m dx}{(x^n \pm a^n)^p}$; quant au second terme, il donnera pour chaque constante une fraction qu'on divisera par $(x+c)^3$, & qui s'intégrera par la regle qui a été donnée pour les dénominateurs composés de racines égales.

63. SI de plus le numérateur de la formule proposée étoit multiplié par une puissance soit positive,

ſoit négative de la variable, il faudroit chercher les valeurs des indéterminées, comme ſi la fraction n'étoit pas multipliée par cette puiſſance, par laquelle on multiplieroit enſuite les réſultats, & on acheveroit le reſte à l'ordinaire.

64. Je finirai ce premier Chapitre en expoſant la méthode des polynomes du Comte Jacques Riccati.

Je donne le nom de polynome différentiel aux fractions qui ont pour numérateur dx, & pour dénominateur une ſomme de pluſieurs puiſſances de x, dont les expoſants forment une progreſſion arithmétique qui ſe termine à zero. Lorſque cette condition n'a pas lieu, on y ſupplée par quelque terme affecté du coëfficient $= 0$. Par exemple, l'expreſſion $\frac{dx}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} + a}$, au premier coup d'œil, paroît un trinome, mais elle eſt réellement un quadrinome; ce qui eſt viſible en lui donnant cette forme... $\frac{dx}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} + 0x^{\frac{1}{4}} + a}$.

On a une méthode pour tout polynome dont le dénominateur eſt élevé à une puiſſance entière & poſitive p, méthode qui ſeroit générale, ſi les quantités imaginaires ne la rendoient pas trop ſouvent inutile. On connoît de plus quelques artifices particuliers qui, dans pluſieurs circonſtances, ont leur utilité.

Je commence par le trinome $\frac{dx}{(x^{2n} + ax^n + b)^p} = dy$, d'autant mieux que tous les trinomes ſe réduiſent facilement à celui-ci. On fera $x^n = z + A$; z eſt une nouvelle variable, & A eſt une conſtante que l'on déterminera. Les substitutions donneront $(x^{2n}+ax^n+b)^p=(zz(2A+a)z+AA+aA+b)^p$.

Il faut faire en sorte que les quantités $AA+aA+b$ disparoissent en les supposant $=0$; dans les cas où A ne sera pas imaginaire, cette réduction réussira toujours; & puisque $x^n=z+A$, on aura en différentiant, $mx^{n-1}dx=dz$, & $x=(z+A)^{\frac{1}{n}}$; donc $dx=\frac{dz}{mx^{n-1}}=\frac{dz}{m(z+A)^{\frac{n-1}{n}}}$.

Si l'on fait les substitutions nécessaires, la formule principale $\frac{dx}{(x^{2n}+ax^n+b)^p}$ deviendra

$$\frac{dz}{m(z+A)^{\frac{n-1}{n}}\times(zz+(2A+a)z)^p}=\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z^{-p}dz}{m(z+A)^{\frac{n-1}{n}}\times(z+2A+a)^p}.$$

Le cas le plus simple est celui où l'exposant $p=1$, l'autre exposant m étant un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif; & dans ce cas faisant pour abréger $2A+a=g$, l'expression générale se changera en celle-ci qui est particulière..

$$\frac{z^{-1}dz}{g(z+A)^{\frac{n-1}{n}}+z(z+A)^{\frac{n-1}{n}}}=mdy.$$

Je fais une première division du numérateur par le dénominateur, j'ai pour premier quotient.....
$\frac{z^{-1}dz}{g(z+A)^{\frac{n-1}{n}}}$, & pour reste $-\frac{dz}{g}$, qui doit être divisé par le dénominateur; & par conséquent

$$\frac{z^{-1}dz}{g(z+A)^{\frac{m-1}{m}}+z(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{z^{-1}dz}{g(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}-\frac{dz}{gg(z+A)^{\frac{m-1}{m}}+gz(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}.$$

Le premier terme du second membre de cette égalité est déja réduit aux quadratures connues, & on y ramenera facilement le second, en supposant $z+A=u$, ce qui donnera. . . . .

$$\frac{-dz}{gg(z+A)^{\frac{m-1}{m}}+gz(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{u^{\frac{-m+1}{m}}du}{gg-gA+gu}.$$

Poursuivons notre recherche, & supposons que l'exposant p soit un nombre positif quelconque & entier; nous parviendrons au but en continuant la même opération. Reprenons donc la formule générale

$$\frac{dx}{(x^{2m}+ax^m+b)^p}=\frac{z^{-p}dz}{m(z+A)^{\frac{m-1}{m}}\cdot(z+g)^p}=y;$$

& supposons, par exemple $p=2$, la formule deviendra

$$\frac{z^{-2}dz}{gg(z+A)^{\frac{m-1}{m}}+2gz(z+A)^{\frac{m-1}{m}}+zz(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}=m\,dy.$$

On divisera, comme ci dessus, le numérateur de cette fraction par son dénominateur; le premier quotient sera $\frac{z^{-2}dz}{gg\cdot(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}$, & $\frac{-2z^{-1}dz}{g}-\frac{dz}{gg}$ sera le premier reste qui doit être de nouveau divisé par le dénominateur entier. On fera une seconde division indiquée par la fraction. . . . . . ;

$$\frac{-2z^{m-1}dz}{g^3\cdot(z+A)^{\frac{m-1}{m}}+2ggz\cdot(z+A)^{\frac{m-1}{m}}+gzz\cdot(z+A)^{\frac{m-1}{m}}};$$

après les opérations convenables, on aura pour reste $\frac{4dz}{g}+\frac{2zdz}{gg}$ qui doit être divisé par le dénominateur entier. Il naîtra de-là l'équation suivante,

$$\frac{z^{m-2}dz}{(z+A)^{\frac{m-1}{m}}\cdot(z+g)^2}=\frac{z^{m-2}dz}{gg\cdot(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}-\frac{2z^{m-1}dz}{g^3\cdot(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}+\frac{(4g-1)^2dz}{gg(z+A)^{\frac{m-1}{m}}\cdot(z+g)^2}-+\frac{2zdz}{g^3\cdot(z+A)^{\frac{m-1}{m}}\cdot(z+g)^2}.$$

Les deux premiers termes du second membre de cette équation sont des binomes; & on peut facilement donner aux deux autres la forme du binome en faisant $z+A=u$, ou bien $z+g=u$.

Dans les cas plus composés où p seroit $=3$, $=4$, $=5$, &c. les calculs seroient plus longs, mais la méthode mèneroit également au but.

Cette méthode s'étend à tous les polynomes à l'infini, lorsque p est un nombre entier positif; pour le cas où p est un nombre entier négatif, les calculs sont si faciles, que ce n'est pas la peine d'en parler. Pour appliquer la méthode aux autres polynomes, il suffira de répéter la substitution $x=z+A$, $z=u+B$, en faisant toujours évanouir les termes qui ne sont composés que de quantités constantes; par où il arrivera que le quadrinome, par exemple, se réduira à un trinome, & le trinome à un binome. Il sera bon encore d'avoir recours de temps en temps à une demi-division, afin de n'être point troublé par les expoſants négatifs, qui ſe préſentent aſſez ſouvent dans le numérateur de la fraction. L'exemple, au reſte, enſeigne la manière d'opérer bien plus facilement que les préceptes.

Soit le quadrinome $\frac{dx}{(x^{3m}+ax^{2m}+bx^m+c)^p}=dy$, dans lequel les conſtantes a, b peuvent être $=0$. On ſuppoſera $x^m=z+A$, ce qui donnera

$$\begin{aligned} x^{3m}+ax^{2m}+bx^m+c = z^3 &+ 3Azz + 3AAz + A^3 \\ &+ azz + 2aAz + aAA \\ &+ bz + Ab + c. \end{aligned}$$

En faiſant $A^3+aAA+Ab+c=0$, on déterminera la valeur de la conſtante A. Répétant enſuite les opérations comme dans le trinome, on trouvera $\frac{z^{-p}dz}{(z+A)^{\frac{m-1}{m}}.(zz+gz+h)^p}$, les lettres g, h ſont des conſtantes ſubſtituées à d'autres plus compoſées. On élevera le trinome $zz+gz+h$ à la puiſſance p, qui eſt un nombre entier poſitif. On fera après cela la diviſion autant de fois qu'il le faudra, pour arriver à une fraction dont le numérateur contenant la variable avec l'expoſant négatif, on n'ait au dénominateur que le binome $(z+A)^{\frac{m-1}{m}}$; on mettra à part les fractions qui en réſulteront, & qui, en négligeant les coéficients, ſeront analogues à celle-ci $\frac{z^{-n}dz}{(z+A)^{\frac{m-1}{m}}}$, dans laquelle n exprime un nombre entier poſitif. Les autres termes peuvent être repréſentés par cette formule générale $\frac{z^n dz}{(z+A)^{\frac{m-1}{m}}.(zz+gz+h)^p}$. On répétera donc l'opération en faisant $z = u + B$; on fera évanouir à l'ordinaire le dernier terme ; on élevera le binome $u + B$ à la puissance quelconque $n + 1$, & ayant substitué au lieu de z & de ses fonctions leurs valeurs exprimées en u, tous les termes auront cette forme $\frac{u^{n-p}du}{(u+A+B)^{\frac{m-1}{m}}.(u+K)^p}$. Si p est plus grand que n, ce qui rend l'exposant $n - p$ négatif, on aura recours aux divisions, & la formule qui en naîtra, sera $\frac{u^{-n}du}{(u+A+B)^{\frac{m-1}{m}}}$; si $n - p$ est positif, on aura $\frac{u^n du}{(u+A+B)^{\frac{m-1}{m}}.(u+K)^p}$. Enfin, supposant $u + K = \omega$, & n & p étant des nombres entiers, on arrivera à des binomes qui seront toujours réductibles à des quadratures plus simples.

Il est vrai que cette méthode est limitée par les imaginaires ; mais outre que les racines sont souvent réelles ou en tout ou en partie, & qu'en bien des cas particuliers on peut chasser les imaginaires, ce seroit bien mal de négliger cette méthode & ses avantages, parce qu'elle ne donne pas absolument tout.

Soit pris pour exemple le trinome $\frac{dx}{(x+2\sqrt{x}+2)^p}$.

Je fais $x^{\frac{1}{2}} = z + A$, & j'ai $x + 2\sqrt{x} + 2 = zz + 2Az + 2z + AA + 2A + 2$. Supposant $AA + 2A + 2 = 0$, je trouve $A = \sqrt{(-1)} - 1$, grandeur mêlée de réel & d'imaginaire ; & en procédant suivant la méthode, nous aurons $\frac{z^{-1}dz}{(z+A)^{-1}.(z+2A+2)^p} =$

$\frac{z+1-p\,dz}{(z+1\sqrt{-1})^p}+\frac{Az^{-p}dz}{(z+1\sqrt{-1})^p}$. Pour éviter les imaginaires, je procéderai d'une autre manière; dans la grandeur $zz+(2A+2).z+AA+2A+2$; je ferai évanouir le terme du milieu, en le supposant $=0$, ce qui me donne $A=-1$, & $AA+2A+2=1$; ainsi la formule deviendra $\frac{dz}{(z-1)^{-1}.(zz+1)^p}=\frac{zdz}{(zz+1)^p}-\frac{dz}{(zz+1)^p}$. Or il n'y a plus de difficulté pour intégrer les deux termes qui composent le second membre de cette égalité; ce sont deux binomes semblables à ceux qui ont été considérés ci-dessus.

CHAPITRE II.

Regles d'intégration en faisant usage des séries.

65. AVANT d'enseigner la manière d'intégrer par les séries, il est à propos d'établir les regles suivantes.

REGLE I. Transformer une fraction en suite infinie.

On divisera le numérateur par le dénominateur en suivant les regles de la division, on divisera de nouveau le reste, & ainsi de suite à l'infini, & on aura une suite infinie de termes égale à la fraction proposée. Il faut cependant avoir l'attention, tant pour le numérateur que pour le dénominateur, s'il y a plus d'un terme, de mettre le premier celui qui est le plus grand. On trouvera, en opérant ainsi, que

$$\frac{f}{m+n} = \frac{f}{m} - \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} - \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} - \&c.$$

$$\frac{f}{m-n} = \frac{f}{m} + \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} + \&c.$$

$$\frac{af}{mm \pm nn} = \frac{af}{mm} \mp \frac{afnn}{m^4} + \frac{afn^4}{m^6} \mp \frac{afn^6}{m^8} + \frac{afn^8}{m^{10}} \mp \&c.$$

$$\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - \&c.$$

$$\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}}\ \&c.$$

$$\frac{f}{(m \mp n)^2} = \frac{f}{mm} \pm \frac{2fn}{m^3} + \frac{3fnn}{m^4} \pm \frac{4fn^3}{m^5} + \frac{5fn^4}{m^6}\ \&c.$$

$$\frac{f}{(m \mp n)^3} = \frac{f}{m^3} \pm \frac{3fn}{m^4} + \frac{6fnn}{m^5} \pm \frac{10fn^3}{m^6} + \frac{15fn^4}{m^7}\ \&c.$$

Il en seroit de même si la fraction avoit un numérateur & un dénominateur qui fussent l'un & l'autre une suite infinie telle que . . . .

$$\frac{1 + \frac{1}{2}axx - \frac{1}{8}aax^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8\ \&c}{1 - \frac{1}{2}bxx - \frac{1}{8}bbx^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8\ \&c}$$; qu'on trouve

$$\begin{aligned} = 1 &+ \tfrac{1}{2}bxx + \tfrac{3}{8}bbx^4 + \tfrac{5}{16}b^3x^6 + \tfrac{35}{128}b^4x^8\ \&c. \\ &+ \tfrac{1}{2}axx + \tfrac{1}{4}abx^4 + \tfrac{3}{16}abbx^6 + \tfrac{5}{32}ab^3x^8\ \&c. \\ &\qquad - \tfrac{1}{8}aax^4 - \tfrac{1}{16}aabx^6 - \tfrac{3}{64}aabbx^8\ \&c. \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{16}a^3x^6 + \tfrac{1}{32}a^3bx^8\ \&c. \\ &\qquad\qquad\qquad - \tfrac{5}{128}a^4x^8\ \&c. \end{aligned}$$

66. REGLE II. Réduire une quantité complexe radicale en suite infinie.

Soient pris pour exemples les radicaux $\sqrt{[aa \pm xx]}$

& $\sqrt{[ax \pm xx]}$; en tirant réellement ces racines quarrées qui ne sont qu'indiquées, & poursuivant l'opération à l'infini, suivant les regles de l'extraction des racines, on trouvera

$$\sqrt{[aa \pm xx]} = a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ \&c.}$$

$$\sqrt{[ax \pm xx]} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128a^{\frac{7}{2}}} \text{ \&c.}$$

Remarquez que dans l'une & l'autre de ces séries, si l'on multiplie par 3 le numérateur & le dénominateur de chaque terme en commençant par le quatrième, les coëfficients numériques dans les numérateurs, en commençant au quatrième terme, seront 3, 3×5, $3 \times 5 \times 7$, &c, produits qui naissent de la multiplication continuelle des nombres impairs. Dans les dénominateurs, ils seront, en commençant au second terme, 2, 2×4, $2 \times 4 \times 6$, $2 \times 4 \times 6 \times 8$, &c, produits qui naissent de la multiplication continuelle des nombres pairs.

67. REGLE III. Tout ce qu'on vient de voir se fait d'une manière plus générale par le moyen de la formule suivante :

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ, \text{ \&c},$$

dans laquelle $P + PQ$ est la quantité donnée, $\frac{m}{n}$ est l'exposant numérique de la puissance, P représente le premier terme, Q le quotient de tous les autres termes divisés par le premier, & chacune des lettres A, B, C, D, &c, désigne respectivement le terme qui précéde, de manière que par A on entend $P^{\frac{m}{n}}$, par B on entend $\frac{m}{n}AQ$, par C on entend $\frac{m-n}{2n}$ BQ, &c.

Que l'on ait, à réduire en férie le radical $\sqrt[5]{[a^5+a^4x-x^5]}$, c'eſt-à-dire $(a^5+a^4x-x^5)^{\frac{1}{5}}$; on a $P=a^5$, $Q=\frac{a^4x-x^5}{a^5}$, $m=1$, $n=5$, & par conſéquent $(a^5+a^4x-x^5)^{\frac{1}{5}}=a+\frac{a^4x-x^5}{5a^4}$ $\frac{-2a^8xx+4a^4x^6-2x^{10}}{25a^9}$ &c.

Soit propoſé $\frac{b}{\sqrt[3]{[y^3-aay]}}$, ou $b.(y^3-aay)^{-\frac{1}{3}}$; on a $P=y^3$, $Q=-\frac{aa}{yy}$, $m=-1$, $n=3$, & par conſéquent $b(y^3-aay)^{-\frac{1}{3}}=\frac{b}{y}+\frac{aab}{3y^3}+$ $\frac{2a^4b}{9y^5}+\frac{14a^6b}{81y^7}$ &c.

Si on propoſoit $\frac{b}{\sqrt[5]{[(a+x)^3]}}$, on l'exprimeroit ainſi $b(a+x)^{-\frac{3}{5}}$, & on acheveroit de la même manière.

Soit $\frac{b}{(a+x)^3}$, c'eſt-à-dire $b.(a+x)^{-3}$; on a $P=a$, $Q=\frac{x}{a}$, $m=-3$, $n=1$, & par conſéquent $b(a+x)^{-3}=\frac{b}{a^3}-\frac{3bx}{a^4}+\frac{6bxx}{a^5}-$ $\frac{10bx^3}{a^6}$ &c.

68. SI l'on veut élever une quantité complexe à une puiſſance donnée, par exemple, $a+x$ à la puiſſance m, qui s'exprime par $(a+x)^m$; on aura alors $P=a$, $Q=\frac{x}{a}$, $m=m$, $n=1$, & par conſéquent $(a+x)^m = a^m + \frac{m\,a^{m-1}x}{1} + \frac{m(m-1)\,a^{m-2}xx}{1.2} + \frac{m.(m-1).(m-2).a^{m-3}x^3}{1.2.3} +$ &c.

Enfin, ſi c'eſt une ſérie infinie qu'on veut élever à une puiſſance donnée, telle, par exemple, que celle-ci $y+ayy+by^3+cy^4+fy^5$, &c. qu'on ſe propoſe d'élever à la puiſſance m; alors $P=y$, $Q=ay+byy+cy^3+fy^4$, &c. $n=1$, $m=m$; on aura donc $(y+ayy+by^3+cy^4+fy^5\ \&c)^m =$

$$y^m + \frac{m}{1}ay^{m+1} + \frac{m.(m-1)}{1.2}aay^{m+2} + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}\times a^3y^{m+3} + \&c.$$
$$+ \frac{m}{1}\times by^{m+2} + \frac{m.(m-1)}{1.2}\times aby^{m+3} + \&c.$$
$$+ \frac{mc}{1} \times y^{m+3} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

69. CELA poſé, ſi l'on propoſe d'intégrer la formule $\frac{bdx}{a+x}$, on réduira en ſérie la fraction $\frac{b}{a+x}$; & multipliant chaque terme par dx, on trouvera $\frac{bdx}{a+x} = \frac{bdx}{a} - \frac{bxdx}{aa} + \frac{bxxdx}{a^3} - \frac{bx^3dx}{a^4} + \frac{bx^4dx}{a^5}$, &c, dont l'intégrale eſt $\frac{bx}{a} - \frac{bxx}{2aa} + \frac{bx^3}{3a^3} - \frac{bx^4}{4a^4} + \frac{bx^5}{5a^5}$ &c.

70. SOIT la formule $\frac{adx}{x}$. On supposera $x = b + z$, entendant par b une constante quelconque prise à volonté, & par z une nouvelle variable; on aura $\frac{adx}{x} = \frac{adz}{b+z}$. On réduira en série la fraction $\frac{a}{b+z}$, & multipliant tous les numérateurs par dz, on aura $\frac{adz}{b+z} = \frac{adz}{b} - \frac{azdz}{bb} + \frac{azzdz}{b^3} - \frac{az^3dz}{b^4} + \frac{az^4dz}{b^5}$, &c; enfin l'intégration donnera $\int \frac{adz}{b+z} = \frac{az}{b} - \frac{azz}{2bb} + \frac{az^3}{3b^3} - \frac{az^4}{4b^4} + \frac{az^5}{5b^5}$, &c, c'est-à-dire $\int \frac{adx}{x} = \frac{a.(x-b)}{b} - \frac{a(x-b)^2}{2bb} + \frac{a(x-b)^3}{3b^3} - \frac{a(x-b)^4}{4b^4}$, &c.

71. SOIT la formule $\frac{bdx}{\sqrt[5]{[(x+a)^3]}}$, qui réduite en série, devient $\frac{bdx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bxdx}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bxxdx}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^3dx}{125a^{\frac{18}{5}}}$, &c; on trouvera en intégrant, $\int \frac{bdx}{\sqrt[5]{[(x+a)^3]}} = \frac{bx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bxx}{10a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bx^3}{75a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^4}{500a^{\frac{18}{5}}}$, &c. Et ainsi des autres.

72. SI les suites qui expriment l'intégrale de la formule différentielle proposée, & qui sont composées d'un nombre infini de termes, ont une valeur

infinie, l'intégrale de la formule proposée sera aussi infinie. Mais si ces suites ont une valeur finie; & de plus si elles peuvent être sommées, ce qui arrive assez souvent, alors ces suites (quoique composées d'un nombre infini de termes) seront exprimées en termes finis; & par conséquent l'intégrale de la formule différentielle proposée sera algébrique. Si, au contraire, ces suites, quoique d'une valeur finie, ne peuvent pas être sommées, alors plus on prendra de termes de la suite, & plus on approchera de la vraie valeur de l'intégrale, qui cependant n'est exprimée exactement que par la suite entière.

73. POUR reconnoître quelles sont les séries dont la valeur est infinie, celles dont la valeur est finie, celles qu'on peut ou qu'on ne peut pas sommer, il faut consulter le Traité *de Seriebus infinitis* du célèbre Jacques Bernoulli, & ceux des autres Auteurs qui ont traité la même matière.

74. IL y a des quantités différentielles qui peuvent être intégrées d'une manière assez commode par le moyen de la formule suivante dans laquelle les exposans m, n, t peuvent être entiers ou rompus, positifs ou négatifs. Nous n'allons calculer que les trois premiers termes de la série; mais il sera facile de la pousser plus loin, si on le juge à propos.

Soit à intégrer le binome $ay^{t-1}dy(b+cy^n)^m$, ou simplement $y^{t-1}dy(b+cy^n)^m$, en omettant le facteur constant a, qu'on pourra ensuite rétablir en multipliant tous les termes de l'intégrale par ce facteur. Je feins qu'on ait l'équation

$$\int y^{t-1}dy(b+cy^n)^m = (Ay^t + By^{t+n} + Cy^{t+2n} + Dy^{t+3n} + \&c) \times (b+cy^n)^{m+1},$$

A, B, C, D, &c, étant des constantes qu'il faut déterminer. Or, en différentiant chaque membre; divisant tout par $dy(b+cy^n)^m$, & mettant d'un même côté tous les termes de l'équation ordonnée par rapport à y, on trouvera

$$0 = \left.\begin{matrix} tbA \\ -1 \end{matrix}\right\} y^{t-1} + \left.\begin{matrix} (t+n)bB \\ + tAc \\ +(m+1)ncA \end{matrix}\right\} y^{t+n-1} + \left.\begin{matrix} (t+2n)bC \\ +(t+n)cB \\ +(m+1)ncB \end{matrix}\right\} y^{t+2n-1} + \&c.$$

Egalant séparément à zero tous les coéfficients des puissances de y, on aura $tbA - 1 = 0$, c'est-à-dire $A = \frac{1}{tb}$; $(t+n)bB + tAc + (m+1)ncA = 0$, c'est-à-dire en mettant pour A sa valeur, $B = \frac{(t+mn+n)(-ac)}{tb^2(t+n)}$; $(t+2n)bC + (t+n)cB + (m+1)ncB = 0$, c'est-à-dire, en mettant pour B sa valeur, $C = \frac{(t+mn+n)(t+mn+2n)ac^2}{tb^3(t+n)(t+2n)}$; ainsi de suite. Substituant ces valeurs de A, B, C, &c. dans l'équation feinte, on aura l'intégrale de la formule proposée, en suite infinie.

Lorsque les exposants t, m, n sont tels que l'un des coéfficients A, B, C, &c, devient égal à zero, alors la suite s'interrompt, les autres coéfficients qui suivent celui dont il s'agit devenant aussi zero; & l'intégrale est une quantité finie & algébrique. Si cette condition n'a pas lieu, on mettra la différentielle $y^{t-1}dy(b+cy^n)^m$ sous la forme... $y^{t-1+mn}dy(c+by^{-n})^m$, & on en trouvera l'intégrale en suite infinie, par un procédé pareil à celui qu'on vient d'employer; alors si l'un des nouveaux coéfficients A', B', C', &c, devient zero, l'intégrale sera finie & algébrique. Si la série qui exprime l'intégrale ne s'interrompt ni de l'une ni de l'autre manière

manière, on conclura que l'intégrale ne peut pas se trouver en termes finis par la méthode précédente; mais elle sera du moins exprimée en suite infinie, & on prendra celle des deux suites, qui sera convergente.

Soit, par exemple, $\frac{dy\sqrt{(by+yy)}}{y^5}$, ou... $y^{-\frac{9}{2}}dy(b+y)^{\frac{1}{2}}$: on aura $t-1=-\frac{9}{2}$, $n=1$, $m=\frac{1}{2}$, $c=1$, & par conséquent $t+mn+3n=0$; d'où il suit que le quatrième terme de la série intégrale sera zero. Ainsi on aura............

$$\int\frac{dy\sqrt{(by+yy)}}{y^5}=\left(-\frac{2y^{-\frac{7}{2}}}{7b}+\frac{2}{7b^2}.\tfrac{4}{5}y^{-\frac{5}{2}}-\frac{2}{7b^3}.\frac{8y^{-\frac{3}{2}}}{15}\right)\times(b+y)^{\frac{3}{2}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(-30b^2+24by-16yy)}{105\,b^3y^{\frac{7}{2}}}.(b+y)^{\frac{3}{2}}.$$

Soit encore $\frac{dy}{y^2\sqrt{(aa+yy)}}$; on aura $t=-1$, $n=2$, $m=-\frac{1}{2}$, $c=1$, $b=a^2$, & par conséquent le second terme de la série intégrale sera zero. Donc $\int\frac{dy}{y^2\sqrt{(aa+yy)}}=-\frac{\sqrt{(aa+yy)}}{y}$.

La même méthode est applicable aux différentielles trinomes, quadrinomes, &c.

CHAPITRE III.

Application des regles du Calcul intégral à la rectification des courbes, à la quadrature des espaces, à l'aplanissement des surfaces & à la cubature des solides.

75. POUR faire usage des regles qu'on a données jusqu'ici, en les appliquant à la rectification des courbes, à l'aplanissement ou à la quadrature des surfaces, & à la cubature des solides, supposons une
Fig. 6. courbe quelconque *ADH* (Fig. 6) rapportée à l'axe *AB*, & ayant ses ordonnées parallèles entr'elles, & perpendiculaires à l'axe. Soit menée *CH* parallèle & infiniment voisine à l'ordonnée *BD*, & *DE* parallèle à *BC*; l'espace mixtiligne *BDHC* sera la différentielle ou l'élément de la surface *ABD*; & comme l'espace *DEH* est nul par rapport au rectangle *BDEC*, ce rectangle pourra être pris pour l'élément de la même surface *ABD*. Ainsi la somme de tous les rectangles infinitésimaux tels que *BDEC*, sera l'espace compris par la courbe *AD*, & par les coordonnées *AB*, *BD*. Faisant donc $AB = x$, $BD = y$, BC sera $= dx$, $EH = dy$, & le rectangle $BDEC = y dx$ qui est l'expression de l'élément des espaces. Si on substitue dans cette formule au lieu de y sa valeur donnée en x & en constantes, ou au lieu de dx sa valeur donnée par y, dy, & des constantes,

& qu'on intégre ensuite, l'intégrale sera l'espace cherché ABD.

On peut avoir encore d'autres formules ou expressions de l'élément des espaces, par le moyen des secteurs ou des trapèzes, qui dans certaines occasions sont plus commodes que celles qu'on vient de donner. On en verra la méthode & l'usage dans quelques exemples.

76. Si la courbe est rapportée à un foyer, ou à un point fixe, tel que M, duquel partent toutes les ordonnées; que l'on mène l'ordonnée MH infiniment voisine de MD, & l'espace infinitésimal MHD sera l'élément de l'espace AMD. Si l'on décrit donc du centre M & avec le raïon MD, le petit arc DK, l'espace DKH est nul par rapport à l'espace MDK; & puisque d'ailleurs le petit arc DK peut être pris pour la tangente au point D ou au point K, il s'ensuit que l'espace MDK est l'élément de l'espace AMD.

Si l'on suppose donc $MD = y$, $KD = dz$, la formule générale des espaces pour les courbes rapportées au foyer, sera $\frac{ydz}{2}$. Si l'on substitue dans cette formule au lieu de y ou de dz leurs valeurs données par l'équation de la courbe, l'intégrale exprimera l'espace cherché AMD.

77. Si la courbe est rapportée à un diamètre, c'est-à-dire, si les coordonnées font un angle oblique; que l'on mène HG (Fig. 7) perpendiculaire à AG, le produit de HG ou FG par BC, qui est égal au parallélogramme $BCED$ sera l'élément de l'aire ABD. Or l'angle DBG étant donné, on connoit le rapport du raïon à son sinus, que je supposerai exprimé par celui de m à n, & faisant à l'ordinaire Fig. 7.

$AB = x$, $BD = y$, HG ou FG fera $= \frac{ny}{m}$, & le parallélogramme $BCED = \frac{nydx}{m}$, qui eſt la formule de ces ſortes d'eſpaces.

78. IL eſt clair que toutes les parties infinitéſimales de la courbe, telles que DH, forment la courbe entière, & que par conſéquent DH en eſt l'élément;
Fig. 6. ainſi ſuppoſant toujours $AB = x$ (Fig. 6), $BD = y$, $BC = dx$, $EH = dy$, pour les courbes rapportées à leur axe, & dont les coordonnées font un angle droit, on aura $DH = \sqrt{[dx^2 + dy^2]}$, qui eſt la formule de la rectification des courbes.

79. A l'égard des courbes rapportées à leur foyer, ſuppoſant $MD = y$ & $KD = dz$, on aura la même formule $\sqrt{[dy^2 + dz^2]}$.

80. MAIS pour celles dont les coordonnées for-
Fig. 7. ment un angle oblique (Fig. 7), puiſque l'angle HCG eſt donné, le rapport du raïon au coſinus eſt auſſi donné; ſi donc on le ſuppoſe égal à celui de m à e, on aura $CG = \frac{ey}{m}$, $EF = \frac{edy}{m}$, & par conſéquent $DH = \sqrt{\left[dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}\right]}$.

81. ON ſubſtituera dans chacune de ces formules au lieu de dy, ou de dx, ou de dz leurs valeurs reſpectives données par l'autre variable & par ſes différences, & intégrant enſuite, on aura la longueur demandée de la courbe AD.

Fig. 6. 82. SI le plan AHC (Fig. 6) tourne autour de la droite AC, la courbe AH engendrera une ſurface tandis que le plan AHC engendrera un ſo-

lide; la partie infinitéſimale DH engendrera une petite zone qui ſera l'élément de la ſurface produite par la courbe AH, & le plan infinitéſimal $DBCH$ décrira un ſolide auſſi infinitéſimal qui ſera l'élément du ſolide engendré par le plan AHC. Maintenant, s'il s'agit de courbes rapportées à l'axe avec les coordonnées à angles droits, BD étant $= y$, & $\frac{r}{c}$ exprimant le rapport du raïon à la circonférence, l'expreſſion de la zone infinitéſimale, c'eſt-à-dire la formule générale pour les ſurfaces ſera $\frac{cy}{r}\sqrt{[dx^2+dy^2]}$.

83. L'AIRE du cercle qui a pour raïon BD ou y eſt $\frac{cyy}{2r}$; ainſi l'expreſſion du cylindre infiniment petit engendré par le rectangle $BCED$, ſera $\frac{cyydx}{2r}$; & comme il ne differe du ſolide engendré par le plan $BCHD$ que d'une grandeur infinitéſimale du ſecond ordre, la même quantité $\frac{cyydx}{2r}$ ſera la formule générale des ſolides.

84. QUANT au cas de la Fig. 7, c'eſt-à dire lorſque les coordonnées font un angle oblique, il faut faire attention que le raïon du cercle, ſur lequel ſont poſés la petite zone & le petit cylindre, n'eſt pas $CH = y$, mais $GH = \frac{ny}{m}$, que l'élément DH qui engendre la zone n'eſt pas $\sqrt{[dx^2+dy^2]}$, mais $\sqrt{\left[dx^2+dy^2+\frac{2edxdy}{m}\right]}$, & que la hauteur du petit cylindre n'eſt pas $BC = dx$, mais $FD =$

$dx + \frac{edy}{m}$; ainſi la formule des ſurfaces ſera dans ce cas $\frac{cny}{rm} \sqrt{\left[dx^2 + dy^2 + \frac{2edydx}{m}\right]}$.

85. Le produit du cercle qui a GH pour raïon par la hauteur FD, c'eſt-à-dire $\frac{cnnyy}{2rmm}\left(dx + \frac{edy}{m}\right)$ eſt l'élément du ſolide engendré par le plan AGH; ſouſtrayant de ce produit, $\frac{cnnyy}{2rmm} \times \frac{edy}{m}$ qui eſt l'élément du ſolide engendré par le triangle HCG, le reſte ſera l'élément du ſolide engendré par le plan ABD; & par conſéquent $\frac{cnnyydx}{2rmm}$ eſt la formule générale des ſolides de cette eſpece.

86. A l'égard des courbes rapportées au foyer,
Fig 6. comme l'angle DMB (Fig. 6) eſt variable, & que par conſéquent on ne peut pas avoir la valeur de BD ou CH, raïon du cercle qui entre néceſſairement dans la formule de la quadrature des ſurfaces, & de la cubature des ſolides, il faudra, de l'équation de la courbe rapportée au foyer, tirer l'équation de la même courbe rapportée à l'axe, & procéder enſuite de la manière qui vient d'être expliquée; en faiſant attention que dans les cubatures, pour avoir le ſolide engendré par le plan AMD, il faut retrancher des intégrales le cone engendré par le triangle MHC.

87. Voici la manière de paſſer de l'équation différentielle d'une courbe rapportée au foyer, à ſon équation rapportée à l'axe.

Que l'on conſidere en même-tems la courbe ADH (Fig. 6) comme rapportée au foyer M & à l'axe

AMB; on fait que le quarré de l'élément HD de la courbe est égal soit aux quarrés de DK & de KH, soit aux quarrés de DE & de EH; que de plus le quarré de $MD = \overline{MB}^2 + \overline{BD}^2$. Faisant donc $MB = x$, $BD = y$, $MD = z$, & le petit arc $DK = du$, on aura ces deux équations $dz^2 + du^2 = dx^2 + dy^2$, & $xx + yy = zz$.

Supposons maintenant que l'équation de la courbe au foyer, soit exprimée généralement par la formule $pdz = du$, dans laquelle p est une fonction donnée de z: on aura $dz^2 + ppdz^2 = dx^2 + dy^2$; & si l'on met au lieu de dy sa valeur $\frac{zdz - xdx}{\sqrt{(zz - xx)}}$ tirée de l'équation $xx + yy = zz$, on trouvera $dz^2 + ppdz^2 = dx^2 + \frac{(zdz - xdx)^2}{zz - xx}$, qui se réduit à $ppdz^2 . (zz - xx) = zzdx^2 - 2xzdxdz + xxdz^2$, & en tirant la racine quarrée, $pdz = \frac{zdx - xdz}{\sqrt{(zz - xx)}}$.

Il faut soumettre encore cette équation à une transformation qui en sépare les indéterminées; on en viendra facilement à bout, en supposant $x = \frac{zq}{h}$; & par conséquent $dx = \frac{zdq + qdz}{h}$. On chassera ainsi x & ses fonctions au moyen de l'équation subsidiaire, & on aura $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{(hh - qq)}}$. Si dans cette dernière équation la valeur de p donnée en z est telle que la quantité $\frac{pdz}{z}$ puisse se réduire à la différentielle d'un arc de cercle, & qu'après les intégrations néceſſaires, les deux arcs de cercle ſoient entr'eux comme nombre à nombre, la courbe ſera algébrique, & on aura ſon équation en termes finis. Dans tout autre cas, la courbe ſera tranſcendante.

EXEMPLE.

Soit $\frac{zdz}{\sqrt{[cc-2bz-zz]}} = du$, l'équation d'une courbe à ſon foyer. Dans ce cas $p = \frac{z}{\sqrt{[cc-2bz-zz]}}$; en ſubſtituant la valeur de p dans l'équation $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{[hh-qq]}}$, on aura $\frac{dz}{\sqrt{[cc-2bz-zz]}} = \frac{dq}{\sqrt{[hh-qq]}}$. Je ſuppoſe $b+z=t$; donc $bb+2bz+zz=tt$, & $bb-tt=-2bz-zz$; & la ſubſtitution me donne $\frac{dt}{\sqrt{[cc+bb-tt]}} = \frac{dq}{\sqrt{[hh-qq]}}$.

Suppoſons le cas particulier où $cc+bb=hh$, on auroit alors $t=q$, c'eſt-à-dire, $b+z=q=\frac{hx}{z}$; donc $bz+zz=hx$; & mettant au lieu de z ſa valeur, l'équation de la courbe ſera $b\sqrt{[xx+yy]}+xx+yy=hx$.

88. ON peut, au moyen de la formule que j'ai donnée, paſſer auſſi de l'équation différentielle d'une courbe rapportée à ſon axe, à l'équation du foyer: en voici quelques exemples.

EXEMPLE I.

On demande l'équation au foyer d'un cercle, en prenant un point A de sa circonférence pour foyer?

Soient (Fig. 8) $AH=h$, $AG=x$, $AC=z=$ Fig. 8.
$\sqrt{hx}$, & que l'on se rappelle la formule $\frac{pdz}{z}=$
$\frac{dq}{\sqrt{[hh-qq]}}$, où l'on a pris $q=\frac{hx}{z}$. Puisque l'équation du cercle donne $hx=zz$, on aura $q=z$; ainsi faisant disparoitre q en mettant z à sa place, on aura $\frac{pdz}{z}=\frac{dz}{\sqrt{[hh-zz]}}$, ou $p=\frac{z}{\sqrt{[hh-zz]}}$. Substituant donc cette valeur de p dans la formule $pdz=du$, on aura $\frac{zdz}{\sqrt{[hh-zz]}}=du$, équation du cercle rapporté au foyer A pris dans la circonférence.

EXEMPLE II.

On demande l'équation polaire des sections coniques rapportées à leur foyer M (Fig. 6)? Fig. 6.

Appellant $MB=x$, $BD=y$, l'équation générale, qui embrasse toutes les sections du cone, est $a\pm\frac{cx}{b}=\sqrt{[xx+yy]}$. En effet, lorsque $c=b$, elle exprime la parabole dont le paramètre est $2a$; lorsque $b>c$, elle convient à l'ellipse dont $\frac{2abb}{bb-cc}$ & $\frac{2ab}{\sqrt{[bb-cc]}}$, sont les premier & second axes, & dont la distance du foyer au sommet est $\frac{ab}{b+c}$; lorsque $b<c$, elle désigne

l'hyperbole qui a $\frac{2abb}{cc-bb}$ & $\frac{2ab}{\sqrt{[cc-bb]}}$ pour ses axes, & dont la distance du sommet au foyer est encore $\frac{ab}{b+c}$; enfin si $c=0$, elle appartient au cercle dont le diamètre $=2a$. Mais $\sqrt{[xx+yy]}=z$; donc $a\pm\frac{cx}{b}=z$: de plus $hx=zq$; donc $a\pm\frac{czq}{bb}=z$, ou bien $\pm\frac{bh}{c}\mp\frac{abh}{cz}=q$, & différentiant, $\pm\frac{abchdz}{cczz}=dq$; mais $qq=\frac{bbhh}{cc}-\frac{2abbhh}{ccz}+\frac{aabbhh}{cczz}$; ainsi $\frac{dq}{\sqrt{[hh-qq]}}=\ldots$

$$\frac{\pm cbahdz}{cz\sqrt{[hhcczz-b^2h^2z^2+2ab^2h^2z-a^2b^2h^2]}}=$$

$\frac{pdz}{z}$; donc $p=\frac{\pm abh}{\sqrt{[hhcczz-bbhhzz+2abbhhz-aabbhh]}}$; & puisque $pdz=du$, l'équation cherchée sera

$$\frac{\pm abhdz}{\sqrt{[hhcczz-bbhhzz+2abbhhz-aabbhh]}}=du.$$

Le signe négatif a lieu lorsqu'on compte les abscisses, en allant du foyer au sommet, & le signe positif lorsqu'on les compte dans le sens contraire.

90. POUR prendre une idée suffisante des courbes rapportées au foyer, examinons leur construction. Fig. 9. Soit BCD (Fig. 9) une de ces courbes; appellons z les ordonnées infiniment voisines AC, AE qui partent du point A, dz leur différence FE, & du l'arc infiniment petit CF décrit du pole A; & supposons que la nature de la courbe soit généralement exprimée par l'équation différentielle $pdz=du$, dans

laquelle p eſt donnée en z d'une manière quelconque. Remarquons cependant que le premier membre pdz, ayant pour variable les z qui partent toutes du point A, eſt intégrable ou algébriquement ou par les conſtructions; mais qu'on tomberoit dans l'erreur ſi on intégroit l'autre membre du, en le prenant pour la différentielle de l'arc u, puiſque l'élément du croît ou décroît en deux manières; ſavoir, par lui-même, & ſuivant que les ordonnées AC, AE augmentent ou diminuent. Pour éviter donc tout paralogiſme, avec un raïon $AI = r$ pris à volonté, on décrira un cercle IGH; on prendra dans la circonférence un point quelconque I, qui ſera comme un point fixe d'où l'on comptera les arcs IG, IH qui vont en croiſſant. On prolongera, s'il le faut, les variables AC, AE juſqu'en G & H, & les ſecteurs ACF, AGH ſeront ſemblables; on aura par conſéquent $z : du :: r : GH$, que j'appellerai dq; ainſi $\frac{zdq}{r} = du$. Mais par l'équation générale de la courbe, on a $pdz = du$; donc $\frac{zdq}{r} = pdz$, ou bien $\frac{rpdz}{z} = dq$. Intégrant maintenant, on aura $\int \frac{rpdz}{z} = q = IG$. Les conſtantes ajoutées ou ſouſtraites de l'intégrale changeroient ſeulement la ſituation du point I.

EXEMPLE I.

Conſtruire la ſpirale logarithmique dont l'équation eſt $\frac{adz}{b} = du$?

On a $du = \frac{z\,dq}{r}$; donc $\frac{a\,dz}{b} = \frac{z\,dq}{r}$, ou bien parce que le raïon AI eſt pris à volonté, ſi l'on fait $b = r$, & qu'on prenne a pour l'unité, $\frac{dz}{z} = dq$, & intégrant L. $z = q$, équation tranſcendante, mais dont la conſtruction eſt bien ſimple.

EXEMPLE II.

Conſtruire la ſpirale hyperbolique dont la ſoutangente conſtante eſt a, & dont l'équation eſt par conſéquent $\frac{a\,dz}{z} = du$?

On a $du = \frac{z\,dq}{r}$; donc $\frac{a\,r\,dz}{zz} = dq$; & intégrant, on aura $b - \frac{ar}{z} = q$, &c.

Dans ces conſtructions on a toujours l'arc de cercle IG, qui fait le ſecond membre de l'équation; l'autre membre $\int \frac{rp\,dz}{z}$ peut être intégrable algébriquement comme dans le ſecond exemple, ou par la quadrature de l'hyperbole comme dans le premier, ou enfin par d'autres voies plus compoſées. Ainſi il n'y a qu'un ſeul cas où nos courbes puiſſent être algébriques; c'eſt lorſqu'on peut ramener $\int \frac{rp\,dz}{z}$ à la rectification d'un arc de circonférence, qui ait un rapport de nombre à nombre avec l'arc correſpondant IG. Si le rapport eſt ſourd, la courbe ſera méchanique, & même ne dépendra pas de la quadrature du cercle; ſa conſtruction ſe réduira à un autre problême qui conſiſte à diviſer les arcs de cercle ſuivant une raiſon donnée quelconque ; ce qu'on peut effectuer par le moyen de la ſpirale d'Archiméde, ou par la quadratrice de Dinoſtrate.

On peut tirer de ce qui a été dit un autre moyen de paſſer de l'expreſſion des courbes rapportées au foyer, à leur équation par rapport à l'axe, & réciproquement. Car puiſque $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$ (n°. 26) en appellant t la tangente IK, cette tangente t ſera donnée en z, ou algébriquement, ou méchaniquement ; mais $AI = r$, $AK = \sqrt{[rr+tt]}$, $AM = x$, $MC = y$; ainſi $\frac{rz}{x} = \sqrt{[rr+tt]}$, & après les réductions convenables, $\frac{r\sqrt{[zz-xx]}}{x} = t = \frac{ry}{x}$; or, t eſt donnée en z, & $z = \sqrt{[xx+yy]}$; on eſt donc parvenu à l'équation locale de la courbe, relativement aux axes, qui donne le rapport entre les coordonnées ordinaires x & y. Si l'on fait la même route, mais en ſens contraire, on paſſera de l'équation aux axes à l'équation au foyer.

Je reprends l'exemple du n°. 87 ; c'eſt-à-dire la courbe, $\frac{zdz}{\sqrt{[cc-2bz-zz]}} = du$ rapportée au foyer, pour la rapporter à l'axe. Puiſque l'on a pris $pdz = du$ pour l'équation générale des courbes polaires, on aura dans le cas préſent $p = \frac{z}{\sqrt{[cc-2bz-zz]}}$, valeur qui ſubſtituée dans l'équation $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$ donnera $\frac{rdz}{\sqrt{[cc-2bz-zz]}} = \frac{rrdt}{rr+tt}$.

Je ſuppoſe $b+z=s$, $dz=ds$, & par conſéquent $-2bz-zz=bb-ss$; ce qui transforme l'équation en celle-ci $\frac{rds}{\sqrt{[cc+bb-ss]}}=\frac{rrdt}{rr+tt}$, ou ſi l'on fait $cc+bb=hh$ en celle-ci $\frac{rhds}{h\sqrt{[hh-ss]}}=\frac{rrdt}{rr+tt}$. Mais l'intégrale du premier membre (n°. 37) eſt un arc de cercle (dont le raïon eſt h & le coſinus s) multiplié par la fraction conſtante $\frac{r}{h}$; & l'intégrale du ſecond eſt un arc qui a pour raïon r, & pour tangente t; donc le premier arc eſt au ſecond, comme h eſt à r, c'eſt-à-dire qu'ils ſont entr'eux comme leurs raïons; ce ſont donc des arcs ſemblables, & les tangentes ſont proportionnelles aux raïons; & puiſque la tangente du premier arc eſt $\frac{h}{s}\sqrt{[hh-ss]}$, on aura $\frac{h}{s}\sqrt{[hh-ss]}:t::h:r$, c'eſt-à-dire $t=\frac{r}{s}\sqrt{[hh-ss]}$; remettant donc la valeur de s, & ſubſtituant $\frac{ry}{x}$ à t, on aura $\frac{ry}{x}=\frac{r\sqrt{[hh-bb-2bz-zz]}}{b+z}$, équation réduite aux axes, qui ne contiendra que les coordonnées x & y, ſi l'on met au lieu de zz ſa valeur $xx+yy$, & qui ſera la même que celle qu'on a trouvée au n°. 87.

Pour paſſer de l'équation des axes à celle du foyer, je prendrai l'exemple I du n°. 88; il y étoit queſtion de cette équation au cercle $z=\sqrt{hx}$;

Fig. 8. (Fig. 8).

La tangente de l'arc OQ, dont le centre eſt A & le raïon r, donnée par z, eſt $\frac{r\sqrt{(hh-zz)}}{z}=t$; ſi l'on ſubſtitue donc dans la formule $dq=\frac{rrdt}{rr+tt}$ au lieu de t & de dt leurs valeurs, on aura $-dq=-\frac{rdz}{\sqrt{(hh-zz)}}$; je mets $-dq$, parce que z croiſſant, l'arc q diminue. Mais $dq=\frac{rdu}{z}$; on a donc $\frac{rdu}{z}=\frac{rdz}{\sqrt{(hh-zz)}}$, c'eſt-à-dire $\frac{zdz}{\sqrt{(hh-zz)}}=du$. qui eſt la même équation qu'on avoit trouvée au n°. 88.

91. Les formules particulières que nous avons trouvées pour les cas où les coordonnées des courbes ſont un angle oblique, ne ſont pas moins néceſſaires, parce qu'on peut toujours transformer ces équations en d'autres où les coordonnées ſoient à angles droits, après quoi on fait uſage des formules ordinaires.

En effet, que l'on ſuppoſe $HG=p$ (Fig. 7), Fig. 7.
$AG=q$; on a donc $p=\frac{ny}{m}$, $q=x+\frac{ey}{m}$ (en faiſant comme ci-deſſus $AB=x$, $BD=y$, $\frac{\text{raïon}}{\text{ſin. de l'angle}}=\frac{m}{n}$, $\frac{\text{raïon}}{\text{coſinus}}=\frac{m}{e}$); ainſi $y=\frac{mp}{n}$, $x=q-\frac{ey}{m}=q-\frac{ep}{n}$. On ſubſtituera dans l'équation propoſée au lieu de x & y ces valeurs données en p & q, & on aura l'équation de la courbe avec ſes coordonnées perpendiculaires entr'elles. Mais il arrivera très-ſouvent que l'équation primitive, de

ſimple qu'elle étoit d'abord, deviendra aſſez composée par cette transformation ; & même que les inconnues qui étoient ſéparées dans l'équation propoſée, ne le ſoient plus dans la transformée, & qu'on ne puiſſe pas les ſéparer par les regles ordinaires, ſoit de la diviſion, ſoit de l'extraction des racines, &c, ce qui occaſionne une bien plus grande difficulté. Cependant il ſera bon, dans pluſieurs cas, d'eſſayer l'une & l'autre manière, pour s'attacher à celle qu'on trouvera la plus commode.

Il eſt tems maintenant d'en venir aux applications, dans leſquelles je ſuppoſerai toujours que les coordonnées des courbes ſont à angles droits, à moins que je n'avertiſſe du contraire.

DE LA QUADRATURE DES ESPACES.

EXEMPLE I.

92. QUARRER le ſegment ADB de la parabole Fig. 10. ordinaire ABC (Fig. 10), dont l'équation eſt $ax = yy$, ſon abſciſſe quelconque AD étant $= x$, & $DB = y$? Dans la formule générale des eſpaces (ydx), on mettra au lieu de y ſa valeur $\sqrt{ax}$, on aura $dx\sqrt{ax}$, dont l'intégrale eſt $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$. La grandeur b eſt la conſtante qui s'ajoute aux intégrales, & que nous allons déterminer. Au point A, lorſque $x = 0$, l'eſpace eſt nul ; donc l'intégrale $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$ qui exprime cet eſpace, doit auſſi être zero. Si l'on fait donc $x = 0$, dans l'équation $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b = 0$, on trouvera $\frac{2}{3}0\sqrt{a0} + b = 0$, c'eſt-à-dire, $b = 0$; ce qui indique que dans ce cas la conſtante qu'il faut ajouter à l'intégrale eſt nulle.

L'eſpace ABD eſt donc $= \frac{2}{3}x\sqrt{ax}$; mais $\sqrt{ax} = y$; ainſi $ABD = \frac{2}{3}xy$, c'eſt-à-dire, aux deux tiers du rectangle formé par les coordonnées.

Si l'on vouloit l'espace renfermé par une abscisse déterminée, & par son ordonnée, par exemple, lorsque $x = 2a$; puisque dans ce cas l'équation de la courbe est $y = \sqrt{[2aa]}$, l'espace sera $\frac{4}{3} aa\sqrt{2}$.

Si les abscisses de la parabole n'avoient pas leur origine au sommet A, mais à un point donné D, & que AD soit par exemple $= a$, $DE = x$, le paramètre $= f$, l'équation alors seroit $yy = af + fx$, ou $y = \sqrt{[af + fx]}$. Cette valeur mise dans la formule ydx donneroit $dx\sqrt{[af + fx]}$, dont l'intégrale $\frac{2}{3}(a + x)\sqrt{[af + fx]} + b$ est l'espace $DECB$. Pour déterminer ici la constante b, on fera attention qu'au point D, c'est-à-dire lorsque $x = 0$, l'espace est aussi zero; faisant donc $x = 0$ dans l'intégrale égalée elle-même à zero, on aura $\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$, & par conséquent $b = -\frac{2a}{3}\sqrt{af}$; ainsi l'intégrale complette & par conséquent l'espace cherché $DCEB = \frac{2}{3}(a + x)\sqrt{[af + fx]} - \frac{2}{3} a\sqrt{af}$.

Si l'on compte les x de E vers A, que ED soit une abscisse quelconque x, & que $AE = a$, l'équation sera $af - fx = yy$; on aura $ydx = dx\sqrt{[af - fx]}$, & l'intégrale sera $-\frac{2}{3}(a - x)(af - fx)^{\frac{1}{2}} + b$. Mais lorsque $x = 0$, l'espace est nul; faisant donc dans l'intégrale $x = 0$, on aura $-\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$, & par conséquent $b = \frac{2}{3} a\sqrt{af}$; donc l'espace $EDBC = \frac{2}{3} a\sqrt{af} - \frac{2}{3}(a - x)\sqrt{[af - fx]}$.

On a vû qu'en général l'espace parabolique $AEC = \frac{2}{3} AE \times EC$, que de même l'espace $ADB = \frac{2}{3} AD \times DB$; donc l'espace $DECB = \frac{2}{3} AE \times EC - \frac{2}{3} AD \times DB$; ce qui s'accorde avec le calcul dans l'un & dans l'autre cas, c'est-à-dire, soit qu'on compte les x de D vers E, ou de E vers D.

Prenons l'équation générale des paraboles de tous les degrés $a^m x^n = y^r$; on aura $y\,dx = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}} dx$, dont l'intégrale donne l'espace $= \frac{r a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r} + b$; mais lorsque $x = 0$, on trouve aussi $b = 0$; ainsi il ne faut pas ajouter de constante, & l'intégrale trouvée $\frac{r a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r}$ est complette. Si l'on veut mettre au lieu de y sa valeur $a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, on trouvera $\frac{r}{n+r} xy =$ l'espace cherché.

EXEMPLE II.

93. QUARRER la courbe $y = \sqrt[m]{[x+a]}$?

On a $y\,dx = dx\sqrt[m]{[x+a]}$, & intégrant on trouve $\int y\,dx = \frac{m}{m+1}(x+a).(x+a)^{\frac{1}{m}} + b$. Mais lorsque $x = 0$, on a $b = -\frac{m}{m+1} a\sqrt[m]{a}$; donc l'intégrale complette ou l'espace demandé $=$ $\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{[x+a]} - \frac{m}{m+1} \times a\sqrt[m]{a}$.

EXEMPLE III.

94. QUARRER l'hyperbole entre ses asymptotes, dont l'équation est $xy = aa$? On suppose
Fig. 11. $AB = x$ & $BE = y$, (Fig. 11).

On a ici $y\,dx = \frac{aa\,dx}{x}$, & après avoir intégré $\int y\,dx = a\,\mathrm{L}.\,x + b$, dans la logarithmique dont la sou-tangente $= a$. Mais en faisant $x = 0$, on trouve dans l'intégrale le logarithme de zero, qui par la nature de la logarithmique est une quantité infinie & négative; donc la constante b qu'il faut ajouter à l'intégrale, est une grandeur infinie & positive, & par conséquent l'espace renfermé par la courbe EF prolongée à l'infini, par l'asymptote & par les coordonnées AB, BE, est infini.

Si l'on propose l'hyperbole du second genre de l'équation $a^3 = xyy$; on a alors $ydx = dx\sqrt{\left[\frac{a^3}{x}\right]}$; & $\int ydx = 2\sqrt{[a^3x]} + b$. Mais la supposition de $x = 0$ donne $b = 0$; il n'est donc pas besoin d'ajouter de constante, & l'intégrale complette ou l'espace $ABEF$ infiniment prolongé du côté d'en-haut est $2\sqrt{[a^3x]} = 2xy$, quantité finie.

Si l'hyperbole étoit celle de l'équation $a^3 = xxy$, on auroit $ydx = \frac{a^3dx}{xx}$, & $\int ydx = -\frac{a^3}{x} + b$; mais en faisant $x = 0$, on a $b = \frac{a^3}{0}$ qui est une quantité infinie; il faudroit donc ajouter une grandeur infinie à l'intégrale pour la compléter; ainsi l'espace est infini.

Soit l'équation générale des hyperboles $a^{m+n} = x^m y^n$; on a $y = a^{\frac{m+n}{n}} x^{-\frac{m}{n}}$, & par conséquent $\int ydx = \frac{ma^{\frac{m+n}{n}} x^{\frac{n-m}{n}}}{m-n} + b$. Si $m = 1$ & $n = 1$, c'est-à-dire si $xy = aa$, on aura $\int ydx = \frac{aa}{0} + b$, quantité infinie; ainsi l'espace sera infini, comme on l'a déja vû.

Si $n = 1$ & $m = 2$, ou bien si $n = 2$ & $m = 1$, c'est le cas des équations $a^3 = xyy$ & $a^3 = xxy$ qui ont déja été examinées.

Si $n = 1$ & $m = 3$, l'équation est $a^4 = xy^3$, & l'on a $\int y\,dx = \frac{3}{2} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b$; mais la supposition de $x = 0$ donne $b = 0$; ainsi l'intégrale est complette & l'espace demandé, quoiqu'infiniment prolongé dans la partie supérieure, $= \frac{3}{2} \sqrt[3]{[a^4 xx]} = \frac{3}{2} xy$, quantité finie.

Si $n = 3$ & $m = 1$, l'équation est $a^4 = x^3 y$, & l'on a $\int y\,dx = -\frac{a^4}{2xx} + b$; mais la supposition de $x = 0$ donne $b = \infty$; donc l'espace est infini.

Si $n = 1$ & $m = 4$, c'est-à-dire si l'équation est $a^5 = xy^4$, on aura $\int y\,dx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{[a^5 x^3]} + b$; mais $x = 0$ donne $b = 0$; ainsi l'intégrale $\frac{4}{3} \sqrt[4]{[a^5 x^3]}$ ou $\frac{4}{3} xy$ est complette & finie.

Si $n = 4$ & $m = 1$, ou si l'équation est $a^5 = x^4 y$, on aura $\int y\,dx = -\frac{a^5}{3x^3} + b$; mais $x = 0$ donne $b = \infty$, l'espace sera donc infini. Et ainsi des autres.

Prenons maintenant l'origine des abscisses au point B, & cherchons l'espace $BCDE$, en supposant $AB = b$, $BC = x$, $CD = y$. S'il s'agit de l'hyperbole ordinaire dont l'équation est $by + xy = aa$; on aura $y = \frac{aa}{b+x}$, $y\,dx = \frac{aa\,dx}{b+x}$, & $\int y\,dx = a\mathrm{L}.(b+x) + f$, dans la logarithmique dont la soutangente $= a$. Pour déterminer la constante f, on fera $x = 0$, & on trouvera $f = -a\,\mathrm{L}.\,b$; ainsi l'intégrale complette ou l'espace $BCDE = a\mathrm{L}.(b+x) -$

aL.b. Si l'on prend $BC = x$ infinie, L.$(b+x)$ sera infini ; par où l'on voit que l'espace $EBCD$ infiniment prolongé vers C est infini.

Prenons x négative & égale à $BA = -b$, alors aL.$(b+x)$ est égal à a multiplié par le log. de zero qui est une grandeur infinie & négative. Ainsi l'espace est négatif, c'est-à-dire du côté de M, & infini comme on l'a déja vu. Donc dans l'hyperbole ordinaire l'espace renfermé par la courbe & par les asymptotes, est infini de part & d'autre.

S'il s'agit de l'hyperbole cubique de l'équation $byy + xyy = a^3$, on aura $\int ydx = 2\sqrt{[a^3b + a^3x]} + f$; mais la supposition de $x = 0$ donne $f = -2\sqrt{[a^3b]}$; donc l'intégrale complette ou l'espace $EBCD = 2\sqrt{[a^3b + a^3x]} - 2\sqrt{[a^3b]}$, grandeur algébrique finie. Si x est infinie, l'espace $EBCD$ sera aussi infini.

Si l'on prend x négative $= BA = -b$, l'intégrale sera $-2\sqrt{[a^3b]}$; ainsi l'espace sera négatif, c'est-à dire que c'est l'espace $FEBAM$, & il sera fini, quoiqu'on le prolonge infiniment du côté de M, comme on l'a déja vu.

Si on propose l'hyperbole de l'équation $(b+x)^2 \cdot y = a^3$; on trouvera $\int ydx = -\frac{a^3}{b+x} + f$; mais $x = 0$ donne $f = \frac{a^3}{b}$; donc l'intégrale complette ou l'espace $EBCD$ sera $= \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{b+x}$. Lorsque x est infinie, le terme $-\frac{a^3}{b+x}$ devient égal à zero ; ainsi l'espace sera fini, quoiqu'il s'étende à l'infini du côté de C. Si x étoit négative, & $= BA =$

$-b$, l'intégrale feroit $\frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{o}$; mais $-\frac{a^3}{o}$ eft une grandeur infinie & négative; ainfi l'efpace eft infini du côté de M.

En opérant comme l'on vient de voir, on trouve que l'efpace renfermé entre l'hyperbole ordinaire & fes afymptotes, eft infini de part & d'autre; que celui qui eft compris entre les afymptotes & la première hyperbole cubique eft fini du côté de M, & infini du côté de C; qu'au contraire l'efpace de la feconde hyperbole cubique eft fini du côté de C, & infini du côté de M; que celui de la première hyperbole du quatrième degré eft fini du côté de M, & infini du côté de C; & celui de la feconde du même degré eft fini du côté de C, & infini du côté de M, &c.

On peut auffi faire ufage des féries. Je reprends à cet effet l'élément de l'efpace $BCDE$ de l'hyperbole ordinaire, favoir $\frac{aadx}{b+x}$. Je le réduits en fuite; ce qui donne $\frac{aadx}{b} - \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxxdx}{b^3} - \frac{aax^3dx}{b^4}$, &c; & intégrant j'ai $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} - \frac{aax^4}{4b^4} +$ &c. Cette fuite continuée à l'infini donneroit exactement l'efpace $BCDE$; fi on pouvoit la fommer, on auroit cet efpace exprimé algébriquement & en termes finis, & la quadrature de l'hyperbole feroit connue; mais comme elle n'eft pas fommable, plus on en prendra de termes en partant du premier, & plus on approchera de la valeur exacte de l'efpace.

Si l'on prend BT ou x du côté des abfciffes négatives, l'équation de la courbe sera $by - xy = aa$. On aura par conséquent $ydx = \frac{aadx}{b-x}$; & réduisant en série, & intégrant $\int ydx = \frac{aax}{b} + \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} + \frac{aax^4}{4b^4} + \frac{aax^5}{5b^5} + \&c = BTPE$. Lorsque $BT = BA$, la série exprime l'espace $FEBAM$ infiniment prolongé vers M; elle devient alors $aa + \frac{aa}{2} + \frac{aa}{3} + \frac{aa}{4} + \&c$, qui a une valeur infinie; l'espace est par conséquent aussi infini.

EXEMPLE IV.

