Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 L'œil d'Horus

histoires d'arithmétique

L'œil d'Horus

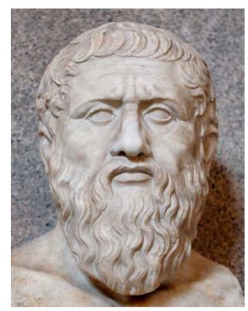
multiplication égyptienne

hist-math.fr Bernard Ycart

Les Grecs reconnaissaient l'héritage de la science égyptienne, tout comme les savants de la Renaissance revendiquaient l'héritage grec… avec le même nombre de siècles de distance. Je trouve ça plutôt émouvant, pas vous ?

1 Platon (ca 428–348 av. J.-C.)

Platon (ca 428–348 av. J.-C.)



Hérodote d'abord, Platon ensuite l'affirment clairement. La science grecque vient des Égyptiens. Pour Platon, le système éducatif égyptien est même l'idéal à atteindre !

2 Lois, Livre VII

Lois, Livre VII
Platon (ca 428–348 av. J.-C.)

Disons donc que les hommes libres seront obligés d'apprendre de ces sciences tout ce que les enfants des Égyptiens, tous tant qu'ils sont, apprennent avec les lettres. On commencera à leur enseigner le calcul, par manière de jeu et de divertissement, en leur faisant faire ces exercices imaginés précisément pour l'enfance […]

« Disons donc que les hommes libres seront obligés d'apprendre de ces sciences tout ce que les enfants des Égyptiens, tous tant qu'ils sont, apprennent avec les lettres. On commencera à leur enseigner le calcul, par manière de jeu et de divertissement, en leur faisant faire ces exercices imaginés précisément pour l'enfance. »

Les mathématiques en Égypte ont commencé par la numération, probablement en même temps que l'écriture, et à la même période qu'en Mésopotamie : il y a environ 5000 ans. Mais la numération égyptienne était beaucoup plus simple.

3 Numération égyptienne

C'est une numération décimale, avec un symbole pour chaque puissance de 10 : un trait vertical pour 1, U renversé pour 10, spirale pour 100, fleur de lotus pour 1000, doigt pour 10000, un têtard ou un crapaud pour 100000, un homme bras levés pour un million.

Pour écrire un nombre, on répète le symbole de chaque puissance de 10 autant de fois que nécessaire.

Numération égyptienne
ca 3000 av. J.-C.

4 Numération égyptienne

Voyez sur ce bas-relief le nombre « un million trois cent trente trois mille trois cent trente et un ».

Numération égyptienne
ca 3000 av. J.-C.

5 Repas funéraire de Nefertiabet

Cet autre bas-relief représente la princesse Nefertiabet à son repas funéraire. À droite, quatre fleurs de lotus sont plusieurs fois répétées pour indiquer l'abondance en milliers de ce dont elle dispose dans l'au-delà. Vous voyez aussi la spirale de cent.

Ces caractères sont des hiéroglyphes, l'écriture des monuments.

Repas funéraire de Nefertiabet
règne de Kéops (2590–2565 av. J.-C.)

6 Scribe

Dans la vie courante, l'écriture, et aussi le calcul étaient le domaine des scribes. Celui-ci déroule sur ses genoux un papyrus.

Scribe

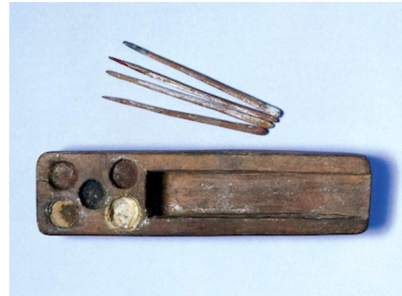
7 les outils du scribe

Il écrit dessus avec des sortes de stylets trempés dans de l'encre. C'était sans doute presque aussi commode au quotidien que notre papier, mais sur le plan archéologique, c'est une malédiction : très peu de papyrus sont parvenus jusqu'à nous.

