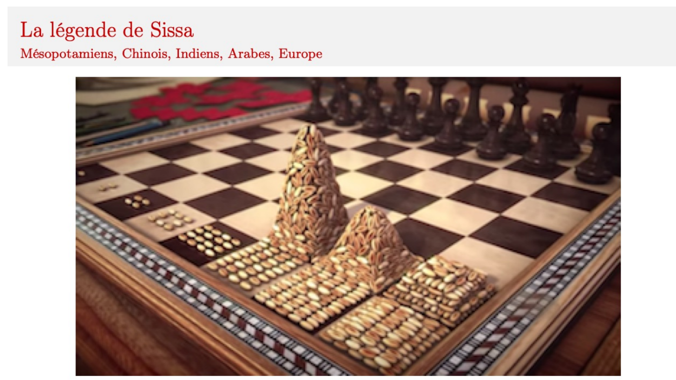
Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Achille et la tortue

Oh, on ne peut pas dire que les séries géométriques soient un objet central dans l'histoire des mathématiques. Simplement, elles se sont trouvées là, dans le patrimoine commun, à quelques étapes clés du développement de l'analyse. Vous allez voir.

1 La légende de Sissa



Vous vous souvenez de la légende de Sissa ? On place un grain de blé sur la première case d'un échiquier et on double à chaque nouvelle case ? Il m'a fallu toute une histoire pour vous raconter les multiples formes de la fascination pour les progressions géométriques, de la Mésopotamie à l'Égypte, en passant par l'Inde et la Chine.

Mais il ne s'agissait que de suites à raison entière.

2 Héritages en progression géométrique

Les suites géométriques de raison non entière, existent depuis aussi longtemps. Ceci est une des plus anciennes tablettes mathématiques connues. C'est probablement un brouillon d'apprenti scribe.

Un héritage doit être réparti entre sept frères, rangés par ordre de naissance, de l'aîné jusqu'au cadet. L'aîné reçoit un sixième de plus que le suivant, qui à son tour reçoit un sixième de plus que le suivant. Le plus jeune reçoit deux, le montant total de l'héritage est écrit sur la première ligne. C'est la somme de sept termes d'une série géométrique, de raison sept sixièmes.

On ignore si la formule pour calculer la somme des termes d'une suite géométrique était connue des Mésopotamiens. Elle l'était en tout cas des Grecs. La voici dans le livre IX des Éléments d'Euclide.

3 Éléments, Livre IX, Proposition 35

« Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la sommme de tous ceux qui sont avant lui. »

Même si la formulation n'est pas familière, vous pouvez la suivre pratiquement mot par mot. Les nombres successivement proportionnels, ce sont des termes successifs d'une série géométrique : a, ar, etc. jusqu'à ar^n. On retranche le premier terme, a du second ar et du dernier ar^n. L'excès du second c'est ar moins a. Son rapport avec a est le même que le rapport de $ar^n - a$ à la somme des termes précédents. C'est bien la formule dont nous avons l'habitude.

Si Euclide parle d'excès, c'est parce qu'implicitement, il suppose que r est un entier supérieur à 1. Mais nous savons bien que la formule est tout à fait générale. Et si nous l'appliquons par exemple avec r égale un demi, nous voyons tout de suite que la somme des termes converge quand le nombre de termes tend vers l'infini. C'est ainsi que nous calculons la somme d'une série géométrique. Mais pour les Grecs, il n'était pas question d'infini ni de limite, encore moins, bien sûr, de sommer une série.

Éléments, Livre IX, Proposition 35

Euclide (ca 325–265 av. J.-C.)

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui.

$$\frac{ar-a}{a} = \frac{ar^n - a}{a + ar + \cdots + ar^{n-1}}$$

$$1 + r + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

4 Zénon d'Élée distinguant la vérité

Zénon d'Élée vivait du temps de Socrate, au cinquième siècle avant notre ère. Platon le met en scène dans un de ses dialogues.

« Zénon et Parménide arrivèrent à Athènes pour les grandes Panathénées. Parménide, déjà vieux et blanchi par les années (il avait près de soixante-cinq ans), était beau encore et de l'aspect le plus noble. Zénon approchait de la quarantaine : c'était un homme bien fait, d'une figure agréable, et il passait pour être très aimé de Parménide. »

Méchante langue, va ! Heureusement que Plutarque est là pour sauver la réputation de Zénon.

Zénon d'Élée distinguant la vérité

Fresque, Palais de l'Escorial, Madrid

5 L'homme aux deux langues

« Périclès assista aussi aux leçons de Zénon d'Élée, physicien de l'école de Parménide. Zénon portait, dans la controverse, une force de raisonnement, ou plutôt une subtilité d'arguties, qui embarrassait tous ses adversaires ; c'est pourquoi Timon le Phliasien a dit de lui : « L'homme aux deux langues, puissance infaillible ; Zénon, vainqueur dans toute dispute ». »

En quoi consistaient ces arguties si subtiles ? Il y avait entre autres, les paradoxes que rapporte Aristote.

