Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Vengé de toute tache

Il y a bien quelques points communs entre le postulat des parallèles et la quadrature du cercle. Les deux sont des problèmes hérités des Grecs, qui ont occupé les Arabes, puis les Européens après eux, et ils n'ont été finalement résolus qu'au dix-neuvième siècle. Chacun des deux est à l'origine d'une bonne partie des mathématiques actuelles.

Il y a pourtant une différence majeure entre les deux. La plupart des mathématiciens ont toujours jugé que la quadrature du cercle était impossible. Il n'y avait que des amateurs peu informés pour s'acharner à la rechercher : je me moque d'eux ailleurs, et ce n'est pas très gentil.

À l'inverse, démontrer le postulat des parallèles était considéré non seulement comme possible, mais même comme souhaitable : c'est pratiquement le seul détail qui manquait aux Éléments d'Euclide pour parachever l'édifice, pour qu'enfin Euclide soit « vengé de toute tache ». Il allait falloir deux bons millénaires pour démontrer … qu'il n'y avait rien à démontrer. Entre temps, les fautes de logique n'ont pas manqué, même chez les plus grands.

histoires de géométrie

Vengé de toute tache

le postulat des parallèles

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Vices du syllogisme

Voici l'avertissement que donne Aristote, au chapitre « Vices du syllogisme » des Premiers analytiques.

« Ainsi, par exemple, si l'on démontre A par B, et B par C, et que C ne puisse être naturellement démontré que par A, il en résulte que, dans un tel syllogisme, on démontre A par lui-même. C'est, au reste, l'erreur que commettent ceux qui croient démontrer les lignes parallèles ; car ils ne s'aperçoivent pas qu'ils admettent des données qu'on ne saurait démontrer, sans que ces lignes mêmes soient parallèles. »

Donc, au moins une génération avant Euclide, on savait qu'il fallait se méfier des démonstrations de parallélisme. Alors voyons, qu'en dit Euclide ?

Vices du syllogisme

Aristote, Premiers analytiques, Livre second, chapitre XVI

Ainsi, par exemple, si l'on démontre A par B, et B par C, et que C ne puisse être naturellement démontré que par A, il en résulte que, dans un tel syllogisme, on démontre A par lui-même. C'est, au reste, l'erreur que commettent ceux qui croient démontrer les lignes parallèles ; car ils ne s'aperçoivent pas qu'ils admettent des données qu'on ne saurait démontrer, sans que ces lignes mêmes soient parallèles.

2 Les postulats d'Euclide

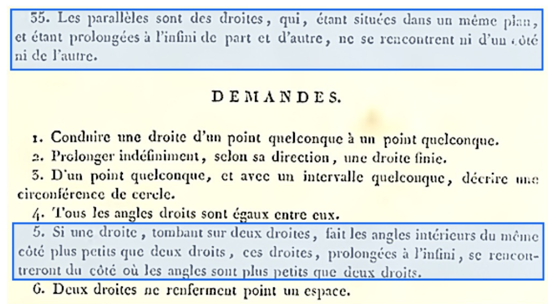
Voici ce qu'on lit au début du livre un des Éléments d'Euclide. C'est l'édition que je vous montre le plus souvent, celle de Peyrard de 1814. Elle est basée sur le plus ancien manuscrit disponible. Évidemment, on n'a aucune certitude sur ce que pensait véritablement Euclide, mais on peut penser que cette version est proche de l'original.

La série des définitions se termine à la trente-cinquième par les parallèles. « Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre. » Ah bon ? prolongées à l'infini, hein ? et c'est quoi au juste l'infini je vous prie ?

Bref : viennent ensuite les postulats. La traduction littérale du mot grec est « demande ». Au sens « ce que l'on demande de pouvoir faire ». Par exemple, on demande de conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque. En termes modernes, joindre deux points par un segment de droite. Ou bien encore, prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie. Une droite finie, c'est encore un segment. Ensuite, on demande de pouvoir tracer un cercle de centre et de rayon donnés. Les trois premières demandes paraissent bien raisonnables, elles devraient pouvoir être accordées sans trop de négociations.

Les postulats d'Euclide

Euclide, Éléments, livre I (ca. 280 av. J.-C.)



55. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

Tous les angles droits sont égaux entre eux : le quatrième postulat n'a pas vraiment l'air d'une demande, mais plutôt d'un axiome. Ah oui, mais nous n'allons pas rentrer dans le débat sur les statuts respectifs chez Euclide, des définitions, postulats, axiomes, propositions, théorèmes. On a écrit des milliers de pages là-dessus sans se mettre d'accord. Admettons juste que l'auteur a le droit d'appeler ce qu'il veut comme il le veut.

Peut-être, mais tout de même, regardez le cinquième postulat. Il n'a pas vraiment l'air d'une demande. Déjà son énoncé est beaucoup plus long que les autres. « Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits ».

Deux droits, c'est deux angles droits : π ou 180 degrés comme vous voudrez.

3 Postulat des parallèles

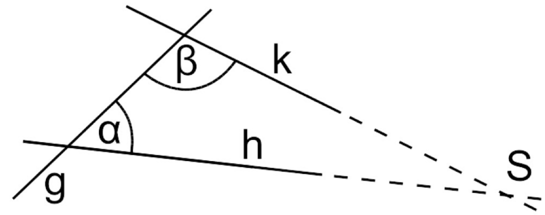
Avec une figure, ce sera plus clair. Le segment g coupe les deux segments h et k. La somme des deux angles α et β est inférieure à π. Le postulat dit que si on prolonge les deux segments h et k du côté de ces deux angles, on rencontrera un point d'intersection grand S.

Mais il n'est pas question de parallèles. Pourquoi donc appeler cet énoncé « postulat des parallèles » ? Déjà, observez que la somme des angles de l'autre côté vaut 2π moins la précédente. Donc soit le cas dont parle Euclide a lieu, d'un côté ou de l'autre, soit la somme des angles intérieurs vaut exactement π de chaque côté, auquel cas les droites seront parallèles.

Contrairement à ce que vous lirez souvent, le fait qu'on puisse mener par un point une parallèle et une seule à une droite donnée n'est pas affirmé par Euclide. Ce n'est qu'un des multiples énoncés équivalents au postulat d'Euclide.

En plus de la longueur de l'énoncé, ce qui a tout de suite attiré l'attention sur le postulat des parallèles, c'est qu'Euclide ne l'utilise pas au début. Comme s'il retardait l'échéance. Il attend la proposition 27.

Postulat des parallèles
Euclide, Éléments, livre I (ca. 280 av. J.-C.)



4 Livre I, Propositions 27, 28, 29

Les propositions 27 et 28 sont deux conditions suffisantes de parallélisme, portant sur les angles, alternes, intérieurs ou extérieurs. La proposition 29 est la réciproque.

Une fois connues ces relations d'angles, Euclide en déduit la transitivité du parallélisme, c'est la proposition trente. « Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles. » Puis la proposition 31 explique comment tracer une parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Arrive ensuite la proposition 32.

Livre I, Propositions 27, 28, 29
Euclide, Éléments (ca. 280 av. J.-C.)

PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.

PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

PROPOSITION XXIX.

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

5 Livre I, Proposition 32

Mais si vous savez bien : Pascal à treize ans, tout seul avec du charbon sur le carrelage de la cuisine, qui redécouvre tout seul la géométrie jusqu'à la proposition 32 : la somme des trois angles intérieurs du triangle est égale à deux droits.

Pour le démontrer, Euclide mène par un sommet, la parallèle au côté opposé. Il utilise donc la proposition 31, qui elle-même utilise les propositions 27 à 29, qui ont été démontrées à partir du cinquième postulat. Oui, mais il se trouve que la Proposition 32 est un énoncé équivalent au postulat des parallèles.

Alors, juste pour vous faire sentir la difficulté qui a mis en échec tant de mathématiciens pendant si longtemps, je vous propose une devinette.

Livre I, Proposition 32
Euclide, Éléments (ca. 280 av. J.-C.)

PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés ; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

6 Démonstration (?) de la Proposition 32

Vous parcourez les trois côtés d'un triangle, en partant de grand A. Vous regardez dans la direction de petit b, et vous marchez le long du segment rouge jusqu'à grand B. Arrivé là, vous tournez à gauche, et vous parcourez le côté bleu jusqu'à grand C. Puis vous tournez encore à gauche vers petit a, et vous marchez jusqu'à grand A. Enfin, vous tournez une dernière fois à gauche pour retrouver votre direction de départ.

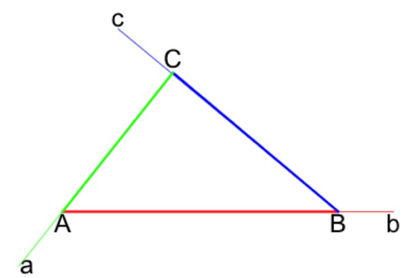
Puisque vous êtes revenus à votre position initiale, vous avez fait exactement un tour sur vous-même, soit 2π. Vous avez tourné en tout des trois angles extérieurs du triangle, donc trois π moins la somme des angles intérieurs. Donc la somme des angles intérieurs vaut π. CQFD, pas besoin de parallèles.

Maintenant la devinette. Elle est double. D'abord, pourquoi cette démonstration est-elle fausse, et même mieux, pourquoi illustre-t-elle l'avertissement d'Aristote ? Ensuite, qui a sorti cette bourde ?

Vous avez droit à une indication. C'était un mathématicien allemand, professeur à Göttingen au début du dix-neuvième siècle.

Vous avez trouvé ? Non ? Bon allez, je suis trop faible ; une dernière indication : son second prénom était Friedrich. Rendez-vous à la fin de l'histoire.

Démonstration (?) de la Proposition 32



7 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

Vous commencez à le connaître, depuis le temps : d'Alembert ! On peut toujours compter sur lui pour dire aux autres ce qu'il faut faire.

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

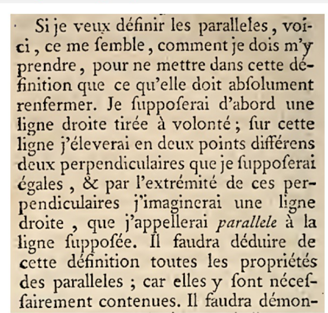
8 elles y sont nécessairement contenues

« Si je veux définir les parallèles, voici, ce me semble, comment je dois m'y prendre, pour ne mettre dans cette définition que ce qu'elle doit absolument renfermer. Je supposerai d'abord une ligne droite tirée à volonté ; sur cette ligne, j'élèverai en deux points différents deux perpendiculaires que je supposerai égales, et par l'extrémité de ces perpendiculaires j'imaginerai une ligne droite que j'appellerai parallèle à la ligne supposée. Il faudra déduire de cette définition toutes les propriétés des parallèles ; car elles y sont nécessairement contenues. »

Ben voyons : comme s'il était le premier à avoir pensé que deux parallèles sont équidistantes ! Il remarque bien qu'une fois définie une parallèle en élevant deux segments perpendiculaires identiques, il convient de vérifier que la droite construite ne dépend pas des deux segments, mais il se garde bien de dire comment faire.

elles y sont nécessairement contenues

d'Alembert, Sur les éléments de géométrie (1759)



Si je veux définir les paralleles, voici, ce me ſemble, comment je dois m'y prendre, pour ne mettre dans cette définition que ce qu'elle doit abſolument renfermer. Je ſuppoſerai d'abord une ligne droite tirée à volonté ; ſur cette ligne j'éleverai en deux points différens deux perpendiculaires que je ſuppoſerai égales, & par l'extrémité de ces perpendiculaires j'imaginerai une ligne droite, que j'appellerai *parallele* à la ligne ſuppoſée. Il faudra déduire de cette définition toutes les propriétés des paralleles ; car elles y ſont néceſſairement contenues. Il faudra démon-

9 le scandale des élémens de Géométrie

« La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles, sont donc l'écueil, et pour ainsi dire, le scandale des élémens de géométrie. Je ne crains point que les mathématiciens philosophes taxent de puérilité les réflexions que je viens de faire ; puisqu'elles ont pour objet, non-seulement de porter la plus grande précision dans une science dont la précision est l'âme, mais de montrer par des exemples frappants la nécessité et la rareté des bonnes définitions. »

Ce qui est surtout frappant, c'est la désinvolture avec laquelle d'Alembert traite vingt siècles d'efforts de définition et de démonstration. Ah si seulement il s'était intéressé à ce que disait déjà Saccheri un quart de siècle auparavant… Mais n'allons pas trop vite.

Que le postulat des parallèles, soit un écueil et un scandale, les Grecs le savaient déjà. Certains pensent même qu'Euclide avait déjà cherché en vain une démonstration avant de se résoudre à en faire un postulat. Notre source principale sur les tentatives grecques est le commentaire de Proclus sur le premier livre des Éléments d'Euclide.

Proclus est en quelque sorte le dernier témoin des mathématiques grecques. Venant après de nombreuses tentatives antérieures, son opinion est bien arrêtée.

le scandale des élémens de Géométrie

d'Alembert, Sur les éléments de géométrie (1759)

La définition & les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes paralleles, sont donc l'écueil, & pour ainsi dire, le scandale des élémens de Géométrie. Je ne crains point que les Mathématiciens Philosophes taxent de puérilité les réflexions que je viens de faire ; puisqu'elles ont pour objet, non-seulement de porter la plus grande précision dans une science dont la précision est l'ame, mais de montrer par des exemples frappans la nécessité & la rareté des bonnes définitions.

10 Commentaire sur le premier livre des Éléments

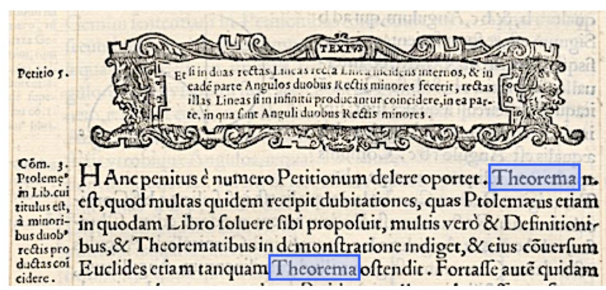
« Cet énoncé doit être absolument rayé des postulats ; car c'est un théorème. Il offre de nombreuses difficultés que Ptolémée s'est proposé d'étudier dans un certain livre, et dont la démonstration exige beaucoup de définitions et de théorèmes. Euclide nous montre d'ailleurs la réciproque de ce postulat comme étant aussi un théorème. »

La réciproque est donc démontrée par Euclide ? Mais quelle réciproque ? C'est la proposition 17. « Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits ».

Dans le passage que vous voyez, Proclus cite Ptolémée, qui vivait au second siècle après Jésus-Christ, et un peu plus loin Géminus, qui vivait au premier siècle avant Jésus-Christ. Il est impossible de savoir quand les tentatives de démonstration du cinquième postulat ont commencé : la plupart des textes ont été perdus. De toutes façons, ces tentatives ressemblaient probablement à celle de Ptolémée. Proclus la critique, sans se rendre compte que la sienne n'est pas meilleure. Chaque démonstration utilise comme présupposé un résultat qui est en fait équivalent au postulat des parallèles : exactement la faute de logique que dénonce Aristote.

Commentaire sur le premier livre des Éléments

Proclus de Lycie (412–485)


TEXTVS

Petitio 5. Et si in duas rectas Lineas recta Linea incidens internos, & in eadē parte Angulos duobus Rectis minores fecerit, rectas illas Lineas si in infinitū producantur coincidere, in ea parte, in qua sunt Anguli duobus Rectis minores.

Cōm. 3. Ptolemę' in Lib. cui titulus est, à minoribus duob' rectis productas coincidere.

HAnc penitus è numero Petitionum delere oportet. Theorema n. est, quod multas quidem recipit dubitationes, quas Ptolemæus etiam in quodam Libro soluere sibi proposuit, multis verò & Definitionibus, & Theorematibus in demonstratione indiget, & eius cōuersum Euclides etiam tanquam Theorema ostendit. Fortasse autē quidam

11 Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Parmi les Arabes, nombreux sont ceux qui ont proposé leurs démonstrations, souvent en critiquant leurs prédécesseurs, toujours en oubliant de voir que la leur avait autant de présupposés. Je ne vous en citerai que quatre, parmi les plus grands.

Thabit ibn Qurra, dont je vous parle aussi en arithmétique et en analyse, est un des premiers à s'être posé la question à Bagdad. Il a écrit deux mémoires sur le sujet. Le titre de l'un des deux est l'énoncé du postulat : « Si on mène deux droites suivant deux angles inférieurs à deux droits, elles se rencontrent ». Ibn Qurra y reprend la définition des droites parallèles comme étant équidistantes. Il fonde l'équidistance sur la translation d'un segment perpendiculaire. Aussi bien la définition des parallèles par équidistance, que l'utilisation du mouvement en géométrie sont des notions bien antérieures aux Arabes. Ce qui est nouveau chez ibn Qurra, c'est sa discussion du mouvement en tant que principe de démonstration. Il se montre extrêmement prudent :

Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Si on mène deux droites suivant deux angles. . .

12 une certaine prudence, peu accessible à l'entendement

« Si donc nous imaginons le déplacement de la droite, son extrémité tenant à une droite fixe en même temps que d'autres conditions, la chose n'est pas familière ; aussi ne peut-on porter, à partir de cela, de jugement d'égalité qu'avec une certaine prudence, peu accessible à l'entendement de celui qui en aborde l'examen, et qui lui sera difficile. »

Nous voilà prévenu. Mais quel est ce déplacement de droite si difficile à comprendre ?

une certaine prudence, peu accessible à l'entendement

ibn Qurra (826–901) Si on mène deux droites suivant deux angles. . .

Si donc nous imaginons le déplacement de la droite, son extrémité tenant à une droite fixe en même temps que d'autres conditions, la chose n'est pas familière[. . .] ; aussi ne peut-on porter, à partir de cela, de jugement d'égalité qu'avec une certaine prudence, peu accessible à l'entendement de celui qui en aborde l'examen, et qui lui sera difficile.

13 un seul mouvement simple et rectiligne

« Si nous imaginons un solide tout entier en mouvement dans une seule direction, d'un seul mouvement simple et rectiligne, alors chacun de ses points se meut d'une manière rectiligne et trace donc par son passage une droite suivant laquelle il passe. »

un seul mouvement simple et rectiligne

ibn Qurra (826–901) Si on mène deux droites suivant deux angles. . .

Si nous imaginons un solide tout entier en mouvement dans une seule direction, d'un seul mouvement simple et rectiligne, alors chacun de ses points se meut d'une manière rectiligne et trace donc par son passage une droite suivant laquelle il passe.

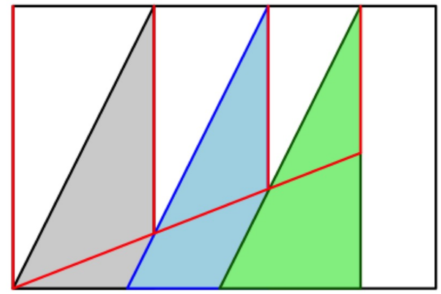
14 Mésolabe

Au fond ce que Thabit cherche à théoriser, c'est l'idée du Mésolabe, cet instrument qu'Ératosthène avait inventé pour résoudre la duplication du cube. Si une équerre se déplace en translation, en maintenant un de ses côtés le long d'une droite, alors le troisième sommet du triangle ne peut pas décrire autre chose qu'une droite parallèle à la première.

Mais ibn Qurra, malgré toute sa rigueur et sa prudence, ne se rend pas compte de la différence entre l'instrument et la théorie. Rien ne lui permet d'affirmer que la courbe décrite par la pointe de l'équerre est bien une droite.

Mésolabe

Ératosthène (ca 276–194 av. J.-C.)



15 Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

Pourtant les techniques introduites par ibn Qurra, et en particulier son utilisation du mouvement dans les démonstrations vont faire école. Son continuateur le plus célèbre est al-Haytham, qui lui aussi fonde son analyse des postulats sur le mouvement.

Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

Livre expliquant les Postulats d'Euclide dans les Éléments

16 Omar Khayyām (1048–1131)

Presque un siècle après, vient Omar Khayyam. Je vous ai suffisamment vanté la beauté et la hardiesse de ses quatrains sur le vin et l'amour, n'insistons pas. En plus de ses poésies, il est le premier à avoir classifié les équations du troisième degré, et à les avoir toutes résolues géométriquement par des intersections de coniques.

Omar Khayyam s'oppose vigoureusement à l'utilisation du mouvement en géométrie.

Omar Khayyām (1048–1131)

Opuscule sur l'explication des postulats problématiques du Livre d'Euclide

17 des propos qui n'ont aucun rapport avec la géométrie

« Ce sont là des propos qui, pour plusieurs raisons, n'ont absolument aucun rapport avec la géométrie : Comment peut-on déplacer la ligne de telle sorte qu'elle soit constamment perpendiculaire aux deux lignes ? et comment démontrer que ceci est possible ? Quel rapport y a-t-il entre la géométrie et le mouvement ? Et que signifie le mouvement ? »

Effectivement, Omar Khayyam pose les bonnes questions. Il sait néanmoins retenir du travail de ses prédécesseurs la figure fondamentale du trapèze isocèle : deux côtés égaux, orthogonaux à une même droite. Ce sera la base de la plupart des travaux qui suivront.

des propos qui n'ont aucun rapport avec la géométrie

Khayyām, Opuscule sur l'explication des postulats problématiques du Livre d'Euclide

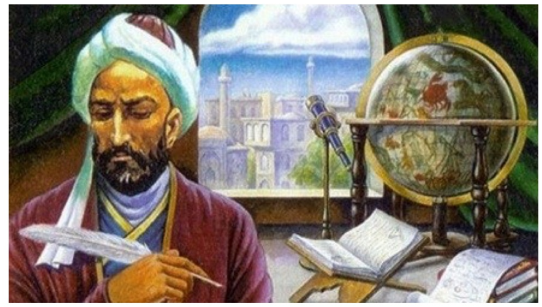
Ce sont là des propos qui, pour plusieurs raisons, n'ont absolument aucun rapport avec la géométrie : Comment peut-on déplacer la ligne de telle sorte qu'elle soit constamment perpendiculaire aux deux lignes ? et comment démontrer que ceci est possible ? Quel rapport y a-t-il entre la géométrie et le mouvement ? Et que signifie le mouvement ?

18 Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201–1274)

En particulier al-Tusi, dans son « Opuscule qui délivre des doutes concernant les droites parallèles », suit exactement la démarche préconisée par d'Alembert. Étant donnée une droite et deux segments égaux qui lui sont orthogonaux, la droite qui joint ces deux segments est par définition parallèle à la première. Admettre son unicité est équivalent à admettre le cinquième postulat d'Euclide.

On a, sous le nom d'al-Tusi, une version des éléments d'Euclide qui a été un des premiers ouvrages en arabe, imprimés à Rome. Je vous le cite assez souvent, mais sa paternité est contestée. Selon certains, l'auteur pourrait être le fils d'al-Tusi. Bref, cette version est une des voies de diffusion en Occident des travaux arabes sur le postulat des parallèles.

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201–1274)
Opuscule qui délivre des doutes concernant les droites parallèles



19 Levi Ben Gershom (1288–1344)

Bon, j'en ai assez des portraits qui font semblant d'être ressemblants. Levy ben Gersom, ou Gersonide, c'est l'inventeur du bâton de Jacob, un appareil de visée. Je n'en ai pas de portrait attesté. Alors tant vaut ce rabbin peint par Rembrandt vous ne trouvez pas ?

Bref ; Gersonide est l'auteur d'une démonstration du postulat des parallèles, comme tant d'autres. Comment sait-on qu'il s'est inspiré d'al-Tusi ? Il démontre que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, sans utiliser le postulat. Or al-Tusi ou le pseudo al-Tusi est le premier à l'avoir fait, et sa méthode ressemblait fort à celle de Gersonide.

Levi Ben Gershom (1288–1344)
Rembrandt (1606–1669) Portrait de Rabbin (1635)

20 Christophorus Clavius (1538-1612)

Un des premiers chrétiens à considérer le problème est Clavius. C'est un Allemand né à Bamberg, éduqué chez les Jésuites. Il a reçu une partie de sa formation au Portugal, a enseigné dans les collèges Jésuites de Rome, et d'Ingolstadt.

Sur cette représentation, vous le voyez tenir de la main gauche son livre sur la sphère. C'est un ouvrage d'astronomie où tout en reconnaissant l'apport de Copernic, il se montre prudent face aux nouvelles théories.

De la main droite, il écrit ses explications sur le calendrier grégorien. Le personnage en rouge dans le médaillon est le pape Grégoire XIII.

Christophorus Clavius (1538-1612)
Orbansall, collège jésuite d'Ingolstadt

21 Calendrier grégorien (1582)

L'année solaire étant longue de 365 jours un quart, une journée supplémentaire tous les quatre ans devait permettre de rattraper le décalage de l'année civile avec l'année solaire. C'était le principe du calendrier julien, décidé par Jules César en 46 avant Jésus-Christ. Le problème est que l'année est légèrement plus courte que 365 jours un quart, et un certain retard s'était accumulé au fil des siècles. C'est ce retard que le pape Grégoire avait chargé Clavius de rattraper.

Clavius avait préconisé deux mesures. La première consistait à décider qu'il y aurait une seule nuit entre le 4 et le 15 octobre 1582. Dix jours rattrapés en quelques heures. La seconde mesure demandait que toutes les années multiples de quatre soient bissextiles, sauf les multiples de cent, mais en incluant les multiples de 400. Elle est toujours appliquée : l'an mille neuf cent n'était pas bissextile, l'an deux mille l'était.

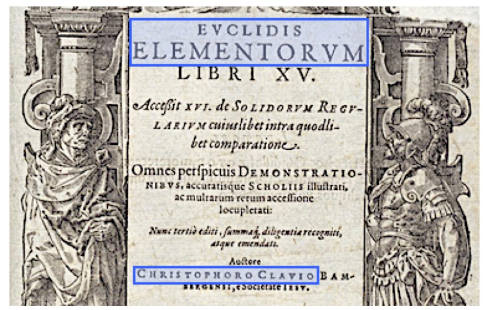
Calendrier grégorien (1582)
Grégoire XIII (1502–1585)

22 Euclidis Elementorum (1591)

Je vous parle ailleurs du Ratio Studiorum, ce plan d'étude des collèges jésuites, qui a influencé l'enseignement des pays catholiques pendant presque deux siècles. Eh bien Clavius fait partie de ceux qui ont conçu ce plan d'études, et il a pesé de tout son poids pour assurer la place des mathématiques. Comme l'enseignement des mathématiques devait se baser sur les Éléments d'Euclide, c'était bien la moindre des chose que Clavius propose sa propre version.

C'est beaucoup plus qu'une traduction : 800 pages denses dont le texte d'Euclide occupe une part beaucoup moins grande que les commentaires de Clavius.

Euclidis Elementorum (1591)
Christophorus Clavius (1538-1612)



EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.

Accessit XVI. de Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

Omnes perspicuis Demonstrationibus, accuratisque Scholiis illustrati, ac multarum rerum accessione locupletati:

Nunc tertiò editi, summaq; diligentia recogniti, atque emendati.

Auctore

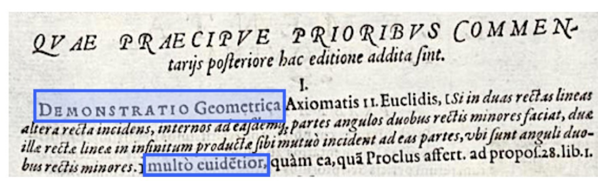
Christophoro Clavio Bambergensi, e Societate Iesv.

23 multò euidẽtior, quàm ea, quã Proclus assert

Parmi les ajouts de cette édition de 1591, celui que Clavius met en avant, c'est une démonstration géométrique du postulat des parallèles, beaucoup plus évidente, dit-il, que celle de Proclus. Remarquez que Clavius ne parle pas du cinquième postulat, mais de l'axiome 11. Cette dénomination sera souvent adoptée après lui.

Clavius a bien étudié Proclus, mais il cite aussi les Arabes, même s'il se plaint ailleurs de n'avoir pas eu accès à des traductions.

multò euidẽtior, quàm ea, quã Proclus assert
Clavius, Euclidis Elementorum (1591)



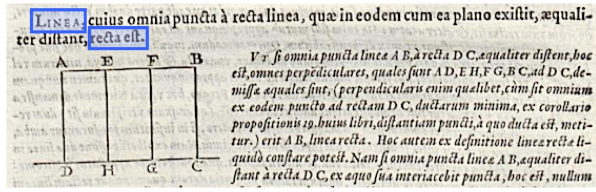
QVAE PRAECIPVE PRIORIBVS COMMENtarijs posteriore hac editione addita sint.

I.

Demonstratio Geometrica Axiomatis 11. Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duae illae rectae lineae in infinitum productae sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.] multò euidẽtior, quàm ea, quã Proclus affert. ad propos. 28. lib. 1.

24 Linea æqualiter distant, recta est

Linea æqualiter distant, recta est
Clavius, Euclidis Elementorum (1591)



LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.

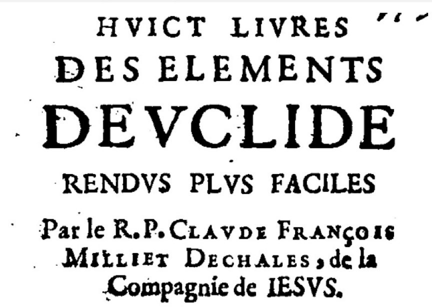
A E F B / D H G C

Vt si omnia puncta lineæ A B, à recta D C, æqualiter distent, hoc est, omnes perpẽdiculares, quales sunt A D, E H, F G, B C, ad D C, demissæ æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cùm sit omnium ex eodem puncto ad rectam D C, ductarum minima, ex corollario propositionis 19. huius libri, distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit A B, linea recta. Hoc autem ex definitione lineæ rectæ liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ A B, æqualiter distant à recta D C, ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum

En tout cas, il a parfaitement perçu la difficulté, qui consiste à démontrer qu'une ligne dont tous les points sont à la même distance d'une droite donnée est une ligne droite. Bien sûr, vous vous en doutez, sa démonstration n'en est pas vraiment une.

25 Huict livres des Elements (1672)

Huict livres des Elements (1672)
Claude François Milliet De Challes (1621–1678)



HVICT LIVRES
DES ELEMENTS
DEVCLIDE
RENDVS PLVS FACILES
Par le R. P. CLAVDE FRANÇOIS MILLIET DECHALES, de la Compagnie de IESVS.

La version de Clavius a eu une grande influence, non seulement sur les recherches qui ont suivi, mais surtout sur l'enseignement, en particulier dans les collèges jésuites bien sûr.

Ceci est une des premières éditions du manuel d'enseignement du père Milliet de Challes, un Jésuite auteur de nombreux manuels à succès. Les nombreuses rééditions et traductions se sont succédées jusqu'au siècle suivant.

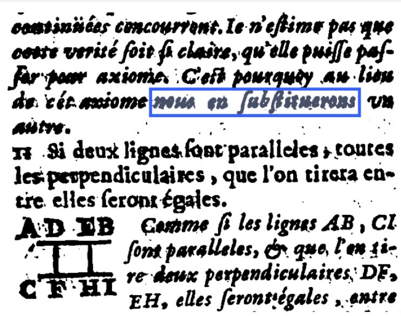
26 au lieu de cet axiome, nous en substituerons un autre

S'agissant d'un livre d'enseignement, Milliet de Challes ne se lance pas dans une démonstration du postulat d'Euclide. Il l'énonce, puis il dit : « Je n'estime pas que cette vérité soit si claire, qu'elle puisse passer pour axiome. C'est pourquoi, au lieu de cet axiome, nous en substituerons un autre : Si deux lignes sont parallèles, toutes les perpendiculaires, que l'on tirera entre elles sont égales. »

Le problème est que cette substitution intervient quatre pages après que les parallèles aient été définies comme « des lignes droites qui ne se rapprochent et ne s'éloignent point l'une de l'autre, mais sont toujours équidistantes ».

Et la définition des parallèles arrive après celle du rectangle, qui est une figure à quatre côtés, dont tous les angles sont droits. Or précisément, l'existence d'une telle figure est équivalente au postulat d'Euclide. Le premier à s'en rendre compte est un autre Jésuite, italien celui-là.

au lieu de cet axiome, nous en substituerons un autre
Milliet De Challes, Huict livres des Elements (1672)



continuées concourrent. Ie n'estime pas que cette verité soit si claire, qu'elle puisse passer pour axiome. C'est pourquoy au lieu de cét axiome nous en substituerons un autre.

11 Si deux lignes sont paralleles, toutes les perpendiculaires, que l'on tirera entre elles seront égales.

A D E B / C F H I

Comme si les lignes AB, CI sont paralleles, & que l'on tire deux perpendiculaires DF, EH, elles seront égales, entre

27 Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733)

Je n'ai pas de portrait de Saccheri à vous montrer, mais juste une anecdote à vous raconter. Son nom est proche du mot qui désigne l'échiquier en italien, la « sacchiera ».

On raconte que Sacchieri se plaisait à provoquer simultanément trois adversaires. Puis tournant le dos aux échiquiers et sans jamais les regarder, il jouait les trois parties tout en causant avec d'autres assistants sur les sujets les plus abstraits. À l'ébahissement de ceux qui voyaient pour la première fois ce spectacle, après un jeu correct, conduit sans se tromper, il faisait échec et mat, dans les trois parties.

Bon, ne nous emballons pas : le record du monde du nombre de parties simultanées à l'aveugle est de 48.

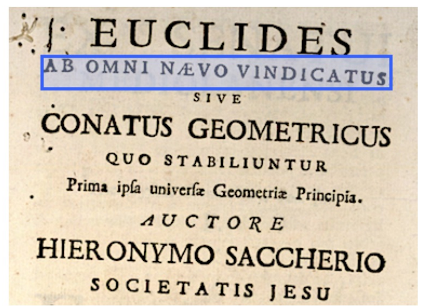
Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733)
Thure Cederström, Joueurs d'échecs (1843–1924)

28 Euclides ab omni nævo vindicatus (1733)

Ce qui vaut à Saccheri de figurer dans cette histoire, ce ne sont pas ses exploits aux échecs, mais ce livre : « Euclide vengé de toute tache, ou tentative géométrique dans laquelle les principes de la géométrie universelle sont établis ».

Selon Saccheri, trois taches ont été détectées dans Euclide. La première est le fameux postulat, les deux autres portent sur les rapports et la proportionnalité dans les livres cinq et six. Saccheri traite les trois problèmes, comme d'ailleurs Omar Khayyam avant lui. Les arguments de Saccheri ressemblent à ceux de Khayyam, mais on ignore si Saccheri les connaissait.

Euclides ab omni nævo vindicatus (1733)
Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733)


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU

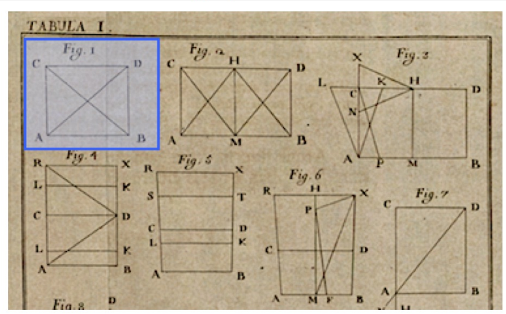
29 L'hypothèse de l'angle aigu

Il suffit de regarder les premières figures pour se rendre compte, que comme Khayyam et d'autres avant lui, Saccheri part d'un quadrilatère formé de deux segments perpendiculaires à une même droite, et égaux. Il a donc deux angles droits en A et B. Il démontre que les deux angles en C et D sont nécessairement égaux. À partir de là, il y a trois hypothèses. Soit l'angle en C et D est droit. C'est le cas euclidien. Soit il est obtus. Mais ceci entraîne que les droites sont finies, comme en géométrie sphérique, et ce cas est écarté.

Reste à traiter le cas où l'angle en C et D est aigu. Là, Saccheri se lance dans une suite de propositions démontrées de manière parfaitement rigoureuse, mais qui ne prouvent qu'une chose : l'hypothèse de l'angle aigu ne conduit à aucune contradiction. Certaines de ces propositions font d'ailleurs partie de nos jours des résultats de base en géométrie hyperbolique.

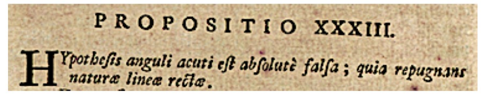
Pourtant Saccheri est tellement convaincu de sa mission, qu'il en arrive à la conclusion qu'il souhaitait.

L'hypothèse de l'angle aigu
Saccheri, Euclides ab omni nævo vindicatus (1733)

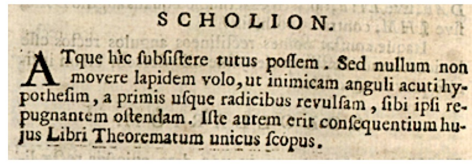


30 elle répugne à la nature de la ligne droite

elle répugne à la nature de la ligne droite
Saccheri, Euclides ab omni nævo vindicatus (1733)


PROPOSITIO XXXIII.

Hypothesis anguli acuti est absolutè falsa; quia repugnans naturæ lineæ rectæ.


SCHOLION.

Atque hic subsistere tutus possem. Sed nullum non movere lapidem volo, ut inimicam anguli acuti hypothesim, a primis usque radicibus revulsam, sibi ipsi repugnantem ostendam. Iste autem erit consequentium hujus Libri Theorematum unicus scopus.

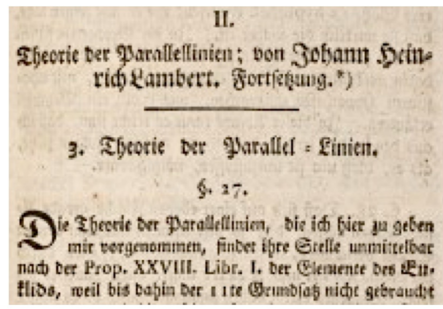
« Proposition 33 : L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse ; car elle répugne à la nature de la ligne droite. »

Suivent quelques pages de démonstrations, qui se terminent par cette scholie où il dit : « Je pourrais m'arrêter ici. Mais je ne veux laisser aucune pierre sans la retourner, de manière à montrer l'hypothèse hostile de l'angle aigu, arrachée de ses propres racines, répugnante à elle-même. Ce sera le seul but des théorèmes suivants. »

Et c'est reparti pour quelques dizaines de pages supplémentaires.

31 Theorie der Parallel Linien (1786)

Theorie der Parallel Linien (1786)
Johann Heinrich Lambert (1728–1777)


II.

Theorie der Parallellinien; von Johann Heinrich Lambert. Fortsetzung.*)

3. Theorie der Parallel-Linien.

§. 17.

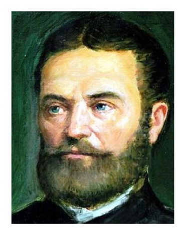
Die Theorie der Parallellinien, die ich hier zu geben mir vorgenommen, findet ihre Stelle unmittelbar nach der Prop. XXVIII. Libr. I. der Elemente des Euklids, weil bis dahin der 11te Grundsatz nicht gebraucht

On ignore si Saccheri était aussi convaincu qu'il voulait le paraître. Le fait que son livre n'ait été publié que peu avant sa mort est peut-être une indication de ses doutes. Dans le cas de la théorie des lignes parallèles de Lambert, il n'y a pas d'ambigüïté : il ne l'a pas publiée de son vivant, conscient de ne pas être parvenu à une conclusion définitive. Lambert, c'est celui qui a démontré l'irrationalité de π. Il était allé plus loin que Saccheri, en particulier en ce qui concerne les calculs algébriques en géométrie non-euclidienne. Mais ni le travail de Saccheri ni celui de Lambert n'ont véritablement eu d'écho.

Ce n'est pas pour autant que les tentatives ont cessé. Toujours aussi décourageantes. Écoutez plutôt l'avertissement de Farkas Bolyai à son fils János. C'est le fils qui raconte.

32 L'insuffisance de la théorie des parallèles

L'insuffisance de la théorie des parallèles
Farkas Bolyai (1775–1856) János Bolyai (1802–1860)



« Mon père me fit remarquer les grandes lacunes et l'insuffisance de la théorie des parallèles ; il me fit voir que, bien que procédant beaucoup mieux que ses prédécesseurs, il n'avait cependant encore rien trouvé de satisfaisant ni de convenable [. . .]

En craignant, non sans raison, que je pourrais y passer toute ma vie vainement et infructueusement, il s'efforça de toutes les manières possibles de me détourner de la continuation de mes recherches et de m'en inspirer l'horreur. »

Heureusement, János Bolyai ne s'est pas laissé arrêter par les avertissements de son père. Voici ce qu'il lui écrit, le 3 novembre 1823.

33 Lettre à son père (3 novembre 1823)

Lettre à son père (3 novembre 1823)
János Bolyai (1802–1860)

« Le but même n'est pas atteint, mais j'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui ; il serait à jamais regrettable qu'elles soient perdues. Lorsque vous les verrez, vous le reconnaîtrez aussi. En attendant je ne puis ici dire autre chose que ceci : *J'ai tiré du néant un nouvel univers.* »

Le but même n'est pas atteint, mais j'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui ; il serait à jamais regrettable qu'elles soient perdues. Lorsque vous les verrez, vous le reconnaîtrez aussi. En attendant je ne puis ici dire autre chose que ceci : *J'ai tiré du néant un nouvel univers.*

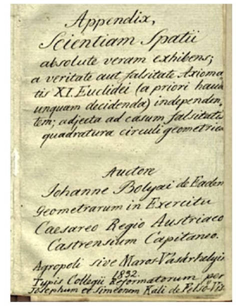
34 Appendix Scientiam Spatii (1831)

Ce nouvel univers, il le décrit dans un mémoire de 24 pages, destiné à être publié en appendice à un ouvrage de son père. Le titre est « Science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome onze d'Euclide, que l'on ne pourra jamais établir a priori. Suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'axiome onze. »

Les Bolyai étaient originaires de la Transylvanie et parlaient le hongrois. Le père, Farkas, avait étudié les mathématiques à Göttingen où il était devenu l'ami de Gauss. Il était donc tout naturel que le père envoie le mémoire du fils à Gauss en priorité. D'autant que dans leur jeunesse à Göttingen, la théorie des parallèles avait déjà fait partie de leurs sujets de conversation. Le début de la réponse de Gauss a dû faire l'effet d'une douche froide.

Appendix Scientiam Spatii (1831)

János Bolyai (1802–1860)



35 je ne puis louer ce travail

« Si je commence en disant que *je ne puis louer ce travail*, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement ; mais je ne puis dire autre chose ; le louer serait me louer moi-même ; en effet, le contenu tout entier de l'ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit, coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans. »

Gauss ne bluffait pas, sa correspondance l'a abondamment prouvé depuis. Il réfléchissait au problème depuis ses années d'études, au moins depuis 1799, et était arrivé depuis longtemps à la conclusion que le postulat d'Euclide n'était pas démontrable, et que l'hypothèse de l'angle aigu conduisait à une géométrie tout aussi cohérente que celle d'Euclide. D'ailleurs il se montre plutôt content d'avoir été devancé par Janos Bolyai.

je ne puis louer ce travail

Gauss, Lettre à Farkas Bolyai (6 mars 1832)

Si je commence en disant que *je ne puis louer ce travail*, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement ; mais je ne puis dire autre chose ; le louer serait me louer moi-même ; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit, coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans.

36 une agréable surprise

« C'était [...] mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi. Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière aussi remarquable. »

Et encore, quand il écrivait cette lettre, Gauss ignorait que quelqu'un d'autre l'avait également devancé, indépendamment de Bolyai.

une agréable surprise

Gauss, Lettre à Farkas Bolyai (6 mars 1832)

C'était[...] mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi. Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière aussi remarquable.

37 Nicolaï Ivanovitch Lobatchevski (1792–1856)

Nicolaï Ivanovitch Lobatchevski (1792–1856)

Ce quelqu'un est Lobatchevski, professeur à l'université de Kazan, à l'ouest de la Russie. Il a commencé à communiquer ses résultats en 1826, sa première publication sur le sujet date de 1829, donc avant celle de Bolyai. Gauss n'en a eu connaissance que dans les années 1840. Il se montre d'ailleurs aussi généreux et appréciatif qu'envers Bolyai.

38 L'auteur a traité la matière de main de maître

L'auteur a traité la matière de main de maître

Gauss, Lettre à Schumacher (28 novembre 1846)

Vous savez que depuis cinquante-quatre ans je partage les mêmes convictions, sans parler ici de certains développements qu'ont reçus, depuis, mes idées sur ce sujet. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatchevski aucun fait nouveau pour moi ; mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique.

« Vous savez que depuis cinquante-quatre ans je partage les mêmes convictions, sans parler ici de certains développements qu'ont reçus, depuis, mes idées sur ce sujet. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatchevski aucun fait nouveau pour moi ; mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique. »

Ah tiens au fait, en parlant de Gauss, vous avez trouvé la solution de l'énigme ?

39 Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832)

Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832)

Le mathématicien de Göttingen qui a sorti la fausse démonstration de la proposition 32 était Bernhard Friedrich Thibaut. En plus d'avoir écrit le manuel dans lequel elle apparaît, il a aussi enseigné les mathématiques à Schopenhauer à l'automne 1809. Finalement, si Schopenhauer a développé l'allergie à Euclide que je vous ai déjà racontée, il ne faut peut-être pas s'en étonner.

40 références

références

- V. De Risi (2016) The development of Euclidean axiomatics, *Archive for history of exact sciences*, 70(6), 591–676
- K. Jaouiche (1986) *La théorie des parallèles en pays d'Islam : contribution à la préhistoire des géométries non-euclidiennes*, Paris : Vrin
- J.-C. Pont (1986) *L'aventure des parallèles. Histoire de la géométrie non euclidienne : précurseurs et attardés*, Bern : Lang
- R. Rashed ed. (2009) *Thābit ibn Qurra, science and philosophy in ninth-century Baghdad*, Berlin : de Gruyter
- S. Rommevaux (2005) *Clavius une clé pour Euclide* au XVI^{e} *siècle*, Paris : Vrin
- B. A. Rosenfeld (1988) *A history of non-Euclidean geometry*, New York : Springer

Non, sérieux, vous n'avez tout de même pas cru une seule seconde que Gauss avait pu sortir une démonstration fausse ? Comment-ça, je n'ai donné que la moitié de la réponse à la devinette ? Vous trouvez que je n'ai pas assez dit pourquoi la démonstration de Thibaut est fausse ? Eh bien vous n'avez qu'à demander à Gauss, l'explication se trouve dans sa correspondance… comme tout le reste d'ailleurs !