0 Le bœuf en daube

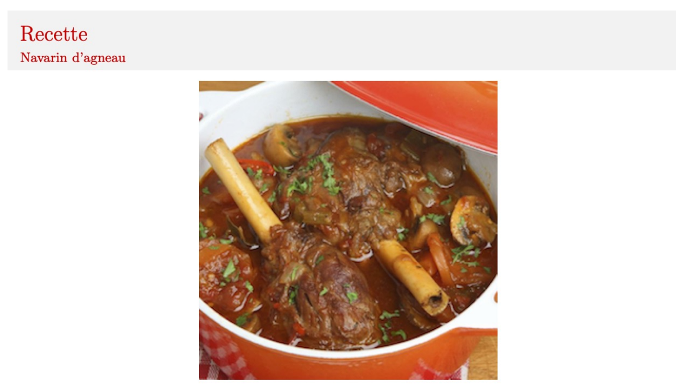
Vous allez avoir droit à ma recette de bœuf en daube. Vous ne me croyez pas ? Tant pis.

1 Recette

Prenez des morceaux de bœuf. Mettez-les à rissoler avec des oignons et de l'ail dans de la graisse de canard. À feu vif, versez un petit verre d'armagnac, et faites flamber. Farinez, salez poivrez, ajoutez des herbes fines. Mouillez avec un rouge assez costaud : Vacqueyras, Cahors, Madiran, vous voyez le genre. Laissez mijoter à feu doux.

2 Recette

Là, vous devriez être capables de faire un navarin d'agneau. Pas encore ? Bon, ok.



Prenez des morceaux d'agneau. Sur l'image ça a l'air d'être des souris, c'est une bonne idée. Mettez-les à rissoler avec des échalottes dans de l'huile d'olive. Versez un alcool de fruit et flambez. Tenez prenez une vieille poire, vous m'en direz des nouvelles. Farinez, salez, ajoutez des grains de coriandre, du cumin et du paprika. Mouillez avec un blanc sec. Essayez un Pouilly Fuissé, ça peut pas faire de mal. Un muscadet marchera aussi. Laissez mijoter à feu doux.

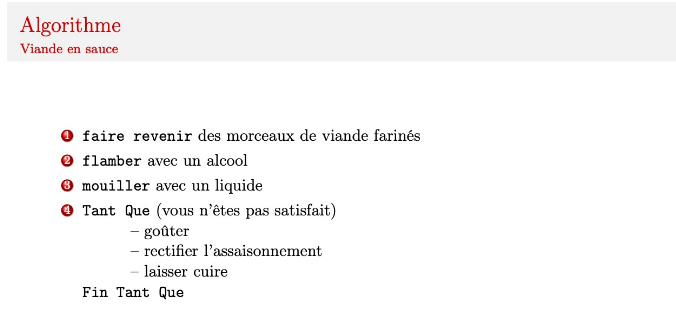
Ah non, je vais pas passer en revue tout mon carnet de recettes ! Vous en savez assez maintenant pour écrire votre propre algorithme de préparation d'une viande en sauce.

3 Algorithme

1. `faire revenir` des morceaux de viande
2. `flamber` avec un alcool
3. `mouiller` avec un liquide
4. `Tant Que` (vous n'êtes pas satisfait)
   - goûter
   - rectifier l'assaisonnement
   - laisser cuire

   `Fin Tant Que`

Voilà ! Maintenant que vous avez l'algorithme, vous êtes prêt pour des mathématiques de haute volée.



4 Définition

On appelle *Viande-en-Sauce* et on note $\mathcal{VS}$ le quadruplet (V, A, L, E) où :

— V est une viande

— A est un alcool

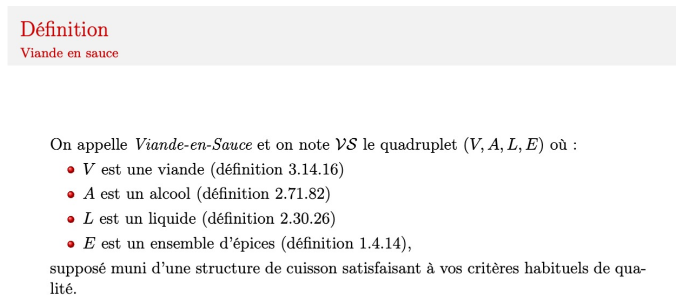
— L est un liquide

— E est un ensemble d'épices,

supposé muni d'une structure de cuisson satisfaisant à vos critères habituels de qualité.

