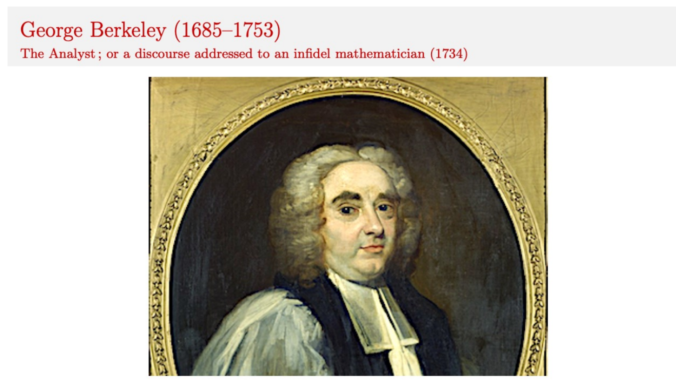
0 La vibration des cordes

Je vais tenter de vous décrire la difficulté dans laquelle se trouvait l'analyse au dix-huitième siècle, faute de définitions rigoureuses et en premier lieu faute d'avoir éclairci la notion de fonction.

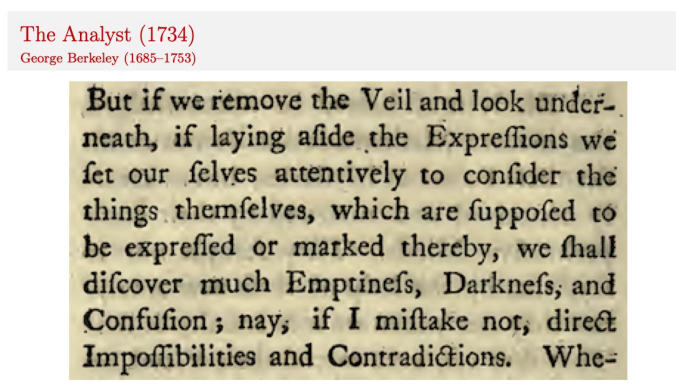
La vibration des cordes est l'un des problèmes où les controverses sont nées de l'absence de définition correcte. Quant à cette princesse, soyez un peu patient, elle finira bien par entrer en scène !

1 George Berkeley (1685–1753)



Je vous ai déjà parlé des oppositions au nouveau calcul différentiel de Newton et Leibniz. L'histoire intitulée « La paille et la poutre » fait la part belle à ce prêtre irlandais, et à son pamphlet, « L'analyste, ou discours adressé à un mathématicien impie ». En voici un petit extrait, pour vous rafraîchir la mémoire.

2 The Analyst (1734)


The Analyst (1734)

George Berkeley (1685–1753)

But if we remove the Veil and look underneath, if laying aside the Expressions we set our selves attentively to consider the things themselves, which are supposed to be expressed or marked thereby, we shall discover much Emptiness, Darkness, and Confusion; nay, if I mistake not, direct Impossibilities and Contradictions. Whe-

« Si nous ôtons le voile et regardons dessous, si, mettant de côté les expressions, nous nous proposons de considérer les choses elles-mêmes, qui sont supposées être exprimées ou notées par ces expressions, nous découvrirons beaucoup de vide, d'obscurité et de confusion ; pire, si je ne me trompe, des impossibilités flagrantes et des contradictions. »

Sans doute Berkeley était-il de mauvaise foi ? Oui, certainement, et il n'était pas le seul.

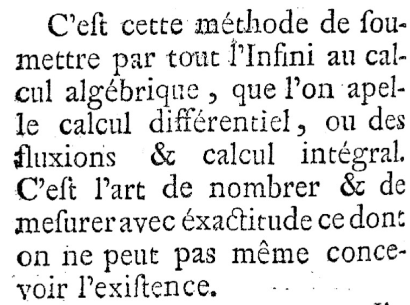
3 François-Marie Arouet, dit Voltaire (1694–1778)

François-Marie Arouet, dit Voltaire (1694–1778)
Lettres Philosophiques (1734)

Voltaire, par contre, était tout acquis aux nouvelles idées. Il avait ramené de son exil en Angleterre une admiration sans borne pour les philosophes anglais, Newton en tête. Ses lettres philosophiques sont écrites à des fins de vulgarisation. Voici la définition qu'il y donne du calcul différentiel.

4 Lettres Philosophiques (1734)

Lettres Philosophiques (1734)
François-Marie Arouet, dit Voltaire (1694–1778)



C'eſt cette méthode de ſoumettre par tout l'Infini au calcul algébrique, que l'on apelle calcul différentiel, ou des fluxions & calcul intégral. C'eſt l'art de nombrer & de meſurer avec éxactitude ce dont on ne peut pas même concevoir l'exiſtence.

« C'est cette méthode de soumettre partout l'infini au calcul algébrique, que l'on appelle le calcul différentiel, ou des fluxions, et calcul intégral. C'est l'art de nombrer et de mesurer avec exactitude ce dont on ne peut même pas concevoir l'existence. »

Bon, ce n'est pas la première fois que nous prenons Voltaire en flagrant délit de n'importe quoi. Le problème, c'est que les mathématiciens de métier n'étaient pas beaucoup plus assurés que lui.

5 Portrait des pères Leseur et Jacquier (1772)

Portrait des pères Leseur et Jacquier (1772)
Thomas Leseur (1703–1770), François Jacquier (1711–1788)

J'ai choisi ces deux prêtres, Leseur et Jacquier, parce qu'ils ont écrit un manuel de calcul intégral, parce qu'on en a ce beau portrait, commandé par Jacquier après la mort de Leseur en souvenir de leur amitié, et enfin parce que Jacquier refera surface un peu plus loin dans cette histoire.

Leseur et Jacquier ont enseigné les mathématiques pendant de longues années. Voici leur définition d'une différentielle, elle date de 1768.