95. SOIT supposée l'hyperbole équilatère OC (Fig. 12) entre les asymptotes AS, AB; & soit fait $AB = BC = a$, $BI = -x$. Que l'on imagine une courbe méchanique BEF telle que le rectangle de AB par une ordonnée quelconque IE soit égal à l'espace hyperbolique correspondant $BCOI$; on demande l'espace indéterminé $SABEF$? Soit l'ordonnée $IE = z$. Puisque dans l'hyperbole équilatère $b = a$, l'espace $BCOI$ est $= ax + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4aa} + \frac{x^5}{5a^3}$, &c; donc par la propriété de la courbe on aura $z = x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{3aa} + \frac{x^4}{4a^3} + \&c$; & par conséquent $\int zdx = \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6a} + \frac{x^4}{12aa} + \frac{x^5}{20a^3} + \frac{x^6}{30a^4} + \&c =$ l'espace BIE; & si l'on prend $x = a = BA$, la série exprimera l'espace entier Fig. 12.

SABEF infiniment prolongé, & deviendra $\frac{aa}{2}$ + $\frac{aa}{6}$ + $\frac{aa}{12}$ + $\frac{aa}{20}$ + $\frac{aa}{30}$ + &c; or il est clair que cette série est sommable & $= aa$: donc l'espace *SABEF* infiniment prolongé est quarrable, & égal au quarré de *BA*.

EXEMPLE V.

Fig. 13. 96. SOIT l'hyperbole *ATC* (Fig. 13), dont $DA = 2a$ est le premier axe, p le paramètre, l'abscisse $EB = x$, $BC = y$; & par conséquent l'équation est $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$; on demande l'espace *ABC*? On aura la formule $ydx = dx\sqrt{\left[\frac{pxx-paa}{2a}\right]}$; si l'on fait disparoître le signe radical, & qu'on passe à l'intégration, on trouvera par la voie ordinaire, l'intégrale qui sera partie algébrique & partie logarithmique; ainsi la quadrature de l'espace hyperbolique *ABC* dépend de la description de la logarithmique.

Si on veut l'espace *ACHE*, on mènera *MT* infiniment voisine de *BC*, & l'espace infinitésimal *ITCH* en sera l'élément; la formule sera donc xdy, dans laquelle on mettra la valeur de x donnée en y par l'équation de la courbe, & on aura $xdy = dy\sqrt{\left[\frac{2ayy+aap}{p}\right]}$, dont l'intégrale dépend également de la logarithmique.

Si l'on substituoit, tant dans l'élément ydx du premier espace, que dans l'élément xdy du second, les valeurs respectives de dx & de dy données par l'équation, on trouveroit pareillement des intégrales de la même nature.

Pour appliquer ici l'usage des séries, je prends la formule xdy de l'espace $ACHEA$; j'ai donc $xdy = dy\sqrt{\left[\frac{2ayy+aap}{p}\right]}$. Comme les constantes n'apportent aucun changement à la méthode, je fais pour plus grande facilité $2a = p$, ce qui revient au même que de supposer l'hyperbole équilatère; j'ai $xdy = dy\sqrt{[yy+aa]}$, & en réduisant le radical en série $xdy = ady + \frac{yydy}{2a} - \frac{y^4dy}{8a^3} + \frac{y^6dy}{16a^5} - \frac{5y^8dy}{128a^7} +$ &c; donc $\int xdy$ ou l'espace $ACHEA = ay + \frac{y^3}{6a} - \frac{y^5}{40a^3} + \frac{y^7}{7.16a^5} - \frac{5y^9}{9.128a^7} +$ &c, série qu'on ne fait pas sommer; si on la soustrait du rectangle xy, on aura l'espace ABC.

Soient menées du centre E les droites infiniment voisines ET, EC; soit AKP la tangente au sommet; & que du centre E on décrive les petits arcs KQ, TR; on aura $AK = \frac{ay}{x}$, $KP = \frac{axdy - aydx}{xx}$, $ET = \sqrt{[xx+yy]}$, $EK = \frac{a\sqrt{(xx+yy)}}{x}$. De plus, les triangles semblables PKQ, KEA ou TEM donneront $KQ = \frac{axdy - aydx}{x\sqrt{[xx+yy]}}$, & par les secteurs EKQ, ETR, on aura $TR = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{[xx+yy]}}$; donc

$\frac{1}{2} ET \times TR$ ou l'élément du secteur ETA sera $\frac{xdy - ydx}{2}$. Si l'on y substitue à y & à dy leurs valeurs données par l'équation de l'hyperbole équilatère $y = \sqrt{[xx - aa]}$, on aura $\frac{aadx}{2\sqrt{[xx-aa]}}$, & intégrant, $\int \frac{aadx}{2\sqrt{[xx-aa]}}$ ou le secteur $ETA = -\frac{a}{2} L.(x - \sqrt{[xx-aa]})$ dans la logarithmique dont la sou-tangente $= a$, quantité affectée du signe $-$, parce qu'il faut la prendre du côté négatif.

Si l'on réduit la formule en série, on trouvera $\frac{aadx}{2\sqrt{[xx-aa]}} = \frac{aadx}{2x} + \frac{a^4dx}{4x^3} + \frac{3a^6dx}{16x^5} + \frac{5a^8dx}{32x^7} + \frac{35a^{10}dx}{256x^9}$, &c. Mais pour intégrer le premier terme, il faudroit le réduire lui-même en série; ainsi on aura plutôt fait de s'y prendre comme il suit.

Soient $EM = x$, $MT = y$, $AK = z$, $KP = dz$, $KE = p$, $AE = a$, & le demi-axe conjugué $= b$. On aura $KQ = \frac{adz}{p}$, $ET = \frac{px}{a}$, $TR = \frac{xdz}{p}$, & par conséquent $\frac{1}{2} ET \times TR = \frac{xxdz}{p}$; mais l'équation de la courbe est $y = \frac{b}{a}\sqrt{[xx - aa]}$, & les triangles semblables EAK, EMT donnent $y = \frac{xz}{a}$; donc $zx = b\sqrt{[xx-aa]}$, & $xx = \frac{aabb}{bb - zz}$; ainsi la formule sera $\frac{abbdz}{2.(bb-zz)} = \frac{adz}{2} +$

$\frac{azzdz}{2bb} + \frac{az^4dz}{2b^4} + \frac{az^6dz}{2b^6} + \frac{az^8dz}{2b^8} +$ &c ; & intégrant, $\int \frac{abbdz}{2.(bb-zz)}$, ou l'espace $ETA =$ $\frac{az}{2} + \frac{az^3}{6bb} + \frac{az^5}{10b^4} + \frac{az^7}{14b^6} + \frac{az^9}{18b^8} +$ &c.

EXEMPLE VI.

97. SOIT le cercle ABD (Fig. 14) dont le diamètre $AD = a$; on demande l'aire d'un demi-segment quelconque AHE? Fig. 14.

Soient $AE = x$, $EH = y$; l'équation sera $y = \sqrt{[ax - xx]}$; donc $ydx = dx\sqrt{[ax - xx]}$. Il seroit inutile ici de chercher à délivrer cette quantité de son radical, ou à la transformer en une autre qui fût intégrable, soit algébriquement, soit par logarithmes; car on tomberoit toujours (comme on l'a remarqué n°. 37) dans quelque formule qui dépendroit de la quadrature ou de la rectification du cercle; il faut donc recourir directement aux séries. En tirant donc la racine quarrée de $ax - xx$, on trouvera $dx\sqrt{[ax - xx]} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{16a^{\frac{5}{2}}} -$ &c ; & par conséquent $\int ydx$ ou l'espace $AEH = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{28a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{72a^{\frac{5}{2}}} -$ &c.

Soit maintenant le raïon $CA = a$, $CE = x$,

$EH = y$; on aura $y = \sqrt{[aa - xx]}$, $ydx = adx - \frac{xxdx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5} - \frac{5x^8dx}{128a^7}$, & par conséquent $\int ydx$ ou l'espace $CEHB = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ — &c. Pour avoir la surface du quart de cercle, il n'y a qu'à faire $x = a$, ce qui donne $aa - \frac{aa}{6} - \frac{aa}{40} - \frac{aa}{112} - \frac{5aa}{1152}$ — &c. Le quadruple de cette suite exprime l'aire entière du cercle.

On peut aussi chercher l'aire du cercle, en employant un secteur. Soit menée CK infiniment voisine de CQ, soit décrit du centre C le petit arc QS ; & supposons $CA = a$, $AQ = x$; on aura $QK = dx$, $CQ = \sqrt{[aa + xx]}$, $QS = \ldots \frac{adx}{\sqrt{[aa+xx]}}$, $MN = \frac{aadx}{aa+xx}$; ainsi le petit secteur CMN, qui est l'élément du secteur CAM, sera $= \frac{a^3dx}{2.(aa+xx)} = \frac{a^3dx}{2aa} - \frac{a^3xxdx}{2a^4} + \frac{a^3x^4dx}{2a^6} - \frac{a^3x^6dx}{2a^8} + \frac{a^3x^8dx}{2a^{10}}$ — &c. Donc l'intégration donnera $\int \frac{a^3dx}{2.(aa+xx)}$, ou le secteur $CMA = \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10a^3} - \frac{x^7}{14a^5} + \ldots \frac{x^9}{18a^7}$ — &c. Lorsque l'arc AM est la moitié du quart de circonférence, on a $x = a$, & la série devient $\frac{aa}{2} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{10} - \frac{aa}{14} +$ &c, dont le double, savoir, $aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} - \frac{aa}{7} +$ &c, exprime le quart de cercle ABC.

Si au lieu de prendre le raïon $= a$, on le prenoit $= \sqrt{\left[\frac{aa}{8}\right]}$, on auroit le quart de cercle $ABC = \frac{aa}{8} - \frac{aa}{3.8} + \frac{aa}{5.8} - \frac{aa}{7.8} +$ &c; multipliant tout par 4, & soustrayant réellement chacun des termes négatifs du terme positif qui le précède, on aura $\frac{aa}{3} + \frac{aa}{35} + \frac{aa}{99} + \frac{aa}{195} +$ &c, qui est la série de M. Leibnitz insérée dans les Actes de Leipsick de l'année 1682.

EXEMPLE VII.

98. ON propose l'ellipse BCD (Fig. 15) qui a pour axes $AB = a$, $AC = b$, pour abscisse $AE = x$, pour ordonnée $EH = y$. Son équation est donc $\frac{bb}{aa}(aa - xx) = yy$, & l'élément de l'aire $AEHC$ est $ydx = \frac{bdx}{a}\sqrt{(aa - xx)}$. Mais $dx\sqrt{(aa - xx)}$ est l'élément du cercle BOD qui a pour diamètre le premier axe de l'ellipse; par où l'on voit que la quadrature de l'ellipse dépend de celle du cercle. Fig. 15.

Puisque $\int \frac{bdx}{a}\sqrt{[aa - xx]} = AEHC$, & $\int dx\sqrt{[aa - xx]} = EMOA$, il s'ensuit qu'un espace quelconque de l'ellipse est à l'espace circulaire correſpondant, & que l'ellipſe entière eſt au cercle entier, comme b eſt à a, c'eſt-à-dire comme l'axe conjugué eſt à l'axe commun au cercle & à l'ellipſe. Mais les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres ou de leurs raïons; ſi l'on fait donc un cercle qui ait pour raïon $\sqrt{ab}$ qui eſt une ligne moyenne proportionnelle entre les deux demi-axes de l'ellipſe, ce cercle ſera au cercle BOD :: $ab : aa :: b : a$ :: l'aire BCD de l'ellipſe : l'aire BOD du cercle. Donc la ſurface de l'ellipſe eſt égale à la ſurface d'un cercle dont le raïon eſt moyen proportionnel entre les deux demi-axes de l'ellipſe.

Cherchons la ſurface de l'ellipſe par le moyen des ſéries. On trouvera $\frac{bdx}{a}\sqrt{[aa - xx]} = \frac{bdx}{a} \times \left(a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \&c.\right)$, & $\int \frac{bdx}{a}\sqrt{[aa - xx]} = bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$, &c. Si l'on ſuppoſe $x = a$, on aura l'aire ACB, qui eſt le quart de l'ellipſe, exprimée par $ab - \frac{ab}{6} - \frac{ab}{40} - \frac{ab}{112} - \frac{5ab}{1152} - \&c.$

Dans la même ellipſe, ſoit pris un arc quelconque DS; ſoient DP la tangente en D, $AI = x$, $IS = y$. Ayant mené par le point S la droite AP, ſoit menée enſuite AK infiniment voiſine de AP; & du centre A ſoient décrits les petits arcs KQ, TR. On aura $AS = \sqrt{[xx + yy]} = AT$, $DP = \frac{ay}{x}$, AK ou $AP = \frac{a\sqrt{[xx+yy]}}{x}$, KP (différentielle négative)

$=\frac{-axdy+aydx}{x^2}$; & à cauſe des triangles PQK, PAD ſemblables, $KQ=\frac{-axdy+aydx}{x\sqrt{[xx+yy]}}$; de plus, la ſimilitude des ſecteurs ATR, AKQ donne $TR=\frac{-xdy+ydx}{\sqrt{[xx+yy]}}$; ainſi $TR\times\frac{AT}{2}$ ou l'élément de l'eſpace ACT ſera égal à $\frac{-xdy+ydx}{2}$, qui, en ſubſtituant à y & à dy leurs valeurs données par l'équation de la courbe, devient $\frac{abdx}{2\sqrt{[aa-xx]}}$. Mais $-\frac{adx}{\sqrt{[aa-xx]}}$ (n°. 37) eſt l'élément de la circonférence; donc la quadrature des ſecteurs elliptiques dépend de la rectification de la circonférence ou de la quadrature du cercle, & ce feroit à pure perte qu'on ſe donneroit la peine de délivrer cette formule de ſon radical; on tomberoit toujours dans des formules qui dépendroient du même cercle.

Par le moyen des ſéries, on trouvera que $\frac{abdx}{2\sqrt{[aa-xx]}}=\frac{bdx}{2}+\frac{bxxdx}{4aa}+\frac{3bx^4dx}{16a^4}+\frac{5bx^6dx}{32a^6}+\frac{35bx^8dx}{256a^8}+$ &c; & en intégrant on aura l'eſpace $ATC=\frac{bx}{2}+\frac{bx^3}{12aa}+\frac{3bx^5}{80a^4}+\frac{5bx^7}{224a^6}+\frac{35bx^9}{2304a^8}$, &c. Pour avoir l'eſpace ADC, quart de l'ellipſe, il n'y a qu'à faire $x=a$, & on le trouvera $=\frac{ab}{2}+\frac{ab}{12}+\frac{3ab}{80}+\frac{5ab}{224}+\frac{35ab}{2304}+$ &c.

Si cependant on vouloit chasser le radical, on n'auroit qu'à faire $\sqrt{[aa-xx]}=a-\frac{xz}{a}$, & la formule se changeroit en celle-ci $\frac{aabdz}{aa+zz}$. Celle-ci réduite en série devient $bdz-\frac{bzzdz}{aa}+\frac{bz^4dz}{a^4}-\frac{bz^6dz}{a^6}+\frac{bz^8dz}{a^8}$ — &c, dont l'intégrale est $bz-\frac{bz^3}{3aa}+\frac{bz^5}{5a^4}-\frac{bz^7}{7a^6}+\frac{bz^9}{9a^8}$ — &c. Lorsque $x=a$, z est aussi $=a$, & on a le quart d'ellipse $=ab-\frac{ab}{3}+\frac{ab}{5}-\frac{ab}{7}+\frac{ab}{9}$ — &c.

Enfin, si l'on suppose $a=b$, l'ellipse alors devient le cercle dont le raïon $=a$; & la dernière série se change en celle-ci, $aa-\frac{aa}{3}+\frac{aa}{5}-\frac{aa}{7}+\frac{aa}{9}$ — &c, qui est la même que celle du n°. 97.

EXEMPLE VIII.

Fig. 16. 99. SOIENT NAM (Fig. 16) une cycloïde, ARH son cercle générateur, $AH=a$, $AB=x$, $BC=dx$, $BE=dy$; son équation sera $dy=\frac{adx-xdx}{\sqrt{[ax-xx]}}=\frac{dx\sqrt{[a-x]}}{\sqrt{x}}$. Or le petit espace $QEFP$ qui est égal à $FP\times PQ=\frac{xdx\sqrt{[a-x]}}{\sqrt{x}}=dx\sqrt{[ax-xx]}$ est l'élément de l'espace AEQ; mais $\int dx\sqrt{[ax-xx]}$ est l'expression du segment circulaire ASB; donc l'espace cycloïdal AEQ

AEQ eſt égal à l'eſpace circulaire correſpondant ASB, & l'eſpace AMK eſt égal au demi-cercle. Mais le rectangle $AHMK$ eſt quadruple du demi-cercle, puiſqu'il eſt le produit de la demi-circonférence par ſon diamètre ; donc l'eſpace AMH eſt triple du demi-cercle, & par conſéquent l'eſpace total de la cycloïde eſt triple du cercle générateur.

Si on vouloit trouver immédiatement la ſurface AFC, puiſque le petit eſpace $FCBE$, c'eſt-à-dire ydx en eſt l'élément, & que l'équation de la courbe donne $dy = \frac{dx\sqrt{(ax - xx)}}{x} = \frac{a^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a^{\frac{5}{2}}} - \&c$, on aura, en intégrant.. $\int \frac{dx\sqrt{[ax - xx]}}{x}$, ou $y = 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{56a^{\frac{5}{2}}} - \&c$; ainſi l'élément $ydx = 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{56a^{\frac{5}{2}}} - \&c$; donc l'intégration donne $\int ydx = ABE = \frac{4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{70a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{252a^{\frac{5}{2}}} - \&c.$

EXEMPLE IX.

100. SOIT ADK la conchoïde (Fig. 17); CB ou BA étant $= a$, $CM = x$, $MD = y$; on de- Fig. 17.

mande l'espace $ADGB$. Supposons $CG = z$ qui, comme on le voit aisément, sera toujours donnée en x & y. Soit CE infiniment voisine de CD, & que du centre C on décrive les petits arcs GI, DF; on aura $HI = dz$, & le trapèze $FDGI$ sera l'élément de l'espace cherché. De plus, par la similitude des triangles HIG, BGC, on a $GI = \frac{adz}{\sqrt{[zz-aa]}}$; & par la similitude des secteurs CGI, CDF, $DF = \frac{azdz + aadz}{z\sqrt{[zz-aa]}}$. Mais le trapèze $FDGI$ est $= (DF + GI) \times \frac{GD}{2} = \frac{2aazdz + a^3dz}{2z\sqrt{[zz-aa]}}$. Donc l'espace demandé ou $\int \frac{2aazdz + a^3dz}{2z\sqrt{[zz-aa]}} = - \ldots\ldots$ $aL.(\sqrt{[zz-aa]} - z) + a \times$ l'arc de cercle qui a pour raïon a, & qui a pour tangente $\sqrt{[zz-aa]} - z$. Je suppose que le logarithme est pris dans la logarithmique dont la sou-tangente est a.

On peut pareillement trouver l'espace soit partiel, soit total de la même conchoïde en rapportant la courbe à son axe. Soient dans la même figure $AB = DG = a = BC$, $BM = x$, $MD = y$, & du point G soit élevée la perpendiculaire GO sur l'ordonnée MD; on aura $DO = \sqrt{[aa-xx]}$, & à cause des triangles CBG, GOD semblables, BG ou $MO = \frac{a\sqrt{[aa-xx]}}{x}$; donc $MD = \sqrt{[aa-xx]} + \frac{a\sqrt{[aa-xx]}}{x} = y$, & par conséquent ydx ou l'élément de l'espace cherché $= dx\sqrt{[aa-xx]} + \frac{adx\sqrt{[aa-xx]}}{x}$. L'intégration du premier terme dépend de la quadrature du cercle, & celle du second de la quadrature de l'hyperbole.

EXEMPLE X.

101. SOIT *AMI* (Fig. 18) la cissoïde de Dioclès, Fig. 18
dont l'équation est $yy = \frac{x^3}{a-x}$. L'élément de l'espace sera donc $\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}$, quantité dont l'intégration dépend de la quadrature du cercle. Pour avoir le rapport de l'espace entier de la cissoïde à celui du cercle générateur, on fera attention que puisqu'on a $yy = \frac{x^3}{a-x}$, on aura aussi $yy(ax-xx) = x^4$ & $y\sqrt{[ax-xx]} = xx$. Or, en différentiant l'équation proposée $ayy - xyy = x^3$, on trouve $(a-x)2dy - ydx = \frac{3xxdx}{y}$; & puisque $xx = y\sqrt{[ax-xx]}$, on a donc aussi $(a-x)2dy - ydx = 3dx\sqrt{[ax-xx]}$. Mais $(a-x)dy$ est l'élément de l'espace *AMQB*, ydx est l'élément de l'espace *AMP*; & en intégrant relativement à l'espace total, on a $\int dy.(a-x) = \int ydx$. On a donc aussi dans cette circonstance, $2\int dy(a-x) - \int ydx = \int dy(a-x)$, & par conséquent $\int dy(a-x) = 3\int dx\sqrt{[ax-xx]}$. Mais lorsqu'il s'agit de l'espace entier de la cissoïde, $\int dx\sqrt{[ax-xx]}$ est l'aire du demi-cercle *ABN*; donc l'espace de la

cissoïde infiniment prolongée, est triple du demi-cercle générateur.

On ne parle ici que de l'espace total; mais que l'on considére l'équation $2dy(a-x)-3dx\sqrt{[ax-xx]}=ydx$, que l'on vient de trouver; puisque $dy(a-x)$ est l'élément de l'espace $AMQB$, que $dx\sqrt{[ax-xx]}$ est l'élément du demi-cercle, & ydx l'élément de l'espace AMP; il est clair qu'on a toujours l'espace $AMP=2AMQB-3APN$; d'où l'on déduit encore en prenant les espaces entiers, que l'aire de la cissoïde infiniment prolongée, est égale à trois fois celle du demi-cercle.

EXEMPLE XI.

Fig. 19. 102. SOIT HBD la logarithmique (Fig. 19); MQ est son asymptote, $AB=a$ est sa sou-tangente; & soient $KH=y$, $AK=x$, & $\frac{ady}{y}=dx$ son équation. On aura donc $ydx=ady$; & intégrant $\int ydx=ay+bb$; mais en faisant $y=a$, on trouvera $bb=-aa$; ainsi l'intégrale complette, c'est-à-dire l'espace $AKHB=ay-aa$. Si l'on prend une autre ordonnée quelconque $MN=z$, on aura aussi $AMNB=az-aa$; donc $MKHN=ay-az$. Soit l'ordonnée EF plus petite que AB & $=y$, $AE=-x$; l'équation de la courbe sera toujours $\frac{ady}{y}=dx$, car x étant négative, sa différence est aussi négative; mais x croissant, l'ordonnée y diminue; donc dy est aussi négative; c'est pourquoi l'élément de l'espace sera aussi négatif; cet élément sera donc $-ydx=-ady$, dont l'intégrale est $-ay+bb$; mais dans la supposition de $y=a$, on a $bb=aa$; donc l'intégrale complette ou l'espace $AEFB=aa-ay$.

Lorsque $y=0$, c'est-à-dire lorsque l'espace est infiniment prolongé du côté de Q, il sera $=aa$; & par conséquent le même espace infiniment prolongé du côté de Q, mais commençant à une ordonnée quelconque $EF=y$, sera $=ay$.

EXEMPLE XII.

103. SOIT proposée la tractoire ABF (Fig. 20), dont la propriété principale est que la tangente BP à un point quelconque B, est constante & toujours égale à une droite donnée. Supposons une abscisse quelconque $ED=x$, l'ordonnée $DB=y$, l'arc AB de la courbe $=u$, & la droite donnée $=a$. Puisque l'abscisse ED croissant l'ordonnée DB diminue, sa différence sera négative & exprimée par $-dy$; ainsi la propriété de la courbe donnera cette équation $-\frac{ydu}{dy}=a$, dans laquelle mettant $\sqrt{[dx^2+dy^2]}$ au lieu de du, on aura $dx=\frac{-dy\sqrt{[aa-yy]}}{y}$; & par conséquent la formule ydx, ou l'élément de l'espace quelconque $ABDE$, sera $-dy\sqrt{[aa-yy]}$. Je prends maintenant pour première ordonnée $AE=a$; avec EA pour raïon je décris le quart de circonférence AQM, & je mène BQ parallèle à MH. Or, puisque $DB=EC=y$, & que par la propriété du cercle, $CQ=\sqrt{[aa-yy]}$, l'élément de l'espace circulaire CQA est aussi $-dy\sqrt{[aa-yy]}$; ainsi l'espace CQA est égal à l'espace $ABDE$; & par conséquent l'espace infiniment prolongé compris entre la tractoire, son asymptote & la droite AE, est égal au quart de cercle AME. Fig. 20.

EXEMPLE XIII.

104. SOIT la spirale ACB (Fig. 21) dont l'équa- Fig. 21.

tion eſt $by = ax$, en ſuppoſant le raïon AB du cercle $= a$, la circonférence $= b$, un arc quelconque $BD = x$, & $AC = y$. Soit menée AE infiniment voiſine de AD; que du centre A on décrive le petit arc CH, & qu'on appelle ED, dx. La ſimilitude des ſecteurs ACH, ADE donne $CH = \frac{ydx}{a}$; ainſi le ſecteur ACH, qui eſt l'élément de l'eſpace $ANCA$, eſt $= \frac{yydx}{2a} = \frac{axxdx}{2bb}$, à cauſe de l'équation de la courbe $y = \frac{ax}{b}$. Que l'on intègre en négligeant la conſtante qui ſeroit inutile ici, on aura l'eſpace $ACN = \frac{ax^3}{6bb}$; & faiſant $x = b$, on verra que l'eſpace total $ANB = \frac{ab}{6}$.

Si l'on prend l'équation générale de toutes les ſpirales à l'infini $a^m x^n = b^n y^m$, on aura $yy = \frac{aax^{\frac{2n}{m}}}{b^{\frac{2n}{m}}}$, & la formule des eſpaces ſera $\frac{ax^{\frac{2n}{m}}dx}{2b^{\frac{2n}{m}}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{max^{\frac{2n+m}{m}}}{(4n+2m)b^{\frac{2n}{m}}}$; faiſant $x = b$, on aura l'eſpace entier $= \frac{mab}{4n+2m}$.

Il eſt facile de voir que l'eſpace $ABMDCNA$ terminé par le raïon AB, par l'arc de cercle BMD, & par la partie ANC de la ſpirale ſera $= \frac{ax}{2} -$

$\frac{ax^3}{6bb}$, puifqu'il eft égal au fecteur $ABMDA$ moins l'efpace ACN. Mais fi on le vouloit avoir par le moyen de la formule différentielle, il fuffiroit d'obferver que cet efpace a pour élément le petit trapèze $ECHD$ qui eft égal à $(DE+CH)\times\frac{CD}{2} = \left(dx+\frac{ydx}{a}\right).\left(\frac{a-y}{2}\right) = \frac{aadx-yydx}{2a}$. Si l'on met dans cette expreffion au lieu de yy fa valeur $\frac{aaxx}{bb}$, on aura $\frac{adx}{2}-\frac{axxdx}{2bb}$; & intégrant en négligeant la conftante, $\frac{ax}{2}-\frac{ax^3}{6bb}$.

Exemple XIV.

105. Soit la parabole ABM (Fig. 22) de l'équation $ax=yy$; on fuppofe $AC=x$, $CB=y$, le rapport du raïon au finus de l'angle $BCD=\frac{a}{b}$, celui du raïon à fon cofinus $=\frac{a}{f}$. On aura $BD=\frac{by}{a}$, $CD=\frac{fy}{a}$, $CH=dx$; & l'élément de l'efpace $ACB=CHMB=CH\times DB$. La formule fera donc $\frac{bydx}{a}=\frac{bdx\sqrt{(ax)}}{a}$, dont l'intégrale eft $\frac{2bx\sqrt{(ax)}}{3a}$, ou bien $\frac{2bxy}{3a}=\frac{2}{3}AC\times BD$; il n'eft pas néceffaire d'ajouter de conftante à cette intégrale. Fig. 22.

Exemple XV.

106. Soit la parabole ACM rapportée au foyer

Fig. 23. B (Fig. 23), dont l'équation, en faisant $BC = z$, l'arc de cercle infiniment petit $CD = du$, & le paramètre $= 2a$, est $\frac{adz}{\sqrt{[2az - aa]}} = du$. On a le secteur infinitésimal BMC ou BDC, qui est l'élément de l'espace ABC, exprimé par $\frac{zdu}{2} = \frac{azdz}{2\sqrt{[2az - aa]}}$, dont l'intégrale est $\frac{z+a}{6}\sqrt{[2az - aa]} + mm$. Mais lorsque $z = BA = \frac{a}{2}$, cas auquel l'espace est nul, on a $mm = 0$; donc l'intégrale complette ou l'espace $ABC = \frac{z+a}{6}\sqrt{[2az - aa]}$.

En effet, si du point C on abaisse sur AB la perpendiculaire CQ, l'espace BCA sera égal à l'espace QCA moins le triangle BQC; mais faisant $BQ = x$, $QC = y$, on a $QCA - QCB = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2} + x\right)y - \frac{xy}{2} = \frac{(2a+x)y}{6}$; donc $BCA = \frac{(2a+x).y}{6}$. Mais par la propriété de la parabole, $BC = AQ + AB = x + a$, c'est-à-dire $z = x + a$, & $y = \sqrt{[aa + 2ax]} = \sqrt{[2az - aa]}$; substituant donc ces valeurs au lieu de x & de y, on trouvera comme ci-dessus, $BCA = \frac{(2a+x)y}{6} = \frac{a+z}{6}\sqrt{[2az - aa]}$.

EXEMPLE XVI.

107. Si l'on imagine le quart AC d'une circonférence de cercle rectifié & appliqué sur la droite Fig. 24. ac (Fig. 24), & qu'ayant pris une partie quelconque

et de cette droite égale à l'arc AE, on éleve la perpendiculaire ed égale au sinus DE de cet arc, la courbe at qui passe par tous les points d déterminés de la même maniere, s'appelle la ligne des sinus. Si l'on prolonge ac jusqu'à ce qu'elle soit égale à la demi-circonférence du cercle, la courbe aura une autre partie au-delà de ct, qui sera semblable & égale à la premiere.

Soient le raïon $= r$, un arc quelconque $AE = ae = x$, le sinus correspondant DE ou $ed = y$; puisque la différentielle de l'arc exprimé par le moyen du sinus, est $\frac{r\,dy}{\sqrt{[rr - yy]}}$, on aura pour équation de la courbe $dx = \frac{r\,dy}{\sqrt{[rr - yy]}}$. Ainsi la formule $y\,dx$ deviendra $\frac{ry\,dy}{\sqrt{[rr - yy]}}$, & on aura en intégrant $-r\sqrt{[rr - yy]} + n$; mais en supposant $y = 0$, on a $n = rr$; donc l'intégrale complette ou l'espace $ade = rr - r\sqrt{[rr - yy]}$. & si l'on fait $y = r$, on aura l'espace total $atc = rr$. Si l'on construit donc le quarré TH sur le raïon, & qu'on prolonge le sinus BE jusqu'en M, on aura toujours $ade =$ le rectangle DH, & $atc =$ le quarré TH.

108. LES exemples qu'on a vûs, suffisent sans doute pour montrer l'usage de la méthode; j'ajouterai seulement qu'il peut arriver que dans les équations des courbes dont on veut quarrer les espaces, les indéterminées ne soient pas séparées, & même ne soient pas séparables par le moyen de la division. La même chose arrive aussi dans la rectification des courbes, dans la quadrature des superficies & dans la cubature des solides. On ne peut pas alors adapter

nos formules à ces équations; telle seroit la courbe $x^3 + y^3 = axy$.

Il faudra recourir dans ces cas à quelque substitution, qui transforme l'équation en une autre dans laquelle les indéterminées soient séparées ou puissent l'être. Le mal est qu'on ne peut pas assigner en géral quelle substitution il faut faire; c'est donc l'habitude du calcul, ou des tentatives réitérées qui feront connoître celle qui pourra mener au but, lorsqu'il sera possible d'y parvenir.

A l'égard de l'équation proposée $x^3 + y^3 = axy$, que l'on suppose $y = \frac{axx}{zz}$; après la substitution on aura $x^3 + \frac{a^3x^6}{z^6} = \frac{aax^3}{zz}$, c'est-à-dire $x^3 = \frac{aaz^4 - z^6}{a^3}$; & en différentiant $xxdx = \ldots\ldots \frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3}$. Mais à cause de $y = \frac{axx}{zz}$ la formule ydx des espaces devient $\frac{axxdx}{zz} = \ldots \frac{4aazdz - 6z^3dz}{3aa}$ en mettant au lieu de $xxdx$ la valeur qu'on vient de trouver; par conséquent $\int ydx = \frac{2}{3}zz - \frac{z^4}{2aa}$. Que l'on remette au lieu de zz sa valeur $\frac{axx}{y}$, & l'on aura enfin $\int ydx = \frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$.

EXEMPLE XVII.

109. ON demande de quarrer la courbe $a^4xxyy -$

$x^9 = a^6 y^3$. On supposera $y = \frac{xx}{z}$, & l'équation se transformera en celle-ci $a^5 z - x^3 z^3 = a^6$; d'où l'on tirera $x = \frac{a\sqrt[3]{[aaz - a^3]}}{z}$, $dx = \frac{a^3 dz}{3z \cdot (aaz - a^3)^{\frac{2}{3}}} - \frac{a dz \cdot (aaz - a^3)^{\frac{1}{3}}}{zz}$, & $y = \frac{aa \cdot (aaz - a^3)^{\frac{2}{3}}}{z^3}$. On aura donc l'élément de l'espace, c'est à-dire $ydx = \frac{a^5 dz}{3z^4} - \frac{a^3 dz}{z^5}(aaz - a^3) = \frac{a^6 dz}{z^5} - \frac{2a^5 dz}{3z^4}$; & en intégrant, $\int y\, dx = \frac{-a^6}{4z^4} + \frac{2a^5}{9z^3}$. Enfin, on remettra au lieu de z sa valeur $\frac{xx}{y}$, & l'on aura l'espace cherché $= \frac{-a^6 y^4}{4x^8} + \frac{2a^5 y^3}{9x^6}$.

On peut voir à ce sujet la méthode de M. Craige, dans son Livre *De Calculo fluentium*.

DE LA RECTIFICATION DES COURBES.

EXEMPLE XVIII.

110. TROUVER une ligne droite égale à un arc quelconque de la parabole ordinaire, dont l'équation est $ax = yy$?

La différentiation donne $adx = 2ydy$, & $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$. Si l'on met cette valeur de dx^2 dans la formule de la rectification des courbes $\surd[dx^2 + dy]^2$, on aura $\surd[dx^2 + dy^2] = \frac{\surd[4yydy^2 + aady^2]}{a} =$

$\frac{dy}{a}\sqrt{[4yy+aa]}$, qui eſt l'élément de l'arc de la parabole ordinaire. Pour préparer l'intégration, on fera la ſubſtitution de $\sqrt{[4yy+aa]}=2y+z$, afin de chaſſer le radical, & on trouvera $\frac{dy}{a}\sqrt{[4yy+aa]}=-\frac{a^3dz}{8z^2}-\frac{adz}{4z}-\frac{zdz}{8a}$, dont l'intégrale, comme l'on voit, eſt en partie algébrique & en partie logarithmique; ainſi la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole, vérité qu'on retrouvera encore de la manière ſuivante. Soit l'hyperbole équilatère ADE (Fig. 25) dont chaque demi-axe $=a$, l'abſciſſe BC comptée du centre $=x$, $CD=2y$, & dont l'équation eſt $xx-aa=4yy$. Si l'on mène GE infiniment voiſine de HD, l'élément de l'eſpace $ADHB$ ſera $HGED=2dy\sqrt{[4yy+aa]}$, qui eſt la même formule de la rectification de la parabole, à l'exception de la conſtante $\frac{a}{2}$, qui étoit dans le dénominateur. Donc, &c.

Fig. 25.

Si l'on veut opérer par les ſéries, on prendra la formule qu'on a trouvée ci-deſſus $\frac{dy}{a}\sqrt{[4yy+aa]}$, & qui devient $=dy+\frac{2yydy}{aa}-\frac{2y^4dy}{a^4}+\frac{4y^6dy}{a^6}-\frac{10y^8dy}{a^8}+$ &c; on intégrera, & on aura $\int\frac{dy}{a}\sqrt{[4yy+aa]}=y+\frac{2y^3}{3aa}-\frac{2y^5}{5a^4}+\frac{4y^7}{7a^6}-\frac{10y^9}{9a^8}+$ &c.

Si au lieu de fubftituer, dans la formule générale $\sqrt{[dx^2+dy^2]}$, la valeur de dx donnée en y, on y avoit fubftitué la valeur de dy donnée en x, on auroit trouvé $\sqrt{[dx^2+dy^2]} = \frac{dx\sqrt{[4ax+aa]}}{\sqrt{[4ax]}} = \frac{dx\sqrt{[4xx+ax]}}{2x}$, formule qui n'eft pas plus traitable que l'autre.

Si l'on demande la rectification de la feconde parabole cubique dont l'équation eft $axx=y^3$. On aura en différentiant $dx^2 = \frac{9ydy^2}{4a}$, & par conféquent $\sqrt{[dx^2+dy^2]} = dy\sqrt{\left[\frac{9y+4a}{4a}\right]}$, dont l'intégrale eft $\frac{(9ay+4aa)\sqrt{[9ay+4aa]}}{27aa} + m$; mais en fuppofant $y=0$, on a $m = -\frac{8a}{27}$; donc l'intégrale complette ou la longueur de l'arc eft $\frac{(9ay+4aa).\sqrt{[9ay+4aa]}}{27aa} - \frac{8a}{27}$.

Dans la parabole ordinaire ADM (Fig. 26), le paramètre étant $= \frac{9a}{4}$, que l'on prenne $AC = \frac{4a}{9}$, & une partie quelconque $CK=y$; on aura $AK = \frac{4a}{9}+y$, $KM = \sqrt{\left[\frac{4aa+9ay}{4}\right]}$, & par conféquent l'élément de l'aire $MKCD = \ldots$ $dy\sqrt{\left[\frac{4aa+9ay}{4}\right]}$. A l'exception de la conftante a, cet élément eft le même que celui de la rec- Fig. 26.

tification de la seconde parabole cubique. Ainsi cette rectification & la quadrature de la parabole ordinaire sont la même chose ; celle-ci est quarrable, de même que l'autre est rectifiable algébriquement. En général, si l'on prend pour ordonnée l'expression de l'élément d'une courbe donnée quelconque divisé par la différence de la variable, & pour abscisse la variable elle-même, il naîtra de-là une nouvelle courbe dont la quadrature donnera la rectification de la courbe donnée.

EXEMPLE XIX.

111. ON demande la rectification du cercle AEM (Fig. 27). Soient le diamètre $=a$, $AB=x$; on aura $BF=y=\sqrt{[ax-xx]}$, $dy=\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{\sqrt{[ax-xx]}}$, $dy^2=\frac{\frac{1}{4}aadx^2-axdx^2+xxdx^2}{ax-xx}$; & par conséquent l'élément de la courbe $\sqrt{[dx^2+dy^2]}=\frac{adx}{2\sqrt{[ax-xx]}}$, & en le réduisant en série ....

Fig. 27.

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx}{2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2.2a^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2.2.4a^{\frac{3}{2}}}+\ldots\ldots$$

$$\frac{15x^{\frac{5}{2}}dx}{2.2.4.6a^{\frac{5}{2}}}+\frac{105x^{\frac{7}{2}}dx}{2.2.4.6.8a^{\frac{7}{2}}}+\text{\&c}$$; on intégrera

& on aura $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2.3a^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{2.4.5a^{\frac{3}{2}}}+\ldots\ldots$

$$\frac{15x^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7a^{\frac{5}{2}}}+\frac{105x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.8.9a^{\frac{7}{2}}}+\text{\&c.}$$ Ou bien en-

core, puisque $dx^2 = \frac{dy^2.(ax-xx)}{\frac{1}{4}aa-ax+xx}$, si l'on met yy au lieu de $ax-xx$, on aura $dx^2 = \frac{yydy^2}{\frac{1}{4}aa-yy}$, & par conséquent $\sqrt{[dx^2+dy^2]} = \frac{ady}{2\sqrt{[\frac{aa}{4}-yy]}} = dy + \frac{2yydy}{aa} + \frac{6y^4dy}{a^4} + \frac{20y^6dy}{a^6} + \ldots\ldots \frac{70y^8dy}{a^8}$ + &c. Enfin intégrant, on trouvera l'arc $AF = y + \frac{2y^3}{3aa} + \frac{6y^5}{5a^4} + \frac{20y^7}{7a^6} + \frac{70y^9}{9a^8}$ + &c.

Si c'étoit le raïon qu'on eût fait $= a$, la série seroit $y + \frac{y^3}{2.3aa} + \frac{3y^5}{2.4.5a^4} + \frac{15y^7}{2.4.6.7a^6} + \frac{105y^9}{2.4.6.8.9a^8}$ + &c.

Enfin, si l'on fait $DB = x$, & le raïon $DA = a$, on aura $y = \sqrt{[aa+xx]}$, $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{[aa-xx]}}$, & par conséquent $\sqrt{[dx^2+dy^2]} = \frac{adx}{\sqrt{[aa-xx]}} = dx + \frac{xxdx}{2aa} + \frac{3x^4dx}{2.4a^4} + \frac{15x^6dx}{2.4.6a^6} + \ldots \frac{105x^8dx}{2.4.6.8a^8}$ + &c; & en intégrant, on trouvera l'arc $EF = x + \frac{x^3}{2.3aa} + \frac{3x^5}{2.4.5a^4} + \frac{15x^7}{2.4.6.7a^6} + \frac{105x^9}{2.4.6.8.9a^8}$ + &c.

EXEMPLE XX.

Fig. 28. 112. SOIT l'ellipse ADC (Fig. 28), dont l'équation, en faisant $AB=a$, $BD=b$, $BE=x$, $EO=y$, est $\frac{aayy}{bb}=aa-xx$; ce qui donne $ydy=-\frac{bbxdx}{aa}$, $dy^2=\frac{bbxxdx^2}{aa.(aa-xx)}$, & $\sqrt{[dx^2+dy^2]}=\frac{dx\sqrt{[a^4-aaxx+bbxx]}}{a\sqrt{[aa-xx]}}$. Si au lieu de substituer la valeur de dy donnée en x, on substituoit la valeur de dx donnée en y, on trouveroit $\sqrt{[dx^2+dy^2]}=\frac{dy\sqrt{[aayy-bbyy+b^4]}}{b\sqrt{[bb-yy]}}$. Mais il manque à chacune de ces deux expressions, une des conditions dont on a parlé au n°. 38, sans lesquelles on ne peut pas délivrer les formules de leurs radicaux, & les préparer à l'intégration; nous ferons donc usage des séries. Prenons l'une de ces deux formules, par exemple celle-ci $\frac{dx\sqrt{[a^4-aaxx+bbxx]}}{a\sqrt{[aa-xx]}}$, qui peut aussi s'exprimer ainsi $dx\sqrt{\left[1+\frac{bbxx}{a^4-aaxx}\right]}$. Réduisant cette dernière en suite, on la trouvera $=dx+\frac{\frac{1}{2}bbxxdx}{aa(aa-xx)}-\frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4(aa-xx)^2}+\frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6(aa-xx)^3}-\frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8.(aa-xx)^4}+$ &c; réduisant encore en série chaque terme de celle-ci depuis le second, on aura $dx\sqrt{\left[1+\frac{bbxx}{a^4-aaxx}\right]}=$ . . . .

$dx+$

$$dx + \frac{\frac{1}{2}bbxxdx}{aa} \times \left(\frac{1}{aa} + \frac{xx}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} + \&c\right)$$
$$- \frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4} \times \left(\frac{1}{a^4} + \frac{2xx}{a^6} + \frac{3x^4}{a^8} + \frac{4x^6}{a^{10}} + \&c\right)$$
$$+ \frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6} \times \left(\frac{1}{a^6} + \frac{3xx}{a^8} + \frac{6x^4}{a^{10}} + \frac{10x^6}{a^{12}} + \&c\right)$$
$$- \frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8} \times \left(\frac{1}{a^8} + \frac{4xx}{a^{10}} + \frac{10x^4}{a^{12}} + \frac{20x^6}{a^{14}} + \&c\right).$$

On intégrera, & on aura l'arc DO, c'eſt-à-dire

$$\int dx \sqrt{\left[1 + \frac{bbxx}{a^4 - aaxx}\right]} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x + \frac{bb}{2aa} \times \left(\frac{x^3}{3aa} + \frac{x^5}{5a^4} + \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} + \&c\right)$$
$$- \frac{b^4}{8a^4} \times \left(\frac{x^5}{5a^4} + \frac{2x^7}{7a^6} + \frac{3x^9}{9a^8} + \frac{4x^{11}}{11a^{10}} + \&c\right)$$
$$+ \frac{b^6}{16a^6} \times \left(\frac{x^7}{7a^6} + \frac{3x^9}{9a^8} + \frac{6x^{11}}{11a^{10}} + \&c\right)$$
$$- \frac{5b^8}{128a^8} \times \left(\frac{x^9}{9a^8} + \frac{4x^{11}}{11a^{10}} + \&c\right).$$

Enfin, réduiſant à la même dénomination tous les termes homogènes, on trouvera $DO = x + \frac{bbx^3}{6a^4} + \frac{(4aabb - b^4).x^5}{40a^8} + \frac{(8a^4bb - 4aab^4 + b^6).x^7}{112a^{12}} + \frac{(64a^6bb - 48a^4b^4 + 24aab^6 - 5b^8).x^9}{9.128a^{16}} + \&c.$ Si l'on ſuppoſe $a = b$, l'ellipſe deviendra un cercle, & on aura l'arc $DO = x + \frac{x^3}{6aa} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{9.128a^8} + \&c$, préciſément comme ci-deſſus, n°. 111.

Voici une autre manière. Dans la formule... $\frac{dx\sqrt{[a^4 - aaxx + bbxx]}}{a\sqrt{[aa - xx]}}$, faites $bb - aa = cc$, elle deviendra $\frac{dx\sqrt{[a^4 - ccxx]}}{a\sqrt{[aa - xx]}}$. Réduisez en série les deux radicaux, vous aurez $\frac{dx\sqrt{[a^4 - ccxx]}}{a\sqrt{[aa - xx]}} =$

$$\frac{\frac{dx}{a} \times \left(aa - \frac{ccxx}{2aa} - \frac{c^4x^4}{8a^6} - \frac{c^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{14}} - \&c\right)}{a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \&c},$$

Faites réellement la division du numérateur par le dénominateur, vous parviendrez par un long calcul à une autre série qu'il faudra intégrer; vous remettrez au lieu de cc sa valeur, & vous aurez la même suite que ci-dessus, pour l'expression de l'arc DO.

EXEMPLE XXI.

Fig. 29. 113. SOIT BD (Fig. 29) une hyperbole pour laquelle on a fait $AB = a$, $AE = b$, $CD = y$, $AC = x$, & dont l'équation est par conséquent $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$. La différentiation donne $dx = \ldots$ $\frac{aydy}{b\sqrt{[bb + yy]}}$, & $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \ldots\ldots$ $dy\sqrt{\left[1 + \frac{ayy}{b^4 + bbyy}\right]} = \frac{dy.\sqrt{[bbyy + aayy + b^4]}}{b.\sqrt{[bb + yy]}}$.

On réduira cette quantité en série par l'une des deux voies qu'on vient d'employer pour l'ellipse; on intégrera, & on trouvera à la fin l'arc $BD = y + \frac{aay^3}{6b^4} - \frac{(4aabb - a^4)y^5}{40b^8} + \frac{(8aab^4 + 4a^4bb + a^6)y^7}{112b^{12}} -$

$\frac{(64aab^6 - 48a^4b^4 - 24a^6bb - 5a^8)y^8}{9.128 b^{16}}$ + &c. Cette série est la même que celle de l'ellipse, à l'exception des signes & des constantes a, b, qui ont pris la place l'une de l'autre.

EXEMPLE XXII.

114. REVENONS à la cycloïde de l'exemple VIII (Fig. 16). Nous savons que son équation est $dy = \frac{dx\sqrt{[a-x]}}{\sqrt{x}}$; ainsi $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. En intégrant, nous aurons l'arc $FA = 2\sqrt{ax} =$ le double de la corde AS qui appartient à l'arc de cercle AS correspondant; faisons $x = a$, & nous trouverons AM double du diamètre du cercle générateur; par conséquent la cycloïde entière en est le quadruple. Fig. 16.

EXEMPLE XXIII.

115. SOIT proposée la tractoire ABF (Fig. 20) dont l'équation (n°. 103) est $-\frac{ydu}{dy} = a$, ou bien $du = \frac{-ady}{y}$. En intégrant, on a $u = -$ log. $y \pm n$, dans la logarithmique dont la sou-tangente $= a$; mais la supposition de $u = 0$ donne $y = a$ & L. $y = 0$; donc $n = 0$, & par conséquent l'intégrale complette ou l'arc quelconque $AB = -$ L. y. Si l'on décrit donc avec la sou-tangente AE & l'asymptote MH, la logarithmique AKS par le point A, & qu'ayant pris un point quelconque B dans la tractoire, on mène BK dans la logarithmique, parallèle à l'asymptote, & qu'on abaisse la perpendiculaire KN; l'interceptée NE sera égale à l'arc AB. Fig. 20.

EXEMPLE XXIV.

Fig. 21. 116. SOIT ACB (Fig. 21) la spirale d'Archiméde du n°. 104, dans laquelle le raïon du cercle $=a$, la circonférence $=b$, l'arc $BMD=x$, $AC=y$; supposons AE infiniment voisine de AD, & par conséquent $DE=dx$. Du centre A soit décrit l'arc CH; on aura $CH=\frac{ydx}{a}$, $OH=dy$, & l'élément CO de la courbe $=\frac{\sqrt{[yydx^2+aady^2]}}{a}$. Mais l'équation de la courbe donne $ax=by$, & par conséquent $dx^2=\frac{bbdy^2}{aa}$; ainsi $CO=\frac{dy}{aa}\times\ldots$ $\sqrt{[a^4+bbyy]}$, dont l'intégrale, comme on le trouvera par un long calcul que j'omettrai pour abréger, dépend des logarithmes, c'est-à-dire de la quadrature de l'hyperbole.

Si l'on veut intégrer par les séries; on fera d'abord $a^4=bbmm$, & la formule deviendra $\frac{bdy}{aa}\times\ldots$ $\sqrt{[mm+yy]}$, qui réduite en série est $=\frac{bdy}{aa}$ $\left(m+\frac{yy}{2m}-\frac{y^4}{8m^3}+\frac{y^6}{16m^5}-\frac{5y^8}{128m^7}+\&c\right)$.

On intégrera, & on trouvera l'arc $AC=\frac{bmy}{aa}+$ $\frac{by^3}{6aam}-\frac{by^5}{40aam^3}+\frac{by^7}{112aam^5}-\frac{5by^9}{9.128aam^7}+\&c.$ Si l'on fait $y=a$, & que l'on remette au lieu de m sa valeur $\frac{aa}{b}$, on aura l'expression de la courbe entière $ACB = a + \frac{bb}{6a} - \frac{b^4}{40a^3} + \frac{b^6}{112a^5} - \frac{5b^8}{9.128a^7} + \&c.$

Si la courbe ABC (Fig. 30) étoit la ſpirale logarithmique dont l'équation, en ſuppoſant $RB = y$, & le petit arc $BD = dx$, eſt $ady = bdx$, on trouveroit $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \frac{dy\sqrt{(aa+bb)}}{b}$, & en intégrant, on auroit la courbe $AB = \frac{y}{b}\sqrt{[aa+bb]}$. Fig. 10.

Soit ABC la ſpirale hyperbolique dans laquelle la ſou-tangente doit être conſtante, & dont l'équation, en conſervant les mêmes dénominations que ci-deſſus, eſt par conſéquent $ydx = ady$, on aura $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \frac{dy}{y}\sqrt{[aa+yy]}$. Ayant délivré cette formule de ſon radical, on trouvera que ſon intégrale dépend des logarithmes.

En employant les ſéries, on trouve $\frac{dy}{y}\sqrt{[aa+yy]}$ $= \frac{ady}{y} + \frac{ydy}{2a} - \frac{y^3dy}{8a^3} + \frac{y^5dy}{16a^5} - \frac{5y^7dy}{128a^7} + \&c.$ Mais le premier terme n'eſt intégrable que par le moyen d'une autre ſuite infinie ; donc la ſomme de cette ſérie intégrée, moins ſon premier terme, plus l'intégrale de la ſuite qui exprime ce même premier terme, formera une nouvelle ſérie, qui ſera la valeur de la courbe propoſée.

Exemple XXV.

117. Si la courbe propoſée eſt la logarithmique HBD (Fig. 19); ſoient la ſou-tangente $= a$, Fig. 19.

$AK = x$, $KH = y$, & l'équation $\frac{ady}{y} = dx$. Mettant cette valeur de dx dans la formule, on aura $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \frac{dy}{y} \sqrt{[aa - yy]}$, dont l'intégrale dépend de la logarithmique même proposée. Je ne dirai rien ici de l'usage des séries, dont on a déja vu un grand nombre d'exemples.

EXEMPLE XXVI.

118. On demande de rectifier la parabole ordinaire de l'équation $ax = yy$, les coordonnées formant un angle oblique. On différentiera l'équation de la courbe; on en tirera les valeurs de dx & de dx^2 en y, que l'on substituera dans la formule $\sqrt{\left[dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}\right]}$, qui est pour les courbes dont les coordonnées sont à angle oblique; & on aura $\frac{2dy}{a} \sqrt{\left[yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}\right]}$, dont l'intégrale est en partie algébrique, & dépend en partie de la quadrature de l'hyperbole.

EXEMPLE XXVII.

119. Soit l'équation $\frac{x^t}{t} = y$, qui représente toutes les paraboles & toutes les hyperboles entre les asymptotes. En différentiant, on a $x^{t-1}dx = dy$, $x^{2t-2}dx^2 = dy^2$, & par conséquent l'élément de la courbe $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = dx\sqrt{[x^{2t-2} + 1]}$, que je mets sous cette forme $\frac{dx}{(x^{2t-2}+1)^{-\frac{1}{2}}}$, afin de

passer à l'intégration par la méthode du n°. 61. On y a vu que la formule canonique $\frac{x^n dx}{(x^m+a^m)^n}$ est intégrable algébriquement lorsque $\frac{1-m+n}{m}$ est un nombre entier positif, & par les quadratures ordinaires lorsque c'est un nombre entier négatif. La comparaison de la formule $\frac{dx}{(x^{2t-2}+1)^{-\frac{1}{2}}}$ avec la formule canonique, donne $n=0$, $2t-2=m$, $a=1$; ainsi il faudra que $\frac{1-2t+2}{2t-2}$, c'est-à-dire $\frac{3-2t}{2t-2}$, soit un nombre entier que j'appellerai h; on a donc $\frac{3-2t}{2t-2}=h$, & par conséquent $\frac{3+2h}{2+2h}=t$, exposant qui détermine les courbes à l'infini.

Supposons donc que h soit un nombre entier positif, en commençant par zero. Si $h=0$, on aura $t=\frac{3}{2}$; si $h=1$, on aura $t=\frac{5}{4}$; si h est un nombre quelconque de la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c, les valeurs de l'exposant t seront exprimées à l'infini par les termes de cette progression $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{11}{10}$, &c, dont la marche saute aux yeux. Donc toutes ces courbes paraboliques, dont la première est la seconde parabole cubique, sont rectifiables algébriquement.

Supposons maintenant que h est un nombre entier négatif; & soit d'abord $h=-0$; on retrouvera la seconde parabole cubique, parce qu'en effet $-0=+0$; si $h=-1$, l'exposant devient $=\frac{1}{0}$, & est par conséquent infini; si $h=-2$, on aura $t=\frac{1}{2}$; si $h=-3$, t sera $=\frac{3}{4}$, & ainsi de suite à l'infini, c'est-à-dire qu'on aura $t=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$, &c;

& dans tous ces cas les courbes paraboliques seront rectifiables par les quadratures connues. La première qui se présente ici, est la parabole ordinaire, dont la rectification, comme on l'a vu au n°. 110, suppose la quadrature de l'hyperbole.

L'autre cas auquel la formule générale du n°. 61 est intégrable ou algébriquement, ou par les quadratures ordinaires, est lorsque $u - \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$ est un nombre entier positif, c'est-à-dire en substituant les quantités particulières à notre exemple, lorsque $\frac{-3t+2}{2t-2} = h$, & que par conséquent $t = \frac{2+h}{3+2h}$.

Soit h un nombre entier positif, que l'on supposera successivement $= 0, 1, 2, 3, 4$, &c; on aura pour t la progression suivante, $t = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}$, &c.

Soit h un nombre entier négatif, & supposons en premier lieu $h = -0$, on aura encore le même exposant $t = \frac{2}{3}$; si $h = -1$, on aura $t = \frac{0}{1}$, c'est-à-dire $t = 0$; si $h = -2, -3, -4, -5, -6$, on aura respectivement $t = \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$, &c.

On voit que la fraction qui donne la valeur de l'exposant t, est la même dans les deux cas à cela près que la fraction du second cas est l'inverse de celle du premier; d'où il arrive que les courbes déterminées par les moyens de l'une & de l'autre formule, sont les mêmes, mais ayant l'exposant renversé; elles sont seulement rapportées à deux axes différents; par exemple, les deux exposants $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$, appartiennent l'un & l'autre à la parabole ordinaire dont l'équation se présente sous deux formes, savoir $x = yy$ & $xx = y$; cette dernière est le lieu du triligne parabolique.

Toutes les paraboles en nombre infini qui ne ſont pas compriſes dans les progreſſions précédentes, exigent, pour leur rectification des quadratures ſupérieures à celles du cercle & de l'hyperbole. Et puiſque l'expoſant t, comme on le voit par ces mêmes progreſſions, n'eſt jamais négatif, il s'enſuit qu'aucune hyperbole n'eſt rectifiable ni algébriquement, ni par les quadratures ordinaires.

DE LA CUBATURE DES SOLIDES.

EXEMPLE XXVIII.

120. SOIT le cone droit $ACGKA$ (Fig. 31); & ſuppoſons $AB=a$, $BC=b$, une partie quelconque AD de l'axe $AB=x$, $DE=y=\frac{bx}{a}$. On ſubſtituera cette valeur de y dans la formule générale $\frac{cyydx}{2r}$, qui deviendra $\frac{cbbxxdx}{2aar}$; & l'intégration donnera $\frac{cbbx^3}{6aar}$ pour l'expreſſion d'une partie indéterminée du cone, comptée depuis le ſommet; il eſt inutile ici d'ajouter une conſtante à l'intégrale. Si on fait $x=a$, on aura le cone $ACGKA=\frac{cbba}{6r}=\frac{cbb}{2r}\times\frac{a}{3}$, c'eſt-à-dire au produit de la baſe par le tiers de la hauteur. Fig. 31.

Le cone $ACGKA$ étant $=\frac{cbba}{6r}$, & le cone $AIEMP=\frac{cbbx^3}{6aar}$, le tronçon de cone $IMCK$ ſera $=\frac{cbb}{6r}\times\left(a-\frac{x^3}{aa}\right)$, & ſera par conſéquent au cone entier $:: a^3 - x^3 : a^3$. Si l'on fait donc, par exemple, $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$, le tronçon sera à tout le cone $:: a^3 - \frac{a^3}{8} : a^3 :: 7 : 8$, & au cone $AEMPI$ comme 7 est à 1.

Lorsqu'on veut mesurer un solide, il faut considérer de quels éléments il peut être composé d'après les différentes sections que l'on peut imaginer. On tire parti tantôt des unes, tantôt des autres, suivant les circonstances ; & on choisit parmi ces éléments de différente espece, ceux auxquels le calcul s'adapte plus naturellement, ou qui peuvent mener plus aisément au but. Par exemple, on peut considérer le cone droit, dont il est maintenant question, comme composé de cercles parallèles à la base ; ou d'une infinité de triangles qui ont même sommet que le cone, & pour base les ordonnées parallèles du cercle CGK ; ou d'une infinité de paraboles qui auroient leurs axes parallèles au côté AK du cone ; &c.

Ce ne seroit pas à propos, il est vrai, de faire usage des derniers moyens, qui sont trop composés, pour la recherche de la solidité du cone ; mais j'ai toujours dû en parler, parce qu'ils peuvent être employés utilement dans d'autres occasions, comme si on proposoit de couper le cone ou quelqu'autre solide par un plan quelconque, & de mesurer ensuite chacune des deux parties ; il faudroit alors recourir à des éléments convenables à cette section, comme on le verra aux exemples 37 & 38.

EXEMPLE XXIX.

121. Si l'on conçoit que le quart de cercle $CEDB$ (Fig. 32) tournant autour du raion immobile DB engendre une demi-sphère, & que l'on veuille en chercher la solidité ; on supposera $DB = a$, $DA = x$, $AE =$

Fig. 32.

$y = \sqrt{[2ax - xx]}$; on substituera cette valeur de y dans la formule générale $\frac{cyydx}{2r}$, & on aura $\frac{cdx}{2r} \times (2ax - xx)$, dont l'intégrale donne la solidité du segment indéfini $AEM = \frac{3caxx - cx^3}{6r}$. Si l'on fait $x = a$, on aura $\frac{ca^3}{3r}$ qui est la solidité de la demi-sphère, & par conséquent la sphère entière $= \frac{2ca^3}{3r}$.

Puisque le cylindre dont la hauteur est égale au diamètre de sa base, en appellant $2a$ ce diamètre, est $= \frac{ca^3}{r}$, le cylindre sera à la sphère, qui lui seroit inscrite, comme $\frac{ca^3}{r}$ est à $\frac{2ca^3}{3r}$ :: 3 : 2; & par conséquent la moitié de ce cylindre sera à la demi-sphère dans le même rapport. Mais le cone qui a pour hauteur le raïon de sa base, que j'appellerai a, ainsi que le raïon de la sphère, est $= \frac{ca^3}{6r}$; donc la demi-sphère est au cône qui lui est inscrit :: 2 : 1.

De plus, a étant le raïon d'une sphère, & par conséquent $\frac{2ca^3}{3r}$ sa solidité: on sait que $\frac{\sqrt{[3aa]}}{2}$ est le raïon, $\frac{3a}{2}$ la hauteur, & par conséquent $\frac{9ca^3}{48r}$ la solidité du cone équilatéral qui seroit inscrit dans cette sphère. Ainsi la sphère est à ce cone comme $\frac{2}{3}$ est à $\frac{9}{48}$, ou comme 32 est 9.

Rien de plus facile que de trouver la solidité d'un secteur quelconque de sphère, engendré, par exemple, par le secteur de cercle EBD; car au segment de sphère engendré par AED, & qui, comme on l'a vu, $= \frac{3caxx - cx^3}{6r}$, il n'y a qu'à ajouter le cone engendré par le triangle EBA, qu'on trouvera $= \frac{c}{6r} \times (2ax - xx).(a - x)$, & la somme, c'est-à-dire $\frac{caax}{3r}$ sera le secteur cherché.

EXEMPLE XXX.

Fig. 33. 122. SOIT la courbe ACO (Fig. 33) une parabole d'un ordre quelconque, dont l'équation soit $y^m = a^{m-1}x$, & qui tournant autour de l'axe AM engendre un conoïde parabolique dont on veut avoir la solidité. Puisqu'on a $y = a^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, & $yy = a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}}$, la formule générale devient...... $\frac{ca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}} dx}{2r}$; & en intégrant, on trouve pour la solidité du conoïde indéfini $\frac{mca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{m+2}{m}}}{2r.(m+2)}$, ou bien $\frac{mcxyy}{2r.(m+2)}$, en mettant au lieu de $x^{\frac{2}{m}}$ sa valeur $\frac{yy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}$.

