

0 La combinatoire des dés

Jouer, et en particulier jouer aux dés, cela s'est fait de tous temps, dans toutes les civilisations. L'idée n'est pas de faire l'histoire des différents jeux de dés, mais de se demander comment l'expérience des joueurs a pu amener une réflexion mathématique sur la combinatoire et sur les fréquences.

histoires de statistique

La combinatoire des dés

du Mahābhārata à Galilée



hist-math.fr

Bernard YCART

1 jouer avec...

Avant les dés cubiques, il y a eu les osselets, qui sont des astragales de mouton ou de porc. En France, les osselets sont utilisés pour des jeux d'adresse, mais il y a encore des pays où ils servent pour les jeux de hasard.

Un osselet peut tomber de quatre façons différentes, qui ne sont pas équiprobables.

jouer avec...
des osselets



2 jouer avec...

Un autre type de dé très ancien est ce coquillage, qu'on appelle porcelaine. Il peut tomber avec ouverture visible ou non. C'est donc un dé à deux faces, là encore non-équiprobables.

jouer avec...
des coquillages



3 jouer avec...

Les dés cubiques sont apparus très tôt. Sur cette image, vous voyez des dés romains.

jouer avec...
des dés



4 jouer avec...

Il y a des références au jeu de dés dans l'Odyssée. Sur ce vase grec sont représentés Achille à gauche, et Ajax, à droite. Achille annonce « j'ai fait quatre », et Ajax dit « j'ai fait deux ». C'est Achille qui gagne, grâce à l'intervention d'Athéna qui surveille la scène.

jouer avec...
Achille et Ajax



5 jouer avec...

Les dés en Inde étaient plutôt des baguettes, qui n'avaient donc que quatre faces sur lesquelles elles pouvaient tomber.

jouer avec...
des baguettes



6 Mahābhārata

L'équivalent indien de l'Odyssée est une épopée, le Mahabārata, difficile à dater exactement, mais très ancienne en tout cas. Dans le Mahabārata, ce n'est pas l'enlèvement d'Hélène qui déclenche la guerre de Troie, c'est une partie de dés.

Le méchant Shakuni attire sournoisement le roi Yudhishtira dans une partie de dés dans laquelle il va perdre toute sa fortune, son royaume, sa liberté et celle de sa compagne Draupadi. Draupadi se demande si on avait bien le droit de l'utiliser comme mise. C'est une bonne question, qui reste sans réponse.

Mahābhārata
ix^e – iv^e siècle av. JC



7 Libro de axedrez, dados e tablas (1283)

Ce livre, le livre des échecs, des dés et des tables est un magnifique témoignage sur les jeux anciens. Il a été ordonné par Alphonse X, dit Alphonse le sage.

Dès le début du treizième siècle, la Reconquista de la péninsule ibérique par les chrétiens contre les musulmans, est très avancée : il ne reste plus au sud que le royaume de Grenade.

Cet Alphonse X, qui devient roi de Castille en 1252, est parfaitement conscient de l'avance culturelle des Arabes. Il rassemble à Tolède des savants juifs, chrétiens et musulmans pour produire des traductions, soit en latin, soit comme ici en espagnol. Ce livre sur les jeux est un des derniers de son règne. Il décrit le jeu des échecs, qui est un jeu de réflexion pure, les jeux de dés qui sont des jeux de hasard pur, et ce qu'il appelle les jeux de table, qui sont les ancêtres du tric-trac et du backgammon. En quelque sorte des intermédiaires entre la réflexion et le hasard.

Voici comment le livre commence.

