

0 Les comptes du général

L'Empereur Qin Shi Huang, fondateur de la première dynastie, s'était fait construire un mausolée gigantesque, avec 8000 soldats grandeur nature en terre cuite. Il avait aussi ordonné que tous les livres soient détruits. Évidemment ça n'a pas aidé, pour l'histoire des mathématiques chinoises.

histoires d'arithmétique

Les comptes du général

restes chinois et pulvérisateur indien



hist-math.fr

Bernard YCART

1 Han Xin (ca. 230–196 av. J.-C.)

À propos d'armée, Han Xin est un des plus grands généraux que la Chine ait connus. Quelqu'un capable de faire ou défaire un empire par sa seule vision stratégique.

Han Xin (ca. 230–196 av. J.-C.)



2 Han Xin (ca. 230–196 av. J.-C.)

Capable aussi de se laisser humilier et de ne pas chercher à se venger par la suite, capable de se souvenir d'un bienfait et de le rendre au centuple, bref un véritable héros.

Han Xin (ca. 230–196 av. J.-C.)



3 quatre à cinq cents soldats moururent

Un jour, Han Xin avait mené une armée de 1500 soldats dans une bataille, dans laquelle quatre à cinq cents soldats avaient disparu.

quatre à cinq cents soldats moururent

Han Xin (ca. 230–196 av. J.-C.)



4 il reste 1049 soldats

Quand les soldats survivants se mettaient en rang par trois, il en restait 2. Quand ils se mettaient en rang par 5, il en restait 4. Quand ils se mettaient en rang par sept, il en restait six. Han Xin dit immédiatement : « Il reste 1049 soldats ».

C'est vous dire à quel point il était fort.

J'aime bien vous raconter des légendes, mais je suis bien obligé de vous avouer qu'elles ne sont pas vraies. Celle-ci est apparue quinze bons siècles après Han Xin. Le problème mathématique qu'il résout s'appelle en Occident problème des restes chinois. Non, pas à cause de Han Xin.

il reste 1049 soldats

Han Xin (ca. 230–196 av. J.-C.)



5 Sun Zi (ca. 544–496 av. JC)

Pas non plus à cause de cet autre général, Sun Zi. Il est encore plus célèbre que Han Xin en Chine. Il a écrit un Art de la Guerre, environ cinq siècles avant notre ère.

Sun Zi (ca. 544–496 av. JC)

L'Art de la Guerre



6 Sun Zi (ca 400-460)

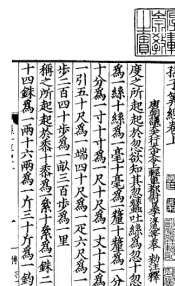
Le problème des restes chinois vient d'un homonyme du précédent, qui a vécu environ un millénaire plus tard, on ne sait pas bien quand.

Il a écrit comme vous le constatez, un livre de mathématiques, intitulé « le classique du calcul de Maître Sun ».

Bon, il va peut être falloir se faire aider pour la traduction. Voici le problème 26 du chapitre 3.

Sun Zi (ca 400-460)

Sun Zi Suan Jing



7 Combien y a-t-il d'objets ?

« Soit des objets dont on ignore le nombre. En les comptant 3 par 3 il en reste 2 ; en les comptant 5 par 5, il en reste 3 et en les comptant 7 par 7, il en reste 2. Combien y a-t-il d'objets ? »

Rien n'est précisé sur la nature des objets, mais il y a peu de chances que ce soient des soldats, vu que la réponse est 23. Les explications sont succinctes.

8 d'où la réponse

« Règle : « En comptant par 3, il en reste 2 » : poser 140 ; « En comptant par 5, il en reste 3 » : poser 63 ; « En comptant par 7, il en reste 2 » : poser 30. Faire la somme de ces 3 nombres, obtenir 233. Soustraire 210 de ce total, d'où la réponse. »

Voilà, il n'y a pas plus de détails : vous vouliez une réponse, vous l'avez. Vous pouvez vérifier, elle est correcte. Certes, ce n'est pas la seule, mais si vous connaissez un peu d'arithmétique, vous arriverez bien à retrouver pourquoi 140, 63 et 30, et d'où vient le 210 qu'il faut retrancher de la somme.