L'homme aux deux langues

Plutarque, Vies des hommes illustres

Périclès assista aussi aux leçons de Zénon d'Élée, physicien de l'école de Parménide. Zénon portait, dans la controverse, une force de raisonnement, ou plutôt une subtilité d'arguties, qui embarrassait tous ses adversaires ; c'est pourquoi Timon le Phliasien a dit de lui : « L'homme aux deux langues, puissance infaillible ; Zénon, vainqueur dans toute dispute. »

6 le mobile doit passer par les intermédiaires

« Zénon avait contre l'existence du mouvement quatre arguments, qui ne laissent pas que d'embarrasser ceux qui essaient de les réfuter en règle. Le premier raisonnement reposait sur ceci que le mobile doit passer par les intermédiaires avant d'arriver à la fin ; et les intermédiaires étant en nombre infini, Zénon en concluait que jamais le mobile ne pourrait les parcourir. »

le mobile doit passer par les intermédiaires

Aristote, Physique, Livre VI, Chapitre XIV

Zénon avait contre l'existence du mouvement quatre arguments, qui ne laissent pas que d'embarrasser ceux qui essaient de les réfuter en règle. Le premier raisonnement reposait sur ceci que le mobile doit passer par les intermédiaires avant d'arriver à la fin ; et les intermédiaires étant en nombre infini, Zénon en concluait que jamais le mobile ne pourrait les parcourir.

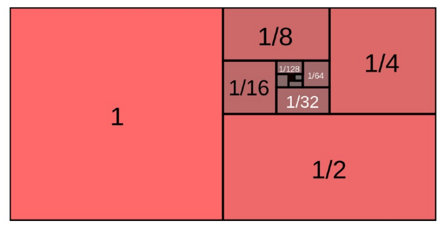
7 Paradoxe de la dichotomie

Ce premier paradoxe s'appelle habituellement « paradoxe de la dichotomie ». Tirez une flèche contre un arbre. Avant d'atteindre l'arbre, la flèche devra parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la moitié qui reste, etc. jusqu'à l'infini. Puisqu'il y a une infinité de points à atteindre, il faut une infinité d'instants pour les parcourir, donc la flèche n'atteindra jamais l'arbre. Résoudre ce paradoxe, en écrivant que des termes en nombre infini peuvent avoir une somme finie, va prendre à peu près vingt siècles.

Continuons dans la Physique d'Aristote.

Paradoxe de la dichotomie

Zénon d'Élée (ca 490–430 av. J.-C.)



$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

8 Le second sophisme de Zénon, qu'on appelle l'Achille

« Le second sophisme de Zénon, qu'on appelle l'Achille, n'est pas plus fort. Il consiste à prétendre que jamais un coureur plus lent, une fois qu'il est en marche, ne pourra être rejoint par un coureur plus rapide, attendu que le poursuivant doit, de toute nécessité, passer d'abord par le point d'où est parti celui qui fuit sa poursuite, et que le plus lent conservera toujours une certaine avance, quoique fasse l'autre. Toujours entre les deux il y a une différence qui deviendra de plus en plus petite à l'infini, mais qui ne deviendra jamais nulle. »

Même s'il n'est pas très clair sur la solution, Aristote a parfaitement compris que le paradoxe de l'Achille et celui de la dichotomie revenaient au même.

Le second sophisme de Zénon, qu'on appelle l'Achille

Aristote, Physique, Livre VI, Chapitre XIV

Le second sophisme de Zénon, qu'on appelle l'Achille, n'est pas plus fort. Il consiste à prétendre que jamais un coureur plus lent, une fois qu'il est en marche, ne pourra être rejoint par un coureur plus rapide, attendu que le poursuivant doit, de toute nécessité, passer d'abord par le point d'où est parti celui qui fuit sa poursuite, et que le plus lent conservera toujours une certaine avance, quoique fasse l'autre. Toujours entre les deux il y a une différence qui deviendra de plus en plus petite à l'infini, mais qui ne deviendra jamais nulle.

9 théorie de la divisibilité infinie

« Ce raisonnement revient à la théorie de la divisibilité infinie, qui consiste à prendre toujours la moitié, puis la moitié de la moitié, puis la moitié de cette moitié nouvelle, et ainsi à l'infini. La seule différence, c'est que dans l'Achille ce n'est pas par des moitiés successives que l'on procède. On affirme d'une manière plus générale que le plus lent ne peut être atteint par le plus rapide ; mais c'est cependant la même chose que dans une division à l'infini par moitiés, puisque de part et d'autre on conclut toujours qu'on ne peut arriver à épuiser la grandeur, quelle que soit d'ailleurs la manière dont on la partage. »

théorie de la divisibilité infinie

Aristote, Physique, Livre VI, Chapitre XIV

Ce raisonnement revient à la théorie de la divisibilité infinie, qui consiste à prendre toujours la moitié, puis la moitié de la moitié, puis la moitié de cette moitié nouvelle, et ainsi à l'infini. La seule différence, c'est que dans l'Achille ce n'est pas par des moitiés successives que l'on procède. On affirme d'une manière plus générale que le plus lent ne peut être atteint par le plus rapide ; mais c'est cependant la même chose que dans une division à l'infini par moitiés, puisque de part et d'autre on conclut toujours qu'on ne peut arriver à épuiser la grandeur, quelle que soit d'ailleurs la manière dont on la partage.

10 Achille aux pieds rapides

Dans l'Iliade, Achille est le meilleur guerrier des Achéens. Il est toujours « aux pieds rapides », ou bien « aux pieds légers ». Il n'est pas étonnant qu'il soit le symbole de la rapidité pour Aristote, quatre siècles plus tard.

Achille aux pieds rapides
Homère, Iliade (ca 800 av. J.-C.)