Si $m = 2$, il sera question de la parabole ordinaire, & la solidité du conoïde sera $= \frac{cxyy}{4r}$, c'est-à-dire au produit de sa base par la moitié de sa hauteur; ainsi le conoïde est moitié du cylindre qui auroit même hauteur & même base que lui.

Pour avoir la solidité de l'espece d'écuelle ou solide engendré par le triangle mixtiligne ACD mû autour de l'axe AB du cylindre formé par la révolution du rectangle $ABCD$, qu'on sait être $= \frac{cxyy}{2r}$, on retranchera le conoïde parabolique $\frac{mcxyy}{2r.(m+2)}$, le reste $\frac{cxyy}{r\cdot(m+2)}$ sera l'écuelle cherchée. Il est inutile de remarquer que si on fait $m=2$, on trouvera que cette écuelle est moitié du cylindre, dont le conoïde est l'autre moitié.

Imaginons que la figure tourne sur l'ordonnée MO; & faisons $AM=b$, $MO=f$, $AB=x$, $BC=y$, $CK=b-x$, $KO=f-y$. Le cercle qui a pour raïon CK est $= \frac{c}{2r}(b-x)^2$. Or le produit de ce cercle par dy, différence de KM, c'est-à-dire $\frac{c}{2r}(bbdy - 2bxdy + xxdy)$ est l'élément du solide engendré par la figure $MACK$; intégrant donc, après avoir mis au lieu de x sa valeur donnée en y, on aura le solide indéfini $= \frac{c}{2r}\left(bby - \frac{2by^{m+1}}{(m+1).a^{m-1}} + \frac{y^{2m+1}}{(2m+1).a^{2m-2}}\right)$, ou bien $= \frac{c}{2r}\left(bby - \frac{2bxy}{m+1} + \frac{xxy}{2m+1}\right)$, en mettant x au lieu de $\frac{y^m}{a^{m-1}}$. Si l'on suppose $x=b$ & $y=f$, on aura $\frac{c}{2r}\left(bbf - \frac{2bbf}{m+1} + \frac{bbf}{2m+1}\right) = \frac{c}{2r} \times \frac{2mmbbf}{(2m+1)(m+1)}$ pour l'expreſſion du ſolide entier engendré par la ſurface $ACOM$: & s'il s'agit de la parabole ordinaire, c'eſt-à-dire ſi $m=2$, le ſolide ſera $= \frac{4cbbf}{15r}$. Il eſt facile de voir que dans le cas de la parabole ordinaire, le cylindre qui auroit même baſe & même hauteur que ce ſolide, ſeroit au même ſolide, comme 15 eſt à 8 ; & que le ſolide engendré par la ſurface $OAP = \frac{7cbbf}{30r}$.

Suppoſons encore que la figure tourne ſur la droite AP ; en faiſant comme ci-deſſus, $AB = x$, $BC = y$, & par conſéquent le cercle qui a DC pour raïon $= \frac{cxx}{2r}$, l'élément du ſolide engendré par la figure ACD ſera $\frac{cxxdy}{2r}$. Si l'on intègre, après avoir mis au lieu de x ſa valeur donnée en y, on aura $\frac{c}{2r} \times \frac{y^{2m+1}}{(2m+1).a^{2m-2}} = \frac{c}{2r} \times \frac{xxy}{2m+1}$, expreſſion du ſolide indéfini ; & ſi l'on ſuppoſe $x=b$ & $y=f$, on aura $\frac{cbbf}{2r.(2m+1)}$ qui eſt l'expreſſion du ſolide entier engendré par la révolution de la figure AOP. Mais le cylindre qui auroit même baſe & même hauteur ſeroit $= \frac{cbbf}{2r}$; donc le ſolide engendré par la figure $AMO = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}$.

On trouvera encore par une autre voie, le ſolide engendré par la révolution de la figure AOM autour de la droite AB. Soient $AM=b$, & $MO=f$; le cercle qui a pour raïon DC ſera $=\frac{cxx}{2r}$, celui qui a pour raïon DK ſera $=\frac{cbb}{2r}$, & l'anneau ou la couronne décrite par la ligne CK ſera $\frac{c}{2r}(bb-xx)$; donc $\frac{c}{2r}(bb-xx)dy$, ou $\frac{c}{2r}\left(bbdy-\frac{y^{2m}dy}{a^{2m-2}}\right)$ eſt l'élément du ſolide engendré par la ſurface $CKMA$. En intégrant, on trouvera $\frac{c}{2r}\Big(bby-\ldots\ldots$ $\frac{y^{2m+1}}{(2m+1).a^{2m-2}}\Big)$; & en faiſant $y=f$, on aura $\frac{c}{2r}\left(bbf-\frac{f^{2m+1}}{(2m+1).a^{2m-2}}\right)$ qui eſt l'expreſſion du ſolide entier engendré par la figure $AMOA$; mais lorſque $y=f$, l'équation de la parabole donne x, c'eſt-à-dire $b=\frac{f^m}{a^{m-1}}$, & $bb=\frac{f^{2m}}{a^{2m-2}}$; mettant donc ces valeurs dans l'intégrale, elle devient, comme ci-deſſus, $\frac{c}{2r}\times\left(bbf-\frac{bbf}{2m+1}\right)=$ $\frac{c}{2r}\times\frac{2mbbf}{2m+1}$.

EXEMPLE XXXI.

123. SOIT l'ellipſe ADC (Fig. 28) dans laquelle $AB=a$, $BD=b$, $AE=x$, $EO=y$, & dont l'équation eſt par conſéquent $\frac{bb}{aa}(2ax-xx)=yy$. Fig. 28.

Si l'on substitue dans la formule la valeur de y donnée par l'équation de la courbe, elle deviendra $\frac{cbb}{2aar}$ $(2axdx - xxdx)$; & en intégrant, on aura $\frac{cbb}{2aar}\left(axx - \frac{x^3}{3}\right)$, qui exprime le solide indéfini engendré par la révolution de la figure AEO autour de l'axe AC. En faisant $x = a$, on aura la moitié du sphéroïde $= \frac{cbba}{3r}$; & en faisant $x = 2a$, on aura le sphéroïde entier $= \frac{2cbba}{3r}$.

Puisque le cone, qui a même hauteur AC, & dont la base est un cercle qui auroit pour raïon le demi-axe conjugué BD, est $= \frac{cbba}{3r}$; & que le cylindre est $= \frac{cbba}{r}$: il est clair que le sphéroïde est les deux tiers du cylindre, & qu'il est double du cone.

EXEMPLE XXXII.

124. ON demande la solidité de l'hyperboloïde conique engendré par la révolution de l'hyperbole AD
Fig. 25. autour de BC (Fig. 25)? Soient le demi-axe $BA = \frac{a}{2}$, B le centre, le paramètre $= b$, $AC = x$, $CD = y$, & par conséquent $(ax + xx)\frac{b}{a} = yy$ l'équation. Ayant substitué la valeur de y dans la formule générale, on aura $\frac{cbdx}{2ar}(ax + xx)$, dont l'intégrale est

est $\frac{cb}{2ar}\left(\frac{axx}{2}+\frac{x^3}{3}\right)=$ au solide indéfini engendré par l'aire ADC.

Si $BC=x$, & qu'on conserve les autres dénominations, l'équation sera $\frac{b}{a}\left(xx-\frac{aa}{4}\right)=yy$; & la formule deviendra $\frac{cbdx}{2ar}\left(xx-\frac{aa}{4}\right)$, dont l'intégrale est $\frac{cb}{2ar}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{aax}{4}\right)+f$. La constante n'est pas zero dans ce cas-ci; pour la déterminer, on fera attention qu'au point A, lorsque $x=\frac{a}{2}$, le solide est nul; qu'ainsi en mettant $\frac{1}{2}a$ au lieu de x dans l'intégrale, on doit avoir $f+\frac{cb}{2ar}\left(\frac{a^3}{24}-\frac{a^3}{8}\right)=0$, ce qui donne $f=\frac{caab}{24r}$; donc l'intégrale complette est $\frac{cb}{2ar}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{aax}{4}+\frac{a^3}{12}\right)$.

Si l'hyperbole tourne autour de l'axe conjugué HB, & si $BA=a$, $HB=h$, $BC=x$, & $CD=y$; alors, puisque le cercle qui a pour raïon $HD=\frac{cxx}{2r}$, l'élément du solide engendré par la figure $BHDA$ sera $\frac{cxxdy}{2r}$; & en mettant au lieu de xx sa valeur donnée par l'équation de la courbe, on aura $\frac{cdy}{2r}\times\frac{aayy+aahh}{hh}$, dont l'intégrale est $\frac{c}{2r}\left(\frac{aay^3}{3hh}+aay\right)$, qui devient $\frac{2caah}{3r}$ lorsque $y=h$.

EXEMPLE XXXIII.

Fig. 34. 125. SOIT KHF (Fig. 34) l'hyperbole entre ses asymptotes, qui fasse sa révolution autour de l'asymptote AB. Si l'on fait $AD=a$, $DE=b$, $AP=x$, $PH=y$, l'équation de la courbe est $xy=ab$; & puisque le cercle qui a QH pour raïon $=\frac{cxx}{2r}$, l'élément du solide engendré par la figure $AQHFMA$ infiniment prolongée vers M, sera $\frac{cxxdy}{2r}=\frac{caabbdy}{2ryy}$, dont l'intégrale est $f-\frac{caabb}{2ry}$. Pour déterminer la constante f, on observera que le solide doit être nul lorsque $y=0$; ce qui donne $f=\frac{caabb}{2r.0}$, quantité infinie; l'intégrale complette est donc $-\frac{caabb}{2ry}+\infty$; ainsi la valeur du solide est infinie.

Si au lieu de substituer dans la formule la valeur de xx donnée en y, on y avoit substitué la valeur de dy, on auroit trouvé $-\frac{abcdx}{2r}$, dont l'intégrale est $-\frac{abcx}{2r}+f$. Mais le solide ne peut être zero que lorsque x est infini; donc la constante f qu'il faut ajouter est infinie, & le solide par conséquent est aussi infini.

Pour avoir le solide engendré par le plan $BAPHK$ infiniment prolongé du côté de B, on fera attention que $\frac{cx}{r}$ étant la circonférence du cercle qui a pour raïon $QH=x$, la surface du cylindre engendré par le plan $AQHP$ sera $\frac{cxy}{r}$, & que par conséquent la solidité du cylindre vuide engendré par le rectangle infinitésimal *IPHO*, sera $\frac{cxydx}{r}$; donc $\int\frac{cxydx}{r}$ sera le solide cherché. On mettra donc au lieu de y sa valeur $\frac{ab}{x}$, & on aura pour intégrale $\frac{cabx}{r}$, quantité finie, quoique la hauteur du solide soit infinie.

L'expression $\frac{cabx}{r}$ du solide, si l'on substitue pour ab sa valeur xy que donne l'équation, devient $\frac{cxxy}{r}$; mais $\frac{cxxy}{2r}$ est la solidité du cylindre engendré par le rectangle *APHQ*; donc le solide hyperbolique est double de ce cylindre; & par conséquent le solide engendré par la figure *BQHK* prolongée à l'infini, est égal au cylindre qui lui sert de base. Ayant donc pris $x=a$, & par conséquent $y=b$, on aura le cylindre $=\frac{caab}{2r}=$ au solide infini qui est au-dessus.

EXEMPLE XXXIV.

126. SUPPOSONS que la logarithmique *HCD* (Fig. 35), dans laquelle la sou-tangente $CA=a$, $AB=x$, $BD=y$, & dont l'équation est $dx=\frac{ady}{y}$, tourne autour de l'asymptote *EB*. Ayant substitué $\frac{ady}{y}$ à dx dans la formule générale, on aura $\frac{caydy}{2r}$, dont l'intégrale est $\frac{cayy}{4r}+f$. Mais lorsque $y=AC=a$, le solide est nul; donc $f=-$ Fig. 35.

$\frac{ca^3}{4r}$; & l'intégrale complette, ou le ſolide engendré par le plan indéfini $ABDC$, eſt $\frac{cayy}{4r} - \frac{ca^3}{4r}$.

Si l'abſciſſe AE eſt négative & déſignée par $-x$, ſa différence ſera auſſi négative & $= - dx$; & puiſque l'abſciſſe croiſſant, l'ordonnée décroît, la différence de EH ſera auſſi négative & $= - dy$; ainſi l'équation de la courbe ſera toujours $dx = \frac{ady}{y}$. Mais dx étant négative, la formule générale le ſera auſſi; elle ſera donc $- \frac{cyydx}{2r}$. En y ſubſtituant la valeur de dx, & intégrant, on aura $- \frac{cayy}{4r} + f$; mais lorſque le ſolide eſt zero, $y = a$; donc $f = \frac{ca^3}{4r}$; & l'intégrale complette ou le ſolide engendré par le plan $ACHE$ eſt $\frac{ca^3}{4r} - \frac{cayy}{4r}$. Si l'on fait $y = 0$, c'eſt-à-dire ſi l'on ſuppoſe le ſolide infiniment prolongé du côté de M, on aura l'intégrale ou le ſolide $= \frac{ca^3}{4r}$; mais le ſolide engendré par le plan $ACHE$ eſt égal, comme on l'a vu, à $\frac{ca^3 - cayy}{4r}$; donc le ſolide infiniment prolongé engendré par le plan $LEHM$ eſt $= \frac{cayy}{4r}$.

Puiſque le cylindre qui auroit pour baſe le cercle dont le raïon ſeroit $AC = a$, & ſa hauteur auſſi $= a$, feroit $= \frac{ca^3}{2r}$, le solide de la logarithmique infiniment prolongée du côté de M, & qui a pour base le cercle dont le raïon $= a$, est à ce cylindre comme $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$, ou $:: 1 : 2$.

EXEMPLE XXXV.

127. TROUVER le solide engendré par la révolution de la cissoïde de Dioclès AMI, autour de la droite AB (Fig. 18)? Soient $AP = x$, $PM = y$, Fig. 18.
$AB = a$, & l'équation $yy = \frac{x^3}{a-x}$. La formule générale des solides, en y substituant cette valeur de yy, sera $\frac{cx^3dx}{2r(a-x)}$, dont l'intégrale est $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{ca^3}{2r}$ L. $(a-x) + f$; mais en faisant $x = 0$, le solide doit être nul; donc $f = \frac{ca^3}{2r}$ L. a; ainsi le solide engendré par la figure $APM = -\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{ca^3}{2r}$ L. $(a-x) + \frac{ca^3}{2r}$ L. a. En faisant $x = a$, on aura le solide entier $= -\frac{11ca^3}{12r} - \frac{ca^3}{2r}$ L. $0 + \frac{ca^3}{2r}$ L. a. Mais le log. de zero est une quantité négative infinie, qui, multipliée par $-\frac{ca^3}{2r}$, devient positive; donc le solide entier est infini. Je dois avertir que les logarithmes dont il est question ici doivent être pris dans la logarithmique dont la sou-tangente $= a$.

Si l'on réduit en série, on trouvera $\frac{cx^3dx}{2r(a-x)} =$ $\frac{cx^3dx}{2ar} + \frac{cx^4dx}{2raa} + \frac{cx^5dx}{2ra^3} + \frac{cx^6dx}{2ra^4} +$ &c; & en intégrant $\frac{cx^4}{8ar} + \frac{cx^5}{10raa} + \frac{cx^6}{12ra^3} + \ldots$ $\frac{cx^7}{14ra^4} +$ &c. Si l'on fait $x = a$, on aura l'expression du solide entier $= \frac{a^3}{2r} \times \left(\frac{c}{4} + \frac{c}{5} + \frac{c}{6} + \frac{c}{7} + \&c\right)$, série dont la valeur est infinie.

EXEMPLE XXXVI.

Fig. 20. 128. SOIT la tractoire ABF (Fig. 20) qui tourne autour de l'asymptote EH. On substituera dans la formule générale $\frac{cyydx}{2r}$ la valeur de dx que donne l'équation de la courbe $dx = -$ $\frac{dy\sqrt{[aa-yy]}}{y}$ (n°. 103); elle deviendra $-\ldots$ $\frac{cydy\sqrt{[aa-yy]}}{2r}$; & en intégrant, on aura le solide engendré par la figure $AEDB = \frac{c}{6r}(aa-yy)^{\frac{3}{2}}$; il seroit inutile d'ajouter ici une constante. Si l'on fait donc $y = 0$, on aura le solide infiniment prolongé $= \frac{ca^3}{6r}$; mais la sphère qui auroit pour raïon $AE = a$, est $= \frac{2ca^3}{3r}$ (n°. 121); donc le solide infiniment prolongé est le quart de la sphère.

Exemple XXXVII.

129. Soit le cylindre $QBMCPT$ (Fig. 36); & ſuppoſons qu'un plan dirigé ſuivant AP, & paſſant par le centre C de la baſe, en retranche l'onglet $BMCPB$, on demande la ſolidité de cet onglet? Fig. 36.

Soient $BC = QM = 2a$, $MP = QT = b$, $AD = x$, & par conſéquent l'ordonnée DH du cercle $= \sqrt{[aa - xx]}$. Que l'on tire du point H, parallèlement à MP ou QT, la droite HO qui ſera dans la ſurface du cylindre; & que l'on mène du point D au point O la droite DO qui ſera dans le plan $BOPC$; on formera ainſi dans la ſolidité de l'onglet le triangle DHO ſemblable au triangle AMP, & l'on aura $HO = \frac{b\sqrt{[aa-xx]}}{a}$. Mais la ſomme de tous les triangles tels que DHO, forme la ſolidité de la moitié de l'onglet, qui eſt par conſéquent exprimée par $\int \frac{bdx}{2a}(aa - xx)$, ou en intégrant par $\frac{abx}{2} - \frac{bx^3}{6a}$; mais ce n'eſt qu'en faiſant $x = a$, qu'on aura vraiment cette moitié, qu'on trouvera $= \frac{1}{3}aab$; ainſi l'onglet entier $= \frac{2}{3}aab$.

Autre ſolution du même Problême conſidéré d'une manière plus générale. Soit coupé le demi-cylindre $DACHEG$ (Fig. 37), par un plan mené par le centre C dans la direction DE; on demande la ſolidité de l'onglet $DBCEAD$? Soient $BA = a$, $AE = b$, $BQ = x$, $QM = y$, & par conſéquent $QK = \frac{bx}{a}$, le rectangle $PONM = \frac{2bxy}{a}$, & l'élément de la ſolidité de l'onglet $= \frac{2byxdx}{a}$. Fig. 37.

Cela posé, si la courbe DAC est un demi-cercle, on aura $y=\sqrt{[aa-xx]}$, & la formule sera $\frac{2bxdx}{a}\sqrt{[aa-xx]}$, dont l'intégrale est $-\frac{2b}{3a}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}+m$; mais en faisant $x=0$, on trouve la constante $m=\frac{2}{3}baa$; donc l'intégrale complette est $\frac{2baa}{3}-\frac{2b}{3a}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$, dans laquelle supposant $x=a$, on aura l'onglet entier $=\frac{2baa}{3}$.

Si la courbe DAC est une des paraboles exprimées en nombre infini par l'équation $y^m=a-x$, la formule sera $\frac{2bxdx}{a}(a-x)^{\frac{1}{m}}$. On intégrera d'après le n°. 29; on ajoutera à l'intégrale la constante convenable, & on fera $x=a$ pour avoir tout l'onglet, que l'on trouvera $=\frac{2bmma^{\frac{m+1}{m}}}{(2m+1).(m+1)}$; & supposant $m=2$, on aura $\frac{8ba^{\frac{3}{2}}}{15}$ pour le cas de la parabole ordinaire. Si l'on suppose que lorsque $x=0$, BC soit $=y=c$, on aura $a^{\frac{1}{2}}=c$; & par conséquent l'onglet $=\frac{8abc}{15}$. On trouvera par la même voie que l'onglet du cylindre elliptique $=\frac{2abc}{3}$, en supposant le premier demi-axe $=a$, & le demi-axe conjugué $=b$; &c.

EXEMPLE XXXVIII.

130. AYANT coupé le conoïde parabolique BAC

(Fig. 38) par un plan quelconque IEH perpendiculaire à sa base circulaire $BICH$; on demande la solidité du tronçon compris entre la section IEH, & le plan mené par l'axe AD parallèlement à cette section? Fig. 38.

Soit a le paramètre de la parabole génératrice BAC, l'abscisse donnée $AD=b$, l'ordonnée DB sera $=\sqrt{ab}$. Soient de plus les coordonnées $DF=x$, $FE=y$, & par conséquent l'équation de la courbe BAC, $ab-xx=ay$. Par la nature du cercle $BICH$ on a le rectangle $CF\times FB=\overline{FH}^2$, c'est-à-dire $ab-xx=zz$; mais $ab-xx=ay$, donc $ay=zz$; ainsi la section IEH est une parabole qui a même paramètre que la parabole principale. Le rectangle $EF\times FH$ est donc égal à $yz=y\sqrt{ay}$; & puisque ce rectangle est à l'aire IEH comme 3 est à 4, cette aire sera $=\frac{4}{3}y\sqrt{ay}$; or le produit de cette aire par dx, différence de DF, est l'élément du solide en question, d'ailleurs $y=\frac{ab-xx}{a}$; donc l'élément du solide sera

$$\frac{4}{3}dx\times\frac{ab-xx}{a}\sqrt{[ab-xx]}=\frac{4}{3}bdx\sqrt{[ab-xx]}-\frac{4}{3a}xxdx\sqrt{[ab-xx]}.$$

L'intégrale du premier terme dépend de la quadrature du cercle BHC, & celle du second se réduit aussi aux quadratures ordinaires, en employant la première formule du n°. 61.

131. Je ne parle point des solides engendrés par les courbes dont les coordonnées sont à angle oblique, parce que dans ce cas la formule ne différant de la formule ordinaire que par les constantes, il ne peut pas s'y rencontrer des difficultés d'un genre différent de celles qu'on a déja éclaircies. Je ne donnerai pas non plus d'exemples pour les solides engendrés par

des courbes rapportées au foyer, parce que ne voulant pas faire usage de la théorie des centres de gravité, on n'aura qu'à réduire les courbes de cette espece à leurs équations rapportées aux axes, dont il a été suffisamment parlé.

DE LA MESURE OU QUADRATURE DES SURFACES DES CORPS.

EXEMPLE XXXIX.

Fig. 31. 132. SOIT le cone droit $ACGK$ (Fig. 31), dans lequel nous supposerons $AB = a$, $BC = b$, une partie quelconque de l'axe AB telle que $AD = x$; on aura $DE = y = \frac{bx}{a}$, $dy = \frac{bdx}{a}$, $dy^2 = \frac{bbdx^2}{aa}$. On substituera ces valeurs de y & de dy^2 dans la formule générale $\frac{cy}{r}\sqrt{[dx^2 + dy^2]}$, & on aura $\frac{cbxdx\sqrt{[aa+bb]}}{aar}$, dont l'intégrale... $\frac{cbxx\sqrt{[aa+bb]}}{2aar}$ est la surface du cone $AEMPI$; & si l'on fait $x = a$, on aura $\frac{cb\sqrt{[aa+bb]}}{2r}$, qui exprime la surface du cone entier, laquelle est par conséquent égale au produit de la demi-circonférence de la base par le côté AC.

On auroit trouvé le même résultat, si au lieu de substituer dans la formule générale la valeur de dy^2, on y avoit substitué celle de dx^2.

La surface du tronçon $IMKCG$ sera donc $\frac{cb}{2r}\sqrt{[aa+bb]} - \frac{cbxx}{2aar}\sqrt{[aa+bb]} =$

$\frac{cb\sqrt{[aa+bb]}}{2raa}(aa-xx)$; ainsi cette surface est à celle du cone entier comme $aa-xx$ est à aa.

133. Si le cone est oblique, il faudra procéder d'une autre manière. Soit donc un cone oblique ou scalène $PAFBM$ (Fig. 39), qui a pour base le cercle $AFMB$, & pour hauteur la ligne PD qui tombe du sommet perpendiculairement sur un des diamètres de la base, prolongé s'il est nécessaire. Que l'on prenne sur la circonférence du cercle deux points F, f, infiniment voisins, & que l'on tire les deux côtés FP, fP du cone. Il est évident que le triangle infinitésimal PFf est la différence ou l'élément de la surface du cone. Soient donc menées TFQ tangente au point F, DQ perpendiculaire à cette tangente, & PQ qui joigne les deux points P & Q. Fig. 39.

Puisque le plan du triangle PDQ passe par la droite PD qui est perpendiculaire à la base du cone, le plan PQD est lui-même perpendiculaire au plan de la base; mais la tangente TQ qui est dans le plan de la base, fait un angle droit avec QD commune section des deux plans; donc cette tangente est aussi perpendiculaire au plan PQD, & par conséquent à la droite QP; ainsi le triangle $PFf = \frac{PQ \times Ff}{2}$.

Que l'on fasse le raïon $CA = r$, $CD = b$, $CE = x$, on aura $FE = \sqrt{[rr-xx]}$; & puisque l'angle CFT est droit, parce que TF est tangente, les triangles CFE, TCF seront semblables, & donneront $CT = \frac{rr}{x}$; mais $CT:CF$ ou bien $CF:CE ::$ $TD:DQ$; donc $DQ = \frac{rr+bx}{r}$. Soit de plus la droite donnée $PD = p$, on aura $PQ = \ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{\left[pp + \frac{(rr+bx)^2}{rr}\right]}$; mais on sait que l'élément Ff de la circonférence est $-\frac{rdx}{\sqrt{(rr-xx)}}$; donc l'élément de la surface du cone $\frac{Ff \times PQ}{2} = -$

$$\frac{rdx\sqrt{\left[pp + \frac{(rr+bx)^2}{rr}\right]}}{2\sqrt{(rr-xx)}}$$, formule qu'on ne sait point intégrer jusqu'ici, ni algébriquement, ni par les quadratures du cercle ou de l'hyperbole, parce qu'on ne peut pas la délivrer des signes radicaux, n'ayant pas la condition requise pour cela, dans le n°. 38.

Si l'on veut employer les séries, on fera une suite infinie du numérateur, une autre suite infinie du dénominateur, & on procédera comme on a fait pour l'ellipse, dans la seconde méthode de l'exemple XX, n°. 112.

EXEMPLE XL.

134. TROUVER la surface de la demi-sphère, engendrée par la révolution du quart de cercle gé-
Fig. 32. nérateur CDK autour du raïon DB (Fig. 32)? Soient $DB=a$, une abscisse quelconque $DA=x$, & $AE=y=\sqrt{[2ax-xx]}$; dy^2 sera $= \dots$ $\frac{(a-x)^2 dx^2}{2ax-xx}$; les substitutions étant faites, la formule générale sera $=\frac{cadx}{r}$, & en intégrant, on aura $\frac{cax}{r} =$ à la surface du segment de sphère engendré par le demi-segment EDA. En

mettant a au lieu de x, on aura la ſurface de la demi-ſphère $= \frac{caa}{r}$, & par conſéquent celle de la ſphère entière $= \frac{2caa}{r}$. Il ſuit de ce qu'on vient de voir que la ſurface d'un ſegment quelconque, eſt égale au produit de la circonférence du cercle générateur par la hauteur du ſegment; que celle de la demi-ſphère eſt égale au produit de la même circonférence par le raïon; celle de la ſphère au rectangle de la circonférence par le diamètre; & qu'enfin ces ſurfaces ſont entr'elles comme la hauteur du ſegment, le raïon & le diamètre.

Puiſque l'aire du cercle générateur eſt $\frac{caa}{2r}$, la ſurface de la ſphère ſera à cette aire, comme 4 eſt à 1, c'eſt-à-dire qu'elle en eſt quadruple.

La ſurface du cylindre circonſcrit à la demi-ſphère (les baſes non compriſes) eſt auſſi égale au produit de la circonférence de ſa baſe par ſa hauteur, c'eſt-à-dire à $\frac{caa}{r}$; ainſi cette ſurface eſt égale à celle de la demi-ſphère. Mais la ſurface du cone inſcrit dans la demi-ſphère eſt $= \frac{ca\sqrt{[2aa]}}{2r}$; donc la ſurface du cylindre ou celle de la demi-ſphère, eſt à la ſurface du cone qui lui eſt inſcrit, comme $2a$ eſt à $\sqrt{[2aa]}$, c'eſt-à-dire comme le diamètre eſt au côté du cone.

EXEMPLE XLI.

135. On demande la ſurface du ſolide engendré

par la parabole *ACO* de l'équation $ax = yy$, mue
Fig. 33. autour de l'axe AM (Fig. 33)? On aura $adx =$ $2ydy$, $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$; par conséquent la formule, au moyen des substitutions, deviendra $\frac{cydy}{ar} \sqrt{[4yy + aa]}$. On intégrera, & on aura $\frac{c}{12ra} \times (4yy + aa)^{\frac{3}{2}} - \frac{c}{12ar} \times a^3$, pour la surface du conoïde parabolique indéfini, en complettant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $y = 0$.

136. SOIT plus généralement $\frac{x^t}{t} = y$ l'équation de la parabole ACO (Fig. 33), l'abscisse AB étant $= x$, & l'ordonnée $BC = y$; équation qui relativement au triligne ACD, en prenant $AD = x$ comme abscisse, & $DC = y$ comme ordonnée, devient $x^{\frac{1}{t}} = y$. Si on appelle du l'élément de la courbe, on a vu (n°. 119) que $du = \ldots\ldots$ $\frac{dx}{(x^{2t-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}}$; or la formule différentielle pour les surfaces est $\frac{cydu}{r}$; on aura donc $\frac{cydu}{r} =$ $\frac{cydx}{r(x^{2t-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}}$; mais l'équation locale donne $\frac{x^t}{t} = y$; on aura par conséquent $\frac{cydu}{r} =$ $\frac{cx^t dx}{rt \cdot (x^{2t-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}}$.

Pour parvenir à l'intégration ou aux quadratures, j'employerai la méthode du n°. 61, dont j'ai déja fait usage dans l'exemple XXVII. Mais observons auparavant que c étant la circonférence du cercle dont le raïon est r, l'intégrale $\int \frac{cydu}{r}$ exprime la surface du conoïde; mais si c étoit une droite quelconque donnée, elle désigneroit la surface de l'onglet que l'on auroit, s'il s'élevoit sur la base CAB un cylindroïde coupé par un plan qui passât par l'axe AB, & qui fit avec la base CAB un angle dont le sinus & le cosinus fussent entr'eux comme c est à r. La superficie de cet onglet est donc à celle du solide de révolution, comme une droite donnée est à la circonférence.

D'après ce qui a été enseigné au n°. 61, il faut, afin que notre formule soit intégrable ou réductible aux quadratures connues, que l'on ait $t = \frac{3+2h}{1+2h}$, ou $t = \frac{h+1}{h+2}$, désignant par h un nombre entier quelconque positif ou négatif.

La première condition, $t = \frac{3+2h}{1+2h}$, en supposant que h est un nombre entier, en premier lieu positif, & en second lieu négatif, donne ces deux progressions:

I. $t = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}, \frac{13}{11}$, &c.

II. $t = -\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}$, &c.

La seconde condition, $t = \frac{h+1}{h+2}$, en supposant que h soit un nombre entier d'abord positif & ensuite négatif, donne ces deux autres progressions:

III. $t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, &c.

IV. $t = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}$, &c.

Je me permettrai ici quelques obſervations aſſez courtes.

I. La première & la troiſième de ces progreſſions contiennent les expoſants de toutes les paraboles, qui tournant ſur leurs axes, engendrent des conoïdes, dont les ſurfaces ſont quarrables analytiquement, en ſuppoſant ſeulement la rectification de la circonférence de cercle; & par conſéquent tous les onglets de hauteur donnée élevés ſur ces paraboles, ſont quarrables algébriquement. Pour les cas de la ſeconde & de la quatrième ſuite, il faut quelque choſe de plus, puiſqu'ils exigent la quadrature de l'hyperbole.

II. Si l'on compare la première de ces ſéries avec la ſeconde, & la troiſième avec la quatrième, on verra que les expoſants de l'une ne ſont que les fractions inverſes qui ſervent d'expoſant dans l'autre, & que dans l'une & dans l'autre ſuite, ces expoſants appartiennent à la même courbe. Cela ſignifie, que la révolution de l'aire parabolique pouvant ſe faire autour de l'axe AB, ou autour de l'axe AD, & engendrant dans ces deux cas des ſurfaces aſſez différentes, ſi la ſurface engendrée dans le premier cas eſt abſolument algébrique, du moins en la conſidérant dans l'onglet, ce ſera tout le contraire dans le ſecond cas, où à cauſe de la réciprocité des expoſants, les ſurfaces qu'il donnera ne ſeront quarrables qu'en admettant les quadratures. Par exemple, le conoïde engendré autour de AD par la première parabole cubique, donne pour l'onglet une ſurface quarrable algébriquement, & pour le ſolide de révolution une ſurface quarrable au moyen de la rectification de la circonférence; mais ſi elle tourne autour

autour de l'axe AB, les surfaces dépendent des quadratures. La même chose arrive dans la seconde parabole cubique, & le contraire dans la parabole ordinaire.

III. En confrontant ces séries avec celles du n°. 119, on voit que parmi celles-ci, aucune des paraboles de la première ou de la troisième série n'est rectifiable, ni analytiquement, ni par les quadratures connues; & qu'au contraire celles de la seconde & de la quatrième série sont toutes rectifiables, & embrassent toutes celles qui composent les progressions du n°. 119.

IV. L'hyperbole ordinaire entre ses asymptotes est la seule hyperbole dont la surface soit réductible à la quadrature de cette même hyperbole, parce qu'il ne se trouve pas dans les progressions citées d'exposant négatif autre que -1.

V. Les exposants tels que $t=4, 5, 6$, &c, ou $t=\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c, qui ne se trouvent pas dans les quatre séries qu'on vient de rapporter, exigent des quadratures supérieures, pour mesurer les surfaces des conoïdes engendrés par leurs courbes.

EXEMPLE XLII.

137. SOIT l'ellipse ADC (Fig. 28) qui se meut autour de l'axe AC; & faisons $AB=a$, $BD=b$, $AE=x$, $EO=y$, de manière que son équation Fig. 28.

soit $\frac{aayy}{bb}=2ax-xx$. On trouvera $dx=$ $\frac{aaydy}{bb.(a-x)}$, & $dx^2=\frac{a^4yydy}{b^4.(a-x)^2}$; & si l'on met au lieu de $-2ax+xx$ sa valeur $-\frac{aayy}{bb}$,

on aura $dx^2 = \frac{aayydy^2}{bb.(bb-yy)}$. Donc si l'on substitue cette valeur de dx^2 dans la formule générale, elle deviendra $\frac{cydy\sqrt{(b^4+aayy-bbyy)}}{rb\sqrt{(bb-yy)}}$. Faisons pour abréger $aa-bb=ff$, en supposant a plus grand que b, c'est-à-dire que l'ellipse ait tourné sur son grand axe (si a étoit plus petit que b, on supposeroit $aa-bb=-ff$); nous aurons...... $\frac{cydy\sqrt{(b^4+ffyy)}}{rb\sqrt{(bb-yy)}}$, formule qu'on pourra délivrer de ses radicaux, & dont l'intégrale dépendra de la quadrature du cercle, comme on le trouvera en employant la méthode du n°. 56. Mais si a est plus petit que b, c'est-à-dire si l'ellipse a tourné sur son petit axe, la superficie du sphéroïde dépendra des deux quadratures, du cercle & de l'hyperbole. Quant à la surface de l'onglet, dans le premier cas elle est égale à un espace elliptique qui se détermine facilement, en menant des normales à la courbe; & dans le second cas, ces mêmes normales donnent un espace hyperbolique égal à la même surface de l'onglet. Pour voir ceci clairement, soit la courbe ACF
Fig. 40. (Fig. 40) sur laquelle imaginons qu'on ait élevé un cylindroïde coupé par un plan qui passe par l'axe AB, & qui fasse un angle de 45° avec le plan inférieur CAB; il est évident qu'en appellant du l'élément de la courbe, $\int ydu$ sera la surface de l'onglet, & $\int\frac{cydu}{r}$ la surface du conoïde formé par la révolution de la figure CAB autour de l'axe AB; par conséquent la surface de l'onglet est à celle du co-

noide, comme le raïon du cercle eſt à la circonférence.

Soient maintenant les deux ordonnées BC, DF infiniment voiſines, & que l'on mène du point F la normale FG; que l'on tranſporte enſuite FG ſur DH, pour y tenir lieu d'ordonnée d'une nouvelle courbe MIH dont on trouveroit tous les points par la même voie : on aura l'aire $MABI$ égale à la ſurface de l'onglet qui a pour baſe l'arc AC. Car les deux triangles ſemblables FCE, GFD donnent $FC : CE :: GF : FD$, & par conſéquent $FD \times FC = GF \times CE = DH \times DB$. Mais $FD \times FC$ (ydu) eſt l'élément de la ſurface de l'onglet, & $HD \times DB$ eſt l'élément de l'aire $IMAB$; or ces élémens étant égaux, leurs intégrales, c'eſt-à-dire les ſurfaces dont on vient de parler le feront auſſi.

Cela poſé, ſoit la figure ACB un quart de l'ellipſe, dont l'équation eſt $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$; la normale FG ſera $= \frac{b}{aa} \sqrt{[2a^3x - aaxx + bbxx - 2abbx + aabb]}$; donc en appellant z l'ordonnée BI, on aura $z = \frac{b}{aa} \sqrt{[(xx - 2ax)(bb - aa) + aabb]}$, équation à la courbe MIH, qui eſt une autre ellipſe lorſque a eſt plus grand que b, c'eſt-à-dire ſi AB eſt le grand axe de l'ellipſe ACB; & une hyperbole, lorſque a eſt plus petit que b, ou ſi AB eſt le petit axe.

Enfin, dans le cas où l'ellipſe eſt un cercle, on ſait déja que la ſuperficie de l'onglet eſt quarrable, & égale à un rectangle.

EXEMPLE XLIII.

Fig. 29. 138. SOIT BD (Fig. 29) une hyperbole dont A soit le centre, & qui tourne autour de son premier axe BA. Je suppose $BA=a$, le demi-axe conjugué $AE=b$, $AC=x$, $CD=y$; ainsi l'équation est $xx-aa=\frac{aayy}{bb}$, ou $y=\frac{b}{a}\sqrt{[xx-aa]}$; j'ai par conséquent $dy=\frac{bxdx}{a\sqrt{[xx-aa]}}$, & la formule générale devient $\frac{cb}{ar}\sqrt{[xx-aa]}\times\ldots$ $\sqrt{\left[\frac{aaxxdx^2+bbxxdx^2-a^4dx^2}{aa.(xx-aa)}\right]}=\ldots$ $\frac{cbdx}{aar}\sqrt{[aaxx+bbxx-a^4]}=\ldots\ldots$ $\frac{cbfdx}{aar}\sqrt{\left[xx-\frac{a^4}{ff}\right]}$, en supposant $aa+bb=ff$. Après avoir délivré cette quantité du signe radical, on trouvera que son intégrale dépend de la quadrature même de l'hyperbole.

EXEMPLE XLIV.

Fig. 41. 139. SOIT MD (Fig. 41) l'hyperbole équilatère entre les asymptotes, qui est supposée tourner autour de l'asymptote AC, & dont l'équation est $ay+xy=aa$, AB étant $=a$, $BC=x$, $CD=y$. On aura $x=\frac{aa}{y}-a$; $dx^2=\frac{a^4dy^2}{y^4}$; & par conséquent après les substitutions, la formule générale sera $\frac{cdy}{ry}\sqrt{[y^4+a^4]}$. Que l'on suppose ..... $\sqrt{[y^4+a^4]}=z$, & par conséquent $y^4=zz-a^4$, $dy=\frac{zdz}{2y^3}$. Et faisant ces substitutions, la formule

précédente se changera en celle-ci $\frac{cczdz}{2r.(zz - \text{[illegible]})}$ qui n'a pas de radical, & dont l'intégrale dépend en partie des logarithmes, comme il est facile de le reconnoître. Donc la surface cherchée engendrée par la révolution de notre hyperbole dépendra de la quadrature même de l'hyperbole.

EXEMPLE XLV.

140. ON demande la surface du solide engendré par la révolution de la tractoire ABF (Fig. 20), dont l'équation a été donnée ci-dessus n°. 128. On substituera dans la formule générale $\frac{cydu}{r}$, dans laquelle du est l'élément de la courbe, au lieu de du sa valeur $-\frac{ady}{y}$ donnée par l'équation; on aura $-\frac{acdy}{r}$, & intégrant $-\frac{acy}{r} + n$. Mais lorsque la superficie est zero, on a $y = a$; donc la constante $n = \frac{aac}{r}$, & l'intégrale complette, ou la surface du solide engendré par la figure $AEDB$, est $\frac{aac}{r} - \frac{acy}{r}$. Si l'on fait $y = 0$, on aura $\frac{aac}{r}$ pour la surface du solide infiniment prolongé; mais l'aire d'un cercle qui auroit pour raïon $\sqrt{[2aa]}$, est aussi $\frac{caa}{r}$; donc la surface du solide infiniment prolongé, est égale à l'aire du cercle qui a pour raïon la diagonale du quarré de AE. Fig. 20.

EXEMPLE XLVI.

141. ON demande la surface de l'onglet
Fig. 37. $CNEODAC$ (Fig. 37)? En conservant les dénominations du n°. 129, on a $QK = \frac{bx}{a} = MN$; mais l'élément Mi de la courbe est $\sqrt{[dx^2 + dy^2]}$; donc le quadrilatère infinitésimal $MimN$, qui est l'élément de la surface du demi-onglet, sera $= \frac{bx}{a}\sqrt{[dx^2 + dy^2]}$.

Maintenant si la courbe DAC est un demi-cercle, on aura $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \frac{adx}{\sqrt{[aa - xx]}}$; la formule deviendra $\frac{bxdx}{\sqrt{[aa - xx]}}$, & l'intégration faite d'après le n°. 31, donnera $-b\sqrt{[aa - xx]} + f$. Mais en faisant $x = 0$, on a $f = ab$; ainsi l'intégrale complette est $ab - b\sqrt{[aa - xx]}$. Enfin, la supposition de $x = a$, donne la surface entière du demi-onglet $= ab$.

Si la courbe DAC est la parabole de l'équation $yy = a - x$, on a alors $\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \frac{1}{2}dx\sqrt{\left[\frac{4a - 4x + 1}{a - x}\right]}$; & par conséquent la formule est $\frac{bxdx}{2a}\sqrt{\left[\frac{4a - 4x + 1}{a - x}\right]}$, dont l'intégrale dépend de la quadrature de l'hyperbole; la surface de l'onglet dépendra donc de la même quadrature.

EXEMPLE XLVII.

142. SOIT le conoïde parabolique engendré par
Fig. 7. la révolution de la parabole ADH (Fig. 7) qui a ses coordonnées à angle oblique, qui tourne autour

de l'axe AC, & dont l'équation eſt $ax = yy$. On ſubſtituera dans la formule . . . . $\frac{cay}{rm}\sqrt{\left[dx^2+dy^2+\frac{2edxdy}{m}\right]}$, qui convient à ce cas, la valeur donnée de dx en dy par l'équation de la courbe différentiée ; ce qui transformera la formule en celle-ci $\frac{2cnydy}{arm}\sqrt{\left[yy+\frac{aey}{m}+\frac{aa}{4}\right]}$, dont l'intégrale eſt en partie algébrique, & en partie logarithmique.

CHAPITRE IV.

Calcul des quantités logarithmiques & exponentielles.

143. NOUS avons ſuffiſamment expliqué ci-deſſus ce que c'eſt que les quantités logarithmiques ; & on appelle quantités *exponentielles* celles qui ſont élevées à une puiſſance quelconque indéterminée, comme par exemple, a^x, y^z, &c, qui ont pour expoſants les grandeurs indéterminées x, z. Le calcul qui s'applique à cette eſpece de quantités, s'appelle *calcul exponentiel*.

144. IL y a des quantités exponentielles de différents degrés ; celles du premier degré ont pour expoſants des grandeurs indéterminées ordinaires, telles ſont les quantités déja citées a^x, y^z. Celles du ſecond degré ſont celles dont les expoſants ſont eux-mêmes des exponentielles du premier ordre, comme

a^{x^r}, y^{z^p}, dans lesquelles x est élevée à la puissance r, & z à la puissance p. Celles du troisième degré ont pour exposans des exponentielles du second degré ; & ainsi de suite.

145. IL est à propos de rappeller ici, ce qui a été dit au n°. 11, savoir que $\int \frac{a\,dy}{y} = L.\,y$ dans la logarithmique dont la sou-tangente $= a$; & par conséquent la différence de $L.\,y$ sera $\frac{dy}{y}$ multiplié par la sou-tangente de la logarithmique dans laquelle on prend le logarithme. Pareillement, la différence de $L.\sqrt{[aa - xx]}$ dans la logarithmique dont la sou-tangente est 1, est $-\frac{x\,dx}{aa - xx}$; & généralement la différence d'une quantité logarithmique est une fraction qui a pour numérateur la différence de cette quantité multipliée par la sou-tangente, & pour dénominateur la quantité même.

146. CELA posé, que l'on ait à différentier la quantité logarithmique $L.^m x$, (m étant l'exposant du logarithme). On supposera $L.^m x = y^m$; on aura par conséquent $L.\,x = y$, & $\frac{dx}{x} = dy$; mais la différence de $L.^m x$ est $my^{m-1}\,dy$, & $y^{m-1} = L.^{m-1} x$; substituant donc au lieu de y & de dy leurs valeurs données en x, on aura la différence de $L.^m x = m\,L.^{m-1} x \cdot \frac{a\,dx}{x}$, la sou-tangente de la logarithmique étant $= a$; ou bien $m\,L.^{m-1} x \cdot \frac{dx}{x}$; cette sou-tangente étant $= 1$.

147. Si l'on veut différentier $L.^m x^n$; on fera $x^n = z$; or la différence de $L.^m z$ est $m L.^{m-1} z . \frac{dz}{z}$, & $dz = n x^{n-1} dx$. Donc en substituant on aura la différence de $L.^m x^n = nm L.^{m-1} x^n . \frac{dx}{x}$.

148. Pour différentier $L.L.x$, on supposera $L.x = y$, & par conséquent $L.L.x = L.y$; donc $\frac{dx}{x} = dy$ dans la logarithmique qui a pour soutangente 1, ce qu'il faudra entendre de même toutes les fois qu'on ne parlera pas de la sou-tangente. Mais la différence de $L.y$ est $\frac{dy}{y}$; mettant donc pour y & pour dy leurs valeurs données en x, on trouvera que la différence de $L.L.x$ est $\frac{dx}{x L.x}$.

Plus généralement, que l'on ait à différentier $L.^m L.x$. On supposera $L.x = y$, & par conséquent $L.^m L.x = L.^m y$, $\frac{dx}{x} = dy$; mais la différence de $L.^m y$ est $m L.^{m-1} y . \frac{dy}{y}$; donc la différence cherchée sera $m L.^{m-1} L.x . \frac{dx}{x L.x}$.

Plus généralement encore; si l'on veut différentier $L.^n L.^m x$, on supposera $L.^m x = y^m$; on aura par conséquent $L.x = y$, $\frac{dx}{x} = dy$, & $L.^n L.^m x = L.^n y^m$. Mais la différence de $L.^n y^m$ est $mn L.^{n-1} y^m . \frac{dy}{y}$; donc, les substitutions faites, on trouvera que la différence cherchée est $m n \mathrm{L}.^{n-1}\mathrm{L}.^m x . \frac{dx}{x \mathrm{L}. x}$;

149. Voyons maintenant comment on différentie les quantités exponentielles. Soit z^x la quantité à différentier. Je suppose $z^x = t$; j'aurai donc $\mathrm{L}. z^x = \mathrm{L}. t$; mais (n°. 14) $\mathrm{L}. z^x = x \mathrm{L}. z$; donc $x \mathrm{L}. z = \mathrm{L}. t$; ainsi en différentiant, j'ai $dx \mathrm{L}. z + \frac{x dz}{z} = \frac{dt}{t} = \frac{dt}{z^x}$; donc enfin la différence cherchée $dt = z^x dx \mathrm{L}. z + x z^{x-1} dz$.

150. Pour différentier l'exponentielle du second degré z^{x^p}, je supposerai $z^{x^p} = t$; j'aurai par conséquent $x^p \mathrm{L}. z = \mathrm{L}. t$, & en différentiant, diff. (x^p). $\mathrm{L}. z + x^p . \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$; mais (n°. 149) diff. $x^p = x^p dp \mathrm{L}. x + p x^{p-1} dx$; donc $(x^p dp \mathrm{L}. x + p x^{p-1} dx) \mathrm{L}. z + x^p . \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$; or $t = z^{x^p}$; Donc enfin dt ou la différence cherchée $= z^{x^p} x^p dp \mathrm{L}. x \mathrm{L}. z + z^{x^p} p x^{p-1} dx \mathrm{L}. z + z^{x^p} z^{-1} x^p dz$.
On procédera de même pour les exponentielles des degrés supérieurs.

151. On trouveroit pareillement la différence des quantités qui seroient le produit de plusieurs quantités exponentielles, par exemple de $x^p y^n$; car la différence de $x^p y^n$ est le produit de x^p par la différence de y^n, plus le produit de y^n par la différence de x^p ; or on sait trouver les différences de x^p & y^n ; donc, &c.

152. En observant l'ordre ou la marche des diffé-

rentielles logarithmiques, on découvrira quelques regles pour l'intégration des formules différentielles logarithmiques. En premier lieu, les formules qui servent comme de guide pour l'intégration des quantités différentielles ordinaires, en serviront aussi pour les quantités différentielles logarithmiques qui leur sont analogues, pourvu que celles-ci soient de plus divisées par la variable; l'intégrale de ces dernières différentielles sera la même que celle des différentielles ordinaires, à cela près, qu'au lieu de l'inconnue ou de ses puissances, il faudra mettre le logarithme de l'inconnue ou le logarithme de ses puissances, & diviser le tout par la sou-tangente de la logarithmique. Par exemple, l'intégrale de $mx^{m-1}dx$ étant x^m, l'intégrale de $m\mathrm{L.}^{m-1}x.\frac{dx}{x}$ sera $\frac{\mathrm{L.}^m x}{a}$.

Pareillement, puisque $\int x^{-1}dx = \mathrm{L.}x$, on aura aussi $\int \mathrm{L.}^{-1}x.\frac{dx}{x}$, ou bien $\int \frac{dx}{x\,\mathrm{L.}x} = \mathrm{L.L.}x$, en supposant la sou-tangente $= 1$.

Et puisque $\int y\,dy\sqrt{[aa+yy]} = \frac{(aa+yy)^{\frac{3}{2}}}{3}$, on aura aussi $\int \mathrm{L.}y\sqrt{[aa+\mathrm{L.}^2 y]}.\frac{dy}{y} = \ldots$ $\frac{(aa+\mathrm{L.}^2 y)^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Que l'on ait à intégrer $m\,\mathrm{L.}^{m-1}\mathrm{L.}x.\frac{dx}{x\,\mathrm{L.}x}$.

On supposera $\mathrm{L.}x = y$; & par conséquent $\frac{dx}{x} = dy$, & la substitution faite, on aura $m\,\mathrm{L.}^{m-1}y.\frac{dy}{y}$;

mais on sait que l'intégrale de $m y^{m-1} dy$ est y^m; donc l'intégrale de $m\,L.^{m-1} y . \frac{dy}{y}$ sera $L.^m y$. Or $y = L.x$, & par conséquent $L.y = L.L.x$, & $L.^m y = L.^m L.x$; donc $\int m\,L.^{m-1} L.x . \frac{dx}{x\,L.x} = L.^m L.x$.

Pour intégrer $n m\,L.^{n-1} x^m . \frac{dx}{x}$, je supposerai $x^m = y$, $dx = \frac{dy}{m x^{m-1}}$; & les substitutions faites j'aurai $n m\,L.^{n-1} y . \frac{dy}{m x^{m-1}.x}$, ou bien $\frac{n m\,L.^{n-1} y}{m} \times \frac{dy}{y} = n\,L.^{n-1} y . \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est $L.^n y$, c'est-à-dire $L.^n x^m$ en remettant la valeur de y.

Pour intégrer $n m\,L.^{n-1} L.^m x . \frac{dx}{x\,L.x}$, je supposerai $L.\,x = y$, $\frac{dx}{x} = dy$, $L.^m\,x = y^m$; & après les substitutions, j'aurai $n m\,L.^{n-1} y^m . \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est $L.^n y^m$; & remettant la valeur de y^m, j'ai $\int n m\,L.^{n-1} L.^m x . \frac{dx}{x\,L.x} = L.^n L.^m x$.

153. J'AJOUTERAI à ce que l'on vient de voir une regle générale pour l'intégration de la formule $y^m L.^n y\,dy$. Son intégrale, comme je le démontrerai bientôt, est $\frac{y^{m+1} L.^n y}{m+1} - n y^{m+1} . \frac{a L.^{n-1} y}{(m+1)^2} + \frac{n.(n-1).y^{m+1} aa L.^{n-2} y}{(m+1)^3} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{n.(n-1).(n-2)y^{m+1}a^3 L.^{n-3}y}{(m+1)^4}$, &c; & ainſi de ſuite à l'infini, en conſervant la même loi.

On voit ſans peine que ſi l'expoſant n eſt un nombre entier poſitif, la ſérie s'interrompra ou finira, & que par conſéquent on aura l'intégrale de la formule propoſée, en termes finis. Par exemple, ſoit $n=2$, on aura $n-2=0$; par conſéquent les coëfficients du quatrième terme & des termes ſuivants, étant multipliés par $n-2$, ſeront tous égaux à zero. Si $n=3$, la ſérie s'interrompra au cinquième terme, &c.

Soient $n=2$ & $m=1$, la formule à intégrer ſera $y\,L.^2 y\,dy$; le quatrième terme & tous ceux qui ſont après lui, deviendront nuls, & par conſéquent l'intégrale ſera $\frac{yyL.^2y}{2}-\frac{2yyaL.y}{4}+\frac{2yyaa}{8}=\frac{2yyL.^2y-2ayyL.y+aayy}{4}$.

Si $m=-1$, la ſérie ſeroit inutile puiſqu'on auroit $m+1=0$, ce qui rendroit chaque terme infini; mais dans ce cas on n'a pas beſoin de recourir à cette ſérie, puiſque j'ai enſeigné plus haut à intégrer les formules de cette eſpece.

Maintenant pour démontrer cette ſuite, que l'on ſuppoſe $L.y=z$, & par conſéquent $\frac{ady}{y}=dz$; on aura donc $y^m l^n y\,dy=y^m z^n dy$. Mais $y^m z^n dy=$ $y^m z^n dy+\frac{n}{m+1}y^{m+1}z^{n-1}dz-\frac{n}{m+1}y^m z^{n-1}ady-$ $\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}y^{m+1}z^{n-2}adz+\frac{n.(n-1)}{(m+1)^2}y^m z^{n-2}aady$, &c, à l'infini, parce que chaque terme, à l'exception du premier, eſt détruit par celui qui le ſuit immédiatement, à cause que $dz = \frac{ady}{y}$. Or cette série s'intégre en prenant ses termes deux à deux ; car l'intégrale des deux premiers termes est $\frac{y^{m+1}z^n}{m+1}$; celle du troisième & du quatrième est $-\ldots\ldots \frac{any^{m+1}z^{n-1}}{(m+1)^2}$; celle des cinquième & sixième est $\frac{aan.(n-1)y^{m+1}z^{n-2}}{(m+1)^3}$, & ainsi de suite. Remettant dans ces intégrales L. y au lieu de z, on aura enfin $\int y^m \text{L.}^n y\, dy = \frac{y^{m+1}\text{L.}^n y}{m+1} - \ldots\ldots \frac{any^{m+1}\text{L.}^{n-1}y}{(m+1)^2} + \frac{aan(n-1)y^{m+1}\text{L.}^{n-2}y}{(m+1)^3} - \frac{a^3n(n-1)(n-2).y^{m+1}\text{L.}^{n-3}y}{(m+1)^4}$, &c.

154. VOICI par quel artifice on peut trouver cette série. Imaginons que l'intégrale de $y^m\text{L.}^n y dy$ soit $\frac{y^{m+1}\text{L.}^n y}{m+1}$, comme elle le seroit en effet si L.$^n y$ n'étoit pas une quantité variable. Mais en supposant la sou-tangente de la logarithmique $= a$, la différence de cette intégrale est $y^m\text{L.}^n y dy + \frac{ny^m a\text{L.}^{n-1} y dy}{m+1}$, qui surpasse la formule qu'on s'étoit proposé d'intégrer de $\frac{ny^m a\text{L.}^{n-1} y dy}{m+1}$; il faut donc soustraire de l'intégrale $\frac{y^{m+1}\text{L.}^n y}{m+1}$, l'intégrale du terme $\frac{ny^m a\text{L.}^{n-1} y dy}{m+1}$.

Imaginons de nouveau que l'intégrale de.... $\frac{ny^{m}a\,L.^{n-1}y\,dy}{m+1}$ soit $\frac{ny^{m+1}a\,L.^{n-1}y}{(m+1)^{2}}$; mais en différentiant cette dernière quantité, on trouve $\frac{ny^{m}a\,L.^{n-1}y\,dy}{m+1}+\frac{n.(n-1)y^{m}a^{2}\,L.^{n-2}y\,dy}{(m+1)^{2}}$; donc $\frac{ny^{m}a\,L.^{n-1}y}{(m+1)^{2}}$ est trop grand, pour être l'intégrale de $\frac{ny^{m}a\,L.^{n-1}y\,dy}{m+1}$, de toute l'intégrale du terme $\frac{n.(n-1)y^{m}aa\,L.^{n-2}y\,dy}{(m+1)^{2}}$. On a donc trop soustrait ; il faudra donc ajouter l'intégrale de ce dernier terme que j'imaginerai encore être........... $\frac{n.(n-1)y^{m+1}aa\,L.^{n-2}y}{(m+1)^{3}}$; de manière que l'intégrale de la formule proposée sera $\frac{y^{m+1}L.^{n}y}{m+1}-\frac{ny^{m+1}a\,L.^{n-1}y}{(m+1)^{2}}+\frac{n.(n-1)y^{m+1}aa\,L.^{n-2}y}{(m+1)^{3}}$ — &c; on continuera cette série à l'infini, en procédant toujours dans le même ordre.

155. ON peut aussi trouver les intégrales des formules différentielles logarithmiques par le moyen de séries qui ne soient composées que de termes algébriques ordinaires, sans quantités logarithmiques ; mais ces séries ne se termineront pas comme la précédente ; elles auront toujours une infinité de termes.

Que l'on ait donc à intégrer $x\,L.x.dx$; on supposera $x=z+a$, & la substitution donnera $(z+a)\,L.(z+a).dz$. Mais on a vu (n°. 70) qu'en supposant la sou-tangente $=1$, on a $L.(z+a)=\frac{z}{a}-\frac{zz}{2aa}+\frac{z^3}{3a^3}-\frac{z^4}{4a^4}+$ &c; on aura donc aussi $(z+a)L.(z+a).dz=$..............

$$\left.\begin{array}{l} zdz+\frac{zzdz}{a}-\frac{z^3dz}{2aa}+\frac{z^4dz}{3a^3}-\frac{z^5dz}{4a^4}+\&c \\ \quad -\frac{zzdz}{2a}+\frac{z^3dz}{3aa}-\frac{z^4dz}{4a^3}+\frac{z^5dz}{5a^4}-\&c \end{array}\right\}=$$

$$zdz+\frac{zzdz}{2a}-\frac{z^3dz}{6aa}+\frac{z^4dz}{12a^3}-\frac{z^5dz}{20a^4}+\&c.$$

Et en intégrant $\int(z+a)L.(z+a).dz=\frac{zz}{2}+\frac{z^3}{6a}-\frac{z^4}{24aa}+\frac{z^5}{60a^3}-\frac{z^6}{120a^4}+$ &c.

Si la formule à intégrer avoit été $x^m L.xdx$; c'est-à dire $(z+a)^m L.(z+a).dz$; on auroit multiplié la série qui équivaut au logarithme par la puissance $(z+a)^m$. Si de plus le logarithme lui-même étoit élevé à une puissance, comme dans $x^m L.^n x dx$, ou $(z+a)^m L.^n(z+a).dz$; on éleveroit la suite infinie qui exprime le logarithme à la puissance n, & on acheveroit le reste comme ci-dessus.

156. LES équations ou formules différentielles affectées de quantités logarithmiques sont souvent intégrables géométriquement, & dépendent de la quadrature de certains espaces curvilignes qu'il est aisé de décrire en supposant la logarithmique. En voici quelques exemples choisis parmi les plus simples.

Soit proposé d'intégrer ou de construire l'équation $dyL.y=dx$. Supposons que l'on ait la logarithmique BLD (Fig. 42) dont la sou tangente
Fig. 42. est 1, & dans laquelle $CD=y$; on aura AC ou $HD=L.y$;

$HD = L.y$; & le rectangle infinitésimal DG, qui a pour base $GH = FE = dy$, sera $= dy L.y$; or ce rectangle est l'élément de l'aire croissante BDH; donc $\int dy L.y$ est l'expression de cette même aire BDH.

En effet, cette aire est égale au rectangle AD moins l'espace logarithmique $ABDC$; mais on sait que cet espace est égal au rectangle $AB \times CD = y$; donc l'aire $BDH = \int dy L.y = y L.y - y$, comme on le trouveroit aussi par l'analyse.

Proposons-nous cette autre formule $dy L.^2 y = dx$. Il est facile de voir que le premier membre de cette équation est un solide engendré par la fluxion HG multipliée par le quarré de l'ordonnée GF; or ce solide est ressemblant ou analogue à l'élément du conoïde engendré par la révolution de l'aire BDH autour de l'axe BG; donc l'intégrale $\int dy L.^2 y = y L.^2 y - 2y L.y + 2y$ est en raison donnée avec ce conoïde.

Plus généralement, soit proposé $dy L.^m y$. On élevera l'ordonnée HD à la puissance m (cet exposant m étant un nombre quelconque, entier ou rompu, positif ou négatif); on fera l'ordonnée HM égale à cette puissance $\overline{HD}^m$, & par tous les points M déterminés de la même manière, on fera passer la courbe BMN; alors l'aire BMH ou $\int MH . dy$ sera égale ou proportionnelle à l'intégrale $\int dy L.^m y$.

Il n'y auroit pas plus de difficulté, quand même il se trouveroit des logarithmes de logarithmes dans les quantités différentielles. Soit proposé $dy\,\mathrm{L.L.}y = dx$; puisque AC est le log. de CD, si on cherche dans la logarithmique la nouvelle ordonnée IL égale à l'abscisse AC, AI sera le logarithme de IL, & par conséquent le logarithme du logarithme de CD. Soit prolongée la droite IL jusqu'à ce qu'elle rencontre en quelque point K la droite HD qui est parallèle & égale à AC; & que par le point K & par une infinité d'autres points déterminés de la même manière, on fasse passer une nouvelle courbe, qui sera décrite relativement à la logarithmique : la quadrature de l'espace de cette courbe donnera l'intégrale de la formule $dy\,\mathrm{L.L.}y = dx$.

