

## 0 Les écoles d'abaque

Comment l'algèbre des Arabes a-t-elle été transmise en Europe? Vous le savez, un homme en est responsable, ou plutôt un livre. Je vous en parle suffisamment ailleurs. Écoutez ce qu'en dit Montucla.

histoires d'algèbre

### Les écoles d'abaque

algorisme en Languedoc



hist-math.fr

Bernard YCART

## 1 L'Europe a cette obligation à Léonard de Pise

« L'algèbre, qui avait pris naissance chez les Arabes, fut transplantée au commencement de ce siècle en Occident. L'Europe a cette obligation à Léonard de Pise qui, porté du désir de s'instruire dans les mathématiques, fit de longs voyages en Arabie et dans les autres contrées orientales. À son retour il fit connaître l'algèbre à ses compatriotes et nous trouvons même qu'elle fit d'assez rapides progrès. »

L'Europe a cette obligation à Léonard de Pise

Montucla, Histoire des Mathématiques (1758)

L'Algèbre, qui avoit pris naissance chez les Arabes, fut transplantée au commencement de ce siècle en Occident. L'Europe a cette obligation à Léonard de Pise qui, porté du désir de s'instruire dans les Mathématiques, fit de longs voyages en Arabie & dans les autres contrées Orientales. A son retour il fit connoître l'Algèbre à ses compatriotes, & nous trouvons même qu'elle fit d'assez rapides progrès. Nous re-

## 2 Liber abaci (1202)

Léonard de Pise, a été rebaptisé depuis Fibonacci. Plusieurs manuscrits de lui nous sont parvenus, mais celui qui a eu le plus d'influence est le Liber Abaci, le livre de l'abaque. Il faut comprendre le mot abaque dans le sens de calcul, et même plus précisément, calcul appliqué.

On trouve dans ce livre des quantités de problèmes que nous traduisons par des équations ou des systèmes d'équations. Il y a en plus un chapitre entier sur l'algèbre et al-muqabala d'al-Khwarizmi.

Les sources arabes de Fibonacci ont été abondamment étudiées : ce sont pour l'essentiel des traductions latines de livres arabes, comme les algèbres d'al-Khwarizmi et al-Kamil. Mais si on écoutait un peu ce que lui-même en dit ?

Liber abaci (1202)

Léonard de Pise (Fibonacci) (ca 1170-1250)



### 3 Liber Abaci (1202)

« Quand mon père était employé par Pise à la douane de Bougie pour assister les marchands qui la fréquentaient, il me fit venir à lui alors que j'étais enfant, dans l'intention de m'assurer un avenir utile et avantageux ; il voulut que je restasse quelques jours pour qu'on m'y enseigne l'étude du calcul. Là, introduit par un enseignement admirable dans l'art des neuf chiffres indiens, j'ai aimé cette science plus que tout, et j'ai compris ce qu'en elle on étudiait en Égypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile, et en Provence, avec ses différentes méthodes ; autant de places de commerce dans lesquelles je me suis rendu par la suite et où je me suis instruit par beaucoup d'étude et par le conflit des discussions. »

Donc Fibonacci reconnaît lui-même que parmi les places commerçantes où il s'est rendu pour apprendre les méthodes arabes, figuraient non seulement l'Égypte et la Syrie, mais aussi la Sicile, et puis la Provence, c'est-à-dire le sud de la France actuelle.

### 4 Marco Polo (1254–1324)

Dans notre inconscient collectif, la Renaissance est restée associée à l'impressionnant développement des villes commerçantes italiennes : Pise, mais aussi et surtout Florence et Venise. Le voyageur du début de la Renaissance est incarné par Marco Polo, dont les voyages depuis Venise jusqu'en Chine ont fait rêver toute l'Europe pendant des siècles.

Mais Marco Polo n'était pas le seul voyageur ni l'Italie le seul pays à avoir des villes commerçantes. Et quand il s'agit de suivre des échanges culturels entre le sud et le nord de la méditerranée, il faut forcément regarder du côté de la péninsule ibérique.