11 La tortue et le lièvre

Par contre, Aristote ne nomme pas le plus lent. Le rôle n'a été officiellement attribué à la tortue que longtemps après. Pourtant, Aristote connaissait probablement la fable du lièvre et de la tortue d'Ésope. La voici, plus de deux millénaires avant La Fontaine.

« Le lièvre considérant la tortue qui marchait d'un pas tardif, et qui ne se traînait qu'avec peine, se mit à se moquer d'elle et de sa lenteur. La tortue n'entendit point raillerie, et lui dit d'un ton aigre, qu'elle le défiait, et qu'elle le vaincrait à la course, quoiqu'il se vantât fièrement de sa légèreté. Le lièvre accepta le défi. Ils convinrent ensemble du lieu où ils devaient courir, et du terme de leur course. Le renard fut choisi par les deux parties pour juger ce différend. La tortue se mit en chemin, et le lièvre à dormir, croyant avoir toujours du temps de reste pour atteindre la tortue, et pour arriver au but avant elle. Mais enfin elle se rendit au but avant que le lièvre fut éveillé. Sa nonchalance l'exposa aux railleries des autres animaux. Le renard, en juge équitable, donna le prix de la course à la tortue.

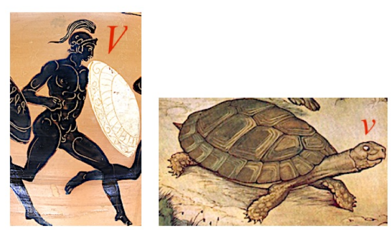
La tortue et le lièvre
Ésope, (ca 620–564 av. J.-C.)

12 Paradoxe d'Achille et la tortue

Voici la vision moderne du paradoxe. Disons que la vitesse d'Achille aux pieds légers est un très grand V, et que celle de la tortue aux pas tardifs, qui a un kilomètre d'avance, est un tout petit v. Le paradoxe dit qu'à l'instant un sur grand V, Achille est arrivé au point de départ de la tortue, qui est déjà v sur grand V plus loin. Il faut petit v sur grand V^2 à Achille pour la rejoindre, mais elle est déjà petit v^2 sur grand V^2 plus loin, etc.

Si vous sommez la série, vous trouvez un sur $V - v$. Un argument beaucoup plus simple, consiste à dire que l'avance de la tortue fond à la vitesse V moins v, et qu'elle est donc nulle à l'instant $1/(V - v)$.

Paradoxe d'Achille et la tortue
Zénon d'Élée (ca 490–430 av. J.-C.)



$$\frac{1}{V} + \frac{v}{V^2} + \frac{v^2}{V^3} + \ldots = \frac{1}{V - v}$$

13 Chien poursuivant un lièvre

Les problèmes de poursuite sont un classique des récréations mathématiques. Dans le liber Abaci de Fibonacci, au début du treizième siècle, un chien poursuit un renard. Longtemps avant, dans les propositions pour affûter la jeunesse d'Alcuin, c'est un lièvre que le chien poursuivait. Voici la traduction.

« Il est un champ qui mesure 150 pieds de long. Un chien était à un bout et un lièvre à l'autre. Le chien courait derrière le lièvre. Mais tandis que le chien parcourait 9 pieds à chaque saut, le lièvre n'en faisait que 7. Que dise celui qui veut, combien de pieds et combien de sauts fit le chien en poursuivant le lièvre jusqu'à ce qu'il l'attrape. »

Peut-être à cause de la popularité des problèmes de poursuite, le paradoxe d'Achille a longtemps continué à fasciner. Le voici dans un magazine d'amateurs du siècle des Lumières.

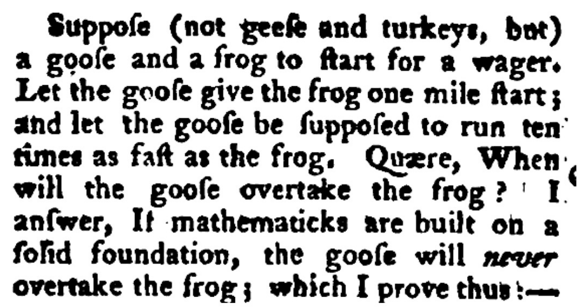
Chien poursuivant un lièvre
The British Library, Manuscrit Harley 128 (XIIIe siècle)

14 a goose and a frog

« Supposez qu'une oie et une grenouille se lancent dans un pari. Disons que l'oie laisse à la grenouille un mile d'avance, et qu'elle soit supposée courir dix fois plus vite que la grenouille. On demande : quand l'oie rattrapera-t-elle la grenouille ? Je réponds que si les mathématiques sont bâties sur une fondation solide, l'oie ne rattrapera jamais la grenouille ; ce que je prouve ainsi… »

Et l'auteur donne sa version actualisée du vieux paradoxe de Zénon. Le mois suivant, la réponse d'un autre lecteur arrive. Il explique sa solution avec une série infinie, et ne semble pas en envisager d'autre.

a goose and a frog
London Magazine, or Gentleman's Monthly Intelligencer, (June 1760)



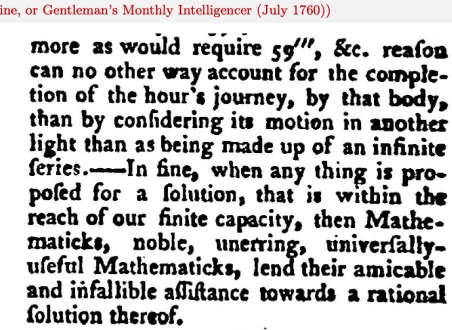
Suppoſe (not geeſe and turkeys, but) a gooſe and a frog to ſtart for a wager. Let the gooſe give the frog one mile ſtart; and let the gooſe be ſuppoſed to run ten times as faſt as the frog. Quære, When will the gooſe overtake the frog? I anſwer, If mathematicks are built on a ſolid foundation, the gooſe will *never* overtake the frog; which I prove thus:—

