Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

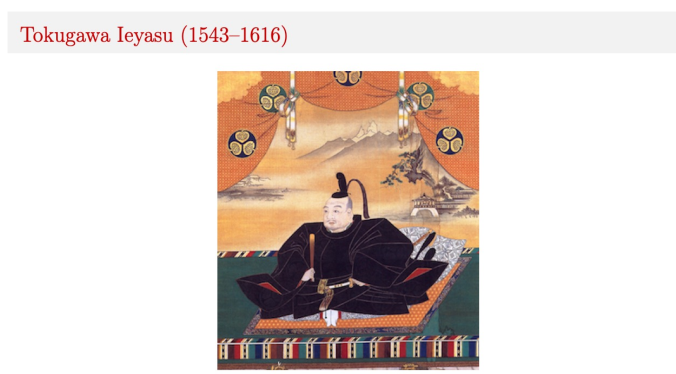
0 Image du monde flottant

Nous partons au Japon. Quelque chose me dit que vous vous l'aviez deviné : non ?

1 Bataille de Sekigahara (21 octobre 1600)

L'histoire commence par une bataille sanglante, qui s'est déroulée sous la pluie, dans la nuit du 20 au 21 octobre 1600. Je vous avoue que je n'ai pas compris grand chose à la stratégie, ni à l'interminable kyrielle de trahisons en tout genre, qui ont fait que celui qui avait débuté la bataille avec le moins de soldats, s'est retrouvé à la fin vainqueur, avec les troupes les plus nombreuses.

2 Tokugawa Ieyasu (1543–1616)



Ce vainqueur, c'est lui : Tokugawa Ieyasu. Grâce à cette victoire, et quelques autres dans les trois ans qui ont suivi, il a fondé une dynastie qui a conservé le pouvoir pendant plus de deux siècles.

3 Époque Edo (1603–1868)

Époque Edo (1603–1868)
Château d'Edo

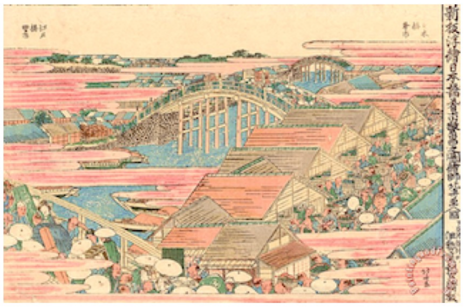
Il a instauré une nouvelle capitale dans son fief, une petite ville côtière à l'embouchure d'une rivière. La petite ville s'appelait Edo, ce qui veut dire « Estuaire » en japonais.

C'est de cette ville que vient le nom d'« époque Edo » que l'on donne à la période.

Dans le coin supérieur gauche de l'image, remarquez la silhouette caractéristique du mont Fuji.

4 Marché aux poissons à Edo

Marché aux poissons à Edo
Hokusai (1760–1849)



Devenue capitale, Edo a gardé le charme d'une petite ville côtière pendant les deux siècles suivants.

5 Pont du Japon à Edo

Pont du Japon à Edo
Hokusai (1760–1849)

Voici le célèbre pont du Japon ou « Nihon Bashi », et toujours le mont Fuji en arrière plan.

6 Rue Suruga à Edo

Rue Suruga à Edo
Hokusai (1760–1849)

Voici des artisans au travail pendant que volent quelques cerfs-volants dans la rue Suruga.

7 Tokyo

Tokyo

La petite ville, rebaptisée plus tard Tokyo, c'est-à-dire capitale de l'Est, était tout de même promise à un certain avenir.

8 Sakoku (1630–1854)

Dans l'histoire du Japon, l'époque Édo est une période de paix et de prospérité. C'est aussi une période de relatif isolement. L'influence étrangère étant perçue comme une menace, en particulier sur le plan religieux, les shoguns à partir de 1630 ont décidé l'expulsion des étrangers et l'interdiction des échanges commerciaux, donc bien sûr l'achat de livres. Le nom japonais de cet isolationisme me fait plutôt rire.

Sakoku (1630–1854)
Époque Edo

Vous voyez sur cette affiche un sumo japonais en train de mettre des Occidentaux hors du tatami. En fait la coupure n'a pas été absolue. Des échanges commerciaux ont eu lieu, en particulier avec les Hollandais, et certains livres étrangers ont pu être traduits.