8 trois sages d'opinions différentes

« Comme il est dit dans les anciennes histoires de l'Inde, il était un roi qui aimait ses sages, qui les avait toujours avec lui et qui les faisait raisonner sur la nature des choses. Parmi eux, il y en avait trois qui étaient d'opinions différentes. L'un disait que l'intelligence valait mieux que la chance [...] l'autre disait que la chance valait mieux que l'intelligence. Le troisième disait qu'il valait mieux se reposer sur l'une et sur l'autre. »

9 échecs contre dés

« Quand ils eurent exposé leurs raisons scrupuleusement, le roi ordonna qu'ils amènent un exemple pour prouver ce qu'ils disaient. Celui dont l'opinion était pour l'intelligence amena un jeu d'échecs avec ses pièces pour prouver que celui qui avait plus de cervelle et d'intuition pouvait battre l'autre. Le second dont l'opinion était pour la chance amena des dés, montrant que l'intelligence n'était rien sans la chance, car il semble que ce soit par la chance que les hommes obtiennent leur bonne ou leur mauvaise fortune. Le troisième qui disait qu'il fallait s'appuyer sur les deux amena une table à jouer avec ses pièces comptées et les dés qui permettent de les déplacer pour jouer, comme il est montré dans ce livre [...] »

Libro de axedrez, dados e tablas (1283)

Alfonso x el sabio (1221-1284)



trois sages d'opinions différentes

Alfonso x el sabio (1221-1284)

Comme il est dit dans les anciennes histoires de l'Inde, il était un roi qui aimait ses sages, qui les avait toujours avec lui et qui les faisait raisonner sur la nature des choses. Parmi eux, il y en avait trois qui étaient d'opinions différentes. L'un disait que l'intelligence valait mieux que la chance [...] L'autre disait que la chance valait mieux que l'intelligence. Le troisième disait qu'il valait mieux se reposer sur l'une et sur l'autre.

échecs contre dés

Alfonso x el sabio (1221-1284)

Quand ils eurent exposé leurs raisons scrupuleusement, le roi ordonna qu'ils amènent un exemple pour prouver ce qu'ils disaient. Celui dont l'opinion était pour l'intelligence amena un jeu d'échecs avec ses pièces pour prouver que celui qui avait plus de cervelle et d'intuition pouvait battre l'autre. Le second dont l'opinion était pour la chance amena des dés, montrant que l'intelligence n'était rien sans la chance, car il semble que ce soit par la chance que les hommes obtiennent leur bonne ou leur mauvaise fortune. Le troisième qui disait qu'il fallait s'appuyer sur les deux amena une table à jouer avec ses pièces comptées et les dés qui permettent de les déplacer pour jouer, comme il est montré dans ce livre [...]

10 Libro de axedrez, dados e tablas (1283)

Sur cette illustration, vous voyez les trois sages avec leurs jeux. Celui du milieu porte un plateau avec trois dés, montrant six, trois et un.

Dans beaucoup de jeux de dés, on commence par lancer trois dés. Comme au 421 de nos jours. Quand on lance trois dés, il y a cinquante six résultats si on ne tient pas compte de l'ordre. Les résultats possibles sont énumérés dans le livre, tout comme sont évoquées les manières de tricher.

Libro de axedrez, dados e tablas (1283)

Alfonso x el sabio (1221-1284)



11 la première des manières de tricher

« Nous disons que les dés doivent être constitués de trois formes carrées de six côtés égaux, tous égaux en taille car sinon ils ne tomberont pas aussi souvent sur une face que sur une autre et ce serait plus de la tricherie que de la chance. Ainsi c'est la première des manières de tricher ; nous dirons ailleurs comment ceux qui veulent tricher fabriquent des dés pipés. »

Cet autre manuscrit annoncé sur les manières de tricher n'a pas été retrouvé, et on ignore s'il a été écrit.

Comme les autres livres écrits à Tolède à l'initiative d'Alphonse X, celui-ci est probablement issu de la compilation de plusieurs traités arabes, mais on ignore lesquels. Les Arabes ont été de grands joueurs d'échecs, et il nous reste plusieurs traités sur les échecs. Il faut dire que dans le Coran, l'interdit religieux sur les jeux de hasard est très fort. Cela explique peut-être que les traités sur les dés aient été moins nombreux.

la première des manières de tricher

Alfonso x el sabio (1221-1284)

Nous disons que les dés doivent être constitués de trois formes carrées de six côtés égaux, tous égaux en taille car sinon ils ne tomberont pas aussi souvent sur une face que sur une autre et ce serait plus de la tricherie que de la chance. Ainsi c'est la première des manières de tricher ; nous dirons ailleurs comment ceux qui veulent tricher fabriquent des dés pipés.