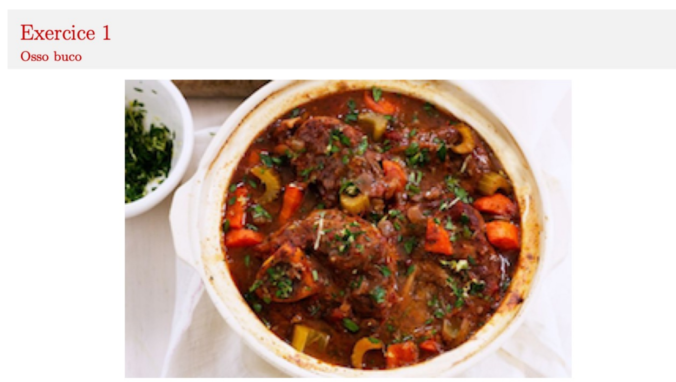
Toute allusion au style d'une collection célèbre du vingtième siècle n'est évidemment pas fortuite.

Pour vérifier que vous avez compris la définition, voici quelques exercices.



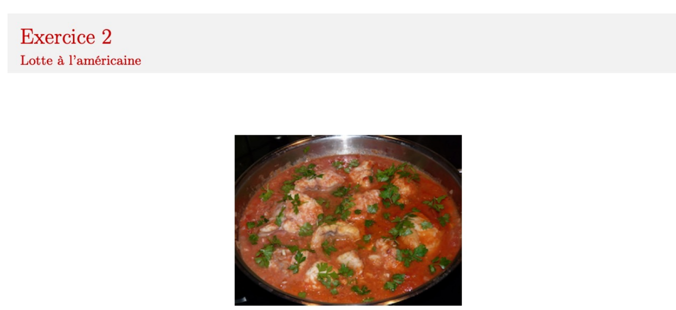
5 Exercice 1

Exercice 1 :
Petit a) Écrire la recette de l'*Osso Buco*.
Petit b) Démontrer rigoureusement que c'est une viande en sauce.



6 Exercice 2

Exercice 2 :
Petit a) Préparez une lotte à l'américaine (allez-y doucement sur le whisky).
Petit b) Reprendre la question a) en remplaçant le whisky par du rhum. Personnellement je trouve ça meilleur. Vous me direz.



7 Exercice 3

Exercice 3
Forêt noire

Exercice 3 : La Forêt Noire est-elle une viande en sauce ?

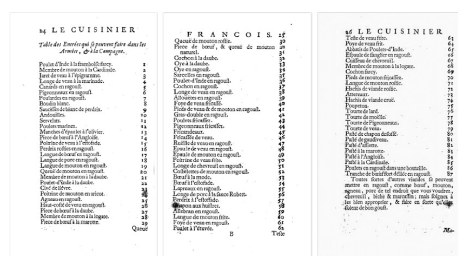
8 Le vrai cuisinier françois (1721)

Le vrai cuisinier françois (1721)
François Pierre de la Varenne (1615–1678)

Bon vous voilà paré à toute éventualité. Ceci est le frontispice de l'édition de 1721 du « Cuisinier français », de François Pierre de la Varenne. Le best-seller absolu des livres de cuisine pendant pratiquement deux siècles. Plus de deux cents éditions successives. Des centaines de milliers d'exemplaires vendus.

9 Viandes qui se peuvent mettre en ragoust

Viandes qui se peuvent mettre en ragoust
de la Varenne, Le vrai cuisinier françois (1721)


LE CUISINIER

FRANCOIS.

LE CUISINIER

Sur trois pages, le livre liste des recettes de ragoûts. Ça commence par le « Poulet d'Inde à la framboise farci », ça va jusqu'au « poulet à l'étuvée », en passant par la « longe de chevreuil », l'« oie à la daube » et les « sarcelles en ragoût ».

Cap ou pas cap ?

Vous rigolez, et vous trouvez que j'exagère. Les mathématiques, ça n'est pas que des recettes de cuisine. Et pourtant si, en grande partie, et pendant longtemps.