15 universally-useful Mathematicks

« La raison ne peut pas rendre compte du trajet d'une heure, autrement qu'en considérant qu'elle est faite d'une série infinie. Et enfin, quand quelque question que ce soit nous est proposée, qui soit dans nos capacités finies, alors les mathématiques, nobles, sûres, universellement utiles, offrent leur amicale et infaillible assistance pour nous guider vers une solution rationnelle. »

Vous voulez essayer l'amicale et infaillible assistance des mathématiques ? Voici une version moderne du paradoxe.

universally-useful Mathematicks
London Magazine, or Gentleman's Monthly Intelligencer (July 1760))



more as would require 59‴, &c. reaſon can no other way account for the completion of the hour's journey, by that body, than by conſidering its motion in another light than as being made up of an infinite ſeries.—In fine, when any thing is propoſed for a ſolution, that is within the reach of our finite capacity, then Mathematicks, noble, unerring, univerſally-uſeful Mathematicks, lend their amicable and infallible aſſiſtance towards a rational ſolution thereof.

16 Two bicyclists and a fly

« Deux bicyclettes partent à vingt miles de distance et se dirigent l'une vers l'autre, chacune roulant à 10 miles par heure. En même temps, une mouche qui vole à 15 miles par heure part de la roue de la première bicyclette et vole jusqu'à la seconde, puis fait demi-tour et vole jusqu'à la roue de la première bicyclette, et continue ainsi jusqu'à ce qu'elle soit écrasée entre les deux roues. Question : quelle distance la mouche a-t-elle couverte ? »

Vous avez reconnu un problème de poursuite. Il y a deux manières de le résoudre, la courte et la longue. La longue consiste à calculer la distance parcourue dans la première ligne droite, puis dans la seconde, etc., puis à sommer la série géométrique obtenue. La courte consiste à remarquer que la mouche vole pendant l'heure que les bicyclettes mettent à se rencontrer, donc sur 15 miles.

Two bicyclists and a fly
P. Halmos, The legend of John von Neumann (1973)

Two bicyclists start twenty miles apart and head toward each other, each going at a steady rate of 10 m.p.h. At the same time a fly that travels at a steady 15 m.p.h., starts from the front wheel of the southbound bicycle and flies to the front wheel of the northbound one, then turns around and flies to the front wheel of the southbound again, and continues in this manner till he is crushed between the two front wheels. Question : what total distance did the fly cover ?

17 sum the infinite series

« Quand on posa la question à von Neumann, il la résolut en un instant, décevant celui qui la lui avait posée. « Oh, vous connaissiez déjà l'astuce ! » « Quelle astuce ? » demanda von Neumann ; « tout ce que j'ai fait, c'est sommer la série entière ». »

sum the infinite series
P. Halmos, The legend of John von Neumann (1973)

When the question was put to von Neumann, he solved it in an instant, and thereby disappointing the questionner : "Oh, you must have heard the trick before !" "What trick ?" asked von Neumann ; "all I did was sum the infinite series."

18 John von Neumann (1903–1957)

Von Neumann était au dire de tous ceux qui l'ont connu, un des esprits les plus brillants du vingtième siècle : une mémoire et une rapidité plus qu'impressionnantes. Paul Halmos, qui a été son assistant, rapporte cette histoire, non pas comme véridique, mais comme plausible. Il dit aussi un peu plus loin : « Nous pouvons tous penser clairement, plus ou moins, pendant un certain temps ; mais la clarté de pensée de von Neumann était, en permanence, de plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle de la plupart d'entre nous ».

John von Neumann (1903–1957)

19 Archimedis quadrata parabolei

En fait de penser plus clairement que la plupart d'entre nous, on n'a guère fait mieux au fil des siècles, qu'Archimède. Son premier grand succès est la quadrature de la parabole. Écoutez son énoncé.

« En ce qui concerne le segment compris entre une droite et une parabole, nous savons qu'aucun des géomètres anciens n'en a cherché la quadrature, que nous avons trouvée maintenant ; nous démontrons, en effet, que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment. »

Archimedis quadrata parabolei

Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

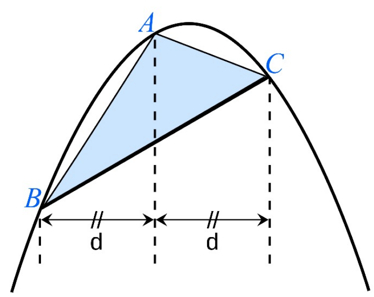
20 Quadrature de la parabole

Ce que veut dire Archimède, c'est la chose suivante. Considérez le triangle ABC, incrit dans une parabole. Ce n'est pas n'importe quel triangle. Le point A est tel que la tangente à la parabole passant par A est parallèle au segment BC. Les projections de A, B, et C parallèlement à l'axe de la parabole déterminent deux segments égaux.

Archimède affirme que l'aire du segment de parabole au-dessus du segment BC est les quatre tiers de l'aire du triangle ABC. Comment s'y prend-il ? Il commence par donner un argument mécanique à base d'équilibres et de centres de gravité. Puis il donne une démonstration géométrique, basée sur un découpage infini.