6 Élémens du calcul intégral (1768)

« Lorsqu'on considère la différence grand Dx d'une quantité variable x qui devient $x + Dx$, dans l'instant que cette différence s'évanouit, on l'appelle la *Différentielle* de cette variable x ; et cette même variable x se nomme l'intégrale de sa différentielle Dx. »

Voilà, débrouillez-vous ! On pourrait croire qu'un édifice bâti sur des fondations aussi peu solides ne pouvait pas monter bien haut. Eh bien, c'est tout le contraire ! Depuis les premières résolutions de problèmes physiques comme la chaînette ou la brachistochrone par Leibniz et les frères Bernoulli dans les années 1690, le nouveau calcul différentiel avait volé de succès en succès, et avait vite dépassé le cadre des équations différentielles ordinaires.

L'année 1734, celle de l'Analyste et des Lettres philosophiques, marquait aussi la naissance des équations aux dérivées partielles. Écoutez le témoignage d'un contemporain.

Élémens du calcul intégral (1768)
Thomas Leseur (1703–1770), François Jacquier (1711–1788)

Lors qu'on conſidere la différence Dx d' une quantité variable x qui devient $x+Dx$, dans l' inſtant que cette différence s' evanouït, on l'appelle la *Différentielle* de cette variable x ; & cette même variable x ſe nomme l' *Intégrale* de ſa différentielle Dx. Nous ſup-

7 La généralité des fonctions arbitraires

« Dès 1734, M. Euler avait intégré complètement une équation aux différences partielles : son mémoire est cité par M. d'Alembert dans ses « Réflexions sur la cause générale des vents », qui est le premier ouvrage de physique mathématique où l'on se soit servi de ce nouveau genre de calcul. C'est encore M. Euler qui a dit le premier que rien ne devrait limiter la généralité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales complexes des équations aux différences partielles ; qu'on y devait comprendre les fonctions irrégulières et discontinues. »

Parler de fonctions irrégulières ou discontinues peut nous paraître choquant quand il s'agit d'en prendre des dérivées. C'est que le sens qui était donné à cela au dix-huitième siècle différait du nôtre. Nous y reviendrons dans un moment. En attendant, continuons notre lecture.

La généralité des fonctions arbitraires
Cousin, Introduction à l'étude de l'astronomie physique (1787)

Ainsi, dès 1734, M. Euler avoit intégré complètement une équation aux différences partielles : son mémoire est cité par M. d'Alembert dans ses *Réflexions sur la cause générale des vents*, qui est le premier ouvrage de physique-mathématique où l'on se soit servi de ce nouveau genre de calcul. C'est encore M. Euler qui a dit le premier que rien ne devoit limiter la généralité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales completes des équations aux différences partielles ; qu'on y devoit comprendre les fonctions irrégulieres et

8 M. d'Alembert a combattu cette idée

« M. d'Alembert a combattu cette idée tant qu'il a vécu. Il n'a jamais voulu reconnaître toute l'étendue des solutions qu'il avait données lui-même dans ses « réflexions sur la cause des vents », dans son « Mémoire sur les cordes vibrantes », et dans l'« Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides ». Il n'est donc pas possible de mettre en doute lequel de ces deux géomètres, M. Euler ou M. d'Alembert, est l'inventeur du calcul intégral aux différences partielles ; comme on ne peut nier que ce ne soit M. d'Alembert qui, le premier, a introduit ce calcul dans les sciences physico-mathématiques.

M. d'Alembert a combattu cette idée
Cousin, Introduction à l'étude de l'astronomie physique (1787)

discontinues. M. d'Alembert a combattu cette idée tant qu'il a vécu ; il n'a jamais voulu reconnoître toute l'étendue des solutions qu'il avoit données lui-même dans ses *Réflexions sur la cause des vents*, dans son *Mémoire sur les Cordes vibrantes*, et dans l'*Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides*. Il n'est donc pas possible de mettre en doute lequel de ces deux géometres, MM. Euler et d'Alembert, est l'inventeur du calcul intégral aux différences partielles ; comme on ne peut nier que ce ne soit M. d'Alembert qui, le premier, a introduit ce calcul dans les sciences physico-mathématiques. M. Euler, depuis son mémoire de 1734, a publié plusieurs

9 Euler et d'Alembert

Cousin a raison : les deux grands noms des équations aux dérivées partielles sont bien Euler et d'Alembert. Vous êtes habitués à m'entendre présenter d'Alembert comme le roquet qui passe son temps à aboyer aux basques d'Euler, lequel, grand seigneur, attend que les faits lui donnent raison.

Pour une fois, d'Alembert était bien le premier.

Euler et d'Alembert

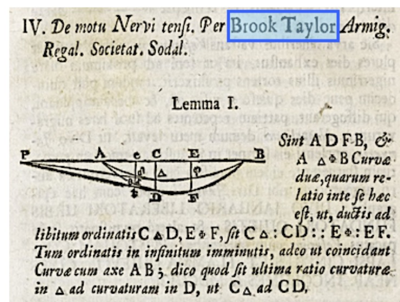
Leonhard Euler (1707–1783), Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

10 De motu Nervi tensi (1713)

Enfin si l'on excepte Taylor, qui vingt ans auparavant, avait eu le mérite de poser le problème, et d'en donner une solution particulière, dans ce mémoire « Sur le mouvement des cordes tendues ».

De motu Nervi tensi (1713)

Brook Taylor (1685–1731)



IV. *De motu Nervi tensi. Per* Brook Taylor *Armig. Regal. Societat. Sodal.*

Lemma I.