12 De Vetula

Il existe un autre document, antérieur au livre d'Alphonse X le sage, dans lequel il est aussi question de dés. C'est un long poème intitulé De Vetula, « La Vieille », ou les amours d'Ovide. Parce que au treizième siècle, quand on voulait écrire des choses un peu osées, il valait mieux les attribuer à un auteur latin, pour ne pas se faire accuser par l'Église, surtout quand on était soi-même religieux comme Richard de Fournival.

On trouve dans ce poème l'énumération des 56 résultats possibles quand on jette trois dés.

De Vetula

Richard de Fournival (1201-1260?)

666					1
665					2
664	655				3
663	654	555			4
662	653	644	554		5
661	652	643	553	445	6
651	642	633	552	545	7
641	632	551	542	535	8
631	622	541	532	445	9
621	531	522	441	432	10
611	521	431	422	332	11
511	421	331	223		12
411	321	222			13
311	221				14
211					15
111					16

13 De Vetula

La table 2 montre une autre manière de les énumérer, en commençant par les six résultats à trois dés identiques, puis les trente résultats à deux dés identiques, puis les vingt résultats à trois dés différents. Remarquez que les résultats contigus, sont distingués en bas.

Aussi bien le livre d'Alphonse X que le De Vetula de Fournival, prouvent que l'énumération des résultats de trois dés était connue de longue date.

Au quatorzième siècle, le poème de Fournival a été traduit en français, par un certain Jean Lefèvre. Le passage sur les dés est plutôt cryptique, et moins compréhensible que l'original latin.

De Vetula

Richard de Fournival (1201-1260?)

Tabula II.		
Omnino Similes.		
000	555	444 333 222 111
Duo Similes et tertius distinctus.		
005	004	005 002 001
550	554	555 552 551
440	445	443 442 441
330	335	334 332 331
220	225	224 223 221
110	115	114 113 112
Omnino Distinctus continui.		
054	543	432 321
Discontinui.		
042	531	031 031
Duo Continui et tertius discontinui.		
053	052	051 021 021 021
542	541	043 431 032 532

14 La vieille

« Les dés qui des bourses ôtés, ont six nombres en sept côtés ». Le sept fait sans doute allusion au fait que la somme sur deux faces opposées fait toujours sept, et on ne voit pas bien ce que veut dire la suite.

Cela prouve au moins une chose, qui est que pour Lefèvre au quatorzième siècle, l'énumération des résultats de trois dés n'allait pas de soi.

La preuve d'une source arabe se trouve dans le passage suivant.

La vieille

Jean Lefèvre (xiv^e siècle)

**Les dez qui des bourses ostez
Ont six nombres en sept costez,
Car en trois dez sont dix et huit,
Et trois du moins si com je cuid
Seize, quatorze, douze et dix,
Huit, six, quatre, point ne mesdis,
Sont trouvez tous en pareil nombre.
Et qui es dez les nonpers nombre,**

15 cest gieu nomment les anciens

« Comment les Indiens jouaient à un jeu nommé algèbre, lequel se fait par arismetique. »

« C'est un jeu que les anciens nomment Algebre et d'autres Almigrabale. »

Malgré la confusion entre les Indiens et les Arabes, on reconnaît le livre d'al-Khwarizmi, Al-Djebr oual Muqqabala, qui est devenu almigrabale. De Fournival avait donc eu accès à une traduction latine d'al-Khwarizmi.