10 Une citerne rectangulaire

Voici le contenu d'une tablette d'argile babylonienne. Il s'agit d'une citerne parallélépipédique, dont on doit trouver la longueur et la largeur connaissant le volume, la hauteur, et la différence entre longueur et largeur. Les nombres sont écrits en hexadécimal. De sorte que 27 virgule 46 virgule 40 est le nombre 27 fois soixante au carré, plus 46 fois soixante, plus 40.

Au fond, peu importe. Ce qui compte c'est que la résolution est présentée comme la suite finie des opérations à effectuer pour arriver au résultat. Prenez ceci, faites cela, multipliez par telle quantité. C'est bien la définition d'un algorithme non ? Remarquez qu'il n'est pas présenté sur des variables : il est instancié. On est prié de comprendre la méthode sur un cas particulier.

Il est sous-entendu que tout élève normalement doué, après avoir répété l'algorithme sur deux ou trois exemples différents, saura se débrouiller pour résoudre n'importe quel autre problème du même type.

Et bien pendant longtemps on n'a pas envisagé d'autre manière d'écrire, ni surtout d'enseigner les mathématiques.

Ça a été vrai dans tous les pays. À une exception près : les mathématiques grecques, et en particulier les Éléments d'Euclide. Sauf que cette exception a eu une telle importance historique dans l'enseignement occidental, qu'elle est devenue l'arbre qui cachait la forêt.

Pour avoir l'air sérieux, n'importe quel exposé mathématique devait être écrit sous la forme des Éléments d'Euclide, avec axiomes, lemmes, propositions et théorèmes. Oui, mais Euclide n'a jamais prétendu que ses Éléments soient un ouvrage pédagogique. Au vingtième siècle, les auteurs des Éléments mathématiques de Bourbaki n'ont jamais prétendu non plus écrire un manuel d'enseignement.

Mais je m'égare. Revenons aux algorithmes, et en particulier au « premier algorithme non trivial de l'histoire » selon Knuth : l'algorithme ... eh bien d'Euclide, précisément.

Une citerne rectangulaire
tablette babylonienne

La hauteur est 3,20, et on a creusé un volume de 27,46,40. La longueur dépasse la largeur de 50.

- Prenez la réciproque de la hauteur, soit 18,
- Multipliez ceci par le volume, soit 8,20,
- Prenez la moitié de 50, et élevez au carré, soit 10,25,
- Ajoutez 8,20 pour obtenir 8,30,25,
- La racine carrée est 2,25 ; prendre deux copies, ajouter 25 à l'une, le retrancher de l'autre ;
- Vous trouvez que 3,20 est la longueur et 2,30 la largeur.

11 L'algorithme d'Euclide

Voici l'énoncé de la Proposition I du livre sept.

« Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux. »

Pas de doute, c'est bien l'algorithme d'Euclide. Vous n'avez aucune peine à le reconnaître si vous le connaissez déjà. Mais imaginez que vous ne l'ayez jamais vu ?

Voici le début de la démonstration.

« Soient les deux nombres inégaux AB, $\Gamma\Delta$; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsqu'on a pris l'unité ; je dis que les nombres AB, $\Gamma\Delta$ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure. »

Pourquoi deux lettres pour désigner un nombre ? Parce que chez Euclide, tout nombre est une longueur. Les deux lettres sont les extrémités d'un segment. Et une longueur en « mesure » une autre si le rapport des deux est un nombre entier, et donc si le premier nombre divise le second. En clair, le début de la démonstration paraphrase exactement l'énoncé.

L'algorithme d'Euclide
Éléments, Livre VII, Proposition I

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.

Soient les deux nombres inégaux AB, $\Gamma\Delta$; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsqu'on a pris l'unité ; je dis que les nombres AB, $\Gamma\Delta$ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

12 L'algorithme d'Euclide

Voici la suite. Inutile de chercher à la lire en détail, il y a plus simple. C'est une démonstration par l'absurde, comme souvent chez Euclide. Vous pouvez vérifier, elle est correcte. L'argument principal est bien là, même s'il est un peu caché. Je l'ai mis en bleu : « si deux nombres ont un diviseur commun, leur différence est aussi multiple de ce diviseur. » La conclusion est bien « ce qu'il fallait démontrer », commme il se doit.

Mais franchement : vous donneriez ça à vos élèves ?

Je vous propose de suivre des avatars de l'algorithme d'Euclide chez trois auteurs successifs.

L'algorithme d'Euclide
Éléments, Livre VII, Proposition I

Car si les nombres AB, $\Gamma\Delta$ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E ; que $\Gamma\Delta$ mesurant AB laisse ZA plus petit que lui-même ; que ZA mesurant $\Delta\Gamma$ laisse $H\Gamma$ plus petit que lui-même ; et qu'enfin $H\Gamma$ mesurant ZA laisse l'unité ΘA. Puisque E mesure $\Gamma\Delta$ et que $\Gamma\Delta$ mesure ZB, le nombre E mesure ZB. Mais il mesure AB tout entier ; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔH ; donc E mesurera ΔH. Mais il mesure $\Gamma\Delta$ tout entier ; donc il mesurera le reste ΓH. Mais ΓH mesure $Z\Theta$ donc E mesurera $Z\Theta$. Mais il mesure ZA tout entier ; donc un nombre mesurera l'unité restante $A\Theta$, ce qui est impossible. Donc aucun nombre ne mesurera les nombres AB, $\Gamma\Delta$. Donc les nombres AB, $\Gamma\Delta$ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

13 Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)

Le premier est Bachet de Méziriac. Il est connu pour une édition des Arithmétiques de Diophante que Pierre de Fermat avait achetée, et dont il avait gribouillé les marges de façon un tantinet cavalière.

Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)

14 Problèmes plaisans et délectables (1624)

Problèmes plaisans et délectables (1624)
Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)


PROBLEMES PLAISANS ET DELECTABLES, QVI se font par les nombres.

Partie recueillis de diuers Autheurs, partie inuentez de nouueau auec leur demonstration.

Par CLAVDE GASPAR BACHET, Sieur de Meziriac.

Seconde Edition, reueuë, corrigée, & augmentée de plusieurs propositions, & de plusieurs Problemes, par le mesme Autheur.

Tres-utile pour toutes sortes de personnes curieuses, qui se seruent de l'Arithmetique, & Mathematique.

A LYON,

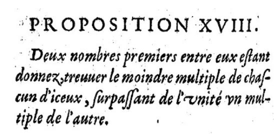
Chez PIERRE RIGAVD & ASSOCIEZ, ruë Merciere, au coing de ruë Ferrandiere, à l'Enseigne de la Fortune.

M. DC. XXIIII.

Il est aussi l'auteur de ces « Problèmes plaisants et délectables ». Malgré le titre plutôt primesautier, il s'agit bien d'un livre d'arithmétique, et même de très bon niveau pour l'époque.

15 Identité de Bézout

Identité de Bézout
Bachet de Méziriac, problèmes plaisans et délectables (1624)


PROPOSITION XVIII.

Deux nombres premiers entre eux estant donnez, treuuer le moindre multiple de chascun d'iceux, surpassant de l'vnité vn multiple de l'autre.

Voici comment est présentée l'identité de Bézout. Non il n'y a pas d'erreur. Étienne Bézout est né plus d'un siècle après la parution de ce livre qui contient son identité. De toutes façons, l'identité de Bézout était probablement connue d'al-Haytham, six bons siècles avant Bachet de Méziriac.

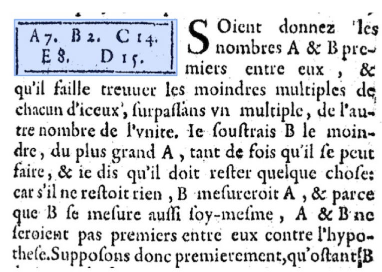
Mais ce n'est pas la question. L'énoncé est présenté comme une proposition, c'est-à-dire un problème qu'on « propose ».

Deux nombres premiers entre eux étant donnés, trouver le plus petit multiple de chacun d'eux, surpassant de l'unité un multiple de l'autre.

En termes modernes, si a et b sont premiers entre eux on doit trouver u et v tels que $au = bv + 1$.

16 Identité de Bézout

Identité de Bézout
Bachet de Méziriac, problèmes plaisans et délectables (1624)

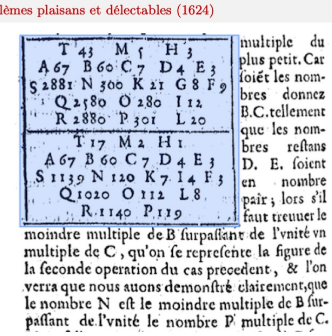

A 7. B 2. C 14.
E 8. D 15.

Soient donnez les nombres A & B premiers entre eux, & qu'il faille treuuer les moindres multiples de chacun d'iceux, surpassans vn multiple, de l'autre nombre de l'vnité. Ie soustrais B le moindre, du plus grand A, tant de fois qu'il se peut faire, & ie dis qu'il doit rester quelque chose: car s'il ne restoit rien, B mesureroit A, & parce que B se mesure aussi soy-mesme, A & B ne seroient pas premiers entre eux contre l'hypothese. Supposons donc premierement, qu'ostant B

Voici comment Bachet procède pour son explication. Il donne un algorithme, et pas une démonstration. Il fait tourner son algorithme sur des variables qu'il nomme grand A, grand B, etc. Et au début de l'exposé, il met un cadre avec des valeurs numériques, pour que le lecteur puisse suivre le déroulement de l'algorithme sur un exemple.

17 Identité de Bézout

Identité de Bézout
Bachet de Méziriac, problèmes plaisans et délectables (1624)


T 43 M 5 H 3
A 67 B 60 C 7 D 4 E 3
S 2881 N 300 K 21 G 8 F 9
Q 2580 O 280 I 12
R 2880 P 301 L 20

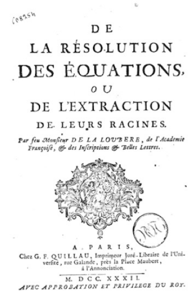
T 17 M 2 H 1
A 67 B 60 C 7 D 4 E 3
S 1139 N 120 K 7 I 4 F 3
Q 1020 O 112 L 8
R 1140 P 119

multiple du plus petit. Car soiét les nombres donnez B.C. tellement que les nombres restans D. E. soient en nombre pair; lors s'il faut treuuer le moindre multiple de B surpassant de l'vnité vn multiple de C, qu'on se represente la figure de la seconde operation du cas precedent, & l'on verra que nous auons demonstré clairement, que le nombre N est le moindre multiple de B surpassant de l'vnité le nombre P multiple de C.

Quand le raisonnement se complique, il y a plus de variables, et le cadre devient plus important. Mais toujours, Bachet va instancier son algorithme, pour que le lecteur puisse goûter sa recette de cuisine.

18 De la résolution des équations (1732)

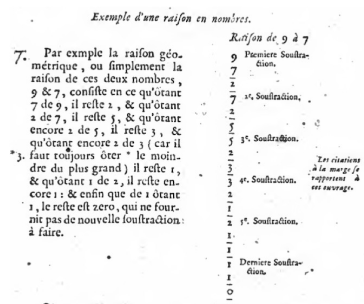
De la résolution des équations (1732)
Simon de la Loubère (1642–1729)


DE
LA RÉSOLUTION
DES ÉQUATIONS,
OU
DE L'EXTRACTION
DE LEURS RACINES.
Par feu Monſieur DE LA LOUBERE, *de l'Academie Françoiſe, & des Inſcriptions & Belles Lettres.*
A PARIS,
Chez G. F. QUILLAU, Imprimeur Juré-Libraire de l'Univerſité, rue Galande, près la Place Maubert, à l'Annonciation.
M. DCC. XXXII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Vous n'aviez jamais entendu parler de Simon de la Loubère et ça aurait pu continuer. Si on en juge par cet ouvrage posthume, il n'est pas scandaleusement injuste que l'histoire des mathématiques ait oublié son nom.

19 De la résolution des équations (1732)

De la résolution des équations (1732)
Simon de la Loubère (1642–1729)


Exemple d'une raiſon en nombres.

7. Par exmple la raiſon géométrique, ou ſimplement la raiſon de ces deux nombres, 9 & 7, conſiſte en ce qu'ôtant 7 de 9, il reſte 2, & qu'ôtant 2 de 7, il reſte 5, & qu'ôtant encore 2 de 5, il reſte 3, & qu'ôtant encore 2 de 3 (car il
*3. faut toujours ôter * le moindre du plus grand) il reſte 1, & qu'ôtant 1 de 2, il reſte encore 1 : & enfin que de 1 ôtant 1, le reſte eſt zero, qui ne fournit pas de nouvelle ſouſtraction à faire.