### 5 Las Navas de Tolosa (1212)

Il y a dans l'histoire espagnole une date qui est l'équivalent pour nous de « 1515 Marignan » ; c'est « 1212 Las Navas de Tolosa » : dix ans seulement après l'écriture du Liber Abaci. Cette bataille a été une étape clé dans la guerre des royaumes chrétiens d'Aragon et de Castille contre al-Andalus, c'est-à-dire les califats musulmans du sud de la péninsule.

#### Liber Abaci (1202)

Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)

Quand mon père était employé par Pise à la douane de Bougie pour assister les marchands qui la fréquentaient, il me fit venir à lui alors que j'étais enfant, dans l'intention de m'assurer un avenir utile et avantageux ; il voulut que je restasse quelques jours pour qu'on m'y enseigne l'étude du calcul. Là, introduit par un enseignement admirable dans l'art des neuf chiffres indiens, j'ai aimé cette science plus que tout, et j'ai compris ce qu'en elle on étudiait en Égypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile, et en Provence, avec ses différentes méthodes ; autant de places de commerce dans lesquelles je me suis rendu par la suite et où je me suis instruit par beaucoup d'étude et par le conflit des discussions.

#### Marco Polo (1254–1324)

Le livre des merveilles, Venise



#### Las Navas de Tolosa (1212)



## 6 Aragon et Catalogne

Sauf que parler d'Espagne à cette époque-là est parfaitement anachronique. Le royaume d'Aragon de l'époque couvrait non seulement l'Aragon et la Catalogne actuels, mais aussi par le jeu des alliances la Sicile, la Sardaigne, et une partie de la France méridionale, dont en particulier la ville de Montpellier. Ça, c'était à cause d'une dame que vous allez apprécier, Marie de Montpellier.

Aragon et Catalogne  
début du XIII<sup>e</sup> siècle



## 7 Marie de Montpellier et Pierre II d'Aragon (1207)

Cette Marie était devenue par le décès de son père, seigneur de Montpellier, et par son mariage, comtesse de Barcelone et reine d'Aragon. L'heureux époux, c'était Pierre II d'Aragon, qui sera le grand vainqueur de las Navas de Tolosa. En attendant, nous sommes cinq ans avant, il regrette d'avoir épousé Marie, et ne réside même pas avec elle. Et ça complique quelque peu la tâche, fondamentale pour une reine, de donner un héritier au trône.

Selon les chroniques, soit les consuls de Montpellier, soit Marie elle-même auraient orchestré le stratagème suivant. Ayant appris que le roi convoitait une belle dame du voisinage, ils lui ont fait croire que ladite dame accepterait de le rejoindre en sa couche, à la condition expresse qu'elle ne puisse être vue de quiconque, pas même de lui.

Le roi accepte, et pendant une semaine avant la réalisation du projet, tous les habitants de Montpellier sont invités à prier et les clercs à dire des messes pour la réussite de l'entreprise. Le jour dit, Marie est accompagnée à la chambre du roi par douze consuls, autant de nobles dames, deux notaires, le représentant de l'évêque, et quelques autres religieux.

Le roi ne s'aperçoit de rien, et à l'aube, tout le monde entre dans la chambre afin de dûment constater que le roi a bel et bien couché avec la reine, et que la légitimité de l'enfant à naître ne peut plus être contestée. La scène a été dûment immortalisée, d'où la photo que vous avez sous les yeux.

Selon le chroniqueur, le roi aurait sauté de sa couche et dit : « Puisque c'est ainsi, Dieu veuille accomplir vos vœux ». Et Dieu a donné neuf mois plus tard à la reine Marie un fils qui est devenu Jacques le Conquérant, seigneur d'Aragon et de Montpellier.

Voilà voilà, bien bien bien. Toujours est-il que comme Pise, Florence, ou Barcelone, Montpellier a développé très tôt un commerce dynamique avec le nord de l'Europe, la Catalogne, l'Italie, et aussi le reste de la Méditerranée, et en particulier les califats musulmans.