Reste que la prospérité du pays, jointe à son relatif isolement, a donné naissance à une culture originale, qui aujourd'hui encore, reste associée à l'image du Japon traditionnel.

9 Yoshiwara, quartier des plaisirs à Edo

Yoshiwara, quartier des plaisirs à Edo
Hokusai (1760–1849)

Qui dit paix et prospérité, dit plaisirs et amusements divers, comme dans le quartier réservé d'Edo, appelé Yoshiwara.

10 Geisha jouant du shamisen

Geisha jouant du shamisen

Certaines de ces dames, douées pour la poésie et la musique, se sont mises à considérer que leurs fonctions pouvaient aller au-delà de ce qui était traditionnellement attendu d'elles. Elles ont développé tout un art de l'entretien et de la distraction, et sont devenues des Geishas.

11 Théâtre Kabuki

Théâtre Kabuki

D'autres parmi ces mêmes dames, ont commencé à se déguiser, en femme ou en homme, pour raconter des histoires qui faisaient rire les spectateurs, beaucoup plus que le théâtre No traditionnel.

12 Théâtre Kabuki en 1858

Théâtre Kabuki en 1858

Cela a donné naissance au théâtre Kabuki, dont le succès a dépassé l'époque Edo.

13 Bunraku

Bunraku

Le Bunraku est un autre type de théâtre inventé pendant l'époque Edo : les personnages y sont joués par des marionnettes de grandeur réelle, manipulées sur scène par les acteurs qui les tiennent à bras le corps.

14 Ukiyo-e (Image du monde flottant)

En peinture, la période a donné naissance à ces estampes épurées qui saisissent la fugacité d'un instant quotidien : des « Images du monde flottant ».

Les vues d'Edo que je vous ai montrées tout à l'heure, comme celle-ci, sont des œuvres du peintre japonais, le plus connu en Occident, Hokusai.

Ukiyo-e (Image du monde flottant)
Hokusai, lac Suwa, province de Shinano (1831)

15 La grande vague de Kanagawa (1831)

Vous avez forcément déjà vu son œuvre la plus célèbre, la « Grande vague de Kanagawa », qui a tant impressionné les impressionnistes.

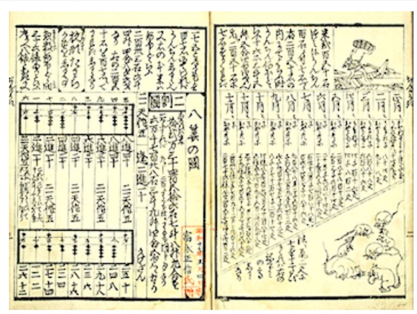
Eh bien en mathématiques aussi, l'époque Edo a engendré une expression originale, pratiquement indépendante de l'Occident, et détachée du modèle chinois qui en a été le point de départ.

La grande vague de Kanagawa (1831)
Hokusai (1760–1849)

16 Jinkōki (1627)

Le Jinkoki est le premier ouvrage de mathématiques spécifiquement japonais. Il a été abondamment réédité et plagié à partir de 1627. Cet ouvrage en trois volumes a enseigné l'arithmétique et l'usage du boulier à des générations de Japonais pendant toute l'époque d'Edo. Les second et troisième volumes contenaient des listes de problèmes à la mode chinoise, dont beaucoup étaient ce que nous appellerions des récréations mathématiques.

Jinkōki (1627)
Yoshida Mitsuyoshi (1598–1672)



17 Jinkōki (1627)

L'illustration que vous voyez ici est celle d'un problème d'héritage très proche du problème de Flavius Josèphe. En voici la traduction.

« Un homme a trente enfants. Quinze d'entre eux sont ceux qu'il a eus avec sa première femme, il a eu les quinze autres avec sa seconde femme. Il décide de choisir un seul de ses enfants pour lui léguer tous ses biens. Sa femme actuelle aligne les 30 enfants autour d'une mare comme vous les voyez dans l'illustration. Ses enfants sont en kimono noir, ceux de l'autre femme portent un kimono blanc. L'homme décide de compter les enfants dans le sens des aiguilles d'une montre, en commençant par un enfant choisi au hasard, et d'enlever un enfant tous les dix. Celui qui restera héritera de tous ses biens. La femme désigna un enfant et commença à compter. Les 14 premiers enfants qui furent retirés étaient tous de la première épouse. Le seul enfant de la première épouse qui restait, se plaignit et dit qu'il était injuste que seuls les enfants de la première épouse aient disparu. Il demanda que cette fois-ci le compte commence par lui. Le père accepta et recommença à compter et à enlever un enfant tous les dix. À la fin, l'enfant restant était celui de la première épouse. »

C'est peut-être injuste, mais tout de même moins sanglant que le suicide collectif de Flavius Josèphe.