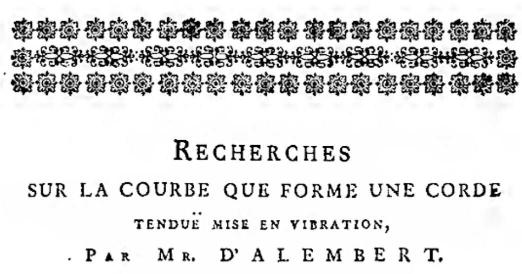
Sint A D F B, & A $\Delta\phi$ B *Curvæ duæ, quarum relatio inter se hæc est, ut, ductis ad libitum ordinatis* C Δ D, E ϕ F, *sit* C Δ : C D : : E ϕ : E F. *Tum ordinatis in infinitum imminutis, adeo ut coincidant Curvæ cum axe* A B ; *dico quod sit ultima ratio curvaturæ in* Δ *ad curvaturam in* D, *ut* C Δ *ad* C D.

11 Sur la courbe que forme une corde tendue (1747)

Mais c'est bien d'Alembert qui, dans ses « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », a posé l'équation aux dérivées partielles, et en a donné une solution générale. C'est lui qui a reconnu que cette même équation des ondes s'appliquait non seulement aux cordes vibrantes, mais aussi aux lames élastiques, aux colonnes d'air en vibration, bref, à l'émission et la propagation du son en général.

Sur la courbe que forme une corde tendue (1747)

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)



RECHERCHES

SUR LA COURBE QUE FORME UNE CORDE TENDUË MISE EN VIBRATION,

PAR MR. D'ALEMBERT.

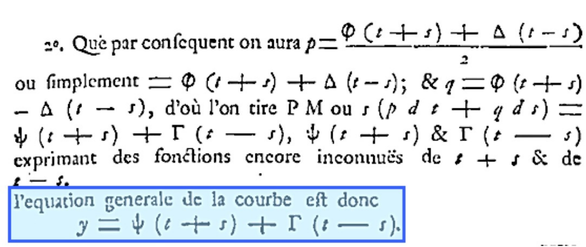
12 L'equation generale de la courbe

C'est lui encore qui donne la forme que vous voyez à la solution générale de l'équation. L'équation générale de la courbe, dit-il, est donc $y = \psi(t+s)+\Gamma(t-s)$ où t et s sont respectivement le temps et la distance. Comme il est écrit au-dessus, ψ et Γ expriment des fonctions encore inconnues. Mais quelles hypothèses doit-on leur imposer ? C'est là que d'Alembert s'oppose à Euler. Pour lui, ces fonctions doivent être continues, mais pas au sens que vous imaginez.

Ecoutez la définition de fonction qui était généralement acceptée au dix-huitième siècle. Elle provient de l'Encyclopédie, et est précisément rédigée par d'Alembert.

L'equation generale de la courbe

d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue (1747)



2°. Que par conséquent on aura $p = \frac{\Phi(t+s) + \Delta(t-s)}{2}$ ou simplement $= \Phi(t+s) + \Delta(t-s)$; & $q = \Phi(t+s) - \Delta(t-s)$, d'où l'on tire P M ou $s(p\,dt + q\,ds) = \psi(t+s) + \Gamma(t-s)$, $\psi(t+s)$ & $\Gamma(t-s)$ exprimant des fonctions encore inconnuës de $t+s$ & de $t-s$.

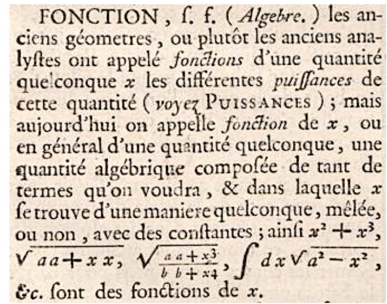
l'equation generale de la courbe est donc $y = \psi(t+s) + \Gamma(t-s)$.

13 Encyclopédie, article Fonction (1778)

« Les anciens géomètres, ou plutôt les anciens analystes ont appelé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puissances* de cette quantité ; mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, une quantité algébrique composée de tant de termes que l'on voudra, et dans laquelle x se trouve d'une manière quelconque, mêlée, ou non avec des constantes ; ainsi $x^2 + x^3$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, etc. »

Voilà, le mot est lâché : une fonction est une quantité « algébrique ». Une expression formelle qui contient la variable. Dire qu'elle est continue, c'est dire que l'expression reste la même sur tout l'intervalle d'étude. Une fonction discontinue est le recollement de deux expressions algébriques différentes. C'est ce que refuse d'Alembert pour les solutions de l'équation des ondes, et c'est ce que Euler accepte.

Encyclopédie, article Fonction (1778)
Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)


FONCTION, s. f. (*Algebre.*) les anciens géometres, ou plutôt les anciens analystes ont appelé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puissances* de cette quantité (*voyez* Puissances) ; mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité algébrique composée de tant de termes qu'on voudra, & dans laquelle x se trouve d'une maniere quelconque, mêlée, ou non, avec des constantes ; ainsi $x^2 + x^3$, $\sqrt{aa + xx}$, $\sqrt{\frac{aa+x^3}{bb+x^4}}$, $\int dx\sqrt{a^2 - x^2}$, &c. sont des fonctions de x.

14 Guiseppe Luigi Lagrange (1736–1813)

Un renfort de poids pour Euler arrive en la personne de Lagrange.

Quand il commence à écrire à Euler en 1754, Lagrange est un jeune Turinois inconnu, de seulement dix-huit ans. Le respect que l'on sent dans les réponses d'Euler, qui est alors au faîte de sa gloire, en dit long sur les qualités de Lagrange.

Guiseppe Luigi Lagrange (1736–1813)

15 Sur la nature et la propagation du son (1759)

Cet article est un de ses premiers articles, publié dans les mémoires de la toute nouvelle Académie de Turin qu'il a contribué à fonder.

Évidemment, Lagrange s'empresse d'envoyer le volume à d'Alembert et Euler, qui ne manquent pas de remarquer ces « Recherches sur la nature et la propagation du son ». Euler remercie, le 23 octobre.