Quadrature de la parabole

Archimède (287–212 av. J.-C.)

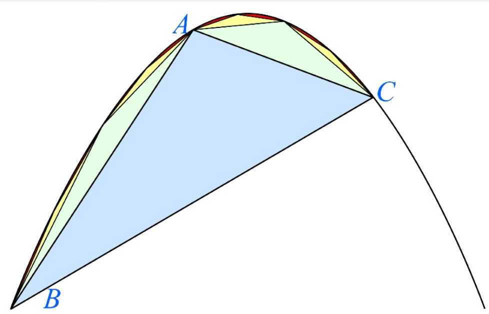


21 Quadrature de la parabole

L'étape clé consiste à itérer la construction sur les deux segments AB et AC. On obtient ainsi les deux triangles verts. Archimède démontre que l'aire cumulée de ces deux triangles verts est le quart de l'aire du triangle bleu. À l'étape suivante, on obtient quatre triangles jaunes dont les aires cumulées sont le seizième de l'aire du triangle bleu.

Quadrature de la parabole

Archimède (287–212 av. J.-C.)



22 Quadrature de la parabole

Le rapport cherché est la somme de la série géométrique de premier terme un et de raison un quart, qui est bien quatre tiers.

Mais pour Archimède, il n'était pas question de sommer une série infinie. Fidèle à la méthode d'exhaustion, il construit un encadrement, puis termine par une double démonstration par l'absurde, en montrant que le rapport ne peut pas être ni plus grand, ni plus petit que quatre tiers.

Quadrature de la parabole

Archimède (287–212 av. J.-C.)

$$\begin{aligned}\text{Parabole} &= \text{Triangle} \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right)\\ &= \text{Triangle} \times \left(\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

23 Calculateurs d'Oxford, Merton College (XIV$^{\text{e}}$ siècle)

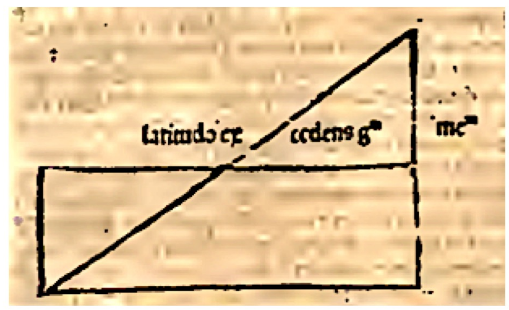
Calculateurs d'Oxford, Merton College (XIV$^{\text{e}}$ siècle)
Swineshead, Heytesbury, Bradwardine, Dumbleton

Je vous raconte ailleurs comment au quatorzième siècle, les calculateurs d'Oxford, en prolongeant la pensée d'Aristote sur le mouvement, avaient compris les rapports fonctionnels entre distance, vitesse et accélération.

24 Théorème de Merton (ca. 1350)

Leur réalisation la plus marquante est d'avoir trouvé que dans un mouvement uniformément accéléré, la distance parcourue est la même que si la vitesse avait été constante et égale à la moyenne des deux vitesses de départ et d'arrivée. C'est le théorème de Merton. Vous en voyez la justification dans un livre attribué à Swineshead, qui était le plus connu des calculateurs d'Oxford. Mais l'image est trompeuse, elle date de bien après Swineshead.

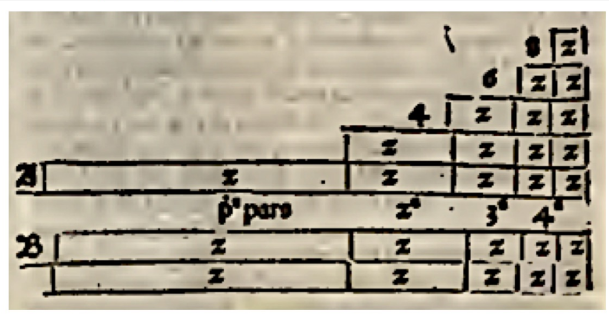
Théorème de Merton (ca. 1350)
Richard Swineshead, Calculator (1520)



En fait la justification que les calculateurs d'Oxford donnaient de ce résultat était un argument de dichotomie, basé sur une somme de série géométrique. Ils disaient que si on doublait l'intervalle de temps d'un mouvement accéléré, la distance parcourue serait multipliée par quatre, ou encore que la distance dans la seconde moitié serait le triple de la première. Ils divisaient ensuite l'intervalle de temps exactement comme dans le paradoxe de dichotomie : la moitié, puis la moitié de cette moitié, etc.

25 Somme de série (ca. 1350)

Somme de série (ca. 1350)
Richard Swineshead, Calculator (1520)



Dans leurs expériences de pensée sur les mouvements et les vitesses variables, ils se sont posé aussi des problèmes plus compliqués.

Voici l'énoncé correspondant à la figure que vous voyez.

« Si un point se meut à une vitesse constante durant la première moitié d'un intervalle de temps, durant le quart suivant de l'intervalle de temps à une vitesse double de la vitesse initiale, durant le huitième suivant de l'intervalle à une vitesse triple, etc. jusqu'à l'infini ; alors la vitesse moyenne durant l'intervalle de temps total sera le double de la vitesse initiale. »

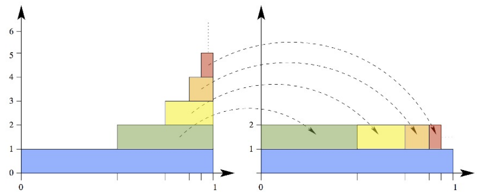
26 Somme de série (ca. 1350)

Voici quasiment la même figure, accompagnée de l'écriture moderne. Il s'agit de la toute première somme de série non-géométrique de l'histoire.