Il n'y a pas d'autre trace du problème des restes chinois en Chine, avant Yang Hui, au treizième siècle.

9 Yang Hui (ca 1238–1298)

On se sait pas grand chose de lui non plus, et ce portrait est probablement imaginaire. Il a écrit de nombreux mémoires, tous n'ont pas été conservés. On y trouve un des premiers triangles arithmétiques en Chine, et aussi quelques problèmes de restes chinois.

Yang Hui commence par reprendre mot pour mot l'énoncé et l'explication de Sun Zi. Il appelle la méthode de résolution « Découper des longueurs de tube ». Je n'ai pas bien compris pourquoi. Ensuite il donne d'autres exemples, avec un habillage plus ou moins réaliste.

Combien y a-t-il d'objets ?

Sun Zi Suan Jing (ca. 450)

Soit des objets dont on ignore le nombre. En les comptant 3 par 3 il en reste 2 ; en les comptant 5 par 5, il en reste 3 et en les comptant 7 par 7, il en reste 2. Combien y a-t-il d'objets ?

d'où la réponse

Sun Zi Suan Jing (ca. 450)

Règle : « En comptant par 3, il en reste 2 » : poser 140 ; « En comptant par 5, il en reste 3 » : poser 63 ; « En comptant par 7, il en reste 2 » : poser 30. Faire la somme de ces 3 nombres, obtenir 233. Soustraire 210 de ce total, d'où la réponse.

Yang Hui (ca 1238–1298)

Yang Hui Suan Fa



10 le nombre d'ouvriers est inconnu

« Le nombre d'ouvriers est inconnu. En les payant, on observe les variations suivantes. Quand on donne un *chin* de viande par 3 ouvriers il y a un reste fractionnaire de 5 *liang 8 chu* (c'est-à-dire un reste de deux ouvriers). Si on donne un *huan* pour cinq hommes, il y a un reste fractionnaire de 400 *wên* (c'est-à-dire un reste de trois hommes) ; quand on donne un *t'o* de vin pour 7 hommes, il n'y a pas de reste. Trouve le nombre des ouvriers et le total de ce qui leur a été payé. »

De quel genre de problème concret ces questions venaient-elles ? Certainement pas du décompte des soldats comme le voudrait la légende, ni de la paye des ouvriers comme dans cet exemple. Le vrai problème était probablement d'origine astronomique. Une question récurrente dans l'histoire de l'astronomie est la synchronisation des cycles à partir de leur origine. Pensez par exemple au décompte des jours par année de 365 jours, par mois lunaire de 28 jours, et par semaine de 7 jours. Chez les Chinois, on n'a pas retrouvé de texte prouvant l'origine astronomique. Par contre, les Indiens eux, l'ont clairement énoncée.

11 Āryabhaṭa (476–550)

La première percée en Inde, vient de Aryabhata. À l'âge de vingt-trois ans, il a écrit un traité, formé d'une suite de versets très condensés, et avouons-le, difficilement compréhensibles. Les versets 32 et 33 ont suscité une foule de traductions et d'interprétations, qui ne sont pas toujours cohérentes.

Voici le début d'une de ces traductions.

12 Āryabhaṭīya (499)

« Diviser le diviseur du plus grand reste par le diviseur du plus petit. La division mutuelle par le reste est poursuivie. Le dernier reste, ayant une quantité intelligente pour multiplicateur, est augmentée ou diminuée par la différence des restes initiaux et divisée par le dernier diviseur. »

Et cetera. Je ne vous explique pas la prise de tête pour comprendre l'algorithme. Mathématiquement, ce n'est rien de compliqué. C'est une sorte d'algorithme d'Euclide, pour résoudre l'équation $ax - by = \pm c$, où a , b , c sont des entiers positifs, de même que les inconnues x et y . L'équivalent du calcul des multiplicateurs dans le théorème de Bézout. Plus d'un siècle après Aryabhata, la procédure a été expliquée par Bhaskara I (non pas celui de la Lilavati, un autre cinq siècles avant).

