OEUVRES COMPLÈTES

DE

N. H. ABEL,

MATHÉMATICIEN,

AVEC DES NOTES ET DÉVELOPPEMENTS,

RÉDIGÉES PAR ORDRE DU ROI,

PAR

B. HOLMBOE,
professeur de mathématiques à l'université de Christiania, membre de la société physiographique à Christiania et de l'académie royale des sciences de guerre à Stockholm.

TOME PREMIER
contenant les oeuvres de l'auteur qui ont été publiées auparavant.

CHRISTIANIA.
CHEZ CHR. GRÖNDAHL, IMPRIMEUR-LIBRAIRE.
1839.

VII.

Recherche sur la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}.x^2+\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}.x^3+\ldots \text{etc.}$$

I.

Si l'on fait subir au raisonnement dont on se sert en général où il s'agit des séries infinies, un examen plus exact, on trouvera qu'il est en entier peu satisfaisant, et que par conséquent le nombre des théorèmes, concernant les séries infinies, qui peuvent être considérés comme rigoureusement fondés, est très limité. On applique à l'ordinaire les opérations de l'analyse aux séries infinies de la même manière que si les séries étaient finies, ce qui ne me semble pas permis sans démonstration particulière. Si par exemple on doit multiplier deux séries infinies l'une par l'autre, on pose

$$(u_0+u_1+u_2+u_3+\text{etc.})\,(v_0+v_1+v_2+v_3+\text{etc.})=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)$$
$$+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\text{etc.}\ldots+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\ldots+u_nv_0)+\text{etc.}$$

Cette équation est très juste lorsque les séries $u_0+u_1+\ldots$ et $v_0+v_1+\ldots$ sont finies. Mais si elles sont infinies il est d'abord nécessaire qu'elles convergent, car une série divergente n'a pas de somme, et ensuite la série du second membre doit de même converger. C'est seulement avec cette restriction que l'expression ci-dessus est juste; mais, si je ne me trompe, jusqu'à présent on n'y a pas eu égard. C'est ce qu'on se propose de faire dans ce traité. Il-y-a encore plusieurs opérations semblables à prouver, p. ex. le procédé ordinaire de la division d'une quantité par une série infinie, celui de l'élévation d'une série infinie à une puissance, celui de la détermination de son logarithme, de son sinus, de son cosinus, etc.

Un autre procédé qu'on trouve fréquemment dans l'analyse, et qui assez souvant conduit aux contradictions, c'est qu'on se sert des séries divergentes pour l'évaluation des valeurs numériques des séries. Une série divergente ne peut jamais être égale à une quantité déterminée; elle est seulement une expression jouissant de certaines propriétés, qui se rapportent aux opérations auxquelles la série est sujette.

Les séries divergentes peuvent quelquefois servir avec succès de symboles pour exprimer l'une on l'autre proposition d'une manière abrégée; mais on ne saurait jamais les mettre à la place des quantités déterminées. Par un tel procédé en peut démontrer tout ce qu'on veut, l'impossible aussi bien que le possible.

Une des séries les plus remarquables dans l'analyse algébrique est celle-ci:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}..x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1.2.3\ldots n}x^n+\text{etc.}$$

Lorsque m est un nombre entier positif, on sait que la somme de cette série, qui dans ce cas est finie, peut s'exprimer par $(1+x)^m$. Lorsque m n'est pas un nombre entier, la série ira à l'infini, et elle sera convergente ou divergente, selon les différentes valeurs qu'on attribue à m et à x. Dans ce cas on pose de même l'équation

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}.x+\frac{m(m-1)}{1.2}.x^2+\text{etc.}$$

mais alors l'égalité exprime seulement que les deux expressions

$$(1+x)^m \text{ et } 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$$

ont certaines propriétés communes desquelles, pour certaines valeurs de m et de x, dépend l'égalité des valeurs numériques des expressions. On suppose que l'égalité numérique aura toujours lieu, lorsque la série est convergente; mais c'est ce qui jusqu'à présent n'est pas encore démontré. On n'a pas même examiné tous les cas où la série est convergente. Lors même qu'on *suppose* l'existence de l'équation ci-dessus, il reste pourtant à chercher la *valeur* de $(1+x)^m$, car cette expression a en général une infinité de valeurs différentes, tandis que la série $1+mx+$ etc. n'en a qu'une seule.

Le but de ce mémoire est d'essayer de remplir une lacune par la résolution complète du problème suivant:

"Trouver la somme de la série

$$1+\frac{m}{1}.x+\frac{m(m-1)}{1.2}.x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2\cdot3}.x^3+\text{etc.}$$

"pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x et de m pour les-
"quelles la série est convergente."

II.

Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'exellent ouvrage de M. Cauchy *"Cours d'analyse de l'école polytechnique"*, qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide.

Définition. Une série quelconque

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_m \text{ etc.}$$

sera dite *convergente*, si pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_m$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite. Cette limite s'appellera *la somme de la série*. Dans le cas contraire la série sera dite *divergente*, et elle n'a pas de somme. D'après cette définition, pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_m + v_{m+1} + \ldots + v_{m+n}$ s'approche indéfiniment de zéro, quelle que soit la valeur de n.

Donc, dans une série convergente quelconque le terme général v_m s'approchera indéfiniment de zéro*).

Théorème I. Si en désignant par $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ une série de quantités positives, le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$ pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approche indéfiniment d'une limite α, qui est plus grande que 1, la série

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \cdots + \varepsilon_m \varrho_m + \cdots$$

où ε_m est une quantité qui pour des valeurs toujours croissantes de m ne s'approche pas indéfiniment de zéro, sera nécessairement divergente.

Théorème II. Si dans une série de quantités positives $\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 \cdots + \varrho_m$ le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$ pour des valeurs toujours croissantes de m s'approche indéfiniment d'une limite, qui est plus petite que 1, la série

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \cdots + \varepsilon_m \varrho_m,$$

où $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ etc. sont des quantités, qui ne surpassent pas l'unité, sera nécessairement convergente.

En effet d'après la supposition on peut toujours prendre m assez grand pour que $\varrho_{m+1} < \alpha \varrho_m$, $\varrho_{m+2} < \alpha \varrho_{m+1}, \ldots \varrho_{m+n} < \alpha \varrho_{m+n-1}$. Il suit de là que $\varrho_{m+k} < \alpha^k . \varrho_m$ et par suite

*) Pour abréger, on signifiera dans ce mémoire par ω une quantité qui peut être plus petite que toute quantité donnée.

$$\varrho_m + \varrho_{m+1} + \cdots + \varrho_{m+n} < \varrho_{m+n}(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n) < \frac{\varrho_m}{1-\alpha},$$

donc à plus forte raison

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1} \varrho_{m+1} + \varepsilon_{m+n} \varrho_{m+n} < \frac{\varrho_m}{1-\alpha}.$$

Or ϱ_{m+k} étant $< \alpha^k . \varrho_m$ et $\alpha < 1$, il est clair que ϱ_m et par conséquent la somme

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1} \cdot \varrho_{m+1} + \cdots + \varepsilon_{m+n} \varrho_{m+n}$$

aura zéro pour limite. La série ci-dessus est donc convergente.

Théorème III. En désignant par $t_0, t_1, t_2, \ldots t_m$ une série de quantités quelconques, si $p_m = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_m \ldots$ est toujours moindre qu'une quantité déterminée δ, on aura

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \cdots + \varepsilon_m t_m < \delta . \varepsilon_0$$

où $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ sont des quantités positives décroissantes.

En effet on a

$$t_0 = p_0, \; t_1 = p_1 - p_0, \; t_2 = p_2 - p_1 \text{ etc.}$$

donc $\quad r = \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 (p_1 - p_0) + \varepsilon_2 (p_2 - p_1) + \cdots + \varepsilon_m (p_m - p_{m-1}),$

ou bien

$$r = p_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cdots + p_{m-1} (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + p_m \varepsilon_m.$$

Or les différences $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \; \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots$ étant positives, la quantité r sera évidemment moindre que $\delta \varepsilon_0$.

Définition. Une fonction $f(x)$ sera dite *fonction continue* de x entre les limites $x = a$ et $x = b$, si pour une valeur quelconque de x intermédiaire entre ces limites, la quantité $f(x - \beta)$, pour des valeurs toujours décroissantes de β, s'approche indéfiniment de la limite $f(x)$.

Théorème IV. Si la série

$$f(\alpha) = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \ldots + v_m \alpha^m + \ldots$$

est convergente pour une certaine valeur δ de α, elle sera aussi convergente pour toute valeur moindre de α, et, pour des valeurs toujours décroissantes de β, la fonction $f(\alpha - \beta)$ s'approche indéfiniment de la limite $f(\alpha)$, supposé que α soit égal ou inférieur à δ.