En Mésopotamie des milliers de tablettes d'argile ont été retrouvées, dont des centaines de textes mathématiques. En Égypte, moins d'une dizaine de textes mathématiques ont été conservés. Maintenant, imaginez qu'on tire au hasard 10 articles publiés entre 1700 et 2000. Quelle idée pourrait-on se faire des mathématiques de ces trois derniers siècles ?

Il faut s'habituer au fait que nous ne savons des mathématiques égyptiennes que le peu qui nous est parvenu, et que ce peu est peut-être très différent de la réalité de l'époque.

les outils du scribe

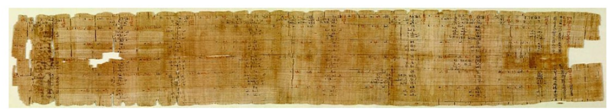


8 Papyrus Rhind

Le principal document connu est le papyrus Rhind, du nom d'un collectionneur. Il se présente sous forme de deux bandes de 32 centimètres de largeur, l'une de 2 mètres que vous voyez, l'autre de 3 mètres.

Dans l'introduction, le scribe dit s'appeler Ahmès, et il annonce qu'il copie un document plus ancien, d'environ 1800 avant notre ère.

Papyrus Rhind
Ahmès (ca 1650 av. J.-C.)



9 Papyrus Rhind

Comme vous le voyez le texte est écrit en noir, certaines phrases en rouge, avec quelques figures géométriques.

Papyrus Rhind
Ahmès (ca 1650 av. J.-C.)

10 écriture hiératique

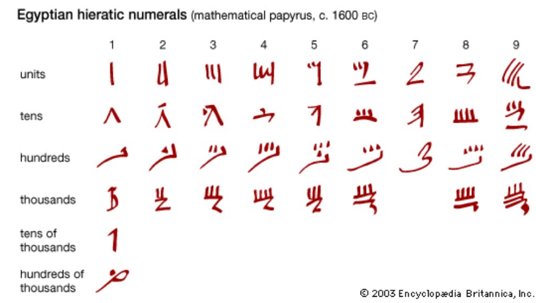
Les caractères ne sont pas des hiéroglyphes, mais des caractères hiératiques, c'est-à-dire l'écriture cursive dérivée des hiéroglyphes, que les scribes utilisaient au quotidien.

Vous voyez que les nombres sont différents, mais le principe de différencier les puissances de dix reste le même : ce n'est toujours pas une numération de position. Avec cette écriture, faire une addition ou une soustraction n'est pas vraiment un problème : il suffit juste de faire attention aux retenues.

Mais faire une multiplication est autrement plus compliqué. Alors les Égyptiens avaient développé une méthode originale, qui revenait à transformer une multiplication en une série d'additions, et qui ne demandait pas de connaître des tables de multiplication.

Écriture hiératique

nombres



11 Multiplication égyptienne

Voici un exemple pour décrire le principe : multiplier 166 par 13. On commence par écrire les puissances de 2 successives, en s'arrêtant à la dernière qui est inférieure à 166. En face, on écrit leur produit par 13. Remarquez que pour passer d'une ligne à l'autre, il suffit d'ajouter la ligne précédente à elle-même. Ensuite, on coche les puissances de deux dont la somme est 166, ce qui revient à écrire le nombre 166 en base 2, même si les Égyptiens ne le formulaient pas ainsi. Enfin, on additionne les termes correspondants de la colonne de droite : c'est le résultat cherché.

En pratique, un Égyptien n'aurait pas procédé ainsi. Il aurait d'abord multiplié 166 par 10, ce qui revient à recopier le nombre en changeant les symboles, puis il aurait multiplié par 3 avant d'ajouter.

Multiplication égyptienne

166 × 13

	1	13
\	2	26
\	4	52
	8	104
	16	208
\	32	416
	64	832
\	128	1664
	166	2158

12 Multiplication russe ? éthiopienne ?

Une variante de la multiplication égyptienne consiste à calculer le développement en base 2 par divisions successives, comme vous le voyez dans la colonne de gauche.

C'est l'algorithme qu'on trouve un peu partout sous le nom de « multiplication du paysan russe » ou « multiplication éthiopienne ». On lit que cette multiplication serait couramment employée dans les campagnes en Russie ou en Éthiopie. Je n'en ai pas trouvé de confirmation. Pour la Russie, cela me paraît peu compatible avec l'usage généralisé du boulier. Pour l'Éthiopie, je ne sais pas. Si quelqu'un a une preuve, ça m'intéresse !

Le tout est que cette méthode de multiplication, pour des nombres pas trop grands est à peine plus lente que la méthode que vous utilisez, et qu'elle ne demande pas de connaître les tables de multiplication. Le même principe se retrouve de nos jours dans les algorithmes d'exponentiation rapide.

Multiplication russe ? éthiopienne ?

166 × 13

	166	13
\	83	26
\	41	52
	20	104
	10	208
\	5	416
	2	832
\	1	1664
		2158

13 Division par doublement ?

On pourrait imaginer que ce principe soit utilisé pour la division. Ceci n'est qu'un exemple théorique : une fois qu'on a écrit que 166 divisé par 13 c'est 2 plus 4 plus 32 plus 128 treizièmes, on n'est pas plus avancé si on ne sait pas exprimer ce qui est à droite.

Comment un scribe égyptien aurait-il fait pour diviser 166 par 13 ? Il aurait commencé par ôter le plus grand multiple, c'est-à-dire faire une division euclidienne : 166 égale 12 fois 13 plus 10. Ensuite il aurait cherché à exprimer 10 treizièmes comme une somme d'autres fractions. Il aurait probablement écrit : 10 divisé par 13 égale deux tiers plus un treizième plus un sur trente neuf.

Division par doublement ?

166/13

	1	$\frac{1}{13}$
\	2	$\frac{2}{13}$
\	4	$\frac{4}{13}$
	8	$\frac{8}{13}$
	16	$\frac{16}{13}$
\	32	$\frac{32}{13}$
	64	$\frac{64}{13}$
\	128	$\frac{128}{13}$
	166	$\frac{2}{13}+\frac{4}{13}+\frac{32}{13}+\frac{128}{13}$ =???

14 fractions égyptiennes

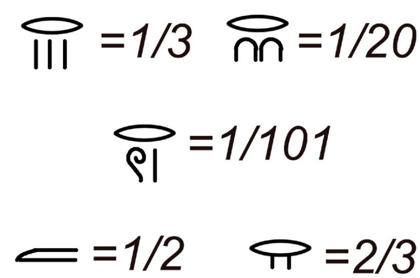
Parce que les Égyptiens n'admettaient que certaines fractions ; la plus grande étant deux tiers, les autres étant des fractions unitaires, c'est-à-dire, de numérateur 1.

N'importe quel résultat devait être écrit comme un entier, plus une somme de fractions de ce type ; les dénominateurs étant tous différents, sinon ce serait trop facile !

Vous voyez ici la notation hiéroglyphique qui consiste à dessiner un fuseau au-dessus de l'entier qui est en dénominateur.

Fractions égyptiennes

hiéroglyphes

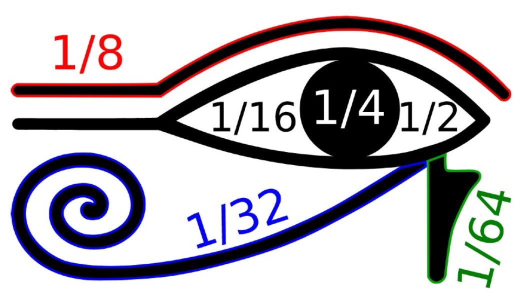


15 les fractions de l'œil d'Horus ?

Pour l'écriture hiératique, le principe général est le même, en remplaçant le fuseau par un point. Mais des signes particuliers sont employés pour les fractions les plus courantes, en particulier pour les puissances de un demi. L'illustration que vous voyez ici est extraite de wikipédia.