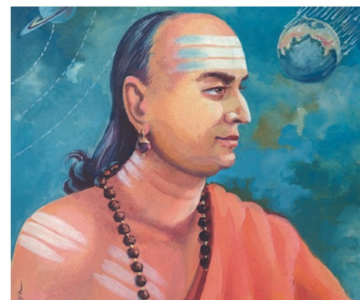
Comme l'algorithme d'Aryabhata réduisait les données initiales en nombres de plus en plus petits, ce Bhaskara lui a donné le nom de *kutṭāka*, ce qui signifie « broyeur » ou « pulvérisateur ».

le nombre d'ouvriers est inconnu

Yang Hui Suan Fa (ca 1270)

Le nombre d'ouvriers est inconnu. Quand on les paye, on observe les variations suivantes. Quand on donne un *chin* de viande par 3 ouvriers il y a un reste fractionnaire de 5 *liang 8 chu* (c'est-à-dire un reste de deux ouvriers) . Quand on donne un *huan* pour cinq hommes, il y a un reste fractionnaire de 400 *wên* (c'est-à-dire un reste de trois hommes) ; quand on donne un *t'o* de vin pour 7 hommes, il n'y a pas de reste. Trouve le nombre des ouvriers et le total de ce qui leur a été payé.

Āryabhaṭa (476–550)



Āryabhaṭīya (499)

Āryabhaṭa (476–550)

Diviser le diviseur du plus grand reste par le diviseur du plus petit. La division mutuelle par le reste est poursuivie. Le dernier reste, ayant une quantité intelligente pour multiplicateur, est augmentée ou diminuée par la différence des restes initiaux et divisée par le dernier diviseur.[...]

$$ax - by = \pm c .$$

13 Brahmagupta (ca. 598–665)

Brahmagupta a montré toute la puissance du pulvérisateur et a mis en lumière la quantité de problèmes qu'il permet de résoudre.

Brahmagupta (ca. 598–665)



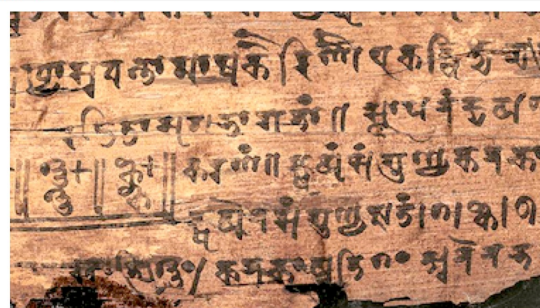
14 Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

Le chapitre dix-huit de son livre d'astronomie mathématique, est précisément intitulé « Kuttaka en algèbre ». Il y montre le fonctionnement de l'algorithme d'Aryabhata, il donne des exemples, et surtout il établit clairement la relation avec le calcul astronomique.

Le premier verset du chapitre dit : « Du fait que peu de questions se résolvent sans le pulvérisateur, je vais proposer son étude, en même temps que des problèmes ». Ce sont surtout des problèmes de cycles astronomiques qu'il propose.

Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

Brahmagupta (ca. 598–665)



15 les jours des cycles planétaires

« Celui qui trouve le cycle pour deux, trois, quatre ou plus de planètes, à partir des temps écoulés de ces planètes, connaît la méthode du pulvérisateur. »

Et il donne des exemples explicites de calcul sur les astres visibles.