Soit
$$v_0 + v_1 \alpha + \ldots + v_{m-1} \alpha^{m-1} = \varphi(\alpha),$$
$$v_m \alpha^m + v_{m+1} \alpha^{m+1} + \text{etc.} \ldots = \psi(\alpha),$$

on aura
$$\psi(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m . v_m \delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} . v_{m+1} \delta^{m+1} + \text{etc.}$$

donc, d'après le théorème (III), $\psi(\alpha) < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m . p$, p désignant la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1} + v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. On pourra donc pour toute valeur de α, égale ou inférieure à δ, prendre m assez grand pour qu'on ait

$$\psi(\alpha) = \omega\,.$$

Or $f(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$, donc $f(\alpha) - f(\alpha - \beta) = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \beta) + \omega$.

De plus $\varphi(\alpha)$ étant une fonction entière de α, on peut prendre β assez petit pour que

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \beta) = \omega;$$

donc de même
$$f(\alpha) - f(\alpha - \beta) = \omega,$$
ce qu'il fallut démontrer.

Théorème V. Soit

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \dots \text{ etc.}$$

une série convergente, dans laquelle v_0, v_1, $v_2 \dots$ sont des fonctions continues d'une même quantité variable x entre les limites $x = a$ et $x = b$, la série

$$f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots$$

où $\alpha < \delta$, sera convergente et fonction continue de x entre les mêmes limites.

Il est déjà démontré que la série $f(x)$ est convergente. Que la fonction $f(x)$ est continue pourra se démontrer comme il suit.

Soit

$$v_0 + v_1\alpha + \dots + v_{m-1}\alpha^{m-1} = \varphi(x),$$
$$v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \dots\dots = \psi(x),$$

on aura

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Or

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot v_m\delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} \cdot v_{m+1}\delta^{m+1} + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2} \cdot v_{m+2}\delta^{m+2} + \text{ etc.}$$

donc en désignant par $\theta(x)$ la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1} + v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. on aura en vertu du théorème (III):

$$\psi(x) < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot \theta(x)$$

Il suit de là qu'on peut prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi(x) = \omega$, et que par conséquent aussi

$$f(x) = \varphi(x) + \omega,$$

où ω est moindre que toute quantité assignable.

On a de même

$$f(x-\beta)=\varphi(x-\beta)+\omega,$$

donc $$f(x)-f(x-\beta)=\varphi(x)-\varphi(x-\beta)+\omega.$$

Or par la forme de $\varphi(x)$ il est clair qu'on peut prendre β assez petit pour qu'on ait

$$\varphi(x)-\varphi(x-\beta)=\omega,$$

d'où l'on tire $$f(x)-f(x-\beta)=\omega.$$

Donc la fonction $f(x)$ est continue*).

Théorème VI. Lorsqu'on désigne par ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 etc. ϱ'_0, ϱ'_1, ϱ'_2 etc. les valeurs numériques des membres respectifs des deux séries convergentes

$$v_0+v_1+v_2+\ldots=p,$$
$$\text{et } v'_0+v'_1+v'_2+\ldots=p',$$

si les séries

$$\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots$$
$$\varrho'_0+\varrho'_1+\varrho_2+\cdots$$

sont de même convergentes,

la série,

$$r_0+r_1+r_2+\ldots,\ \text{dont le terme général est,}$$
$$r_m=v_0\,v'_m+v_1\,v'_{m-1}+v_2\,v'_{m-2}+\cdots+v_m\,v'_0,$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme,

$$(v_0+v_1+v_2+\ldots)(v'_0+v'_1+v'_2+\ldots).$$

Démonstration.

En faisant,

$$p_m=v_0+v_1+\ldots+v_m,$$
$$p'_m=v'_0+v'_1+\ldots+v'_m,$$

on voit aisément que

$$\left.\begin{aligned}r_0+r_1+r_2+\cdots+r_{2m}=p_m\cdot p'_m+\big(&p_0v'_{2m}+p_1v'_{2m-1}+\cdots+p_{m-1}v'_{m+1}(=t)\\&+p'_0v_{2m}+p'_1v_{2m-1}+\cdots+p'_{m-1}v_{m+1}(=t')\big)\end{aligned}\right\}(a)$$

---

*) Dans l'ouvrage cité de M. Cauchy on trouve (page 131) le théorème suivant: "Lorsque les différens termes de la série, $u_0+u_1+u_2+\ldots$ etc. sont des fonctions d'une "même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est "aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série,

$$\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\ldots\ \text{etc.}$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, où m est un nombre entier. Il y a, comme en sait, plusieurs séries de cette espèce.

Soit

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \dots = u,$$
$$\text{et } \rho'_0 + \rho'_1 + \rho'_2 + \dots = u',$$

il est clair que sans égard au signe on aura,

$$t < u\,(\rho'_{2m} + \rho'_{2m-1} + \dots + \rho'_{m+1})$$
$$t' < u'\,(\rho_{2m} + \rho_{2m-1} + \dots + \rho_{m+1})$$

Or les séries $\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \dots$, et $\rho'_0 + \rho'_1 + \rho'_2 + \dots$ étant convergentes, les quantités t et t', pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approcheront indéfiniment de la limite zéro. Donc faisant dans l'équation (a) m infini, on aura,

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.} = (v_0 + v_1 + v_2 + \text{etc.})\,(v'_0 + v'_1 + v'_2 + \text{etc.})$$

Soient t_0, t_1, t_2, etc., t'_0, t'_1, t'_2 etc. deux séries de quantités positives et négatives, dont les termes généraux s'approchent indéfiniment de zéro, il suit du théorème (II) que les séries,

$t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \text{etc.}$, et $t'_0 + t'_1\alpha + t'_2\alpha^2 + \text{etc.}$, où α signifie une quantité inférieure à l'unite, doivent être convergentes. Il en sera de même en attribuant à chaque terme sa valeur numérique, donc en vertu du théorème précédent:

$$(t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \dots)\,(t'_0 + t'_1\alpha + t'_2\alpha^2 + \dots) =$$
$$t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1)\alpha + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2)\alpha^2 + \text{etc.}$$
$$\dots + (t_m t'_0 + t_{m-1} t'_1 + t_{m-2} t'_2 + \dots + t_0 t'_m)\alpha^m + \text{etc.}$$

Maintenant si l'on suppose que les trois séries,

$$t_0 + t_1 + t_2 + \text{etc.}$$
$$t'_0 + t'_1 + t'_2 + \text{etc.}$$
$$t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1) + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2) + \text{etc.}$$

soient convergentes, on trouvera en vertu du théorème (IV), en faisant dans l'équation (b) α converger vers l'unite:

$$(t_0 + t_1 + t_2 + \dots)\,(t'_0 + t'_1 + t'_2 + \dots) =$$
$$t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1) + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2) + \text{etc.}$$

III.

Examinons maintenant la série proposée,

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots$$

En la désignant par $\varphi(m)$, et faisant pour abréger, $1 = m_0$, $\frac{m}{1} = m_1$,

$$\frac{m(m-1)}{1.2} = m_2, \text{ et en général } \frac{m.(m-1)\dots(m-\mu+1)}{1.2\dots\mu} = m_\mu, \text{ on aura:}$$

1. $\varphi(m) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots + m_\mu x^\mu + \text{etc.}$

Il s'agit d'abord de trouver les valeurs de m et de x pour lesquelles la série est convergente.