D'autres passages expliquent pourquoi le livre est attribué à Ovide, qui vivait huit siècles avant al-Khwarizmi.

cest gieu nomment les anciens

Jean Lefèvre (xiv^e siècle)

**COMMENT LES YNDIENS JOUOIENT A UN JEU NOMMÉ
ALGEBRE, LEQUEL SE FAIT PAR
ARISMETIQUE¹.**

**Si com jouoient les Indiens,
Cest gieu nomment les anciens
Par son propre nom algebre,
Et aucuns almigrabale².**

16 ...

Voilà voilà. . .

C'est frais, charmant et primesautier, mais on comprend quand même un peu pourquoi un chanoine n'osait pas signer cela.

Euuh à propos : je suppose que vous n'avez pas besoin de moi pour la traduction ?

...

Jean Lefèvre (xiv^e siècle)

**Quant on sent dedenz la bouchette
L'alaine souefve et doucette,
Et les langues mettent ensemble,
Et moult plaist quant l'un à l'autre emble,
Et surgant la douce salive
Des dentelles, et moult avive
Les membres l'un à l'autre joindre,
Pour plus pres stimuler, et poindre
Par manieres et par figures
De oours, de trot et d'embleures,**

17 ... !

Là c'est moins frais, moins charmant et moins primesautier.
C'est même carrément gore.

Euuh : vous n'avez toujours pas besoin de moi pour la traduction j'espère ?

Bien bien bien. Et si on passait à la suite ?

... !

Jean Lefèvre (xiv^e siècle)

**Quant ilz sont prins en advoultire.
Car le mari, méu en ire,
Leur coupe, par grant violence,
Les membres portans la semence,
D'un coustel ou d'unes cisailles,
C'est assavoir les genitailles.**

18 Girolamo Cardano (1501–1576)

Le premier livre sur les jeux de dés est dû à Cardan, au seizième siècle. C'est bien le Cardan du joint de Cardan, et accessoirement de la résolution de l'équation du troisième degré.

Girolamo Cardano (1501–1576)



19 De ludo aleae

Le livre s'appelle simplement Liber de ludo aleae, livre sur le jeu de dés. Il commence par une réflexion philosophique sur le jeu en général.

De ludo aleae

Girolamo Cardano (1501–1576)



LIBER DE LVDO ALEÆ

000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

CAPVT PRIMVM.

De Ludorum generibus.



Ludo 3 conitant, aut agilitate corporis, velint Pila; aut Sobore, vt Dicon, & Ludia, aut Indulstia, vt Latruncalorum, aut fortuna, vt Aleæ propriè, & Talemus; aut

vtrouque, vt Fritillia. Indulstia autem duplex,

liat fuerit, atque id ob tres causas: Prima, quòd huiusmodi intermissio certarum aliarum laudabilis est, quàm Ludii, vt quæ vel faciat aliquis, vt Pictura, vel sit fecundum naturam, vt Musica, vel homo aliquis dicitur, vt legenda audiendove fabulæ, Historiesque. Secunda, quòd non fit sine labore, & idèd non inuitis nobis, plus temporis nobis eripiat, quàm par fit: Tempus autem, (vt Seneca aiebat) & redè dum de longitudo, & breuitate vite loquitur, res est charissima. Tertia, quòd honestus fit otium illud, & non

20 De ludo aleae

On y trouve aussi l'énumération des résultats. En haut, il s'agit des résultats de deux dés et de leur somme. On comprend que 2 et 12 s'obtiennent d'une façon, 3 et 11 de deux façons, 4 et 10 de trois façons, et cetera. Le résultat 7, 8, 18 se réfère à un autre jeu.

En-dessous, Cardan donne les énumérations sur trois dés. Vous voyez écrit verticalement sur la droite qu'il y a 216 résultats possibles. La colonne de gauche donne les tirages de somme. Il y en a 1 pour une somme de 3 ou de 18, 3 pour une somme de 4 ou de 17, jusqu'à 27 pour une somme de 10 ou de 11.

La colonne de droite porte le titre « Fritillus », qui veut dire « cornet à dé », et pas frétiller, comme vous auriez eu tendance à le croire, à cause de Fournival. C'est un autre jeu, plus compliqué que la somme.