« Les jours des cycles planétaires du Soleil et des autres sont : Soleil 1096, Lune 137, Mars 685; Mercure et Vénus 1096; Jupiter 10960; Saturne 10960; apogée 2740; nœud 5480. »

Bien sûr résoudre des équations de congruence avec d'aussi grands nombres n'est pas pratique, donc Brahmagupta prend un exemple plus simple.

les jours des cycles planétaires

Brahmagupta, Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

Celui qui trouve le cycle pour deux, trois, quatre ou plus de planètes, à partir des temps écoulés de ces planètes, connaît la méthode du pulvérisateur.

Les jours des cycles planétaires du Soleil et des autres sont : Soleil 1096, Lune 137, Mars 685; Mercure et Vénus 1096; Jupiter 10960; Saturne 10960; apogée 2740; nœud 5480.

16 Quel nombre, divisé par six...

« Quel nombre divisé par six, a un reste de cinq; et divisé par cinq a un reste de quatre; et par quatre, un reste de trois; et par trois, un reste de deux? »

Ce genre d'exemple va être repris par les successeurs de Brahmagupta, avec pour certains des habillages beaucoup plus pittoresques.

Quel nombre, divisé par six...

Brahmagupta, Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

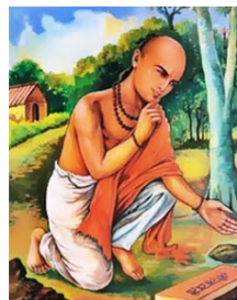
Quel nombre divisé par six, a un reste de cinq; et divisé par cinq a un reste de quatre; et par quatre, un reste de trois; et par trois, un reste de deux?

17 Mahāvīrāchārya

Et pour un habillage pittoresque, on peut toujours faire confiance à Mahavira.

Mahāvīrāchārya

IX^e siècle



18 les branches ployaient sous le poids des fruits

« À l'orée lumineuse et rafraichissante d'une forêt, il y avait de nombreux arbres, dont les branches ployaient sous le poids des fleurs et des fruits ; des arbres tels que des *Jambūs*, des bananiers plantains, des grenadiers, [...] et des manguiers. Les différentes parties de la forêt bruissaient des chants des perroquets et des coucous que l'on trouvait près de sources ornées de lotus environnés d'abeilles vrombissantes.

Un groupe de voyageurs épuisés pénétra dans cette forêt avec délice. »

On s'y croirait. Une fois planté ce décor idyllique, Mahavira le rentabilise par une bonne vingtaine d'exercices. Du style :

les branches ployaient sous le poids des fruits

Mahāvīra, *Ganita-sāra-saṅgraha*, ca. 850

À l'orée lumineuse et rafraichissante d'une forêt, il y avait de nombreux arbres, dont les branches ployaient sous le poids des fleurs et des fruits ; des arbres tels que des *Jambūs*, des bananiers plantains, des grenadiers, [...] et des manguiers. Les différentes parties de la forêt bruissaient des chants des perroquets et des coucous que l'on trouvait près de sources ornées de lotus environnés d'abeilles vrombissantes.

Un groupe de voyageurs épuisés pénétra dans cette forêt avec délice.

19 63 tas de bananes plantain

« Il y avait 63 tas de bananes plantain avec 7 fruits restants ; ils furent partagés parmi les 23 voyageurs sans qu'il y ait de reste. Dis-moi combien y avait-il de bananes dans un tas ? »

Ou encore :

« À nouveau, avec 12 tas de grenades plus 5 fruits, distribués de même entre 19 voyageurs, donne la mesure d'un tas. »

Et en changeant de fruit :

« Un voyageur voit des tas de mangues, et fait 31 tas moins 3 fruits ; quand ces 31 tas sont divisés équitablement entre 73 hommes, il n'y a pas de reste. »

Et en plus compliqué :

63 tas de bananes plantain

Mahāvīra, *Ganita-sāra-saṅgraha*, ca. 850

Il y avait 63 tas de bananes plantain avec 7 fruits restants ; ils furent partagés parmi les 23 voyageurs sans qu'il y ait de reste. Dis-moi combien y avait-il de bananes dans un tas ?

À nouveau, avec 12 tas de grenades plus 5 fruits, distribués de même entre 19 voyageurs, donne la mesure d'un tas.