Elle reprend, d'ailleurs à l'envers, une figure que l'on trouve dans les livres d'égyptologie du vingtième siècle. L'idée est que les signes représentant les fractions de un demi à un seizième, seraient, comme vous le voyez, des morceaux de l'oeil droit du Dieu Horus.

les fractions de l'œil d'Horus ?

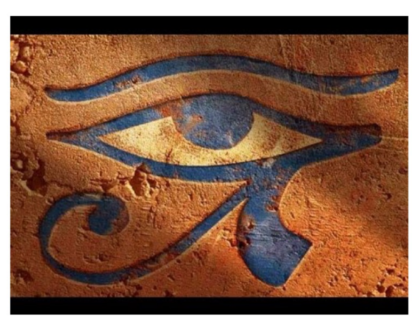


16 l'œil d'Horus

L'œil d'Horus avait été arraché au cours d'une dispute par le méchant dieu Seth, ce qui explique que les Égyptiens en aient fait un symbole de bonne santé.

Un qui aurait été surpris d'apprendre que les signes de fractions sont des morceaux de l'œil d'Horus, c'est Ahmès, le scribe du papyrus Rhind. Tant pis pour la légende...

l'œil d'Horus



17 2 divisé par 13

Revenons aux divisions et aux fractions unitaires. Comment les Égyptiens faisaient-ils pour décomposer, mettons deux divisé par treize ? Ils commençaient par chercher un rapport de treize à un nombre inférieur qu'ils arrivaient à décomposer, on ignore s'ils avaient un algorithme systématique. Ici, 13 sur huit, c'est 1 plus 1/2, plus 1/8. Pour arriver à 2, il manque 1/4 plus 1/8, qui sont les rapports de 13 à 52 et à 104. On en déduit donc que deux treizièmes est égal à un huitième plus un sur 52, plus un sur 104.

Pour pas plus cher, on obtient aussi 4/13=1/4+1/26+1/52 et 8/13=1/2+1/13+1/26.

Ce raisonnement est tiré de la première partie du papyrus Rhind, où figure une table de toutes les décompositions de deux divisé par un entier impair, jusqu'à 101. En voici quelques unes.

2 divisé par 13

Ahmès, Papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)

❶ $13 \times \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

❷ $13 \times \frac{1}{52} = \frac{1}{4}$

❸ $13 \times \frac{1}{104} = \frac{1}{8}$

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\,.$$

18 2 divisé par $5, 7, \ldots, 99, 101$

2 divisé par $5, 7, \ldots, 99, 101$

Ahmès, Papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{5} & = & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \\
 & \vdots & \\
\frac{2}{29} & = & \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} \\
 & \vdots & \\
\frac{2}{61} & = & \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610} \\
 & \vdots & \\
\frac{2}{101} & = & \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}
\end{array}$$

En général ces résultats reviennent à décomposer deux. Par exemple le premier est $2 = 1 + 2/3 + 1/3$. Le dernier est $2 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/6$. Le précédent est plus compliqué. C'est $2 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/10 + 1/40$.

19 Table de division par 10

Table de division par 10

Ahmès, Papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)

1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}\ \frac{1}{10}$
4	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$
5	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{10}$
7	$\frac{2}{3}\ \frac{1}{30}$
8	$\frac{2}{3}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}$
9	$\frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{30}$

Cette table des neuf premiers entiers divisés par 10 est encore plus exotique de notre point de vue. Nous ne comprenons plus du tout, en quoi c'est une simplification que de remplacer huit dixièmes par deux tiers plus un dixième plus un trentième ; et nous voyons encore moins, pourquoi c'est un résultat si souvent utile, qu'il doit être accessible dans une table.

20 Greniers cylindriques

Pour vous donner un exemple du type de calculs que l'on trouve dans le papyrus Rhind, voici deux problèmes consécutifs, qui portent sur la contenance de greniers cylindriques.

Greniers cylindriques
Tell Edfu (ca 2000 av. J.-C.)

21 Problème 41

Le premier est le problème 41 dans le papyrus Rhind. On demande de trouver la contenance d'un grenier rond de 9 par 10. Il est sous-entendu que c'est un cylindre dont la base est un cercle de 9 coudées de diamètre, la hauteur est de 10 coudées. La coudée était l'unité de mesure de longueur, elle valait environ 52 centimètres.