La somme est la surface de l'escalier coloré de gauche, que vous pouvez découper horizontalement comme sur la figure : un plus un demi, plus un quart, etc., ou bien verticalement, ce qui donne le problème initial : un demi plus deux fois un quart, plus trois fois un huitième, etc. Rearranger les rectangles en deux couches fait apparaître la somme, égale à deux. Élégant, non ?

Somme de série (ca. 1350)

Richard Swineshead (ca 1300–1354)



$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 2$$

27 Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667)

On ne fera pas réellement mieux jusqu'à cet homme, Grégoire de Saint-Vincent : un Jésuite flamand né à Bruges, qui a vécu l'époque troublée de la guerre de trente ans, comme Descartes. Son livre majeur s'intitule : « œuvre géométrique sur les quadratures du cercle et des sections coniques. » Il a été publié dix ans après la géométrie de Descartes, mais les résultats datent probablement des années 1620. C'est un travail gigantesque, plus de mille deux cent pages avec des milliers d'illustrations et de propositions. Il réalise un trait d'union entre les méthodes de quadrature d'Archimède et le calcul intégral qui n'arrivera qu'à la fin du siècle.

En apparence il reste fidèle à la méthode d'exhaustion avec double démonstration par l'absurde. C'est d'ailleurs de ce livre que vient la dénomination « méthode d'exhaustion ».

Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667)

Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni (1647)

28 Opus geometricum quadraturæ circuli (1647)

Le problème est l'ambition affichée dans le titre et dans ce frontispice ronflant : vous voyez un rayon de lumière passer à travers un cadre carré pour s'arrondir à droite : la quadrature du cercle, rien de moins ! Évidemment les contemporains n'ont pas manqué de critiquer. Connaissant Descartes, vous imaginez bien qu'il n'allait pas se priver.

Opus geometricum quadraturæ circuli (1647)

Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667)

29 Lettre à Schooten (9 avril 1649)

Lettre à Schooten (9 avril 1649)
René Descartes (1596–1650)

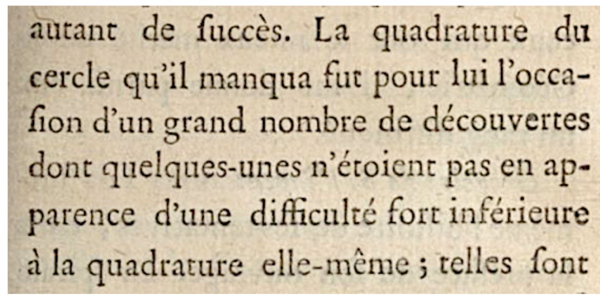
Ie ne vous renuoye pas encore vos Liures, pour ce que ie n'ay pas eu le temps de les lire ; Mais i'en ai assez veu pour remarquer vn paralogisme dans la quadrature du cercle prétenduë ; & ie n'ay encore rien rencontré dans tout ce gros Liure, sinon des propositions si simples & si faciles, que l'Autheur me semble auoir merité plus de blasme d'avoir employé son temps à les écrire, que de gloire de les auoir inuentées.

« Je ne vous renvoie pas encore vos livres, parce que je n'ai pas eu le temps de les lire ; Mais j'en ai assez vu pour remarquer un paralogisme dans la quadrature du cercle prétendue ; et je n'ai encore rien rencontré dans tout ce gros livre, sinon des propositions si simples et si faciles, que l'auteur me semble avoir mérité plus de blâme d'avoir employé son temps à les écrire, que de gloire de les avoir inventées. »

La postérité a été moins sévère. Montucla, qui n'épargne pourtant pas les quadrateurs ordinaires, fait une exception pour Grégoire de Saint-Vincent.

30 l'occasion d'un grand nombre de découvertes

l'occasion d'un grand nombre de découvertes
Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle (1754)


autant de succès. La quadrature du cercle qu'il manqua fut pour lui l'occasion d'un grand nombre de découvertes dont quelques-unes n'étoient pas en apparence d'une difficulté fort inférieure à la quadrature elle-même ; telles sont

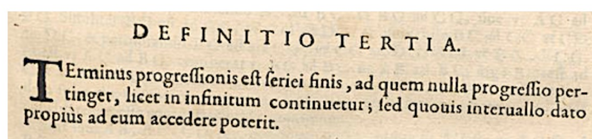
« La quadrature du cercle qu'il manqua fut pour lui l'occasion d'un grand nombre de découvertes dont quelques unes n'étaient pas en apparence d'une difficulté fort inférieure à la quadrature elle-même. »

On dirait que Montucla paraphrase Leibniz, qui avait écrit : « Si Grégoire de Saint-Vincent n'a pas résolu entièrement les quadratures du cercle et de l'hyperbole, il n'en reste pas moins qu'il a livré beaucoup de résultats remarquables. »

Le livre de Grégoire de Saint-Vincent est un de ces exemples où les recherches sur la quadrature du cercle ont servi de moteur à l'analyse toute entière.

31 Terminus progressionis

Terminus progressionis
Grégoire de Saint-Vincent, Opus geometricum (1647)


DEFINITIO TERTIA.

Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur; sed quouis interuallo dato propiùs ad eum accedere poterit.

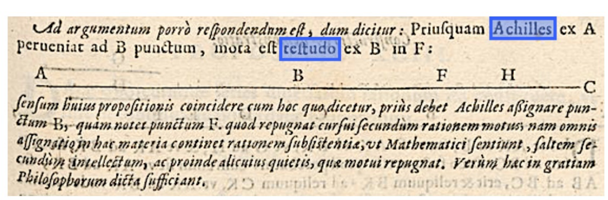
La seconde partie du livre porte entièrement sur les progressions géométriques. On y trouve en particulier cette définition troisième.

« Le terme d'une progression est la fin des séries, à laquelle aucune progression ne peut aboutir, s'il est permis de la poursuivre à l'infini ; mais à laquelle on peut accéder plus près que n'importe quel intervalle donné. »

C'est tout simplement la première définition de limite de l'histoire !

32 Achilles et testudo

Achilles et testudo
Grégoire de Saint-Vincent, Opus geometricum (1647)


Ad argumentum porrò respondendum est, dum dicitur : Priusquam Achilles ex A perueniat ad B punctum, mota est testudo ex B in F:

sensum huius propositionis coincidere cum hoc quo dicetur, priùs debet Achilles assignare punctum B, quàm notet punctum F. quod repugnat cursui secundùm rationem motus; nam omnis assignatio in hac materia continet rationem subsistentiæ, vt Mathematici sentiunt, saltem secundùm intellectum, ac proinde alicuius quietis, quæ motui repugnat. Verùm hac in gratiam Philosophorum dicta sufficiant.

Un peu plus loin, Saint-Vincent résout clairement le paradoxe d'Achille et la tortue, en distinguant la progression géométrique de la progression arithmétique des entiers numérotant les instants.

« Le discours captieux de Zénon engendre des désagréments en ne considérant pas de différence, entre les deux progressions qu'il imagine dans le double cours de son argumentation ; l'une, en effet, est une progression arithmétique, l'autre géométrique. »

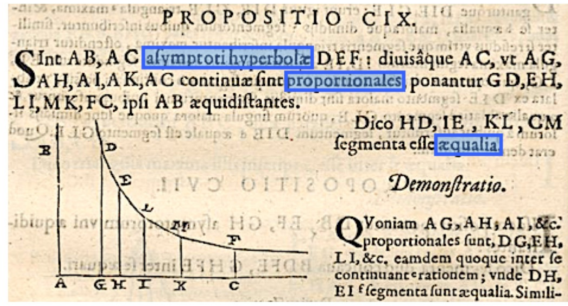
Mais il y a plus dans ce livre :

33 Proposition CIX

La sixième partie est consacrée aux hyperboles. On y trouve ce résultat crucial : si des abscisses sont en progression géométrique, alors les aires entre l'hyperbole et son asymptote sont en progression arithmétique. Concrètement, vous le voyez sur la figure, Saint-Vincent prend sur l'asymptote des points G, H, I, K, telles que les distances à A soient en progression géométrique. Il démontre alors que les aires des quadrilatères $GHDE$, $HIEL$ etc. sont égales.

Saint-Vincent manque de peu d'affirmer que l'aire sous un segment d'hyperbole est le logarithme d'un rapport d'abscisses, c'est-à-dire pour nous qu'une primitive de $1/x$ est $\log(x)$. Mais à l'époque où il écrit cela, les logarithmes sont encore d'invention récente, et assez peu répandus.

Proposition CIX
Grégoire de Saint-Vincent, Opus geometricum (1647)



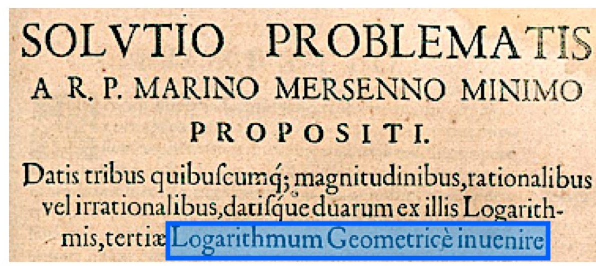
34 Solutio problematis (1649)

Deux ans plus tard, un des élèves de Saint-Vincent, jésuite également, publie cette « Solution aux problèmes proposés par le Père Mersenne ». C'est une réponse aux critiques que les quadratures de Saint-Vincent avait suscitées, non seulement de la part de Mersenne et Descartes, mais aussi Huygens et Roberval.

Vous le voyez sur le sous-titre, Sarasa résout le problème consistant à construire géométriquement le logarithme d'une quantité, connaissant celui de deux autres. La solution passe par une hyperbole, et l'identification d'une surface entre la courbe et l'asymptote avec un rapport de logarithmes. C'est bien la toute première primitive de l'histoire, et même si ce n'est pas lui qui l'a publiée, il est probable que Grégoire de Saint-Vincent en était conscient.

Le demi-siècle suivant verra le triomphe des séries infinies, avec Newton, Leibniz et les frères Bernoulli : outil de calcul numérique, ou bien de résolution des équations différentielles, les séries sont partout. Au début du dix-huitième siècle, une autre application, plus marginale, commence à se développer : les probabilités et les jeux de hasard.