Un voyageur voit des tas de mangues, et fait 31 tas moins 3 fruits ; quand ces 31 tas sont divisés équitablement entre 73 hommes, il n'y a pas de reste.

20 des tas de *Jambūs*

« Sur le chemin, les voyageurs virent des tas de *Jambūs*. Deux de ces tas furent partagés entre 9 ascètes en laissant 3 fruits de reste. À nouveau 3 tas furent partagés entre 11 personnes et le reste fut 5 fruits ; ensuite 5 de ces tas furent partagés entre 7 et il resta 4 fruits.

Ô toi, arithméticien qui connais la signification de la procédure de distribution du *kuṭṭikāra*, dis moi le compte d'un de ces tas. »

Mmmh, on en mangerait ! À côté de l'exhubérance de Mahavira, l'habillage des problèmes de restes chez les mathématiciens arabes et européens des siècles suivants paraît un peu terne.

des tas de *Jambūs*

Mahāvīra, *Ganita-sāra-saṅgraha*, ca. 850



21 combien il y avait de louis d'or

Comme ce problème vingt-trois dans les Récréations Mathématiques et Physiques de Jacques Ozanam en 1694.

« Trouver combien il y avait de louis d'or dans une bourse, qu'une personne dit avoir perdue, et qui assure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en restait toujours 1, et qu'en les comptant sept à sept, il n'en restait point. »

Le suivant est plus truculent, mais je ne sais pas de quand il date et je ne connais pas son origine.

22 la part du cuisinier

« Dix-sept pirates s'emparent d'un lot de pièces d'or toutes identiques. Leur loi exige un partage à égalité : chacun doit recevoir le même nombre de pièces d'or et, s'il en reste, elles sont attribuées au cuisinier de bord. Dans le cas présent, la part du cuisinier serait de trois pièces, mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués, ce qui porte la part du cuisinier à quatre pièces. »

23 c'est la plus petite des solutions possibles

« Au cours d'une terrible tempête, le bateau fait naufrage et ne survivent que six pirates et le cuisinier. Par bonheur, le butin est sauvé. La part du cuisinier est maintenant de cinq pièces.

Que peut espérer gagner le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste de l'équipage, sachant que c'est la plus petite des solutions possibles ? »

24 références

Ne me demandez pas pourquoi le fait d'empoisonner le reste de l'équipage est la plus petite des solutions possibles, cet énoncé n'est pas de moi. En même temps, peut-être que le cuisinier aurait mieux fait d'utiliser un pulvérisateur plutôt que du poison. Qu'en pensez-vous ?

combien il y avait de louis

Ozanam, Récréations Mathématiques et Physiques (1694)

QUESTION.

Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourse, qu'une personne dit avoir perdue, & qui assure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il n'en restoit toujours un, & qu'en les comptant sept à sept, il n'en restoit point.

la part du cuisinier

Dix-sept pirates s'emparent d'un lot de pièces d'or toutes identiques. Leur loi exige un partage à égalité : chacun doit recevoir le même nombre de pièces d'or et, s'il en reste, elles sont attribuées au cuisinier de bord. Dans le cas présent, la part du cuisinier serait de trois pièces, mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués, ce qui porte la part du cuisinier à quatre pièces.

c'est la plus petite des solutions



références

- D. Daumas, M. Guillemot, O. Keller, R. Mizrahi, M. Spiesser (2011) *Le théorème des restes chinois. Textes, commentaires et activités pour l'arithmétique au lycée*, Toulouse : IREM
- A. Keller (2006) *Expounding the mathematical seed*, 2 vol., Basel : Birkhäuser
- L. Y. Lam (1973) *A critical study of the Yang Hui Suan Fa*, Singapore : University Press
- U. Libbrecht (1973) *Chinese mathematics in the thirteen century*, Cambridge (MA) : MIT Press
- J.-C. Martzloff (1988) *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris : Masson