Même si clairement Cardan sait résoudre certains problèmes de dénombrement, les mathématiques ne sont pas l'objectif principal du livre. Cardan est un joueur invétéré, il connaît son addiction, et elle lui pose quelques problèmes philosophiques.

De ludo aleae

Girolamo Cardano (1501–1576)

Confensus fortis in duabus Aleis.					
2	12	1	3	11	2
3	9	4	6	8	5
4	10	3	8	18	Ad Friti:
Confensus fortis in tribus Aleis tum Friti.					
Sortis			Fritilli.		
3	18	1	3	11	5
4	17	3	4	12	5
5	16	6	5	12	6
6	15	10	6	13	3
7	14	15	7	33	3
8	13	21	8	36	3
9	12	25	9	37	3
10	11	27	10	36	3
			11	38	3
			12	26	3

21 Dans les temps de grande peur ou chagrin

« Dans des temps de grande peur ou chagrin, quand même les plus grands esprits sont bien troublés, jouer est beaucoup plus efficace pour contrer l'anxiété qu'un jeu comme les échecs, du fait de l'attente continuelle de ce que la fortune apportera.

Dans mon propre cas, quand il me semblait après une longue maladie que la mort était proche, j'ai trouvé beaucoup de réconfort à jouer constamment aux dés. »

Dans les temps de grande peur ou chagrin

Girolamo Cardano (1501–1576)

Dans des temps de grande peur ou chagrin, quand même les plus grands esprits sont bien troublés, jouer est beaucoup plus efficace pour contrer l'anxiété qu'un jeu comme les échecs, du fait de l'attente continuelle de ce que la fortune apportera.

Dans mon propre cas, quand il me semblait après une longue maladie que la mort était proche, j'ai trouvé beaucoup de réconfort à jouer constamment aux dés.

22 sans modération, personne ne devrait jouer

« Cependant, il doit y avoir de la modération dans la quantité d'argent impliquée ; sinon, il est certain que personne ne devrait jouer.

Parmi les pertes encourues on compte l'amointrissement de la réputation, particulièrement si l'on avait un prestige considérable ; à cela s'ajoute la perte de temps, les affaires que l'on néglige, le temps passé après le jeu à chercher comment se refaire, et à se souvenir comment on a mal joué. »

sans modération, personne ne devrait jouer

Girolamo Cardano (1501–1576)

Cependant, il doit y avoir de la modération dans la quantité d'argent impliquée ; sinon, il est certain que personne ne devrait jouer.

Parmi les pertes encourues on compte l'amointrissement de la réputation, particulièrement si l'on avait un prestige considérable ; à cela s'ajoute la perte de temps, les affaires que l'on néglige, le temps passé après le jeu à chercher comment se refaire, et à se souvenir comment on a mal joué.

23 Galileo Galilei (1564–1642)

Un autre savant qui s'est intéressé au jeu de dés est Galilée. Galilée recevait des subsides de Cosme II de Médicis qui a été grand Duc de Toscane entre 1609 et 1621. Galilée lui avait donné des cours quand il avait entre 15 et 18 ans.

On suppose que ces « considérations de Galileo Galilei sur le jeu de dés », dont nous allons parler, s'adressaient à Cosme de Médicis, et on appelle le problème « le paradoxe du Duc de Toscane ». Il n'y a aucune preuve historique que ce problème vienne du Duc de Toscane, et Galilée n'y fait pas référence.

24 considerazione sopra il giuoco de dadi

Le problème est le suivant. En ajoutant les résultats de 3 dés, il y a autant de manières d'obtenir 9 ou 12 que 10 ou 11. Or comme le dit Galilée, « une longue observation fait que le 10 et le 11 sont estimés plus avantageux par les joueurs que le 9 et le 12 ».