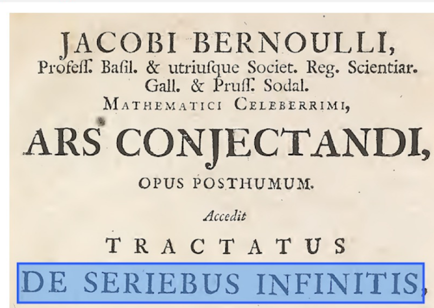
Solutio problematis (1649)
Alfonso Antonio de Sarasa (1618–1667)



35 Ars conjectandi (1713)

Le livre fondateur de la discipline est l'Art de Conjecturer de Jacob Bernoulli, publié à titre posthume en 1713. Voyez la page de titre : « on y a ajouté un traité sur les séries infinies ».

Ars conjectandi (1713)
Jacob Bernoulli (1654–1705)



36 in seriem infinitam geometricè proportionalium

Bien sûr, dans ce traité sur les séries infinies, on retrouve les séries géométriques. Regardez les deux premières lignes : la somme de la progression géométrique commençant à l sur m, de raison n sur m est l sur $m-n$. Quand Bernoulli écrit cela, il est implicite que le dénominateur est positif, donc que m est supérieur à n.

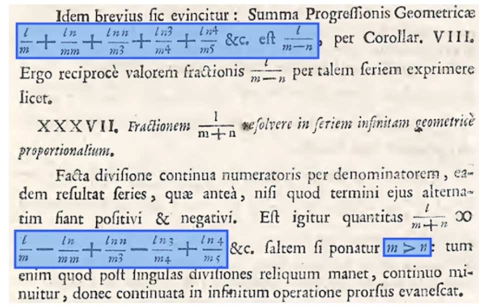
Regardez ensuite la proposition 37 qui suit. Elle demande de résoudre en la série infinie d'une progression géométrique, la fraction l sur $m+n$. Le résultat est une série géométrique avec des signes alternés, « pourvu que m soit strictement supérieur à n ».

C'est la première fois dans l'histoire que l'on se préoccupe de donner une condition pour la convergence d'une série. Il faudra encore un bon siècle pour en arriver à une formulation rigoureuse.

Bernoulli termine son traité par un magnifique poème, qui résume à lui tout seul le paradoxe des séries infinies dont la somme est finie.

in seriem infinitam geometricè proportionalium

Jacob Bernoulli, Ars conjectandi (1713)



Idem brevius sic evincitur : Summa Progressionis Geometricæ $\frac{l}{m}+\frac{ln}{mm}+\frac{lnn}{m3}+\frac{ln3}{m4}+\frac{ln4}{m5}$ &c. est $\frac{l}{m-n}$, per Corollar. VIII. Ergo reciprocè valorem fractionis $\frac{l}{m-n}$ per talem seriem exprimere licet.

XXXVII. *Fractionem $\frac{1}{m+n}$ resolvere in seriem infinitam geometricè proportionalium.*

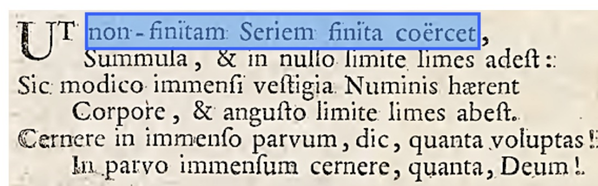
Facta divisione continua numeratoris per denominatorem, eadem resultat series, quæ anteà, nisi quod termini ejus alternatim fiant positivi & negativi. Est igitur quantitas $\frac{l}{m+n}$ ∞ $\frac{l}{m}-\frac{ln}{mm}+\frac{lnn}{m3}-\frac{ln3}{m4}+\frac{ln4}{m5}$ &c. saltem si ponatur $m>n$: tum enim quod post singulas divisiones reliquum manet, continuo minuitur, donec continuata in infinitum operatione prorsus evanescat.

37 In parvo immensum cernere

In parvo immensum cernere

Jacob Bernoulli, Ars conjectandi (1713) Traduction Chantal Marnat

De même que la série qui est non-limitée, une petite somme la renferme entièrement,
Et de même que de la limite est présente dans ce qui n'a aucune limite
Ainsi des traces de l'infini Divin sont attachées à un corps mesurable
Et la limite est absente de ce qui est étroitement limité
Reconnaître dans l'infini le petit, quelle volupté
Et quelle volupté de reconnaître dans le petit, Dieu infini !



UT non-finitam Seriem finita coërcet,
Summula, & in nullo limite limes adest :
Sic modico immensi vestigia Numinis hærent
Corpore, & angusto limite limes abest.
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas !
In parvo immensum cernere, quanta, Deum !

38 références

références

Eh voilà : Achille a fini par rattraper Jacob Bernoulli ! Je vais vous dire, ce n'est pas étonnant. Pour excuser les nombreux retards dans sa correspondance et ses publications, Bernoulli avouait, je le cite : « une lenteur innée à écrire et une paresse peu ordinaire ». Von Neumann dans le rôle d'Achille, Jacob Bernoulli dans celui de la tortue, vous imaginez le paradoxe ?

- C. H. Edwards (1979) *The historical development of the calculus*, New York : Springer
- M. Fréchet (2006) Achille ne rattrapera jamais la tortue, *Bulletin de l'APMEP*, 463, 277–288
- J. Friberg (2007) *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts*, Berlin : Springer
- J.-P. Le Goff (1990) De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent, *in E. Barbon ed, La démonstration mathématique dans l'histoire*, Villeurbanne : IREM de Lyon, 197–220
- J. Sesiano (2014) *Récréations mathématiques au Moyen-Âge*, Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes