

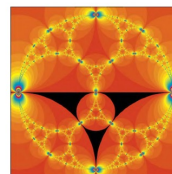
0 Les trois cercles

Nous partons au Japon, vers le dix-huitième siècle, pour une des pages les plus originales de l'histoire de la géométrie ! Euh originale... plus ou moins, nous allons voir.

histoires de géométrie

Les trois cercles

des sangakus aux groupes kleinien



hist-math.fr

Bernard YCART

1 La grande vague de Kanagawa (1831)

Bien ; le Japon à l'époque Edo ; vous y êtes ? Mais si, je vous l'ai déjà raconté ! Ce repli de deux siècles, associé à une relative prospérité, qui a provoqué l'émergence d'une culture totalement originale : les geishas, le théâtre Kabuki, les images d'un monde flottant, la grande vague de Kanagawa ; et puis, Seki Takakazu et ses déterminants.

Il y a eu une autre manifestation originale de cette culture en mathématiques, les sangakus.

La grande vague de Kanagawa (1831)

Hokusai (1760-1849)



2 Sangaku

Un sangaku c'est un panneau de bois, large parfois de un à deux mètres, que l'on accrochait devant un temple. Le panneau comportait un ou plusieurs problèmes de géométrie, illustrés par des figures de couleurs vives.

Sangaku

Époque Edo (1603-1668)



3 Sangaku

Exposés aux intempéries, les sangakus ne pouvaient pas durer très longtemps, et beaucoup ont été perdus. Il ne reste que quelques centaines de sangakus originaux, datant pour la plupart du dix-neuvième siècle.

Il n'y a pas consensus sur leur fonction exacte. Chaque sangaku portait le nom de l'auteur, de son village, et de l'école de mathématiques dont il avait été élève. La compétition était vive entre l'école issue du glorieux passé de Seki Takakazu, et d'autres écoles qui gagnaient elles aussi en prestige. Il se pourrait que les sangakus aient été les équivalents japonais, des défis que les Européens se lançaient les uns aux autres vers le milieu du dix-septième siècle : pensez aux controverses entre Fermat, Wallis, Descartes, Roberval.

4 Sangaku

Le texte japonais comportait en général l'énoncé du problème; très résumé, car la figure suffisait souvent à le comprendre. L'auteur donnait aussi la réponse et comment la construire, mais il n'y avait pas de justification, et c'était précisément cela le défi.

5 Sangaku

Regardez par exemple celui-ci. Étant donné un grand cercle et quatre cercles tangents à l'intérieur du grand, quel est le rayon du petit cercle rouge qui est tangent aux quatre cercles intérieurs ?

Je n'ai pas la virtuosité en géométrie des anciens japonais, alors j'ai fait le calcul avec de l'algèbre, comme on me l'a appris. J'ai trouvé que le rapport des rayons du petit cercle rouge et du grand est $3 - 2\sqrt{2}$. Ça vous dit de vérifier ?

Le problème illustré ici est d'un type majoritaire parmi les sangakus anciens : il s'agit de calculer des grandeurs caractéristiques dans une figure composée de cercles tangents.

6 Sangaku

Celui-ci est une version moderne reconstituée, à partir de problèmes anciens. Des trois problèmes représentés, le premier ressemble au précédent. Les deux autres montrent aussi des cercles tangents, avec un ingrédient supplémentaire : l'infini. On rencontre très souvent des suites de cercles tangents, dont les rayons décroissent vers zéro.

Sangaku

Temple Haguro, province de Yamagata



Sangaku

Temple de Sakatare, province de Yogo



Sangaku

Temple Isaniwa Jinjya, province d'Ehime



Sangaku

Reconstitution moderne



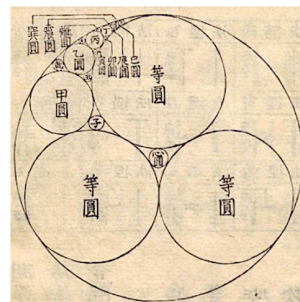
7 Cercles tangents

La renommée des sangakus était telle que des livres paraissaient régulièrement pour compiler les énigmes et leurs solutions. Le « Shinpeki Sanpo » d'où est extraite cette figure, date de 1789.

Sur ce problème, vous voyez trois cercles tangents intérieurement à un grand cercle, et dans les interstices, encore d'autres cercles tangents de diamètres décroissants.

Cercles tangents

Shinpeki Sanpō (1789)



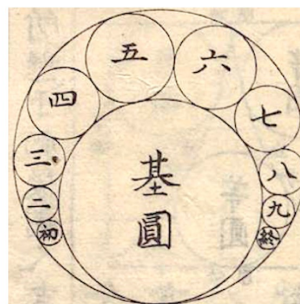
8 Cercles tangents

Voici encore un problème de cercles tangents et de diamètres décroissants dans le même livre.

Maintenant, nous allons voir quelques problèmes issus des récréations mathématiques de Jacques Ozanam. L'édition date de 1694, soit à peu près le début de la vague des sangakus.

Cercles tangents

Shinpeki Sanpō (1789)

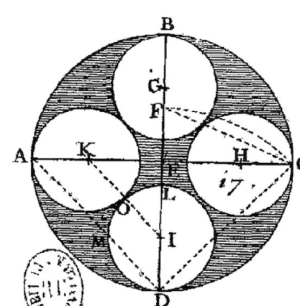


9 Récréations mathématiques (1694)

Quatre cercles tangents entre eux, et tangents intérieurement à un grand cercle. La question est, comment les construire ?

Récréations mathématiques (1694)

Jacques Ozanam (1640–1718)

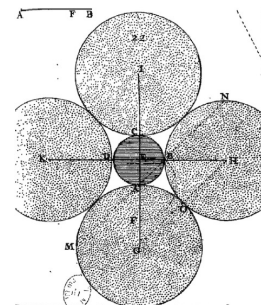


10 Récréations mathématiques (1694)

Maintenant, étant donné quatre cercles tangents entre eux, quel est le rayon du cercle tangent aux quatre : cela ne vous rappelle rien ?

Récréations mathématiques (1694)

Jacques Ozanam (1640–1718)



11 Récréations mathématiques (1694)

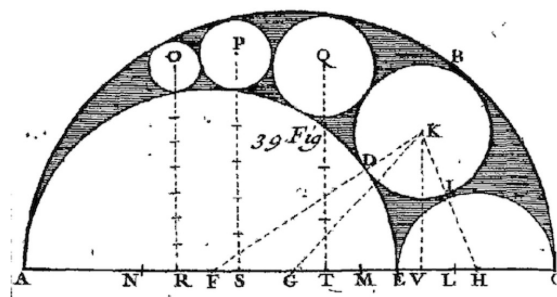
Et voici une suite de cercles tangents de diamètres décroissants. Ozanam précise que les centres des cercles successifs sont sur une même ellipse. Des quantités de problèmes de sangakus ressemblent à celui-ci.

Faut-il en conclure que les Japonais ont tout volé en douce à Ozanam, et ce malgré leur isolement ? Non, bien sûr. Une fois de plus, les mêmes problèmes sont apparus indépendamment dans des civilisations éloignées, à partir d'ingrédients communs encore plus anciens. Je vous ai déjà donné des exemples de ce phénomène en arithmétique et en algèbre. En géométrie, la division des surfaces est un autre type de question universelle.

Examinons les ingrédients ici. Le premier est la notion de figures tangentes.

Récréations mathématiques (1694)

Jacques Ozanam (1640–1718)



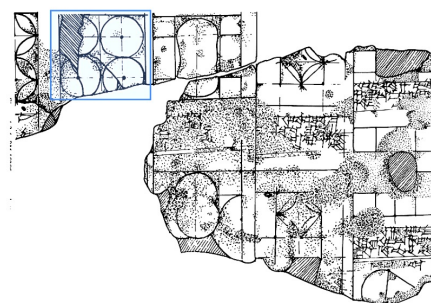
12 Problèmes d'aires

On trouve des cercles tangents entre eux ou à des carrés dans des problèmes de géométrie sur des tablettes babyloniennes anciennes. Il n'est donc pas surprenant que les Grecs aient généralisé la notion.