Sur la nature et la propagation du son (1759)
Guiseppe Luigi Lagrange (1736–1813)


RECHERCHES
SUR LA NATURE, ET LA PROPAGATION
DU SON.
PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

16 je n'ai pu assez admirer votre adresse

« Ayant reçu l'excellent présent que vous avez eu la bonté de m'envoyer, je l'ai d'abord parcouru avec la plus grande avidité, et je n'ai pu assez admirer votre adresse, dont vous maniez les plus difficiles équations, pour déterminer le mouvement des cordes et la propagation du son. Je vous suis infiniment obligé d'avoir mis ma solution à l'abri de toutes les chicanes et c'est après vos profonds calculs que tout le monde doit à présent reconnaître l'usage des fonctions irrégulières et discontinues dans la solution de ce genre de problème. »

La réponse est datée du 24 novembre. En voici un extrait, de la main même de Lagrange.

je n'ai pu assez admirer votre adresse

Euler à Lagrange (23 octobre 1759)

Ayant reçu l'excellent présent que vous avez eu la bonté de m'envoyer, je l'ai d'abord parcouru avec la plus grande avidité, et je n'ai pu assez admirer votre adresse, dont vous maniez les plus difficiles équations, pour déterminer le mouvement des cordes et la propagation du son. Je vous suis infiniment obligé d'avoir mis ma solution à l'abri de toutes les chicanes et c'est après vos profonds calculs que tout le monde doit à présent reconnaître l'usage des fonctions irrégulières et discontinues dans la solution de ce genre de problème.

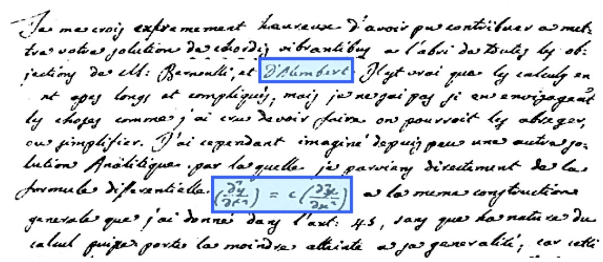
17 une autre solution analytique

« Je me crois extrêmement heureux d'avoir pu contribuer à mettre votre solution sur les cordes vibrantes à l'abri de toutes les objections de messieurs Bernoulli et d'Alembert (il s'agit de Daniel Bernoulli). Il est vrai que les calculs en sont assez longs et compliqués, mais je ne sais pas si, en envisageant les choses comme j'ai cru devoir faire, on pourrait les abréger ou simplifier. J'ai cependant imaginé depuis peu une autre solution analytique, par laquelle je parviens directement de la formule différentielle $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ à la même construction générale que j'ai donnée dans l'article 45, sans que la nature du calcul puisse porter la moindre atteinte à sa généralité. »

C'est que la propagation du son n'était que l'un des sujets de recherche du jeune Lagrange. Il s'était aussi attaqué à un programme beaucoup plus ambitieux.

une autre solution analytique

Lagrange à Euler (24 novembre 1759)



18 Essai d'une nouvelle méthode... (1760)

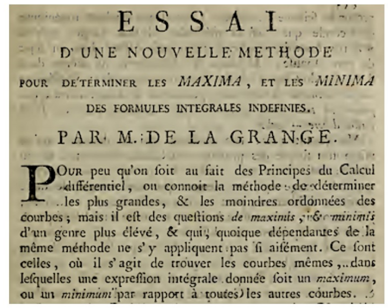
« Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies.

Pour peu qu'on soit au fait des principes du calcul différentiel, on connait la méthode de déterminer les plus grandes et les moindres ordonnées des courbes ; mais il est des questions de maximis et minimis d'un genre plus élevé, et qui, quoique dépendantes de la même méthode, ne s'y appliquent pas si aisément. Ce sont celles, où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans lesquelles une expression intégrale donnée soit un maximum, ou un minimum, par rapport à toutes les autres courbes. »

Lagrange est tout simplement en train de fonder une nouvelle branche de l'analyse : le « calcul variationnel ». Oh certes, des cas particuliers existaient avant lui, comme les problèmes isopérimétriques, hérités des Grecs : par exemple, montrer que le cercle est la courbe qui enferme la surface la plus grande pour un périmètre donné. Il y avait eu aussi le problème de la brachistochrone, posé par Jean Bernoulli : quelle est la courbe le long de laquelle un mobile descend le plus vite d'un point A à un point B donnés. Mais à part une tentative d'Euler en 1744, il n'y avait pas de théorie générale bien établie.

Cette théorie, Lagrange va la mettre au point en plusieurs étapes tout au long de sa carrière. C'est un édifice magnifique, mais les fondements en sont tout aussi fragiles que ceux du calcul différentiel. Lagrange en est douloureusement conscient. Je vous ai déjà parlé de sa personnalité, de sa modestie, de son « aspiration au repos philosophique » comme il disait.

Essai d'une nouvelle méthode... (1760)
Guiseppe Luigi Lagrange (1736–1813)


ESSAI
D'UNE NOUVELLE METHODE
POUR DETERMINER LES *MAXIMA*, ET LES *MINIMA*
DES FORMULES INTEGRALES INDEFINIES.
PAR M. DE LA GRANGE.

POUR peu qu'on ſoit au fait des Principes du Calcul différentiel, on connoit la méthode de déterminer les plus grandes, & les moindres ordonnées des courbes; mais il eſt des queſtions *de maximis*, & *minimis* d'un genre plus élevé, & qui, quoique dépendantes de la même méthode ne s'y appliquent pas ſi aiſément. Ce ſont celles, où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans leſquelles une expreſſion intégrale donnée ſoit un *maximum*, ou un *minimum* par rapport à toutes les autres courbes.

19 Princesse Dashkova vers 1770

Pour vous donner une idée de sa rigueur, euh... et aussi pour introduire une pause bienvenue dans cette histoire, une anecdote ne sera pas de trop. Je vous présente la princesse Dashkova. Une des meilleures familles de la noblesse russe. Sa sœur a été la maîtresse du tsar Pierre III. Elle-même est la meilleure amie de l'épouse de Pierre III, Catherine II, ou la grande Catherine.

Princesse Dashkova vers 1770
Yekaterina Vorontsova Dashkova (1743–1810)

20 Catherine II et Pierre III de Russie

Tant qu'à choisir il valait mieux miser sur Catherine que sur Pierre. Jugez plutôt : Pierre n'est resté au pouvoir que six mois. Après avoir suscité pas mal d'animosité par ses maladresses, il a été proprement déposé par un coup d'état, qui a mis sa tendre épouse Catherine au pouvoir.

Catherine II, je vous en parle assez souvent. C'est elle qui a fait revenir Euler en Russie en 1766, elle grâce à qui la Russie a retrouvé une vie intellectuelle et une académie digne de celles de Berlin et Paris. Et justement c'est son amie la princesse Dashkova qu'elle a chargée de diriger la nouvelle académie : c'est la toute première femme au monde à la tête d'une académie des sciences.

Catherine II et Pierre III de Russie
Catherine II (1729–1796), Pierre III (1728–1762)

21 Les frères Orlov

Les frères Orlov
Grigori Orlov (1734–1783), Alexeï Orlov (1737–1806)

Bon, certes, le coup d'état ne devait pas tout aux deux Catherines : en fait il avait été manigancé par les frères Orlov, dont l'aîné, Grigori, se trouvait être l'amant officiel de Catherine la Grande, et aussi le père de son dernier né.

Euhh... que le tsar déposé, Pierre III, soit mort étranglé seulement une semaine après avoir été renversé, bien sûr les deux Catherines n'y étaient pour rien, vous n'avez qu'à demander aux frères Orlov. Mais vous savez comme il est difficile de faire taire les méchantes langues, surtout en France.

22 Cette princesse était furieuse contre la France

Cette princesse était furieuse contre la France
Thiébault, Souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin (1804)

« Cette princesse était furieuse contre la France et les Français : l'aventure mortifiante qu'elle venait d'avoir aux Tuileries n'était pas de nature à s'oublier de sitôt, surtout chez une personne aussi fière, aussi hautaine, et aussi ardente qu'elle dans toutes ses passions.

Cette princesse, forte comme un homme, marchant toujours à grands pas, la tête haute, ayant le regard hardi et impérieux, et loin d'ailleurs d'être belle, s'était rendue aux Tuileries, par un temps qui y avait attiré beaucoup de monde, et elle venait de s'y assoir lorsqu'elle fut reconnue par quelqu'un, qui, en l'apercevant, s'écria : *Voilà la princesse russe qui a fait étrangler Pierre III.* »

23 je vous regarde, et ne vous considère pas

je vous regarde, et ne vous considère pas
Thiébault, Souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin (1804)

« On conçoit que ce mot passé de bouche en bouche eut tôt fait de former un cercle épais autour de la princesse, qui, à la fin, en fut déconcertée. Parmi ceux qui la serraient de plus près se trouva un chevalier de Saint-Louis, joignant à l'air d'un homme bien né une physionomie un peu austère. Ce fut à lui qu'elle s'adressa pour avoir raison de cet attroupement : « Monsieur, lui dit-elle, qu'avez-vous donc tant à me considérer ? – Madame, répondit-il, je vous demande bien pardon, mais je vous regarde, et ne vous considère pas. » À ce mot, elle se lève en fureur, fend la presse, se rend chez elle, demande des chevaux de poste, et quitte la France. »

Arrivée à Berlin, elle est invitée à un dîner, auquel assiste également Lagrange.

24 François Jacquier (1711–1788)

François Jacquier (1711–1788)
Thiébault, Souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin (1804)

« – Monsieur de Lagrange, lui dit-elle, vous connaissez sans doute le père Jacquier ?

– Je ne l'ai jamais vu, madame, et n'ai jamais eu aucune correspondance avec lui.

– Mais, monsieur, c'est un mathématicien d'un grand mérite.

– C'est, madame, un de ceux qui ont le plus écrit : il a publié, je crois, une soixantaine de volumes, et comme j'en ai parcouru un certain nombre, je puis dire qu'en général son style est bon, et qu'il peut avoir été et être encore fort utile à la jeunesse ; il a bien saisi et présenté la doctrine des autres. »

25 Le père Jacquier ira à la postérité

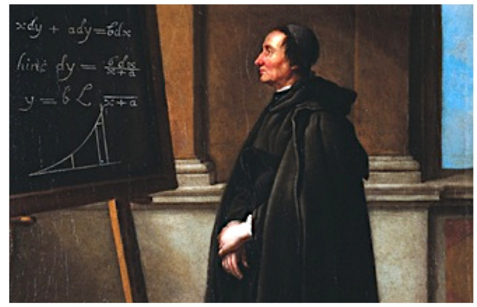
« – Certainement, monsieur, c'est un homme d'esprit ; mais, de plus, il est bien reconnu pour un des premiers géomètres de ce siècle, et pour un homme de génie. Le père Jacquier ira à la postérité.

– Ses talents auraient pu l'y conduire, madame ; mais les mathématiciens n'y vont point par le nombre des volumes. Celui qui compte le plus de volumes ne peut pas se flatter d'être encore cité vingt ans après sa mort, s'il n'a fait aucune découverte ; et c'est malheureusement la position où se trouve le père Jacquier. »

Voilà Lagrange : princesse ou pas, quand il croit que quelque chose est vrai, il le dit. Mathématiquement, il sait parfaitement ce que les fondements du calcul différentiel ont de fragile. Il aspire à plus de rigueur, surtout pour les commençants comme il dit.

Le père Jacquier ira à la postérité

Thiébault, Souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin (1804)



26 Méthode des cascades

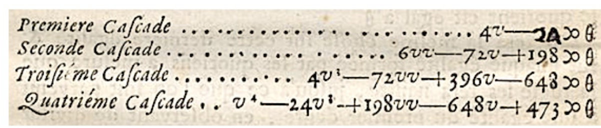
Il se trouve qu'à l'époque l'idéal de rigueur en mathématique, c'est l'algèbre. Donc tout ce qui sera fait de nouveau, devra rentrer dans le cadre de l'algèbre pour devenir rigoureux.