Jinkōki (1627)
Yoshida Mitsuyoshi (1598–1672)

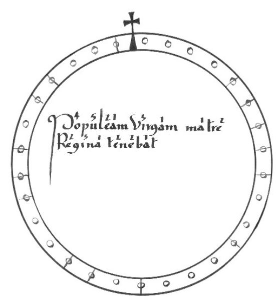
18 Le triparty en la science des nombres

En Europe ce problème apparaît pour la première fois dans le triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet. On y retrouve deux fois quinze participants comme au Japon, mais l'enjeu est franchement déplaisant.

« C'est un patron de navire qui transporte 15 Chrétiens et 15 Juifs. La tempête le contraint de décharger sa nef de la moitié de ses gens pour sauver l'autre moitié. Le patron voudrait trouver un moyen que les Juifs seulement fussent jetés à la mer et les Chrétiens sauvés mais il redoute que les Juifs ne se rebellent et qu'ils ne refusent son ordonnance. Il les fait asseoir et les compte par neuf, en jetant toujours le neuvième à la mer. Les 15 Chrétiens furent sauvés et les 15 Juifs furent noyés à la mer. On demande comment le patron les a-t-il fait assoir ? »

Cela se passe de commentaires, non ? L'illustration est schématisée, Chuquet y donne un moyen mnémotechnique de retrouver les places des Chrétiens.

Le triparty en la science des nombres
Nicolas Chuquet (ca 1445–1488)

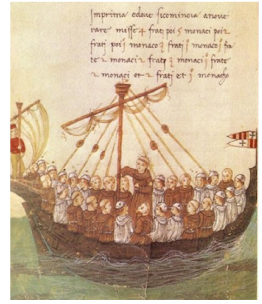


19 De arithmetica opusculum (1491)

Dans le traité d'abaque de Calandri qui est presque contemporain du triparty de Chuquet, le problème est le même. La seule différence est que les Chrétiens qui restent dans le navire sont des moines franciscains, tandis que les malheureux jetés par dessus bord sont des moines bénédictins.

Un bon demi-siècle plus tard chez Tartaglia, 15 Turcs et 15 Chrétiens sont dans le même bateau. À la même époque, c'est Cardan qui le premier associe le problème à Flavius Josèphe. En fait, c'est un de ces problèmes anciens, que l'on retrouve de civilisation en civilisation sans qu'on sache bien en déterminer l'origine. Curieusement, on n'a aucune trace de ce problème en Chine. Il semble être apparu au Japon de manière originale.

De arithmetica opusculum (1491)
Filippo Calandri (ca. 1400–1469)

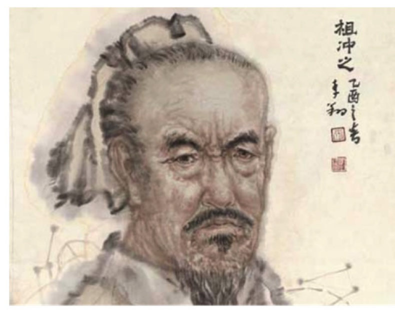


20 Les Neuf Chapitres (263)

Pour autant la base de mathématiques chinoises parvenue au Japon était déjà importante. Je vous ai raconté ailleurs comment Liu Hui résolvait les systèmes linéaires par la méthode Fang Cheng des tableaux rectangulaires, qui est en fait à peu près la même que celle du pivot de Gauss.

Ce qui a été crucial pour le progrès de l'algèbre chinoise, ce sont les tables à compter : placer dans les cases d'un tableau, des ensembles de baguettes représentant des nombres, qui peuvent être positifs ou négatifs. Cette technique des tables à compter a permis au fil des siècles d'aller beaucoup plus loin que les systèmes linéaires traités par Liu Hui.

Les Neuf Chapitres (263)
Liu Hui (ca. 220–280)



21 Le précieux miroir des quatre éléments (1303)

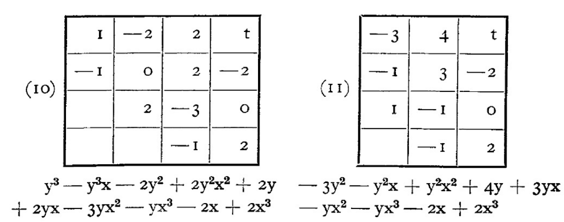
Dix siècles après les neuf chapitres, Yang Hui décrit la « Méthode de l'élément céleste », qui consiste à traduire un problème en une équation à une inconnue.

Quarante ans plus tard, Zhu Shijie écrit le « Précieux miroir des quatre éléments ». Ce livre est considéré comme le sommet de l'algèbre chinoise. Il y traite par différentes méthodes d'élimination, des systèmes d'équations polynomiales.

Ceci est un extrait de la traduction de Louis Van Hée. Il montre un système de deux équations à deux inconnues sous forme de tableau. Il a remplacé les baguettes par des chiffres et traduit les équations en écriture actuelle.

Ce système est parmi les plus simples. Zhu Shijie était capable de résoudre des systèmes d'équations polynomiales jusqu'à quatre inconnues. Dans le cours de ses procédures d'élimination, il obtient des équations jusqu'au degré quatorze.

Le précieux miroir des quatre éléments (1303)
Zhu Shijie (1270–1330)



(10)

1	−2	2	t
−1	0	2	−2
	2	−3	0
		−1	2

$y^3 - y^3x - 2y^2 + 2y^2x^2 + 2y + 2yx - 3yx^2 - yx^3 - 2x + 2x^3$

(11)

−3	4	t
−1	3	−2
1	−1	0
	−1	2

$-3y^2 - y^2x + y^2x^2 + 4y + 3yx - yx^2 - yx^3 - 2x + 2x^3$

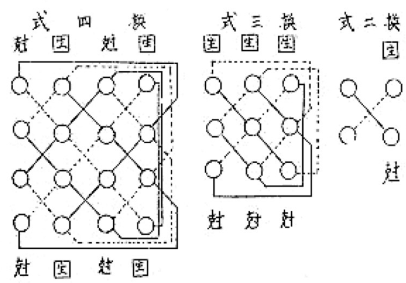
22 Seki Takakazu (ca 1642–1708)

Seki Takakazu (ca 1642–1708)

Comme Hokusai incarne la peinture japonaise, Seki Takakazu incarne les mathématiques japonaises pour les Occidentaux. Nous venons de le voir, les fondations chinoises sur lesquelles il a bâti étaient solides. Il a néanmoins réussi à aller encore plus loin que Zhu Shijie. Il est passé d'un algorithme de calcul implémenté sur des exemples, à une méthode générale.

23 Invention des déterminants (1683)

Invention des déterminants (1683)
Seki Takakazu (ca 1642–1708)



Seki Takakazu est le premier à avoir isolé la notion de déterminant, non seulement à partir de la résolution des systèmes linéaires, mais encore suivant l'élimination d'une inconnue entre deux équations polynomiales, ce que nous appelons déterminant de Sylvester.

Il a été le premier, mais pas le seul.

24 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

S'il y a bien un fil directeur dans l'œuvre foisonnante de Leibniz, c'est son souci constant d'améliorer l'« art d'inventer ». Pour lui, il faut désencombrer l'esprit du savant de tout ce qui peut être automatisé.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Leibniz était parfaitement conscient de l'importance d'un choix judicieux de notations, permettant d'automatiser les calculs avec des symboles. Il appelle cela l'« art caractéristique », (du choix des caractères), lui-même soumis à l'« art combinatoire » (pour combiner ces caractères). Ce souci d'automatiser les procédures par un choix de notations judicieux l'a conduit pour le calcul différentiel, à définir des notations que nous utilisons encore. Le même souci préside encore à ses travaux sur la résolution de systèmes linéaires, et la détermination de solutions communes aux équations algébriques. C'est ainsi qu'il est amené au fil des années à développer les déterminants. Il n'existe pas de traité publié par Leibniz sur les déterminants. Seulement un corpus de manuscrits et de lettres en latin, adressées à quelques uns de ses 1100 correspondants recensés. Pourquoi un tel intérêt pour les systèmes linéaires ? Leibniz pensait que n'importe quelle résolution d'équation (algébrique, différentielle ou autre) pouvait se ramener à la résolution d'un système linéaire. Au vu des méthodes numériques développées depuis deux siècles, c'était singulièrement prémonitoire !