Le livre marquant sur le sujet est un ouvrage d'Apollonius de Pergé, l'auteur des coniques. Malheureusement le livre est perdu, et il était déjà perdu du temps de Pappus, qui vivait cinq siècles après Apollonius. En fin connaisseur de la géométrie d'Euclide et d'Apollonius, Pappus reconstitue une partie du propos.

Problèmes d'aires

British Museum BM15285 (ca 1800 av. J.-C.)



13 Apollonius, Livre des contacts (ca 200 av. J.-C.)

« Les deux livres *Des Contacts* viennent à la suite des ouvrages précédents. Les propositions qu'ils contiennent semblent être nombreuses ; mais pour elles aussi, nous en posons une seule qui s'énonce de la manière suivante : « Trois éléments quelconques étant successivement donnés de position parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle qui, passant par chacun des points donnés (dans le cas de points donnés) soit tangent à chacune des lignes données ». Cette proposition donne nécessairement lieu à dix propositions particulières différentes, à cause du nombre des éléments semblables ou dissemblables fournis dans les hypothèses. »

Pappus pose d'abord un problème de combinatoire. Comment prendre trois objets non nécessairement différents, parmi points, droites et cercles. Il y a dix choix possibles. À chacun correspond un problème particulier. Si le choix est « trois points », le problème consiste à construire un cercle passant par trois points, ou encore le cercle circonscrit à un triangle. La solution est bien connue, elle est dans Euclide. De même si le choix est « trois droites », le problème est de construire le cercle inscrit à un triangle. Si le choix est « point droite droite », le problème consiste à construire un cercle passant par le point, et tangent aux deux droites ; etc.

Parmi les dix problèmes, le plus difficile est le problème des trois cercles : comment construire un cercle, tangent à la fois à trois cercles donnés.

Apollonius, Livre des contacts (ca 200 av. J.-C.)

Pappus (ca 290–350 av. J.-C.)

Les deux livres *Des Contacts* viennent à la suite des ouvrages précédents. Les propositions qu'ils contiennent semblent être nombreuses ; mais pour elles aussi, nous en posons une seule qui s'énonce de la manière suivante : « Trois éléments quelconques étant successivement donnés de position parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle qui, passant par chacun des points donnés (dans le cas de points donnés) soit tangent à chacune des lignes données ». Cette proposition donne nécessairement lieu à dix propositions particulières différentes, à cause du nombre des éléments semblables ou dissemblables fournis dans les hypothèses.

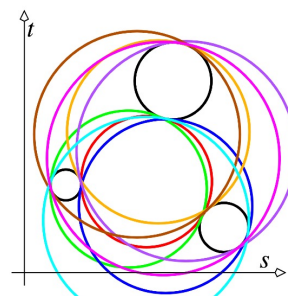
14 Le problème des trois cercles

Cette image vous donne une idée de la complexité. Dans le cas général, on compte pas moins de huit solutions différentes. Et l'image que vous voyez ne concerne que le cas où les trois cercles sont séparés. Ils pourraient en plus s'intersecter ou bien être inclus l'un dans l'autre.

Comment Apollonius s'y prenait-il ? Mystère. On ne sait même pas s'il avait effectivement résolu le problème. Pappus ne tranche pas, et ne donne pas lui-même de solution.

Le problème des trois cercles

Pappus (ca 290–350 av. J.-C.)



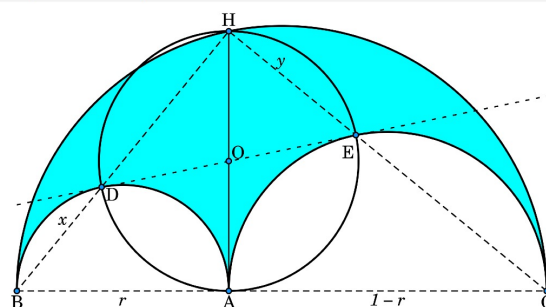
15 Arbelos d'Archimède

Ceci est un autre résultat de cercles tangents, qui nous est parvenu de façon indirecte. Il apparaît dans le « Livre des lemmes », qui est attribué à Archimède, et nous est connu par une traduction arabe de Thabit ibn Qurra.