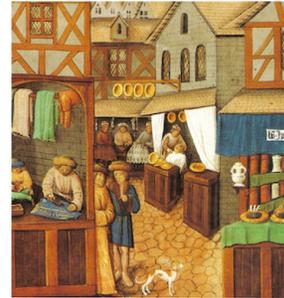
Marie de Montpellier et Pierre II d'Aragon (1207)



## 8 Échoppes au Moyen-Âge

Comment pouvait se présenter une ville commerçante au Moyen-Âge? Il y avait bien sûr des échoppes fixes, comme ici un drapier à gauche et un apothicaire à droite.

Échoppes au Moyen-Âge



## 9 Marché au Moyen-Âge

Il y avait aussi des marchés hebdomadaires, comme de nos jours, où s'échangeaient les denrées de production locale.

Marché au Moyen-Âge



## 10 Foire au Moyen-Âge

Enfin il y avait les foires, une, voire deux ou trois fois par an à date fixe, où avaient lieu les échanges internationaux. Du drap de laine provenant d'Angleterre, des métaux d'Allemagne, des épices d'Orient, etc.

Foire au Moyen-Âge



## 11 Le changeur et sa femme

Les échanges commerciaux étaient singulièrement plus compliqués que de nos jours. D'abord parce que pratiquement chaque ville importante avait sa monnaie propre, dont le cours par rapport aux autres pouvait varier. D'où une importante activité de changeur.

Le changeur et sa femme  
Marynus van Reymerswaele (1539)



## 12 Les usuriers

Un système de prêts permettait d'alléger et sécuriser les échanges d'une foire à l'autre ; les prêteurs se transformaient parfois en usuriers.

Les usuriers  
Quentin Metsys (1520)



## 13 École au Moyen-Âge

Non seulement les monnaies, mais encore les mesures et les poids étaient différents. De sorte que l'opération de base pour un marchand consistait par exemple à acheter une certaine quantité de drap dans une ville avec une certaine monnaie, et de la revendre avec une unité de longueur différente, et une autre monnaie. Il y avait aussi des trocs, des associations, des prêts à intérêt et des paiements différés ; bref le commerce de l'époque demandait une compétence arithmétique non négligeable, qui ne pouvait s'acquérir que par un enseignement spécialisé.

École au Moyen-Âge



## 14 École au Moyen-Âge

Les riches marchands avaient pris l'habitude d'envoyer leurs enfants dans des écoles où ils apprenaient non seulement à lire et à écrire, mais aussi à compter. Les Italiens appelaient cela des « scuole di abbaco », écoles de calcul. Euh... j'en vois une qui rêve au premier rang.

Les enseignants étaient des « maestri di abbaco ». Certains de ces enseignants ont laissé des livres. De nos jours, on les désigne plutôt par « arithmétiques commerciales ».

En France et en Espagne, on avait plutôt tendance à parler d'« algoristes » pour les enseignants, « algorisme » pour la technique, ce qui rappelait l'antériorité d'al-Khwarizmi. La supériorité évidente que donnaient aux marchands arabes leurs techniques mathématiques avait forcément fait école. Et il n'y a aucune raison de penser que seul le Liber Abaci de Fibonacci a servi à enseigner ces techniques. Les villes commerçantes catalanes et aragonaises en particulier étaient bien placées pour accéder à des traductions des traités commerciaux arabes.

Malgré tout, il semble que les maîtres d'abaque italiens ont eu longtemps un certain prestige puisqu'on en retrouve comme enseignants de mathématique, loin de leur Italie natale.

École au Moyen-Âge



## 15 Tractatus Algorismi (1307)

En particulier à Montpellier, puisque nous en parlions.

Une des plus anciennes arithmétiques commerciales qui contient des méthodes d'algèbre est le *Tractatus Algorismi* de Jacopo da Firenze. Malgré le titre latin, malgré le nom de l'auteur, qui écrit en dialecte toscan, le livre a bien été écrit à Montpellier.

Même si beaucoup des thèmes traités sont communs, les différences avec le *Liber Abaci* de Fibonacci sont notables. En particulier pour l'algèbre on y trouve un traitement systématique de presque toutes les équations du troisième et du quatrième degré qui se ramènent au second degré.

À la génération suivante, un autre livre d'abaque a aussi été écrit par un natif de Florence, en toscan, à Montpellier, le « *Libro di ragioni* » de Paolo Gherardi. Voici comment il commence.