Les quantités m et x pouvant en général aussi être imaginaires, soit $x = a + b\sqrt{-1}$, $m = k + k'\sqrt{-1}$, où a, b, k, k' sont des quantités réelles. Substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme

$$\varphi(m) = p + q\sqrt{-1},$$

où p et q sont des séries dont les termes ont des valeurs réelles. On peut trouver ces séries de la manière suivante:

Soit $$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha, \quad \frac{a}{\alpha} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\alpha} = \sin\varphi,$$

et l'on aura

$$x = \alpha(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi),$$

où α et φ sont des quantités réelles, et en outre α est positive. Si l'on fait de plus

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\gamma_\mu) = \frac{k + k'\sqrt{-1} - \mu + 1}{\mu},$$

on trouvera

$$\delta_\mu = \left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \quad \cos\gamma_\mu = \frac{k-\mu+1}{\mu\delta_\mu}; \quad \sin\gamma_\mu = \frac{k'}{\mu\delta_\mu}.$$

Si dans l'expression

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\gamma_\mu),$$

on fait successivement μ égal à 1, 2, 3, ... μ, on obtiendra μ équations qui étant multipliées terme à terme donneront

$$m_\mu = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,\mu} =$$

$$\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \ldots \delta_\mu \left(\cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu) + \sqrt{-1}\,.\,\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu)\right)$$

On tire de là, en multipliant par

$$x^\mu = \alpha^\mu(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi)^\mu = \alpha^\mu(\cos\mu\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\mu\varphi),$$

$$m_\mu x^\mu = \alpha^\mu . \delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \ldots \delta_\mu \left(\cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu) + \sqrt{-1}\,.\,\sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu)\right);$$

ou bien en faisant pour abréger

$$\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \ldots \delta_\mu = \lambda_\mu, \quad \mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_\mu = \theta_\mu:$$

$$m_\mu . x^\mu = \lambda_\mu . \alpha^\mu(\cos\theta_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_\mu).$$

L'expression (1) se change par là en celle-ci,

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1\alpha(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\,.\sin\theta_1) + \lambda_2\alpha^2(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\,.\sin\theta_2) + \ldots$$
$$+ \lambda_\mu\alpha^\mu(\cos\theta_\mu + \sqrt{-1}\,.\sin\theta_\mu) + \ldots$$

ou en celle-ci,

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1\alpha\,.\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\,.\cos\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu\alpha^\mu\,.\cos\theta_\mu + \ldots \text{etc.}$$
$$+ \sqrt{-1}\,(\lambda_1\alpha\,.\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\,.\sin\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu\alpha^\mu\,.\sin\theta_\mu + \ldots \text{etc.})$$

On a donc

$$2.\quad \begin{cases} p = 1 + \lambda_1\alpha\,.\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\,.\cos\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu\alpha^\mu\,.\cos\theta_\mu + \ldots \\ q = \qquad \lambda_1\alpha\,.\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha_2\,.\sin\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu\alpha^\mu\,.\sin\theta_\mu + \ldots \end{cases}$$

Or je dis que ces séries seront *divergentes* ou *convergentes* selon que α est supérieur ou inférieur à l'unité.

De l'expression pour λ_μ on tire $\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1}\,.\,\lambda_\mu$, donc

$$\lambda_{\mu+1}\,.\,\alpha^{\mu+1} = \alpha\delta_{\mu+1}\,.\,\lambda_\mu\alpha^\mu,$$

et

$$\frac{\lambda_{\mu+1}\,.\,\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu} = \alpha\delta_{\mu+1},$$

mais

$$\delta_{\mu+1} = \left[\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

donc pour des valeurs toujours croissantes de μ, δ_μ s'approchera de la limite 1, et par suite $\dfrac{\lambda_{\mu+1}\,.\,\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\,.\,\alpha^\mu}$ de la limite α.

Donc en vertu des théorèmes (I) et (II) du paragraphe précédent les séries p et q seront divergentes ou convergentes suivant que α est supérieur ou inférieur à l'unité. Il est donc de même de la série proposée $\varphi(m)$.

Le cas où $\alpha = 1$, sera traité plus bas.

Comme la série $\varphi(m)$ est convergente pour toute valeur de α inférieure à l'unité, sa somme sera une certaine fonction de m et de x. On peut, comme il suit, établir une propriété de cette fonction à l'aide de laquelle on peut la trouver: On a

$$\varphi(m) = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \ldots + m_\mu x^\mu + \text{etc.}$$
$$\varphi(n) = n_0 + n_1x + n_2x^2 + \ldots + n_\mu x^\mu + \text{etc.}$$

où n_μ désigne la valeur de m_μ pour $m = n$. On en conclut suivant le théorème VI:

$$\varphi(m) \cdot \varphi(n) = t_0 t'_0 + (t_0 t'_1 + t_1 t'_0) + (t_0 t'_2 + t_1 t'_1 + t_2 t'_0) + \text{etc.}$$
$$+ (t_0 t'_\mu + t_1 t'_{\mu-1} + t_2 t'_{\mu-2} + \ldots + t_\mu t'_0) + \text{etc.}$$

où $t_\mu = m_\mu x^\mu$, $t'_\mu = n_\mu x^\mu$, supposé que la série du second membre soit convergente. En substituant les valeurs de t_μ et t'_μ on aura:

$$\varphi(m) \cdot \varphi(n) = m_0 n_0 + (m_0 n_1 + m_1 n_0) x + (m_0 n_2 + m_1 n_1 + m_2 n_0) x_2 + \ldots$$
$$+ (m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \ldots\ldots + m_\mu n_0) x^\mu + \ldots$$

Or d'après une propriété connue de la fonction m_μ on a

$$(m+n)_\mu = m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \ldots + m_\mu n_0,$$

$(m+n)_\mu$ désignant la valeur de m_μ lorsqu'on y substitue $m+n$ pour m. On aura donc par substitution:

$$\varphi(m) \cdot \varphi(n) = (m+n)_0 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + \ldots + (m+n)_\mu x^\mu + \text{etc.}$$

Or d'après ce qui précède, le second membre de cette équation est une série convergente et précicément la même chose que $\varphi(m+n)$; donc

$$5) \qquad \varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(m+n).$$

Cette équation exprime une propriété fondamentale de la fonction $\varphi(m)$. De cette propriété nous déduirons une expression de la fonction sous forme finie à l'aide des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires.

Comme on a vu plus haut, la fonction $\varphi(m)$ est de la forme $p + q\sqrt{-1}$, p et q étant toujours réels et fonctions des quantités k, k', α et φ, et $m = k + k'\sqrt{-1}$, $x = \alpha(\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi)$. Soit

$$p + q\sqrt{-1} = r(\cos s + \sqrt{-1} \cdot \sin s),$$

et l'on trouvera

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} = r, \quad \frac{p}{r} = \cos s, \quad \frac{q}{r} = \sin s,$$

r étant toujours positif et s une quantité réelle. Soit

$$r = f(k, k'), \quad s = \psi(k, k'), \text{ et l'on aura,}$$

$$5') \quad p + q\sqrt{-1} = \varphi(k + k'\sqrt{-1}) = f(k,k')\big(\cos\psi(k,k') + \sqrt{-1}\sin\psi(k,k')\big).$$

On tire de la en mettant successivement l, l' et $k+l$, $k'+l'$ à la place de k et k':

$$\varphi(l + l'\sqrt{-1}) = f(l,l')\big(\cos\psi(l,l') + \sqrt{-1}\ \sin\ \psi(l,l')\big),$$
$$\varphi(k+l+(k'+l')\sqrt{-1}) = f(k+l,k'+l')\big(\cos\psi(k+l,k'+l') + \sqrt{-1} \cdot \sin\psi(k+l,k'+l')\big).$$

Or en vertu de l'équation $\varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(m+n)$, on a,

$$\varphi(k+l+(k'+l')\sqrt{-1}) = \varphi(k+k'\sqrt{-1}) \cdot \varphi(l+l'\sqrt{-1}),$$

en faisant $m = k + k'\sqrt{-1}$, $n = l + l'\sqrt{-1}$. Donc en substituant, on obtient,

$$f(k+l, k'+l')\,[\cos\psi(k+l, k'+l') + \sqrt{-1}\,.\,\sin\psi(k+l, k'+l')] =$$
$$f(k,k')\,.\,f(l,l')\,[\cos(\psi(k,k') + \psi(l,l')) + \sqrt{-1}\,.\,\sin(\psi(k,k') + \psi(l,l')].$$

Cette équation donne, lorsqu'on sépare les termes réels des termes imaginaires:

$$f(k+l,k'+l')\,.\,\cos\psi(k+l,k'+l') = f(k,k')\,.\,f(l,l')\,.\,\cos\big(\psi(k,k') + \psi(l,l')\big),$$
$$f(k+l,k'+l')\,.\,\sin\psi(k+l.k'+l') = f(k,k')\,.\,f(l,l')\,.\,\sin\big(\psi(k,k') + \psi(l,l')\big).$$

En carrant et ajoutant ces équations membre à membre on aura:

$$\big(f(k+l, k'+l')\big)^2 = \big(f(k, k')\,.\,f(l, l')\big)^2,$$

et de là

$$4)\qquad f(k+l\,.\,k'+l') = f(k, k')\,.\,f(l, l').$$

En vertu de cette équation les précédentes se transforment en celles-ci:

$$\cos\psi(k+l, k'+l') = \cos\big(\psi(k, k') + \psi(l, l')\big)$$
$$\sin\psi(k+l, k'+l') = \sin\big(\psi(k, k') + \psi(l, l')\big)$$

d'où l'on tire,

$$5)\qquad \psi(k+l, k'+l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(l, l'),$$

m étant un nombre entier positif ou négatif.