25 Notations de Leibniz

Dans le cadre de son « art caractéristique », Leibniz a inventé plus de cinquante manières d'utiliser des nombres fictifs ; deux seulement ont été publiées. Voici par exemple un système homogène de trois équations à trois inconnues :

Il faut comprendre que les coefficients des inconnues ne sont pas dix, onze, douze, etc, mais un zéro pour le coefficient de l'inconnue zéro dans la première équation, jusqu'à trois deux pour le coefficient de l'inconnue numéro deux dans la troisième équation. Vous le constatez, par rapport aux tableaux de nombres des Chinois, Leibniz partait avec un certain handicap.

Il avait néanmoins parfaitement reconnu que la condition pour que ce système admette une solution non nulle s'écrivait comme une combinaison de produits des coefficients trois par trois ; donc, le déterminant. Mais comment généraliser la règle des signes à plus de trois équations ?

Notations de Leibniz
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

$$\begin{aligned} 10a + 11x + 12y &= 0 \\ 20a + 21x + 22y &= 0 \\ 30a + 31x + 32y &= 0 \end{aligned}$$

$$+10 \cdot 21 \cdot 32 - 10 \cdot 22 \cdot 31 - 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 20 \cdot 31 - 12 \cdot 21 \cdot 30 = 0$$

26 La règle des signes (1678–1684)

Il entrevoit une règle générale dès 1678, et écrit tout content : « Ainsi nous avons une règle de laquelle la valeur d'une inconnue linéaire peut être écrite sans aucun calcul ».

Prudent, il ajoute : « Ce théorème mériterait d'être démontré exactement, ce qui se ferait par cette subtile analyse-là qui prescrit les lois au calcul, même sans calcul. C'est le vrai secret de l'analyse ».

Cinq ans plus tard, il n'y est toujours pas : « Les membres qui n'ont qu'un seul coefficient commun ou un nombre impair de tels coefficients ont des signes opposés. Ceux qui ont deux ou un nombre pair de coefficients communs ont le même signe ».

Ce n'est toujours pas ça. Petit à petit, il parvient à dégager la notion de permutation d'indices, et énonce la règle correcte, en 1684. Il peut enfin triompher : « Dans cette tentative, j'ai résolu le problème tandis qu'auparavant j'avais toujours essuyé un échec. Voici un exemple insigne de l'Art Combinatoire ».

Deux coïncidences sont étonnantes dans cette histoire. La première est celle des dates : Leibniz et Takakazu sont parvenus à la même notion à quelques années près, sans bien sûr avoir jamais entendu parler l'un de l'autre. D'ailleurs leurs travaux sur les déterminants n'ont été connus qu'au vingtième siècle.

L'autre coïncidence, est l'énergie que Takakazu aussi bien que Leibniz ont pu perdre en controverses stériles avec leurs concurrents.

L'un de ces concurrents se plaint du secret qui entoure les recherches de Takakazu.

La règle des signes (1678–1684)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

1678 « Ainsi nous avons une règle de laquelle la valeur d'une inconnue linéaire peut être écrite sans aucun calcul ».

« Ce théorème mériterait d'être démontré exactement, ce qui se ferait par cette subtile analyse-là qui prescrit les lois au calcul, même sans calcul ».

1683 « Les membres qui n'ont qu'un seul coefficient commun ou un nombre impair de tels coefficients ont des signes opposés. Ceux qui ont deux ou un nombre pair de coefficients communs ont le même signe ».

1684 « Dans cette tentative, j'ai résolu le problème tandis qu'auparavant j'avais toujours essuyé un échec. Voici un exemple insigne de l'Art Combinatoire ».