Autre manière. Je prends la différence de $y\,\mathrm{L.L.}y$ qui est $dy\,\mathrm{L.L.}y + \frac{dy}{\mathrm{L.}y}$; & ajoutant à chaque membre de l'équation proposée le terme $\frac{dy}{\mathrm{L.}y}$, j'ai $dy\,\mathrm{L.L.}y + \frac{dy}{\mathrm{L.}y} = dx + \frac{dy}{\mathrm{L.}y}$; & en intégrant, $y\,\mathrm{L.L.}y = x + \int \frac{dy}{\mathrm{L.}y}$. Par conséquent si je donne aux abscisses AH des ordonnées correspondantes qui soient en raison réciproque des $HD = \mathrm{L.}y$, il naîtra une nouvelle courbe, dont la quadrature exprimera l'intégrale $\int \frac{dy}{\mathrm{L.}y}$. Ces exemples sont suffisants pour faire connoître la marche de la méthode.

157. PASSONS maintenant à l'intégration des formules différentielles qui contiennent des quantités exponentielles; & proposons-nous d'intégrer $x^n dx$. On supposera $x = 1 + y$ (je désigne ici par l'unité

une constante quelconque); on aura donc $x^x dx = (1+y)^{1+y} dy$. Après cela, on fera $(1+y)^{1+y} = 1+u$; on aura $(1+y) L.(1+y) = L.(1+u)$. On réduira en série (par le n°. 70) les deux logarithmes; & on multipliera réellement le premier par $1+y$, ce qui donnera $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20} + \&c = u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \&c.$ On supposera ensuite l'équation $u = y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 + \&c$, dans laquelle A, B, C, D, &c, sont des coëfficients à déterminer, & l'on aura par conséquent,

$$uu = \left.\begin{array}{l} yy + 2Ay^3 + AAy^4 + 2ABy^5 + BBy^6 \\ \qquad\qquad + 2By^4 + 2Cy^5 + Dy^6 \end{array}\right\} \&c.$$

$$u^3 = \left.\begin{array}{l} y^3 + 3Ay^4 + 3AAy^5 \\ \qquad\qquad + 3By^5 \end{array}\right\} \&c.$$

$$u^4 = y^4 + 4Ay^5 \ \&c.$$

$$u^5 = y^5 \ \&c.$$

Donc $u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \&c.$ ou

$$y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20} + \&c. =$$

$$\begin{array}{rrrrrl}
y & + Ayy & + By^3 & + Cy^4 & + Dy^5 & + \&c. \\
 & - \frac{1}{2}yy & - Ay^3 & - \frac{1}{2}A^2y^4 & - ABy^5 & - \&c. \\
 & & & - By^4 & - Cy^5 & - \&c. \\
 & & + \frac{1}{3}y^3 & + Ay^4 & + AAy^5 & + \&c. \\
 & & & & + By^5 & + \&c. \\
 & & & - \frac{1}{4}y^4 & - Ay^5 & - \&c. \\
 & & & & + \frac{1}{5}y^5 & + \&c.
\end{array}$$

Réduisant cette dernière équation à zero, en faisant tout passer du même côté du signe d'égalité, on trouvera

$$\left.\begin{array}{r} y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 + \&c. \\ -\tfrac{1}{2}yy - Ay^3 - \tfrac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 - \&c. \\ - By^4 - Cy^5 - \&c. \\ + \tfrac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 + \&c. \\ + By^5 + \&c. \\ - \tfrac{1}{4}y^4 - Ay^5 - \&c. \\ + \tfrac{1}{5}y^5 + \&c. \\ -y - \dfrac{yy}{2} + \dfrac{y^3}{6} - \dfrac{y^4}{12} + \dfrac{y^5}{20} - \&c. \end{array}\right\} = 0.$$

La somme des premiers, seconds, troisièmes, quatrièmes termes égalée à zero, donnera les valeurs des indéterminées A, B, C, D, &c, savoir $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = \frac{1}{12}$. Substituant ces valeurs, on aura $1 + u = (1+y)^{1+y} = 1 + y + yy + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5 + \&c$; & par conséquent $(1+y)^{1+y}dy = dy + y\,dy + yy\,dy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy + \&c.$

On intégrera enfin; ce qui donnera $\int(1+y)^{1+y}dy =$

$$y + \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} + \frac{y^6}{72} + \&c.$$

158. ON trouvera encore de cette manière l'intégrale de $x^x dx$. Que l'on suppose $x^x = 1 + y$, ce qui donne $x\,\mathrm{L}.x = \mathrm{L}.(1+y) =$ (en réduisant en série) $y - \dfrac{yy}{2} + \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{y^4}{4} + \dfrac{y^5}{5} - \&c.$ Que l'on prenne ensuite l'équation fictice $y = \mathrm{L}.(1+y) + A\,\mathrm{L}.^2(1+y) + B\,\mathrm{L}.^3(1+y) + C\,\mathrm{L}.^4(1+y) + D\,\mathrm{L}.^5(1+y) + \&c$, dans laquelle A, B, C, D sont des coéfficients à déterminer; on en tirera

$$y = \mathrm{L}(1+y) + A\,\mathrm{L}^2(1+y) + B\,\mathrm{L}^3(1+y) + C\,\mathrm{L}^4(1+y) + D\,\mathrm{L}^5(1+y) + \&c.$$

$$yy = \left.\begin{array}{l} \mathrm{L}^2(1+y) + 2A\,\mathrm{L}^3(1+y) + AA\,\mathrm{L}^4(1+y) + 2AB\,\mathrm{L}^5(1+y) \\ \qquad\qquad + 2B\,\mathrm{L}^4(1+y) + 2C\,\mathrm{L}^5(1+y) \end{array}\right\} \&c.$$

$$y^3 = \left.\begin{array}{l} \mathrm{L}^3(1+y) + 3A\,\mathrm{L}^4(1+y) + 3AA\,\mathrm{L}^5(1+y) \\ \qquad\qquad + 3B\,\mathrm{L}^5(1+y) \end{array}\right\} \&c.$$

$$y^4 = \mathrm{L}^4(1+y) + 4A\,\mathrm{L}^5(1+y) + \&c.$$

$$y^5 = \mathrm{L}^5.(1+y) + \&c.$$

& par conséquent $y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \&c$, c'est-à-dire $\mathrm{L}.(1+y) = \ldots\ldots\ldots$

$$\begin{array}{r} \mathrm{L}.(1+y) + A\,\mathrm{L}^2(1+y) + B\,\mathrm{L}^3(1+y) + C\,\mathrm{L}^4(1+y) + D\,\mathrm{L}^5(1+y) + \&c. \\ - \tfrac{1}{2}\mathrm{L}^2(1+y) - A\,\mathrm{L}^3(1+y) - \tfrac{1}{2}A^2\,\mathrm{L}^4(1+y) - AB\,\mathrm{L}^5(1+y) - \&c. \\ - B\,\mathrm{L}^4(1+y) - C\,\mathrm{L}^5(1+y) - \&c. \\ + \tfrac{1}{3}\mathrm{L}^3(1+y) + A\,\mathrm{L}^4(1+y) + A^2\,\mathrm{L}^5(1+y) + \&c. \\ + B\,\mathrm{L}^5(1+y) + \&c. \\ - \tfrac{1}{4}\mathrm{L}^4(1+y) - A\,\mathrm{L}^5(1+y) - \&c. \\ + \tfrac{1}{5}\mathrm{L}^5(1+y) + \&c. \end{array}$$

Ayant ensuite mis tous les termes du même côté du signe d'égalité, & égalé à zero les premiers, les seconds, les troisièmes, les quatrièmes termes, &c; on trouvera que $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{24}$, $D = \frac{1}{120}$, &c. On aura donc $1 + y = 1 + \mathrm{L}.(1+y) + \frac{1}{2}\mathrm{L}.^2(1+y) + \frac{1}{6}\mathrm{L}.^3(1+y) + \frac{1}{24}\mathrm{L}.^4(1+y) + \frac{1}{120}\mathrm{L}.^5(1+y) + \&c.$ Mais $\mathrm{L}.(1+y) = x\,\mathrm{L}.x$, & $1 + y = x^x$; remettant donc ces premieres quantités, & multipliant par dx, on aura $x^x dx = dx + x\,dx\,\mathrm{L}.x + \frac{1}{2}xx\,dx\,\mathrm{L}.^2x + \frac{1}{6}x^3dx\,\mathrm{L}.^3x + \frac{1}{24}x^4dx\,\mathrm{L}.^4x + \frac{1}{120}x^5dx\,\mathrm{L}.^5x + \&c.$ On intégrera enfin en suivant les regles qui ont été expliquées, & on trouvera $\int x^x dx = x + \frac{xx\,\mathrm{L}.x}{2} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3\,\mathrm{L}.^2x}{6} - \frac{x^3\,\mathrm{L}.x}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4\,\mathrm{L}.^3x}{24} - \frac{x^4\,\mathrm{L}.^2x}{32} + \frac{x^4\,\mathrm{L}.x}{64} - \frac{x^4}{256} + \&c.$

159. POUR dire encore quelque chose relativement à la construction des courbes exprimées par des équations logarithmiques & exponentielles; supposons que l'on ait à décrire la courbe de l'équation

Fig. 43. $x = \frac{L.^{\frac{1}{2}}y}{a^{\frac{1}{2}}}$; & soit BD (Fig. 43) la logarithmique dans laquelle on prend les logarithmes de l'équation proposée, & dont la sou-tangente soit, par exemple $AB = a$. Cela posé, prenant $y = a = AB$, le logarithme de y sera $= 0$, & par conséquent $x = 0$;
Fig. 44. si l'on fait (Fig. 44) $MN = y = a$, le point N appartiendra à la courbe. Lorsque l'on prend y plus petit que AB, $L.y$ est une quantité négative; ainsi $L.^{\frac{1}{2}}y$ sera imaginaire, puisque le 2 de l'exposant indique la racine paire d'une quantité négative; x sera donc imaginaire, dès que y sera plus petit que a. Si l'on prend y plus grand que AB, par exemple $= CD$, AC sera $= L.y$; mais d'après l'équation donnée $a^{\frac{1}{2}} : L.^{\frac{1}{2}}y :: L.y : x$, c'est-à-dire $a : \sqrt{[aL.y]} :: Ly : x$; faisant donc $MP = CD$, & prenant PH, quatrième proportionnelle à AB, à la moyenne géométrique entre AB & AC, & à la même ligne AC, cette quatrième proportionnelle sera $= x$, & le point H appartiendra à la courbe. On trouvera de même tant de points que l'on voudra, & on pourra décrire la courbe, qui s'étendra à l'infini, comme il est facile de le voir.

Pour avoir la sou-tangente de cette courbe, on prendra la formule différentielle des sou-tangentes $\frac{ydx}{dy}$; on différentiera l'équation donnée de la courbe, ce qui donnera $dx = \frac{3}{2} \text{L.}^{\frac{3-2}{2}} y . \frac{a^{\frac{1}{2}} dy}{y}$; on substituera cette valeur de dx, & on aura la sou-tangente $= \frac{3}{2} \text{L.}^{\frac{1}{2}} y . a^{\frac{1}{2}} = \frac{3ax}{2 \text{L.} y} = \frac{3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}{2}$.

Notre courbe a un point d'inflexion; pour le trouver, on prendra les différences secondes de l'équation donnée; & en supposant dx constante, on trouvera

$$\frac{\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}} y \text{L.}^{\frac{1}{2}} y . ddy + \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 \text{L.}^{-\frac{1}{2}} y - \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 \text{L.}^{\frac{1}{2}} y}{yy} = 0,$$

& par conséquent $ddy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}} dy^2 \text{L.}^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 \text{L.}^{-\frac{1}{2}} y}{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y \text{L.}^{\frac{1}{2}} y}.$$ Mais on sait que suivant la méthode des points d'inflexion, $ddy = 0$; donc $\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 \text{L.}^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 \text{L.}^{-\frac{1}{2}} y = 0$; c'est-à-dire, $\text{L.}^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} a \text{L.}^{-\frac{1}{2}} y = 0$, ou bien $\text{L.} y = \frac{1}{2} a$; il y a donc inflexion lorsque $\text{L.} y = \frac{1}{2} a$.

Si la courbe à décrire étoit $x \text{L.} x = y$, il n'y auroit qu'à mettre cette équation en proportion, $1 : \text{L.} x :: x : y$, & construire ensuite de la même manière.

Si l'équation étoit $xx \text{L.} x = y$, ou bien $x^3 \text{L.} x = y$, ou $x^{\frac{1}{2}} \text{L.} x = y$, ou plus généralement $x^n \text{L.} x = y$, n indiquant une puissance quelconque entière ou rompue; on résoudroit pareillement l'équation en proportion $1 : \text{L.} x :: x^n : y$; on prendroit dans la logarithmique une abscisse quelconque $CD = x$, de manière que $AC = \text{L.} x$; & le multiple de AC designé par le nombre n si c'est un nombre entier, son sou-multiple si c'est un nombre rompu, donnera dans la logarithmique même l'ordonnée correſpondante; qui par la propriété de la logarithmique, ſera $= x^x$.

Et ſi la courbe contenoit des logarithmes de logarithmes, par exemple, ſi l'équation étoit x^x L.L.$x = y$, on trouveroit ſans peine dans la logarithmique la ligne exprimée par L.L.x; car en prenant une ordonnée quelconque $CD = x$ (Fig. 43), on auroit $AC =$ L.x, & tranſportant enſuite AC en ac pour y faire fonction d'ordonnée, on auroit $Aa =$ L.L.x, puiſqu'elle ſeroit le log. de AC.

Fig. 43.

160. QUE l'on ait à conſtruire la courbe exponentielle de l'équation $x^x = y$, qui en paſſant aux logarithmes ſe change en celle-ci xL.$x =$ L.y. On décrira (Fig. 45) la logarithmique PAB avec la ſou-tangente $AD = 1$; & ayant pris une ordonnée quelconque $CB = DE = x$, DC ſera $=$ L.x. Et puiſque l'équation ſe change en cette proportion $1 : x ::$ L.$x :$ L.y, il eſt clair que la quatrième proportionnelle de AD, BC & DC ſera $=$ L.y; ſoit DM cette quatrième proportionnelle; donc $MN = y$, & ſi l'on fait $EF = MN$, on aura $DE = x$, $EF = y$, & le point F appartiendra à la courbe demandée.

Fig. 45.

La courbe coupera l'aſymptote au point H, où l'on a $DH = DA$; car lorſque $x = 0$, on a auſſi L.$y = 0$, c'eſt-à-dire y égal à la ſou-tangente DA. Pareillement lorſque $x = 1 = DA$, on a L.$x = 0$, & par conſéquent L.$y = 0$, c'eſt-à-dire $y = DA$; ainſi en faiſant $AG = DH$, le point G appartiendra à la courbe.

Si du point H on éleve HP ordonnée à la logarithmique, & que l'on mène POR parallèle à HD, OP ſera la moindre des ordonnées de la courbe. Car en différentiant l'équation, on a $dx + dx$L.$x =$

$\frac{dy}{y}$, ou bien $ydx + ydx\,\mathrm{L}.x = dy$; mais par la méthode des *maxima* & *minima*, dy doit être $= 0$; donc $ydx + ydx\,\mathrm{L}.x = 0$, & par conséquent $-\mathrm{L}.x = 1 = HD = DA$.

Puisque la formule générale des sou-tangentes est $\frac{ydx}{dy}$, & que l'équation de la courbe donne $dx = \frac{dy}{y.(1+\mathrm{L}.x)}$, il s'ensuit que la sou-tangente pour un point quelconque de la courbe, est $= \frac{1}{1+\mathrm{L}.x}$, & que pour le point G, où l'on a $x = AD$, & par conséquent $\mathrm{L}.x = 0$, la sou-tangente $= 1$ ou AD, qui est la sou-tangente de la logarithmique.

Si l'on veut avoir l'espace de cette courbe, on substituera dans la formule générale ydx, au lieu de y sa valeur x^x donnée par l'équation; par conséquent l'espace indéfini $HOFEADH = \int x^x dx$; intégrant cette quantité par le n°. 158, on trouvera $\int x^x dx =$
$x + \frac{xx\mathrm{L}.x}{2} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3\mathrm{L}.^2x}{6} - \frac{x^3\mathrm{L}.x}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4\mathrm{L}.^3x}{24} - \frac{x^4\mathrm{L}.^2x}{32} + \frac{x^4\mathrm{L}.x}{64} -$ &c. Si l'on fait $x = AD = 1$, on aura $\mathrm{L}.x = 0$; ainsi l'espace $HOGAD = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} +$ &c $=$
$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} +$ &c.

161. SOIT proposée la courbe de l'équation $x^y = a$, qu'on peut mettre sous cette forme $y\,\mathrm{L}.x = \mathrm{L}.a$, & qui par conséquent peut se construire par le moyen

de la logarithmique. En différentiant l'équation $y\,L.x = L.a$, on a $\frac{y\,dx}{x} + dy\,L.x = 0$ (je suppose la logarithmique qui a sa sou-tangente $= 1$), & par conséquent $dx = -\frac{x\,dy\,L.x}{y}$; ainsi la sou-tangente de la courbe est $-x\,L.x$.

162. SOIT l'équation $x^x = a^y$; on aura donc $x\,L.x = y\,L.a$, qu'on peut construire à l'ordinaire. En prenant les différences, on a $dx + dx\,L.x = dy\,L.a$; donc la sou-tangente $= \frac{x\,L.x}{1 + L.x}$.

Mais puisque $y = \frac{x\,L.x}{L.a}$, on aura l'élément de l'espace ou $y\,dx = \frac{x\,L.x.dx}{L.a}$. On intégrera par le n°. 153, & on trouvera l'espace $= \frac{2xx\,L.x - xx}{4\,L.a}$.

163. ON peut proposer d'autres questions qui appartiennent aux équations exponentielles, celle-ci par exemple : dans les équations exponentielles composées seulement de quantités connues, mais dont les exposants sont des quantités inconnues, trouver ces exposants. Que l'on se propose donc de tirer la valeur de x, de l'équation $c^x = a\,b^{x-1}$, dans laquelle a, b, c sont des quantités données. Puisque $\frac{c^x}{a} = b^{x-1}$, on aura $x\,L.c - L.a = (x - 1)L.b$, ou $x\,L.c - x\,L.b = L.a - L.b$, & par conséquent $x = \frac{L.a - L.b}{L.c - L.b}$.

164. VOICI une autre question sur les expo-

nentielles. Trouver un nombre, tel que l'on ait $x^x = a$, & $x^{x+p} = b$.

La première condition donne $x\,\mathrm{L}.x = \mathrm{L}.a$, & par conséquent $x = \frac{\mathrm{L}.a}{\mathrm{L}.x}$, ou bien $\mathrm{L}.x = \frac{\mathrm{L}.a}{x}$. Par la seconde condition, on a $(x+p)\mathrm{L}.x = \mathrm{L}.b$, & par conséquent $x = \frac{\mathrm{L}.b - p\,\mathrm{L}.x}{\mathrm{L}.x}$, ou bien $\mathrm{L}.x = \frac{\mathrm{L}.b}{x+p}$. On aura donc $\frac{\mathrm{L}.a}{x} = \frac{\mathrm{L}.b}{x+p}$, c'est-à-dire $x\,\mathrm{L}.a + p\,\mathrm{L}.a = x\,\mathrm{L}.b$, & par conséquent $x = \frac{p\,\mathrm{L}.a}{\mathrm{L}.b - \mathrm{L}.a}$. On aura encore $\frac{\mathrm{L}.a}{\mathrm{L}.x} = \frac{\mathrm{L}.b - p\,\mathrm{L}.x}{\mathrm{L}.x}$; d'où l'on tirera $\mathrm{L}.x = \frac{\mathrm{L}.b - \mathrm{L}.a}{p}$. Cela posé, il ne sera pas difficile de résoudre le Problême suivant.

165. ETANT donné un vase d'une capacité connue, rempli d'une liqueur quelconque, par exemple de vin, si l'on en tire une quantité donnée, comme une pinte, qu'ayant ensuite rempli le vase d'eau, on tire une nouvelle pinte de ce mêlange d'eau & de vin; & qu'on remplisse encore le vase d'eau, & que l'on en tire une troisième pinte, & ainsi de suite en continuant de répéter cette opération; on demande combien il faudra tirer de pintes, pour qu'il ne reste plus dans le vase qu'une quantité donnée de vin.

Soit a la capacité du vase, & b la pinte, ou en général la mesure que l'on tire à chaque coup. Au premier tirage on ôte du vase une quantité de vin exprimée par b, qu'on remplace par autant d'eau, de manière que le vin qui reste dans le vase est exprimé par $a - b$.

Au ſecond coup, on tire la quantité b de mélange, de manière que pour avoir la quantité de vin que cette ſeconde meſure ôte du vaſe, il faut faire cette proportion: comme la capacité du vaſe a eſt à la capacité de la meſure b, ainſi la quantité de vin $a-b$ qui étoit dans le vaſe, eſt au vin qui eſt dans cette ſeconde meſure, qui ſera par conſéquent $\frac{ab-bb}{a}$; ainſi la quantité de vin qui reſte dans le vaſe après ce ſecond tirage, eſt $\frac{aa-2ab+bb}{a}$, c'eſt-à-dire $\frac{(a-b)^2}{a}$. Pour le troiſième tirage, on fera cette proportion $a:b::\frac{(a-b)^2}{a}:\frac{b}{a}\times\frac{(a-b)^2}{a}$, ce quatrième terme exprime la quantité de vin emportée en tirant la troiſième meſure; & le vin qui reſte dans le vaſe eſt $\frac{(a-b)^2}{a}-\frac{b}{a}\times\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{(a-b)^3}{aa}$. De même, le vin qui y reſte après le quatrième tirage eſt $\frac{(a-b)^4}{a^3}$; & généralement ce qu'il en reſte après le nombre n de tirages, eſt $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$. Ainſi pour avoir le nombre de meſures qu'il faut tirer, afin qu'il n'y ait plus dans le vaſe que la quantité de vin exprimée par la fraction $\frac{a}{m}$, on n'aura qu'à faire cette équation $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}=\frac{a}{m}$, dans laquelle n étant l'inconnue, la queſtion dépendra du calcul des exponentielles. En paſſant des nombres aux logarithmes, l'équation devient $L.\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} = L.\frac{a}{m}$, ou bien $n L.(a-b) = L.a - L.m + (n-1) L.a$, ou bien encore $n L.(a-b) = - L.m + n L.a$; donc $n = \frac{L.m}{L.a - L.(a-b)}$, équation par laquelle on trouvera facilement le nombre cherché n, en faiſant uſage des Tables de logarithmes.

Fin de la première Partie du Calcul intégral.

SECONDE PARTIE.

De la méthode inverſe des Tangentes.

1. LA méthode de trouver les tangentes, les ſou-tangentes, les normales, ou les autres lignes analogues, à une courbe, par le moyen de l'équation donnée de cette courbe, s'appelle *la méthode directe des tangentes*; mais, ſi au contraire, on a la tangente, la ſou-tangente, la normale, &c, d'une courbe, ou ſa rectification, ou l'eſpace qu'elle renferme, & qu'on demande de retrouver la courbe; la méthode par laquelle on parviendra à ce but, s'appelle *la méthode inverſe des tangentes.*

Nous avons trouvé précédemment les expreſſions générales différentielles de la tangente, & des autres lignes analogues, aux courbes, ainſi que les expreſſions de la rectification & de la quadrature des eſpaces. Si l'on compare donc la propriété donnée de la tangente, de la rectification, de la quadrature, &c, à l'expreſſion générale reſpective ou formule générale différentielle, il naîtra de-là une équation différentielle ſoit du premier degré, ſoit des degrés ſupérieurs; & cette équation intégrée, ſoit algébriquement, ſoit au moyen des quadratures, donnera la courbe demandée, & à laquelle convient la propriété donnée.

Que l'on demande, par exemple, la courbe dont la ſou-tangente eſt double de l'abſciſſe. Ayant appellé les abſciſſes x, & les ordonnées y; puiſque la formule générale de la ſou-tangente eſt $\frac{ydx}{dy}$, on aura cette équation $\frac{ydx}{dy} = 2x$. Si l'on demande quelle eſt la courbe dont l'eſpace eſt égal aux deux tiers du rectangle des coordonnées ; puiſque l'élément des eſpaces eſt ydx, on aura cette équation : $\int ydx = \frac{2}{3}xy$, & par conſéquent $ydx = \ldots\ldots \frac{2xdy + 2ydx}{3}$. Si l'on cherche la courbe dont l'arc compté depuis le ſommet eſt toujours égal à la ſou-normale correſpondante ; puiſque l'expreſſion de l'arc eſt $\int\sqrt{[dx^2 + dy^2]}$, & celle de la ſou-normale $\frac{ydy}{dx}$, on aura $\int\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \frac{ydy}{dx}$, & par conſéquent $\sqrt{[dx + d^2y^2]} = \frac{yddy + dy^2}{dx}$, équation différentielle du ſecond degré, dans laquelle dx a été priſe pour conſtante.

2. IL eſt facile de voir que dans les équations trouvées de cette maniere, les indéterminées ſont mêlées avec leurs différentielles ; ce qui fait que les principes que nous avons expoſés juſqu'ici, ne nous permettent pas d'en tenter l'intégration, & ſur-tout lorſqu'elles contiennent des différentielles du ſecond ordre & des ordres ſupérieurs, car la premiere Partie de ce Traité n'a roulé que ſur les formules différentielles compoſées d'une ſeule indéterminée & de ſa différence. Il faut donc recourir à d'autres artifices pour intégrer ces équations, ou pour les réduire aux quadratures, ce qui s'appelle *conſtruire les*

équations différentielles des premier, second, troisième degrés, &c. Quant à celles du premier degré, on s'y prend de deux manières ; dans l'une, on tente de passer tout de suite à l'intégration ou aux quadratures sans aucune préparation préliminaire ; dans l'autre, on commence par séparer, s'il est possible, les indéterminées, afin de rendre par ce moyen les équations intégrables, soit absolument, soit par les quadratures.

J'expliquerai, tant pour l'une que pour l'autre de ces voies, différentes méthodes particulières, au moyen desquelles on viendra à bout de plusieurs équations ; mais on en rencontre un très-grand nombre qui résistent aux méthodes qu'on a découvertes jusqu'à ce jour, parce qu'elles n'ont pas toute la généralité qu'on leur desireroit.

CHAPITRE PREMIER.

De la construction des équations différentielles du premier degré, sans recourir à la séparation préliminaire des indéterminées.

3. LES formules les plus simples dans lesquelles les deux variables soient mêlées, sont ces deux-ci, $xdy+ydx$, & $\frac{ydx-xdy}{yy}$; on voit que l'intégrale de la première est xy, & celle de la seconde $\frac{x}{y}$.

Nous

Nous chercherons donc des moyens de ramener des formules plus composées à ces deux-ci, en employant seulement la simple analyse, c'est-à-dire, en ajoutant, soustrayant, & en multipliant ou divisant, &c, par des quantités convenables, & qui seront différentes dans les différens cas. Passons à des exemples.

Soit proposée l'équation $ydx = xdx - xdy$; je fais passer le dernier terme de l'autre côté du signe d'égalité, & j'ai $ydx + xdy = xdx$, & en intégrant $xy = \frac{xx}{2} \pm bb$. Soit l'équation $x^4dy^2 + 2x^3ydxdy = a^4dx^2 - xxyydx^2$, c'est-à-dire $x^4dy^2 + 2x^3ydxdy + xxyydx^2 = a^4dx^2$; je divise tout par xx, & je tire la racine quarrée, ce qui me donne $xdy + ydx = \frac{aadx}{x}$, dont l'intégrale est $xy = a\,\mathrm{L}.x \pm b$ dans la logarithmique qui a sa sou-tang. $= a$. Soit l'équation $ydx = y^3dy + yydy + xdy$, c'est-à-dire $ydx - xdy = y^3dy + yydy$; on voit bien que le premier membre seroit intégrable s'il étoit divisé par yy; faisant donc cette division, on aura.... $\frac{ydx - xdy}{yy} = ydy + dy$, & en intégrant $\frac{x}{y} = \frac{yy}{2} + y \pm b$.

4. QUE l'on propose l'équation $y^2dy = mydx + xdy$, qui ne présenteroit rien de difficile, si le coéfficient m n'y étoit pas, parce qu'alors l'intégrale du second membre seroit xy. On ne gagneroit rien en transposant le terme xdy, & écrivant $y^2dy - xdy = mydx$. Mais on observera que la différentielle de $mxy^{\frac{1}{m}}$ est $my^{\frac{1}{m}}dx + my^{\frac{1}{m}-1}dy$, laquelle ne diffère de la

quantité à intégrer $mydx+xdy$, qu'en ce qu'elle est multipliée par $y^{\frac{1}{m}-1}$. Pour rendre donc intégrable la quantité proposée $mydx+xdy$, on n'aura qu'à la multiplier par $y^{\frac{1}{m}-1}$; & pour conserver l'égalité, on multipliera aussi l'autre membre de l'équation: on aura $y^{r+\frac{1}{m}-1}dy = my^{\frac{1}{m}}dx + xy^{\frac{1}{m}-1}dy$; & en intégrant $\int y^{r+\frac{1}{m}-1}dy = mxy^{\frac{1}{m}} \pm b$.

Soit la même équation, mais avec des coéfficients différents à chacun des deux derniers termes, c'est-à-dire $y^r dy = mydx + nxdy$. Le second membre n'est pas intégrable; j'observe cependant que la différence de $mxy^{\frac{n}{m}}$ est $my^{\frac{n}{m}}dx + nxy^{\frac{n}{m}-1}dy$, & qu'ainsi il deviendra intégrable, si je multiplie l'équation par $y^{\frac{n}{m}-1}$; ce qui donne $y^{r+\frac{n}{m}-1}dy = my^{\frac{n}{m}}dx + nxy^{\frac{n}{m}-1}dy$; par conséquent l'intégrale est.... $\int y^{r+\frac{n}{m}-1}dy = mxy^{\frac{n}{m}} \pm b$.

5. LA différence de $x^n y$ est $x^n dy + nyx^{n-1}dx$. Cela posé, soit proposé d'intégrer l'équation $y^r dy = x^n dy + yx^{n-1}dx$; si le dernier terme avoit le coéfficient n, l'intégrale du second membre seroit $x^n y$. Or, j'observe que la différence de $x^n y^n$ est $nx^n y^{n-1}dy + ny^n x^{n-1}dx$; donc en multipliant l'équation par ny^{n-1}, elle deviendra $ny^{r+n-1}dy = nx^n y^{n-1}dy + ny^n x^{n-1}dx$; le dernier membre sera intégrable, & l'intégrale sera $\int ny^{r+n-1}dy = x^n y^n \pm b$.

Mais si le dernier terme avoit un autre coéfficient que n, ou plus généralement si les deux derniers termes étoient affectés de coéfficients différents; si, par exemple, l'équation étoit $y^r dy = cx^n dy + eyx^{n-1}dx$; j'observe alors que la différence de $\frac{e}{n}x^n y^{\frac{cn}{e}}$ est $cx^n y^{\frac{cn}{e}-1}dy + ey^{\frac{cn}{e}}x^{n-1}dx$; donc en multipliant l'équation par $y^{\frac{cn}{e}-1}$, elle deviendra intégrable; on aura $y^{r+\frac{cn}{e}-1}dy = cx^n y^{\frac{cn}{e}-1}dy + ey^{\frac{cn}{e}}x^{n-1}dx$, & l'intégrale sera $\int y^{r+\frac{cn}{e}-1}dy = \frac{e}{n}x^n y^{\frac{cn}{e}} \pm b$. Si l'on fait $r=1$, $c=3$, $n=1$, $e=1$, c'est-à-dire si l'équation est $ydy = 3xdy + ydx$, l'intégrale sera $\frac{y^4}{4} = xy^3$. Si l'on fait $c=2$, $e=3$, $n=1$, $r=1$, ou si l'équation est $ydy = 2xdy + 3ydx$, l'intégrale sera $\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$. Si $c=2$, $e=2$, $n=3$, $r=3$, ou si l'équation est $y^3 dy = 2x^3dy + 2yxxdx$, l'intégrale sera $\frac{y^6}{6} = \frac{2}{3}x^3y^3$.

Si l'équation étoit $y^{1-\frac{cn}{e}}x^r dx = cx^n dy + eyx^{n-1}dx$, il est clair qu'elle seroit intégrable, puisqu'en la multipliant par $y^{\frac{cn}{e}-1}$, on auroit $x^r dx = cx^n y^{\frac{cn}{e}-1}dy + ey^{\frac{cn}{e}}x^{n-1}dx$; or on a vu que l'intégrale du second membre est $\frac{e}{n}x^n y^{\frac{cn}{e}}$. Donc, &c.

6. Soit maintenant l'équation $y^r dy = \ldots\ldots$

$\frac{2xdy - ydx}{xx}$. Si ce n'étoit le coéfficient 2, l'intégrale du second membre feroit $\frac{y}{x}$; & c'eſt à pure perte qu'on tranſpoſeroit le terme xdy, & qu'on écriroit $y^r dy - \frac{xdy}{xx} = \frac{xdy - ydx}{xx}$. Mais j'obſerverai que la différence de $\frac{yy}{x}$ eſt $\frac{2xydy - yydx}{xx}$, & qu'ainſi en multipliant par y, l'équation deviendra $y^{r+1}dy = \frac{2xydy - yydx}{xx}$, & ſera intégrable; car ſon intégrale eſt $\int y^{r+1}dy = \frac{yy}{x} \pm b$. Plus généralement, ſi l'on ſuppoſe qu'il y ait un coéfficient quelconque n, & que l'équation ſoit par conſéquent $y^r dy = \frac{nxdy - ydx}{xx}$; on fera attention que la différence de $\frac{y^n}{x}$ eſt $\frac{nxy^{n-1}dy - y^n dx}{xx}$; ſi l'on multiplie donc l'équation par y^{n-1}, on aura $y^{r+n-1}dy = \frac{nxy^{n-1}dy - y^n dx}{xx}$; & en intégrant $\int y^{r+n-1}dy = \frac{y^n}{x} \pm b$.

Bien plus, donnons un coéfficient différent à chacun des deux derniers termes, & ſuppoſons que l'équation ſoit $y^r dy = \frac{nxdy - mydx}{xx}$. J'obſerve que la différence de $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$ eſt $\frac{nxy^{\frac{n}{m}-1}dy - my^{\frac{n}{m}}dx}{xx}$; on rendra l'équation intégrable, en la multipliant par $y^{\frac{n}{m}-1}$; ce qui donnera $y^{r+\frac{n}{m}-1}dy = \frac{nxy^{\frac{n}{m}-1}dy - my^{\frac{n}{m}}dx}{xx}$, dont l'intégrale est $\int y^{r+\frac{n}{m}-1}dy = \frac{my^{\frac{n}{m}}}{x} \pm b$.

Si l'équation étoit $y^{1-\frac{n}{m}}x^{r}dx = \frac{nxdy - mydx}{xx}$, elle feroit encore intégrable, puisqu'en la multipliant par $y^{\frac{n}{m}-1}$, on auroit $x^{r}dx = \ldots\ldots\ldots \frac{nxy^{\frac{n}{m}-1}dy - my^{\frac{n}{m}}dx}{xx}$; & que l'intégrale du second membre, comme on fait, est $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$.

Proposons-nous maintenant les mêmes équations, mais sans dénominateur. Soit, par exemple, $y^{r}dy = nxdy - ydx$. Pour intégrer la seconde partie de l'équation, il faudroit la multiplier par y^{n-1}, & la diviser par xx; mais comme il faudroit faire les mêmes opérations sur la première partie, & qu'après ces changements il ne feroit pas possible de l'intégrer; on changera les signes de l'équation, & elle deviendra $-y^{r}dy = ydx - nxdy$. Or je remarque que la différence de $\frac{x}{y^{n}}$ est $\frac{y^{n}dx - nxy^{n-1}dy}{y^{2n}}$; ainsi on rendra l'équation intégrable, en la multipliant par y^{n-1}, & la divisant par y^{2n}; elle deviendra par ce moyen $-\frac{y^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{y^n dx - nxy^{n-1}dy}{y^{2n}}$, dont l'intégrale est ......

$\int -\frac{y^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{x}{y^n} \pm b.$

Si les deux derniers termes de l'équation sont affectés d'un coëfficient, & que l'on ait $y^r dy = nxdy - mydx$, ou en changeant les signes $-y^r dy = mydx - nxdy$; on observera que la différence de $\frac{x}{my^{\frac{n}{m}}}$ est $\frac{my^{\frac{n}{m}}dx - nxy^{\frac{n}{m}-1}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$; si l'on multiplie donc l'équation par $y^{\frac{n}{m}-1}$, & qu'on la divise par $mmy^{\frac{2n}{m}}$, elle deviendra $-\frac{y^{r+\frac{n}{m}-1}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}} = \frac{my^{\frac{n}{m}}dx - nxy^{\frac{n}{m}-1}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$; & on trouvera pour son intégrale $\int -\frac{y^{r+\frac{n}{m}-1}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}} = \frac{x}{my^{\frac{n}{m}}} \pm b.$

7. ON demande d'intégrer l'équation $y^r dy = x^n dy - nyx^{n-1}dx$. En changeant les signes, on aura $-y^r dy = nyx^{n-1}dx - x^n dy$, & l'on observera que la différence de $\frac{x^n}{y}$ est .... $\frac{nyx^{n-1}dx - x^n dy}{yy}$, & qu'ainsi en divisant l'équation par yy, elle deviendra intégrable, & son intégrale sera $\int -y^{r-2}dy = \frac{x^n}{y} \pm b.$

Mais si le coéfficient n ne s'y trouvoit pas, & que l'équation fût $y^r dy = x^n dy - yx^{n-1}dx$, ou en changeant les signes, $-y^r dy = yx^{n-1}dx - x^n dy$; on fera attention que la différence de $\frac{x^n}{y^n}$ est $\frac{ny^n x^{n-1}dx - nx^n y^{n-1}dy}{y^{2n}}$; qu'ainsi en multipliant l'équation par ny^{n-1}, & la divisant par y^{2n}, elle deviendra $-\frac{ny^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{ny^n x^{n-1}dx - nx^n y^{n-1}dy}{y^{2n}}$, dont l'intégrale est $\int -\frac{ny^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{x^n}{y^n} \pm b$.

S'il y avoit un coéfficient autre que n, ou mieux encore si les deux derniers termes ont chacun leur coéfficient, par exemple, si l'équation est $y^r dy = cx^n dy - eyx^{n-1}dx$, ou en changeant les signes $-y^r dy = eyx^{n-1}dx - cx^n dy$; on remarquera que la différence de $\frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}}$ est.......................

$\frac{ney^{\frac{nc}{e}}x^{n-1}dx - ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$; que par conséquent on rendra l'équation intégrable, en la multipliant par $ny^{\frac{nc}{e}-1}$, & la divisant par $ey^{\frac{2nc}{e}}$; son intégrale sera $\int -\frac{ny^{r+\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} = \frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}} \pm b$.

Mais si l'équation avoit été $y^{1-\frac{nc}{e}}x^r dx = cx^n dy - eyx^{n-1}dx$; je remarque, sans changer

les signes, que la différence de $\frac{ey^{\frac{ne}{e}}}{x^n}$ est ....
$\frac{nex^n y^{\frac{ne}{e}-1}dy - ney^{\frac{ne}{e}}x^{n-1}dx}{x^{2n}}$, & qu'ainsi en multipliant l'équation par $ny^{\frac{ne}{e}-1}$, & la divisant par x^{2n}, elle deviendra $\frac{nx^t dx}{x^{2n}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{nex^n y^{\frac{ne}{e}-1}dy - ney^{\frac{ne}{e}}x^{n-1}dx}{x^{2n}}$, dont l'intégrale est $\int\frac{nx^t dx}{x^{2n}} = ey^{\frac{ne}{e}} \pm b$.

8. On a vu dans la partie précédente, que toutes les fois que le numérateur d'une fraction, qui ne contient qu'une seule indéterminée & des constantes, est la différence exacte du dénominateur, ou est proportionnel à cette différence, l'intégrale de cette fraction est le logarithme du dénominateur, ou est proportionnel à ce logarithme. Cela a encore lieu lorsqu'une fraction contient deux indéterminées mêlées comme on voudra avec leurs différences. Ainsi l'intégrale de l'équation $\frac{dx+dy}{x+y} = dz$ (supposant que dz est donné d'une manière quelconque par x ou par y) est $L.(x+y) = z \pm b$. Celle de $\frac{dx+dy}{2x+2y} = dz$ est $L.\sqrt{[x+y]} = z + b$. Celle de ......
$\frac{4xdx - 4ydy}{xx-yy} = dz$ est $2L.(xx-yy) = z \pm b$.
Celle de $\frac{xdy+ydx-2ydy}{2xy-2yy} = dz$ est $L.\sqrt{[xy-yy]} =$

$z \pm b$. Et généralement l'intégrale de ....
$$\frac{my^n x^{m-1}dx + nx^m y^{n-1}dy - (m-n)y^{m+n-1}dy}{r.(x^m y^n - y^{m+n})} =$$
dz est $L. \sqrt[r]{[x^m y^n - y^{m+n}]} = z \pm b$; & de même pour toute autre équation qui aura les conditions dont on a parlé.

9. Il y a des équations qui n'ont pas les conditions nécessaires, mais à qui on peut les donner au moyen des opérations ordinaires de l'Algébre. Soit l'équation $\frac{xdy + ydx}{x} = -dy$; son premier membre n'a pas les conditions requises; cependant il les aura, si l'on divise l'équation par y, on aura alors $\frac{xdy + ydx}{xy} = -\frac{dy}{y}$, & en intégrant, $L.xy = L.y^{-1} \pm L.b$.

Soit l'équation $axdy + 2aydx = xydy$; on la divisera par axy; ce qui donnera $\frac{xdy + 2ydx}{xy} = \frac{dy}{a}$, équation qui seroit intégrable, si ce n'étoit le coëfficient 2 qui est au second terme; on soustraira donc $\frac{ydx}{xy}$ de chaque membre; & on aura $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{a} - \frac{ydx}{xy}$, c'est-à-dire $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{a} - \frac{dx}{x}$, dont l'intégrale est $L.xy = \frac{y}{a} - L.x \pm L.b$.

Soit l'équation $yxdx = (xxydy + y^3dy)\sqrt{y} - yydy$; en la divisant par y, on aura $xdx = (xxdy + yydy)\sqrt{y} - ydy$, ou bien $xdx + ydy = (xxdy + yydy)\sqrt{y}$; & divisant encore par $xx + yy$,

$\frac{x\,dx+y\,dy}{xx+yy} = dy\,.\sqrt{y}$, dont l'intégrale est $L.\sqrt{[xx+yy]} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \pm b$.

10. On a vû encore dans la Partie précédente (n°. 31 & 32) que si une formule qui n'a qu'une seule variable est le produit d'une quantité complexe quelconque, positive ou négative, entière ou rompue, par la différence précise des termes de cette quantité, ou par une quantité multiple ou sous-multiple de cette différence ; on auroit pour intégrale la même quantité avec l'exposant augmenté d'une unité, en divisant cependant la quantité par l'exposant ainsi augmenté, ou une quantité multiple ou sous-multiple de cette intégrale. Cette regle aura encore lieu, quand les formules seront composées de deux variables & de leurs différences, mêlées comme on voudra, pourvu qu'elles ayent la condition indiquée.

Ainsi l'intégrale de $(dx+dy)\sqrt{[x+y]} = dz$ (supposant toujours que dz soit donné d'une manière quelconque en x ou en y) est $\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}} = z \pm b$. L'intégrale de $(\frac{3}{2}dx + \frac{3}{2}dy)\sqrt{[x+y]} = dz$ est $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}} = z \pm b$. Celle de $\frac{2a\,dx+2b\,dy}{\sqrt{[ax+by]}} = dz$ est $4\sqrt{[ax+by]} = z \pm b$. Celle de ...... $\frac{p^2dq+2qp\,dp+2pq\,dq+q^2dp}{2\sqrt{[p^2q+q^2p]}} = dz$, est ... $\sqrt{[p^2q+q^2p]} = z \pm b$. Celle de $(x\,dy+y\,dx+2y\,dy)\,b\,.(xy+yy)^{\frac{m}{n}} = dz$ est $\frac{nb}{m+n}(xy+yy)^{\frac{m+n}{n}} = z \pm b$. Celle de $\frac{x\,dy+y\,dx+2y\,dy}{b.(xy+yy)^{\frac{m}{n}}} =$

dz eſt $\frac{m.(xy+yy)^{\frac{m-n}{m}}}{(m-n).b} = z \pm b$; & ainſi des autres.

Il arrive auſſi que les équations ont beſoin d'être préparées; qu'il ſoit queſtion, par exemple, de l'équation $xxdx + xydy + yydx = dz$ (dz étant donné en x d'une manière quelconque). Je multiplie l'équation par x, & j'ai $x^3dx + xxydy + yyxdx = xdz$, ou bien $xdx(xx+yy) + ydy.xx = xdz$, qui n'a pas la condition néceſſaire; mais je vois qu'elle l'auroit, ſi ydy, qui eſt déja multiplié par xx, étoit encore multiplié par yy; j'ajoute donc le terme y^3dy à l'un & à l'autre membre, & j'ai $xdx(xx+yy) + ydy.xx + y^3dy = xdz + y^3dy$, c'eſt-à-dire $(xdx+ydy).(xx+yy) = xdz + y^3dy$, qui eſt intégrable, & dont l'intégrale eſt $\frac{(xx+yy)^2}{4} = \frac{y^4}{4} \pm b + \int xdz$.

Mais il n'eſt pas facile de connoître les quantités qu'il faut ajouter ou ſouſtraire, ou les altérations qu'il faut faire ſubir aux équations, afin de les rendre intégrables par cette méthode; ſi bien que lorſque les équations ſont un peu compoſées, on peut dire que c'eſt un haſard ou un bonheur, d'arriver au but par cette voie. Ainſi, au défaut de cette méthode, il faudra avoir recours à la ſéparation des indéterminées.

CHAPITRE II.

De la construction des équations différentielles du premier degré, par le moyen de la séparation des indéterminées.

11. LA séparation des indéterminées réussit quelquefois, mais trop rarement avec les premières opérations de l'Algèbre. S'il s'agissoit, par exemple, de l'équation $xxdx^2 + xydxdy = aady^2$; on voit sans peine que son premier membre seroit un quarré parfait, si on y ajoutoit la quantité $\frac{yydy^2}{4}$. Ajoutant donc ce terme de part & d'autre, l'équation devient $xxdx^2 + xydxdy + \frac{yydy^2}{4} = aady^2 + \frac{yydy^2}{4}$; on tirera la racine quarrée, ce qui donnera $xdx + \frac{ydy}{2} = dy\sqrt{\left[\frac{yy}{4} + aa\right]}$, où les variables sont séparées; & en intégrant, $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} = \int dy\sqrt{\left[aa + \frac{yy}{4}\right]} \pm b$. L'intégrale du second membre dépend de la quadrature de l'hyperbole.

12. LE plus souvent il sera bon de se servir des substitutions. Soit l'équation $aadx = xxdy +$

$2xydy+yydy$. Que l'on suppose $x+y=z$ (z étant une nouvelle indéterminée) & par conséquent $dx+dy=dz$, & $xx+2xy+yy=zz$. Faisant donc ces substitutions, on aura $aadz - aady=zzdy$, c'est-à dire $\frac{aadz}{aa+zz}=dy$, équation où les indéterminées sont séparées. L'intégrale du premier membre dépend de la rectification de la circonférence.

Soit proposée l'équation $(xdy+ydx)\ldots\ldots \sqrt{[a^4-xxyy]}=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{[xx+yy]}.\sqrt{[xx+yy]}}$. Je remarque pour le premier membre que l'intégrale de $xdy+ydx$ est xy, & que le quarré de cette intégrale se trouve précisément dans la quantité $\sqrt{[a^4-xxyy]}$; ce qui m'indique qu'en faisant $xy=z$, les indéterminées se sépareront dans ce premier membre, qui deviendra $dz\sqrt{[a^4-zz]}$. Je remarque de plus pour le second membre, que l'intégrale de $xdx+ydy$ est $\frac{xx+yy}{2}$, & que les quantités du dénominateur sont analogues à cette intégrale; par où je vois que la substitution de $xx+yy=2p$ séparera les indéterminées du second membre. En effet, au moyen de ces deux substitutions, l'équation devient

$$dz\sqrt{[a^4-zz]}=\frac{dp}{\sqrt{2p}.\sqrt{2p}}.$$

Soit l'équation $\frac{2xdy-2ydx}{(x-y)^2}=dz$, ($dz$ étant donnée comme on voudra par x ou par y). Si l'on divisoit $xdy-ydx$ par xx, son intégrale alors seroit $\frac{y}{x}$; ainsi l'on supposera $\frac{y}{x}=\frac{p}{a}$, & par conséquent $\frac{xdy-ydx}{xx}=\frac{dp}{a}$, & $2xdy-2ydx=\frac{2xxdp}{a}$. Cette supposition donnera donc ...... $\frac{2xxdp}{a.(xx-2xy+yy)}=dz$; divisant le numérateur & le dénominateur de la fraction par xx, on aura $\frac{2dp}{a\left(1-\frac{2y}{x}+\frac{yy}{xx}\right)}=dz$; mais $\frac{y}{x}=\frac{p}{a}$, & $\frac{yy}{xx}=\frac{pp}{aa}$; donc $\frac{2adp}{aa-2ap+pp}=dz$; alors l'intégrale de cette équation est algébrique, & je passerai en effet à l'intégration. Je supposerai pour cela $a-p=q$, & l'équation deviendra $-\frac{2adq}{qq}=dz$, & en intégrant $\frac{2a}{q}\pm b=z$. Mais $q=a-p$, & $p=\frac{ay}{x}$, ainsi $q=\frac{ax-ay}{x}$; en remettant cette valeur de q, on trouve $\frac{2x}{x-y}\pm b=z$, qui est la courbe de l'équation différentielle proposée. Si au lieu de supposer $a-p=q$, on avoit supposé $p-a=q$, on auroit trouvé une autre intégrale différente de celle-ci seulement par les signes.

13. L'ÉQUATION précédente me donne occasion de faire une remarque importante. Non seulement les courbes changent quelquefois de nature par l'intégration faite, ou simplement, ou avec l'addition de la constante, comme on l'a remarqué dès l'origine des quantités infinitésimales; mais on rencontre quelquefois des formules qui ont plusieurs

intégrales assez différentes, & qui fournissent des courbes de différent genre, même sans qu'on ajoute de constante; ce qui mérite quelqu'attention.

En supposant $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, on a trouvé que l'intégrale de l'équation $\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = dz$, sans ajouter de constante, étoit $\frac{2x}{x-y} = z$. Maintenant je vais supposer $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$, & tenter l'intégration; je trouve donc $\frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{dp}{a}$, & par conséquent $2xdy - 2ydx = -\frac{2yydp}{a}$; & la substitution me donne $\frac{-2dp}{a.\left(\frac{xx}{yy} - \frac{2x}{y} + 1\right)} = dz$. Mais $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$; donc $\frac{-2adp}{pp - 2ap + aa} = dz$. Pour intégrer, faisant $p - a = q$, j'ai $-\frac{2adq}{qq} = dz$; en intégrant $\frac{2a}{q} = z$, & en remettant les valeurs, $\frac{2y}{x-y} = z$, intégrale qui diffère de la première.

L'équation $\frac{x+y}{x-y} = z$ est encore une intégrale de l'équation proposée, différente des deux précédentes. Pour s'en assurer, on n'a qu'à différentier $\frac{x+y}{x-y} = z$, on trouvera ....
$\frac{xdx - ydx + xdy - ydy - xdx - ydx + xdy + ydy}{(x-y)^2} = dz$,

& en effaçant les termes qui se détruisent ....
$\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = dz$, qui est l'équation qu'on s'étoit proposé d'intégrer.

Supposons que $dz = dy$, & qu'ainsi l'équation proposée soit $\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = dy$. En se servant de la seconde intégrale qui a été trouvée, on a l'équation $\frac{2y}{x-y} = y$, & par conséquent $2 + y = x$, qui est un lieu au triangle. Si on se sert de la première ou de la troisième intégrale, & que l'on fasse $\frac{2x}{x-y} = y$, ou bien $\frac{x+y}{x-y} = y$, la courbe est du second degré.

Généralement, si l'équation différentielle est $\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = y^m dy$; en faisant usage de la première, ou de la troisième intégration, on aura une courbe du degré $m+2$; si l'on employe la seconde, la courbe sera d'un degré immédiatement inférieur.

14. MAIS outre que la méthode des substitutions n'est pas universelle, la grande difficulté qu'on rencontre en l'employant, c'est la peine & presque l'impossibilité qu'il y a de savoir la substitution qu'il faudroit faire, pour ne pas opérer au hasard, & pour éviter beaucoup de tentatives inutiles. On procédera cependant avec une entière certitude du succès, dans les équations où la somme des exposants de l'inconnue est la même dans chaque terme, & il n'importe pas que ces équations soient affectées par des radicaux, des fractions, des séries, des coëfficients. La substi-

tution

tution qu'il faut faire, consiste à supposer une des variables égale au produit de l'autre par une nouvelle variable; par exemple, si l'équation est donnée par x & par y, on sera $x = \frac{yz}{a}$, ou bien $y = \frac{xz}{a}$, (la lettre a du dénominateur est une constante quelconque à volonté); & par conséquent $dy = \dots$ $\frac{xdz + zdx}{a}$; les substitutions faites, on aura une autre équation qui sera divisible par autant de dimensions de l'indéterminée x, qu'il y avoit d'unités dans la somme des exposants de x & y à chaque terme de l'équation proposée; au moyen de cette division, la lettre x n'aura pas plus d'une dimension, & sera toujours multipliée par dz; ainsi $\frac{dx}{x}$ sera un des membres de l'équation, & l'autre ne contiendra que dz & des fonctions de z; par conséquent les indéterminées seront séparées. Si nous appellons donc A la somme des termes qui sont multipliés par dy, & B, la somme de ceux qui sont multipliés par dx, l'équation sera $Ady = Bdx$; on sent que A & B sont données par les deux variables x & y mêlées sans ordre. Maintenant, puisque le nombre des dimensions de x & y prises ensemble est le même dans tous les termes, si on met $\frac{xz}{a}$ au lieu de y, il arrivera de-là que dans tous les termes des quantités A & B, la lettre x aura autant de dimensions, qu'en avoient auparavant x & y à elles deux; ainsi en supposant que n soit le nombre de ces dimensions, l'équation sera divisible par x^n, & il n'y restera que z, a, dy, dx. Supposons qu'après la substitution de $\frac{xz}{a}$ & la division par x^n, tout ce qui reste de la quantité A soit C, & tout ce qui reste de la quantité B, soit D; l'équation sera $Cdy = Ddx$ (C & D sont données en z & en constantes); mais $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$; l'équation sera donc... $\frac{Cxdz + Czdx}{a} = Ddx$, c'est-à-dire $Dadx - Czdx = Cxdz$, & par conséquent $\frac{dx}{x} = \frac{Cdz}{Da - Cz}$; ainsi les indéterminées sont séparées, & l'équation peut être construite, du moins par les quadratures.

Il est indifférent de supposer $y = \frac{zx}{a}$, ou $x = \frac{yz}{a}$, puisque de l'une & de l'autre manière, on séparera les variables; il peut se faire cependant que l'une de ces substitutions ait des avantages sur l'autre, & qu'elle donne une équation plus simple, & qui ait moins de termes, ou dont la construction soit plus facile & plus élégante. On fera bien par conséquent de les éprouver toutes les deux, & de s'attacher à celle qui mènera plus facilement au but.

EXEMPLE I.

SOIT l'équation $xxdy = yydx + xydx$. Je suppose $y = \frac{xz}{a}$, & $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$; les substitutions me donnent $\frac{x^3dz + zxxdx}{a} = \frac{zxzzdx}{aa} + \frac{zxxdx}{a}$; je divise tout par xx, & je réduis au même dénominateur; d'où il résulte $axdz + azdx =$

$zzdx + azdx$; c'est-à-dire $axdz = zzdx$, & par conséquent $\frac{dx}{ax} = \frac{dz}{zz}$.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $xxdy = yydx + xxdx$. En supposant $y = \frac{xz}{a}$, & par conséquent $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$, on aura $\frac{x^2dz + zxxdx}{a} = \frac{zzxxdx}{aa} + xxdx$; on réduira au même dénominateur, & on divisera par xx, ce qui donnera $zzdx - azdx + aadx = axdz$, & par conséquent $\frac{dx}{x} = \frac{adz}{zz - az + aa}$. Si l'on fait l'autre substitution de $x = \frac{yp}{a}$, & $dx = \frac{ydp + pdy}{a}$, on trouvera $\frac{ppyydy}{aa} = \frac{y^3dp + pyydy}{a} + \ldots\ldots \frac{y^3ppdp + p^3yydy}{a^3}$, c'est-à-dire, $appdy - aapdy - p^3dy = aaydp + yppdp$, & par conséquent $\frac{dy}{y} = \frac{aadp + ppdp}{app - aap - p^3}$.

EXEMPLE III.

Soit l'équation $dy\sqrt{[xx + yy]} = ydx$. En supposant $y = \frac{xz}{a}$, la substitution donnera...... $\frac{xdz + zdx}{a} \times \frac{\sqrt{[xxzz + aaxx]}}{a} = \frac{zxdx}{a}$, ou bien $xdz\sqrt{[aa + zz]} = azdx - zdx\sqrt{[aa + zz]}$, &

par conſéquent $\frac{dz\sqrt{[aa+zz]}}{az-z\sqrt{[aa+zz]}}=\frac{dx}{x}$. Si on avoit fait $x=\frac{yp}{a}$, on auroit trouvé cette équation $\frac{dy}{y}=\frac{dp}{\sqrt{[aa+pp]}-p}$.

15. IL arrive que dans des équations qui ont la condition dont nous avons parlé plus haut, les différences dx & dy ont elles-mêmes plus d'une dimenſion. Dans ces cas, la ſubſtitution de $\frac{xz}{a}$ au lieu de y (en ne touchant pas pour le moment à dy) rendra tous les termes de l'équation diviſibles par la même puiſſance de x; & il ne reſtera dans l'équation que z, dx, dy, les conſtantes données & celles qu'on a introduites, mais x ne s'y trouvera plus. Et puiſqu'il faudroit mettre $\frac{zdx+xdz}{a}$ au lieu de dy, ce qui introduiroit de nouveau la lettre x, on ſuppoſera $\frac{xdz}{a}=dt$, & on mettra $\frac{zdx+adt}{a}$ au lieu de dy; par ce moyen l'équation ſera ſans x, & contiendra ſeulement z, dt, dx, les conſtantes données & celles qu'on a introduites. On ſuppoſera encore que $a:u::dx:dt$, & on ſubſtituera $\frac{udx}{a}$, au lieu de dt; il en réſultera une équation délivrée des quantités différentielles, & qui appartiendra à une courbe algébrique exprimée ſeulement par u, z & des conſtantes. Cette courbe donnera les valeurs réelles de u, que je vais déſigner par A, B, C, &c, c'eſt-à-dire que je ſuppoſe $u=A$, $u=B$, $u=C$, &c, & que A, B, C ſoient données en z & en conſtantes;

on aura donc $dx = \frac{adt}{A}$, $dx = \frac{adt}{B}$, $dx = \frac{adt}{C}$, &c; or, puisque $dt = \frac{xdz}{a}$, on aura aussi $dx = \frac{xdz}{A}$, $dx = \frac{xdz}{B}$, $dx = \frac{xdz}{C}$, &c; d'où l'on tirera enfin $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$, &c. Ainsi les logarithmes de x seront directement proportionnels aux espaces des courbes, qui ayant les z pour abscisses, auront leurs ordonnées réciproquement proportionnelles aux valeurs de u précédemment trouvées; & il y aura autant de courbes qui satisferont à la question, qu'on aura trouvé de valeurs différentes & réelles de u. Nous remarquerons même que l'addition de la constante, lorsqu'on intégre les équations $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$, &c, peut diversifier encore ces courbes, & souvent même en doubler le nombre. On aura donc L. x égal à l'espace de la courbe, qui a pour abscisse z, & pour ordonnée $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, &c, c'est-à-dire, L. x, égal à l'intégrale de $\frac{dz}{A}$, $\frac{dz}{B}$, &c; ainsi prenant z arbitrairement, le log. de x sera donné, & par conséquent aussi la quantité x correspondante, qui est ordonnée dans la logarithmique. Maintenant puisque x est donnée, y le sera aussi par l'équation $y = \frac{xz}{a}$; c'est-à-dire qu'on aura les deux coordonnées de l'équation différentielle proposée ou de la courbe qu'on cherche.

On aura différents points de cette même courbe cherchée, en donnant différentes valeurs à z.

Pour appliquer cette regle à un exemple, proposons-nous l'équation $xxdy^2 + xydxdy = xxdx^2$. Substituant donc $\frac{xz}{a}$ à y, nous aurons $axxdy^2 + xxzdxdy = axxdx^2$, & en divisant par xx, $ady^2 + zdxdy = adx^2$, où x ne paroît plus. Mais comme en mettant au lieu de dy sa valeur.... $\frac{zdx + xdz}{a}$, x s'introduiroit de nouveau dans l'équation, nous ferons $\frac{xdz}{a} = dt$, & par conséquent $dy = \frac{zdx + adt}{a}$, & l'équation deviendra.....
$$\frac{zzdx^2 + 2azdxdt + aadt^2}{a} + \frac{zzdx^2 + azdxdt}{a} =$$
adx^2, ou bien $2zzdx^2 + 3azxdt + aadt^2 = aadx^2$, où il n'entre que z, dx, dt avec leurs fonctions. Supposons de nouveau $dt = \frac{udx}{a}$; la substitution nous conduira à cette équation purement algébrique $2zz + 3zu + uu = aa$, d'où nous pourrons tirer les valeurs de u données algébriquement en z & en constantes. Mais $dt = \frac{udx}{a} = \frac{xdz}{a}$; donc $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{u}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées, puisque u est donné en z. On décrira donc les courbes qui ayent z pour abscisses, & dont les ordonnées soient réciproquement proportionnelles aux valeurs de u, ce qui donnera x; &

on trouvera y par la ſubſtitution de $y = \frac{xz}{a}$.

16. CEPENDANT ſans faire uſage de cette méthode, on pourroit ramener pluſieurs équations de cette eſpéce, & nommément celle qui vient de nous ſervir d'exemple, à la méthode du n°. 14. En effet, ſi l'on ajoute le quarré $\frac{1}{4}yydx^2$ à chacun des membres de la même équation $xxdy^2 + xydxdy = xxdx^2$, elle deviendra $xxdy^2 + xydxdy + \frac{yydx^2}{4} = xxdx^2 + \frac{yydx^2}{4}$, & en tirant la racine quarrée $xdy + \frac{1}{2}ydx = dx\sqrt{\left[xx + \frac{yy}{4}\right]}$, qui eſt dans le cas du n°. 14. Ou bien encore en tranſpoſant le terme $xydxdy$, & ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4}yydy^2$, on auroit $xxdy^2 + \frac{1}{4}yydy^2 = xxdx^2 - xydxdy + \frac{1}{4}yydy^2$, dont les racines donnent $dy\sqrt{[xx + \frac{1}{4}yy]} = xdx - \frac{ydy}{2}$, qui tombe dans le même cas.

17. ON peut non-ſeulement conſtruire les équations, lorque les différences des variables ſont mêlées entr'elles, & élevées à une puiſſance quelconque, pourvu que (n°. 15) la ſomme des expoſants de ces variables ſoit la même dans chaque terme, mais on conſtruira encore en général toutes celles où l'une des deux variables, ſoit x, ſoit y, manquera. On ſuppoſera pour cela $dx = \frac{zdy}{a}$, ſi c'eſt x qui manque; & $dy = \frac{zdx}{a}$, ſi c'eſt y, (z étant une nouvelle indéterminée, & a une conſtante quelconque). Car

par l'une ou l'autre de ces suppositions, par exemple, par celle de $\frac{z\,dy}{a} = dx$, l'équation proposée, comme il est évident, se changera en une autre, qui sera divisible par une puissance de dy, telle que l'équation n'aura plus que des quantités finies. On aura par conséquent z donnée en y & en constantes; & la relation de y à z sera exprimée par une équation ou une courbe absolument algébrique. Les variables seront donc séparées, si dans l'équation $\frac{z\,dy}{a} = dx$, on met la valeur de y que donnera cette équation algébrique.