On commence par calculer la surface du disque de diamètre 9. Pour cela le texte dit d'ôter un neuvième, puis d'élever au carré. Cela revient à remplacer $\pi/4$ par $(8/9)^2$ donc π par 256/81, ce qui fait à peu près 3,16. Ici, la vraie surface d'un cercle de diamètre 9 est 63,6, le texte donne 64. Ensuite, on multiplie par la hauteur pour avoir le volume, soit 640 coudées cubes.

Mais le résultat n'était pas attendu en coudées cubes. L'unité de contenance est le hékat. Pour passer des coudées-cubes au hékat, il faut ajouter la moitié, et multiplier par un vingtième.

Problème 41
Ahmès, Papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)

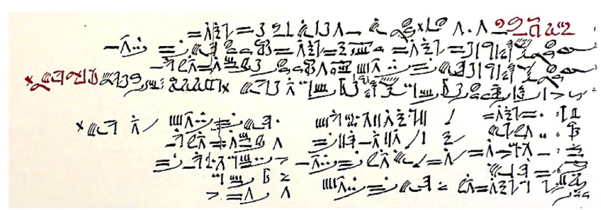
Un grenier rond de 9 [par] 10.

Tu soustrairas $\frac{1}{9}$ de 9 : 1. Reste : 8. Tu multiplieras 8 par 8 ; il vient 64. Tu multiplieras 64 par 10 ; il vient 640 coudées-cube. Ajoute-lui sa moitié ; il vient 960. Multiplie 960 par $\frac{1}{20}$: 48. C'est ce qui va y entrer en 100-quadruple *hekat*.

22 Problème 42

Et maintenant, voici le problème suivant sur le papyrus, le numéro 42. Comme vous le constatez, il est beaucoup plus difficile.

Problème 42
Ahmès, Papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)



23 Problème 42

Pourtant, l'énoncé n'a pas beaucoup changé : le diamètre est simplement passé de 9 à 10. Et oui, mais voilà, huit neuvièmes de dix, c'est huit plus 2/3 plus 1/6 plus 1/18. Élevé au carré, cela donne 79 plus 1/108 plus 1/324. Multiplié par 10, on trouve 790 plus 1/18 plus 1/27 plus 1/54 plus 1/81, etc.

Vive la notation décimale !

Et pourtant les fractions égyptiennes telles que vous les voyez ont été utilisées au moins jusqu'au début de notre ère, tout comme la multiplication par doublement. Les Grecs avaient eu très tôt des tables de multiplication, mais ils connaissaient également la multiplication égyptienne. Pour ce qui est des fractions, ils ont continué longtemps à utiliser le système sexagésimal hérité des Mésopotamiens, en parallèle avec les fractions égyptiennes. Voici par exemple un extrait de l'Almageste, de Ptolémée. Il écrivait au second siècle après Jésus-Christ, soit environ deux millénaires après la version initiale du papyrus Rhind.

Problème 42
Ahmès, Papyrus Rhind (ca 1650 av. J.-C.)

Un grenier rond de 10 [par] 10.

Tu soustrairas $\frac{1}{9}$ de 10 : 1 $\frac{1}{9}$. Reste : 8 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{18}$. Tu multiplieras 8 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{18}$ par 8 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{18}$; il vient 79 $\frac{1}{108}$ $\frac{1}{324}$. Tu multiplieras 79 $\frac{1}{108}$ $\frac{1}{324}$ par 10 ; il vient 790 $\frac{1}{18}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{54}$ $\frac{1}{81}$. Ajoute-lui sa moitié ; il vient 1185 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{54}$. Multiplie ceci par $\frac{1}{20}$: 59 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{108}$. C'est ce qui va y entrer en 100-quadruple *hekat*.