## 16 Libro di ragioni (1328)

« Au nom de Dieu de sa très Sainte Mère et de toute la cour céleste, ce livre de problèmes sera écrit selon les règles et le cours d'abaque fait par Paolo Gherardi de Florence, au nom et en l'honneur de tous les bons raisonneurs ; qu'il me soit donné de le commencer et mieux de le finir. Le 30 janvier 1327, selon le cours de Montpellier. »

Il est donc avéré qu'il y a eu à Montpellier une tradition d'enseignement des mathématiques commerciales, et que pour cet enseignement on a fait venir des professeurs toscans. Cela ne veut pas dire qu'il n'y ait pas eu de maîtres d'abaque languedociens, capables de s'adresser à leurs élèves dans leur langue, l'occitan.

## 17 Compendi de l'art de l'algorisme

Vous voyez ici la première page d'un manuscrit sans nom d'auteur, dont il est seulement mentionné qu'il a été écrit à Pamiers, au sud-est de Toulouse. Il est écrit en occitan.

Le titre signifie « résumé de l'art de l'algorisme », le dernier mot étant pris au sens des techniques de calcul des Arabes.

### Tractatus Algorismi (1307)

Jacopo da Firenze, Montpellier



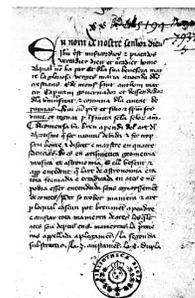
### Libro di ragioni (1328)

Paolo Gherardi, Montpellier

Al nome di Dio et della sua madre santissima e di tucta la corte celestiale questo libre sarà scripto di ragioni secondo le regole e 'l corso dell'ambaco facte per Paulo Gerardi di Firentie l nome e a honore di tuct'i buoni ragioneri per che mi dia bene a cominciare e meglio a finire. Amen. Anni 1327 a di 30 gennaio second lo corso di [Mompeslieri](#).

### Compendi de l'art de l'algorisme

Pamiers (ca 1430)



## 18 Compendi de l'art de l'algorisme

Après les dédicaces religieuses habituelles, l'auteur annonce un bref résumé de l'art d'al-Khwarizmi, qui fut, dit-il, « homme sage et discret, et maître dans les quatre arts, l'arithmétique, la géométrie, la musique, et l'astronomie », c'est-à-dire le vieux quadrivium de Boèce.

Sauf que le manuscrit contient des problèmes algébriques bien plus avancés que ceux du temps de Boèce. En particulier celui-ci.

## 19 Exemple de drap

« Il y a cinq hommes qui veulent acheter une pièce de drap de telle sorte que le premier demande à tous les autres la moitié de tout l'or et l'argent qu'ils portent, le second demande le tiers, etc., jusqu'au cinquième qui demande le sixième. La question est, combien coûte la pièce de drap et combien chacun a-t-il ? »

Le problème est beaucoup plus facile à comprendre pour nous dans l'écriture algébrique actuelle. Si vous notez  $x_i$  l'avoir du marchand numéro  $i$  et  $c$  le coût de la pièce de drap, vous voyez le système de 5 équations de l'énoncé.

Comme vous le constatez, il y a cinq équations et six inconnues. En écrivant la somme de chaque marchand en fonction du coût  $c$ , on obtient la solution générale que vous voyez écrite en dessous. Observez que l'avoir du premier marchand est forcément négatif. Voici ce que dit l'auteur.

## 20 Mens de non res

Il commence par poser 60, pour son plaisir dit-il, en fait parce que 60 est divisible par les entiers de 2 à 5. Sa méthode de résolution ensuite consiste à passer par les inconnues auxiliaires que constituent la somme des cinq avoirs, moins chacun d'entre eux. Peu importent les détails. Ce qu'il faut retenir, c'est que la solution est correcte, mais surtout qu'elle donne un résultat négatif pour le premier acheteur, ce que l'auteur traduit par un nombre « moins que rien » dit-il, et qu'il accepte sans sourciller. C'est la toute première fois en Europe qu'on reconnaît la validité d'une solution négative parce qu'elle est mathématiquement correcte.