Prenez un grand demi-cercle de rayon 1, retranchez-en deux autres sur un diamètre. Ce qui reste du grand demi-cercle est la figure bleue. Elle a la même surface que le disque dont le diamètre est la hauteur AH .

Arbelos d'Archimède

Archimède ? (287–212 av. J.-C.) Livre des Lemmes



16 Arbelos (Tranchet de cordonnier)

D'après les textes qui nous sont parvenus, Archimède aurait nommé cette figure « Arbelos », parce qu'elle ressemble à un tranchet de cordonnier.

Arbelos (Tranchet de cordonnier)

Abū Sahl al-Qūhī (ca 940–1000) Livre des Lemmes



17 Livre des centres des cercles tangents

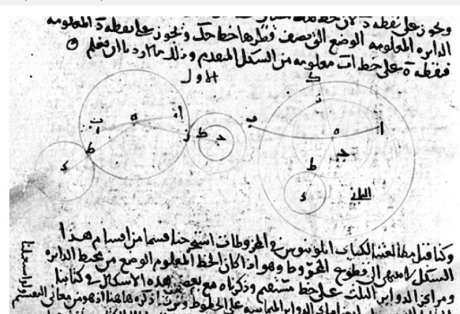
D'après la classification grecque des problèmes, si un problème est difficile à la règle et au compas, il se peut que ce ne soit pas un problème plan. Il peut donc être solide, c'est-à-dire résoluble à l'aide des coniques.

C'est en tout cas ce qu'ont fait les Arabes, en particulier al-Qūhī. Il faut dire qu'il était spécialiste des dites courbes, au point d'inventer un compas parfait, capable de tracer n'importe quelle conique.

Mais l'énigme restait entière : peut-on construire un cercle tangent à trois cercles donnés, en utilisant seulement une règle et un compas ?

Livre des centres des cercles tangents

Abū Sahl al-Qūhī (ca 940–1000)



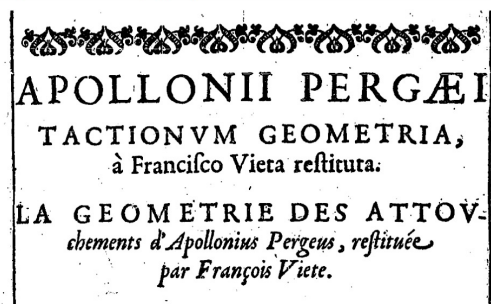
18 La géométrie des attouchements

La reconstitution des livres grecs perdus est la grande affaire des humanistes à partir de la Renaissance. Le premier tome du Cours Mathématique de Pierre Hérigone contient non seulement tous les livres d'Euclide, mais encore plusieurs reconstitutions d'Apollonius, dont celle du livre des contacts, par François Viète.

Rhhm... du latin au français, j'ai parfois un peu de mal à suivre les traductions d'Hérigone.

La géométrie des attouchements

Pierre Hérigone, Cours Mathématique (1634)



19 Trois cercles étant donnés...

Toujours est-il que le problème des trois cercles est traité. Mais comme Hérigone traduit tout dans son système de symboles, la construction, dans la colonne de gauche, et la démonstration, dans la colonne de droite, sont à peu près aussi difficiles à comprendre l'une que l'autre.

Trois cercles étant donnés...

Pierre Hérigone, Cours Mathématique (1634)



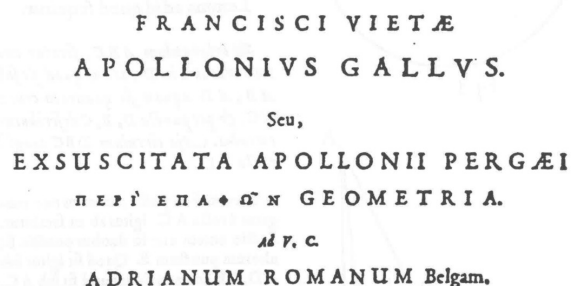
20 Apollonius Gallus (ca 1600)

Cet Apollonius Gallus, signé François Viète, n'est paru que dans ses œuvres complètes, plus de quarante ans après sa mort. Que s'était-il donc passé?

Dans le cadre de sa rivalité avec le Belge Adrian van Roomen, Viète lui avait proposé le problème des trois cercles. Van Roomen l'avait résolu, à l'aide des coniques. Viète lui répond, en se posant en Apollonius français, par opposition à l'Apollonius belge qu'est van Roomen. Dans l'introduction, il se montre plutôt ironique.

Apollonius Gallus (ca 1600)

François Viète (1640–1603)



21 Apollonius Gallus (ca 1600)

« Éminent Adrien, j'ai proposé aux amateurs de mathématiques de traiter par une méthode géométrique et non par une méthode mécanique ce problème d'Apollonius du tracé d'un cercle que touchent trois cercles donnés. Tant qu'on touche le cercle par des hyperboles, on n'aborde pas le problème avec doigté.

Ainsi, éminent Adrien, et, si tu me le permets, Apollonius belge, comme le problème que j'ai proposé est plan et que tu l'as résolu comme solide, pour cette raison tu n'as pas assuré l'intersection des hyperboles dont tu as fait l'hypothèse. Par ailleurs les anciens ont toujours redouté de décrire les sections coniques dans le plan. Abandonne donc les lignes mixtes et apprends volontiers maintenant d'un Apollonius ressuscité aux bords de l'Océan aquitain une technique ingénieuse et savante. »

À part la vantardise de Viète, ce qui est étonnant là-dedans, c'est l'insistance qu'il met à se montrer un parfait géomètre au sens des anciens, c'est-à-dire à ne pas utiliser l'algèbre nouvelle qu'il a lui-même créée.

Apollonius Gallus (ca 1600)

François Viète (1540–1603)

Éminent Adrien, j'ai proposé aux amateurs de mathématiques de traiter par une méthode géométrique et non par une méthode mécanique ce problème d'Apollonius du tracé d'un cercle que touchent trois cercles donnés. Tant qu'on touche le cercle par des hyperboles, on n'aborde pas le problème avec doigté.

Ainsi, éminent Adrien, et, si tu me le permets, [Apollonius belge](#), comme le problème que j'ai proposé est plan et que tu l'as résolu comme solide, pour cette raison tu n'as pas assuré l'intersection des hyperboles dont tu as fait l'hypothèse[...] Par ailleurs les anciens ont toujours redouté de décrire les sections coniques dans le plan. Abandonne donc les lignes mixtes et apprends volontiers maintenant d'un [Apollonius ressuscité aux bords de l'Océan aquitain](#) une technique ingénieuse et savante.

22 René Descartes (1596–1650)

Cette algèbre nouvelle, Descartes ne laisse pas passer l'occasion d'en démontrer l'efficacité. Il est en Hollande, et vient de faire la connaissance de la princesse Élisabeth de Bohême, qui est elle-aussi en exil.

René Descartes (1596–1650)



23 Élisabeth de Bohême, princesse palatine (1618–1680)

Elle n'a que vingt cinq ans, et est éblouie par la philosophie de Descartes, à qui elle demande des leçons. C'est une élève assidue et douée. En octobre 1643, Descartes lui pose le problème des trois cercles. Il est un peu inquiet, et confie à un de ses amis qu'il craint que la question ne soit trop difficile pour elle.

En novembre, il explique sa méthode algébrique dans une lettre qu'il conclut en disant : « J'ai peur de m'être rendu ennuyeux à Votre Altesse, parce que je me suis arrêté à écrire des choses qu'elle savait sans doute mieux que moi, et qui sont faciles, mais qui sont néanmoins les clefs de mon algèbre ».

Son Altesse répond, en prouvant qu'elle a parfaitement compris la démarche. Descartes en est tout fier.

Élisabeth de Bohême, princesse palatine (1618–1680)



24 Descartes à Élisabeth (novembre 1643)

« La solution qu'il a plu à Votre Altesse me faire l'honneur de m'envoyer, est si juste, qu'il ne s'y peut rien désirer davantage; et je n'ai pas seulement été surpris d'étonnement, en la voyant, mais je ne puis m'abstenir d'ajouter que j'ai été aussi ravi de joie, et j'ai pris de la vanité de voir que le calcul, dont se sert Votre Altesse, est entièrement semblable à celui que j'ai proposé dans ma Géométrie. »

À en croire cet échange, le problème des trois cercles aurait donc été la première application pédagogique des coordonnées cartésiennes, cinq ans après la publication de la Géométrie de Descartes.

Ne croyez pas que l'affaire s'arrête à Descartes : d'autres reconstructions du livre des contacts d'Apollonius ont été proposées, de nouvelles solutions du problème des trois cercles ont été publiées, y compris une par Euler, en 1779.

Descartes à Élisabeth (novembre 1643)

René Descartes (1596–1650)

La solution qu'il a plû à Vostre Altesse me faire l'honneur de m'enuoyer, est si iuste, qu'il ne s'y peut rien desirer dauantage; et ie n'ay pas seulement esté surpris d'estonnement, en la voyant, mais ie ne puis m'abstenir d'adiuster que i'ay esté aussi rayuy de ioye, & ay pris de la vanité de voir que le calcul, dont se sert Vostre Altesse, est entierement semblable à celuy que i'ay proposé dans ma Geometrie.

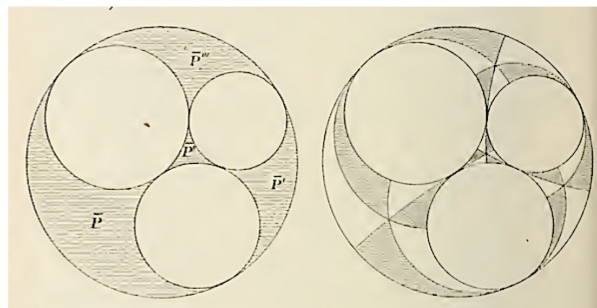
25 Theorie der automorphen Functionen (1897)

Pour la suite de l'histoire, les deux ingrédients « cercles tangents » et « suites infinies » ne suffisent plus. Il en manque deux autres, qui n'ont été introduits qu'au dix-neuvième siècle : la représentation géométrique des complexes, et la théorie des groupes.

Les quatre ingrédients ont été combinés, à partir de 1872, par Felix Klein. L'image des trois cercles tangents que vous voyez ici est tirée de son livre sur les fonctions automorphes, avec Robert Fricke. Le premier volume est consacré à la théorie des groupes.

Theorie der automorphen Functionen (1897)

Robert Fricke (1861–1930), Felix Klein (1849–1925)

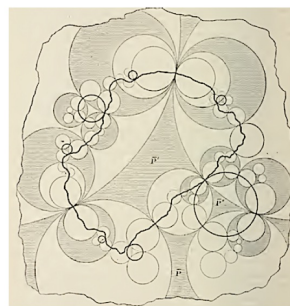


26 Courbe fractale

Quelques pages plus loin apparaissent des suites de cercles tangents, avec un objet limite, que, un demi-siècle plus tard, Benoît Mandelbrot qualifiera de fractal.

Courbe fractale

Fricke, Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen (1897)



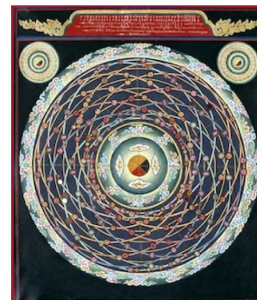
27 Le filet d'Indra

Sauf que nous atteignons là les bornes de ce que je suis capable de vous raconter simplement, sans dire n'importe quoi. Alors pour terminer, je vous propose d'écouter une légende. Elle est tirée d'un texte sacré du bouddhisme Hua-Yen, implanté au Tibet et en Chine. Ce texte est le « Sūtra de l'ornementation fleurie du bouddha ».

La légende donne son titre à un livre magnifique dont je vous recommande la lecture si vous avez envie d'en savoir plus. Les images qui suivent en sont issues.

Le filet d'Indra

Buddhāvataṃsaka-sūtra, bouddhisme Hua-yen

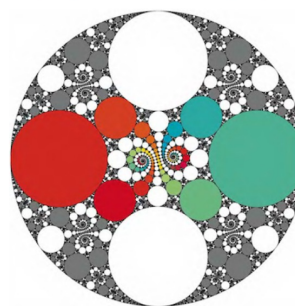


28 Un filet merveilleux

« Très loin, dans la demeure céleste du grand dieu Indra, il est un filet merveilleux, tendu par un artisan ingénieux de sorte qu'il s'étend à l'infini dans toutes les dimensions. »

Un filet merveilleux

Mumford, Series, Wright, Indra's pearls, the vision of Felix Klein (2002)

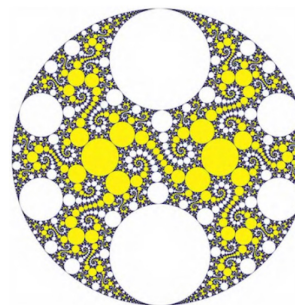


29 Les goûts extravagants des Dieux

« Pour satisfaire les goûts extravagants des dieux, l'artisan a accroché un joyau étincelant à chaque nœud du filet, et comme celui-ci est infini, le nombre des joyaux l'est tout autant. »

Les goûts extravagants des Dieux

Mumford, Series, Wright, Indra's pearls, the vision of Felix Klein (2002)

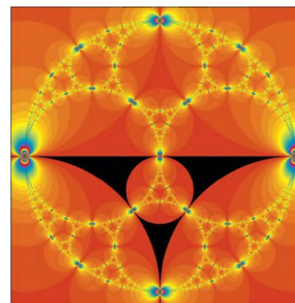


30 Ils brillent la nuit, comme des étoiles lumineuses

« Ils brillent la nuit comme des étoiles lumineuses, offrant un prodigieux spectacle car nous pouvons examiner de près chacun de ces joyaux et distinguer à leur surface polie le reflet de tous les autres joyaux du filet, infinis en nombre. »

Ils brillent la nuit, comme des étoiles lumineuses

Mumford, Series, Wright, Indra's pearls, the vision of Felix Klein (2002)



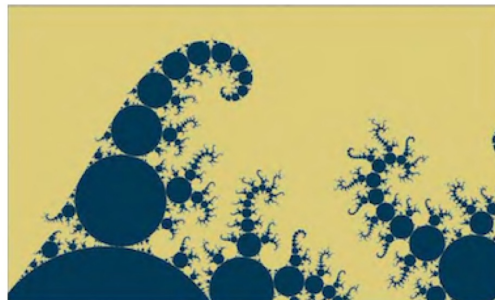
31 Tout le filet est représenté en chacun des joyaux

« De surcroît, chacun des joyaux reflétés reflète à son tour tous les autres joyaux. Tout le filet est représenté en chacun des joyaux, tout comme chaque objet dans le monde n'est pas seulement lui-même parce qu'il inclut tous les autres objets et qu'en fait il est tous les autres. »

Et voilà, cette histoire se termine comme elle a commencé, par la grande vague de Kanagawa. Ou presque.

Tout le filet est représenté en chacun des joyaux

Mumford, Series, Wright, *Indra's pearls, the vision of Felix Klein* (2002)



32 références

Pendant longtemps on a cru en Occident que les individus étaient préformés dans les gamètes. Il y avait les animalculistes ou spermatistes qui croyaient que les spermatozoïdes étaient déjà des individus miniature, et les ovistes qui pensaient que l'œuf d'où devait sortir une femelle contenait non seulement cette femelle, mais la contenait avec ses ovaires, dans lesquels d'autres femelles contenues, et déjà toutes formées, étaient la source des générations à l'infini. Comme le filet que l'on voit dans les joyaux.

références

- F. Hidetoshi, T. Rothman (2008) *Sacred mathematics, Japanese temple geometry*, Princeton : University Press
- A. Horiuchi (1998) Les mathématiques peuvent-elles n'être que pur divertissement ? Une analyse des tablettes votives de mathématiques à l'époque d'Edo, *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, 20, 135–156
- G. Huvent (2008) *Sangaku : le mystère des énigmes géométriques japonaises*, Paris : Dunod
- H. Khelif (2014) *L'Arbelos*, images.math.cnrs.fr
- D. Mumford, C. Series, D. Wright (2002) *Indra's pearls, the vision of Felix Klein*, Cambridge : University Press
- A. Rabu Boyé (1998) *L'Apollonius Gallus et le problème des trois cercles comme défense et illustration de la géométrie synthétique*, Nantes : Thèse de Doctorat