27 Nouveau recueil d'égalisations en mathématiques (1684)

« Il existe aujourd'hui dans notre pays, des mathématiciens qui connaissent « l'égalisation » mais qui, par goût du secret ou par réelle ignorance, nul ne sait, ne la révèlent pas. Si bien que nous ne la trouvons dans aucun livre. Celle-ci va être divulguée par l'école de Nakanishi pour apaiser les esprits. »

Suivez son regard. Heureusement, Seki Takakazu ne manque pas d'élèves dévoués pour prendre sa défense.

Nouveau recueil d'égalisations en mathématiques (1684)
Nakanishi Masayoshi

Il existe aujourd'hui dans notre pays, des mathématiciens qui connaissent « l'égalisation » mais qui, par goût du secret ou par réelle ignorance, nul ne sait, ne la révèlent pas. Si bien que nous ne la trouvons dans aucun livre. Celle-ci va être divulguée par l'école de Nakanishi pour apaiser les esprits.

28 Commentaire du Endan du Hatsubi Sanpō (1685)

« Ces temps derniers, des mathématiciens de la capitale et de la province se sont mis, soit par ignorance de la subtilité des procédures de Seki, soit parce qu'ils suspectent ce dernier de camoufler son ignorance des procédures, à le mettre à l'essai en lui soumettant des problèmes [...] ou à l'accuser de s'être trompé dans les procédures, dévoilant ainsi leur propre incompétence. »

Bref, quel que soit le pays, quelle que soit la période, les mathématiciens et leurs querelles stériles ne changent pas beaucoup.

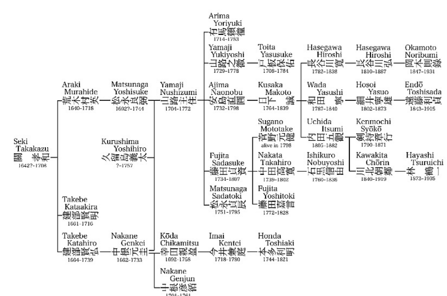
Commentaire du Endan du Hatsubi Sanpō (1685)
Takebe Katahiro (1664–1739)

Ces temps derniers, des mathématiciens de la capitale et de la province se sont mis, soit par ignorance de la subtilité des procédures de Seki, soit parce qu'ils suspectent ce dernier de camoufler son ignorance des procédures, à le mettre à l'essai en lui soumettant des problèmes [...] ou à l'accuser de s'être trompé dans les procédures, dévoilant ainsi leur propre incompétence.

29 L'école de Seki

La seule chose qui compte, c'est ce qui reste. Dans le cas de Seki Takakazu, il est resté une encyclopédie de mathématiques en vingt volumes coécrite avec les deux frères Takebe, et surtout une école prestigieuse, qui a continué à diffuser les méthodes du maître pendant plus de deux siècles.

L'école de Seki
Seki Takakazu (ca 1642–1708)



30 références

Allez, pour terminer, que diriez-vous d'un peu de poésie. Le genre du Haïku est né lui aussi à l'époque Edo, incarné par le maître Basho Matsuo. Ce sont des poèmes très courts, à peine quelques mots. En voici cinq. Fermez les yeux et pensez à Hokusai.

Un pétale tombé, remonte à sa branche. C'est un papillon.

Avec de jeunes feuilles, j'aimerais essuyer vos gouttes de larme.

Aux admirateurs de lune Les nuages parfois offrent une pause.

Les lunes et les fleurs : voici les véritables maîtres.

La cascade est limpide. Dans les vagues immaculées, luit la lune d'été.

références

- A. Horiuchi (1989) Sur un point de rupture entre les traditions chinoise et japonaise des mathématiques, *Revue d'histoire des sciences*, 42(4), 375–390
- A. Horiuchi (1994) *Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo (1600-1868) : une étude des travaux de Seki Takakazu (?-1708) et de Takebe Katahiro (1664-1739)*, Paris : Vrin
- E. Knobloch et al. eds. (2013) *Seki, founder of modern mathematics in Japan, a commemoration on his tercentenary*, Tokyo : Springer
- Y. Mikami (1914) On the Japanese theory of determinants, *Isis*, 2(1), 9–36
- M. Morimoto (2013) Mathematical philosophy of Takebe Katahiro, *Kurenai*, 1831, 57–65
- T. Ogawa (2001) A review of the history of Japanese mathematics, *Revue d'histoire des mathématiques*, 7, 137–155