### Compendi de l'art de l'algorisme

Pamiers (ca 1430)

Comença ben ben aprendre del art d' algorisme q fa natural de vida e fa aop sau home e discret e marstre en quatre ciencias. De es en arismetica geometria musica et astronomia. E ell besent e .ypp entendent q lart de astronomia era tota formada e criada en oras e no podia esser entenduda sense cognossemēt de contes/Per se trober manera e art

### Exemple de drap

Compendi de l'art de l'algorisme (Pamiers, ca 1430)

Son 5 homes que volen comprar una pessa de drap en tal manera que lo 1 demanda a totz los autres la  $\frac{1}{2}$  de tot l'aur et l'argent que portan los autres; lo 2 demanda lo  $\frac{1}{3}$ , lo 3 demanda lo  $\frac{1}{4}$ , lo 4 demanda lo  $\frac{1}{5}$ , lo 5 la  $\frac{1}{6}$  part. Demandi que costa la pessa & que porta escun d'els.

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) &= c \\x_2 + \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_4 + x_5) &= c \\x_3 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_4 + x_5) &= c \\x_4 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_5) &= c \\x_5 + \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &= c\end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{c}{197}(-43, 77, 117, 137, 149)$$

### Mens de non res

Compendi de l'art de l'algorisme (Pamiers, ca 1430)

Per mon plaser pausi 60. Aras per lo 1, yeu atrobi 120, per lo 2, 90, per lo 3, 80, per lo 4, 75. Et per lo 5, 72. Ajusta totz aquests nombres, mes la position que es 60, que montan 437, que debes partir per 1 mentz los 5 que fan la compra. Partis donc 437 per 4 que ne se ve 109 &  $\frac{1}{4}$  del qual nombre leva 60 per saber que costa la pessa, restan 49 et  $\frac{1}{4}$ ; et aytant costa. Aras per lo 1 leva ne 120, restan 10 &  $\frac{3}{4}$  mens de non res. Item per lo 2 leva ne 90, resta 19 &  $\frac{1}{2}$ . Item per lo 3 leva ne 80, restan 29 et  $\frac{1}{4}$ . Item per lo 4 leva-ne 75, restan 34 et  $\frac{1}{4}$ . Item per lo 5 leva-ne 72, restan 37 et  $\frac{1}{4}$ .

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{4}(-43, 77, 117, 137, 149)$$

## 21 Deniers d’Avinho, Perpenha et Montpellier

Tenez, vous vous souvenez de ce que je vous disais sur les changes monétaires de ville à ville ? Voici un exemple : d’Avignon à Montpellier, il y a moins de 100 kilomètres, et de Perpignan à Montpellier environ 150.

« Quand 3 deniers de Perpignan valent 5 deniers de Montpellier, et 2 de Montpellier valent 3 de ceux d’Avignon, je demande combien 12 de ceux d’Avignon valent de ceux de Perpignan ? »

### Deniers d’Avinho, Perpenha et Montpellier

Compendi de l’art de l’algorisme (Pamiers, ca 1430)

Quant 3 deniers de Perpenha valen 5 deniers de Montpellier et 2 de Montpellier valen 3 d’aquells d’Avinho, demandi 12 d’aquells d’Avinho quantas ne valen d’aquells de Perpenha ?

## 22 L’agnel d’or

Le denier n’est pas la seule unité monétaire du manuscrit. On y trouve aussi des livres, des écus, et... des moutons. Le mouton ou l’agnel, c’est cette monnaie d’or frappée d’un agneau pascal, qui a été en usage en France de Louis XI à Charles X.

Voici les moutons dans un problème d’association à terme.

### L’agnel d’or

xiii<sup>e</sup>– xv<sup>e</sup> siècles



## 23 Tres merchants fan companhia

« Trois marchands s’associent, le premier met 200 moutons et reste 15 mois, le second met 94 moutons et reste 17 mois, le troisième met 38 moutons et reste 10 mois ; à échéance, ils trouvent 400 de gain. Je demande comment ils doivent se les répartir ? »

### Tres merchants fan companhia

Compendi de l’art de l’algorisme (Pamiers, ca 1430)

Tres merchans fan companhia ensemps, lo premier met 200 motos et demora hi 15 meses, lo 2 hi met 94 motons et hi demora 17 meses, lo 3 hi met 38 motons et hi demora 10 meses ; et a cap de temps troban en gasanh 400. Demandi com se deven partir ?