Maintenant il s'agit de trouver les fonctions $f(k, k')$ et $\psi(k, k')$ des équations (4) et (5).

D'abord je dis qu'elles sont des fonctions continues de k et k' entre des limites quelconques de ces variables. En effet d'après le théorème (V) p et q sont évidemment des fonctions continues.

Or on a,

$$f(k, k') = (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}};\ \cos\psi(k, k') = \frac{p}{f(k, k')};\ \sin\psi(k, k') = \frac{q}{f(k, k')};$$

donc $f(k, k')$ de même que $\cos\psi(k, k')$ et $\sin\psi(k, k')$ est une fonction continue. On peut donc supposer que $\psi(k,k')$ est aussi une fonction continue. Nous allons d'abord examiner l'équation (5). Or $\psi(k, k')$ étant une fonction continue, il faut que m pour toutes les valeurs de k, k', l, l' ait la même valeur. Faisant donc successivement $l = 0$, $k = 0$, on obtient,

$$\psi(k, k'+l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l'),$$
$$\psi(l, k'+l') = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(l, l').$$

En éliminant de ces équations et l'équation (5) les deux quantités $\psi(k, k')$ et $\psi(l, l')$, on trouvera,

$$\psi(k, k'+l') + \psi(l, k'+l') = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l') + \psi(k+l, k'+l').$$

Soit pour abréger

$$6)\quad \begin{cases} \psi(k,\, k'+l') = \theta(k), \\ 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l') = a, \end{cases}$$

on aura,

$$7)\qquad \theta(k) + \theta(l) = a + \theta(k+l)$$

Faisant ici successivement $l = k,\ 2k, \ldots \varrho k$, on aura,

$$2\theta(k) = a + \theta(2k),$$
$$\theta(k) + \theta(2k) = a + \theta(3k),$$
$$\theta(k) + \theta(3k) = a + \theta(4k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\theta(k) + \theta(\varrho\text{-}1)k = a + \theta(\varrho k).$$

En ajoutant ces équations on trouve,

$$7')\qquad \varrho\theta(k) = (\varrho - 1)a + \theta(\varrho k).$$

On en tire en faisant $k = 1$,

$$\theta(\varrho) = \varrho\big(\theta(1) - a\big) + a,$$

ou bien en faisant $\theta(1) - a = c$,

$$8)\qquad \theta(\varrho) = c\,.\,\varrho + a.$$

Voilà donc la valeur de la fonction $\theta(k)$, lorsque k est un nombre entier. Mais la fonction $\theta(k)$ aura la même forme pour toute valeur de k, ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit:

Si l'on pose dans l'équation (7') $k = \frac{\mu}{\varrho}$, où μ est un nombre entier, on en tire $\varrho\,.\,\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) = (\varrho - 1)\ a + \theta(\mu)$. Or en vertu de l'équation (8)

$$\theta(\mu) = c\mu + a.$$

Donc en substituant et divisant par ϱ on trouve,

$$\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) = c\,.\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) + a.$$

L'équation (8) a donc lieu pour toute valeur positive et rationnelle de ϱ. Soit $l = -k$, l'équation (7) deviendra,

$$\theta(k) + \theta(-k) = a + \theta(0).$$

Il suit de là en posant $k = 0$,

$$\theta(0) = a, \text{ et par conséquent } \theta(-k) = 2a - \theta(k).$$

Or k étant rationnel et positif on a $\theta(k) = ck + a$, donc,

$$\theta(-k) = -ck + a.$$

L'équation,

$$9)\qquad \theta(k) = ck + a,$$

a donc lieu pour toute valeur rationnelle de k et par conséquent, puisque $\theta(k)$ est une fonction continue, pour toute valeur réelle de k.

Or $\theta(k) = \psi(k, k' + l')$, et $a = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l')$; faisant donc $c = \theta(k', l')$, on obtient

$$10) \qquad \psi(k, k'+l') = \theta(k', l') \,.\, k + 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l').$$

On tire de là en faisant $k = 0$,

$$\psi(0, k'+l') = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l').$$

Cette équation étant de la même forme que l'équation (7), elle donnera de la même manière:

$$\psi(0, k') = \beta' \,.\, k' - 2m\pi,$$

où β' est une quantité indépendante de k'.

Mettant l' à la place de k', on obtient $\psi(0, l') = -2m\pi + \beta' l'$.

Substituant ces valeurs de $\psi(0, k')$ et de $\psi(0, l')$ dans l'équation (10) on en tirera

$$\psi(k, k'+l') = \theta(k', l') \,.\, k + \beta'(k'+l') - 2m\pi.$$

On voit par là que $\theta(k', l')$ est une fonction de $k'+l'$. En la désignant par $F(k'+l')$, on aura

$$\psi(k, k'+l') = F(k'+l') \,.\, k + \beta'(k'+l') - 2m\pi,$$

et par conséquent en faisant $l' = 0$,

$$\psi(k, k') = F(k') \,.\, k + \beta' k' - 2m\pi.$$

En remarquant que

$$\psi(k, k' + l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l'),$$

$$\psi(0, l') = \beta' l' - 2m\pi,$$

l'équation précédente donne,

$$F(k' + l')\, k + \beta'(k' + l') - 2m\pi = 2m\pi + F(k') \,.\, k + \beta' k' - 2m\pi + \beta' l' - 2m\pi.$$

C'est-à-dire:

$$F(k' + l') = F(k').$$

Donc faisant $k' = 0$, on obtient $F(l') = F(0) = \beta = F(k')$. Par suite la valeur de $\psi(k, k')$ prend la forme,

$$11) \qquad \psi(k, k') = \beta \,.\, k + \beta' k' - 2m\pi,$$

β et β' étant deux constantes. Cette valeur de $\psi(k, k')$ satisfera à l'équation (5) dans toute sa généralité comme il est aisé de voir.

Maintenant nous allons examiner l'équation,

$$f(k + l, k' + l') = f(k, k') \,.\, f(l, l').$$

$f(k, k')$ étant toujours une quantité positive, on peut poser:

$$f(k, k') = e^{F(k, k')},$$

où $F(k, k')$ signifie une fonction réelle continue de k et k'.

En substituant et prenant les logarithmes des deux membres, on trouvera,

$$F(k+l, k'+l') = F(k, k') + F(l, l').$$

Comme cette équation coincide avec l'équation (5) en mettant F à la place de ψ, et 0 à la place de m, elle donnera en vertu de l'équation (11):

$$12) \qquad F(k, k') = \delta k + \delta' k',$$

où δ et δ' de même que β et β' sont deux quantités indépendantes de k et de k'. La fonction $f(k, k')$ prendra donc la forme,

$$f(k, k') = e^{\delta k + \delta' k'}.$$

Les fonctions $\psi(k, k')$ et $f(k, k')$ étant trouvées de cette manière, on aura d'après l'équation (5'),

$$13) \quad \varphi(k + k'\sqrt{-1}) = e^{\delta k + \delta' k'}\left(\cos(\beta k + \beta' k') + \sqrt{-1} . \sin(\beta k + \beta' k')\right),$$

où il reste encore à trouver les quantités δ, δ', β, β', qui ne peuvent être que des fonctions de α et de φ.

On a

$$\varphi(k + k'\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1},$$

où p et q sont donnés par les équations (2). En séparant les quantités réelles des imaginaires, on aura:

$$14)\begin{cases} e^{\delta k + \delta' k'} . \cos(\beta k + \beta' k') = 1 + \lambda_1 \alpha . \cos\theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 . \cos\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu \alpha^\mu . \cos\theta_\mu + \text{etc.} \\ e^{\delta k + \delta' k'} . \sin(\beta k + \beta' k') = \lambda_1 \alpha . \sin\theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 . \sin\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu \alpha^\mu . \sin\theta_\mu + \text{etc.} \end{cases}$$

Nous allons d'abord considérer le cas où m est réel, c'est-à-dire où $k' = 0$. Alors les expressions (14) prennent la forme,

$$15)\begin{cases} e^{\delta k} . \cos\beta k = 1 + \frac{k}{1}\alpha\cos\varphi + \frac{k.(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi + \text{etc.} = f(\alpha) \\ e^{\delta k} . \sin\beta k = \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi + \frac{k.(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi + \text{etc.} = \theta(\alpha). \end{cases}$$

Pour trouver δ et β, soit $k = 1$, et l'on aura:

$$e^{\delta} . \cos\beta = 1 + \alpha . \cos\varphi; \; e^{\delta} . \sin\beta = \alpha . \sin\varphi.$$

On tire de là,

$$e^{\delta} = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\beta = \frac{1 + \alpha\cos\varphi}{(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin\beta = \frac{\alpha . \sin\varphi}{(1 + \alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation donne, en désignant par s la plus petite de toutes les valeurs de β qui y satisfait, et qui est toujours renfermée entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$$\beta = s + \mu\pi,$$

μ étant un nombre entier positif ou négatif.