Oh, c'était déjà le cas longtemps avant Lagrange : souvenez-vous de la méthode de maximis et minimis de Fermat, qui était purement algébrique. Souvenez-vous aussi de Rolle, le principal opposant au calcul différentiel en France : sa méthode des cascades est un moyen d'encadrer des racines par celles des dérivées successives. Mais elle est limitée aux polynômes, et reste donc purement algébrique.

Certes, mais depuis un siècle, l'habitude a été prise de considérer les séries entières comme des polynômes à un nombre infini de termes, sans trop se préoccuper des conditions de convergence. L'idée que n'importe quelle fonction, c'est-à-dire n'importe quelle expression algébrique, est développable en série entière, est elle aussi bien ancrée.

Méthode des cascades

Rolle, Traité d'algèbre (1690)



Premiere Cascade .... $4v - 24 \infty 0$

Seconde Cascade .... $6vv - 72v + 198 \infty 0$

Troisiéme Cascade .... $4v^3 - 72vv + 396v - 648 \infty 0$

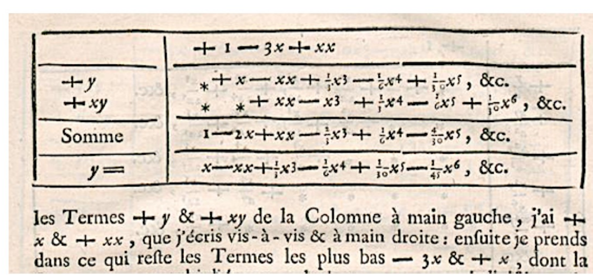
Quatriéme Cascade .. $v^4 - 24v^3 + 198vv - 648v + 473 \infty 0$

27 Méthode des séries (1666)

Il faut dire que l'exemple vient d'en haut. Les développements en série sont l'outil principal que Newton met en avant comme algorithme de résolution des équations différentielles.

Méthode des séries (1666)

Newton, La méthode des fluxions (1740)



	$+1 - 3x + xx$
$+y$ $+xy$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$, &c. $* \quad * + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$, &c.
Somme	$1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$, &c.
$y =$	$x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$, &c.

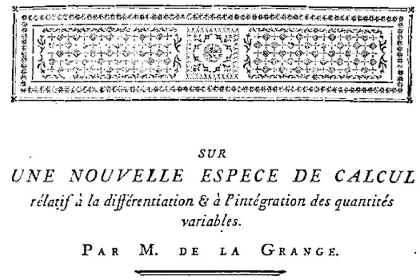
les Termes $+y$ & $+xy$ de la Colonne à main gauche, j'ai $+x$ & $+xx$, que j'écris vis-à-vis & à main droite : ensuite je prends dans ce qui reste les Termes les plus bas $-3x$ & $+x$, dont la

28 Sur une nouvelle espèce de calcul (1772)

Alors une idée vient à Lagrange. Petit un, toutes les fonctions sont développables en série entière. Petit deux, les coefficients du développement en série s'écrivent en fonction des dérivées successives, comme le dit la formule de Taylor. Conclusion : pour définir les dérivées successives d'une fonction, il suffit de les identifier aux coefficients du développement en série entière. Plus besoin de limites, plus besoin d'infiniment petits.

Quand Lagrange publie son idée à Berlin en 1772, elle n'a pas un grand retentissement. Mais un quart de siècle plus tard, il est devenu le plus grand mathématicien vivant. Il est installé à Paris, où il fixe le programme d'enseignement de la toute nouvelle École polytechnique. Il décide de faire de son idée un outil pédagogique.

Sur une nouvelle espèce de calcul (1772)
Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

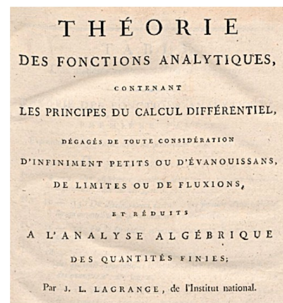

SUR
UNE NOUVELLE ESPECE DE CALCUL
rélatif à la différentiation & à l'intégration des quantités variables.
PAR M. DE LA GRANGE.

29 Théorie des fonctions analytiques (1797)

Regardez le titre de son manuel d'enseignement : « Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. »

Voilà l'idéal de rigueur atteint : plus de baratin vaseux sur les infiniment petits, juste une analyse algébrique de quantités finies.

Théorie des fonctions analytiques (1797)
Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

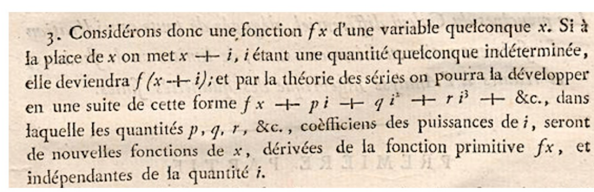

THÉORIE
DES FONCTIONS ANALYTIQUES,
CONTENANT
LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,
DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION
D'INFINIMENT PETITS OU D'ÉVANOUISSANS,
DE LIMITES OU DE FLUXIONS,
ET RÉDUITS
A L'ANALYSE ALGÉBRIQUE
DES QUANTITÉS FINIES;
Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut national.

30 de nouvelles fonctions, dérivées de la fonction primitive

« Considérons donc une fonction $f(x)$ d'une variable quelconque. Si à la place de x on met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $f(x) + pi + qi^2 + ri^3+$ etc., dans laquelle les quantités p, q, r etc., coefficients des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive $f(x)$, et indépendantes de la quantité i. »

Quelques années plus tard, dans ses leçons sur le calcul des fonctions, Lagrange enfonce le clou de son rêve algébrique.

de nouvelles fonctions, dérivées de la fonction primitive
Lagrange, Théorie des fonctions analytiques (1797)


3. Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met $x + i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx + pi + qi^2 + ri^3 +$ &c., dans laquelle les quantités p, q, r, &c., coëfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i.