## 24 la regla general mot maravilhosa

Après la règle de trois et ses multiples applications, vient en général dans les traités d'abaque, l'algèbre proprement dite, c'est-à-dire la résolution d'équations. Les deux méthodes phares sont les deux règles de fausse position, simple et double. Je vous en parle ailleurs, donc je ne vais pas me répéter. Voici le début du chapitre sur la double fausse position, qui est considérée comme une technique difficile.

« Suit la règle de deux fausses positions avec ses exemples ; c'est la troisième règle très merveilleuse qui à partir de deux erreurs consiste à trouver la vérité. Après que j'ai traité d'une fausse position, il me reste à traiter de deux, troisième règle dont je donnerai divers exemples et divers enseignements, puisqu'elle sert de différentes manières pour faire des raisonnements variés très difficiles qui sans cette règle seraient d'une grande fatigue, comme le démontreront les exemples suivants. »

### la regla general mot maravilhosa

Compendi de l'art de l'algorisme (Pamiers, ca 1430)

Sic se la regla de 2 falsas positions ab sos exemples la qual es la 3 regla mot maravilhosa de 2 falsas atrovat la veritat. Aprop que yeu tractat de una posicio falsa resta que yeu tracte de las 2 falsas positions, que la 3 regla general de la qual donarei diverses exemples et diverses ensinhamens segont que en diversas manieras servis affer diversas rasons mot defficils las quals sens regla seria granda fatiga como demostrarem los exemples seguens.

## 25 30 cannas de drap que costan 30 motos

Après les règles générales, viennent en fin de cours des exercices du type des récréations mathématiques, de ces exercices dont les énoncés courent dans tous les continents au fil des siècles. Celui-ci est une version du problème des cent volailles, qui est apparu pour la première fois en Chine au cinquième siècle. Je vous raconte son histoire ailleurs.

« Un marchand achète 30 cannes de drap qui coûtent 30 moutons. Il y en a qui coûtent 4 moutons, d'autres deux moutons, et d'autres un demi mouton. Je demande combien y en a-t-il de chacune. »

C'est le dernier problème du livre. Après avoir donné une réponse sans explication, l'auteur conclut : « Ainsi finit le présent livre de la science d'arithmétique, vulgairement appelée algorisme ».

### 30 cannas de drap que costan 30 motos

Compendi de l'art de l'algorisme (Pamiers, ca 1430)

Un merchant compra 30 cannas de drap que costan 30 motos. Et n'i a de 4 motos et de 2 motos et d'autres de  $\frac{1}{2}$  moto. Demandi quantas n'i a de cascunas.

## 26 références

Ainsi finit la présente histoire de la science des abaqués, familièrement sous-titrée « algorisme en Languedoc ».

Ah ben là au moins, je ne peux pas dire que ç'ait été trop difficile, ni me plaindre d'une grande fatigue, pour trouver la vanne de la fin.

### références

- C. Hay (ed.) (1988) *Mathematics from manuscript to print 1300–1600*, Oxford : Clarendon Press
- J. Høyrup (2005) Leonardo Fibonacci and *abbaco* culture. A proposal to invert the roles, *Revue d'histoire des mathématiques*, 11, 23–56
- J. Høyrup (2007) *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and early Italian *abbaco* culture*, Basel : Birkhäuser
- J. Sesiano (2009) *Une introduction à l'histoire de l'algèbre : Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance*, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes
- M. Spiesser (2003) Les manuels d'arithmétique pour les marchands dans la France du XV<sup>e</sup> siècle, *Bulletin de l'APMEP*, 444, 32–50
- M. Spiesser (2017) La naissance d'un genre, le traité d'arithmétique commerciale (XIV<sup>e</sup>–XVI<sup>e</sup> siècles), *CNRS Images des Mathématiques*, 10 octobre.