Par là les équations (15) se changent en celles-ci:

$$f(\alpha) = e^{\delta k} \cos k(s + \mu\pi) = e^{\delta k} \cos ks . \cos k\mu\pi - e^{\delta k} \sin ks . \sin k\mu\pi,$$

$$\theta(\alpha) = e^{\delta k} \sin k(s + \mu\pi) = e^{\delta k} \sin ks . \cos k\mu\pi + e^{\delta k} \cos ks . \sin k\mu\pi.$$

De ces équations on tire,

$$\cos k\mu\pi = e^{-\delta k}\big(f(\alpha) . \cos ks + \theta(\alpha) . \sin ks\big),$$

$$\sin k\mu\pi = e^{-\delta k}\big(\theta(\alpha) . \cos ks - f(\alpha) . \sin ks\big).$$

Or, d'après le théorème (IV), $\theta(\alpha)$ et $f(\alpha)$ sont des fonctions continues de α; il faut donc que $\cos k\mu\pi$ et $\sin k\mu\pi$ conservent les mêmes valeurs pour toute valeur de α. Il suffit donc pour les trouver, d'attribuer une valeur quelconque à α. Soit $\alpha = 0$, et l'on aura, en remarquant qu'alors $e^{\delta} = 1, f(\alpha) = 1$, $\theta(\alpha) = 0$, $s = 0$,

$$\cos k\mu\pi = 1, \ \sin k\mu\pi = 0.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions de $f(\alpha)$ et $\theta(\alpha)$ et se rappelant que $e^{\delta} = (1 + 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtiendra:

$$f(\alpha) = (1 + 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{k}{2}} . \cos ks, \quad \theta(\alpha) = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{k}{2}} \sin ks.$$

Donc enfin les expressions (15) deviendront:

$$(16)\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{k}{1}\alpha\cos\varphi + \frac{k(k-1)}{1 . 2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 . 2 . 3}\alpha^3\cos 3\varphi + \text{etc.} = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{k}{2}} . \cos ks, \\ &\frac{k}{1}\alpha \sin\varphi + \frac{k(k-1)}{1 . 2}\alpha^2 \sin 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 . 2 . 3}\alpha^3 \sin 3\varphi + \text{etc.} = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{k}{2}} . \sin ks. \end{aligned}\right.$$

s étant renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et satisfaisant à l'équation

$$\operatorname{tang} s = \frac{\alpha . \sin\varphi}{1 + \alpha . \cos\varphi}.$$

Les expressions (16) sont établies les premières par M. Cauchy dans l'ouvrage cité plus haut.

La quantité α est ici supposée moindre que l'unité. On verra plus bas que α peut aussi être égal à l'unité, lorsqu'on donne à la quantité k une valeur convenable.

Dans ce qui précède nous avons trouvé les quantités δ et β. Maintenant nous allons montrer comment on peut trouver les deux autres quantités inconnues δ' et β'. Faisant pour cet effet dans les équations (14) $k=0$ et $k'=n$, on obtiendra:

$$e^{\delta' n}\cos(\beta' n) = 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \ldots \text{ etc.}$$
$$e^{\delta' n}\sin(\beta' n) = \lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \ldots \text{ etc.}$$

où $\lambda_\mu = \delta_1.\delta_2.\delta_3\ldots\delta_\mu$, $\theta_\mu = \mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu$, δ_μ et γ_μ étant déterminés par les équations

$$\delta_\mu = \left[\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{n}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad \cos\gamma_\mu = -\frac{\mu-1}{\mu\delta_\mu},\quad \sin\gamma_\mu = \frac{n}{\mu\delta_\mu}.$$

De ces équations on déduit les suivantes:

$$\frac{e^{\delta' n}\cos(\beta' n)-1}{n} = \frac{\lambda_1}{n}.\alpha\cos\theta_1 + \frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\cos\theta_2 + \ldots$$
$$\frac{e^{\delta' n}\sin(\beta' n)}{n} = \frac{\lambda_1}{n}.\alpha\sin\theta_1 + \frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\sin\theta_2 + \ldots$$

Or en supposant n positif on a, $\lambda_1 = \delta_1 = n$, donc $\frac{\lambda_\mu}{n} = \delta_2.\delta_3\ldots\delta_\mu$, et par suite

$$\frac{e^{\delta' n}\cos(\beta' n)-1}{n} = \alpha\cos\theta_1 + \delta_2\alpha^2\cos\theta_2 + \delta_2\delta_3\alpha^3\cos\theta_3 + \ldots$$
$$\frac{e^{\delta' n}\sin(\beta' n)}{n} = \alpha\sin\theta_1 + \delta_2\alpha^2\sin\theta_2 + \delta_2\delta_3\alpha^3\sin\theta_3 + \ldots$$

Ces séries sont convergentes pour toute valeur de n, zéro y compris, ce qu'on voit aisément par le théorème (II). En faisant donc n converger vers la limite zéro, et remarquant que les séries d'après le théorème (V) sont des fonctions continues, on obtiendra:

$$\delta' = \alpha\cos\theta'_1 + \delta'_2\alpha^2\cos\theta'_2 + \delta'_2\delta'_3\alpha^3\cos\theta'_3 + \ldots,$$
$$\beta' = \alpha\sin\theta'_1 + \delta'_2\alpha^2\sin\theta'_2 + \delta'_2\delta'_3\alpha^3\sin\theta'_3 + \ldots,$$

où δ' et β' sont les limites des quantités $\frac{e^{\delta' n}\cos(\beta' n)-1}{n}$ et $\frac{e^{\delta' n}\sin(\beta' n)}{n}$; θ'_μ est la limite de θ_μ et δ'_μ celle de δ_μ. Or d'après l'expression de δ_μ on a $\delta'_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$; donc $\cos\gamma_\mu = -1$; $\sin\gamma_\mu = 0$ (lorsque $\mu > 1$), donc

$$\cos(\theta'_\mu) = \cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu) = +\sin(\mu\varphi).(-1)^\mu,$$
$$\sin(\theta'_\mu) = \sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu) = -\cos(\mu\varphi).(-1)^\mu,$$

où il faut se rappeler qu'en vertu de l'équation

$$n\sqrt{-1} = \delta_1(\cos\gamma_1 + \sqrt{-1}\sin\gamma_1),$$

on a $\cos\gamma_1 = 0$, $\sin\gamma_1 = 1$. Donc les valeurs de β' et δ' seront celles-ci:

$$\beta' = \alpha \,.\, \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \,.\, \cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \,.\, \cos 3\varphi - \ldots$$
$$\delta' = -(\alpha . \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2 . \sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3 . \sin 3\varphi - \ldots$$

De cette manière on a trouvé les quantités β' et δ' par des séries infinies. On peut aussi les exprimer en forme finie. Car on tire de l'équation (15):

$$\frac{e^{\delta k} . \cos\beta k - 1}{k} = \alpha \,.\, \cos\varphi + \frac{k-1}{1.2}\alpha^2 . \cos 2\varphi + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3 . \cos 3\varphi + \ldots$$
$$\frac{e^{\delta k} . \sin\beta k}{k} = \alpha \,.\, \sin\varphi + \frac{k-1}{1.2}\alpha^2 . \sin 2\varphi + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3 . \sin 3\varphi + \ldots$$

Il suit de là en faisant k converger vers zéro:

$$17)\ \begin{cases}\delta = \alpha\cos\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2 . \cos 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \text{etc.}\\ \beta = \alpha\sin\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2 . \sin 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3 \sin 3\varphi - \text{etc.}\end{cases}$$

donc $\beta' = \delta$, $\delta' = -\beta$.