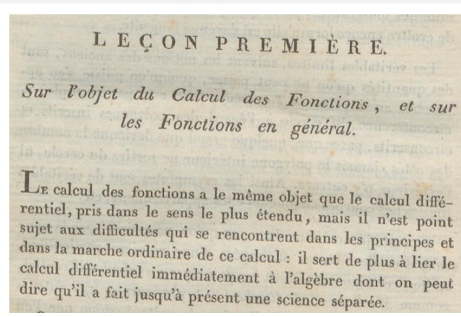
31 lier le calcul différentiel à l'algèbre

« Le calcul des fonctions a le même objet que le calcul différentiel, pris dans le sens le plus étendu, mais il n'est point sujet aux difficultés qui se rencontrent dans les principes et dans la marche ordinaire de ce calcul : il sert de plus à lier le calcul différentiel immédiatement à l'algèbre dont on peut dire qu'il a fait jusqu'à présent une science séparée. »

Lagrange ne semble pas conscient de la poussière qu'il a balayée sous le tapis, c'est-à-dire des postulats qu'il a admis : primo toute fonction est développable en série entière, secundo, le développement caractérise la fonction.

Voici comment à la même époque, Louis Arbogast, un mathématicien strasbourgeois, tente de justifier ce dernier point.

lier le calcul différentiel à l'algèbre
Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions (1806)


LEÇON PREMIÈRE.
Sur l'objet du Calcul des Fonctions, et sur les Fonctions en général.
Le calcul des fonctions a le même objet que le calcul différentiel, pris dans le sens le plus étendu, mais il n'est point sujet aux difficultés qui se rencontrent dans les principes et dans la marche ordinaire de ce calcul : il sert de plus à lier le calcul différentiel immédiatement à l'algèbre dont on peut dire qu'il a fait jusqu'à présent une science séparée.

32 Du calcul des dérivations (1800)

« Si une courbe a le même développement en série qu'une autre, elle sera, dit-il, celle dont le cours approchera le plus de la première, de manière qu'il sera impossible de faire passer entre ces deux cours, celui d'une autre courbe, de même nature que la seconde. »

C'est typique du genre d'arguments heuristiques que le dix-neuvième siècle n'acceptera plus.

Du calcul des dérivations (1800)
Louis Arbogast (1759–1803)

V. *Soit une courbe quelconque, dont l'ordonnée y', qui répond à l'abscisse $x + \Delta x$, soit représentée par la série*

$$y' = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3}(\Delta x)^3 + etc. ;$$

qu'on développe pareillement l'ordonnée u' d'une autre courbe, dont l'équation, donnée et rapportée à la même ligne des abscisses, contienne un nombre n de constantes ; l'abscisse correspondante à u' étant $t + \Delta t$, et $\Delta t = \Delta x$, on aura

$$u' = u + \frac{du}{dt}\Delta x + \frac{d^2u}{1.2.dt^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3u}{1.2.3.dt^3}(\Delta x)^3 + etc. :$$

si l'on détermine les n constantes de la dernière courbe par les équations

$$u = y,\ \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2},\ etc.,\ \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} ;$$

cette courbe ainsi déterminée sera de toutes les courbes de même nature celle dont le cours approchera le plus du cours de la première, de manière qu'il sera impossible de faire passer entre ces deux cours celui d'une autre courbe de même nature que la seconde.

33 Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

La rupture devait venir de Cauchy. Au début du siècle c'est encore un enfant, mais Lagrange le connaît déjà. Son père est secrétaire du sénat dont Lagrange est membre. De sorte que, invité chez les Cauchy, il ne peut que s'extasier devant les dons exceptionnels du petit Augustin.

Enfin, du moins selon le biographe officiel...

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)
Cauchy par Jules Boilly (ca. 1825)

34 il nous remplacera tous

Un jour qu'il se trouvait chez M. Cauchy en compagnie du comte de Lacépède et de plusieurs autres membres du Sénat, il lui arriva de leur dire : « Vous voyez ce petit jeune homme, eh bien ! il nous remplacera tous tant que nous sommes de géomètres. » On était alors en 1801 et Cauchy avait à peine douze ans. Toutefois Lagrange se préoccupait du danger que pouvaient courir ces dispositions précoces, si leur développement était trop hâté par une application prématurée. Il insistait souvent sur ce point : « Ne laissez pas, disait-il à M. Cauchy, cet enfant toucher un livre de mathématiques avant l'âge de dix-sept ans. »

Il est à craindre que le conseil n'ait pas été suivi, parce que le petit Augustin est entré à l'École polytechnique à seulement seize ans. Il est aussi à craindre qu'il n'ait pas été satisfait de l'enseignement qu'il y a reçu, basé sur les manuels de Lagrange, parce que quand ça a été son tour d'y enseigner, il a décidé de tout changer.

Son Cours d'analyse à l'École polytechnique, paru en 1821 marque une rupture : le début officiel de la rigueur mathématique.

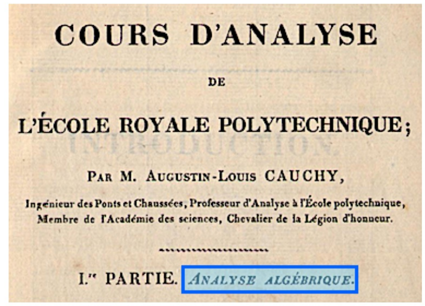
il nous remplacera tous
C.-A. Valson, La vie et les travaux du baron Cauchy (1868)

qu'il se trouvait chez M. Cauchy en compagnie du comte de Lacépède et de plusieurs autres membres du Sénat, il lui arriva de leur dire : « Vous voyez ce petit jeune homme, eh bien ! il nous remplacera tous tant que nous sommes de géomètres. » On était alors en 1801 et Cauchy avait à peine douze ans. Toutefois Lagrange se préoccupait du danger que pouvaient courir ces dispositions précoces, si leur développement était trop hâté par une application prématurée. Il insistait souvent sur ce point : « Ne laissez pas, disait-il à M. Cauchy, cet enfant toucher un livre de Mathématiques avant l'âge de dix-sept ans. »

35 Cours d'analyse de l'École royale polytechnique (1821)

Remarquez le titre donné à la première partie, « Analyse algébrique ». Ce n'est pas parce que Cauchy a décidé de tout chambouler qu'il abandonne l'idéal algébrique de Lagrange. Mais au lieu d'équations, son algèbre à lui, qu'il veut encore plus rigoureuse, sera fondée sur des inégalités.

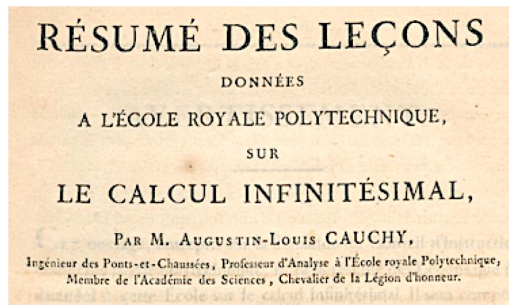
Cours d'analyse de l'École royale polytechnique (1821)
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)


COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.
I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

36 Leçons sur le calcul infinitésimal (1823)

Concernant le calcul différentiel, il précise son point de vue deux ans plus tard dans des « Leçons sur le calcul infinitésimal ».

Leçons sur le calcul infinitésimal (1823)
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)


RÉSUMÉ DES LEÇONS
DONNÉES
A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
SUR
LE CALCUL INFINITÉSIMAL,
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

37 l'illustre auteur de la *Mécanique Analytique*

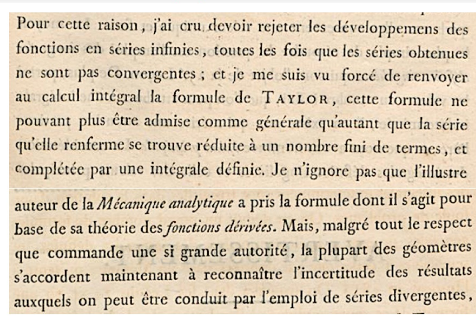
« J'ai cru devoir rejeter les développements des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes ; et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de Taylor, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. »

Il parle de ce que nous appelons « formule de Taylor avec reste intégral ».

« Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la « Mécanique analytique » (c'est-à-dire Lagrange) a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions dérivées. Mais malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes. »

Le problème est double. Il y a non seulement la question de la convergence, mais encore celle de l'unicité. Cauchy a publié l'année précédente, un contre-exemple montrant qu'une infinité de fonctions différentes peuvent avoir le même développement en série en un point donné. Évidemment, il reprend ce contre-exemple dans son manuel.

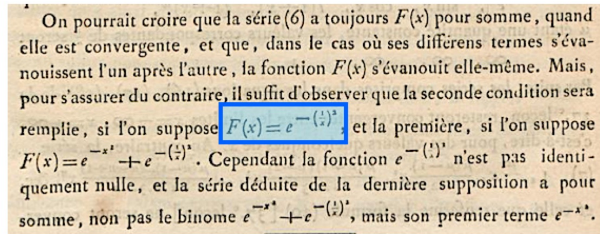
l'illustre auteur de la *Mécanique Analytique*
Cauchy, Leçons sur le calcul infinitésimal (1823)


Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développemens des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes ; et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des *fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes,

38 On pourrait croire que la série...

On pourrait croire que la série...

Cauchy, Leçons sur le calcul infinitésimal (1823)



On pourrait croire que la série (6) a toujours $F(x)$ pour somme, quand elle est convergente, et que, dans le cas où ses différens termes s'évanouissent l'un après l'autre, la fonction $F(x)$ s'évanouit elle-même. Mais, pour s'assurer du contraire, il suffit d'observer que la seconde condition sera remplie, si l'on suppose $\boxed{F(x)=e^{-(\frac{1}{x})^2}}$, et la première, si l'on suppose $F(x)=e^{-x^2}+e^{-(\frac{1}{x})^2}$. Cependant la fonction $e^{-(\frac{1}{x})^2}$ n'est pas identiquement nulle, et la série déduite de la dernière supposition a pour somme, non pas le binome $e^{-x^2}+e^{-(\frac{1}{x})^2}$, mais son premier terme e^{-x^2}.

Le voici. La fonction $F(x) = \exp(-1/x^2)$ admet un développement en série en zéro, dont tous les coefficients sont nuls. Cela suffit pour ruiner l'espoir d'utiliser la série de Taylor pour définir des dérivées.

Au bilan, Cauchy ne laisse pas grand chose debout du rêve algébrique de Lagrange. Il ne nous en reste guère que les termes « dérivée » et « primitive ».

39 références

références

- C. G. Fraser (1987) Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus, *Historia Mathematica*, 14, 38–53
- J. V. Grabiner (1981) *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, New York : Dover
- G. Jouve (2007) *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez d'Alembert (1755–1783)*, Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon
- J.-P. Lubet (2010) Calcul symbolique et calcul intégral de Lagrange à Cauchy, *Revue d'histoire des mathématiques*, 16, 63–131
- G. Sarton (1944) Lagrange's personality, *Proceedings of the American Philosophical Society*, 88(6), 457–496
- A. P. Youschkevitch (1976) The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37–85

Je ne sais pas vous, mais moi, le contre-exemple de Cauchy, c'est celui qu'on m'a servi quand j'étais étudiant, et c'est aussi celui que j'ai continué à servir à tous mes étudiants depuis. Il serait peut-être temps de changer, vous ne croyez pas ?

J'ai une idée : si vous en proposiez un autre ?