EXEMPLE I.

Soit l'équation $y\,dy^3\,dx = a\,dx^4 + 2a\,dx^2\,dy^2 + a\,dy^4$. On supposera $dx = \frac{z\,dy}{a}$, ce qui donnera l'équation $\frac{zy\,dy^4}{a} = \frac{z^4\,dy^4}{a^3} + \frac{2zz\,dy^4}{a} + a\,dy^4$, ou bien $\frac{zy}{a} = \frac{z^4}{a^3} + \frac{2zz}{a} + a$, & par conséquent $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, & $dy = \frac{3zz\,dz}{aa} + 2\,dz - \frac{aa\,dz}{zz}$; donc $\frac{z\,dy}{a} = dx = \frac{3z^3\,dz}{a^3} + \frac{2z\,dz}{a} - \frac{a\,dz}{z}$. Si l'on passe à l'intégration, & qu'on se serve de la logarithmique dont la soutangente est a, on aura $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - L.z$. Ensuite on trouvera les valeurs des deux coordonnées x, y de l'équation différentielle proposée, par le moyen de deux courbes qui auront l'indéterminée commune z. Voici comment on procédera pour la construction.

Prenant QE (Fig. 1) pour axe des abscisses, que l'on décrive la courbe DAH de l'équation $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, & la courbe RIK de l'équation $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - L.z$; les $EH = y$, & les $EK = x$, seront les coordonnées de la courbe différentielle proposée; & pour la construire, ayant fait CM parallèle à EK, on prolongera KM jusqu'en N, de manière qu'on ait toujours $MN = EH$; & NBN sera la courbe cherchée. Fig. 1.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $y^3 dx^5 + aay\,dy\,dx^4 = a^3 dy^5$. On fera $dx = \frac{z\,dy}{a}$; & on aura $\frac{z^5 y^3 dy^5}{a^5} + \frac{aaz^4 y\,dy^5}{a^4} = a^3 dy^5$, ou bien $z^5 y^3 + a^3 z^4 y = a^8$. z sera donc donnée en y & en constantes; & par conséquent les variables seront séparées dans l'équation $dx = \frac{z\,dy}{a}$.

Pour avoir maintenant la courbe de l'équation proposée, on décrira la courbe de l'équation $z^5 y^3 + a^3 z^4 y = a^8$, en prenant CE pour axe (Fig. 2), les CM pour y, & les MK pour z. Sur KM prolongée on prendra MN égale à l'espace $CMKI$ divisé par a, c'est-à-dire que MN sera $= \int \frac{z\,dy}{a} = x$, & le point N appartiendra à la courbe. Fig. 2.

18. On peut rendre la méthode du n°. 14, un peu plus générale, en transformant des équations qui n'ont pas la même somme des exposants de leurs variables dans tous les termes, en d'autres qui les ayent, & qui soient par conséquent sujettes à la regle. On peut en venir à bout de deux manières. Dans l'une, on employe des substitutions convenables, & pour lesquelles on ne peut pas donner des regles; les exemples seuls en peuvent montrer l'usage. Dans l'autre, on fait des changements aux exposants de la formule ou de l'équation proposée, qui ont pour but de déterminer au moins en quels cas & par quelles substitutions on pourra réussir à les transformer en d'autres équivalentes qui ayent la condition demandée. On voit par-là que véritablement on ne peut pas généralement séparer les variables, mais qu'on peut déterminer une infinité de cas dans lesquels cette séparation réussit. Voyons d'abord la première manière.

EXEMPLE I.

Soit l'équation $dx\sqrt{[aaxx+az^3]}=zzdz$ qui n'a pas la condition nécessaire. On fera $z^3=ayy$, & par conséquent $zzdz=\frac{2aydy}{3}$; les substitutions donnent $dx\sqrt{[aaxx+aayy]}=\frac{2aydy}{3}$, équation qui est dans le cas du n°. 14. On parviendra encore à la séparation, si l'on fait $\sqrt{[aaxx+az^3]}=au$, ou bien $aaxx+az^3=aauu$, & par conséquent $2aaxdx+3azzdz=2aaudu$, c'est-à-dire $zzdz=\frac{2audu-2axdx}{3}$; les substitutions donneront $udx=\frac{2udu-2xdx}{3}$.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $x^5 dx + \frac{xxdy}{\sqrt{[a+y]}} = dy$. Je fais $\sqrt{[a+y]} = z$, & par conséquent $a+y = zz$, $dy = 2zdz$; ce qui me donne $x^5 dx + 2xxdz = 2zdz$. Mais cette équation exige encore une réduction; je suppose donc $xx = u$, & par conséquent $x^4 = uu$, & $4x^3 dx = 2udu$; substituant ces valeurs, j'ai $\frac{udu}{2} + 2udz = 2zdz$.

19. Je passe à la seconde manière qui est fondée sur les altérations qu'on peut faire éprouver aux exposants; & je prends l'équation générale de trois termes $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, dans laquelle chaque signe peut être indifféremment positif ou négatif. Si l'on avoit $n+m = q+p = r+s$, ce seroit le cas du n°. 14; mais supposons qu'il n'y ait pas cette égalité dans les sommes des exposants, on fera $y = z^t$, ce qui donne $dy = tz^{t-1}dz$, $y^q = z^{qt}$, $y^s = z^{st}$, $y^n = z^{nt}$; & faisant ces substitutions dans l'équation proposée, on aura $az^{nt}x^m dx + bz^{qt}x^p dx + tcx^r z^{st+t-1} dz = 0$. Mais les conditions de notre méthode exigent que $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$; de la première équation $nt + m = qt + p$, on tirera $t = \frac{p-m}{n-q}$, & cette valeur de t substituée dans la seconde, donnera $(s-q+1).(p-m) = (p-r+1).(n-q)$, qui est l'équation de condition qui doit avoir lieu entre les exposants de l'équation proposée, afin qu'elle soit réductible au cas du n°. 14, & on l'y ramenera en effet par la substitution de $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Si au lieu de supposer $y = z^t$, on avoit supposé

$x = z^t$, on auroit trouvé la même équation de condition pour les exposans ; mais comme on auroit eu $t = \frac{n-q}{p-m}$, la substitution qu'il faudroit faire alors, est celle de $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$.

Il peut arriver que la substitution de $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ ne soit pas faisable, & c'est lorsque $p = m$, ou $n = q$; mais dans ces cas on peut séparer les indéterminées sans recourir à cette réduction.

Dans l'équation canonique $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, si outre la supposition de $y = z^t$, on fait encore celle de $x = u^i$, l'équation se changera en celle-ci, $aiz^{nt}u^{im+i-1}du + biz^{qt}u^{ip+i-1}du + ctu^{ir}z^{st+t-1}dz = 0$. La comparaison des exposans du premier & du second terme donne $nt + im + i - 1 = qt + ip + i - 1$, c'est-à-dire, $t = i \cdot \frac{p-m}{n-q}$; la comparaison de ceux du second & du troisième terme, donne $ir + st + t - 1 = qt + ip + i - 1$; & chassant t de ces deux équations, on trouvera $i.(p-m).(s-q+1) = i.(n-q) \div (p-r+1)$, équation de condition qui exprime le rapport que doivent avoir entr'eux les exposans dans l'équation proposée. Mais la lettre i disparoît de l'équation, par où l'on voit que la seconde substitution de $x = u^i$ est absolument inutile, & que généralement toutes les équations ne peuvent pas être ramenées au cas du n°. 14, mais seulement celles où l'on a l'équation de condition $(p-m)(s-q+1) = (n-q)(p-r+1)$. Il en faut dire autant de celles qui sont composées d'un plus grand nombre de termes, & dont je vais parler en peu de mots.

20. LORSQUE les équations auront plus de trois

termes, il faudra, afin de pouvoir les ramener à la méthode du n°. 14, que les exposants ayent encore d'autres conditions. Prenons l'équation générale de quatre termes $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx + cx^r y^s dy + fx^e y^u dy = 0$. En supposant $y = z^t$, $dy = tz^{t-1}dz$, on aura $az^{nt}x^m dx + bz^{qt}x^p dx + tcx^r z^{st+t-1}dz + ftx^e z^{tu+t-1}dz$. Il faudra donc que $nt + m = qt + p$, d'où l'on tirera l'exposant $t = \frac{p-m}{n-q}$; or il faudra aussi que $r + st + t - 1 = qt + p$, ou, ce qui revient au même, que $t.(s - q + 1) = p - r + 1$; mettant ici la valeur de t prise dans la première équation, on a $(s - q + 1)(p - m) = (p - r + 1)(n - q)$ qui exprime la première condition. Mais il faut encore que $e + tu + t - 1 = qt + p$, ou, ce qui est la même chose que $t.(u - q + 1) = p - e + 1$; mettant encore ici la valeur de t, on trouve $(u - q + 1)(p - m) = (p - e + 1)(n - q)$ qui est la seconde condition. Donc si les exposants d'une équation proposée sont tels que ces deux équations de condition ayent lieu, elle est réductible au cas du n°. 14, & $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ est la substitution qu'il faut faire pour cela.

Les équations qui ont cinq termes, exigent trois équations de condition; celles qui en ont six, en exigent quatre, & ainsi des autres.

EXEMPLE.

Soit l'équation $ay^3 x dx + byyx^{\frac{1}{2}} dx = cxdy$. Si on la compare avec l'équation canonique, on aura $n = 3$, $m = 1$, $q = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 1$, $s = 0$, & on verra que la condition $(s - q + 1)(p - m) = (p - r + 1)(n - q)$ a lieu; ainsi il faudra faire la substitution de $y = z^{\frac{p-m}{s-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$. Je suppose donc $y = z^{-\frac{1}{2}}$, $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$, $y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$, $yy = z^{-1}$; ce qui donne $a z^{-\frac{3}{2}} x dx + b z^{-1} x^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} c x z^{-\frac{3}{2}} dz$, équation qui est dans le cas que l'on desiroit.

21. SANS rapporter les équations particulières à la formule générale, il sera souvent plus commode de les traiter directement par la même méthode.

EXEMPLE I.

Soit donc l'équation $a y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{11}{2}} dx - \frac{b x^3 dy}{y} = c x x y dy$. Je suppose $x = z^t$, $dx = t z^{t-1} dz$, & les substitutions me donnent $t a y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{11}{2}t + t - 1} dz - b z^{3t} y^{-1} dy = c z^{2t} y dy$. Mais il faut que $\frac{1}{2} + \frac{11}{6} t + t - 1 = 3t - 1$, d'où se tire $t = 2$; je mets donc 2 au lieu de t, & j'ai l'équation $2 a y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{24}{2}} dz - b z^6 y^{-1} dy = c z^4 y dy$, qui est précisément dans le cas du n°. 14. La substitution qu'il faut faire est par conséquent $x = z z$.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $x^{\frac{2}{3}} dx + y^{\frac{4}{3}} dx + x^{\frac{5}{6}} y dy = y^3 dy$. Je suppose $y = z^t$, $dy = t z^{t-1} dz$, & les substitutions faites, j'ai $x^{\frac{2}{3}} dx + z^{\frac{4t}{3}} dx + t x^{\frac{5}{6}} z^{t+t-1} dz = t z^{3t+t-1} dz$. Mais il faut que $\frac{2}{3} = \frac{4t}{3}$, ce qui donne $t = \frac{1}{2}$; mettant cette valeur de t dans l'équation, j'ai $x^{\frac{2}{3}} dx + z^{\frac{2}{3}} dx + \frac{1}{2} x^{\frac{5}{6}} z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} dz = \frac{1}{2} z^{\frac{2}{2}} dz$, qui est le cas du n°. 14; la substitution qu'il faut faire est donc $y = z^{\frac{1}{3}}$.

EXEMPLE III.

Soit l'équation $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^4yydy = 0$. Je suppose $y = z^t$, $dy = tz^{t-1}dz$; & après les substitutions, j'ai $az^{2t}xxdx + bdx + cz^txdx + tfx^4z^{2t+t-1}dz = 0$. Mais on doit avoir $2t + 2 = t + 1$, ce qui donne $t = -1$; & cette valeur mise dans l'équation au lieu de t, la réduit à $\frac{axxdx}{zz} + bdx + \frac{cxdx}{z} - \frac{fx^4dz}{z^4} = 0$, qui est dans le cas du n°. 14; & la substitution qu'il faut faire est $y = \frac{1}{z}$.

22. APRÈS avoir rendu la méthode du n°. 14 plus générale, je vais en expliquer une autre qui est générale dans son espece. Elle comprend sans exception, toutes les équations dans lesquelles tant les variables que leurs différences, n'ont pas plus d'une dimension.

Soit donc l'équation différentielle générale, qui embrasse tous les cas possibles de ce genre, $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + hdy = 0$. Les coéficients a, b, c, &c, peuvent être positifs ou négatifs, ou même égaux à zero. J'observe en premier lieu que lorsque c & g sont des quantités, toutes les deux positives, ou toutes les deux négatives, si $c = g$, l'équation pourra s'intégrer; car on aura $\pm c(ydx + xdy) = -axdx - bydy - fdx - hdy$. & en intégrant $\pm cxy = -\frac{axx}{2} - \frac{byy}{2} - fx - hy$. Mais si c n'est pas égal à g, on supposera $x=p+A$, & $y=q+B$, (p, q étant deux nouvelles variables, & A, B deux constantes arbitraires que l'on déterminera dans la suite). On aura donc $dx=dp$, $dy=dq$, $xdx=pdp+Adp$, $ydy=qdq=Bdq$. Ces valeurs mises dans l'équation principale la changeront en celle-ci,

$$\left.\begin{array}{l} apdp+aAdp+bqdq+bBdq+cqdp+gpdq \\ \quad\;\; +cBdp \qquad\qquad +gAdq \\ \quad\;\; +fdp \qquad\qquad\; +hdq \end{array}\right\}=0.$$

Si le second & le quatrième terme de cette équation s'évanouissent, elle tombera dans le cas du n°. 14, & on saura par conséquent en séparer les indéterminées; or le second terme s'évanouira si l'on a $aA+cB+f=0$, & le quatrième, si $bB+gA+h=0$; & ces deux équations détermineront les valeurs des constantes A, B, de manière que la nouvelle équation sera dans le cas du n°. 14. On aura donc $A=\frac{-cB-f}{a}$, $B=\frac{-gA-h}{b}$, c'est-à-dire $A=\frac{bf-ch}{cg-ab}$, $B=\frac{ah-fg}{cg-ab}$. Si l'on fait donc les substitutions de $x=p+\frac{bf-ch}{cg-ab}$, & de $y=q+\frac{ah-fg}{cg-ab}$, on aura une équation dont les indéterminées se sépareront par la méthode du n°. 14.

S'il arrivoit que dans quelqu'équation particulière on eût $bf=ch$, ou bien $ah=fg$; c'est-à-dire que l'une ou l'autre des deux constantes fût zero, ce seroit une marque que l'on parviendroit au but avec une seule substitution. Que l'on l'on ait, par exemple, $\frac{bf-ch}{cg-ab}=A=0$; laissant alors dans l'équation les x & les dx, on se contentera de substituer $q+B$ au lieu de y, & on achevera de la manière qui a été dite.

Si les grandeurs A & B étoient toutes les deux zero, on auroit $bf=ch$, $ah=fg$, & par conséquent $\frac{ch}{b}=\frac{ah}{g}=f$, & $cg=ab$; au moyen de quoi les substitutions indiquées n'ont plus lieu. Toutes les fois donc que l'on aura $cg=ab$, il faudra s'y prendre autrement; on n'aura qu'à supposer $ax+cy=z$, & chasser de l'équation y & dy, en faisant $y=\frac{z-ax}{c}$, $dy=\frac{dz-adx}{c}$; on substituera ces valeurs dans l'équation principale, & l'on trouvera $axdx+\frac{bzdz-abxdz-abzdx+aabxdx}{cc}+zdx-axdx+\frac{gxdz-agxdx}{c}+fdx+\frac{hdz-ahdx}{c}=0$, ou bien, en supprimant le premier & le septième terme qui se détruisent, & réduisant tout au même dénominateur, $bzdz-abxdz-abzdx+aabxdx+cczdx+cgxdz-acgxdx+ccfdx+chdz-achdx=0$; mais puisque $cg=ab$, le second terme détruit le sixième, & le quatrième détruit le septième, il reste donc $bzdz-abzdx+cczdx+ccfdx+chdz=achdx$, c'est-à dire . . . .

$$\frac{bzdz+chdz}{abz-ccz-ccf+ach}=dx.$$

EXEMPLE I.

Soit l'équation $axdx+2aydx+bxdy-$

Aa

$abdy = 0$. Je fais $x = p + A$, $y = q + B$; $dx = dp$, $dy = dq$, & après les substitutions, j'ai

$$\left.\begin{matrix} apdp + & aAdp + 2aqdp + bpdq + bAdq \\ & +2aBdp \qquad\qquad\qquad -abdq \end{matrix}\right\} = 0.$$

Le dernier terme s'évanouira, si $bA - ab = 0$, c'est-à-dire si $A = a$; le second s'évanouira si $2AB + aA = 0$, c'est-à-dire si $B = -\frac{a}{2}$; ainsi les substitutions $x = p + a$, $y = q - \frac{1}{2}a$, rameneront l'équation au cas du n°. 14.

Après avoir fait évanouir le second & le quatrième terme, comme il a été dit, on peut aussi intégrer l'équation par le moyen du n°. 4.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $2axdx - 2bydy - 4aydx + bxdy - aadx = 0$. Le coéfficient $2a$ correspond au coéfficient a de l'équation canonique, $-2b$ correspond à b; $-4a$ correspond à c, b correspond à g, & l'on a le cas de $cg = ab$, dont on a fait mention ci-dessus. On fera donc la substitution de $2ax - 4ay = z$, qui donne $y = \frac{2ax - z}{4a}$, $dy = \frac{2adx - dz}{4a}$; & l'équation deviendra $4abzdx - 2bzdz + 16aazdx - 16a^4dx = 0$, ou bien $dx = \frac{2bzdz}{4abz + 16aaz - 16a^4}$.

23. ON peut aussi traiter les équations indiquées, & celles même des degrés supérieurs, au moyen d'une seule substitution, qui à la vérité sera plus composée. Reprenons la même équation canonique $axdx +$

$bydy + cydx + gxdy + fdx + hdy = 0$, parce que celles des degrés ſupérieurs exigeroient des calculs trop longs, & que ce que je dirai ſur celle-ci ſuffira pour faire connoître comment il faudroit ſe conduire à l'égard des autres. On ſuppoſera donc $x = Ay + p + B$, équation ſubſidiaire dans laquelle A & B ſont des conſtantes qu'on déterminera dans la ſuite, & p eſt une nouvelle indéterminée qu'il ſeroit inutile de multiplier par une conſtante, comme on le verra par l'opération. On fera donc $x = Ay + p + B$, & par conſéquent $dx = Ady + dp$, $xdx = AAydy + Apdy + ABdy + Aydp + pdp + Bdp$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation canonique, elle ſe transformera en celle-ci,

$$\left.\begin{array}{llll} aAAydy + aApdy + aAydp + apdp & + aABdy + aBdp \\ + \;\; bydy + \;\; gpdy + \;\; cydp & + gBdy + fdp \\ + cAydy & + fAdy \\ + gAydy & + \;\; hdy \end{array}\right\} = 0.$$

Il faudra maintenant faire évanouir quelques termes de cette équation, en donnant aux quantités arbitraires A & B des valeurs propres à introduire dans l'équation quelqu'une des conditions qui rendent les indéterminées ſéparables. Or, on peut remarquer d'abord que ſi le ſecond & le troiſième terme manquoient, les variables ſeroient ſéparées, & l'équation ſeroit intégrable. Mais afin que ces deux termes ſoient nuls, il faut d'une part que $aA + g = 0$, & de l'autre que $aA + c = 0$, & que par conſéquent $g = c$; mais dans ce cas l'équation principale eſt intégrable, ſans recourir à aucune opération préliminaire.

Si les deux derniers termes étoient zero, l'équation tomberoit dans le cas du n°. 14; mais afin que ces deux termes diſparoiſſent, il faut, quant au dernier, que $aB+f=0$, c'est-à-dire que $B=-\frac{f}{a}$; & quant au cinquième, que $aAB+gB+fA+h=0$, ou en mettant la valeur de B, que $-Af-\frac{gf}{a}+Af+h=0$, ce qui donne $ah=gf$. Ainsi les deux derniers termes ne peuvent disparoître que dans le cas particulier où la condition $ah=gf$ a lieu.

Voyons donc ce qui arrivera si l'on supprime le premier & le cinquième terme, ce qui réduit l'équation au cas des n^{os}. 4 & 6. On a, en vertu du premier terme, $aAA+b+cA+gA=0$, c'est-à-dire $AA+\frac{cA+gA}{a}=-\frac{b}{a}$, d'où l'on tirera la valeur de A; le cinquième terme donnera $B=\frac{-fA-h}{aA+g}$; ainsi l'équation devient $(aA+g)pdy+\ldots$ $(aA+c)ydp=-apdp-aBdp-fdp$; on la construit par le moyen du n°. 4, si les coéfficients des deux premiers termes sont tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs; & par le moyen du n°. 6, si l'un est positif & l'autre négatif.

Mais on peut parvenir à la séparation, en faisant seulement évanouir le premier terme de l'équation subsidiaire, c'est-à-dire en supposant $aAA+cA+gA+b=0$; car en supposant égale à zero, l'indéterminée B, qui dans ce cas est superflue, il reste l'équation $-apdp-fdp=(aA+g)pdy+(fA+h)dy+(aA+c)ydp$, dans laquelle on séparera les variables par la méthode que j'expliquerai dans le numéro qui suit, ou bien par la méthode du numéro précédent, pourvu que l'on prépare l'équation en faisant $(aA+g)p+fA+h=q$, &

par conféquent $(aA+g)dp = dq$; ce qui donne, en fubftituant, $-apdq - fdp = qdy + \ldots\ldots$ $\frac{(Aa+c)ydq}{Aa+g}$. On confidérera cependant qu'en faifant ufage de ces formules, on rencontre fouvent des imaginaires qui viennent de l'équation du fecond degré affectée du fecond terme $aAA + cA + gA + b = 0$; ces imaginaires s'introduifent non-feulement dans les coëfficients, mais elles paffent quelquefois dans les expofants. Comme elles font embarraffantes, & qu'on ne fait pas les traiter jufqu'ici, on fera bien de les éviter, en choififfant parmi les différentes méthodes celle que l'on trouvera la plus avantageufe.

EXEMPLE.

Soit l'équation $abxxdx + bbyxdx + a^3ydx + aabydy + a^3xdy = 0$. Je fuppofe $y = Ax + p + B$ (je chaffe y préférablement à x, parce que je prévois que le calcul fera plus court) ; ainfi $dy = Adx + dp$. Après les fubftitutions, j'ai cette équation,

$$\left.\begin{array}{llllllll} abxxdx & + bbpxdx & + bbBxdx & + a^3pdx & + a^3Bdx & + aabAxdp & + aabpdp & + aabBdp \\ bbAxxdx & & + 2a^3Axdx & + aabApdx & + aabABdx & + a^3xdp & & \\ & & + aabAAxdx & & & & & \end{array}\right\} = 0$$

Je remarque que dans cette équation fi les termes 1, 3, 5 & 6 difparoiffoient, les indéterminées feroient féparées, puifqu'on auroit

$$\left.\begin{array}{l} bbpxdx + a^3pdx + aabpdp + aabBdp \\ \quad + aabApdx \end{array}\right\} = 0.$$

& en divifant par p, ...

$$bbxdx + a^3dx + aabAdx = -aabdp - \frac{aabBdp}{p}.$$

Or, afin que le premier terme difparoiffe, il faut que $A + bA = 0$, c'eſt-à-dire que $A = -\frac{a}{b}$, au moyen de quoi le cinquième & le ſixième diſparoiſſent auſſi, ſans donner aucune nouvelle condition. Afin que le troiſième diſparoiſſe, il faut que $bbB + 2a^3A + aabAA = 0$, qui en mettant la valeur de A devient $bbB - \frac{2a^4}{b} + \frac{a^4 b}{bb} = 0$, c'eſt-à-dire $B = \frac{a^4}{b^3}$. La ſubſtitution donc qu'il faudra faire, ſera $y = -\frac{ax}{b} + p + \frac{a^4}{b^3}$, & l'équation qui en naîtra $bbx\,dx = -aab\,dp - \frac{a^4\,dp}{bbp}$.

24. LA méthode dont il ſera queſtion dans cet article, conſiſte à diſpoſer premièrement l'équation propoſée, de manière que les quantités différentielles reſtent accompagnées de leurs indéterminées reſpectives, & qu'il ſe faſſe pour ainſi dire, une demi-ſéparation, en rejettant dans les multiplicateurs ou les diviſeurs communs, les grandeurs qui troublent l'opération. Enſuite on prendra l'intégrale de la différentielle ainſi préparée, & compoſée de deux inconnues; on ſuppoſera cette intégrale égale à une nouvelle variable, & au moyen d'une équation auxiliaire, on donnera une nouvelle forme à l'équation principale. Enfin, on ſera attention à ce qui en réſultera, & on répétera la même opération juſqu'à ce que l'on parvienne à la ſéparation qu'on deſire, ou que l'on reconnoiſſe que la formule propoſée échappe à cet artifice.

Cette méthode a cet aventage ſur les autres, que dans le même temps qu'on fait uſage des ſubſtitutions, elle fait connoître celles qui ſont utiles, &

celles qui ne le sont pas. Que l'on observe cependant qu'il y a des équations où on ne réussiroit pas par cette méthode, si on ne les préparoit pas auparavant avec quelqu'adresse. Tout cela s'entendra mieux par des exemples.

EXEMPLE I.

Soit proposée l'équation .... $\frac{x^3 dy + y^3 dx}{(xx+yy)\sqrt{[xx+yy-xxyy]}} = dz$, dans laquelle dz est une fonction quelconque de x ou de y. Je mets à part la quantité $(xx+yy)\sqrt{[xx+yy-xxyy]}$ qui a même rapport ou même affection à l'égard des deux termes, qui composent la première partie de l'équation ; il restera simplement la différentielle $x^3 dy + y^3 dx$. Je divise dx par x^3, & dy par y^3, de manière que j'ai $x^3 dy + y^3 dx = x^3 y^3 . \left(\frac{dy}{y^3} + \frac{dx}{x^3}\right)$; ainsi l'équation proposée prendra cette nouvelle forme ....

$$\frac{x^3 y^3}{(xx+yy)\sqrt{[xx+yy-xxyy]}} \times \left(\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3}\right) = dz.$$

Etant parvenu à cette demi-séparation, dans laquelle les fluxions dx, dy sont simplement combinées avec des fonctions de leurs fluentes ou variables, & où les autres termes forment, pour ainsi dire, une quantité étrangère, qui fait fonction de multiplicateur, je suppose $\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = -\frac{dp}{a^3}$; j'aurai, en intégrant, $\frac{a^3}{2xx} + \frac{a^3}{2yy} = p$. Prenant ensuite la valeur, par exemple de x, j'ai

$x = \frac{y}{\sqrt{[2yyp - a^3]}}$; & mettant dans l'équation cette valeur au lieu de x, & $-\frac{dp}{a^2}$, au lieu de $\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3}$, elle deviendra $-\frac{dp \cdot a\sqrt{a}}{2py\sqrt{[2p - a^2]}} = dz$, où la séparation est faite.

Remarquez qu'ayant pris à volonté une quantité donnée par p d'une manière quelconque, comme $p = \frac{a}{2qq}$, on aura $\frac{a}{2qq} = \frac{a}{2xx} + \frac{a}{2yy}$, c'est-à-dire $q = \frac{xy}{\sqrt{[xx+yy]}}$; au moyen de quoi on voit d'un coup d'œil le nombre infini de substitutions qui peuvent servir à la séparation qu'on desire. Toutes les autres seroient inutiles, & laisseroient les variables plus mêlées qu'elles ne l'étoient d'abord.

Remarquez encore qu'avec les substitutions dont on vient de parler, il arrive souvent qu'il reste quelque fonction de l'une ou l'autre des variables x & y dans l'un des membres de l'équation; dans ce cas si dz étoit donnée par la variable dont il reste une fonction, une simple division acheveroit la séparation qu'on cherche.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $\frac{2ydy + xdy + ydx}{a + x + y} = dz$, dans laquelle je suppose dz donnée d'une manière quelconque en y. Pour ramener cette équation à notre méthode, je prends l'intégrale du numérateur de la fraction, qui est $yy + xy$, & je la suppose $= p$; ensuite ayant chassé de l'équation x & dx en mettant leurs valeurs à leur place, j'ai l'équation $\frac{dp}{a+\frac{p}{y}} = dz$, qui se réduit à celle-ci $ydp - pdz = aydz$. Cette dernière étant préparée à l'ordinaire, devient $p.\left(\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}\right) = adz$. Je fais $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y} = \frac{dq}{q}$, & par conséquent $L.p - \int\frac{dz}{y} = L.q$; je fais encore $\int\frac{dz}{y} = uL.m$, ($L.m$ est un logarithme constant); j'ai donc $L.p - L.q = uL.m$, & en passant des logarithmes aux nombres, $\frac{p}{q} = m^u$. Substituant donc dans l'équation réduite, $\frac{dq}{q}$ au lieu de $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}$, & $m^u q$ au lieu de p, j'aurai $m^u dq = adz$, ou bien $dq = \frac{adz}{m^u}$, où les variables sont séparées, puisque dz & m^u sont données en y.

EXEMPLE III.

Soit l'équation $\frac{2xxdx + xydy + yydx}{x^4 + xxyy + a^4} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{[xx+yy]}}$. Avant de tenter la séparation, il sera bon de faire une réduction à cette formule. Je remarque que le second membre est intégrable, & que son intégrale est $\sqrt{[xx+yy]}$. Je supposerai donc $\sqrt{[xx+yy]} = z$; je chasserai y préférablement à x, parce que les y ne montent qu'au second degré, en mettant $zz - xx$ au lieu de yy, & $zdz - xdx$ au lieu de ydy; & j'aurai . . . .

$\frac{2xxdx + xzdz - xxdx + zzdx - xxdx}{xxzz + a^4} = dz$, c'est-à-dire $\frac{xzdz + zzdx}{xxzz + a^4} = dz$. Cette équation préparée à l'ordinaire devient $\frac{z}{xxzz + a^4} \times (xdz + zdx) = dz$. Je fais $xdz + zdx = dp$, & en intégrant $xz = p$, & chassant x, j'ai $\frac{zdp}{pp + aa} = dz$, & enfin $\frac{dp}{pp + aa} = \frac{dz}{z}$.

EXEMPLE IV.

Soit proposée la dernière équation de l'article précédent, $-apdp - fdp = (aA + g)pdy + (fA + h)dy + (aA + c)ydp$, que j'ai promis de construire. En la préparant à la manière que la méthode présente exige, & faisant, pour abréger, $aA + g = e$, $fA + h = m$, $aA + c = n$, elle se change en celle-ci $\frac{-apdp - fdp}{ep + m} = y.\left(\frac{dy}{y} + \frac{ndp}{ep + m}\right)$. Je suppose donc $\frac{dy}{y} + \frac{ndp}{ep + m} = \frac{dq}{q}$, dont l'intégrale L. $y + \frac{n}{e}$ L. $\left(p + \frac{m}{e}\right) =$ L. q donne $y = \frac{q}{\left(p + \frac{m}{e}\right)^{\frac{n}{e}}}$, & faisant évanouir y, j'ai $\frac{-apdp - fdp}{ep + m} = \frac{dq}{\left(p + \frac{m}{e}\right)^{\frac{n}{e}}}$, c'est-à-dire $\frac{(-apdp - fdp)}{ep + m} \times \left(p + \frac{m}{e}\right)^{\frac{n}{e}} = dq$.

EXEMPLE V.

Soit l'équation déja préparée $y^m.(xdx+ydy) = x^n.(ydx-xdy)$, que j'écris ainsi $\frac{y^{m-2}}{x^n}(xdx+ydy) = \frac{ydx-xdy}{yy}$, afin d'avoir le second membre intégrable. Je ferai usage ici d'une double substitution ; je supposerai donc en premier lieu $xdx+ydy = pdp$, & intégrant, $xx+yy = pp$; en second lieu $\frac{ydx-xdy}{yy} = dq$, & intégrant, $\frac{x}{y} = q$. Les substitutions faites, j'aurai $\frac{y^{m-2}}{x^n} \times pdp = dq$; mais $yy = pp - xx$ & $xx = qqyy$; j'aurai donc $yy = pp - qqyy$, c'est-à-dire $yy = \frac{pp}{aa+qq}$, $y^{m-2} = \frac{p^{m-2}}{(aa+qq)^{\frac{m-2}{2}}}$, $x^n = \frac{q^n p^n}{(aa+qq)^{\frac{n}{2}}}$. Or la substitution de ces deux dernières valeurs donne $p^{m-n-1}dp = q^n dq.(aa+qq)^{\frac{m-n-2}{2}}$.

EXEMPLE VI.

Soit l'équation $\frac{2xdy-2ydx}{(x-y)^2} = dz$, dans laquelle dz est donnée comme on voudra en x ou en y. Je remarque que le numérateur $2xdy-2ydx$ seroit intégrable s'il étoit divisé par xx, & que son intégrale seroit $\frac{2y}{x}$; ce qui me fait disposer l'équation ainsi $\frac{1}{(x-y)^2} \times \frac{2xdy - 2ydx}{xx} = \frac{dz}{xx}$. Je suppose $\frac{2y}{x} = p$, & par conséquent $\frac{2xdy - 2ydx}{xx} = dp$; & l'équation se change en celle-ci $\frac{dp}{(x-y)^2} = \frac{dz}{xx}$; mais $2y = px$ & $yy = \frac{ppxx}{4}$; les substitutions donneront donc $\frac{dp}{xx - px + \frac{ppxx}{4}} = \frac{dz}{xx}$, c'est-à-dire $\frac{dp}{1 - p + \frac{pp}{4}} = dz$, où les indéterminées sont séparées. Si l'on veut passer à l'intégration, on aura $\frac{2}{1 - \frac{p}{2}} + c = \int dz$, & en mettant la valeur de p, $\frac{2}{1 - \frac{y}{x}} + c = \int dz$; ou en réduisant au même dénominateur, $\frac{2x + cx - cy}{x - y} = \int dz$. Si l'on suppose que la constante $c = 0$, on aura $\frac{2x}{x-y} = \int dz$; si on la suppose $= -2$, on aura $\frac{2y}{x-y} = \int dz$, intégrale de la formule proposée différente de la précédente; enfin si on suppose $c = -1$, il en naîtra cette troisième intégrale $\frac{x+y}{x-y} = \int dz$.

25. LA méthode que je me propose d'exposer dans cet article, est très-limitée; cependant elle ne laisse pas d'être d'un grand usage dans bien des cas particuliers. Cette méthode enseigne à séparer les indéterminées de l'équation canonique $ady = ypdx + by^n qdx$, dans laquelle on suppose que p & q soient données en x d'une manière quelconque, que a & b soient des constantes, que les signes soient positifs ou négatifs à volonté, & que l'exposant n soit entier ou rompu, positif ou négatif, ou même zero. On fera $y = zu$, (z & u sont de nouvelles variables), & en différentiant, $dy = zdu + udz$. Substituant au lieu de dy, de y & de y^n leurs valeurs $zdu + udz$, uz, $u^n z^n$, on aura l'équation $azdu + audz = uzpdx + bz^n u^n qdx$, dans laquelle si on pouvoit faire disparoître deux termes, les indéterminées seroient séparables. Pour cet effet, que l'on suppose que les deux termes $audz$ & $uzpdx$ soient égaux, ou qu'on ait l'équation $audz = uzpdx$, ou $\frac{adz}{z} = pdx$; donc en intégrant $a\mathrm{L}.z = \int pdx$, & en passant des logarithmes aux nombres $z^a = m^{\int pdx}$, ou bien $z = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, m étant le nombre dont le logarithme est égal à l'unité. Cette dernière équation montre la valeur de z, & enseigne que pour réduire l'équation proposée à deux termes seulement, & faire évanouir les deux autres, il falloit, au lieu de supposer $y = zu$, supposer $y = um^{\frac{\int pdx}{a}}$, c'est-à-dire $\mathrm{L}.\left(\frac{y}{u}\right) = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, ou bien $\mathrm{L}.y - \mathrm{L}.u = \int \frac{pdx}{a}$, & en différentiant, $\frac{ady}{y} - \frac{adu}{u} =$

$p\,dx$, ou $a\,dy = yp\,dx + \frac{ay\,du}{u}$. On substituera donc dans l'équation canonique $a\,dy = yp\,dx + by^n q\,dx$ la valeur qu'on vient de trouver de dy, & on aura $yp\,dx + \frac{ay\,du}{u} = yp\,dx + by^n q\,dx$, c'est-à-dire $\frac{ay\,du}{u} = by^n q\,dx$; & par conséquent $\frac{a\,du}{u} = by^{n-1} q\,dx$; mais $y = z u$, & $y^{n-1} = z^{n-1} u^{n-1}$; donc enfin $\frac{a\,du}{u^n} = b z^{n-1} q\,dx$, équation où les variables sont séparées, puisqu'on a trouvé z donnée en x. Lorsqu'on est arrivé à l'équation $a\,\mathrm{L}.z = \int p\,dx$, il est certain que si p, qui est donnée en x, étoit telle que l'intégrale $\int p\,dx$ dépendit des logarithmes, & que la quantité a soit un nombre quelconque, la relation de z à x seroit algébrique; dans tout autre cas elle est transcendante.

Je remarquerai ici qu'afin qu'une équation soit dans le cas de la formule canonique, il est nécessaire que les conditions suivantes ayent lieu : 1°. que la différence dy puisse rester seule d'un côté du signe d'égalité, ou qu'elle soit tout au plus multipliée par une constante; 2°. il faut que dans l'autre membre de l'équation, le premier terme contienne dx multipliée par l'indéterminée y, & par une fonction quelconque de x désignée par p; 3°. que dans l'autre terme la quantité $q\,dx$ donnée en x, soit multipliée par une puissance de y; en un mot, il faut qu'en divisant par y, il ne reste d'un côté que la différentielle logarithmique $\frac{a\,dy}{y}$, que de l'autre l'indéterminée y ne se trouvant plus dans le premier terme, la puissance y^{n-1} se trouve facteur dans le second. L'une de ces conditions manquant, notre méthode n'a plus de prise sur les équations; ainsi elle n'en a pas sur les deux suivantes : $ady = yypdx + by^{n}qdx$, $ady = ypdx + (ayy + y^{3})qdx$.

Il y a pourtant quelques équations qu'on peut ramener facilement à la formule canonique par une simple préparation. Par exemple, soit l'équation $ady = ypdx + byqdx + yyqdx$; en faisant attention que la quantité $pdx + bqdx$ est multipliée par y, & que le binome $p + bq$ est donné par x, on verra que l'on peut sans difficulté substituer à ce binome, une quantité r donnée également par x, de manière que l'équation proposée deviendra $ady = yrdx + yyqdx$, qui est dans le cas de la méthode que j'ai expliquée. Cela suffira pour faire voir comment on pourra opérer dans des cas semblables.

EXEMPLE I.

Soit l'équation $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$. Je suppose $y = zu$, par conséquent $ady = azdu + audz$; & les substitutions donnent $azdu + audz = \frac{fuzdx}{x} + zzuudx$. Soit $audz = \frac{fuzdx}{x}$, c'est-à dire $\frac{adz}{z} = \frac{fdx}{x}$; j'aurai en intégrant, $aL.z = fL.x$, & par conséquent $z^{a} = x^{f}$.

Si les constantes a, f, sont des nombres rationnels, soit entiers, soit rompus, soit positifs, soit négatifs, z sera donnée algébriquement en x. Supposons, par exemple, que $a=1$, $f=2$, de manière que $z=xx$. Puisque les termes $audz$, $\frac{fazdx}{x}$ se détruisent, il restera $azdu=zzuudx$; or $z=xx$; donc $\frac{adu}{uu}=xxdx$, équation dans laquelle les variables sont séparées. Passons maintenant à l'intégration, nous aurons $-\frac{a}{u}+c=\frac{x^3}{3}$; mais $u=\frac{y}{z}=\frac{y}{xx}$; donc $-\frac{axx}{y}+c=\frac{x^3}{3}$; c'est-à-dire $3cy-3axx=x^3y$, équation algébrique qui résulte de la différentielle proposée.

EXEMPLE II.

Soit proposée l'équation $dy=\frac{aydx}{xx-aa}+\frac{y^3dx}{x^3}$. Je fais comme ci-dessus $y=zu$, & $dy=zdu+udz$; & par conséquent les substitutions donneront $zdu+udz=\frac{azudx}{xx-aa}+\frac{z^3u^3dx}{x^3}$. Supposant maintenant $udz=\frac{azudx}{xx-aa}$, c'est-à-dire $\frac{dz}{z}=\frac{adx}{xx-aa}$, & par conséquent $z=m^{\int\frac{adx}{xx-aa}}$, j'aurai l'équation $zdu=\frac{z^3u^3dx}{x^3}$, ou bien $\frac{du}{u^3}=\frac{zzdx}{x^3}$, dans laquelle les variables sont séparées, puisque z est donnée en x. Mais je remarque que la quantité $\frac{adx}{xx-aa}$ peut devenir une différentielle

logarithmique

logarithmique, en faisant $x = \frac{(a+n).a}{a-n}$. En effet, après les substitutions convenables, j'ai $\frac{adx}{xx-aa} = \frac{dn}{2n}$, d'où je tire $\frac{dz}{z} = \frac{dn}{2n}$, & par conséquent $zz = n = \frac{a.(x-a)}{x+a}$. Mettant enfin cette valeur de zz dans l'équation, j'ai $\frac{du}{u^3} = \frac{axdx - aadx}{x^3 + ax^2}$.

Sans faire la substitution de $x = \frac{(a+n).a}{a-n}$, on peut transformer la quantité $\frac{adx}{xx-aa}$ en une fluxion logarithmique; car en suivant le n°. 21 de la première Partie, on trouvera $\frac{adx}{xx-aa} = -\frac{dx}{2.(x+a)} + \frac{dx}{2.(x-a)} = \frac{dz}{z}$, & par conséquent $zz = \frac{x-a}{x+a}$.

EXEMPLE III.

Soit l'équation $dy = -\frac{ydx}{x} + y^n dx$. Je fais $y = zu$, & $dy = zdu + udz$. En substituant, j'aurai donc $zdu + udz = -\frac{uzdx}{x} + u^n z^n dx$. Je suppose $udz = -\frac{uzdx}{x}$, c'est-à-dire $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$, & en intégrant, $z = \frac{a}{x}$; j'aurai par conséquent l'équation $z\,du = z^n u^n dx$, c'est-à-dire, $\frac{du}{u^n} = z^{n-1}dx$, ou bien $\frac{du}{u^n} = \frac{a^{n-1}dx}{x^{n-1}}$.

EXEMPLE IV.

Il est quelquefois nécessaire de recourir à une seconde opération, sur-tout dans certaines équations qui ont plus de trois termes. Soit, par exemple, l'équation $xdy + ydx = adu + xdu$, en supposant que u soit donnée d'une manière quelconque par y. J'arrange l'équation de cette manière, $adu + xdu - xdy = ydx$, ou bien encore de celle-ci $\frac{adu}{y} + \frac{xdu}{y} - \frac{xdy}{y} = dx$; je suppose $x = pq$, $dx = pdq + qdp$, & les substitutions me donnent $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq + qdp$. Si l'on vouloit réduire la formule par une seule opération, il faudroit supposer $\frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq$, c'est-à-dire $\frac{du}{y} - \frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, ce qui donne la valeur de q en y; mais on opérera plus élégamment de la manière qui suit. Que l'on fasse $-\frac{pqdy}{y} = pdq$, ou $-\frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, & en intégrant, $\frac{a}{y} = q$. Prenant donc les autres termes de l'équation $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} = qdp$, & mettant au lieu de q sa valeur

$\frac{u}{y}$, on aura $\frac{adu}{y} + \frac{apdu}{yy} = \frac{adp}{y}$, c'eſt-à-dire $du + \frac{pdu}{y} = dp$. Soit fait $p = mn$, & $dp = mdn + ndm$, la ſubſtitution donnera $du + \frac{mndu}{y} = mdn + ndm$. Que l'on ſuppoſe encore $\frac{mndu}{y} = mdn$, c'eſt-à-dire $\frac{du}{y} = \frac{dn}{n}$, n ſera donc donné en y, & les deux termes $\frac{mndu}{y}$, mdn étant évanouis, les variables ſeront ſéparées dans l'équation reſtante $du = ndm$, puiſqu'on aura $\frac{du}{n} = dm$.

26. ON peut encore ſéparer d'une autre manière les variables de l'équation canonique $dy = pydx + qy^n dx$. Que l'on faſſe pour cela $pdx = \frac{dz}{(1-n).z}$, $dx = \frac{dz}{(1-n).pz}$; après les ſubſtitutions, on aura $dy = \frac{ydz}{(1-n).z} + \frac{qy^n dz}{(1-n).pz}$, c'eſt-à-dire $dy = \frac{pydz + qy^n dz}{(1-n).pz}$, ou bien $(1-n)pzdy = pydz + qy^n dz$, & par conſéquent $\frac{(1-n).zdy - ydz}{y^n} = \frac{qdz}{p}$; enfin en diviſant par zz, on aura...... $\frac{(1-n)zy^{-n}dy - y^{1-n}dz}{zz} = \frac{qdz}{pzz}$, & en intégrant, $\frac{y^{1-n}}{z} = \int\frac{qdz}{pzz}$, ou $y^{1-n} = z\int\frac{qdz}{pzz}$; or

puisque p & q sont supposées données en x, & qu'à cause de la substitution $p\,dx = \frac{dz}{(1-n).z}$, z est aussi donnée en fonction de x, sinon algébrique, du moins transcendante.

Reprenons donc l'équation du premier exemple, savoir $a\,dy = \frac{fy\,dx}{x} + yy\,dx$, ou bien $dy = \frac{fy\,dx}{ax} + \frac{yy\,dx}{a}$, nous aurons $p = \frac{f}{ax}$, $q = \frac{1}{a}$, $n = 2$; la substitution de ces valeurs dans l'équation $y^{1-n} = z\int\frac{q\,dz}{pzz}$, donnera donc $\frac{1}{y} = z\int\frac{x\,dz}{fzz}$; la substitution de $p\,dx = \frac{dz}{(1-n).z}$ donnera $\frac{f\,dx}{ax} = -\frac{dz}{z}$; & supposant $f = 2$, $a = 1$, nous aurons $\frac{2\,dx}{x} = -\frac{dz}{z}$, c'est-à-dire $z = \frac{1}{xx}$, & par conséquent $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx}\int -xx\,dx$, & en intégrant, $\frac{1}{z} = \frac{1}{xx}\times(-\frac{1}{3}x^3 + c)$, c'est-à-dire $3cy - 3xx = x^3y$, comme on l'avoit déjà trouvé. On raisonnera de même pour les autres exemples.

EXEMPLE V.

Soit l'équation $ax^4y\,dy - bx^4y\,dy = ayyx^3dx - byyx^3dx + a^6dx - x^6dx$, qui divisée par $ax^4y - bx^4y$, devient $dy = \frac{y\,dx}{x} + \frac{a^6dx - x^6dx}{ax^4y - bx^4y}$, qui est le cas de notre formule. On aura donc $p =$

$\frac{1}{x}$, $q=\frac{a^6-x^6}{ax^4-bx^4}$, $n=-1$; & la ſubſtitution $pdx=\frac{dz}{(1-n).z}$ donnera $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{2z}$, d'où l'on a $z=xx$. Ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation finale $y^{1-n}=z\int\frac{qdz}{pzz}$, on aura $yy=xx\int\frac{(a^6-x^6).2xdx}{(ax^4-bx^4).x^3}$, où les indéterminées ſont ſéparées.

27. Si l'équation canonique étoit $y^{n-1}dy=pdx+qy^ndx$, p & q étant toujours données en x d'une manière quelconque, on ſépareroit les indéterminées en faiſant $qdx=\frac{dz}{nz}$, & $dx=\frac{dz}{nqz}$; car après les ſubſtitutions, on auroit $y^{n-1}dy=\frac{pdz}{nqz}+\frac{y^ndz}{nz}$, c'eſt-à-dire $\frac{nzy^{n-1}dy-y^ndz}{z}=\frac{pdz}{qz}$, ou en diviſant par z, $\frac{nzy^{n-1}dy-y^ndz}{zz}=\frac{pdz}{qzz}$, & en intégrant, $\frac{y^n}{z}=\int\frac{pdz}{qzz}$, ou bien $y^n=z\int\frac{pdz}{qzz}$, équation où les variables ſont ſéparées.

EXEMPLE

Soit l'équation $2aaxydy=aayydx+2bx^3dx$; c'eſt-à-dire $ydy=\frac{bxxdx}{aa}+\frac{yydx}{2x}$. On a $n=2$, $p=\frac{bxx}{aa}$, $q=\frac{1}{2x}$, & par conſéquent $\frac{yy}{z}=$

$\int \frac{2bx^3dz}{aazz}$; mais $qdx = \frac{dx}{2x} = \frac{dx}{2z}$, & $x = z$; donc $\frac{yy}{x} = \int \frac{2bxdx}{aa}$, & en intégrant, $\frac{yy}{x} = \frac{bxx}{aa} \pm c$, qui eſt une courbe algébrique.

On pourroit encore conſtruire tant la formule générale $y^{n-1}dy = pdx + qy^n dx$, que la formule particulière de l'exemple, en employant la méthode du n°. 24.

28. Je remarquerai, avant de finir ce Chapitre, que les indéterminées confuſément mêlées avec leurs différentielles dans l'équation propoſée, peuvent quelquefois ſe démêler & ſe diſpoſer à la ſéparation, lorſqu'il eſt permis de faire des changements ou altérations aux coëfficients; cela arrive particulièrement lorſque les expoſants ſont formés des coëfficients. Cet artifice peut réuſſir ſur-tout dans les Problêmes Phyſico-Mathématiques, qui raſſemblant ſouvent des grandeurs de genres aſſez différents, laiſſent plus de liberté pour employer des quantités conſtantes qui ſoient favorables au but qu'on ſe propoſe.

Pour en donner un exemple, je me propoſerai l'équation $x^m dx + (by + yy)\frac{cdx}{x} = ydy$, qui préparée ſuivant la méthode du n°. 24, devient $x^m dx + \frac{bcydx}{x} = yy.\left(\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x}\right)$. Je fais donc $\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x} = \frac{dp}{p}$, d'où je tire $y = px^c$, & $yy = ppx^{2c}$. Ces valeurs ſubſtituées comme il convient, donnent l'équation $x^m dx + bcpx^{c-1}dx = x^{2c}pdp$, ou bien $x^{m-2c}dx + bcpx^{-c-1}dx = pdp$.

Il est évident que si les exposans r [illegible] $c-1$, de l'indéterminée x étoient [illegible] riables seroient séparées ; puisqu'il [illegible] diviser les deux membres de l'équat[illegible] $1+bcp$. Si l'on suppose donc m [illegible] il s'ensuivra que $m+1=c$; ainsi la séparation réussira en faisant $c=m+1$. Si c tient lieu d'unité, supposition qu'il est permis de faire, on aura $m=0$; & si $c=2$, on aura $m=1$, & ainsi des autres.

Cet artifice peut s'appliquer à toutes les autres équations de même genre, par exemple à celle-ci : $x^n dx + \frac{cby^n dx}{x} + \frac{gy^r dx}{x} = y^t dy$, en supposant $t=r-1$, ou bien $t=n-1$; & l'on arrivera plutôt au but, en faisant usage des logarithmes.

CHAPITRE III.

Construction de quelques équations plus limitées, par le moyen de différentes substitutions.

29. ON pourra toujours séparer les indéterminées de l'équation $(x^n dx \pm ay^n dy)p = (xdy - ydx)q$, dans laquelle p & q sont données par x & y mêlées d'une manière quelconque, mais algébrique, avec la condition cependant que la somme des exposants de x & de y soit la même dans tous les termes qui composent p, & la même dans tous ceux qui composent q, quoiqu'elle puisse être différente

de celle de p. Les substitutions qu'il faut faire sont celles-ci : $y = tz^{\frac{2}{n+1}}$, $x = t.(a^2 \mp azz)^{\frac{1}{n+1}}$. Si l'on met au lieu de x, dx, y, dy leurs valeurs respectives, & que l'on fasse les opérations convenables, on arrivera après un long calcul à cette

équation : $t^{n-1}dt = \dfrac{\frac{n+1}{2} z^{\frac{1-n}{n+1}} dz}{(a^2 \mp azz)^{\frac{n}{n+1}}} \times \dfrac{q}{p}$.

Mais puisque dans chaque terme de p la somme des exposants de x & de y est la même, qu'elle est la même aussi dans chaque terme de q : si l'on fait encore dans chaque terme de p la substitution des valeurs données en t & en z, ils auront tous la même puissance de t ; il en faut dire autant des termes qui composent q ; c'est-à-dire que le second membre de l'équation sera multiplié par une puissance positive ou négative de t, & qu'ainsi on n'aura qu'à diviser ou multiplier le premier membre par cette puissance, & les variables seront séparées.

EXEMPLE.

Soit l'équation $(xdx + aydy)\sqrt{y} = (xdy - ydx)\sqrt{a}$; on aura $n = 1$, $p = \sqrt{y}$, $q = \sqrt{a}$, & par conséquent $\dfrac{dt}{t} = \dfrac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{[a^2 - azz]}.\sqrt{y}}$; mais $y = tz^{\frac{2}{n+1}} = tz$; donc $\dfrac{dt}{\sqrt{t}} = \dfrac{dz.\sqrt{a}}{\sqrt{(a^2z - az^3)}}$.

On sépareroit encore les variables dans cette équation, quand même l'exposant n seroit négatif, c'est-à-dire si l'équation étoit $(x^{-n}dx \pm ay^{-n}dy).p =$

$(xdy - ydx).q$. Les ſubſtitutions qu'il faut faire alors ſont $y = sz^{\frac{2}{1-n}}$, $x = t.(a^3 \mp azz)^{\frac{1}{1-n}}$; & elles donnent cette équation $t^{-n-2}dt = \ldots\ldots$

$$\frac{\left(\frac{2}{1-n} z^{\frac{1+n}{1-n}} dz\right).q}{(a^3 \mp azz)^{\frac{-n}{1-n}}},$$ la même que ci-deſſus, ſi on en excepte les ſignes de n.

Et puiſque l'équation peut auſſi s'exprimer de cette manière $(y^n dx \pm ax^n dy).\frac{p}{x^n y^n} = (xdy - ydx).q$, il s'enſuit qu'on conſtruira auſſi cette équation au moyen de la même ſubſtitution.

30. SOIT plus généralement l'équation $(x^n dx \pm ey^{\frac{-n-1-c}{c}} dy).p = (xdy + cydx).q$. On en ſéparera toujours les variables en faiſant les ſubſtitutions $x = t^{\frac{-s}{c}}.(a \pm acz^{-\frac{r}{c}})^{\frac{1}{n+1}}$, $y = t^s z^{\frac{r}{n+1}}$, ($s$ & r ſont des nombres à volonté), pourvu cependant que p & q ſoient des quantités algébriques, & telles que dans chaque terme de p, l'expoſant de y multiplié par c, ſurpaſſe l'expoſant de x, ou en ſoit ſurpaſſé de la même quantité ou du même excès, qu'il en ſoit de même dans chaque terme de q, ſans qu'il ſoit néceſſaire que l'excès ſoit le même dans p & dans q. Par exemple, c étant $= 3$, ſoit $p = byyx^4 + fy^5x^{15}$ &c., & $q = gy^{\frac{1}{3}}x^3 - hy^{10}x^{\frac{81}{3}}$ &c. Il eſt facile de voir que c ne pourra pas être zero. En faiſant dans l'équation propoſée les ſubſtitutions convenables au lieu de x & de y, on aura l'équation

suivante, $-\frac{s}{c} t^{\frac{-sn-s-cs}{c}} dt = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\frac{r}{n+1} z^{\frac{r-n-1}{n+1}} dz \cdot \frac{q}{p}}{\left(a \pm acz^{\frac{-r}{c}}\right)^{\frac{n}{n+1}}}.$$

EXEMPLE.

Soit $(x dx + a y^{-3} dy) \cdot \frac{1}{y} = (x dy + y dx) \cdot x$; & supposons $s = 1$, $r = 2$. On a $n = 1$, $c = 1$, $p = \frac{1}{y}$, $q = x$; & faisant les substitutions dans la dernière équation trouvée ci-dessus, on aura $-t^{-3} dt = \frac{dz \cdot xy}{(a + az^{-2})^{\frac{1}{2}}}$. Mais par les substitutions déja faites, on a $x = t^{-1} \cdot (a + az^{-2})^{\frac{1}{2}}$, & $y = tz$; donc $xy = z \cdot (a + az^{-2})^{\frac{1}{2}}$; ainsi l'on aura $-\frac{dt}{t^3} = z dz$.

31. PLUS généralement encore, soit l'équation $(x^n dx \pm a y^{\frac{-nf-c-f}{c}} dy) p = (f x dy + c y dx) \cdot q$ qui embrasse comme cas particuliers les deux équations canoniques des numéros précédents, c'est-à-dire celle du n°. 30, lorsque $f = 1$; & celle du n°. 29, lorsque $f = 1$, & $c = -1$.

On séparera les indéterminées par le moyen des substitutions $y = t^{\frac{s}{f}} z^{\frac{r}{f \cdot (n+1)}}$, & $x = t^{\frac{-s}{c}} \cdot \left(a \pm \frac{acz^{\frac{-r}{c}}}{f}\right)^{\frac{1}{n+1}}$; il faut cependant que dans chaque terme des quantités p & q, l'exposant de y multiplié par c, surpasse l'exposant de x multiplié par f, ou en soit surpassé de la même quantité. Les mêmes grandeurs p, q, peuvent être fractionnaires, ou mêlées d'entiers & de fractions, rationnelles ou irrationnelles, comme on voudra. Les indéterminées pourront donc être séparées, pourvu que p & q soient données en x & en y, de manière qu'après avoir fait les substitutions indiquées, il en naisse des quantités composées de deux facteurs, dont l'un contienne z sans t, & l'autre contienne t sans z.

Après les substitutions dont on a parlé, on aura cette formule, $-\frac{s}{c} t^{\frac{-fc-fsn-sc}{cf}} dt = \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{r}{n+1} z^{\frac{r-fn-f}{fn+f}} dz \cdot \frac{q}{p}}{\left(a \pm \frac{acz^{\frac{-r}{c}}}{f}\right)^{\frac{n}{n+1}}},$$

EXEMPLE I.

Soit $(xxdx + ay^3dy).y = (-3xdy + ydx).ax$. Faisons comme auparavant $s = 1$, $r = 2$, on aura $f = -3$, $c = 1$, $n = 2$, $q = ax$, $p = y$, & après qu'on aura fait les substitutions dans la dernière formule qui a été trouvée ci-dessus, on aura $-t^{\frac{-8}{3}} dt =$

$$\frac{\frac{2}{3} z^{\frac{-11}{9}} dz \cdot \frac{ax}{y}}{\left(a - \frac{az^{-2}}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$ Mais $y = t^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{9}}$, & $x = t^{-1}$.

$\left(a-\frac{az^{-2}}{3}\right)^{\frac{1}{r}}$; on aura donc $-\frac{dt}{tt}=\ldots\ldots$
$\frac{2adz}{3z\cdot\left(a-\frac{az^{-2}}{3}\right)^{\frac{1}{r}}}$.

EXEMPLE II.

Soit $(x^{\frac{1}{2}}dx+ay^{-2}dy).(ay^{\frac{1}{2}}x+yyx^{\frac{11}{4}})=(2xdy+3ydx)(y^{\frac{1}{2}}x-yxx)$; & que l'on suppose $s=1$, $r=1$. On aura $c=3$, $f=2$, $n=\frac{1}{2}$, $p=ay^{\frac{1}{2}}x+yyx^{\frac{11}{4}}$, $q=y^{\frac{1}{2}}x-yxx$; & les substitutions donneront cette équation où les variables sont séparées :

$$-\frac{\frac{2}{3}dt}{t^{\frac{11}{12}}}=\frac{\frac{2}{3}z^{-\frac{3}{2}}dz.\left(a+\frac{3az^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{2}}dz.\left(a+\frac{3az^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)}{az^{\frac{1}{2}}.\left(a+\frac{3az^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}.\left(a+\frac{3az^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{11}{6}}}.$$

32. DANS les équations

1. $pxy^{n-1}dy=\quad py^ndx+qdx$,
2. $pxy^{n-1}dy=-py^ndx+qdx$,
3. $apxy^{n-1}dy=\quad bpy^ndx+qdx$,
4. $apxy^{n-1}dy=-bpy^ndx+qdx$,

dans lesquelles on suppose p & q donnés d'une manière quelconque en x, on séparera les indéterminées, en faisant pour la première $y=xz$; pour la seconde $y=\frac{z}{x}$; pour la troisième $y=x^{\frac{b}{a}}z$; & pour la quatrième $y=x^{\frac{-b}{a}}z$.

EXEMPLE.

Soit l'équation $2hhxyydy - 2x^3yydy = hx^4dx - 3hhy^3dx + 3xxy^3dx$, que j'écris ainsi : $(hh - xx)\,2xyydy = hx^4dx + (hh - xx)\times(-3y^3dx)$. Je rapporte cette dernière équation à la quatrième formule, & j'ai $p = hh - xx$, $a = 2$, $n = 3$, $b = 3$, $q = hx^4$. Il faudra donc supposer

$y = \frac{z}{x^{\frac{3}{2}}}$, $dy = \frac{x^{\frac{3}{2}}dz - \frac{3}{2}zx^{\frac{1}{2}}dx}{x^3}$, $yy = \frac{zz}{x^3}$, $y^3 = \frac{z^3}{x^{\frac{9}{2}}}$; & après les substitutions j'aurai $(2hhx - 2x^3)\times$

$\frac{x^{\frac{3}{2}}zzdz - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}z^3dx}{x^6} = hx^4dx + (3hh - 3xx)\times\left(\frac{-z^3dx}{x^{\frac{9}{2}}}\right)$, ou $(2hh - 2xx).(xzzdz - \frac{3}{2}z^3dx) =$

$hx^{\frac{17}{2}}dx + (3hh - 3xx).(-z^3dx)$, & en faisant les multiplications indiquées, $2hhxzzdz - 2x^3zzdz =$

$hx^{\frac{17}{2}}dx$, c'est-à-dire $zzdz = \frac{hx^{\frac{17}{2}}dx}{2hhx - 2x^3}$.

33. SOIT l'équation $axdy + bydx + cy^nx^{m-1}dx + fx^my^{n-1}dy = 0$. On en séparera généralement les indéterminées en supposant $x = u^{n-1}z^{n-1}$, & $y = z^{1-m}$; en effet ces substitutions donnent $(1-m).(adz + fu^{mn-m-n+1}dz) + (n-1).(bdz + cu^{mn-m-n+1}dz) = (n-1)(-bzu^{-1}du - czu^{mn-m-n}du)$, ou $\frac{dz}{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{(n-1).(-bu^{-1}du - cu^{mn-m-n}du)}{(1-m).(a + fu^{mn-m-n+1}) + (n-1).(b + cu^{mn-m-n+1})}.$$

EXEMPLE.

Soit proposée l'équation $a^3xdy - b^3ydx = cyyxdx - fxxydy$. On aura donc $n = 2$, $m = 2$; ainsi on fera $x = \frac{uz}{a}$, & $y = \frac{aa}{z}$, c'est-à-dire $x = \frac{au}{y}$, & par conséquent $dx = \frac{aydu - audy}{yy}$, & les substitutions donneront $\frac{a^4udy}{y} - b^3 \times \frac{aydu - audy}{y} = \frac{caayudu - caauudy}{y} - \frac{faauudy}{y}$, c'est-à-dire $a^4udy + ab^3udy + aacuudy + faauudy = ab^3ydu + aacyudu$, & par conséquent $\frac{dy}{y} = \frac{ab^3du + aacudu}{a^4u + ab^3u + aacuu + aafuu}$.

54. SI l'on a l'équation $\frac{ydx}{(bx^{\frac{1}{m}} + ay^nx^r)^m} = dy$, ou plus généralement $\frac{x^{mt-1}ydx}{(bx^t + ay^nx^r)^m} = dy$; on en séparera les indéterminées, en supposant $(bx^t + ay^nx^r)^m = zx^{mt}$, ensuite $y = \frac{(z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$, & par conséquent $dy = \frac{\frac{1}{n}(z^{\frac{1}{n}}x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{1-n}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}} \times$ $\left(\frac{1}{m}x^{t-r}z^{\frac{1}{n}-1}dz + (t-r)z^{\frac{1}{n}}x^{t-r-1}dx + (t-r)(-bx^{t-r-1}dx)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{x^{-1}dx.(z^{\frac{1}{m}}x^{t-r}-bx^{t-r})^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}z}$. En mettant dans l'équation générale proposée la valeur de y & de y^n divisant ensuite par $\frac{(z^{\frac{1}{m}}x^{t-r}-bx^{t-r})^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$, & réduisant, on trouvera $\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}}dz+(t-r)z^{\frac{1}{m}}x^{-1}dx+(t-r).(-bzx^{-1}dx)=nz^{\frac{1}{m}}x^{-1}dx-nbx^{-1}dx$, & par conséquent . . . .

$$\frac{z^{\frac{1}{m}}dz}{mnz^{\frac{1}{m}}+(mr-mt)z^{\frac{1}{m}+1}+(mr-mt).(-bz)-mnb}=\frac{dx}{x}.$$

S'il y avoit eu des termes avec le signe négatif, on auroit procédé de la même manière, & toute la différence qui se feroit trouvée dans l'équation finale, auroit été dans les mêmes signes.

35. PRENONS l'équation $\frac{y^n dx}{(bx^t+ay^n x^r)^m}=cx^{\frac{nt-mnt-t+r+n-nr}{n}}dy$, qui est encore plus générale que la précédente ; on en séparera les indéterminées au moyen de la même substitution.

EXEMPLE I.

Soit l'équation $\frac{aaydx}{\sqrt{[bbxx-a^3y]}}=bdy$. Je suppose $\sqrt{[bbxx-a^3y]}=xz$, par conséquent $y=\frac{bbxx-zzxx}{a^3}$, & $dy=\frac{2bbxdx-2zzxdx-2xxzdz}{a^3}$;

& substituant, j'aurai $\frac{aadx}{xz} \times \frac{bbxx - zzxx}{a^3} = \frac{2b^3xdx - 2bzzxdx - 2bxxzdz}{a^3}$, c'est-à-dire $2bxxzzdz = 2b^3zxdx - 2bz^3xdx + aazzxdx - aabbxdx$, & par conséquent . . . . $\frac{2bzzdz}{2b^3z - 2bz^3 + aazz - aabb} = \frac{dx}{x}$.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $\frac{xydx}{\sqrt{[-bbx^4 + a^3xyy]}} = \frac{dy}{b}$. Je suppose $\sqrt{[-bbx^4 + a^3xyy]} = zxx$, & par conséquent $y = \sqrt{\left[\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}\right]}$, & $dy = \ldots$ $\frac{x^3zdz + \frac{3}{2}zzxxdx + \frac{3}{2}bbxxdx}{a^3\sqrt{\left[\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}\right]}}$. Faisant donc les substitutions, j'aurai $\frac{xdx}{zxx}\sqrt{\left[\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}\right]} = \frac{x^3zdz + \frac{3}{2}zzxxdx + \frac{3}{2}bbxxdx}{a^3b\sqrt{\left[\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}\right]}}$, c'est-à-dire . . . $bzzxxdx + b^3xxdx - \frac{3}{2}z^3xxdx - \frac{3}{2}bbzxxdx = x^3zzdz$, & par conséquent $\frac{dx}{x} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{zzdz}{bzz - \frac{3}{2}z^3 - \frac{3}{2}bbz + b^3}$.

36. AVEC la même substitution, on séparera aussi les indéterminées de l'équation $\frac{y^q dy}{(bx^s + ay^nx^r)^m} = cx^{\frac{sq - n - smn - rq + s - r}{n}}dx$. On supposera donc $(bx^s + ay^nx^r)^m =$

$(bx^t + ay^n x^r)^m = x^{mt} z$, ce qui donne $y = \ldots$

$\dfrac{(x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r})^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$, & $dy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\left(\frac{x^{t-r} z^{\frac{1-m}{m}} dz}{mn} + \frac{t-r}{n} z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + \frac{r-t}{n} b x^{t-r-1} dx\right)}{a^{\frac{1}{n}}} \times$$

$\left(x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}\right)^{\frac{1-n}{n}}$; on fera les substitutions, & on aura cette équation $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\left(\frac{x^{t-r} z^{\frac{1-m}{m}} dz}{mn} + \frac{(t-r)}{n} z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + \frac{r-t}{n} b x^{t-r-1} dx\right)}{a^{\frac{u+1}{n}} x^{tm} z} \times$$

$$\left(x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}\right)^{\frac{u-n+1}{n}} = cx^{\frac{tu-n-tmn-ru+t-r}{n}} dx.$$

Si l'on multiplie maintenant toute l'équation par $a^{\frac{u+1}{n}} z$, si l'on divise le numérateur & le dénominateur du premier membre par x^{tm}, & si au lieu de $(x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r})^{\frac{u+1-n}{n}}$, on met la quantité équivalente $x^{\frac{tu-tn+t-ru+nr-r}{n}} \times (z^{\frac{1}{m}} - b)^{\frac{u+1-n}{n}}$, & qu'on réunisse les dimensions de la lettre x, on trouvera que l'équation sera divisible par $\ldots\ldots$ $x^{\frac{tu-n-tmn-ru+t-r}{n}}$; on la divisera en effet par cette quantité, & ensuite par la quantité $\ldots\ldots\ldots$ $(z^{\frac{1}{m}} - b)^{\frac{u+1-n}{n}}$, & l'on aura enfin $\dfrac{x z^{\frac{1-m}{m}} dz}{mn} =$

$\frac{r-t}{n} z^{\frac{1}{n}} dx + \frac{t-r}{n} b\,dx + ca^{\frac{u+1}{n}} z\,dx \times \ldots\ldots$ $(z^{\frac{1}{n}} - b)^{\frac{n-u-1}{n}}$, ou $\frac{dx}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{z^{\frac{1-m}{n}} dz}{mnca^{\frac{u+1}{n}} z.(z^{\frac{1}{n}} - b)^{\frac{n-u-1}{n}} + (mr - mt).z^{\frac{1}{n}} + (mt - mr).b}.$$

EXEMPLE.

Soit l'équation $\frac{y^3 dy}{\sqrt{[bbxx - aaxy - abxy]}} = \frac{xxdx}{c}$. Je suppose $\sqrt{[bbxx - aaxy - abxy]} = xz$, par conséquent $y = \frac{bbxx - zzxx}{aax + abx} = \frac{bbx - zzx}{aa + ab}$, $dy = \frac{bbdx - zzdx - 2xzdz}{aa + ab}$. Or ces substitutions me donnent $\frac{(bbx - zzx)^3}{(aa + bb)^3} \times \frac{bbdx - zzdx - 2xzdz}{(aa + ab).xz} = \frac{xxdx}{c}$. Ecrivant $x^3.(bb - zz)^3$ au lieu de $(bbx - zzx)^3$, & multipliant toute l'équation par $(aa + ab)^4.zx$, & divisant ensuite par $x^3.(bb - zz)^3$, j'aurai $- bbdx - zzdx - 2xzdz = (aa + ab)^4.$ $(bb - zz)^{-3}.\frac{zdx}{c}$, c'est-à-dire $bbdx - zzdx + (aa + ab)^4.(bb - zz)^{-3}.\left(-\frac{zdx}{c}\right) = 2xzdz$. & par conséquent $\frac{dx}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{2zdz}{bb - zz - \frac{z}{c}(bb - zz)^{-3}.(aa + ab)^4}.$$

37. La même substitution réussira aussi dans cette équation plus générale $\frac{(hx^t+fy^nx^r)^p \cdot y^{n-1}dy}{(bx^t+ay^nx^r)^m} =$ $cx^{\frac{nt-n-tmn-rn+t-r+ntp}{n}}dx$; & même dans celle-ci $\frac{y^{n-1}dy}{(bx^t+cx^r+ay^nx^r)^m} = fx^{t-r-1-mt}dx$; alors il faudra supposer $(bx^t+cx^r+ay^nx^r)^m = x^{mt}z$; dans cette supposition, si $m=1$, on aura le cas particulier du n°. 27, & si $c=0$, on aura le cas particulier du n°. 36. De plus, au moyen de la même substitution $(ax^t+bx^r+cy^nx^r)^m = x^{mt}z$, on pourra construire encore l'équation ....
$\frac{(gx^t+hx^r+ky^nx^r)^p \cdot y^{n-1}dy}{(ax^t+bx^r+cy^nx^r)^m} = fx^{t-r-1+pt-mt}dx$, pourvu cependant que $ch=bk$. Et si l'on avoit en outre $h=0$, & $b=0$, on tomberoit dans un cas particulier de la première équation du n°. actuel.

38. On construira les équations $\frac{ady}{b+(cy^n+fx)^p} =$ $gy^{1-n}dx$, $\frac{ay^{n-1}dy}{b+(cy^n+fx^n)^p} = gy^{n-1}dx$, en supposant pour la première $(cy^n+fx)^p = z$, & pour la seconde $(cy^n+fx^n)^p = z$. Quant à la première, on aura $y = \frac{(z^{\frac{1}{p}}-fx)^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}$, $dy = \frac{1}{n} \times$ ....
$\frac{(z^{\frac{1}{p}}-fx)^{\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} \times \left(\frac{1}{p} z^{\frac{1-p}{p}}dz - fdx\right)$, & par conséquent les substitutions donneront $az^{\frac{1-p}{p}}dz =$

$nubcg\,dx + nucgz\,dx + auf\,dx$, c'est-à-dire $\frac{a z^{\frac{1-u}{u}} dz}{nubcg + nucgz + auf} = dx$. A l'égard de la seconde, on aura $y = \frac{(z^{\frac{1}{u}} - f x^m)^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}$, par conséquent

$$dy = \frac{\frac{1}{n}(z^{\frac{1}{u}} - f x^m)^{\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} \times \left(\frac{1}{u} z^{\frac{1-u}{u}} dz - \ldots\right.$$

$\left. m f x^{m-1} dx\right)$; & les substitutions donneront

$$x^{m-1} dx = \frac{a z^{\frac{1-u}{u}} dz}{bcgnu + cgnuz + mafu}.$$

Si l'équation prise d'une manière plus générale, étoit $\frac{a y^{n-1} dy}{b + (cy^n + p)^u} = g q\,dx$, p & q étant données d'une manière quelconque en x & en constantes, pourvu que q soit $= \frac{dp}{dx}$, on sépareroit aussi les indéterminées en faisant $(cy^n + p)^u = z$. Car on auroit alors $y = \frac{(z^{\frac{1}{u}} - p)^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}$, $dy = \frac{\frac{1}{n}(z^{\frac{1}{u}} - p)^{\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} \times$ $\left(\frac{1}{u} z^{\frac{1-u}{u}} dz - dp\right)$; les substitutions donneroient $a z^{\frac{1-u}{u}} dz = nbcguq\,dx + ncguzq\,dx + au\,dp$; ainsi, puisque $dp = q\,dx$, on auroit ....

$$\frac{a z^{\frac{1-u}{u}} dz}{nbcgu + ncguz + au} = q\,dx.$$

EXEMPLE I.

Soit l'équation $a^3dy = 6b^3dx - 3bbdx\sqrt{[y+bx]}$, c'est-à-dire $\frac{a^3dy}{2b-\sqrt{[cy+bx]}} = 3bbdx$. Supposant $\sqrt{[cy+bx]} = z$, j'aurai $y = \frac{zz-bx}{c}$, $dy = \frac{2zdz-bdx}{c}$; & en faisant les substitutions..... $\frac{2a^3zdz - a^3bdx}{2bc-cz} = 3bbdx$, ou bien $2a^3zdz = 6b^3cdx - 3bbczdx + a^3bdx$, & par conséquent $\frac{2a^3zdz}{6b^3c - 3bbcz + a^3b} = dx$.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $\frac{ayydy}{b+\sqrt[3]{(y^3+aax-bxx)}} = aadx - 2bxdx$. Supposant $(y^3+aax-bxx)^{\frac{1}{3}} = z$, j'ai $y = (z^3-aax+bxx)^{\frac{1}{3}}$, $dy = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{\frac{1}{3}(3zzdz - aadx + 2bxdx)}{(z^3-aax+bxx)^{\frac{2}{3}}}$. Faisant ensuite les substitutions, je trouve l'équation ....

$$\frac{\frac{a}{3}(3zzdz - aadx + 2bxdx)}{b+z} = aadx - 2bxdx,$$

c'est-à-dire $3azzdz = a^3dx - 2abxdx + 3aabdx - 6bbxdx + 3aazdx - 6bzxdx$, ou bien..

$$\frac{3azzdz}{a+3b+3z} = aadx - 2bxdx.$$

39. DANS la formule $ax^mdx + cyyx^ndx = dy$,

les indéterminées ne font pas féparables en général, & quel que foit l'expofant de m; mais il y a une infinité de cas, c'eft-à-dire que l'expofant m peut avoir une infinité de valeurs qui permettent cette féparation.

Pour déterminer ces valeurs, je me fers d'une méthode femblable à celle du n°. 23. Je fais $y = Ax^p + x^r t$; (la quantité A, & les expofants p, r font des conftantes arbitraires à déterminer dans la fuite, & t eft une nouvelle variable). J'aurai donc $dy = pAx^{p-1}dx + rtx^{r-1}dx + x^r dt$, & $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r}t + ttx^{2r}$; je fubftitue ces valeurs dans la formule propofée, & j'ai $ax^m dx + cAAx^{2p+n}dx + 2cAtx^{p+r+n}dx + cttx^{2r+n}dx = pAx^{p-1}dx + rtx^{r-1}dx + x^r dt$. Que l'on fuppofe $cAA = pA$, $2p + n = p - 1$, $r = 2cA$; c'eft-à-dire $p = -n - 1$, $A = \frac{-n-1}{c}$, $r = -2n - 2$; au moyen de quoi les fecond, troifième, cinquième & fixième termes de cette dernière formule s'évanouiront, & il reftera $ax^m dx + cttx^{-3n-4}dx = x^{-2n-2}dt$, c'eft-à-dire $ax^{m+2n+2}dx + cttx^{-n-2}dx = dt$, ou bien (D) $ax^k dx + cttx^\lambda dx = dt$, en défignant $m + 2n + 2$ par k, & $-n - 2$ par λ.

Je reprends l'équation propofée $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$. En faifant $y = \frac{1}{z}$, elle fe transforme en celle-ci $azzx^m dx + cx^n dx = -dz$, pour laquelle je fuppoferai comme ci-deffus $z = Bx^q + x^i u$, (B, q & i étant encore des conftantes à déterminer dans la fuite, & u défignant une nouvelle inconnue). J'aurai donc $dz = qBx^{q-1}dx + iux^{i-1}dx + x^i du$, $zz = BBx^{2q} + 2Bx^{q+i}u + uux^{2i}$; & en fubftituant ces valeurs, $aBBx^{2q+m}dx +$

$2aBux^{q+i+n}dx + auux^{2i+n}dx + cx^n dx = -qBx^{q-1}dx - iux^{i-1}dx - x^i du$. Si je suppose maintenant $aBB = -Bq$, $2q + m = q - 1$, $-i = 2aB$, c'est-à-dire $q + m = -1$, $B = \frac{m+1}{a}$, $i = -2m - 2$; cela fera disparoître les premier, second, cinquième & sixième termes de cette dernière formule; & j'aurai seulement $auux^{-3m-4}dx + cx^n dx = -x^{-2m-2}du$, ou en divisant par x^{-2m-2}, $cx^{2m+n+2}dx + auux^{-m-2}dx = -du$, ou bien enfin (G) $cx^{\delta}dx + auux^{\mu}dx = -du$, en supposant $\delta = 2m + n + 2$, $\mu = -m - 2$.

Or on peut séparer les indéterminées de l'équation proposée, lorsque $m = n$; on pourra donc les séparer aussi dans les formules D & G lorsque $m + 2n + 2 = -n - 2$, & lorsque $2m + n + 2 = -m - 2$; ce qui donne deux valeurs de m, savoir $m = -3n - 4$, $m = \frac{-n-4}{3}$, avec lesquelles la séparation des indéterminées réussit. Il y a plus: puisque dans l'équation proposée les indéterminées sont séparables lorsque $m = \frac{-n-4}{3}$, elles le seront encore dans les formules D & G, lorsqu'on aura $k = \frac{-x-4}{3}$, $\delta = \frac{-\mu-4}{3}$; d'où l'on tire encore deux valeurs de m qui admettent la séparation, savoir $m = \frac{-5n-8}{3}$, $m = \frac{-3n-8}{3}$.

En répétant le même raisonnement, on aura un nombre infini de valeurs de m qui rendent les indéterminées séparables; telles sont celles-ci, $m = \frac{-7n-12}{5}$, $m = \frac{-5n-12}{7}$, $m = \frac{-5n-16}{7}$,

$m = \frac{-7n-16}{9}$, &c; & en général $m = \dots\dots$; $\frac{(2h \mp 1).(-n) - 4h}{2h \mp 1}$, en prenant pour h un nombre entier positif quelconque, & même l'unité.

Ajoutons à tout cela que les indéterminées se sépareront encore dans l'équation proposée, lorsque l'exposant m sera tel que l'équation pourra être ramenée au cas du n°. 14, par le moyen de la méthode enseignée au n°. 19.

Ce seroit ici le lieu de faire usage de deux Mémoires du savant M. Euler, imprimés parmi ceux de l'Académie de Péterſbourg (tome 6); mais l'explication de la méthode subtile & adroite que l'Auteur employe, me semble surpasser les limites que je me suis prescrites, en donnant le titre de *Traité élémentaire* à cet Ouvrage; je me contenterai donc d'avoir indiqué ces Mémoires à mes Lecteurs, qui les consulteront s'ils le jugent à propos.

PROBLEME I.

40. *TROUVER la courbe dont la sou-tangente est égale au quarré de l'ordonnée divisé par une constante?*

Appellant les abscisses x, & les ordonnées y, la sou-tangente qui est toujours $\frac{ydx}{dy}$ sera égale à $\frac{yy}{a}$; on aura donc l'équation $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, ou $adx = ydy$, & en intégrant $ax = \frac{yy}{2}$, ou $2ax = yy$, équation de la parabole ordinaire.

S'il falloit que la sou-tangente fût double de l'absciſſe, on auroit l'équation $\frac{ydx}{dy}=2x$, & par conſéquent $\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{y}$, & en intégrant, $\frac{1}{2}$L.$x+\frac{1}{2}$L.$a=$ L.y; (j'ajoute la conſtante $\frac{1}{2}$ L.a pour remplir la loi des homogènes); c'eſt-à-dire L.$\sqrt{ax}=$L.y, & ôtant les logarithmes $\sqrt{ax}=y$, ou bien $ax=yy$, qui eſt encore la parabole ordinaire.

S'il faut que la ſou-normale ſoit conſtante, on aura l'équation $\frac{ydy}{dx}=a$, ou $ydy=adx$; en intégrant, $\frac{yy}{2}=ax$, ou $yy=2ax$; c'eſt encore la parabole.

S'il faut que la ſou-tangente ſoit triple de l'abſciſſe, on aura $\frac{ydx}{dy}=3x$, ou $\frac{dx}{3x}=\frac{dy}{y}$, & en intégrant, L.$\sqrt[3]{[aax]}=$L.$y$, ou $aax=y^3$; c'eſt la première parabole cubique.

Si la ſou-tangente doit être multiple de l'abſciſſe un nombre quelconque de fois exprimé par m, on a l'équation $\frac{ydx}{dy}=mx$, c'eſt-à-dire $\frac{dx}{mx}=\frac{dy}{y}$; & en intégrant, L.$\sqrt[m]{[a^{m-1}x]}=$L.$y$, ou bien $a^{m-1}x=y^m$, qui eſt une courbe du genre des paraboles.

Si la ſou-tangente doit être $=\frac{2ax+xx}{a+x}$, alors l'équation ſera $\frac{ydx}{dy}=\frac{2ax+xx}{a+x}$, c'eſt-à-dire $aydx+yxdx=2axdy+xxdy$, ou bien $\frac{adx+xdx}{2ax+xx}=\frac{dy}{y}$; & en intégrant, L. $y=$

$\frac{1}{2}$ L. $(2ax+xx)$, & par conséquent $xx+2ax=yy$, équation à l'hyperbole.

S'il faut que la sou-tangente soit $=\frac{2axy-3x^3}{ay+3xx}$, l'équation sera $\frac{ydx}{dy}=\frac{2axy-3x^3}{ay+3xx}$, c'est-à-dire $ayydx+3yxxdx=2axydy-3x^3dy$. Selon ce qui a été dit au n°. 18, on commencera par ramener cette équation au cas du n°. 14. On supposera donc $y=\frac{zz}{a}$, $dy=\frac{2zdz}{a}$, & les substitutions faites, on aura $z^4dx+3zzxxdx=4xz^3dz-6x^3zdz$, qui est dans le cas dont on vient de parler. On séparera maintenant les indéterminées par la supposition de $z=\frac{xp}{a}$, qui donne $9aapdx-3p^3dx=4xppdp-6aaxdp$, & par conséquent $\frac{dx}{x}=\frac{4ppdp-6aadp}{9aap-3p^3}$. Passant à l'intégration, on aura L. $x=$ ...... L. $\frac{m}{\sqrt{(p^4-3aapp)}}$, & en remettant au lieu de p sa valeur $\frac{a\sqrt{ay}}{x}$, on aura enfin $x=$ .... $\frac{m}{\sqrt{\left[\frac{a^4yy-3a^3yxx}{x^4}\right]}}$, ou bien a^4yy- .... $3a^3yxx=m^3x$.

Les deux substitutions qu'on a faites de $y=\frac{zz}{a}$; & de $z=\frac{xp}{a}$ pour venir à bout de séparer les indéterminées, font voir qu'il eût suffi de faire dès le

commencement la supposition unique de $y = \frac{xxpp}{a^3}$.
Mais on parviendra plus promptement à cette séparation, si l'on écrit l'équation ainsi : $3yxxdx + 3x^3dy = 2axydy - ayydx$; car en divisant par xx, on a $3ydx + 3xdy = \frac{2axydy - ayydx}{xx}$, & intégrant sans ajouter de constante, $3xy = \frac{ayy}{x}$, c'est-à-dire $\frac{ay}{3} = xx$, qui est la parabole ordinaire.

Si l'on demande la courbe qui a pour sou-tangente $\frac{4x^3 - axy}{3xx - ay}$, on aura cette équation . . . . . $\frac{4x^3 - axy}{3xx - ay} = \frac{ydx}{dy}$, c'est-à-dire $4x^3dy - axydy = 3xxydx - ayydx$, que j'écris ainsi : $4x^3dy - 3yxxdx = axydy - ayydx$. Je remarque que le second membre deviendroit intégrable, si on le divisoit par xxy ; je divise donc ainsi toute l'équation, & j'ai $\frac{4xdy - 3ydx}{y} = \frac{axdy - aydx}{xx}$. Je suppose que l'intégrale $\frac{ay}{x}$ de ce second membre soit $= z$, & chassant y de l'équation, j'ai . . . . $\frac{4x.(xdz + zdx) - 3zxdx}{zx} = dz$, c'est-à-dire . . . $\frac{4xdz + zdx}{z} = dz$, équation qu'on peut construire par la méthode du n° 14. & qui préparée d'après celle du n°. 24, devient $x.\left(\frac{4dz}{z} + \frac{dx}{x}\right) = dz$.

Je fais donc $\frac{4dz}{z}+\frac{dx}{x}=\frac{dp}{p}$, & l'intégration me donne $L.z^4x = L.a^4p$, ou $z^4x=a^4p$. Je chasse x de l'équation finale, & j'ai $\frac{a^4p}{z^4}\times\frac{dp}{p}=dz$; c'est-à-dire $a^4dp=z^4dz$, & en intégrant $a^4p=\frac{z^5}{5}$. Enfin je remets d'abord la valeur de p, & ensuite celle de z, ce qui me donne $xx=\frac{ay}{5}$, qui est une équation à la parabole.

Si la sou-tangente doit être $\frac{(a+x)L.(a+x)}{a+L.(a+x)}$, l'équation sera $\frac{(a+x)L.(a+x)}{a+L.(a+x)}=\frac{ydx}{dy}$, c'est-à-dire $\frac{dy}{y}=\frac{adx+dxL.(a+x)}{(a+x)L.(a+x)}$. Pour intégrer, je fais $(a+x)L.(a+x)=z$, & par conséquent $dz=dxL.(a+x)+adx$, (je suppose que la sou-tangente de la log. soit $=a$). En substituant ces valeurs, j'ai $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$, & en intégrant $y=z$, c'est-à-dire $y=(a+x)L.(a+x)$, courbe transcendante, mais qu'il est facile de décrire par le moyen de la logarithmique.

PROBLEME II.

41. *TROUVER la courbe dont l'espace est égal aux deux tiers du rectangle des coordonnées?*

La formule des espaces est ydx, ainsi on aura $\int ydx=\frac{2}{3}xy$, & par conséquent $ydx=\frac{2}{3}xdy+$

$\frac{1}{2}ydx$, c'eſt-à dire $ydx = 2xdy$, ou bien $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$. En intégrant, j'ai comme ci deſſus, $L.\sqrt{ax} = L.y$, & $ax = yy$, qui eſt la parabole ordinaire.

Si l'eſpace doit être égal à la quatrième puiſſance de l'ordonnée diviſée par un quarré conſtant, l'équation ſera $\int ydx = \frac{y^4}{aa}$, c'eſt-à dire $ydx = \frac{4y^3dy}{aa}$, ou $aadx = 4yydy$; & en intégrant $\frac{3aax}{4} = y^3$, c'eſt la première parabole cubique.

Si l'eſpace doit être égal à la puiſſance m de l'ordonnée, diviſée par une conſtante, on aura $\int ydx = \frac{y^m}{a^{m-1}}$, c'eſt-à-dire $ydx = \frac{my^{m-1}dy}{a^{m-1}}$, ou bien $a^{m-1}dx = my^{m-2}dy$; & en intégrant $(m-1)a^{m-1}x = my^{m-1}$, courbe du genre des paraboles ou des hyperboles, ſuivant que $m-1$ ſera poſitif ou négatif.

PROBLEME III.

42. *ETANT donnée une infinité de paraboles d'un même genre quelconque, on demande quelle eſt la courbe qui les coupe toutes à angles droits?*

Soit l'équation $p^{m-n}x^n = y^m$, qui, puiſque p, m & n ſont des quantités arbitraires, peut repréſenter à l'infini les paraboles de tous les genres. Suppoſons d'abord qu'elles ayent toutes le même axe AB (Fig. 3), le même ſommet A, & qu'elles ne different que par le paramètre; & ſoit AC une de ces paraboles, dans laquelle $AB = x$, & $BC = y$. Fig. 3.

Que l'on mène à un point quelconque C la tangente CT & la normale CP; on aura $BT = \frac{mx}{n}$. Soit DC la courbe demandée; puisqu'elle doit couper perpendiculairement la parabole en C, elle se confondra nécessairement dans un petit espace avec CP normale au point C; ainsi CT qui est tangente de la parabole AC, est en même-temps normale de la courbe DC au point C, & BT est en même-temps sou-tangente de la parabole, & sou-normale de la courbe cherchée DC. Ce qui vient d'être dit relativement à la parabole AC, convient à toute autre parabole du même genre. Le Problême consiste donc à trouver la courbe DC qui a pour sous-normale $\frac{mx}{n}$. L'expression générale de la sou-normale est $\frac{ydy}{dx}$, qu'il faut prendre négative ici, parce que dans la courbe DC les x croissant, les y diminuent; l'équation différentielle sera donc $\frac{mx}{n} = -\frac{ydy}{dx}$, ou $\frac{mxdx}{n} = -ydy$; dont l'intégrale est $\frac{mxx}{2n} = -\frac{yy}{2} + aa$, ou bien $\frac{nyy}{m} = \frac{2naa}{m} - xx$, équation à l'ellipse. Comme le paramètre p n'est pas dans cette équation, la solution est générale, & regarde le nombre infini des paraboles décrites avec cet axe & ce sommet.

Si l'on suppose que l'exposant n, dans l'équation $p^{m-n}x^n = y^m$ soit négatif, & que l'équation soit par conséquent $x^n y^m = p^{m+n}$, elle exprimera une infinité d'hyperboles du même genre entre leurs asymptotes, qui ont pour sou-tangente $-\frac{mx}{n}$, quantité qui est aussi la sou-normale de la courbe DC; on aura donc $-\frac{mx}{n} = -\frac{ydy}{dx}$, c'est-à-dire $\frac{mxdx}{n} = ydy$; & en intégrant, $\frac{mxx}{2n} = \frac{yy}{2} + aa$, ou bien $xx - \frac{2naa}{m} = \frac{nyy}{m}$, qui est une équation de l'hyperbole.

Si toutes les paraboles AC, QC, &c, en nombre infini, désignées par l'équation $p^{m-n}z^n = y^m$, ont le même paramètre & le même axe, mais un sommet différent; ou, pour m'exprimer plus précisément, si l'on conçoit que l'une des paraboles se meuve continuellement le long de son axe, en restant toujours parallèle à elle-même: que l'on prenne, à compter d'un point fixe A (Fig. 4), une ligne quelconque $AB = x$, & soit QC une quelconque des paraboles dont l'abscisse $QB = z$, & l'ordonnée $BC = y$; la sou-normale de la courbe cherchée DC, ainsi que la sou-tangente BT de la parabole QC, seront exprimées l'une & l'autre par $-\frac{ydy}{dx}$; ainsi l'équation de la courbe sera $-\frac{ydy}{dx} = \frac{mz}{n}$; mais par l'équation de la parabole, on a $z = \frac{y^{\frac{m}{n}}}{p^{\frac{m-n}{n}}}$; donc $-\frac{ydy}{dx} = \frac{my^{\frac{m}{n}}}{np^{\frac{m-n}{n}}}$, c'est-à-dire $dx = -\frac{n}{m}p^{\frac{m-n}{n}}y^{1-\frac{m}{n}}dy$; &

Fig. 4

en intégrant $x = \frac{-nnp^{\frac{m-n}{n}} y^{\frac{2n-m}{n}}}{n.(2n-m)}$, qui eſt l'équation de la courbe demandée DC.

Si les paraboles coupées ſont des paraboles ordinaires, c'eſt-à dire ſi $m=2$, $n=1$, notre équation intégrée ne nous apprendra rien, parce qu'après avoir ſubſtitué les valeurs de m & x, nous aurons $x = \frac{-p}{0}$; mais en prenant l'équation différentielle, on aura $dx = -\frac{1}{2}p.\frac{dy}{y}$, équation à la logarithmique. Ainſi la courbe qui coupe à angles droits un nombre infini de paraboles ordinaires, diſpoſées comme il a été dit, eſt la logarithmique MCN, dont la ſou-tangente eſt égale à la moitié du paramètre des paraboles.

S'il s'agit des premières paraboles cubiques, c'eſt-à-dire ſi $m=3$, $n=1$, on aura $x = -\frac{pp.y^{-1}}{-3}$, ou $xy = \frac{pp}{3}$, & la trajectoire DC ſera une hyperbole entre ſes aſymptotes.

Si $m=3$ & $n=2$, c'eſt-à-dire s'il s'agit des ſecondes paraboles cubiques, on aura $x = -\frac{2}{3}\sqrt{py}$, ou bien $xx = \frac{4}{9}py$, & la trajectoire DC ſera une parabole ordinaire. En donnant d'autres valeurs à m & à n, on trouvera d'autres courbes.

Si les paraboles AC, QC, &c, non-ſeulement ont un ſommet différent ſur le même axe, mais qu'elles ayent encore chacune un paramètre différent & égal à la diſtance de leur ſommet reſpectif à un point fixe E; on prendra alors une quelconque de ces paraboles comme QC, & ſuppoſant que $EB = x$ ſoit

soit l'abscisse de la courbe cherchée DC, que $BC=y$ en soit l'ordonnée, & $EQ=p$ le paramètre, on aura $QB=x-p$, & l'équation de toutes les paraboles sera $p^{m-1}.(x-p)^m=y^n$. On aura la sou-tangente $BT=\frac{m}{n}(x-p)$; & par conséquent l'équation de la courbe sera $-\frac{ydy}{dx}=\frac{m}{n}(x-p)$.

Maintenant si les paraboles sont des paraboles ordinaires, c'est-à-dire si $m=2$, $n=1$, on aura $p=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{xx}{4}-yy\right]}$; & faisant les substitutions dans l'équation $-\frac{ydy}{dx}=\frac{m}{n}(x-p)$, elle deviendra $-\frac{ydy}{dx}=x\mp 2\sqrt{\left[\frac{xx}{4}-yy\right]}$, équation dans laquelle on séparera les indéterminées par la méthode du n°. 14, & dont l'intégrale sera algébrique.

Si les paraboles AC, QC, &c, de l'équation $p^{m-n}z^n=y^m$, ont toutes le même paramètre & leurs axes parallèles, & qu'elles ayent un sommet différent pour chacune, & posé dans une ligne perpendiculaire à l'axe, ou, ce qui revient au même, si une des paraboles se meut de manière que chacun de ses points décrive une ligne perpendiculaire à l'axe; on prendra une de ces paraboles comme EC (Fig. 5); faisant $AM=EB=z$, $BC=y$, $MC=x$, Fig. 5.
& menant à la parabole EC la tangente CT qu'on prolongera jusqu'en V, MV sera la sou-normale de la courbe cherchée DC; mais puisque $BT=\frac{mz}{n}$, on aura $MV=\frac{mzx}{ny}$, & l'équation de la

courbe sera $\frac{mzx}{ny} = -\frac{xdx}{dz}$; on mettra au lieu de y sa valeur $p^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}$ donnée par l'équation $p^{m-n} z^n = y^m$, & on trouvera $\frac{mzx}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = \frac{-xdx}{dz}$, c'est-à-dire $\frac{-mzdz}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = dx$, & en intégrant $x = -\ldots$ $\frac{mmz^{\frac{2m-n}{m}}}{n.(2m-n)p^{\frac{m-n}{m}}}$, qui est l'équation de la courbe demandée DC.

S'il s'agit de paraboles ordinaires, c'est-à-dire, si $m=2$, $n=1$, on aura $x = \frac{-4z^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}}$, ou $\frac{9pxx}{16} = z^3$, c'est-à-dire que la trajectoire DC est la seconde parabole cubique, dont le paramètre est à celui de la parabole AC, comme 9 est à 16.

On remarquera que dans ce cas la position de la courbe DC sera différente de celle qu'indique la Figure 5; elle aura son sommet en A, & elle rencontrera la partie convexe & inférieure des paraboles qu'elle coupera à angles droits, comme on le voit Fig. 6. dans la Figure 6.

Si les paraboles AC sont de quelqu'ordre supérieur, on trouvera que la trajectoire DC sera aussi une parabole d'un autre genre.

PROBLEME IV.

43. *Supposons que la droite* AC *fasse un angle* Fig. 7. *de 45° avec la droite* AD (Fig. 7); *on demande*

l'équation de la courbe AB, *dont la propriété est que son ordonnée* BD *est à la sou-tangente* DF, *comme la constante* a *est à* BC?

Supposant $AD = x$, $DB = y$, $CB = y - x$; la condition du Probléme donne cette proportion, $y : \frac{ydx}{dy} :: a : y - x$, & par conséquent cette équation $adx = ydy - xdy$. Pour séparer les indéterminées, on se servira de la méthode du n°. 23; on supposera donc $x = Ay + p + B$, $dx = Ady + dp$, & après les substitutions, on aura $aAdy + adp = ydy - Aydy - pdy - Bdy$, équation où les variables se sépareront facilement, si on fait évanouir le premier & le second terme du dernier membre, c'est-à-dire si on fait $A = 1$; pour B elle reste arbitraire, ainsi nous la supposerons $= 0$ pour abréger; & la substitution à faire sera $x = y + p$, $dx = dy + dp$; ce qui change l'équation en celle-ci, $adp = -ady - pdy$, c'est-à-dire, $\frac{adp}{a+p} = -dy$, courbe transcendante qui dépend de la logarithmique.

PROBLEME V.

44. TROUVER *la courbe dont l'aire est égale à* $axy + bx^c y^e$, *en désignant à l'ordinaire les abscisses par* x *&* *les ordonnées par* y?

On aura donc cette équation $\int ydx = axy + bx^c y^e$, & par conséquent $ydx = axdy + aydx + cby^e x^{c-1}dx + ebx^c y^{e-1}dy$, ou bien (en faisant $a - 1 = m$), $mydx + axdy + cby^e x^{c-1}dx + ebx^c y^{e-1}dy = 0$. Pour séparer les indéterminées, on pourroit se servir de la méthode du n°. 33;

on ſuppoſeroit pour cela $x = u^{e-1} z^{e-1}$, & $y = z^{1-e}$, & on auroit $dx = (e-1) . z^{e-1} u^{e-2} du + (e-1) u^{e-1} z^{e-2} dz$, & $dy = (1-e) z^{-e} dz$; mais les ſubſtitutions meneroient à une équation fort compoſée, & qui exigeroit un très-long calcul.

Pour arriver au but par un chemin plus court, je reprens l'équation $\int y dx = b x^e y^e + axy$; je ſuppoſe $x^e y^e = q$; l'équation devient par ce moyen $\int y dx = bq + axy$; & par conſéquent $y dx = b dq + a x dy + a y dx$. Cela poſé, j'employerai la méthode du n°. 24; j'écrirai donc l'équation de cette manière $axy \left(\frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) = bdq$; je ſuppoſe enſuite $\frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$, & par conſéquent, en intégrant, $\frac{1-a}{a} \text{L}.x - \text{L}.y = \text{L}.p$, ou bien $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{y} = p$. Faiſant les ſubſtitutions convenables, je trouverai cette équation, $\frac{a x^{\frac{1}{a}} dp}{pp} = b dq$. Pour exprimer maintenant $x^{\frac{1}{a}}$ par le moyen de p & q, je fais attention que $x^e y^e = q$, c'eſt-à-dire qu'on a $y^e = \frac{q}{x^e}$, ou bien $y = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{e}{e}}}$; mais on a auſſi $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{p} = y$; donc $\frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{e}{e}}} = \frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{p}$, ou bien $x^{\frac{e-ae+ac}{ae}} = q^{\frac{1}{e}}p$, & enfin $x^{\frac{1}{a}} = \ldots$ $q^{\frac{1}{e-ae+ac}} \times p^{\frac{e}{e-ae+ac}}$. Mettant donc $q^{\frac{1}{e-ae+ac}} \times p^{\frac{e}{e-ae+ac}}$ au lieu de $x^{\frac{1}{a}}$, on aura cette équation $ap^{\frac{e}{e-ae+ac}-2}dp = \frac{bdq}{q^{\frac{1}{e-ae+ac}}}$, c'eſt-à-dire $ap^{\frac{2ae-2ac-e}{e-ae+ac}}dp = bq^{\frac{-1}{e-ae+ac}}dq$. & en intégrant $\frac{ae-aae+aac}{ae-ac} \times p^{\frac{ae-ac}{e-ae+ac}} = \ldots$ $\frac{be-bae+bac}{e-ae+ac-1} \times q^{\frac{e-ae+ac-1}{e-ae+ac}} + g$, équation de la courbe qu'on cherche.

Il eſt évident que cette courbe ſera algébrique, tout au plus, lorſque les quantités a, c, e ſeront rationnelles, & qu'elle ſera tranſcendante, lorſque l'une d'elles ſera irrationnelle. Je dis *tout au plus*, parce qu'en ſuppoſant même les quantités a, c, e rationnelles, la courbe ſera cependant tranſcendante lorſqu'on aura $e = c$; lorſque $a = \frac{1-e}{c-e}$; lorſqu'on aura tout à-la-fois $c = 1$ & $a = 1$; ou bien lorſque $a = 0$, & qu'en même-temps $e = 1$; & en bien d'autres cas dont il n'eſt pas néceſſaire de faire ici l'énumération.

CHAPITRE IV.

De la réduction des équations différentielles du second degré.

45. LORSQU'ON pourra appliquer aux équations différentielles du second degré, les regles d'intégration qui ont été expliquées tant pour les cas ou les variables sont séparées, que pour ceux où elles sont mêlées; on n'aura rien de mieux à faire que de se servir de ces regles, & de réduire par leur moyen les équations différentielles du second ordre à celles du premier; & il n'est pas nécessaire de rien ajouter sur cet objet. S'il arrive ensuite que les indéterminées de ces équations ainsi réduites au premier degré ne soient pas séparables, ou même que ces équations ne puissent être construites en aucune maniere, le défaut proprement ne pourra pas en être imputé à l'art de traiter les différences secondes, mais à celui de traiter les premieres. Nous nous proposons donc pour but de rendre les équations différentio-différentielles telles qu'on puisse leur appliquer les regles d'intégration qui ont été enseignées; ce que l'on peut tenter de plusieurs manieres.

46. CELLE qui se présente la premiere, consiste à employer les artifices connus de l'Algebre ordinaire, comme de transposer les termes, de diviser ou de multiplier les équations par certaines quantités, & autres opérations semblables. Mais avant tout, il

eſt néceſſaire de ſe rappeller ou de ſavoir ſi en paſſant des premières différences aux ſecondes, on a regardé quelqu'une des fluxions comme conſtante, & laquelle a été priſe comme telle. Il faut remarquer encore que de même qu'en intégrant les premières différences, on ajoute une conſtante, il faut auſſi en ajouter une lorſqu'on paſſe, en intégrant, des ſecondes différences aux premières. Cela poſé, venons-en à quelques exemples.

EXEMPLE I.

Soit propoſée l'équation $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx+adxdy}{dudy}$, dans laquelle $du = \sqrt{[dx^2+dy^2]}$, qu'on ſuppoſe conſtante, eſt l'élément de la courbe; je l'écris ſous cette forme $\frac{by^m dy du}{c^m} = 2ayddx+adxdy$.

Puiſque du eſt conſtant, le premier membre ſera intégrable, quand même on le multiplieroit ou qu'on le diviſeroit par une fonction quelconque de y, & je remarque que le ſecond le ſeroit auſſi, ſi on le diviſoit par $2\sqrt{y}$. Je diviſe donc toute l'équation par $2\sqrt{y}$, & j'ai $\frac{by^m dy du}{2c^m\sqrt{y}} = \frac{2ayddx+adxdy}{2\sqrt{y}}$, & en intégrant, $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{(m+\frac{1}{2})2c^m} = adx\sqrt{y} + adu\sqrt{a}$, équation réduite aux premières différences.

Dans l'intégration, j'ai ajouté du pour quantité conſtante, & je l'ai multipliée par $a\sqrt{a}$ pour rendre les termes homogènes.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $f = \frac{dx^2 - yddy}{y^2dx^2}$, dans laquelle on a pris pour constante $y\,dx$. Je multiplie l'équation par $2\,dy$, & elle devient $2f\,dy = \frac{2\,dx^2\,dy - 2\,y\,dy\,ddy}{y^3\,dx^2}$, c'est-à-dire $2f\,dy = \frac{2\,dy}{y^3} - \frac{2\,dy\,ddy}{yy\,dx^2}$; & intégrant, puisque $y\,dx$ est constant, on aura $\int 2f\,dy = -\frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yy\,dx^2} + nyy\,dx^2$.

EXEMPLE III.

Soit l'équation $f = \frac{du^2 - y\,ddy}{y^3\,dx^2}$, dans laquelle dx est constante, & du ou $\sqrt{[dx^2 + dy^2]}$ est l'élément de la courbe. Puisque dx est constante, on a $dy\,ddy = du\,ddu$; par conséquent, en substituant la valeur de ddy dans l'équation, on aura $f = \frac{dy\,du^2 - y\,du\,ddu}{y^3\,dy\,dx^2}$; & en multipliant par $2y$, $2fy = \frac{2\,y\,dy\,du^2 - 2\,yy\,du\,ddu}{y^3\,dy\,dx^2}$, c'est-à-dire $2f\,dy = \frac{2\,y\,dy\,du^2 - 2\,yy\,du\,ddu}{y^4\,dx^2}$; & en intégrant $2\int f\,dy = -\frac{du^2}{yy\,dx^2} + n\,dx^2$.

On peut s'y prendre encore de cette manière : ayant mis dans l'équation au lieu de du sa valeur, on aura $f = \frac{dx^2 + dy^2 - y\,ddy}{y^3\,dx^2}$; en multipliant par $2y\,dy$, $2fy\,dy = \frac{2\,y\,dy\,dx^2 + 2\,y\,dy^3 - 2\,yy\,dy\,ddy}{y^3\,dx^2}$;

c'est à dire $2fdy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^4dx^2}$;

& en intégrant $2\int fdy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} \pm ndx^2$.

EXEMPLE IV.

Soit l'équation $adx = \frac{xyddy + xdy^2}{dx}$, dans laquelle dx est constante. Je la multiplie par dx, & la divise par x, & j'ai $\frac{adx^2}{x} = yddy + dy^2$; & intégrant, en observant que dx est constante, je trouve $adx\,\mathrm{L}.x + Adx = ydy$. Si l'on fait la constante ajoutée $A = a$, cette dernière équation sera $adx\,\mathrm{L}.x + adx = ydy$; & intégrant une seconde fois, on aura $ax\,\mathrm{L}.x = \frac{yy}{2}$.

EXEMPLE V.

Soit l'équation $f = \frac{dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu}{ydxdydt^2}$, dans laquelle du est l'élément de la courbe, dt est donnée en x & en y, & aucune des fluxions n'a été traitée comme constante. Je la divise par y^2dx^3, & je la multiplie par 2, ce qui me donne $\frac{2f}{y^2dx^3} = \frac{2dxdydu^2 + 2ydu^2ddx - 2ydxduddu}{y^3dx^4dydt^2}$, ou bien

$$\frac{2fdydt^2}{yydx^2} = \frac{2ydx^2dydu^2 + 2yydu^2dxddx - 2yydx^2duddu}{y^4dx^6};$$

& en intégrant, $2\int \frac{fdydt^2}{yydx^2} = -\frac{du^2}{yydx^2} \pm n$.

Mais on peut regarder comme une chose imposſible, de faire uſage de cette méthode dans les équations qui ſont un peu compoſées, quand on ne ſait pas déja à peu près les intégrales qu'on doit avoir; ainſi je paſſe à d'autres méthodes.

47. LORSQUE dans la ſolution des Problémes, on paſſe des premières différences aux ſecondes, il peut être avantageux de ne prendre aucune des fluxions comme conſtante, ſi rien n'empêche de le faire ainſi; parce qu'ayant enſuite la formule ſous les yeux, on pourra déterminer dans bien des cas, quelle eſt la fluxion qui, regardée comme conſtante, rendra la formule aſſez ſimple pour être intégrée ſans peine. Les exemples feront mieux entendre la méthode.

EXEMPLE.

Soit l'équation $f = \frac{dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy}{2x^2 dy^3}$,

à laquelle on eſt parvenu ſans regarder aucune des fluxions comme conſtante. Pour ſimplifier cette formule, j'examine laquelle des fluxions priſe pour conſtante feroit évanouir deux termes du ſecond membre, & n'y en laiſſeroit ſubſiſter que deux; or j'en trouve deux dans ce cas, ſavoir xdy, & $\frac{dx}{x}$.

Je ſuppoſe donc $xdy = c$; en prenant les différences, j'ai $xddy + dxdy = 0$, & par conſéquent $xdxddy + dx^2 dy = 0$; ce qui fait diſparoître le ſecond & le quatrième terme du ſecond membre de l'équation propoſée, & la réduit à $f = \ldots\ldots$ $\frac{dy^3 - xdyddx}{2x^2 dy^3}$; mais puiſque $xddy + dxdy = 0$, j'aurai auſſi $dy = -\frac{xddy}{dx}$; & par conſéquent au moyen des ſubſtitutions, $f = -\frac{x\,dy^{2}ddy}{2x^{3}dx\,dy^{3}} - \frac{x\,dy\,ddx}{2x^{3}dy^{3}}$, c'eſt-à-dire $f = \frac{-x\,dy^{2}ddy - x\,dx\,dy\,ddx}{2x^{3}dx\,dy^{3}}$, ou bien $f = \frac{-dy\,ddy - dx\,ddx}{2xx\,dx\,dy^{2}}$; mais $x\,dy = c$, donc $f = \frac{-dy\,ddy - dx\,ddx}{2cc\,dx}$, ou $f\,dx = \ldots \frac{-dy\,ddy - dx\,ddx}{2cc}$; j'intégre enfin, & j'ai $\int f\,dx = \frac{-dy^{2} - dx^{2}}{4cc} \pm n$, ou $\int f\,dx = \frac{-dy^{2} - dx^{2}}{4xx\,dy^{2}} \pm n$.

Lorſqu'on eſt parvenu à l'équation $f = \ldots\ldots \frac{dy^{3}\,x\,dy\,ddx}{2x^{3}dy^{3}}$, on arriveroit à l'intégration par une voie plus courte, en la multipliant par dx, & la diſpoſant de cette manière : $f\,dx = \frac{dx}{2x^{3}} - \frac{dx\,ddx}{2xx\,dy^{2}}$; car, puiſque $x\,dy$ eſt conſtant, en intégrant, on trouvera comme ci-deſſus $\int f\,dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^{2}}{4xx\,dy^{2}} \pm n$.

Prenons maintenant la quantité $\frac{dx}{x}$ pour conſtante. Cette ſuppoſition donne $\frac{x\,ddx - dx^{2}}{xx} = 0$, & par conſéquent auſſi $+dx^{2}dy - x\,dy\,ddx = 0$; ce qui fait évanouir les ſecond & troiſième termes de l'équation principale, & la change en celle-ci :

$f = \frac{dy^3 + x dx ddy}{2x^3 dy^3}$; ou en multipliant par dx, $f dx = \frac{dx dy^3 + x dx^2 ddy}{2x^3 dy^3}$, dont l'intégrale (puisque $\frac{dx}{x}$, & par conséquent $\frac{dx^2}{xx}$ est constante), sera, comme ci-dessus, $\int f dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n$.

48. POUR savoir à peu près la fluxion que l'on peut prendre pour constante, on examinera s'il n'y a pas dans l'équation proposée, deux, trois, ou un plus grand nombre de termes, qui deviendroient intégrables en les multipliant ou les divisant par une quantité commune; dans ce cas on intégrera, en prenant leur intégrale pour constante, & on procédera de la manière qu'on a vu. Si cet artifice ne réussit pas toujours, il conduira du moins quelquefois au but.

Je reprens l'équation $f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy}{2x^3 dy^3}$; je remarque que si l'on divisoit par dx les deux termes $dx^2 dy + x dx ddy$, il resteroit $dx dy + x ddy$ qui est une quantité intégrable, dont l'intégrale est $x dy$; & c'est ce qui me détermine à regarder $x dy$ comme constante. Je remarque pareillement que les deux termes $dx^2 dy - x dy ddx$, étant divisés par $-xx dy$, donnent $\frac{-dx^2 + x ddx}{xx}$, dont l'intégrale est $\frac{dx}{x}$, ce qui fait voir que l'on peut prendre aussi la quantité $\frac{dx}{x}$ pour constante.

EXEMPLE.

On propose l'équation $xy.(dxddy - dyddx) = ydydx^2 - yydzdy^2 - xdxdy^2$, dans laquelle la variable z est donnée en y d'une manière quelconque.

Je l'écris de cette manière : $xydxddy + yydzdy^2 = yxdyddx + ydydx^2 - xdxdy^2$; & j'observe qu'en divisant le second membre par $yydy$, il devient $\frac{yxddx + ydx^2 - xdxdy}{yy}$ dont l'intégrale est $\frac{xdx}{y}$. Prenant donc $\frac{xdx}{y}$ pour constante, j'ai $\frac{xdx}{y} = c$, & $\frac{xyddx + ydx^2 - xdxdy}{yy} = 0$; ainsi l'équation proposée deviendra $xydxddy + yydzdy^2 = 0$, ou bien $dz = -\frac{xdxddy}{ydy^2}$, dont l'intégrale, puisque $\frac{xdx}{y}$ est constant, sera $z = \frac{xdx}{ydy} \pm n$.

49. Si l'une des deux variables ne se trouve point, ni elle-même, ni aucune de ses fonctions, dans une équation du second degré; c'est-à-dire s'il n'y entre que les différences premières ou secondes de cette variable, aussi composées que l'on voudra, & élevées à une puissance quelconque, l'intégration ou réduction aux premières différences sera toujours facile au moyen d'une substitution, laquelle consiste à supposer la première différence qui flue, égale à une nouvelle inconnue multipliée par la fluxion qui a été prise pour constante, ou que l'on prend pour telle, à volonté, si toutes les fluxions sont

variables. Par exemple, dans une équation donnée, où l'on a ſuppoſé dx variable & dy conſtante, on fera $dx = pdy$, & en prenant les différences dans l'hypothèſe de dy conſtante, $ddx = dpdy$. Lorſqu'on aura fait cette ſubſtitution au lieu de ddx, & que l'on aura encore ſubſtitué les valeurs priſes de l'équation $dx = pdy$, on trouvera toujours une équation qui ſe réduira aux premières différences.

Ou bien encore, il ſera quelquefois plus commode, de ſuppoſer la première différence de la variable qui n'eſt pas dans l'équation, égale à une nouvelle indéterminée multipliée par la première différence de l'autre variable. Après les ſubſtitutions convenables, en ayant égard à la fluxion qui aura été priſe pour conſtante, on aura l'équation propoſée réduite aux premières différences.

EXEMPLE I.

Reprenons l'équation du premier exemple du n°. 46, $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, dans laquelle on a ſuppoſé du conſtante.

Nous ferons donc $dx = pdu$, & en différentiant $ddx = dpdu$; ſubſtituant cette valeur, nous aurons $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydpdu + apdudy}{dudy}$, c'eſt-à-dire $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydp + apdy}{dy}$, & par conſéquent.... $\frac{by^m dy}{c^n} = 2aydp + apdy$, équation qui eſt intégrable, en la diviſant par $2\sqrt{y}$, & ſon intégrale eſt $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})2c^m} = ap\sqrt{y} \pm g$; mais $p = \frac{dx}{du}$;

on aura donc $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{(m+\frac{1}{2}).2c^m} = adx\sqrt{y} \pm gdu.$

EXEMPLE II.

Soit l'équation $fyydydx^2 = -duddu$; où l'on suppose que du est l'élément de la courbe, que ydx est la fluxion prise pour constante, & que f est donnée en y. On fera $du = pydx$, & en différentiant $ddu = ydpdx$; ces substitutions donneront $fyydydx^2 = -yypdpdx^2$; c'est-à-dire $fdy = -pdp$; & en intégrant $2\int fdy = -pp + 2m$; mais $pp = \frac{du^2}{yydx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{yydx^2}$; faisant donc ces nouvelles substitutions, & réduisant, on aura $dx = \frac{dy}{\sqrt{[2myy - 1 - 2yy\int fdy]}}$.

Si l'on veut réduire la même équation par le moyen de l'autre substitution indiquée, on supposera $dx = pdu$, $ddx = dpdu + pddu$, & par conséquent $ddu = \frac{ddx - dpdu}{p}$. Les substitutions donneront l'équation $fyyppdydu^2 = \frac{-duddx + dpdu^2}{p}$; mais on a pris pour constante ydx, d'où l'on tire $yddx + dydx = 0$, c'est-à-dire $ddx = -\frac{dxdy}{y}$, ou $ddx = -\frac{pdudy}{y}$; si l'on met encore cette valeur dans l'équation, on aura $fppyydy = \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p}$. Cela posé, allons plus avant, & faisons $\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$, & par conséquent $py = q$, & $fqqdy = \frac{dq}{q}$, ou bien $fdy = \frac{dq}{q^3}$, & en intégrant $\int fdy = -\frac{1}{2qq} + m$; mais $qq = ppyy = \frac{yydx^2}{du^2} = \frac{yydx^2}{dx^2+dy^2}$; on aura donc $2\int fdy = \frac{-dx^2-dy^2}{yydx^2} + 2m$; d'où l'on tire, comme ci-dessus, $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2myy - 1 - 2yy\int fdy)}}$.

EXEMPLE III.

Je reprens l'équation du troisième exemple du n°. 46, $fy^3dx^2 = dx^2 + dy^2 - yddy$, dans laquelle dx est constante; je suppose donc $dy = pdx$, $ddy = dpdx$; & faisant les substitutions, j'ai $fy^3dx^2 = dx^2 + dy^2 - ydpdx$. Je chasse dx en mettant à sa place $\frac{dy}{p}$, ce qui donne $\frac{fy^3dy^2}{pp} = \frac{dy^2}{pp} + dy^2 - \frac{ydydp}{p}$, c'est-à-dire $fy^3dy^2 = dy^2 + ppdy^2 - ypdydp$, ou en divisant par y^3dy, $fdy = \frac{dy}{y^3} + \frac{ppdy - ypdp}{y^3}$, équation que j'intégre, & j'ai $\int fdy = -\frac{1}{2yy} - \frac{pp}{2yy} + m$; je mets au lieu de p sa valeur $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne $\int fdy = -\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{2yydx^2} + m$, c'est-à-dire

$2\int fdy =$

$2\int\int f dy = \frac{-dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$; & par conséquent $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2myy - 1 - 2yy\int\int fdy)}}$.

50. Si dans l'équation proposée, aucune des fluxions n'a été prise comme constante, on pourra en prendre une à volonté, & on opérera comme on a fait au n°. 48.

Exemple.

Qu'on se propose l'équation du cinquième exemple du n°. 46, dans laquelle aucune des fluxions n'est prise pour constante, & qui, en mettant ydx au lieu de dt, est $fy^3 dy dx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx - y dx du ddu$. Si l'on fait dx constante, le terme $y du^2 ddx$ disparoît, & l'équation devient $fy^3 dy dx^2 = dy du^2 - y du ddu$; ainsi pour la réduire, il faut supposer $du = pdx$, & par conséquent $ddu = dpdx$. Si l'on substitue ces valeurs, on aura $fy^3 dy dx^2 = ppdy dx^2 - ypdpdx^2$, c'est-à-dire $fy^3 dy = ppdy - ypdp$, équation qu'on écrira de cette manière: $fy^3 dy = ppy \cdot \left(\frac{dy}{y} - \frac{dp}{p}\right)$, & qui s'intégrera par la méthode enseignée au Chapitre précédent, n°. 24; ce qui donnera $\int\int f dy = -\frac{pp}{2yy} + m$, & en remettant la valeur de p, $\int\int f dy = -\frac{du^2}{2yydx^2} + m$.

Si c'est du que l'on prend pour constante, le terme $y dx du ddu$ disparoît, & il reste $fy^3 dy dx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx$; ainsi il faut supposer $dx = pdu$, $ddx = dpdu$. Ces valeurs substituées donnent $fy^3 dy . p^3 du^3 = pdy du^2 + ydpdu^2$, c'est-à-dire

$fy^3 dy = \frac{pdy + ydp}{p^3}$. Intégrant, l'on aura.... $\int f dy = \frac{-1}{2ppyy} + m$, & en mettant la valeur de p, $\int f dy = \frac{-du^2}{2yydx^2} + m$.

51. LORSQUE dans une équation, aucune des fluxions n'a été prise pour constante, on peut, par la liberté qu'on a de prendre pour telle celle que l'on veut, ramener à la méthode du n°. 49, quelques équations qui contenant les deux variables finies, ne feroient pas sans cela dans le cas de cette méthode. Il n'y aura qu'à prendre pour constante, si on le peut, une fluxion qui fasse évanouir tous les termes qui contiennent l'une des variables finies, de manière qu'il ne reste que ceux qui contiennent l'autre.

EXEMPLE.

Soit l'équation $dx^3 - dxdy^2 = ydxddx + 2xdyddy$, dans laquelle aucune des fluxions n'est constante.

Si l'on prend pour constante dx, le premier terme du second membre disparoîtra; si l'on prend pour constante dy, ce sera le dernier terme qui deviendra nul; & dans l'un & dans l'autre cas, il ne restera que l'une des variables. Faisant donc dx constante, l'équation sera $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Supposons $dy = \frac{pdx}{a}$, $ddy = \frac{dpdx}{a}$; après les substitutions, nous aurons $dx^3 - \frac{ppdx^3}{aa} = \frac{2xpdpdx^2}{aa}$; c'est-à-dire $aadx - ppdx = 2xpdp$, ou

$\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa-pp}$; intégrant donc, nous aurons $L.\,x = -L.(aa-pp) + L.\,m$, & par conséquent $x = \frac{m}{aa-pp}$; & en mettant au lieu de p sa valeur $\frac{ady}{dx}$, $x = \frac{m}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$, c'est-à-dire

$x = \frac{mdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, ou bien $mdx^2 = aaxdx^2 - aaxdy^2$.

52. MAIS lorsque la fluxion qui doit être constante, est déterminée, & qu'on n'en a point le choix, ou lorsque par ce choix on ne parvient pas à éliminer de l'équation l'une des variables, on n'a pas découvert jusqu'ici de méthode générale qui conduise sûrement à l'intégration.

Les méthodes que j'ai expliquées, n'ont leur utilité que dans certaines occasions. Il en est de même des artifices ordinaires de l'Algébre par voie de multiplication, de division, &c; comme il arrive, par exemple, dans l'équation $xxydy^2 = xddx - dx^2$, qui, en la divisant par xx, devient $ydy^2 = \frac{xddx - dx^2}{xx}$, & qui est par conséquent intégrable, si l'on suppose dy constante; en effet, son intégrale est $\frac{yydy}{2} = \frac{dx}{x} + mdy$.

Quelquefois une simple substitution peut ramener l'équation proposée à la méthode du n°. 49. En effet l'équation $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$ qui n'est point dans le cas de cette méthode, y sera comprise si l'on fait $ydy = dz$; ce qui la changera en celle-ci $x^m ddx = ddz + dz^2$.

53. DANS le cas où l'on a déja fixé la fluxion qui doit être constante, il peut être très-utile de changer l'équation proposée en une autre équivalente, où aucune des fluxions ne soit constante. Pour cela, soit l'équation générale $dy = p\,dx$, dans laquelle p est une quantité donnée d'une manière quelconque en x & en y, & que dx soit la fluxion constante; en différentiant, on a $ddy = dp\,dx$; mais $p = \frac{dy}{dx}$; donc si l'on différentie sans supposer constante aucune des fluxions, on aura $dp = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$; que l'on mette cette valeur de dp dans l'équation $ddy = dp\,dx$, & elle deviendra $ddy = \ldots\ldots \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx}$. Par conséquent, si dans une équation quelconque proposée, dans laquelle dx est constante, l'on met au lieu de ddy sa valeur $\ldots \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx}$, on aura une équation équivalente, dans laquelle aucune des fluxions n'est constante.

Mais comme on a pris bien souvent pour constante des fluxions plus composées, il sera bon de rendre cette méthode plus générale.

Supposons donc l'équation générale $dy = mp\,dx$, (p étant encore donnée d'une manière quelconque en x & en y; & m étant une fonction quelconque de x ou de y, ou des deux ensemble), & que $m\,dx$ soit la constante. En différentiant, on a $ddy = m\,dx\,dp$; mais $p = \frac{dy}{m\,dx}$: ainsi, en différentiant sans prendre de constante, on a $dp =$

$\frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mmdx^2}$; substituant ensuite cette valeur de dp dans l'équation $ddy = mdxdp$, on trouve $ddy = \frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mdx}$. Par conséquent, si dans une équation quelconque, qui a pour constante mdx, on met au lieu de ddy, la valeur $\frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mdx}$, qu'on vient de trouver, elle sera changée en une autre équivalente, où aucune des fluxions ne sera constante.

Après avoir ainsi complетté les équations, c'est-à-dire après les avoir rendu telles qu'elles ne contiennent plus de fluxion constante; on sera le maître de prendre pour constante celle que l'on voudra; & on la choisira telle, s'il est possible, que par cette supposition l'équation devienne intégrable.

EXEMPLE I.

On propose l'équation $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, dans laquelle dx est constante. Puisque dans ce cas $m = 1$, & $dm = 0$, la valeur que je substitue à ddy est $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$; & j'ai l'équation $dx^2dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$, qui n'a plus de fluxion constante. Je regarde ensuite comme constante dy, ce qui donne $dx^2 + xddx + addx = dy^2$, & en intégrant $xdx + adx = ydy$, équation qui dépend de l'hyperbole.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $\frac{-xdy^2 - xyddy - ydydx}{ydy} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx}$, dans laquelle ydx est constante. Pour la changer en une autre où aucune fluxion ne soit constante, puisqu'on a ici $m = y$, la valeur de ddy qu'il faudra substituer est............ $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, & l'équation deviendra $-\frac{xdy}{y} - dx - \frac{xydxddy + xdxdy^2 + xydyddx}{ydxdy} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx}$. Pour réduire celle-ci, on prendra pour constante xdy, ce qui donnera $xddy + dydx = 0$, c'est-à-dire $-ddy = \frac{dxdy}{x}$; donc en faisant la substitution, on aura $-\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x^3}$, & en intégrant, $-$ L. $dx =$ L. $\frac{aa + xx}{x}$ $-$ L. xdy, (je soustrais ce dernier terme qui est la quantité constante). Enfin on passera des logarithmes aux nombres, & on aura $\frac{1}{dx} = \frac{aa + xx}{xxdy}$, c'est-à-dire $xxdy = aadx + xxdx$.

EXEMPLE III.

Soit l'équation $-\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$.

la fluxion constante étant ydx. Je mettrai donc, au lieu de ddy, la valeur correspondante........ $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, & j'aurai l'équation $-\frac{dxddy}{dy} + \frac{dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, dans laquelle aucune fluxion n'est constante ; & prenant pour constante dy, j'aurai $xddx = dx^2 + dy^2$, qui est dans le cas du n°. 49, & qu'on fait par conséquent réduire.

54. On peut aussi faire usage dans les équations différentio-différentielles, de la méthode expliquée au n°. 24 du Chapitre précédent ; on opérera pour cela à peu près de la même manière. Je vais en montrer la pratique dans quelques exemples.

Exemple I.

Reprenons l'équation du premier exemple du présent Chapitre, $\frac{by^m dy du}{ac^m} = 2yddx + dxdy$, dans laquelle on a pris pour constante $du = \sqrt{[dx^2 + dy^2]}$. Je la mets sous cette forme $\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y}\right) dx = \frac{by^m dy du}{ac^m . 2y}$, & je remarque que les deux quantités enfermées dans la parenthèse sont intégrables par logarithmes ; je ferai donc $\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y} = \frac{dp}{p}$, & par conséquent L. dx + L. $\sqrt{y}$ = L. p + L. du, (j'ajoute le logarithme de du, parce que du est constant), c'est-à-dire $dx\sqrt{y} = pdu$. Je substitue ensuite dans l'équation proposée, au lieu de $\frac{ddx}{dx}$ +

$\frac{dy}{2y}$ sa valeur $\frac{dp}{p}$, & au lieu de dx sa valeur $\frac{pdu}{\sqrt{y}}$; ce qui me donne $\frac{dpdu}{\sqrt{y}} = \frac{by^{m-1}dydu}{2ac^m}$, ou bien $dp = \frac{by^{m-\frac{1}{2}}dy}{2ac^m}$, & en intégrant, $h+p = \frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})2ac^m}$; mais $p = \frac{dx\sqrt{y}}{du}$; j'aurai donc enfin $hdu + dx\sqrt{y} = \frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{(m+\frac{1}{2})2ac^m}$, comme dans l'exemple cité.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $-\frac{ddx\sqrt{[xx+yy]}}{x} = \ldots\ldots$ $\frac{(ydx-xdy)^2}{xx+yy}$, dans laquelle $ydx - xdy$ est constant.

La seconde différence ddx divisée par la constante $ydx-xdy$ donne une quantité intégrable; c'est pourquoi je donne cette forme à l'équation; $\frac{-ddx}{ydx-xdy} = \frac{x(ydx-xdy)}{(xx+yy)\sqrt{[xx+yy]}}$; & je remarque que la quantité $ydx-xdy$ du second membre seroit intégrable, si elle étoit divisée par yy; préparant donc l'équation suivant la méthode, j'ai $\frac{-ddx}{ydx-xdy} = \frac{xyy}{(xx+yy)\sqrt{[xx+yy]}} \times \frac{ydx-xdy}{yy}$.

Je suppose $\frac{ydx-xdy}{yy} = dp$, & par conséquent $\frac{x}{y} = p$; je fais la substitution, & j'ai $\frac{-ddx}{ydx-xdy} =$

$\frac{xyydp}{(xx+yy)\sqrt{[xx+yy]}}$, d'où je chasserai x ou y par le moyen de l'équation $\frac{x}{y} = p$; je mets donc dans le second membre py au lieu de x, ce qui donne $\frac{-ddx}{ydx-xdy} = \frac{pdp}{(aa+pp)\sqrt{[aa+pp]}}$; & passant à l'intégration, je trouve $\frac{-dx}{ydx-xdy} = \frac{-1}{\sqrt{[aa+pp]}}$; c'est-à-dire en remettant au lieu de p sa valeur $\frac{x}{y}$, $\frac{-dx}{ydx-xdy} = \frac{-y}{\sqrt{[aayy+xx]}}$.

En faisant cette intégration, on auroit pû ajouter la constante $ydx - xdy$; mais que l'on l'ajoute ou non, la seconde intégration qui passe des premières différences aux quantités finies donnera dans l'un & l'autre cas les sections coniques.

55. J'AI dit (n°. 52) que lorsque les équations différentio différentielles contenoient les deux variables, il n'y avoit pas de méthode générale pour les intégrer. On en peut cependant assigner une qui est très-étendue, & qui embrasse toutes les équations en nombre infini qui se rapportent aux trois équations mécaniques que je donnerai plus bas. Cette méthode enseigne à changer les équations données en d'autres, où il ne reste plus qu'une des variables, & qu'on peut par conséquent intégrer par la méthode du n°. 49.

La première formule embrasse toutes les équations à deux termes représentées par celle-ci: $ax^m dx^r = y^n dy^{r-1} ddy$, dans laquelle dx a été prise pour constante. Pour réduire cette équation, on supposera $x = c^{hu}$ & $y = c^{u}t$; (c est le nombre qui a pour logarithme l'unité, h est une quantité arbitraire que l'on déterminera dans la suite, u & t sont de nouvelles variables). Puisque $x = c^{hu}$ & $y = c^{u}t$, on aura par les regles du calcul exponentiel, $dx = hc^{hu}du$, $ddx = hc^{hu}(ddu + hdu^2)$, $dy = c^{u}dt + c^{u}tdu$, $ddy = c^{u}.(ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu)$. Mais en supposant dx constante, on a ddx ou $hc^{hu}(ddu + hdu^2) = 0$, c'est-à-dire $ddu = -hdu^2$, & par conséquent $ddy = c^{u} \times (ddt + 2dtdu + (1-h)tdu^2$. Et la substitution des valeurs respectives de x, y, & de leurs différentielles, changera l'équation proposée en celle-ci: $ac^{hmu}.h^{p}.c^{hpu}du^{p} = c^{nu}t^{n}.(c^{u}dt + c^{u}tdu)^{p-1} \times c^{u}.(ddt + 2dtdu + (1-h)tdu^2)$, c'est-à-dire $ac^{hu.(m+p)}h^{p}du^{p} = c^{(n+p-1)u}t^{n}.(dt + tdu)^{p-1} \times (ddt + 2dtdu + (1-h)tdu^2)$.

Maintenant, pour délivrer cette équation des quantités exponentielles, c'est-à-dire pour en chasser c, il faudra qu'on ait $n + p - 1 = hm + hp$, ce qui détermine la valeur de h, savoir $h = \frac{n+p-1}{m+p}$; & par conséquent l'équation devient.........

$$\frac{a.(n+p-1)^{p}.du^{p}}{(m+p)^{p}} = t^{n}.(dt + tdu)^{p-1}.\left(ddt + 2dtdu + \frac{(m-n+1)tdu^2}{m+p}\right);$$

cette équation ne contenant plus que la variable t, est dans le cas de la méthode du n°. 49.

La valeur de $h = \frac{n+p-1}{m+p}$, fait voir que les substitutions qu'il auroit fallu faire dès le commencement, pour arriver promptement au but, sont $x = c^{\frac{(n+p-1).u}{m+p}}$, & $y = c^{u}t$, Pour continuer l'opération, en ſuivant la méthode du n°. 49, on ſuppoſera $du = z\,dt$, $ddu = z\,ddt + dz\,dt$; or, la ſuppoſition de dx conſtante, a donné $ddu = -h\,du^2$, c'eſt-à-dire $ddu = \frac{1-n-p}{m+p} \times zz\,dt^2$; on aura donc $\frac{1-n-p}{m+p} \times zz\,dt^2 = z\,ddt + dt\,dz$; d'où l'on tire $ddt = \frac{1-n-p}{m+p} \times z\,dt^2 - \frac{dt\,dz}{z}$. Subſtituant donc dans l'équation, au lieu de du & de ddt, leurs valeurs reſpectives, elle deviendra $\frac{a.(n+p-1)^p}{(m+p)^p} \times z^p\,dt^p = \ldots\ldots\ldots$ $t^n.(dt + zt\,dt)^{p-2}.\left(\frac{1-n-p}{p+m} \times z\,dt^2 - \ldots \frac{dt\,dz}{z} + 2z\,dt^2 + \frac{m-n+1}{m+p} \times zzt\,dt^2\right)$, ou bien en diviſant par dt^{p-1}, & multipliant par z, ... $\frac{a.(n+p-1)}{(m+p)^p} \times z^{p-1}\,dt = t^n.(1+tz)^{p-2} \times \left(\frac{1+2m-n+p}{m+p} \times zz\,dt + \frac{m-n+1}{m+p} \times tz^3\,dt - dz\right)$; équation qui eſt réduite aux premières différences. On voit aiſément que pour réduire l'équation, il eût ſuffi de faire dès le commencement $x = c^{\frac{n+p-1}{n+p} \times \int z\,dt}$, & $y = c^{\int z\,dt}\,t$.

Dans cette équation générale, que j'ai réduite, j'ai ſuppoſé conſtante la fluxion dx; mais il eſt bon de remarquer que quand on prendroit pour conſtante toute fluxion autre que dx, cela ne mettroit point obſtacle au ſuccès de cette méthode; puiſque l'on pourra toujours changer, par le n°. 53, l'équation proposée en une autre équivalente, où aucune fluxion ne soit constante, & faire ensuite constante dx.

EXEMPLE I.

Soit proposée l'équation $x\,dx\,dy = y\,ddy$, dans laquelle dx est constante, & que j'écris ainsi $x\,dx = y\,dy^{-1}\,ddy$. En la comparant à l'équation canonique, on trouvera $a=1$, $m=1$, $p=1$, $n=1$, & si l'on met ces valeurs dans l'équation différentielle générale, qui a été trouvée ci-dessus, on aura

$$\frac{1}{2} zz\,dt = \frac{t}{1+tz} \times \left(\frac{1}{2} zz\,dt + \frac{1}{2} tz^3\,dt - dz\right).$$

EXEMPLE II.

Soient $p=1$, $n=-1$, $m=-1$; c'est-à-dire supposons l'équation $ax^{-1}\,dx = y^{-1}\,dy^{-1}\,ddy$, ou bien $\frac{a\,dx}{x} = \frac{ddy}{y\,dy}$, dans laquelle la fluxion dx est constante. Ici la méthode sera inutile, puisqu'on a $p+m=0$, & que par conséquent chaque terme de l'équation générale différentielle du premier degré, est infini, excepté le dernier terme. Mais on parviendra facilement à la réduction, sans employer aucun artifice. Que l'on écrive seulement l'équation de cette manière : $x\,ddy = ay\,dy\,dx$; l'intégrale du premier membre est $x\,dy - y\,dx$, celle du second est $\frac{ayy\,dx}{2}$; on a donc $x\,dy - y\,dx = \ldots\ldots \frac{ayy\,dx}{2} \pm b\,dx$.

56. LA seconde formule comprend toutes les équations dans lesquelles la somme des exposants des

indéterminées & de leurs différences eſt la même pour chaque terme. Si l'on ſuppoſe que x & y ſoient les deux indéterminées, & dx la fluxion conſtante, ces équations ſe réduiront au cas du n°. 49, en faiſant $x = c^u$, & $y = c^u t$, c étant encore le nombre qui a l'unité pour logarithme, & u, t de nouvelles indéterminées. Pour faire voir le ſuccès de cette méthode, prenons l'équation $ax^n y^{-n-1} dx^p dy^{2-p} + bx^m y^{-m-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$; quoique cette équation n'ait que trois termes qui ſont d'une ſeule dimenſion, cela n'empêche pas que la méthode ne ſoit générale, & qu'elle ne réuſſiſſe, quels que ſoient les dimenſions & le nombre des termes, pourvu que la condition dont on a fait mention, ait lieu.

Je ſuppoſe donc $x = c^u$, $y = c^u t$, & par conſéquent $dx = c^u du$; mais $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, ou $ddu = -du^2$, parce que dx eſt conſtante; pareillement $dy = c^u dt + c^u t du$, $ddy = c^u.(ddt + 2du dt + t du^2 + t ddu)$; mais $ddu = -du^2$, donc $ddy = c^u.(du dt + 2ddt)$. Si l'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation propoſée, elle deviendra $at^{-n-1} du^p \times (dt + t du)^{2-p} + bt^{-m-1} du^q.(dt + t du)^{2-q} = ddt + 2du dt$, équation qu'on pourra traiter par la méthode du n°. 49, puiſque l'indéterminée u ne s'y trouve pas.

Je fais $du = z dt$, & per conſéquent $ddu = dz dt + z ddt$; mais $ddu = -du^2 = -zz dt^2$, donc $ddt = -\frac{dz dt}{z} - z dt^2$; ainſi après avoir ſubſtitué ces valeurs, j'aurai $at^{-n-1} z^p dt^p.(dt + zt dt)^{2-p} + bt^{-m-1} z^q dt^q.(dt + zt dt)^{2-q} = \frac{-dz dt}{z} + z dt^2$, ou bien $at^{-n-1} z^p dt.(1 + zt)^{2-p} + bt^{-m-1} z^q dt \times$

$(1+zt)^{1-1} = \frac{-dz}{z} + z\,dt$, équation différentielle du premier degré. On voit par-là qu'on auroit pû réduire l'équation proposée, en supposant dès le commencement $x = c^{\int z dt}$, & $y = c^{\int z dt} t$.

EXEMPLE.

Soit l'équation $x\,dx\,dy - y\,dx^2 = yy\,ddy$.

Pour la comparer à la formule, je l'écris ainsi : $xy^{-1}dx\,dy - y^{-1}dx^2 = ddy$; & je trouve $a=1$, $m=1$, $p=1$, $n=0$, $b=-1$, $q=2$. Je mets ces valeurs dans l'équation canonique différentielle, qui a été trouvée ci-dessus, & j'ai l'équation réduite

$$t^{-2}z\,dt.(1+zt) - t^{-1}zz\,dt = \frac{-dz}{z} + z\,dt,$$

ou bien $\frac{zdt + zztdt}{tt} - \frac{zzdt}{t} = \frac{-dz + zzdt}{z}$,

c'est-à-dire $zzdt - zzttdt = -ttdz$.

Si l'on veut passer à l'intégration, on n'aura qu'à écrire cette équation sous cette forme $\frac{ttdt - dt}{tt} = \frac{dz}{zz}$; & intégrant, on aura $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + f$ (f est la constante ajoutée), c'est-à-dire $ttz + z = -t + ftz$; mais par les substitutions $z = \frac{du}{dt}$, $x = c^u$, $y = c^u t$, & par conséquent $du = \frac{dx}{x}$, $t = \frac{y}{x}$; $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$, & enfin $z = \frac{xdx}{xdy - ydx}$. Substituant donc les valeurs de t & de z, on aura $\frac{xdx + ydy}{ydx} = f$.

57. LA troisième formule comprend toutes les équations dans lesquelles l'une des variables, il n'importe laquelle, forme conjointement avec ses différences, le même nombre de dimensions dans chaque terme. Mais il faut distinguer ici deux cas, celui où la différentielle de cette variable, qui forme le même nombre de dimensions, est constante; & celui où l'on a pris pour constante la différentielle de l'autre variable.

Pour le premier cas, soit l'équation canonique $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+1-n} = dx^m ddy$, où la somme des exposants de x & de dx est la même pour tous les termes; P & Q sont des fonctions quelconques de y, & dx est la constante. Pour réduire cette équation, on fera $x = c^u$, c étant toujours le nombre qui a l'unité pour logarithme, & u une nouvelle variable. On aura donc $dx = c^u du$, & différentiant de nouveau, en regardant dx comme constante, $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, c'est-à-dire $ddu = -du^2$. La substitution de ces valeurs dans l'équation, donnera $P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m+1-n} = du^m ddy$. Or u ne se trouvant plus dans cette équation, on peut y appliquer la méthode du n°. 49.

Supposons donc $du = z dy$, nous aurons $ddu = dz dy + z ddy$; mais $ddu = -du^2$, & $du^2 = zz dy^2$; donc $z ddy + dz dy = -zz dy^2$, & par conséquent $ddy = \frac{-zz dy^2 - dz dy}{z}$. Substituons maintenant dans l'équation trouvée ci-dessus, ces valeurs de du & de ddy, nous aurons $P dy^{m+1} + Qz^n dy^{m+1} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m+1} dy^{m+1} dz$, & divisant par dy^{m+1}, $P dy + Q z^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m+1} dz$, équation du premier degré. On auroit donc pû, dès le commencement, supposer $x = c^{\int z dy}$, & l'équation auroit été réduite par cette unique supposition.

EXEMPLE.

Soit l'équation $2adx^2dy + axdxddy = 2xdxdy^2 + 2xxdyddy$, dans laquelle dx est la constante. Je supposerai donc $x = c^{\int zdy}$, & par conséquent $dx = zdyc^{\int zdy}$, $ddx = c^{\int zdy}.(zzdy^2 + zddy + dydz)$; mais dx étant constante, j'aurai $zzdy^2 + zddy + dzdy = 0$, & $ddy = \ldots\ldots \frac{-zzdy^2 - dzdy}{z}$. Je substitue donc dans l'équation les valeurs de x & de dx, ce qui me donne $2azzdy^3 + azdyddy = 2zdy^3 + 2dyddy$, & en mettant la valeur de ddy, $2azzdy^3 + azdy \times \ldots\ldots \left(\frac{-zzdy^2 - dzdy}{z}\right) = 2zdy^3 + 2dy \times \ldots\ldots \left(\frac{-zzdy^2 - dzdy}{z}\right)$, c'est-à-dire $az^3dy - azdz = -2dz$, ou bien $ady = \frac{azdz - 2dz}{z^3}$, & en intégrant $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz}$. Je remets enfin la valeur de z donnée par la supposition de $x = c^{\int zdy}$, c'est-à-dire $z = \frac{dx}{xdy}$, & j'ai l'équation réduite $aydx^2 = xxdy^2 - axdxdy$.

58. POUR le second cas, supposons l'équation canonique $Px^n dy^{n+1} + Qx^{n-m}dx^m dy^{n-m+1} = dx^{n-1}ddx$, dans laquelle je suppose que dy soit la constante, & que P, Q sont des fonctions quelconques de y.

Je fais, comme ci-dessus, $x = c^u$, $dx = c^u du$, $ddx = c^u ddu + c^u du^2$. Et après les substitutions, j'ai $Pdy^{n+1} + Qdu^m dy^{n-m+1} = du^{n+1} + du^{n-1}ddu$,

$du^{n-1}ddu$, équation à laquelle on peut appliquer la méthode du n°. 49, puisque u ne s'y trouve pas.

Je suppose donc $du = zdy$, & puisque dy est constante, j'ai $ddu = dzdy$; par conséquent les substitutions donneront $Pdy^{n+1} + Qz^n dy^{n+1} = z^{n+1}dy^{n+1} + z^{n-1}dy^n dz$, & en divisant par dy^n, $Pdy + Qz^n dy = z^{n+1}dy + z^{n-1}dz$, équation du premier degré, & qu'on auroit pû réduire tout d'un coup, en supposant comme ci-dessus $x = c^{\int zdy}$.

EXEMPLE.

Soit l'équation $2dxdy = addx - yddx$, dans laquelle dy soit la fluxion constante. Je supposerai $x = c^{\int zdy}$, & par conséquent $dx = zdy \cdot c^{\int zdy}$, $ddx = c^{\int zdy} \cdot (zzdy^2 + zddy + dydz)$; ou plutôt puisque $ddy = 0$, $ddx = c^{\int zdy} \cdot (zzdy^2 + dz\,dy)$. Faisant donc les substitutions dans l'équation proposée, j'aurai $2zdy^2 = azzdy^2 + adzdy - zzydy^2 - ydydz$, & en divisant par dy, $2zdy = azzdy + adz - zzydy - ydz$, équation différentielle du premier degré.

Pour passer à l'intégration, je divise l'équation par $az - yz$, ce qui me donne $\frac{2dy}{a-y} = zdy + \frac{dz}{z}$, ou bien $\frac{2dy}{a-y} - \frac{dz}{z} = zdy$; & faisant usage de la méthode du n°. 24, j'aurai pour intégrale $-\frac{1}{(a-y)^2 \cdot z} = -\frac{1}{a-y} + m$. Je remets la valeur $z = \frac{dx}{xdy}$, & omettant la constante m ajoutée dans l'intégration, j'ai l'équation réduite $ydx + xdy = adx$.

Cet exemple a servi à faire voir l'application de la méthode; mais on peut réduire l'équation $2dxdy = addx - yddx$ sans recourir à toutes ces opérations. En effet, on voit d'un coup d'œil, qu'en transposant le terme $yddx$, & écrivant l'équation ainsi: $2dxdy + yddx = addx$, l'intégrale du premier membre est $ydx + xdy$.

59. AUX méthodes que nous avons données pour les équations différentio-différentielles, où aucune des premières fluxions n'a été prise pour constante, on peut en ajouter une autre plus générale, & qui est applicable à toutes les équations qui sont comprises dans cette formule canonique $z^{n+1} dx^n ddx + \frac{dz}{z} dy^{n+1} = dy^n ddy$, où je suppose z donnée d'une manière quelconque en fonctions de x & de y.

Pour réduire cette équation, que l'on fixe pour constante la fluxion $\frac{dx}{q}$, q étant encore donné comme on voudra en fonctions de x & de y, & qu'on suppose ensuite $\frac{dx}{q} = dp$. Puisque $\frac{dx}{q}$ est constante, on aura en différentiant, $qddx - dxdq = 0$, c'est-à-dire $ddx = \frac{dxdq}{q}$, ou bien, en mettant au lieu de $\frac{dx}{q}$, sa valeur dp, $ddx = dqdp$. Que l'on suppose de plus $dy = udp$; en prenant les secondes différences dans l'hypothèse de dp constante, puisque $\frac{dx}{q}$ est égal à la constante, on aura $ddy = dudp$. Maintenant, si l'on met dans l'équation canonique, au lieu de dx, ddx, dy &

ddy, ces valeurs ainsi déterminées, il en résultera l'équation $z^{m+1}q^m dq dp^{m+1} + \frac{u^{m+1}dz dp^{m+1}}{z} = u^m du dp^{m+1}$, qui en divisant par dp^{m+1}, devient $z^{m+1}q^m dq + \frac{u^{m+1}dz}{z} = u^m du$, ou bien $q^m dq = \frac{zu^m du - u^{m+1}dz}{z^{m+2}}$. Intégrant, on aura $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{(m+1).z^{m+1}}$, & par conséquent $u = z \times \left(q^{m+1} + (m+1).g\right)^{\frac{1}{m+1}}$. Mais $u = \frac{dy}{dp} = \frac{qdy}{dx}$; donc $\frac{qdy}{dx} = z.\left(q^{m+1} + (m+1).g\right)^{\frac{1}{m+1}}$, équation réduite aux premières différences.

60. A l'égard de cette dernière équation, il faut observer que si la quantité z étoit donnée en x & y, de manière qu'on pût assigner à la quantité q, une valeur aussi en x & y, telle que les indéterminées fussent séparables, & que l'équation fût par conséquent constructible, soit algébriquement, soit par les quadratures, on auroit alors la courbe dont dépend l'équation différentio-différentielle. Et comme on pourra souvent assigner à q plusieurs valeurs qui soient dans ce cas, on pourra avoir aussi plusieurs courbes; & chaque valeur de q fournira une courbe différente ou transcendante, ou algébrique, qui satisfera à l'équation.

Soit l'équation $\frac{x^3yydxddx}{a^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2aaydxdy^2 + aaxdy^3}{xy} = aadyddy$.

En la rapportant à l'équation canonique, on a

$m = 1$, $z = \frac{xxy}{aa}$, & par conſéquent la réduite eſt $\frac{qdy}{dx} = \frac{xxy}{aa}(qq + 2gg)^{\frac{1}{2}}$.

Maintenant, ſi l'on prend $q = x$, on aura $\frac{xdy}{dx} = \frac{xxy}{aa}\sqrt{[xx+2gg]}$, c'eſt-à-dire $\frac{aady}{y} = \ldots$ $xdx\sqrt{[xx+2gg]}$, dont l'intégrale dépend en partie de la quadrature de l'hyperbole, & par conſéquent la courbe eſt tranſcendante.

61. NOUS avons vu qu'en paſſant des premières différences aux ſecondes, on pouvoit ou ne prendre aucune fluxion pour conſtante, ou regarder comme telle celle que l'on aimoit le mieux; en cherchant enſuite les intégrales des formules du ſecond degré, on ſait comment il convient d'opérer d'après les ſuppoſitions qui ont été faites à cet égard; ſuppoſitions que nous avons regardées comme connues.

Mais il y a une infinité de Problèmes qui mènent aux différences ſecondes, ſans que l'on ſache quelle eſt la conſtante que renferment les formules qui naiſſent de ces Problêmes. Il y a des occaſions où l'on ne peut arriver à l'expreſſion analytique du Problême, qu'en recourant à des conſtantes; il y en a d'autres où l'équation ſe forme ſans qu'on en prenne aucune. Il eſt bon d'examiner ces deux cas, & d'aſſigner quelque marque caractériſtique qui les diſtingue. Et comme les exemples ſont ſouvent plus utiles que les préceptes, je me propoſerai la queſtion ſuivante.

On demande la courbe dont les abſciſſes élevées à quelle puiſſance on voudra, ſoient directement comme les ſecondes différences des ordonnées, &

réciproquement comme les secondes différences des mêmes abscisses. L'énoncé du Problême donne cette proportion, $x^n : \frac{ddy}{ddx} :: a : b$, & par conséquent cette équation $bx^n ddx = addy$, dans laquelle on voit les secondes différences tant de l'abscisse que de l'ordonnée, sans qu'on sache quelle est la quantité qui a été prise pour constante, ni même s'il y en a quelqu'une qui ait été regardée comme telle. Ainsi on ne connoît pas la voie que l'on doit suivre.

Pour le cas de l'équation précédente, je dis que si l'on passe des premières différences aux secondes, sans employer aucune constante, il n'y a aucune courbe possible qui satisfasse au Problême. Si au contraire on détermine des constantes, on trouvera des courbes, en nombre infini, qui rempliront les conditions demandées, qui seront de différente nature, & qui varient dès que l'on change la constante que certaines questions pemettent de prendre à volonté.

Pour distinguer l'espece de ces équations l'une de l'autre, on pourra faire usage de la formule qui résultera des exemples que je vais joindre ici, & qui servira dans tous les cas où l'on ne sera pas abandonné par le Calcul intégral.

EXEMPLE I.

Soit proposée l'équation $z^{m+1} dx^n ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{n+1} = dy^n ddy$. Je dis que c'est une de ces formules auxquelles on peut arriver sans prendre aucune quantité comme constante. La variable z est donnée d'une manière quelconque en x & en y.

La démonstration sera aussi générale qu'il est possible de la rendre, si l'on prend pour constante la fluxion $\frac{dx}{q}$, dans laquelle q ſera une fonction de x & y combinées comme on voudra. Je ſuppoſe donc $\frac{dx}{q} = dp$, & puiſque le premier membre de cette équation eſt conſtant, dp le ſera auſſi; & dx étant $= q\,dp$, ſi l'on paſſe aux ſecondes différences, on aura $ddx = dq\,dp$.

Que l'on faſſe encore $dy = u\,dp$; prenant les ſecondes différences dans l'hypothèſe de dp conſtante, on aura $ddy = du\,dp$. Maintenant ſi l'on ſubſtitue ces valeurs ainſi déterminées dans l'équation principale, il en réſultera celle-ci: $z^{m+1} q^m dq\,dp^{m+1} + \frac{u^{m+1} dz\,dp^{m+1}}{z} = u^m du\,dp^{m+1}$, & en diviſant par dp^{m+1}, on aura $z^{m+1} q^m dq + \frac{u^{m+1} dz}{z} = u^m du$, équation délivrée de l'inconnue p & de ſes fonctions. Que l'on intégre, en ſuivant les regles qu'on a expliquées, & ſans oublier d'ajouter une conſtante g, on trouvera $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{(m+1) z^{m+1}}$, d'où l'on tire $u = z \cdot (q^{m+1} + gm + g)^{\frac{1}{m+1}}$. Et puiſque $dy = u\,dp = \frac{u\,dx}{q}$, après les ſubſtitutions convenables, on aura enfin l'équation réduite à ſon état le plus ſimple, c'eſt-à-dire $dy = \frac{z\,dx}{q} (q^{m+1} + gm + g)^{\frac{1}{m+1}}$; ce qu'il falloit trouver.

De cette manière de procéder, nous pouvons tirer les Corollaires ſuivants.

I. Si l'on détermine la grandeur z, la dernière équation se construira du moins par les quadratures; pourvu que cela puisse s'exécuter, il est clair qu'il y aura une infinité de courbes qui satisferont à notre formule, & qui changeront de nature à mesure que la fluxion $\frac{dx}{q}$ qui a été prise pour constante, changera de valeur, de manière que chaque valeur de q donnera une nouvelle équation locale, soit algébrique, soit transcendante.

II. Quoique le changement de la valeur de q donne naissance à des courbes différentes, il est certain cependant que si on suppose la constante ajoutée $g=0$, on aura toujours l'équation $dy=z\,dx$. Dans ce cas, il n'importe pas quelle soit la différence $\frac{dx}{q}$, qui a été prise pour constante; puisque g s'évanouissant, la variable q s'évanouit aussi.

III. Et la caractéristique à laquelle on peut reconnoître qu'on parvient à l'équation primitive sans prendre aucune fluxion comme constante, est que dans cette supposition son intégrale soit $z\,dx=dy$. En effet, rappellons l'expression trouvée ci-dessus,

$z^{n+1}dx^n ddx+\frac{dz}{z}dy^{n+1}-dy^n ddy=0$, & différentions de nouveau l'intégrale $z\,dx=dy$, sans prendre aucune constante, nous aurons $z\,ddx+dz\,dx=ddy$. Si par le moyen de ces deux dernières équations, on chasse de la formule principale d'abord dy, & ensuite dx avec leurs fonctions, on trouvera, $z^{n+1}dx^n ddx+z^n dz\,dx^{n+1}-z^{n+1}dx^n ddx-z^n dz\,dx^{n+1}=0$, $dy^n ddy-\frac{dz}{z}dy^{n+1}+\frac{dz}{z}dy^{n+1}-dy^n ddy=0$.

IV. Après avoir traité la formule primitive comme on l'a vu ci-dessus, & être parvenu à l'équation réduite du premier degré $dy = \frac{z\,dx}{q}(q^{m+1} + gm + g)^{\frac{1}{m+1}}$, il faudroit passer à l'intégration; mais les ressources connues du Calcul intégral ne permettent pas, dans bien des occasions, d'en venir à bout; cela dépend des différentes valeurs qu'ont l'exposant m dans la fraction z donnée en x & y, & la quantité $\frac{dx}{q}$ que l'on prend pour constante. Mais de quelque manière que cela soit, après avoir déterminé les susdites valeurs dans une infinité de cas particuliers, & être parvenu à l'équation locale de la courbe exprimée en termes finis, si l'on passe aux premières différences, & ensuite aux secondes, en faisant toujours $\frac{dx}{q}$ constante, on retrouvera notre formule principale. Mais si l'on changeoit de constante, on arriveroit à d'autres formules. Je ne m'arrêterai pas davantage là-dessus; cela paroîtra évident à ceux qui voudront revenir sur leurs pas, & suivre les traces de l'analyse en sens contraire.

V. On retrouvera les mêmes choses, si l'on prend pour constante la fluxion première $\frac{dy}{q}$; car en faisant le même calcul que ci-dessus, & que j'omettrai en faveur de la briéveté, on arrivera à l'équation réduite $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q}(mg + g)^{\frac{1}{r+1}}$, dans laquelle on remarquera que la supposition de $g = 0$, redonne aussi l'équation $dx = \frac{dy}{z}$ exprimée par les différences premières.

VI. Si l'on veut quelques limitations qui simplifient l'équation, par exemple, si $m = 1$, $z = xx$, & $q = x$, & qu'on prenne pour constante $\frac{dx}{q}$, comme dans le Corollaire IV, la formule $dy = \frac{z\,dx}{q}(q^{n+1} + gm + g)^{\frac{1}{n+1}}$, se changera en celle-ci : $dy = x\,dx\sqrt{[xx + 2g]}$, qui s'intégre analytiquement. Que si l'on fait usage de l'expression du Corollaire V, $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q}(mg + g)^{\frac{1}{n+1}}$, que l'on trouve en regardant $\frac{dy}{q}$ comme constante, & que l'on conserve toujours les mêmes limitations de $m = 1$, $z = xx$, $q = x$; il en résultera l'équation $\frac{xx\,dx}{1 - x\sqrt{2g}} = dy$, qui n'est intégrable que par les logarithmes, & qui donne par conséquent une courbe transcendante.

Il est donc évident qu'on pouvoit arriver à la formule différentielle du second ordre $z^{n+1}dx^n ddx + \frac{dz}{z}dy^{n+1} = dy^n ddy$, sans prendre aucune différence pour constante, & dans ce cas on a l'intégrale $z\,dx = dy$; ou bien, on y arrive en prenant pour constantes, par exemple, les fluxions $\frac{dx}{q}$, $\frac{dy}{q}$, & alors on parvient tout de suite aux intégrales qui ont été trouvées plus haut dans ces suppositions.

EXEMPLE II.

Soit proposée l'équation $x^m ddx = ddy + dy^2$. Je dis qu'on ne peut pas parvenir à cette équation sans prendre quelque constante, si ce n'est dans le seul cas où l'on auroit $m = -1$. Mettons cette vérité en évidence.

Premièrement je prends dx comme constante, ce qui me donne $ddx = 0$, $\frac{-ddy}{dy} = dy$, & en intégrant L. $\frac{dx}{dy} = y$, ou bien $\frac{dx}{dy} = c^y$. Supposant $c^y = z$, j'ai y L. $c =$ L. z, & par conséquent $dy = \frac{dz}{z}$. Je substitue cette valeur de dy, j'aurai $\frac{z dx}{dz} = c^y$; mais $c^y = z$; donc $dx = dz$, & $x = z = c^y$. On a donc $\frac{dx}{x} = dy$, qui est l'équation à la logarithmique.

Secondement, je cherche ce qui arrivera en prenant une autre constante, par exemple dy, supposition qui donne $ddy = 0$. Je suppose $dx = sdy + cdy$, s étant une nouvelle variable, & c une quantité donnée. Passant aux secondes différences, j'ai $ddx = dsdy$, & les substitutions me donnent $x^m dsdy = dy^2$, ou bien $x^m ds = dy$. Mais $dy = \frac{dx}{s+c}$, donc $sds + cds = x^{-m} dx$; & en intégrant sans ajouter de constante, $\frac{ss}{2} + cs = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, ou bien $s + c = \sqrt{\left[\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc\right]}$. Mais

$$dx = (s+c)\,dy = dy\sqrt{\left[\frac{2x^{-m+1}}{-m+1}+cc\right]},$$

donc $\dfrac{dx}{\sqrt{\left[\frac{2x^{-m+1}}{-m+1}+cc\right]}} = dy.$

J'examine enfin si la logarithmique ne feroit pas cachée sous cette dernière formule ; on l'a déja trouvée plus haut dans l'hypothèse de dx constante, & elle pourroit aussi avoir lieu dans la supposition de l'autre constante dy. Faisant $c=0$, il faut que l'on ait cette égalité, $\sqrt{\left[\frac{2x^{-m+1}}{-m+1}\right]} = x$, ou bien $2x^{-m+1} = (-m+1)\,xx$. Or, cette égalité ne peut avoir lieu que lorsque la quantité $-m+1$, qui fait fonction de coëfficient & d'exposant, est égale à 2; ou, ce qui revient au même, lorsque l'exposant $m = -1$.

Donc si dans la formule $x^m ddx = ddy + dy^2$, on détermine l'exposant m à la valeur -1, on parviendra à l'équation différentielle du second degré, sans regarder aucune différence comme constante, & son intégrale sera l'équation de la logarithmique $\frac{dx}{x} = dy$. Dans tout autre cas, on n'arrivera point à la même formule, si l'on ne prend pour constante quelqu'une des grandeurs infinitésimales du premier ordre.

EXEMPLE III.

Il nous reste à proposer pour exemple une équation différentielle de l'autre espece, à laquelle on ne puisse pas parvenir sans assigner quelque constante.

Reprenons le Probléme proposé ci-dessus : construire une courbe dans laquelle telle puissance qu'on voudra de l'abſciſſe ſoit en raiſon directe de la ſeconde fluxion de l'ordonnée, & en raiſon inverſe de la ſeconde fluxion de l'abſciſſe.

L'équation eſt $bx^m ddx = addy$. Soit ſuppoſé $dx = qdp$, $dy = udp$; que l'on faſſe les mêmes opérations qu'au premier exemple; que l'on prenne les ſecondes différences $ddx = dpdq$, $ddy = dudp$, & que l'on ſubſtitue ces valeurs, on aura $bx^m dq = adu$, & en intégrant $\int bx^m dq = au \pm g$. Mais $dy = udp = \frac{udx}{q}$; donc $dy = \frac{dx}{q}\int x^m dq \pm \frac{gdx}{q}$. Dans ce cas, ſi l'on fait $g = 0$, chaque valeur différente de la quantité q donnera une courbe différente, pourvu cependant qu'on ne ſuppoſe pas l'expoſant $m = 0$; car cette ſuppoſition détruit l'hypothèſe, & change le Problême.

Il en faut dire autant pour le cas où l'on prendroit pour conſtante la fraction $\frac{dy}{q}$; d'où nous conclurons qu'il n'eſt pas poſſible d'avoir une équation différentielle du premier degré, qui, différentiée de nouveau, ſans regarder aucune des fluxions comme conſtante, redonne notre formule; car s'il en exiſtoit quelqu'une, on la trouveroit par la ſuppoſition de quelqu'une des conſtantes; & l'analyſe vient de nous montrer le contraire.

PROBLEME I.

62. *Le raïon oſculateur, exprimé comme on voudra par le moyen de l'ordonnée de la courbe, étant donné, trouver la courbe?*

Lorſque la courbe étant donnée, on ſe propoſe de trouver le raïon ofculateur, le Problême ou bien la méthode que l'on fuit pour le réfoudre, s'appelle la méthode directe des raïons ofculateurs ; il en a été queftion au cinquième Chapitre *du Calcul différentiel* ; mais ici, où le raïon ofculateur étant donné, on demande la courbe à laquelle il appartient, le Problême dont il s'agit peut s'appeller le Problême inverfe des raïons ofculateurs. Soit r le raïon ofculateur que l'on fuppofe donné d'une manière quelconque par l'ordonnée y de la courbe. On prendra celle qu'on voudra des formules des raïons ofculateurs, & premièrement pour les courbes rapportées au foyer, par exemple ....

$\frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$ dans laquelle dx eft conftante, & ds eft l'élément de la courbe ; & l'on aura l'équation $r = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$, ou bien (puifque $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & par conféquent $dsdds = dyddy$, à caufe de dx conftante), $r = \frac{ydyds^3}{dxdyds - ydxdds}$.

Pour réduire cette équation, on fe fervira de la méthode du n°. 49. On fuppofera donc $ds = pdx$, $dds = dpdx$; & les fubftitutions faites, on aura $r = \frac{ppydy}{pdy - ydp}$, ou bien $\frac{pdy - ydp}{pp} = \frac{ydy}{r}$; & fi l'on intégre, puifque r eft donné en y, on aura $\frac{y}{p} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$; mais $p = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$; donc la courbe fera $\frac{ydx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$, équation réduite aux premières différences, puifque r étant donnée en y, on pourra toujours avoir l'intégrale

$\int \frac{y\,dy}{r}$, du moins d'une manière tranſcendante.

Autre ſolution. J'écris l'équation $r = \ldots\ldots$ $\frac{y\,ds^3}{dx\,ds^2 - y\,dx\,ddy}$ de cette manière : $\frac{y\,ds^3}{r} =$
Fig. 8. $dx\,ds^2 - y\,dx\,ddy$; enſuite du point B (Fig. 8) d'où partent les ordonnées BE de la courbe cherchée AEC, je mene BF perpendiculaire à BE, & terminée par le raïon oſculateur EQ; je ſuppoſe $BF = p$, $EF = q$, & par les formules connues de la normale & de la ſou-normale, j'ai $q = \frac{y\,ds}{dx}$, $p = \frac{y\,dy}{dx}$, ou $dy = \frac{p\,dx}{y}$; de plus, la différentiation dans l'hypothèſe de dx conſtante, donne $ddy = \frac{y\,dp\,dx - p\,dx\,dy}{yy}$; & ſubſtituant dans l'équation principale, j'ai $\frac{y\,ds^3}{r} = dx\,ds^2 - dp\,dx^2 + \frac{p\,dx\,dy}{y}$; mais $ds = \frac{q\,dx}{y}$; donc $\frac{q^3dx}{r} = qq\,dx - yy\,dp + py\,dy$, & (puiſque $dx = \frac{y\,dy}{p}$), $\frac{q^3dy}{r} = qq\,dy + pp\,dy - yp\,dp$. Mais à cauſe de l'angle droit EBF, on a $pp = qq - yy$, & $p\,dp = q\,dq - y\,dy$; faiſant donc la ſubſtitution, on aura $\frac{qq\,dy}{r} = 2q\,dy - y\,dq$; ou bien en multipliant par y & diviſant enſuite par qq, $\frac{y\,dy}{r} = \frac{2qy\,dy - yy\,dq}{qq}$, dont l'in-

tégrale est $\int \frac{ydy}{r} \pm h = \frac{yy}{q}$; mais $q = \frac{yds}{dx}$;

donc $\int \frac{ydy}{r} \pm h = \frac{ydx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$.

Voici une autre solution encore plus simple, à laquelle on parvient en évitant les secondes différences.

Soit CED la corde prolongée de l'arc infiniment petit EC, à laquelle BD est perpendiculaire ; soit supposé $BD = p$, on aura, d'après ce qui a été dit au n°. 126, Chap. V *du Calcul différentiel*, QE c'est-à-dire $r = \frac{ydy}{dp}$, & par conséquent $\frac{ydy}{r} = dp$, & en intégrant, puisque r est donnée en y, ... $\int \frac{ydy}{r} \pm h = p$; mais d'après le même article déja cité, $p = \frac{ydx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; donc $\int \frac{ydy}{r} \pm h = \ldots$ $\frac{ydx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$.

Soit $r = \frac{y}{b} \sqrt{[aa + bb]}$, on aura donc... $\int \frac{bdy}{\sqrt{[aa + bb]}} \pm h = \frac{ydx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, & intégrant réellement en négligeant la constante h pour plus de simplicité, $\frac{b}{\sqrt{[aa + bb]}} = \frac{dx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, & par conséquent $bbdx^2 + bbdy^2 = aadx^2 + bbdx^2$, c'est-à-dire $bdy = adx$, qui est la spirale logarithmique du n°. 139, même Chapitre & même Traité.

Si au lieu du raïon QE, on avoit donné le co-raïon HE exprimé en y d'une manière quelconque ; soit appellé le co-raïon z. Les triangles semblables

EBD, QEH donnent $EB : BD :: QE : EH$, c'est-à-dire $y : p :: \frac{ydy}{dp} : z$, & par conséquent $z = \frac{pdy}{dp}$, ou $\frac{dy}{z} = \frac{dp}{p}$, dont l'intégrale est $\int \frac{dy}{z} \pm h =$ L. p. Supposons $z = y$, nous aurons $\int \frac{dy}{y} \pm h = \frac{dp}{p}$, & en intégrant réellement L. $y =$ L. $p +$ L. $\frac{m}{h}$, c'est-à-dire $y = \frac{pm}{h}$; mais $p = \ldots\ldots \frac{ydx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; donc $h\sqrt{[dx^2 + dy^2]} = mdx$, & par conséquent $hdy = dx\sqrt{[mm - hh]}$, spirale logarithmique, qui est la même que celle que nous venons de trouver ci-dessus, lorsque $h = b$, & $m = \sqrt{[aa + bb]}$.

63. A l'égard des courbes rapportées à l'axe, la formule du raïon osculateur, en supposant dx constante, est $\frac{ds^3}{-dxddy}$; l'équation sera par conséquent $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$.

Supposons $dy = qdx$, ce qui donne $ddy = dqdx$; nous aurons, après avoir fait les substitutions, $r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\ dq}$, & en mettant $\frac{dy}{q}$, au lieu de dx, $r = \frac{dy.(1 + qq)^{\frac{3}{2}}}{-qdq}$, c'est-à-dire . . . $\frac{dy}{r} = \frac{-qdq}{(1 + qq)^{\frac{3}{2}}}$, & en intégrant $\int \frac{dy}{r} \pm h = \frac{1}{\sqrt{[1 + qq]}}$;

$\frac{1}{\sqrt{[1+qq]}}$; mais $q = \frac{dy}{dx}$; donc $\int \frac{dy}{r} \pm h = \frac{dx}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$.

Supposons $r = \frac{(4yy+aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$; nous aurons. . . $\int \frac{2aady}{(4yy+aa)^{\frac{3}{2}}} \pm h = \frac{dx}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$. L'intégration réelle de cette équation, en négligeant la constante h, donne $\frac{2y}{\sqrt{(4yy+aa)}} = \frac{dx}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$, c'est-à-dire $2ydy = adx$, & en intégrant $yy = ax$ qui est la parabole ordinaire. Voyez ci-dessus, n°. 133, Chap. V, *Calcul différentiel*.

Au lieu du raïon r, soit donné le co-raïon que j'appellerai z, & dont la formule, en supposant dx constante, est $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$. L'équation sera donc. . $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = z$. Supposant $dy = qdx$, $ddy = dqdx$, & substituant les valeurs de ddy & de dx, on aura $\frac{dy.(1+qq)}{-qdq} = z$, c'est-à-dire $\frac{dy}{z} = . . \frac{-qdq}{1+qq}$, & en intégrant $\int \frac{dy}{z} \pm h = - . . . . .$ $L.\sqrt{[1+qq]}$; par où l'on voit que si le co-raïon z est donné en y, de telle manière que $\int \frac{dy}{z}$ soit une quantité logarithmique, on aura une équation différentielle du premier degré exprimée en termes ordinaires, & dans les autres cas, elle contiendra des quantités logarithmiques.

Supposons $z = \frac{4y^3 + aay}{aa}$, l'équation sera... $\int \frac{aady}{4y^3 + aay} \pm h = -L. \sqrt{[1+qq]}$. Que l'on intégre réellement en négligeant la constante h, on aura $L. \frac{y}{\sqrt{\left[yy + \frac{aa}{4}\right]}} = L. \frac{1}{\sqrt{[1+qq]}}$, & par conséquent $\frac{yy}{yy + \frac{aa}{4}} = \frac{1}{1+qq}$. Que l'on mette au lieu de q sa valeur, on aura $2ydy = adx$, & en intégrant, $yy = ax$, qui est encore la parabole ordinaire.

64. EN second lieu, si le raïon osculateur ou le co-raïon est donné comme on voudra par le moyen de l'abscisse x, il est clair que dans ce cas on ne peut pas faire usage des réductions qu'on a employées pour le cas précédent; puisqu'on ne pourra pas avoir les intégrales $\int \frac{dy}{r}$, $\int \frac{dy}{z}$, si r & z sont données en x.

Prenant donc la formule du raïon osculateur pour les courbes rapportées aux axes, qui est $\frac{(dx^2 + dy)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, & dans laquelle dx est constante (car dans les courbes rapportées au foyer, le raïon osculateur ou le co-raïon ne peuvent pas être donnés par l'abscisse); on aura $r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$. On supposera donc, comme ci-dessus, $dy = qdx$, $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$,

& les substitutions donneront $r = \frac{(dx^2+qqdx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx^2dq}$;

c'est-à-dire $\frac{dx}{r} = \frac{-dq}{(1+qq)^{\frac{3}{2}}}$, & en intégrant..

$\int\frac{dx}{r} \pm h = \frac{-q}{(1+qq)^{\frac{1}{2}}}$, équation réduite aux premières différences, puisque r étant donné en x, il sera toujours possible d'avoir, du moins d'une manière transcendante, l'intégrale $\int\frac{dx}{r}$. Si l'on met dans cette équation la valeur de q, elle devient $\int\frac{dx}{r} \pm h = \frac{-dy}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$.

Supposons, par exemple, $r = 2\sqrt{[4aa-2ax]}$; nous aurons $\int\frac{dx}{2\sqrt{[4aa-2ax]}} \pm h = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{-dy}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$; & intégrant réellement, en négligeant la constante h, $\frac{-\sqrt{[4aa-2ax]}}{2a} = \ldots\ldots$ $\frac{-dy}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$; quarrons les deux membres, & réduisons au même dénominateur, nous trouverons $4aadx^2 - 2axdx^2 - 2axdy^2 = 0$, c'est-à-dire $dy = \sqrt{\left[\frac{2a-x}{x}\right]}$, qui est l'équation à la cycloïde du n°. 142, Chap. V, *Calcul différentiel.*

Si le co-raïon est donné au lieu du raïon, nous aurons $z = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$. Nous supposerons encore $dy = qdx$, $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, & les ſubſtitutions nous donneront $z = \frac{dx^2 + qqdx^2}{-dqdx}$, ou bien $\frac{dx}{z} = \frac{-dq}{1+qq}$; & en intégrant $\int \frac{dx}{z} \pm h = \int \frac{-dq}{1+qq}$; mais l'intégrale du ſecond membre eſt un arc de cercle; donc ſi le co-raïon eſt donné de manière que $\int \frac{dx}{z}$ ſoit auſſi un arc de cercle, & que ces deux arcs ſoient entr'eux comme nombre à nombre, nous aurons l'équation réduite aux premières différences, exprimée en quantités ordinaires.

Soit $z = 2\sqrt{[2ax - xx]}$; l'équation ſera $\int \frac{dx}{2\sqrt{[2ax - xx]}} = \int \frac{-dq}{1+qq}$; mais l'intégrale du premier membre eſt un arc de cercle, qui a pour tangente $\frac{\sqrt{[2ax - xx]}}{x}$, & celle du ſecond eſt un arc de cercle, dont la tangente eſt q; on aura donc $\frac{\sqrt{[2ax - xx]}}{x} = q = \frac{dy}{dx}$, & par conſéquent $dy = dx\sqrt{\left[\frac{2a - x}{x}\right]}$, équation de la même cycloïde.

PROBLEME II.

65. *Le raïon oſculateur d'une courbe rapportée aux axes, étant donné d'une manière quelconque, trouver la courbe?*

Si l'on ſuppoſe conſtant l'élément ds de la courbe, la formule du raïon oſculateur eſt $\frac{dxds}{ddy}$; ainſi on à l'équation $r = \frac{dxds}{ddy}$. Soit appellée la tangente de la courbe t, & la sou-tangente p; on aura.. $\frac{yds}{dy} = t$, & différentiant dans l'hypothèse de ds constante, $dt = \frac{dy^2 ds - ydsddy}{dy^2}$, c'est à dire $ddy = \frac{dy^2 ds - dy^2 dt}{yds}$; & la substitution donnera $r = \frac{ydxds^2}{dy^2 ds - dy^2 dt}$. Mais puisqu'on a $p = \frac{ydx}{dy}$, & $t = \frac{yds}{dy}$, on aura encore $dx = \frac{pdy}{y}$, $ds = \frac{tdy}{y}$; & ces valeurs substituées dans l'équation supérieure, la changeront en celle-ci, $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$; mais $p = \sqrt{[tt - yy]}$; donc $r = \frac{tds\sqrt{[tt-yy]}}{tdy - ydt}$, ou bien $\frac{ds}{r} = \frac{tdy - ydt}{t.\sqrt{[tt-yy]}}$.

Le premier membre de cette dernière équation est intégrable, du moins d'une manière transcendante, puisque r est une fonction de s; & on séparera facilement les indéterminées du second, en faisant $q = \frac{y}{t}$, au moyen de quoi on aura cette équation très-simple, $\frac{ds}{r} = \frac{dq}{\sqrt{[1-qq]}}$.

Si dans la formule $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$, on avoit pris, au lieu de t, la valeur $\sqrt{[pp+yy]}$, on auroit trouvé $r = \frac{(pp+yy).ds}{pdy - ydp}$; & faisant $\frac{y}{p} = z$, on seroit arrivé à l'équation aussi très-simple $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$.

Les deux quantités différentielles $\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}}$, $\frac{dz}{1+zz}$ expriment des éléments d'arcs de cercle; ainsi lorsque l'intégrale $\int \frac{ds}{r}$ est algébrique, ou bien encore lorsqu'elle dépend des logarithmes, ou d'autres quadratures des degrés supérieurs, la rectification de la courbe cherchée, & la valeur du raïon osculateur, supposent la quadrature du cercle; mais au contraire, l'une & l'autre sont algébriques, lorsque l'intégrale $\int \frac{ds}{r}$ répond à quelque formule d'arc de cercle.

Reprenons l'une des deux équations, par exemple la seconde $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$. Puisque $ds = \frac{tdy}{y} = \frac{dy}{y}\sqrt{[pp+yy]}$, & que $p = \frac{y}{z}$, on aura $ds = \frac{dy}{z}\sqrt{[1+zz]}$; cette valeur mise dans l'équation donnera $dy = \frac{rzdz}{(1+zz)\sqrt{(1+zz)}}$. Et puisque $ds = \frac{dy}{z}\sqrt{[1+zz]}$, on aura aussi ds^2, c'est-à dire $dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2+zzdy^2}{zz}$, & par conséquent $dx = \frac{dy}{z}$.

Soit le raïon osculateur donné $r = 1+ss$, l'équation $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{r}$, ſe changera en celle-ci, $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{1+ss}$, d'où l'on tire $z=s$; & par conſéquent $r=1+zz$. Que l'on ſubſtitue cette valeur dans l'équation $dy = \frac{rzdz}{(1+zz)\sqrt{[1+zz]}}$, on aura $dy = \frac{zdz}{\sqrt{[1+zz]}}$; & ſi l'on intégre en négligeant la conſtante, $y = \sqrt{[1+zz]}$, d'où l'on tire $z = \sqrt{[yy-1]}$. Mais puiſque $dx = \frac{dy}{z}$, on aura finalement $dx = \frac{dy}{\sqrt{[yy-1]}}$, équation de la courbe cherchée dans la ſuppoſition que l'on a faite pour le raïon oſculateur. Sa conſtruction dépend de la quadrature de l'hyperbole.

Prenons la formule du raïon oſculateur $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dxds}$, dans laquelle aucune des différences premières n'eſt conſtante; j'écris l'équation de cette manière : $\frac{dy}{dx}\left(\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}\right) = \frac{ds}{r}$. L'intégrale de $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$ eſt $L.dy - L.ds$ que je ſuppoſe $=$ $L.p$. Donc $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$ ſera $= \frac{dp}{p}$, & $\frac{dy}{ds} = p$; ainſi l'équation devient $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p}$; mais $p = \frac{dy}{ds}$, & $\frac{dy^2}{pp} = ds^2 = dx^2 + dy^2$. donc $dx =$

$\frac{dy.\sqrt{[1-pp]}}{p}$. Or, en substituant cette valeur; on aura $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{[1-pp]}}$, équation dans laquelle les variables sont séparées, & qu'on pourra par conséquent intégrer par la méthode qui a été expliquée.

Prenons la formule du raïon osculateur $\frac{ds}{r} = \frac{-dyddx}{dsdx}$, dans laquelle dy est constante. Je supposerai $ds = qdy$, & par conséquent $dds = dqdy$; ainsi $\frac{ds}{r} = \frac{-dy^2dq}{dsdx}$; mais $ds^2 = dx^2 + dy^2 = qqdy^2$; d'où l'on tire $dx = dy\sqrt{[qq-1]}$, & $dxds = qdy^2\sqrt{[qq-1]}$. Faisant cette substitution, on aura $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{[qq-1]}}$.

Soit enfin la formule du raïon osculateur $\frac{ds}{r} = \frac{-dxddy}{ds^2}$, dans laquelle dx est constante. On supposera $z = \frac{dx}{dy}$, & par conséquent $dz = \ldots\ldots \frac{-dxddy}{dy^2}$; donc $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2dz}{ds^2}$; mais $dx = zdy$ & $ds^2 = dx^2 + dy^2 = zzdy^2 + dy^2$; ainsi $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$.

On voit par-là que de quelque manière que l'on opére, l'intégrale $\int\frac{ds}{r}$ se rapportera toujours ou à la circonférence, ou à la quadrature du cercle.

Que le co-raïon que j'appellerai u soit donné d'une manière quelconque. Je prens une des trois formules données ci-dessus, par exemple celle-ci : $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{[qq-1]}}$, dans laquelle dy a été prise pour constante, & où l'on a supposé $ds = q dy$. On a le raïon $r = \frac{u ds}{dx}$; or, cette valeur mise dans la formule donne $\frac{ds}{u} = \frac{-dx dq}{q dx \sqrt{[qq-1]}}$; mais $ds = q dy$, & $dx = dy\sqrt{[qq-1]}$; faisant donc les substitutions, on aura $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{qq-1}$; mais u est donné en s, donc, &c.

On observera ici que de même que l'intégrale $\int \frac{ds}{r}$ est égale à l'expression d'un arc de cercle, l'autre intégrale $\int \frac{ds}{u}$ se rapporte à la quadrature de l'hyperbole, ou, ce qui revient au même, aux logarithmes.

66. ON pourra, par des artifices semblables, ou peu différents de ceux-ci, réduire aux secondes différences beaucoup d'équations ou de formules exprimées avec des différentielles des troisième & quatrième ordres, ou même des ordres supérieurs. En premier lieu, la méthode du n°. 49 s'étend, avec quelques limitations cependant, aux équations différentielles des ordres troisième, quatrième, cinquième, &c; c'est-à-dire que les équations du troisième ordre se réduiront toujours au premier, pourvu que l'une ou l'autre des variables finies x, y ne s'y

trouve pas; 2°. que celles du quatrième s'y réduiront pareillement, pourvu que non seulement l'une ou l'autre des variables finies x, y, mais qu'encore l'une ou l'autre des premières fluxions dx, dy, & leurs fonctions respectives ne paroissent pas dans ces équations; 3°. que celles du cinquième se réduiront encore au premier, si les deux variables finies y manquent aussi-bien que les deux premières différences; 4°. que celles du sixième s'y réduiront aussi, s'il y manque encore outre cela l'une ou l'autre des différences secondes; & ainsi des autres.

Soit l'équation $dxdddy + dx^2ddy = dx^4 + dy^4$, dans laquelle dx a été prise pour constante. Je fais à l'ordinaire $pdx = dy$, & par conséquent $dpdx = ddy$, $ddpdx = dddy$; & après les substitutions j'ai $dx^2ddp + dx^3dp = dx^4 + dy^4$, mais $dy^4 = p^4dx^4$; donc $ddp + dxdp = dx^2 + p^4dx^2$, équation réduite aux différences du second ordre. Je suppose de plus $qdx = dp$, en regardant toujours dx comme constante; j'ai par conséquent $dqdx = ddp$, & en substituant $dqdx + dpdx = dx^2 + p^4dx^2$, c'est à dire $dq + dp = dx + p^4dx$; mais $dx = \frac{dp}{q}$; donc $dq + dp = \frac{dp}{q} + \frac{p^4dp}{q}$, équation réduite aux premières différences.

Soit l'équation différentielle du quatrième ordre $d^4y + dxd^3y - dx\,ddy = 0$, dans laquelle dx est constante. Je fais donc $pdx = dy$, & par conséquent $dpdx = ddy$, $ddpdx = d^3y$, $d^3pdx = d^4y$; & faisant les substitutions, je trouve $d^3p + dxddp - dx^2dp = 0$, équation qui est précisément le cas de l'exemple que j'ai donné plus haut; on a vu comment il faut la traiter; ainsi on la réduira facilement aux premières différences.

Je connoissois depuis long-temps la méthode du n°. 49. qui est due au Comte Jacques Riccati; mais ce n'est que depuis peu que le second tome des Mémoires de l'Institut de Bologne m'étant tombé entre les mains, j'y ai pris connoissance de l'extension qu'on a donnée à cette méthode, & que je viens d'exposer, & du second Problême inverse des raïons osculateurs. Je suis fâchée de n'avoir pas eu occasion de lire plutôt ce volume; car me trouvant à la fin de l'impression de cet Ouvrage, je n'ai pas le temps de faire usage des savants Mémoires qui y ont été insérés par le Pere Vincent Riccati, fils du Comte de même nom, & par M. Gabriel Manfredi. Je me contenterai donc de les avoir indiqués à mes Lecteurs, afin qu'ils puissent y recourir.

67. AYANT vu la susdite extension de la méthode du n°. 49, je passe à d'autres équations & à d'autres artifices.

Soit l'équation $p\,dy\,ddy^2 = p\,dx^2 d^3y - 2p\,dx\,ddx\,ddy - dp\,dx^2 ddy$, dans laquelle p est donnée d'une manière quelconque en x & y, & où l'on a pris pour constante l'élément ds de la courbe. Puisque ds est constant, on a $dx\,ddx = -dy\,ddy$; & substituant cette valeur de $dx\,ddx$, on trouve $p\,dy\,ddy^2 = p\,dx^2 d^3y + 2p\,dy\,ddy^2 - dp\,dx^2 ddy$, c'est-à-dire $dp\,dx^2 ddy = p\,dy\,ddy^2 + p\,dx^2 d^3y$, ou bien $\frac{dp}{p} = \frac{dy\,ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{ddy}$. Que l'on mette au lieu de $dy\,ddy$ sa valeur $-dx\,ddx$, on aura $\frac{dp}{p} = -\frac{ddx}{dx} + \frac{d^3y}{ddy}$, & en intégrant par les logarithmes, $L.\,p = L.\,ddy - L.\,dx - L.\,ds$, ds étant la constante; & par conséquent $p = \frac{ddy}{dx\,ds}$, équation réduite aux secondes différences.

Soit l'équation $hdzd^3x - 3hddzddx - dhdzddx = 0$, dans laquelle h est donnée d'une manière quelconque en x & z. Prenons l'équation fictice $h^m dz^n ddx^r =$ une quantité constante, (m, n, r étant des exposants inconnus qu'on déterminera dans la suite de l'opération). En différentiant cette équation, on trouvera celle-ci : $rh^m dz^n ddx^{r-1} dddx + nh^m ddx^r dz^{n-1} ddz + mh^{m-1} dh dz^n ddx^r = 0$, qui divisée par $h^{m-1} dz^{n-1} ddx^{r-1}$ se réduit à $rhdzdddx + nhddxddz + mdhdzddx = 0$. Cette dernière équation comparée terme à terme avec la proposée, donne $r = 1$, $n = -3$, $m = -1$; ainsi au lieu de l'équation supposée $h^m dz^n ddx^r =$ une constante, on aura la vraie $\frac{ddx}{hdz^3} =$ une constante, qui est l'intégrale de la proposée.

On peut encore parvenir à la même intégration par la voie des logarithmes. Reprenons l'équation $hdzdddx - 3hddzddx - dhdzddx = 0$; divisons-la par $hdzddx$, nous aurons $\frac{d^3x}{ddx} - \frac{3ddz}{dz} - \frac{dh}{h} = 0$, & en intégrant, $L.ddx - L.dz^3 - L.h =$ un logarithme constant, & par conséquent $\frac{ddx}{hdz^3} =$ une quantité constante.

Je finirai ce Traité en donnant cet avis aux Analystes, qu'ils doivent, dans la solution des Problêmes, employer toute leur habileté, pour faire disparoître les secondes différences, & à plus forte raison celles des ordres supérieurs ; on en vient souvent à bout par des adresses de calcul, & par les ressources que l'analyse fournit quelquefois, tandis qu'on s'y attend le moins. On voit de pareils artifices employés avec succès dans les Problémes des courbes élastiques, de la Catenaire, de la Velaire, dans celui des isopérimètres, & dans beaucoup d'autres dont les solutions se trouvent dans les Actes de Léipsick, & dans d'autres Ouvrages savants, auxquels mes Lecteurs pourront avoir recours, s'ils veulent acquérir l'adresse & la sagacité nécessaires pour résoudre les Problêmes de ce genre.

FIN.

ADDITIONS DE L'ÉDITEUR.

ADDITION I.

Calcul des quantités angulaires.

I. L'AUTEUR de l'Ouvrage qui précéde n'ayant pas expliqué, du moins directement, la méthode pour différentier ou pour intégrer les quantités où il entre des angles, des ſinus, des coſinus, &c, on a cru devoir ſuppléer ici à ce défaut. Un tel ſupplément eſt d'autant plus indiſpenſable que le genre de calcul dont il s'agit, eſt très-fréquemment employé dans tous les Livres de Mathématique tranſcendante.

II. Il eſt démontré dans la Trigonométrie que ſi l'on nomme y & z deux angles, pour le raïon 1, on aura ces Théorêmes :

I. $\text{ſin.}\,(y+z) = \text{ſin.}\,y\ \text{coſ.}\,z + \text{ſin.}\,z\ \text{coſ.}\,y$,

II. $\text{ſin.}\,(y-z) = \text{ſin.}\,y\ \text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,z\ \text{coſ.}\,y$.

III. $\text{coſ.}\,(y+z) = \text{coſ.}\,y\ \text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,y\ \text{ſin.}\,z$.

IV. $\text{coſ.}\,(y-z) = \text{coſ.}\,y\ \text{coſ.}\,z + \text{ſin.}\,y\ \text{ſin.}\,z$.

V. $\text{ſin.}\,y\ \text{coſ.}\,z = \dfrac{\text{ſin.}\,(y+z) + \text{ſin.}\,(y-z)}{2}$,

VI. $\text{coſ.}\,y\ \text{coſ.}\,z = \dfrac{\text{coſ.}\,(y+z) + \text{coſ.}\,(y-z)}{2}$,

VII. $\text{fin. } y \text{ fin. } z = \frac{\text{cof. }(y - z) - \text{cof. }(y + z)}{2}$,

VIII. $\text{fin. } y \text{ cof. } y = \frac{\text{fin. } 2y}{2}$,

IX. $\text{cof. } y^{2} {}^{*} = \frac{1 + \text{cof. } 2y}{2}$,

X. $\text{fin. } y^{2} = \frac{1 - \text{cof. } 2y}{2}$.

III. Imaginons que l'angle y augmente de fa différentielle dy; il eft clair qu'on aura $d(\text{fin. } y) = \text{fin. }(y + dy) - \text{fin. } y$, & $d(\text{cof. } y) = \text{cof. }(y + dy) - \text{cof. } y$. Or (Théor. I.), $\text{fin. }(y + dy) = \text{fin. } y \text{ cof. } dy + \text{fin. } dy \text{ cof. } y$, & (Théorême III.), $\text{cof. }(y + dy) = \text{cof. } y \text{ cof. } dy - \text{fin. } y \text{ fin. } dy$. D'un autre côté, l'angle dy étant infiniment petit, on peut fuppofer dans les deux équations qu'on vient de trouver, $\text{fin. } dy = dy$, $\text{cof. } dy = 1$, comme il eft clair par la férie qui donne le finus ou le cofinus par l'angle. Par conféquent, on aura, en fubftituant & réduifant, $d(\text{fin. } y) = dy \text{ cof. } y$, & $d(\text{cof. } y) = - dy \text{ fin. } y$.

IV. Réciproquement, l'intégrale de $dy \text{ cof. } y$ eft $\text{fin. } y$, & celle de $- dy \text{ fin. } y$ eft $\text{cof. } y$.

On aura foin d'ajouter à ces intégrales les conftantes convenables. Ici & dans ce qui fuit, j'omets les conftantes, pour abréger.

V. On trouve de même que m étant un coëfficient quelconque, l'intégrale de $dy \text{ cof. } my$ eft $\frac{\text{fin. } my}{m}$,

* Par ces fortes d'expreffions $\text{cof. } y^{2}$, $\text{fin. } y^{2}$, &c, on entend le quarré du cofinus, ou du finus, &c, & non pas le cofinus ou le finus, &c, du quarré de l'angle.

celle de $-dy$ ſin. my eſt $\frac{\text{coſ.}\, my}{m}$. Car pour ramener ce cas au précédent, il ne faut que ſuppoſer $my = z$, $dy = \frac{dz}{m}$, ſubſtituer, puis intégrer.

VI. Suivant la Trigonométrie, on a tang. $y = \frac{\text{ſin.}\, y}{\text{coſ.}\, y}$, ſéc. $y = \frac{1}{\text{coſ.}\, y}$, cot. $y = \frac{\text{coſ.}\, y}{\text{ſin.}\, y}$, coſéc. $y = \frac{1}{\text{ſin.}\, y}$. Par conſéquent, on aura $d\,(\text{tang.}\, y) = \frac{dy\, \text{coſ.}\, y^2 + dy\, \text{ſin.}\, y^2}{\text{coſ.}\, y^2} = \frac{dy}{\text{coſ.}\, y^2}$, $d\,(\text{ſéc.}\, y) = \frac{dy\, \text{ſin.}\, y}{\text{coſ.}\, y^2}$, $d\,(\text{cot.}\, y) = \frac{-dy}{\text{ſin.}\, y^2}$, $d\,(\text{coſéc.}\, y) = \frac{-dy\, \text{coſ.}\, y}{\text{ſin.}\, y^2}$.

VII. Réciproquement, l'intégrale de $\frac{dy}{\text{coſ.}\, y^2}$ eſt tang. y; celle de $\frac{dy\, \text{ſin.}\, y}{\text{coſ.}\, y^2}$ eſt ſéc. y; celle de $\frac{-dy}{\text{ſin.}\, y^2}$ eſt cotang. y; celle de $\frac{-dy\, \text{coſ.}\, y}{\text{ſin.}\, y^2}$ eſt coſéc. y.

VIII. Par les mêmes principes, l'intégrale de dy coſ. y ſin. y, ou ſin. $y\,\big(d\,(\text{ſin.}\, y)\big)$ eſt $\frac{\text{ſin.}\, y^2}{2}$; celle de dy coſ. y ſin. y^2 eſt $\frac{\text{ſin.}\, y^3}{3}$; celle de dy coſ. y ſin. y^3 eſt $\frac{\text{ſin.}\, y^4}{4}$, &c. De même, l'intégrale de $-dy$ ſin. y coſ. y, ou coſ. $y\,\big(d\,(\text{coſ.}\, y)\big)$ eſt $\frac{\text{coſ.}\, y^2}{2}$; celle de $-dy$ ſin. y coſ. y^2 eſt $\frac{\text{coſ.}\, y^3}{3}$;

celle

celle de $-dy$ fin. y cof. y^3 eft $\frac{\text{cof.}\, y^4}{4}$; &c.

En général, l'intégrale de $A\,dy$ cof. y fin. y^n eft $\frac{A\,\text{fin.}\, y^{n+1}}{n+1}$; & celle de $-A\,dy$ fin. y cof. y^n eft $\frac{A\,\text{cof.}\, y^{n+1}}{n+1}$.

IX. Qu'on propofe d'intégrer dy cof. y^m, m étant un nombre entier pofitif : je diftingue deux cas; ou m eft un nombre impair, ou un nombre pair.

CAS I. La différentielle dont il s'agit, eft la même chofe que dy cof. y cof. y^{m-1}, ou dy cof. $y\,(\text{cof.}\, y^2)^{\frac{m-1}{2}}$, $\frac{m-1}{2}$ étant un nombre entier que je nomme n. Subftituant à la place de cof. y^2 fa valeur $1 - \text{fin.}\, y^2$, notre différentielle deviendra dy cof. $y\,(1 - \text{fin.}\, y^2)^n$, ou bien en développant, $dy\,\text{cof.}\, y - n\,dy\,\text{cof.}\, y\,\text{fin.}\, y^2 - \frac{n.(n-1)\,dy\,\text{cof.}\, y\,\text{fin.}\, y^4}{1.2}$ $- \frac{n.(n-1)(n-2)\,dy\,\text{cof.}\, y\,\text{fin.}\, y^6}{1.2.3} + \&c$, dont chaque terme s'intégre par l'article précédent.

CAS II. Lorfque m eft un nombre pair, la différentielle propofée s'intégre, en mettant dans chaque cas particulier, à la place de cof. y^m, fa valeur donnée par les Théorêmes de l'article II. Soit, par exemple, $m = 2$: on a (Théor. IX), cof. $y^2 = \frac{1 + \text{cof.}\, 2y}{2}$, & par conféquent on aura dy cof. $y^m = \frac{dy}{2} + \frac{dy\,\text{cof.}\, 2y}{2}$, dont l'intégrale eft $\frac{y}{2} + \frac{\text{fin.}\, 2y}{4}$.

Soit $m = 4$: on aura $\text{cof.}\, y^4 = \left(\frac{1 + \text{cof.}\, 2y}{2}\right)^2 =$ $\frac{1}{4} + \frac{\text{cof.}\, 2y}{2} + \frac{\text{cof.}\, 2y^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\text{cof.}\, 2y}{2} + \ldots\ldots$ $\frac{1 + \text{cof.}\, 4y}{8} = \frac{3}{8} + \frac{\text{cof.}\, 2y}{2} + \frac{\text{cof.}\, 4y}{8}$; & par conféquent $dy\, \text{cof.}\, y^m = \frac{3\,dy}{8} + \frac{dy\, \text{cof.}\, 2y}{2} + \ldots\ldots$ $\frac{dy\, \text{cof.}\, 4y}{8}$, dont l'intégrale eft $\frac{3y}{8} + \frac{\text{fin.}\, 2y}{4} + \frac{\text{fin.}\, 4y}{32}$.

On voit que dans ce cas l'intégrale renferme des arcs de cercle, au lieu que dans le premier elle n'en renferme jamais.

X. Qu'il faille intégrer $dy\, \text{fin.}\, y^m$, m étant un nombre entier pofitif : fi ce nombre m eft impair, on mettra la quantité propofée fous cette forme : $dy\, \text{fin.}\, y\, (\text{fin.}\, y^2)^{\frac{m-1}{2}}$, ou fous celle-ci, ... $dy\, \text{fin.}\, y\, (1 - \text{cof.}\, y^2)^{\frac{m-1}{2}}$; & alors $\frac{m-1}{2}$ étant un nombre entier, on aura, en développant, une fuite de termes dont chacun s'intégre par l'art. VIII.

Si m eft un nombre pair, la formule $dy\, \text{fin.}\, y^m$ s'intégre, en mettant pour $\text{fin.}\, y^m$ fa valeur donnée par les Théorêmes de l'article II.

XI. Soit à intégrer la quantité $dy\, \text{fin.}\, y^p\, \text{cof.}\, y^q$, p & q étant des nombres entiers pofitifs. Si l'un de ces deux nombres feulement eft impair, la quantité s'intégrera tout de fuite par l'article VIII. Car, foit, par exemple, p un nombre impair : j'écris la quantité proposée, sous cette forme dy sin. y sin. y^{p-1} cos. y^q, ou sous celle-ci : dy sin. $y(1 - \text{cos. } y^2)^{\frac{p-1}{2}}$ cos. y^q; expression qui peut être développée en termes dont chacun s'intégre par l'article cité. Il en seroit de même, si q étoit un nombre impair ; car alors la quantité proposée pourroit être écrite ainsi, ... dy cos. $y(1 - \text{sin. } y^2)^{\frac{q-1}{2}}$ sin. y^p.

Lorsque les nombres p & q sont tous les deux pairs, il faut développer la formule par les Théorêmes de l'article II. Soit, par exemple, $p = 2$, $q = 2$. On aura (Théor. X) sin. $y^2 = \frac{1 - \text{cos. } 2y}{2}$, & (Théor. IX) cos. $y^2 = \frac{1 + \text{cos. } 2y}{2}$. Donc sin. y^2 cos. $y^2 = \left(\frac{1 - \text{cos. } 2y}{2}\right) \times \left(\frac{1 + \text{cos. } 2y}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\text{cos. } 2y^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(1 + \text{cos. } 4y) = \frac{1}{8} - \ldots \frac{\text{cos. } 4y}{8}$; & par conséquent dy sin. y^2 cos. $y^2 = \frac{dy}{8} - \frac{dy \text{ cos. } 4y}{8}$, dont l'intégrale est $\frac{y}{8} - \frac{\text{sin. } 4y}{32}$.

XII. Soit à intégrer $\frac{dy}{\text{cos. } y}$: je fais sin. $y = z$, & par conséquent dy cos. $y = dz$. $\frac{dy}{\text{cos. } y} = \frac{dy \text{ cos. } y}{\text{cos. } y^2} = \frac{dz}{1 - zz} = \frac{\frac{1}{2} dz}{1 + z} + \frac{\frac{1}{2} dz}{1 - z}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2}$ L. $(1+z) - \frac{1}{2}$ L. $(1-z)$, ou $\frac{1}{2}$ L. $\frac{1+z}{1-z}$, ou $\frac{1}{2}$ L. $\frac{1+\text{ſin.}\, y}{1-\text{ſin.}\, y}$.

On trouvera de même, en faiſant coſ. $y = z$, que l'intégrale de $\frac{dy}{\text{ſin.}\, y}$ eſt $\frac{1}{2}$ L. $\frac{1-\text{coſ.}\, y}{1+\text{coſ.}\, y}$.

XIII. S'il étoit queſtion d'intégrer $\frac{dy\, \text{ſin.}\, y}{\text{coſ.}\, y}$ ou $\frac{dy\, \text{coſ.}\, y}{\text{ſin.}\, y}$, les intégrales ſe trouveroient tout de ſuite par les logarithmes ; car il eſt clair que $\frac{dy\, \text{ſin.}\, y}{\text{coſ.}\, y} = \frac{-d\,(\text{coſ.}\, y)}{\text{coſ.}\, y}$ dont l'intégrale eſt — L. coſ. y ; & que $\frac{dy\, \text{coſ.}\, y}{\text{ſin.}\, y} = \frac{d\,(\text{ſin.}\, y)}{\text{ſin.}\, y}$, dont l'intégrale eſt L. ſin. y.

XIV. Propoſons-nous maintenant d'intégrer la quantité $\frac{dy\, \text{ſin.}\, y^p}{\text{coſ.}\, y^q}$. Je fais ſin. $y = z$, & par conſéquent dy coſ. $y = dz$, coſ. $y = \sqrt{(1-zz)}$. D'où réſulte la transformée $\frac{z^p dz}{(1-zz)^{\frac{q+1}{2}}}$. Or,

CAS I. Cette différentielle s'intégre ſans difficulté, lorſque p eſt un nombre impair, quel que ſoit q, en faiſant $1 - zz = uu$.

CAS II. Si p étant pair ou impair, q eſt impair, la quantité $\frac{z^p dz}{(1-zz)^{\frac{q+1}{2}}}$ eſt une fraction rationnelle qui s'intégre par les méthodes que notre Auteur a données.

CAS III. Si p étant pair, q eſt auſſi pair, on procédera ainsi à l'intégration. Soit, pour abréger, $\frac{q+1}{2} = n$; & observons qu'en différentiant la quantité $z^{p-1}(1-zz)^{-n+1}$, on a une équation de cette forme (A & B étant des coëfficients donnés),

$$d\left(z^{p-1}(1-zz)^{-n+1}\right) = Az^{p-2}dz(1-zz)^{-n+1} + Bz^{p}dz(1-zz)^{-n} = Az^{p-2}dz(1-zz)^{-n} - Az^{p}dz(1-zz)^{-n} + Bz^{p}dz(1-zz)^{-n};$$

d'où l'on tire,

$$(M) \quad \int\frac{z^{p}dz}{(1-zz)^{n}} = \frac{z^{p-1}(1-zz)^{-n+1}}{B-A} - \frac{A}{B-A}\int\frac{z^{p-2}dz}{(1-zz)^{n}}.$$

En continuant à former, tant qu'il est nécessaire, des équations analogues, on trouvera enfin que la question se réduit à intégrer une quantité de cette forme $\frac{dz}{(1-zz)^{n}}$; ce qui est toujours facile.

Soit, par exemple, $p = 2$, $q = 2$, & $n = \frac{q+1}{2} = \frac{3}{2}$. Alors on aura $A = 1$, $B = 1$; & au lieu d'employer l'équation (M), il faudra employer immédiatement l'équation dont elle dérive. J'observe donc que $d\left(z(1-zz)^{-\frac{1}{2}}\right) = dz(1-zz)^{-\frac{1}{2}} + \frac{z^{2}dz}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$; & par conséquent $\int\frac{zzdz}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}} = \ldots$

$z(1-zz)^{-\frac{1}{2}} - \int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{\text{fin.}\, y}{\text{cof.}\, y} - y$. D'où l'on voit que l'intégrale eſt en partie algébrique, en partie dépendante de la quadrature du cercle.

Soit $p=4$, $q=2$, & $n=\frac{1}{2}$. On aura $A=3$, $B=1$, & l'équation (M) deviendra $\int \frac{z^4 dz}{(1-zz)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-z^3(1-zz)^{-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4}\int \frac{z^2 dz}{(1-zz)^{\frac{1}{2}}}$. On intégrera $\frac{z^2 dz}{(1-zz)^{\frac{1}{2}}}$, comme tout-à-l'heure. Ainſi des autres différentielles ſemblables.

XVI. Qu'on ait à intégrer $\frac{dy}{\text{fin.}\, z^p \,\text{cof.}\, y^q}$; je fais $\text{fin.}\, y = \frac{1}{u}$; ce qui donne la transformée ...... $\frac{-u^{p+q-1} du}{(uu-1)^{\frac{q+1}{2}}}$, qui s'intégre par des méthodes analogues à celles qui ont été indiquées dans l'article précédent.

XVII. Intégrer la quantité $dz \,\text{fin.}\, z \sqrt{(1+\text{cof.}\, z)}$? Sans faire aucune transformation, on voit que l'intégrale eſt $-\frac{2}{3}(1+\text{cof.}\, z)^{\frac{3}{2}}$.

XVIII. Intégrer $z dz \sqrt{(1+\text{cof.}\, z)}$? J'obſerve que $\int z dz \sqrt{(1+\text{cof.}\, z)} = z\int dz \sqrt{(1+\text{cof.}\, z)} - \int dz \int dz \sqrt{(1+\text{cof.}\, z)}$. Pour intégrer .... $dz \sqrt{(1+\text{cof.}\, z)}$, ſuppoſons $1+\text{cof.}\, z = u$; on

aura $dz = -\frac{du}{\text{sin. } z} = -\frac{du}{\sqrt{(1 - \text{cos. } z^2)}} = -$
$\frac{du}{\sqrt{(2u - uu)}}$, & $dz\sqrt{(1 + \text{cos. } z)} = - \ldots\ldots$
$\frac{du}{\sqrt{(2 - u)}}$, dont l'intégrale est $2\sqrt{(2 - u)}$, ou
$2\sqrt{(1 - \text{cos. } z)}$. On intégrera semblablement..
$dz\sqrt{(1 - \text{cos. } z)}$.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet qui offre plusieurs variétés. Les différentielles qui contiennent d'autres combinaisons de quantités angulaires, s'intégreront toujours par les mêmes méthodes.

ADDITION II.

Remarques sur l'intégration des différentielles du premier ordre.

1. ON n'a pas encore trouvé de méthode générale pour intégrer une quantité ou équation différentielle quelconque, qui contient plusieurs variables & leurs différences. Mlle Agnesi a donné, relativement à cet objet, plusieurs méthodes qui embrassent un très-grand nombre de cas, & qui consistent ou à séparer les indéterminées d'une équation proposée, ou à lui faire subir, par voie de multiplication ou de division, différents changements qui la rendent, sinon intégrable, du moins constructible au moyen des quadratures des courbes. Mais notre Auteur n'a point indiqué de caractère pour reconnoître si une quantité, telle qu'elle est proposée immédiatement, est intégrable ou non; & si dans le cas où elle ne le seroit pas, elle pourroit devenir telle, en la mul-

Hh iv

tipliant par un facteur convenable. Voici ce caractère, d'après M. Euler.

II. Soit $Pdx + Qdy$ une quantité dans laquelle P & Q sont des fonctions de x & de y. Si cette quantité est intégrable, la différentielle de P, prise en ne faisant varier que y, & divisant par dy, sera égale à la différentielle de Q, prise en ne faisant varier que x, & divisant par dx; proposition qu'on exprime ainsi, $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

En effet, soit V l'intégrale de $Pdx + Qdy$, & par conséquent $dV = Pdx + Qdy$. Il est clair que Pdx étant la différence de V, prise en ne faisant que x, & que $Q\,dy$ étant la différence de V, prise en ne faisant que y, on a, suivant la notation indiquée ci-dessus, $P = \frac{dV}{dx}$, $Q = \frac{dV}{dy}$. Différentiant la première de ces équations, en ne faisant varier que y, & divisant par dy; la seconde, en ne faisant varier que x, & divisant par dx: on aura $\frac{dP}{dy} = \frac{ddV}{dxdy}$, $\frac{dQ}{dx} = \frac{ddV}{dydx}$. Or $\frac{ddV}{dxdy} = \ldots \frac{ddV}{dydx}$. Donc $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Par exemple, soit $V = xy$; on aura $dV = ydx + xdy$, & par conséquent $P = y$, $Q = x$. Donc $\frac{dP}{dy} = 1$, & $\frac{dQ}{dx} = 1$, quantités égales.

Soit $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$; on aura $dV = \ldots \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, & par conséquent $P = \ldots \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$. Donc $\frac{dP}{dy} =$

$\frac{xy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{dQ}{dx} = \frac{xy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$; d'où l'on voit que $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Il en sera de même pour toutes les autres différentielles *complettes*, à deux variables.

III. On voit donc par-là que pour s'assurer si une différentielle à deux variables est immédiatement intégrable, il faut qu'on ait l'équation de condition $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Si cette équation n'a pas lieu, & que $Pdx + Qdy$ soit simplement une *quantité*, cette quantité n'aura point d'intégrale : telle est, par exemple, la quantité $ydx - xdy$. Mais si on a $Pdx + Qdy = 0$, & que l'équation $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, n'ait pas lieu, on pourra changer l'équation $Pdx + Qdy = 0$ en une autre qui soit une différentielle complette, en la multipliant par un facteur convenable, comme nous le verrons ci-dessous.

IV. Supposons que la quantité $Pdx + Qdy$, ou l'équation $Pdx + Qdy = 0$, soit immédiatement intégrable; c'est-à-dire qu'on ait l'équation de condition $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. On procédera ainsi à l'intégration. Puisqu'en faisant varier x seulement, on a $dV = Pdx$, on aura, en intégrant dans cette supposition, $V = \int Pdx + C$, C étant une constante qui peut contenir d'une manière quelconque la lettre y que l'on a prise pour constante ; de sorte qu'on aura $V = \int Pdx + Y$, Y étant une fonction de y.

De même on aura $V = \int Q\,dy + X$, X étant une fonction de x. Donc $\int P\,dx + Y = \int Q\,dy + X$, ou bien $\int P\,dx - \int Q\,dy = X - Y$. La quantité $\int P\,dx - \int Q\,dy$ se partagera toujours en deux parties, dont l'une sera une fonction de x seulement, l'autre une fonction de y seulement ; & par conséquent on connoîtra X & Y.

V. La pratique de cette méthode peut être simplifiée. Ayant trouvé l'intégrale $\int P\,dx + Y$, qu'on la différentie en faisant varier y seulement, & qu'il provienne $Z\,dy + dY$; on aura $Z\,dy + dY = Q\,dy$, & par conséquent $Y = \int (Q - Z)\,dy$. La fonction Y est donc déterminée, & l'intégrale de l'équation proposée $P\,dx + Q\,dy = 0$, est $\int P\,dx + Y =$ une const.

Ou bien. Ayant trouvé l'intégrale $\int Q\,dy + X$, qu'on la différentie, en faisant varier x, & qu'il provienne $T\,dx + dX$; on aura $T\,dx + dX = P\,dx$, & par conséquent $X = \int (P - T)\,dx$. D'où il suit que l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy = 0$, est $\int Q\,dy + X =$ une const.

Appliquons cette méthode à quelques exemples.

Soit l'équation $dx\,(ax + by + c) + dy\,(bx + fy + g) = 0$, qui donne $P = ax + by + c$, $Q =$

$bx + fy + g$. On aura $\frac{dP}{dy} = b$, $\frac{dQ}{dx} = b$, & par conséquent l'équation est immédiatement intégrable. En regardant y comme constante, on a $\int P\,dx = \frac{1}{2}axx + byx + cx$, & $Z\,dy = bx\,dy$, $(Q - Z)\,dy = dy\,(fy + g)$; & par conséquent $Y = \frac{fyy}{2} + gy$. Ainsi l'intégrale de l'équation proposée est $\frac{axx}{2} + bxy + cx + \frac{fyy}{2} + gy = C$.

On peut parvenir au même résultat par le second moyen. Car en regardant x comme constante, on a $\int Q\,dy = bxy + \frac{ffy}{2} + gy$; ce qui donne, en regardant y comme constante, $T\,dx = by\,dx$. Donc $X = \int dx\,(P - T)\,dx = \int dx\,(ax + c) = \frac{axx}{2} + cx$. Ainsi l'intégrale est $bxy + \frac{fyy}{2} + gy + \frac{axx}{2} + cx = C$, comme tout à-l'heure.

Soit l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}\right) = 0$, qui donne $P = \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}}$, $Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$, on aura $\frac{dP}{dy} = \frac{-y}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{dQ}{dx} = \frac{-y}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$; ces valeurs étant égales, l'équation est immédiatement intégrable.

En regardant y comme constante, on a $\int P dx = L.(x + \sqrt{[xx + yy]})$; ce qui donne, en regardant x comme constante, $Z\,dy = \frac{y\,dy}{\sqrt{(xx+yy)}.[x+\sqrt{(xx+yy)}]} = \frac{dy[\sqrt{(xx+y)}-x]}{y\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{dy}{y} - \frac{x\,dy}{y\sqrt{(xx+yy)}}$, & par conséquent $Q - Z = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}} = 0$. Donc $Y = 0$; & l'intégrale cherchée est simplement $L.[x + \sqrt{(xx+yy)}] = C$.

On trouveroit le même résultat par le second moyen.

VII. Soit $P dx + Q dy = 0$, une équation homogène; c'est-à-dire telle que x, y, dx, dy forment dans tous les termes le même nombre de dimensions, les quantités constantes ou coéfficients qui peuvent entrer dans l'équation étant des nombres absolus. En supposant que cette équation soit immédiatement intégrable, on aura à l'ordinaire $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Pour trouver l'intégrale, je fais $y = xz$, & par conséquent $dy = z\,dx + x\,dz$. Les fonctions P & Q se changent en d'autres de cette forme, $x^n M$, $x^n N$, n étant le nombre de dimensions de P ou de Q, M & N des fonctions de z sans x; & l'équation $P dx + Q dy = 0$, devient $x^n dx (M + zN) + dz . x^{n+1} N = 0$. Maintenant, j'intégre en regardant x seule comme variable, & j'ai $\frac{x^{n+1}(M+zN)}{n+1} = C$, sans ajouter de fonction de z; car si on ajoutoit une telle fonction, en différentiant, on ne trouveroit pas de terme qui contînt x^{n+1}, & par conséquent la différentielle ne coïncideroit pas avec l'équation $x^n dx(M+zN)+dz.x^{n+1}N=0$. Mettons dans l'intégrale $\frac{x^{n+1}(M+zN)}{n+1}=C$, à la place de z, M, N, leurs valeurs $\frac{y}{x}$, $\frac{P}{x^n}$, $\frac{Q}{x^n}$, & nous aurons $\frac{Px+Qy}{n+1}=C$. D'où l'on voit que pour intégrer les équations homogènes de la forme $Pdx+Qdy=0$, il faut simplement changer dx en x, dy en y, diviser par le nombre $n+1$ des dimensions de chaque terme, & égaler le résultat à une constante.

Par exemple, soit l'équation $2xydx+x^2dy-12y^2dy=0$, qui donne $P=2xy$, $Q=x^2-12y^2$, $\frac{dP}{dy}=2x$, $\frac{dQ}{dx}=2x$, & qui est par conséquent intégrable. L'intégrale sera $\frac{2xy.x+x^2.y-12y^2.y}{3}=C$, ou bien $x^2y-4y^3=C$.

VII. Reprenons l'équation générale $Pdx+Qdy=0$, P & Q étant des fonctions quelconques de x, de y & de constantes. Supposons que cette équation ne soit pas immédiatement intégrable, ou qu'on n'ait pas l'équation de condition $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$. Je multiplie tous les termes de l'équation $Pdx+Qdy=0$, par un facteur K qui soit censé la rendre intégrable; ce qui donne $K.Pdx+K.Qdy=0$. Alors l'équation étant supposée intégrable, on aura $\frac{d(K.P)}{dy}=\frac{d(K.Q)}{dx}$, c'est-à-dire $K.\frac{dP}{dy}+$

$P . \frac{dK}{dy} = K . \frac{dQ}{dx} + Q . \frac{dK}{dx}$, ou bien $K . \frac{dP}{dy} - K . \frac{dQ}{dx} + P . \frac{dK}{dy} - Q . \frac{dK}{dx} = 0$.

Telle eſt l'équation de condition d'après laquelle le facteur K doit être déterminé. On n'a point encore de méthode générale pour exécuter cette opération dans tous les cas poſſibles ; mais voici un moyen qui réuſſit dans pluſieurs occaſions.

Prenez le facteur K égal à la fonction la plus générale, d'un degré plus haut que celui de la fonction P, avec des coëfficients indéterminés ; formez ainſi l'équation de condition, dont nous venons de parler ; & déterminez les coëfficients, en égalant à zero chaque terme de cette même équation.

Soit, par exemple l'équation $(ix + ky)dx + (lx + my + n)dy = 0$, dans laquelle $P = ix + ky$, $Q = lx + my + n$, & qui n'eſt pas immédiatement intégrable, puiſqu'on n'a pas $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Je la multiplie donc par K, & je feins qu'on ait $K = x^2 + bxy + cx + ey^2 + fy + g$. L'équation générale de condition $K . \frac{dP}{dy} - K . \frac{dQ}{dx} + P . \frac{dK}{dy} - Q . \frac{dK}{dx} = 0$, deviendra ici

$$\left.\begin{matrix} k \\ +l \\ -ib \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +2m \\ -2ie \\ \end{matrix}\right\} xy \left.\begin{matrix} +kc \\ -fi \\ +2n \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +bm \\ -ie \\ -ke \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +cm \\ +nb \\ -lf \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +kg \\ +cn \\ -lg \end{matrix}\right\} = 0.$$

Faiſant chaque terme égal à zero, on aura ſix équations du premier degré, qui donneront $b = \frac{k+l}{i}$, $c = \frac{nk - nl}{kl - mi}$, $e = \frac{m}{i}$, $f = \frac{nk^2 + nkl - 2nim}{ikl - iim}$, $g = \frac{-n^2}{kl - im}$. En ſubſtituant ces valeurs dans l'équation $K = x^2 + bxy + cx + ey^2 + fy + g$, on connoîtra K. La question est donc maintenant d'intégrer l'équation $K.Pdx + K.Qdy = 0$, qui est immédiatement intégrable; ce qui s'exécute par la méthode de l'article IV ou V.

IX. La Théorie précédente s'applique aux équations qui contiennent plus de trois variables. Soit, par exemple, l'équation à trois variables $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Si cette équation est immédiatement intégrable, on aura ces équations de condition $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Car soit V l'intégrale de $Pdx + Qdy + Rdz$; si l'on regardoit z seule comme constante, on auroit $dV = Pdx + Qdy$, & $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; si l'on regardoit y seule comme constante, on auroit $dV = Pdx + Rdz$, & $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$; enfin si l'on regardoit x seule comme constante, on auroit $dV = Qdy + Rdz$, & $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Donc en faisant varier les trois lettres x, y, z, on aura les équations $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Ainsi on connoîtra si $Pdx + Qdy + Rdz$ est intégrable, en examinant si les équations dont on vient de parler, ont lieu. Ensuite l'intégration s'effectuera par des moyens analogues à ceux qu'on a employés pour la formule $Pdx + Qdy$.

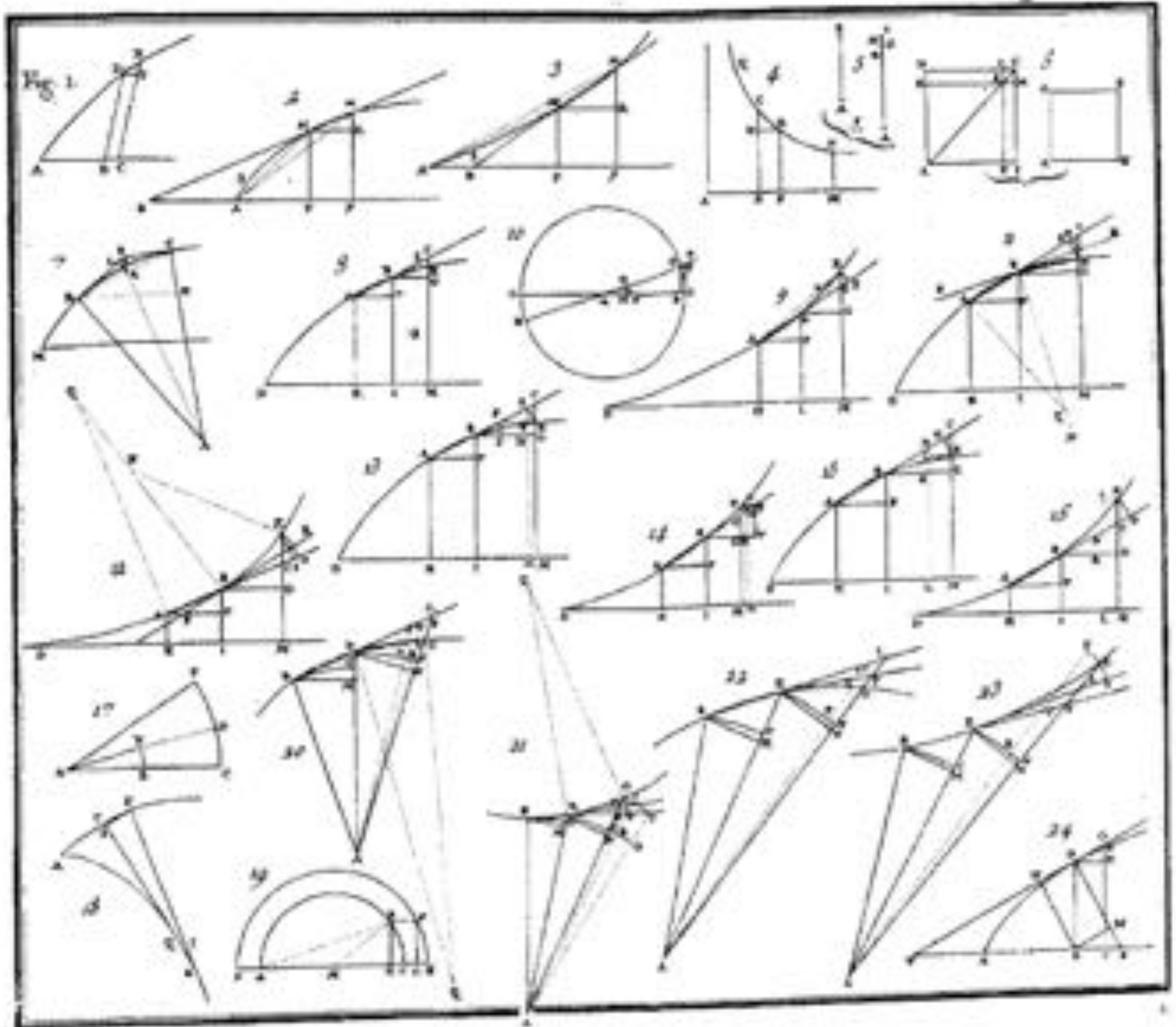
X. Lorsque l'équation $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, est homogène & immédiatement intégrable, l'intégrale est $\frac{Px+Qy+Rz}{n+1}=C$, $n+1$ étant le nombre des dimensions de chaque terme. Cela se démontre comme l'article VII, en faisant $y=xu$, $z=xt$, u & t étant deux nouvelles variables.

XI. Lorsque l'équation générale $Pdx+Qdy+Rdz=0$, ne sera pas immédiatement intégrable, on la multipliera par un facteur K qui soit censé la rendre telle ; ce qui donnera des équations de condition auxquelles il faudra satisfaire pour déterminer K.

Voyez le *Calcul intégral* de M. Euler, & les Ouvrages de M. le Marquis de Condorcet.

FIN.

TABLE



Sculp.

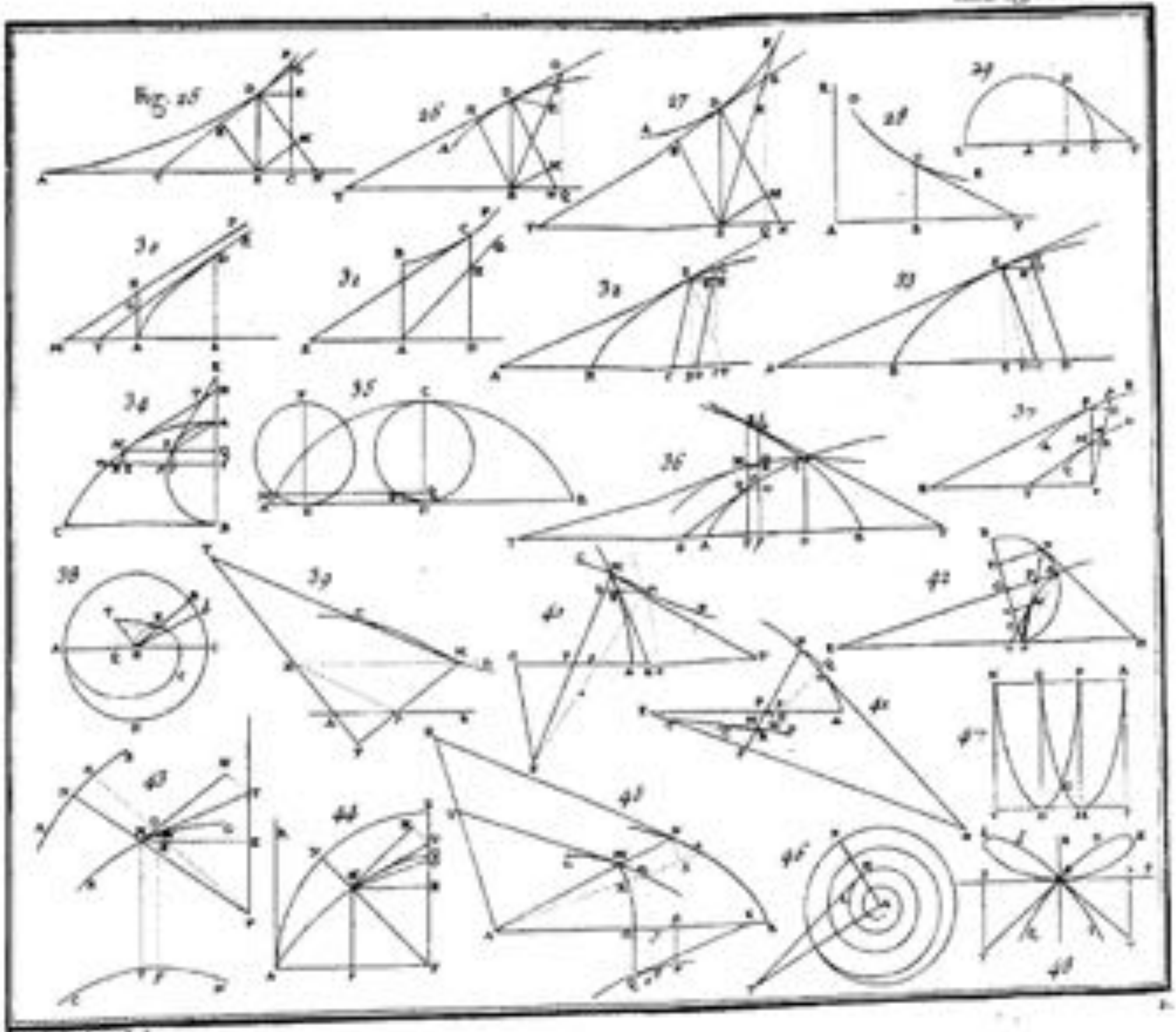
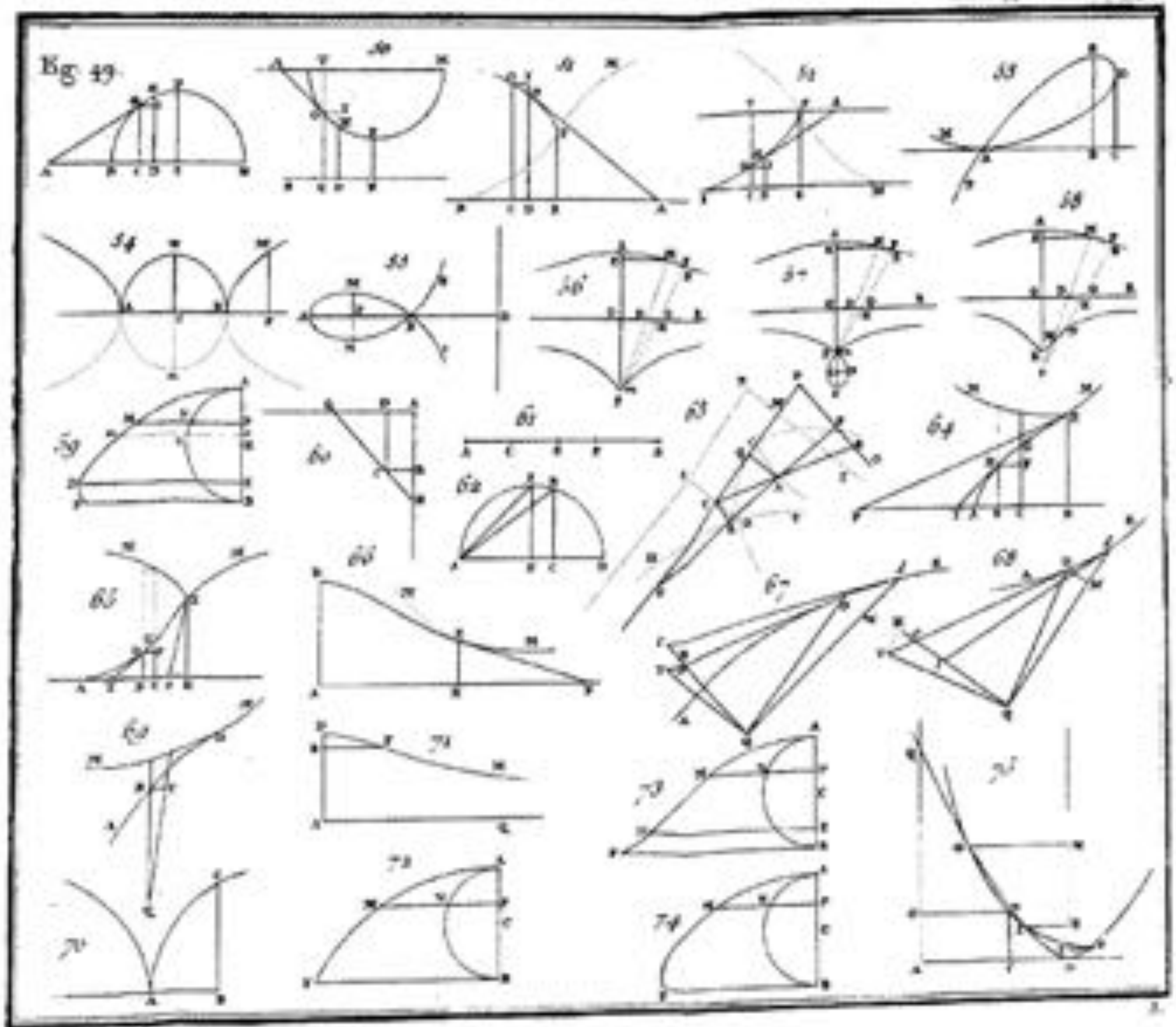


Fig. 25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
42
41
47
43
44
45
46
48



De la Gardette Sculp.

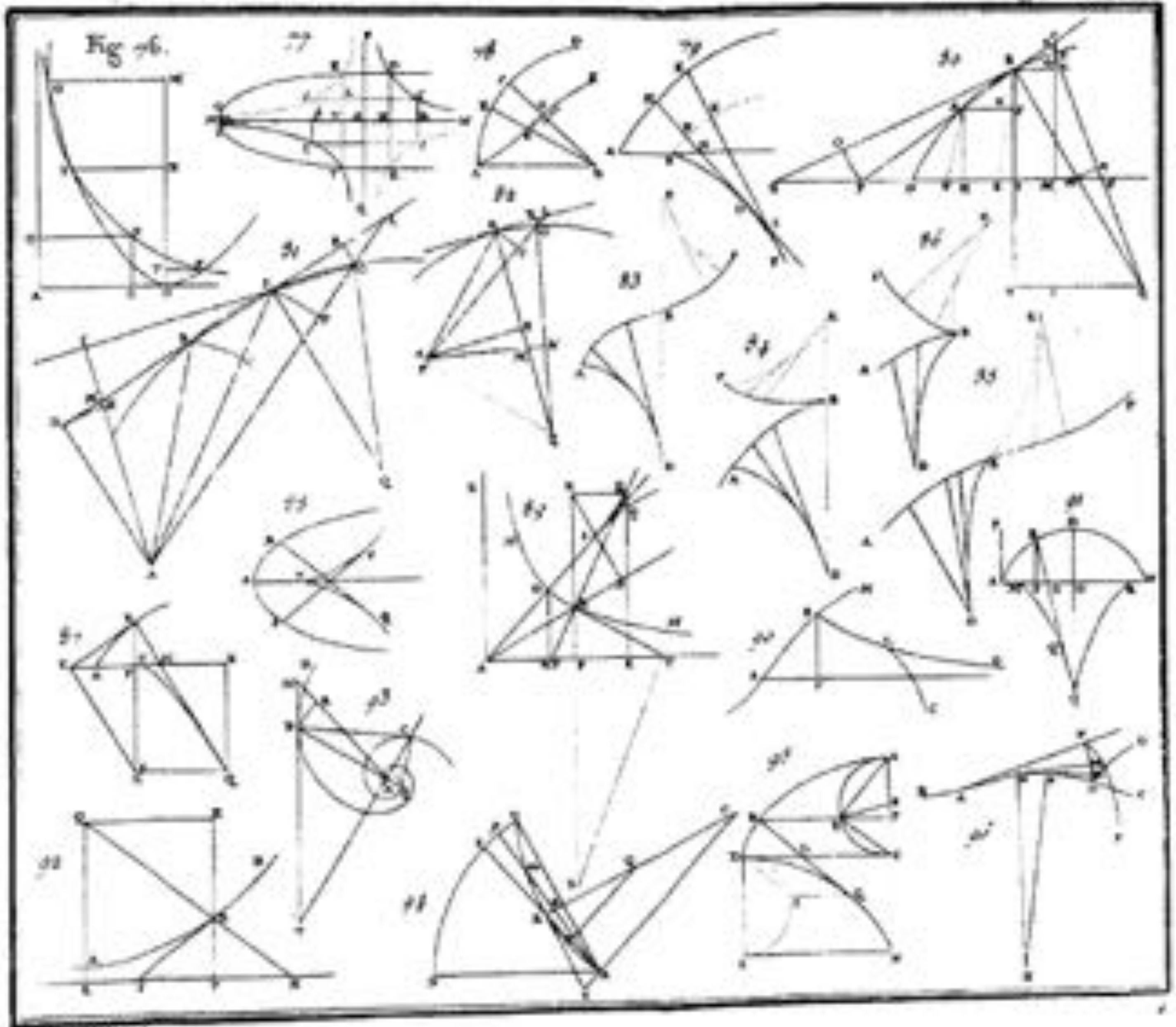
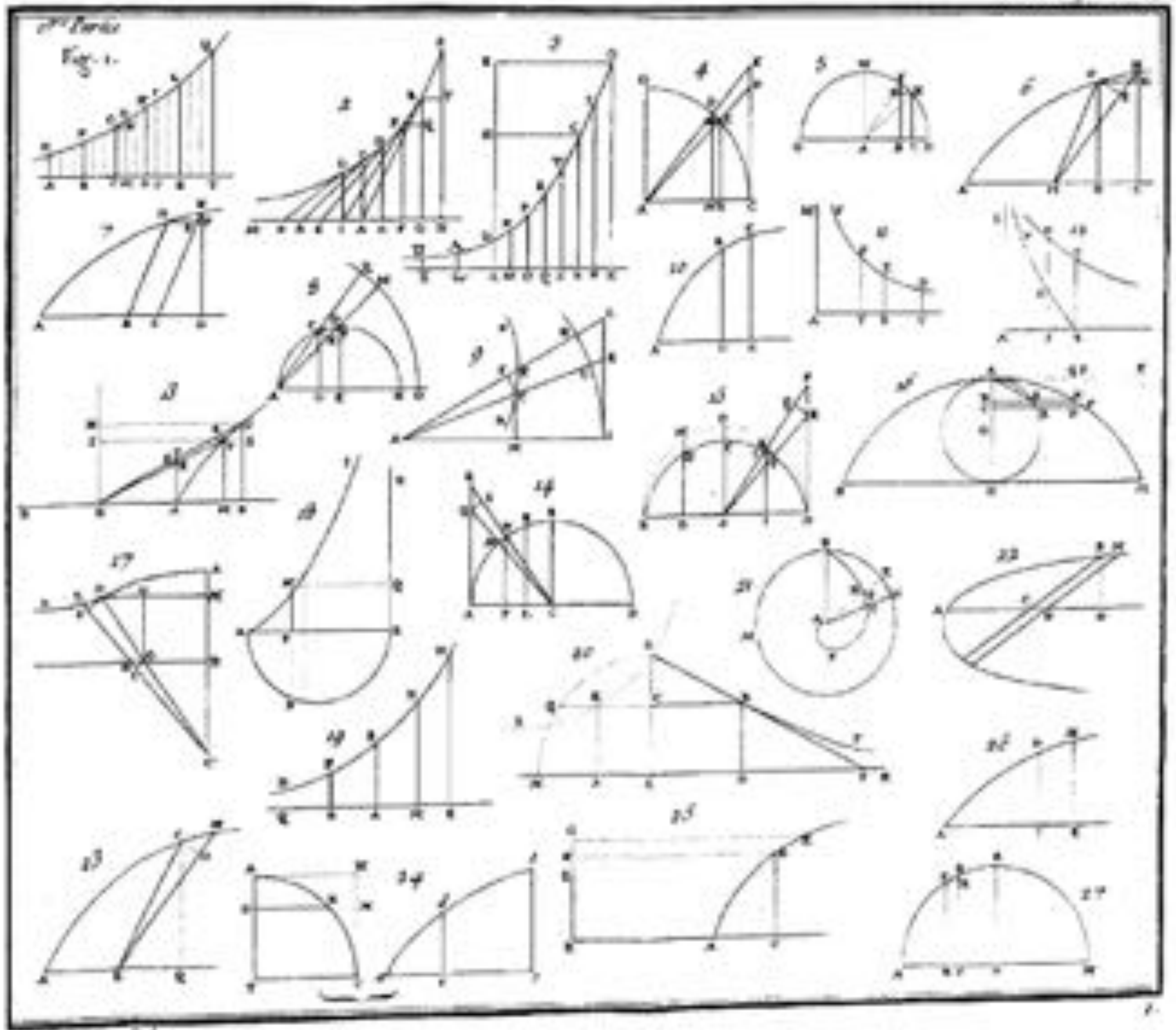
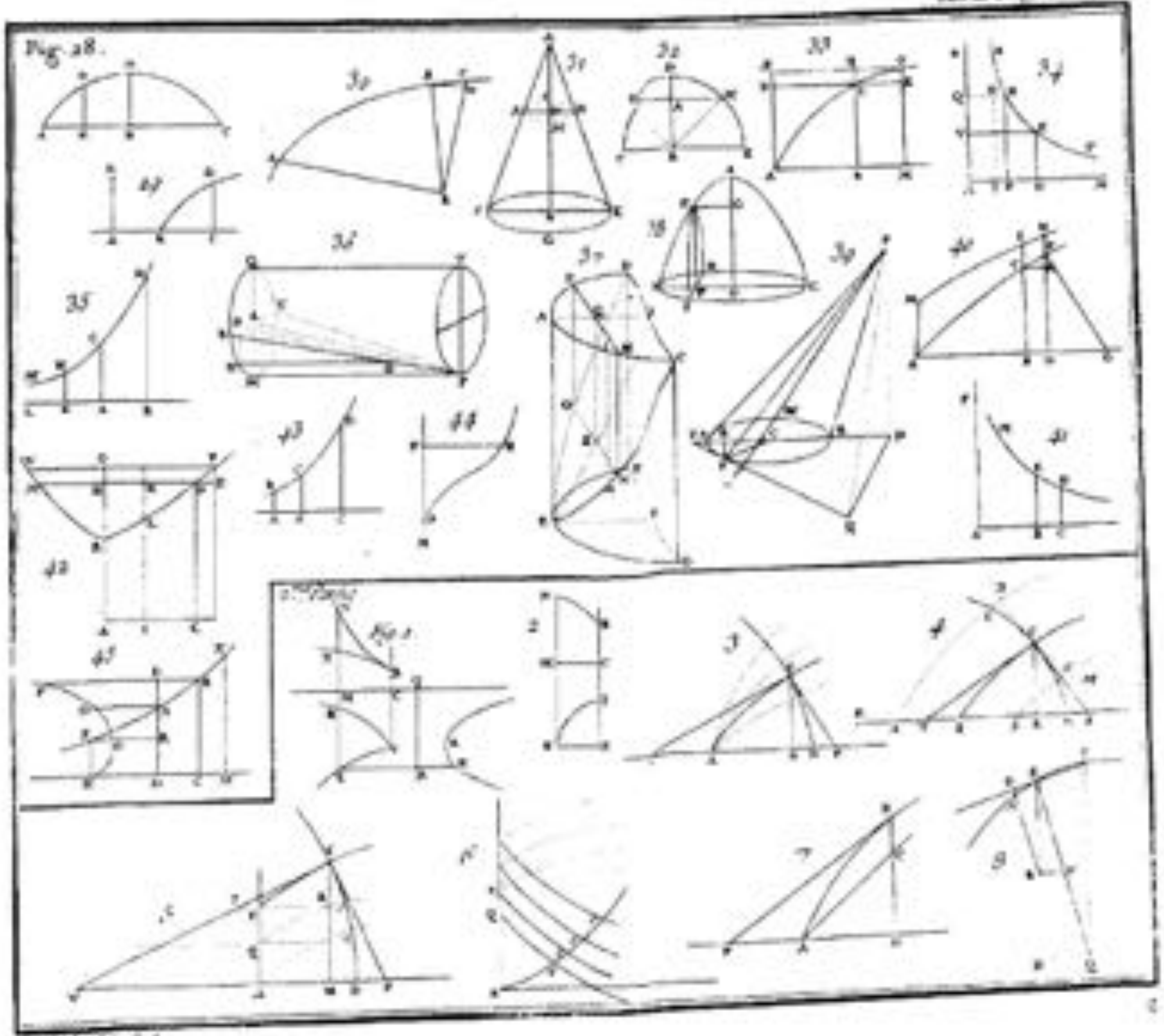


Fig. 76.





De la Gardette Sculp.

TABLE
DES MATIERES.

PREMIER TRAITÉ.

Du Calcul différentiel.

CHAPITRE I. *Idée des différentielles des différents ordres ; & leur calcul,* page 2
CHAP. II. *De la Méthode des Tangentes,* 31
CHAP. III. *Méthode des* Maxima *&* Minima, 76
CHAP. IV. *Des Points d'inflexion & de rebroussement,* 97
CHAP. V. *Des Développées & des Rayons osculateurs,* 114

SECOND TRAITÉ.

Du Calcul intégral.

PREMIERE PARTIE.

De l'intégration des formules différentielles a une seule variable.

CHAPITRE I. *Regles des Intégrations exprimées par des formules algébriques finies, ou réduites aux quadratures supposées connues des courbes,* 144

CHAP. II. *Regles d'intégration en faisant usage des séries*, 217
CHAP. III. *Application des regles du Calcul intégral à la rectification des courbes, à la quadrature des espaces, à l'aplanissement des surfaces & à la cubature des solides*, 226
De la quadrature des espaces, 240
De la rectification des courbes, 267
De la cubature des solides, 281
De la mesure ou quadrature des surfaces des corps, 298
CHAP. IV. *Calcul des quantités logarithmiques & exponentielles*, 311

SECONDE PARTIE.

DE LA MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES.

CHAPITRE I. *De la construction des équations différentielles du premier degré, sans recourir à la séparation préliminaire des indéterminées*, 336
CHAP. II. *De la construction des équations différentielles du premier degré, par le moyen de la séparation des indéterminées*, 348
CHAP. III. *Construction de quelques équations plus limitées, par le moyen de différentes substitutions*. 391
CHAP. IV. *De la réduction des équations différentielles du second degré*, 422
Additions de l'Editeur, 478

De l'Imprimerie de CHARDON, rue Galande. 1775.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
54	17	$mz^n x^{n-1} dx$	$mz^n x^{n-1} dz$
57	12	HQ	HT
82	21	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$
87	15	$y = 0$	$y = \infty$
113	12 au numérateur	ydy^2	$2ydy^2$
120	10	BIm	BEG
128	8	BA	BQ
139	avant dernière	point C	point Q
142	8 au numérateur	$dy : ddy$	$dy : dddy$
145	3	a	n
169	20	$+ 4ax$	$- 4ax$
171	6	$2a$	$2a^2$
178	4	$\frac{a^n}{2m(a^n + x^n)}$	$\frac{a^n}{2m(a^n + x^n)^2}$
184	3 au dénomin.	$(z^2 + {}^2)^2$	$(z^2 + b^2)^2$
188	17	$\frac{3Aa - 1}{3a}$	$\frac{3Aa - 1}{a}$
189	3 initio	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4a}$
202	18	grand	petit
212	2	$zz(2A + a)z$	$zz + (2A + a)z$
214	10 & 12	effacez la lettre a dans les valeurs de B & de C.	
250	18	$\frac{xxdz}{p}$	$\frac{vxdz}{2a}$
253	14	axes	demi-axes
256	16	$BE = dy$	$BE = y$
271	11	$\sqrt{(aa + xx)}$	$\sqrt{(aa - xx)}$

PAGES.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
278	3	$\sqrt{[aa-yy]}$ *lisez*	$\sqrt{[aa+yy]}$
289	15	HB	HQ
314 & 316	1 } 5 }	$m-1$	$n-1$
335	12	$\sqrt{[dx+d^2y^2]}$	$\sqrt{[dx^2+dy^2]}$
345	2 au numérateur	$m-n$	$m+n$
358	13	$3azxdz$	$3azdxdz$
368	5	$qdq=Bdq$	$qdq+Bdq$
374	9	a^4	a^6
376	1 au numérateur	y	$y\sqrt{a^2}$
380	5 au dénominateur	$-px$	$-px^2$
398 & 399	{ *effacez le signe = qui finit la page 398, & la quantité qui commence la page 399.*		
399	5	$(t-r)z^{\frac{1}{n}}x^{-1}dx$	$(t-r)z^{\frac{1}{n}+1}x^{-1}dx$
401	7 au lieu de l'exposant	$\frac{u-n-1}{n}$ *lisez*	$\frac{u-n+1}{n}$
402	13	$-bbdx$	$+bbdx$
403	16	$gy^{n-1}dx$	$gx^{n-1}dx$
416	1 au dénomin.	$n(2n-m)$	$m(2n-m)$
Ibib.	6	x	n
424	5	$nyydx^2$	n
Ibib. & 425	15 } 2 }	ndx^2	n
425	14 { *mettez* dz est ydx, ou plus généralement $dx \times$ fonct. y.		
441	4, 6, 7	a	1
Ibid.	9	la constante $ydx-xdy$	une constante
442	16 au lieu de l'exposant	$n+p+1$ *lisez*	$n+p-1$
443	13	$(n+p-1)z^{p-1}$	$(n+p-1)pz^{p+1}$
445	22	$-m-1$	$-n-1$
447	30 & 31 { *au lieu de* z^{m+1} *écrivez* z^{n-1} *dans les termes qui contiennent* dz		
467	16, *au-devant du radical mettez* dx		


NÈ MIEI DOLCI STVDI M'ACQVETO
EX LIBRIS
CAROLI VIGANÓ