Donc les expressions (14) prennent la forme

$$18)\ \begin{cases}1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \ldots = e^{\delta k - \beta k'}\cos(\beta k + \delta k') = p,\\ \lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \ldots = e^{\delta k - \beta k'}\sin(\beta k + \delta k') = q,\end{cases}$$

où $\delta = \frac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)$, $\beta = \text{arc tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right)$; or la somme de la série proposée étant $= p + q\sqrt{-1}$, on aura

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu} . x^\mu + \ldots$$
$$= e^{\delta k - \beta k'}\left(\cos(\beta k + \delta k') + \sqrt{-1} . \sin(\beta k + \delta k')\right),$$

où l'on a $m = k + k'\sqrt{-1}$, $x = \alpha(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = a + b\sqrt{-1}$; donc $\alpha = \sqrt{(a^2+b^2)}$, $\alpha\cos\varphi = a$, $\alpha\sin\varphi = b$, $\delta = \frac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2) = \frac{1}{2}\log((1+a)^2+b^2)$, $\beta = \text{arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)$. Substituant et écrivant m pour k et n pour k', l'expression ci-dessus prend la forme:

$$19)\ \begin{cases}1 + \frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+b\sqrt{-1}) + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1}-1)}{1\,.\,2}(a+b\sqrt{-1})^2\\ \quad + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1}-1)(m-2+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2\,.\,3}(a+b\sqrt{-1})^3 + \ldots\\ \ldots + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})(m-2+n\sqrt{-1})\ldots(m-\mu+1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\mu}(a+b\sqrt{-1})^\mu + \text{etc.}\\ = ((1+a)^2+b^2)^{\frac{m}{2}} e^{-n . \text{arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\left[\cos\left(m . \text{arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right) + \frac{1}{2}n\log((1+a)^2+b^2)\right)\right.\\ \qquad \left. + \sqrt{-1} . \sin\left(m . \text{arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right) + \frac{1}{2}n\log((1+a)^2+b^2)\right)\right].\end{cases}$$

Cette expression, comme nous avons vu, de même que l'expression (18) a lieu pour toute valeur de $\alpha = \sqrt{(a^2+b^2)}$, inférieure à l'unité.

En faisant p. ex. $b=0$, $n=0$, on a l'expression

$$20)\quad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,.\,a^2+\ldots=(1+a)^m$$

de laquelle nous tirerons parti ci-après.

IV.

Dans ce qui précède on a trouvé la somme de la série proposée toutes les fois que $\alpha=\sqrt{(a^2+b^2)}$ est inférieur à l'unité. Il reste encore à examiner le cas où cette quantité est égale à 1.

Nous avons vu par le théorème (IV) que lorsque α s'approche indéfiniment de l'unité, la série

$$v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\ldots$$

s'approchera en même temps de la limite $v_0+v_1+v_2+\ldots$ supposé que cette dernière série soit convergente. En faisant donc dans les expressions (18) α converger vers l'unité, on aura

$$21)\quad \begin{cases} 1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\ldots=e^{\delta_, k-\beta_, k'}\cos(\beta_, k+\delta_, k'), \\ \quad\lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\ldots=e^{\delta_, k-\beta_, k'}\sin(\beta_, k+\delta_, k'), \end{cases}$$

où $\delta_,$ et $\beta_,$ sont les limites des quantités δ et β, supposé que les séries, contenues dans ces équations, soient convergentes. Or il est clair que $\frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)$ est la limite de δ, et que

$$\text{arc tang}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)=\text{arc tang}\frac{2.\cos\frac{1}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}\varphi}{2(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}=\text{arc tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$$

est celle de β; on a donc

$$22)\quad \delta_,=\tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi),\quad \beta_,=\text{arc tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Il reste donc seulement à examiner les cas où les séries sont convergentes. Pour cet effet il faut distinguer trois cas: lorsque $k=-1$, ou compris entre -1 et $-\infty$; lorsque k est compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est compris entre 0 et -1.

Premier cas, lorsque k est égal à -1 ou compris entre -1 et $-\infty$. On a

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Faisant donc $k=-1-n$, on aura

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{n+\mu}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on voit que δ_μ est toujours supérieur à l'unité.

Or on a $\lambda_\mu=\delta_1.\delta_2.\delta_3\ldots\delta_\mu$, donc pour des valeurs toujours croissantes de

μ, λ_μ ne convergera pas vers zéro, donc en vertu du théorème (1) les séries (21) sont divergentes.

Deuxième cas, lorsque k est positif.

Supposons que c soit une quantité positive inférieure à k, on aura

$$(\mu-k-1+c)^2=(\mu-k-1)^2+2c(\mu-k-1)+c^2,$$

donc

$$(\mu-k-1)^2+k'^2=(\mu-k-1+c)^2+k'^2-c^2-2c(\mu-k-1).$$

Si l'on fait
$$\mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}$$

il en suit que $k'^2-c^2-2c(\mu-k-1)$ est négatif, et par conséquent

$$(\mu-k-1)^2+k'^2<(\mu-k-1+c)^2, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\delta_\mu<\frac{\mu-k-1+c}{\mu},\quad \delta_\mu<1-\frac{1+k-c}{\mu}.$$

Si dans l'équation (20) on fait $a=\frac{1}{\mu}$, $m=-n$, on aura

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-n}=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(1+n)}{1.2}\cdot\frac{1}{\mu^2}-\text{etc.}=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{\mu^2}\left(1-\frac{2+n}{3\mu}\right)+\text{etc.}$$

Donc en faisant $n=1+k-c$, on voit aisément que

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1-k+c}>1-\frac{1+k-c}{\mu}.$$

Il suit de la que,

$$\delta_\mu<\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+k-c},\text{ où } \mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}\,(=\varrho),$$

donc
$$\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\rho+\mu}{\rho+\mu+1}\right)^{1+k-c},\text{ où } \mu>0.$$

En posant successivement $\mu=0, 1, 2, 3\ldots\mu$, et faisant le produit des résultats, on obtiendra:

$$\delta_{\varrho+1}\cdot\delta_{\varrho+2}\ldots\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\rho+1}{\rho+\mu+1}\right)^{1+k-c},$$

or $\lambda_{\mu+\varrho}=\delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\ldots\delta_{\mu+\varrho}$, donc $\lambda_{\mu+\varrho}<\delta_1\cdot\delta_2\ldots\delta_\varrho\cdot\left(\frac{\rho+1}{\rho+\mu+1}\right)^{1+k-c}$,

par conséquent lorsqu'on fait $\mu=0, 1, 2\ldots\mu$,

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\ldots+\lambda_{\varrho+\mu}<\delta_1\cdot\rho_2\ldots\delta_\varrho\cdot(\varrho+1)^{1+k-c}\left(\frac{1}{(\rho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\rho+2)^{1+k-c}}+\ldots+\frac{1}{(\rho+\mu+1)^{1+k-c}}\right).$$

Si maintenant dans l'expression (20) on fait $a=-\frac{1}{\rho+\mu+1}$, $m=-k+c$, on aura

$$\left(1-\frac{1}{\rho+\mu+1}\right)^{c-k}=1+\frac{k-c}{\rho+\mu+1}+\frac{(k-c)(k-c+1)}{1.2(\rho+\mu+1)^2}+\text{etc.}$$ donc en se rappelant que $k>c$:

$$\left(\frac{\rho+\mu}{\rho+\mu+1}\right)^{c-k} > 1 + \frac{k-c}{\rho+\mu+1}.$$

Il suit de là, en divisant par $(k-c)\,(\rho+\mu+1)^{k-c}$:

$$\frac{1}{(\rho+\mu+1)^{1+k-c}} < \frac{1}{(k-c)}\left(\frac{1}{(\rho+\mu)^{k-c}} - \frac{1}{(\rho+\mu+1)^{k-c}}\right)$$

Cela donne, en faisant $\mu = 0, 1, 2 \ldots \mu$, et ajoutant:

$$\frac{1}{(\rho+1)^{1+k-c}} + \frac{1}{(\rho+2)^{1+k-c}} + \ldots + \frac{1}{(\rho+\mu+1)^{1+k-c}} < \frac{1}{k-c}\left(\frac{1}{\rho^{k-c}} - \frac{1}{(\rho+\mu+1)^{k-c}}\right) < \frac{1}{k-c}\cdot\frac{1}{\rho^{k-c}}.$$

Il suit de là que

$$\lambda_\varrho + \lambda_{\varrho+1} + \ldots + \lambda_{\varrho+\mu} < \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \ldots \delta_\varrho \, \frac{(\rho+1)^{1+k-c}}{(k-c)\rho^{k-c}},$$

pour toute valeur de μ. Donc la série $1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, dont tous les termes sont positifs, est convergente, et par conséquent d'après le théorème (II) les séries

$$1 + \lambda_1 \cos\theta_1 + \lambda_2 \cos\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu \cos\theta_\mu + \ldots$$
$$\lambda_1 \sin\theta_1 + \lambda_2 \sin\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu \sin\theta_\mu + \ldots$$

seront de même convergentes.

Troisième cas, lorsque k est égal à zéro ou compris entre zéro et -1.

Dans ce cas les séries ci-dessus seront convergentes pour toute valeur de k, pourvu que φ ne soit égal à $(2n+1)\pi$.

Cela peut se démontrer comme suit:

Soit

$m = k + k'\sqrt{-1}$, $x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$, et $1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots + m_n x^n = p_n$

En multipliant par $1 + x$ on obtient,

$$1 + (m_1+1)x + (m_2+m_1)x^2 + (m_3+m_2)x^3 + \ldots + (m_n+m_{n-1})x^n + m_n x^{n+1} = p_n(1+x).$$

Or on sait que $m_1 + 1 = (m+1)_1$, $(m_2+m_1) = (m+1)_2 \ldots (m_n+m_{n-1}) = (m+1)_n$, donc en substituant:

$$1 + (m+1)_1 x + (m+1)_2 x^2 + \ldots + (m+1)_n x^n = -m_n x^{n+1} + p_n(1+x).$$

Maintenant si l'on fait $n = \infty$, le premier membre de cette équation sera d'après le cas précédent une série convergente. En la désignant par s, on aura,

$$s = p_n(1+x) - m_n\left(\cos(n+1)\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin(n+1)\varphi\right),$$

où n est infini. Or on peut démontrer comme dans le deuxième cas que $m_n = 0$ pour $n = \infty$. On a donc,

$$s = p\,(1+x), \text{ où } p = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \text{etc. in inf.}$$

Cette équation donne, sinon $x + 1 = 0$:

$$p = \frac{s}{1+x}.$$

La série p est donc alors convergente, et par conséquent les séries ci-dessus le sont de même.

Si $x+1=0$, on a $1+\cos\varphi+\sqrt{-1}\,.\sin\varphi=0$, donc $\sin\varphi=0$, $1+\cos\varphi=0$, c'est-à-dire $\varphi=(2n+1)\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif. Donc les séries en question sont convergentes pour toute valeur de k comprise entre 0 et -1, sinon $\varphi=(2n+1)\pi$.

Lorsque $\varphi=(2n+1)\pi$, les séries sont nécessairement divergentes, car si alors elles étaient convergentes, elles auraient pour somme les limites des fonctions,

$$e^{k\delta-k'\delta_1}\left(\cos(k\delta_1+k'\delta)+\sqrt{-1}\cdot\sin(k\delta_1+k'\delta)\right),$$

en y faisant α converger vers l'unité, et faisant $\mu=(2n+1)\pi$.

Or $\delta=\frac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)$, $\delta_1=\text{arc. tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right)$, donc pour $\varphi=(2n+1)\pi$, $\delta=\log(1-\alpha)$, $\delta_1=0$. La fonction en question prendra donc la forme $(1-\alpha)^k\left[\cos\left(k'\log(1-\alpha)\right)+\sqrt{-1}\,.\sin\left(k'\log(1-\alpha)\right)\right]$.

Or k étant égal à zéro ou négatif, il est clair que cette fonction en y faisant α converger vers l'unité, n'aura pas de limite finie et déterminée. Donc les séries sont divergentes.

De ce qui précède il suit donc, que les séries (21) ont lieu pour toute valeur de φ, lorsque k est positif, et pour toute valeur de φ pour laquelle $\sin\varphi$ n'est pas zéro, lorsque k est compris entre -1 et 0, quelle que soit d'ailleurs la valeur de k'. Dans tout autre cas les séries sont divergentes. Dans le cas que nous examinons la série générale (19), lorsqu'on y fait $b^2+a^2=1$, ou $b=\sqrt{(1-a^2)}$, prend la forme:

$$52)\quad\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}\left(a+\sqrt{(a^2-1)}\right)+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2}\left(a+\sqrt{(a^2-1)}\right)^2\\&\quad+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})(m-2+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2\,.\,3}\left(a+\sqrt{(a^2-1)}\right)^3+\text{etc.}\\&=(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n\,.\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\left[\cos\left(m\,.\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\right)\right.\\&\qquad\left.+\sqrt{-1}\sin\left(m\,.\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Voici un résumé des résultats précédents:

I. Lorsque la série,

$$1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}\left(a+b\sqrt{-1}\right)+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2}\left(a+b\sqrt{-1}\right)^2+\text{etc.}$$

$$+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})\ldots(m-\mu+1-n\sqrt{-1})}{1\quad.\quad2\quad.\quad.\quad.\quad.\quad\mu}(a+b\sqrt{-1})^{\mu}+\ldots$$

est convergente, elle a pour somme,

$$((1+a)^2+b^2)^{\frac{m}{2}}e^{-n.\text{arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\Big[\cos\Big(m.\text{arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{n}{2}\log\big((1+a)^2+b^2\big)\Big)$$
$$+\sqrt{-1}.\sin\Big(m.\text{arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{n}{2}\log\big((1+a)^2+b^2\big)\Big)\Big].$$

II. La série est convergente pour toute valeur de m et n, lorsque la quantité $\sqrt{(a^2+b^2)}$ est inférieure à l'unite. Si $\sqrt{(a^2+b^2)}$ est égal à l'unité la série est convergente pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, sinon en même temps $a=-1$. Si $a=-1$, m doit être positif. Dans tout autre cas la série proposée est divergente.

Comme cas particuliers on doit considérer les suivants:

A. Lorsque $n=0$.

On a alors;

$$24)\begin{cases}1+\frac{m}{1}(a+b\sqrt{-1})+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b\sqrt{-1})^2+\ldots\\=((1+a)^2+b^2)^{\frac{m}{2}}\Big[\cos\Big(m.\text{arc.tang.}\left(\frac{b}{1+a}\right)\Big)+\sqrt{-1}.\sin\Big(m.\text{arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)\Big)\Big].\end{cases}$$

Cette expression donne, en faisant $a=\alpha.\cos\varphi$, $b=\alpha.\sin\varphi$ et en séparant lés termes réels des imaginaires:

$$25)\begin{cases}1+\frac{m}{1}\alpha.\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2.\cos2\varphi+\text{etc.}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\cos\Big(m.\text{arc. tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\Big),\\\frac{m}{1}.\alpha\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2.\sin2\varphi+\text{etc.}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\sin\Big(m.\text{arc. tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\Big).\end{cases}$$

B. Lorsque $b=0$.

Dans ce cas l'expression générale prend la forme suivante:

$$26)\begin{cases}1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}a+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1.2}a^2+\text{etc.}\\=(1+a)^m[\cos(n\log(1+a))+\sqrt{-1}.\sin(n.\log(1+a))].\end{cases}$$

C. Lorsque $n=0$, $b=0$.

Alors on a:

$$27)\quad 1+\frac{m}{1}.a+\frac{m(m-1)}{1.2}.a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.a^3+\ldots=(1+a)^m.$$

Cette expression a lieu pour toute valeur de m lorsque la valeur numérique de a est inférieure à l'unite, de plus pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, lorsque $a=1$, et pour toute valeur positive de m, lorsque

$a = -1$. Pour toute autre valeur de a et de m le premier membre est une série divergente.

Faisant p. ex. $a = 1$, $a = -1$, on a,

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \text{etc.} \ldots = 2^m,$$

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \text{etc.} \ldots = 0.$$

La première équation a lieu pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, et la seconde pour toute valeur positive de m.

D. Lorsque $\sqrt{(a^2+b^2)} = 1$ ($a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$).

Alors on a,

$$28)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+\sqrt{(a^2-1)})+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2}(a+\sqrt{(a^2-1)})^2+\text{etc.}\\&=(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n.\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\Big[\cos\Big(m.\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\Big),\\&\qquad+\sqrt{-1}.\sin\Big(m.\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\Big)\Big].\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait ici $a = \cos\varphi$ on obtient:

$$29)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2}(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}.\sin 2\varphi)+\ldots\\&=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}e^{-n(\frac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)}\Big[\cos\Big(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\Big),\\&\qquad+\sqrt{-1}\,.\,\sin\Big(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\Big)\Big]\end{aligned}\right.$$

en remarquant que $\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \text{arc.tang}(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$,

$= \frac{1}{2}\varphi - \varrho\pi$, supposé que $\frac{1}{2}\varphi$ soit compris entre $\varrho\pi - \frac{\pi}{2}$ et $\varrho\pi + \frac{\pi}{2}$.

E. Lorsque $\sqrt{(a^2+b^2)} = 1$, $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, $n = 0$.

Dans ce cas l'expression précédente donne.

$$30)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m}{1}(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}.\sin 2\varphi)+\text{etc.}\\&=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\big(\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\sqrt{-1}.\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)\big)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\\&\text{jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ou en séparant la partie réelle de l'imaginaire:

$$31)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m}{1}\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos 2\varphi+\text{etc.}=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)\\&\frac{m}{1}\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\sin 2\varphi+\text{etc.}=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\\&\text{jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

F. Lorsque $a = 0$, $b = \text{tang}\ \varphi$.

Dans ce cas on obtient lorsque φ est compris entre $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$:

$$52)\ \begin{cases} 1 + \frac{m+n\sqrt{-1}}{1}.\text{tang}\,\varphi.\sqrt{-1} + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2}(\text{tang}\,\varphi.\sqrt{-1})^2 + \text{etc.} \\ = \cos\varphi^{-m}.\ e^{-n\varphi}\ \big(\cos(m\varphi - n\log\cos\varphi) + \sqrt{-1}.\sin(m\varphi - n\log\cos\varphi)\big). \end{cases}$$

V.

On peut par des transformations convenables des expressions précédentes déduire encore plusieurs autres, entre lesquelles il se trouve de très remarquables. Nous allons en expliquer quelques unes. Pour plus de détail on peut consulter l'ouvrage cité de M. Cauchy.

A.

Sommation des séries

$$\alpha\,.\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \ldots,$$
$$\alpha\,.\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \ldots.$$

Lorsque α est supérieur à l'unité on voit aisément que ces séries sont divergentes. Si α est inférieur à l'unité nous avons vu plus haut qu'elles sont convergentes, et leurs sommes sont les quantités β et δ du § III, c'est-à-dire en mettant pour β et δ leurs valeurs données par les équations (18).

$$55)\ \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2) = \alpha\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \text{etc.} \\ &\text{arc. tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right) = \alpha\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour avoir les sommes de ces séries lorsque $\alpha = +1$ ou -1, il faut seulement faire α converger vers cette limite.

La première expression donne de cette manière:

$$54)\ \begin{cases} \tfrac{1}{2}\log(2 + 2\cos\varphi) = \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \text{etc.} \\ \tfrac{1}{2}\log(2 - 2\cos\varphi) = -\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \text{etc.} \end{cases}$$

supposé que les secondes membres de ces équations soient des séries convergentes, ce qui d'après le théorème (II) a lieu pour toute valeur de φ excepté pour $\varphi = (2\mu + 1)\pi$ dans la première expression, et pour $\varphi = 2\mu\pi$ dans la seconde, μ étant un nombre entiér quelconque positif ou négatif.

La seconde formule donne, en supposant φ compris entre π et $-\pi$ et se rappelant qu'on a alors

$$\text{arc. tang}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right) = \text{arc. tang}\ (\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{1}{2}\varphi:$$

55) $\frac{1}{2}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \ldots$ (depuis $\varphi = +\pi$ jusqu'a $\varphi = -\pi$).

Lorsque $\varphi = \pi$ ou $= -\pi$ la série se réduit à zéro, comme on voit aisément. Il suit de la, que la fonction:

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \text{etc.}$$

a la propriété remarquable pour les valeurs $\varphi = \pi$ et $\varphi = -\pi$ d'être discontinue. En effet lorsque $\varphi = \pm\pi$, la fonction se réduit à zéro, si au contraire $\varphi = \pm(\pi - \alpha)$, α étant positif et moindre que π, la valeur de la fonction est

$$\pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

L'expression (55) contient comme cas particulier celle-ci:

56) $$\text{arc tang } \alpha = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^5 - \ldots \text{etc.}$$

expression qu'on trouve en faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

B.

Développement de $\cos m\varphi$ et de $\sin m\varphi$ suivant les puissances de $\text{tang}\,\varphi$. On peut déduire ces développements de l'expression (52). En effet en faisant $n = 0$, et séparant les parties réelles des imaginaires, on obtient après avoir multiplié par $(\cos\varphi)^m$:

57) $$\begin{cases} \cos m\varphi = (\cos\varphi)^m\left(1 - \frac{m(m-1)}{1.2}(\text{tang}\,\varphi)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(\text{tang}\,\varphi)^4 - \ldots\right), \\ \sin m\varphi = (\cos\varphi)^m\left(m(\text{tang}\,\varphi) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\text{tang}\,\varphi)^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}(\text{tang}\,\varphi)^5 - \ldots\right), \end{cases}$$

depuis $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, et ces équations ont lieu pour toute valeur de m lorsque $\text{tang}\,\varphi$ est moindre que 1. Si $\text{tang}\,\varphi = \pm 1$, elles ont lieu pour tout m compris entre -1 et $+\infty$.

Elles sont alors:

58) $$\begin{cases} \cos\left(m.\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1 - \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} - \ldots\right) \\ \sin\left(m.\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} - \ldots\right), \end{cases}$$

C.

Développement de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$ en séries ordonnées suivant les cosinus et les sinus des arcs multiples.

Depuis quelque temps plusieurs analystes se sont occupé du développement de $(\cos x)^m$ et $(\sin x)^m$. Mais jusqu'à présent, si je ne me trompe, tous ces efforts n'ont pas entièrement réussis. On est bién parvenu à des expressions justes sous certaines restrictions, mais ces expressions n'ont pas été rigoureusement fondées. On peut les déduire assez simplement des expressions démontrées ci-dessus. En effet si l'on ajoute les deux équations (31) après avoir multiplié la première par $\cos\alpha$ et la seconde par $\sin\alpha$ on obtient:

$$\cos\alpha + \frac{m}{1}\cos(\alpha-\varphi) + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(\alpha-2\varphi) + \ldots = (2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos\left(\alpha - \frac{m\varphi}{2} + m\varrho\pi\right)$$

$$\left(\text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi = \varrho\pi - \frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi = \varrho\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Or $2+2\cos\varphi$ étant $= 4\,(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2$, on oura en faisant $\varphi = 2x$:

$$\cos\alpha + \frac{m}{1}\cos(\alpha-2x) + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(\alpha-4x) + \ldots = (2\cos x)^m\cos(\alpha - mx + 2m\varrho\pi)\left\{\begin{array}{l}\text{depuis } x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}\\ \text{jusqu'à } x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$$

$$\cos\alpha + \frac{m}{1}\cos(\alpha-2x) + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(\alpha-4x) + \ldots = (-2\cos x)^m\cos\left(\alpha - mx + m(2\varrho+1)\pi\right)\left\{\begin{array}{l}\text{dep. } x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}\\ \text{j. à } x = 2\varrho\pi + \frac{3\pi}{2}\end{array}\right\}$$

Si l'on fait ici 1. $\alpha = mx$; 2. $\alpha = mx + \frac{\pi}{2}$; 3. $\alpha = my,\ x = y - \frac{\pi}{2}$;

4. $\alpha = my - \frac{\pi}{2},\ x = y - \frac{\pi}{2}$, on obtiendra:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ (2\cos x)^m\cos 2m\varrho\pi = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \ldots\\ 2.\ (2\cos x)^m\sin 2m\varrho\pi = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\sin(m-4)x + \ldots\end{array}\right\}\left(\begin{array}{l}\text{depuis } x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}\\ \text{jusqu'à } x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}3.\ (2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \ldots\\ 4.\ (2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi = \sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\sin(m-4)x + \ldots\end{array}\right\}\left(\begin{array}{l}\text{depuis } x = 2\varrho\pi\\ \text{jusqu'à } x = (2\varrho+1)\pi\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}5.\ (-2\cos x)^m\cos m(2\varrho+1)\pi = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \ldots\\ 6.\ (-2\cos x)^m\sin m(2\varrho+1)\pi = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\sin(m-4)x + \ldots\end{array}\right\}\left(\begin{array}{l}\text{depuis } x = (2\varrho+\frac{1}{2})\pi\\ \text{jusqu'à } x = (2\varrho+\frac{3}{2})\pi\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}7.\ (-2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x - \ldots\\ 8.\ (-2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi = \sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\sin(m-4)x - \ldots\end{array}\right\}\left(\begin{array}{l}\text{depuis } x = (2\varrho+1)\pi\\ \text{jusqu'à } x = (2\varrho+2)\pi\end{array}\right)$$

Ces formules ont lieu pour toute valeur de x, lorsque m et positif. Lorsque m est compris entre -1 et 0 il faut excepter des valeurs de x:

1) dans les formules (1), (2), (5), (6), les valeurs $x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}$, et $x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}$,
2) dans les formules (5), (4), (7), (8), les valeurs $x = 2\varrho\pi$, et $x = (2\varrho + 1)\pi$. Dans toute autre cas les séries en question sont convergentes. Comme cas particuliers on peut considérer les deux suivants:

$$(\cos x)^m = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\cos(m-4)x + \dots$$

$$0 = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\sin(m-4)x + \dots$$

$$\left(\text{depuis } x = -\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x = \frac{\pi}{2}\right).$$