Il y a donc une observation empirique : le 10 est plus fréquent que le 9. Entre l'observation empirique et les dénombrements déjà donnés par Cardan, il y a un pas crucial, que Galilée n'explique pas d'ailleurs, mais qu'il admet implicitement : ce pas, c'est la « Loi des Grands Nombres ». Si le 10 est plus fréquent que le 9, c'est parce qu'il y a 27 tirages parmi les 216 qui donnent 10, et seulement 25 qui donnent 9. Donc le 10 a plus de « facilité » comme le dit Galilée, c'est-à-dire une plus grande probabilité, en supposant les tirages équiprobables.

25 considerazione sopra il giuoco de dadi

Galilée donne les dénombrements, qui sont les mêmes que ceux de Cardan. Il y a effectivement 6 manières différentes d'obtenir une somme de 10, autant pour une somme de 9. Mais les multiplicités, qui sont détaillées dans les deux colonnes de gauche, ne sont pas les mêmes.

26 références

Finalement le paradoxe là-dedans, c'est que depuis des temps immémoriaux les joueurs font des observations empiriques, c'est-à-dire des stats, et des calculs de dénombrements, c'est-à-dire des probas. Mais jusqu'au dix-septième siècle, personne n'avait pensé à en faire des disciplines mathématiques.

Galileo Galilei (1564–1642)



considerazione sopra il giuoco de dadi

Galileo Galilei (1564–1642)

119 CONSIDERAZIONE DI GALILEO GALILEI SOPRA IL GIUOCO DE DADI.



He nel giuoco de i dadi alcuni punti fieno più vantaggiati di altri, vi ha la fua ragione affai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente, e più frequentemente scoprirti, che quelli, il che dipende dal poterli formare con più forte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, che in un fol modo fi possono con tre numeri comporre, cioè quelli con 6. 6. 6. e quelli con 1. 1. 1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirti, che v. g. il 6. o il 7. li quali in più maniere fi componono, cioè il 6. con 1. 2. 3. e con 2. 2. 2. e con 1. 1. 4. ed il 7. con 1. 1. 5. 1. 2. 4. 1. 3. 3. 2. 2. 3. Tuttavia ancorchè il 9. e il 12. in altrettante maniere fi componano in quante il 10. e l' 11. perlochè d' equal ufo dovriano esser reputati, si vede nondimeno, che la lunga osservazione ha fatto da i giuocatori stimarsi più vantaggiati il 10. e l' 11. che il 9. e il 12.

considerazione sopra il giuoco de dadi

Galileo Galilei (1564–1642)

	10	11	9	11	8	11	7	11	6	11	5	11	4	11	3	11
6	3	1	6	2	1	6	1	1	3	5	1	1	3	4	1	1
6	2	2	3	5	3	1	6	5	2	1	6	4	2	1	6	3
5	4	1	6	5	2	2	3	4	3	1	6	3	3	1	3	2
5	3	2	6	4	4	1	3	4	2	2	3	3	2	3	2	3
4	4	2	4	3	3	6	3	3	2	3	3	1	5	10	6	
4	3	3	3	3	3	1	3	3	3	1	2	1	1	2	1	1
2	1	6	2	1	6	1	1	3	5	1	1	3	4	1	1	3
15	21	25	27	25	21	15	10	6	3	1	0	0	0	0	0	0
108	108	108	108	108	108	108	108	108	108	108	108	108	108	108	108	108
216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216	216

références

- D. R. Bellhouse (2000) *De Vetula* : a medieval manuscript containing probability calculations *Int. Statist. Review* 68(2), 123–136
- D. R. Bellhouse (2005) Decoding Cardano's *Liber de Ludo Aleae* : *Historia Mathematica* 32(2), 180–202
- M.F. Bru, B. Bru (2018) *Les jeux de l'infini et du hasard*, Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté
- H. Cocheris (1861) *La vieille, ou Les dernières amours d'Ovide* : poème français du XIV^e siècle traduit du latin de Richard de Fournival, Paris, Aubry
- S. Muller-Golladay (2007) *Los libros de acedrez dados e tablas* : historical, artistic and metaphysical dimensions of Alfonso X's book of games *PhD dissertation, University of Arizona*