24 Composition Mathématique, Livre X chapitre III

Composition Mathématique, Livre X chapitre III
Claude Ptolémée (ca. 84–165)

Vénus orientale était dans sa plus grande distance au soleil ; et comparée à l'étoile appelée *Antarès*, elle occupait les 11^{d} $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$, le soleil moyen étant alors sur les 25^{d} $\frac{1}{2}$ du verseau, de sorte que la plus grande distance orientale au lieu moyen était de 43^{d} $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$.

Dans ce passage les angles sont donnés en nombres entiers de degrés, suivis de fractions unitaires. Pourtant, le plus souvent Ptolémée utilise les notations mésopotamiennes en base 60, comme nous. C'est-à-dire que les angles sont mesurés en degrés, minutes qui sont des soixantièmes de degrés, et secondes qui sont des soixantièmes de minutes.

25 Breu compendi del art del algorisme

Je n'ai pas réussi à savoir jusqu'à quand la multiplication par doublement a été utilisée. Vu la lenteur avec laquelle le calcul à la plume s'est imposé, il me semble que la multiplication avec des jetons a dû être préférée assez tôt à la méthode égyptienne. Néanmoins, le doublement a longtemps été vu comme un cas à isoler. Voici ce qu'on lit dans ce « bref résumé de l'art de l'algorisme », écrit en occitan à Pamiers vers 1430, par un auteur anonyme.

« Du doublement et de la midiation, desquelles certains font des chapitres à part, je ne fais rien de spécial. Car doubler c'est multiplier par deux, et midier, c'est diviser par deux. Et pour cela, ce ne sont pas des chapitres en soi, comme je l'ai dit. »

Breu compendi del art del algorisme
Pamiers (ca 1430)

del doblar nj del mediar, dels quals alcuns ne fan capitol expres, yeu ne fats cap despecial. Car doblar / es multiplicar per 2/ e mediar es partir per 2. Et per so non son pas capitols aixi com hom ditz.

26 Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1250)

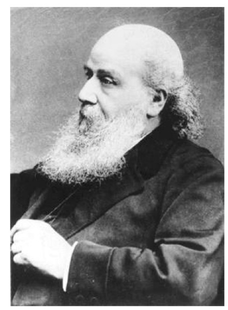
Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1250)

Deux siècles auparavant, Fibonacci écrivait son Liber Abaci. Un chapitre entier y est consacré aux fractions égyptiennes. Elles sont vues plus comme un outil pédagogique qu'une méthode de calcul effective.

Mais cela n'empêche pas Fibonacci de donner le premier algorithme systématique pour décomposer une fraction en fractions unitaires.

27 James Joseph Sylvester (1814–1897)

James Joseph Sylvester (1814–1897)



Un algorithme, que Sylvester s'empresse de réinventer six siècles plus tard.

28 Paul Erdős (1913–1996)

Paul Erdős (1913–1996)

Croyez-le si vous voulez, les fractions égyptiennes sont encore un sujet de recherche actif de nos jours. Une conjecture d'Erdős et Strauss en 1950 dit que tout nombre de la forme 4 sur n s'écrit comme la somme de trois fractions unitaires. Aux dernières nouvelles, elle n'a toujours pas été démontrée.

29 références

références

- A. B. Chace (1927) *The Rhind mathematical papyrus in two volumes*, Oberlin, Ohio : Mathematical Association of America
- M. Guillemot (2017) *Édition commentée du papyrus Rhind* `papyrusrhind.unblog.fr/sommaire`
- A. Imhausen (2007) Egyptian Mathematics *in V. Katz ed. The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam, a sourcebook*, Princeton : Princeton University Press, 7–57
- J. Ritter (1989) Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie, *in M. Serres ed. Éléments d'histoire des sciences*, Paris : Bordas, 39–61
- J. Ritter (2003) Closing the Eye of Horus : the rise and fall of 'Horus-eye fractions' *in J.M. Steele, A. Imhausen eds. Under one sky, Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East*, Münster : Ugarit-Verlag, 297–316

Tenez, pour vous remercier de votre écoute bienveillante, je vous invite à manger. On sera 13 à table, je commande 8 pizzas. Vous faites comment pour les partager ?