Raiſon de 9 à 7
9 Premiere Souſtraction.
7
2
7 2e. Souſtraction.
2
5
5 3e. Souſtraction.
2
3
3 4e. Souſtraction.
2
1
2 5e. Souſtraction.
1
1
1 Derniere Souſtraction.
1
0

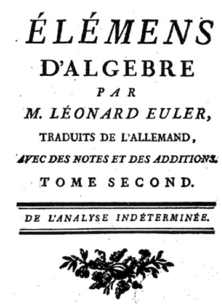
Les citations à la marge ſe rapportent à cet ouvrage.

En fait de résolution d'équations, c'est d'équations en nombres entiers qu'il s'agit, dont en particulier l'équation $au + bv = 1$, c'est-à-dire à nouveau l'identité de Bézout. Si vous avez le courage de lire le baratin de la colonne de gauche, vous verrez que c'est bien l'algorithme d'Euclide qu'il décrit. La colonne de droite liste les soustractions successives.

Par rapport à Bachet de Méziriac, le fait qu'on soit devant un vrai algorithme, que l'on pourrait instancier différemment, est un peu moins clair. Mais en gros, c'est le même principe.

20 Élémens d'algebre (1774)

Élémens d'algebre (1774)
Leonhard Euler (1707–1783)


ÉLÉMENS
D'ALGEBRE
PAR
M. LÉONARD EULER,
TRADUITS DE L'ALLEMAND,
AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.
TOME SECOND.
DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Passer l'air de rien de Simon de la Loubère à Leonhard Euler, tout de même, c'est gonflé !

Vous êtes devant un chef d'œuvre pédagogique, n'ayons pas peur des mots. Le livre a été écrit par Euler en allemand, traduit en français par Jean Bernoulli ; c'est le fils de Jean Bernoulli, et le petit-fils du Jean Bernoulli auquel vous pensiez. C'est vous dire si on est paré côté Jean Bernoulli. La traduction a été revue et augmentée par Lagrange : rien que ça !

Ce livre a servi de manuel de mathématiques à des générations successives d'élèves. J'imagine, au grand bonheur de leurs enseignants.

Voici comment procède Euler, toujours sur le même exemple de l'identité de Bézout.

21 Élémens d'algebre (1774)

« Question première. Il s'agit de partager 25 en deux parties, dont l'une soit divisible par 2, et l'autre soit divisible par trois. »

Un exercice donc, et même plutôt facile. La solution est soigneusement détaillée.

Suivent une dizaine d'autres d'exercices, un peu plus difficiles à chaque fois, sans jamais la moindre astuce ni quoi que ce soit qui s'écarte de l'objectif.

Voici la question cinquième.

Élémens d'algebre (1774)
Leonhard Euler (1707–1783)

Queſtion premiere. Il s'agit de partager 25 en deux parties, dont l'une ſoit diviſible par 2, & dont l'autre ſoit diviſible par 3.

Soit l'une des parties cherchées $=2x$, & l'autre $=3y$, il faudra que $2x+3y=25$, & par conſéquent que $2x=25-3y$. Si l'on diviſe par 2, on a $x=\frac{25-3y}{2}$; d'où nous concluons en premier lieu que $3y$ doit être moindre que 25, & par conſéquent y plus petit que 8. Qu'on tire de cette valeur de x autant d'entiers qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire qu'on diviſe par le dénominateur 2, on aura $x=12-y+\frac{1-y}{2}$;

22 Élémens d'algebre (1774)

« Une troupe d'hommes et de femmes a dépensé dans une auberge 1000 sous. Les hommes ont payé 19 sous chacun, et les femmes 13. Combien y avait-il d'hommes et de femmes ? »

Toujours l'identité de Bézout, cette fois-ci avec des nombres légèrement plus compliqués que 25, 2 et 3, mais surtout, dans une situation concrète.

Élémens d'algebre (1774)
Leonhard Euler (1707–1783)

Queſtion cinquieme. Une troupe d'hommes & de femmes a dépenſé dans une auberge 1000 ſous. Les hommes ont payé 19 ſous chacun, & les femmes 13. Combien y avoit-il d'hommes & de femmes?

Soit le nombre des hommes $=x$, & celui des femmes $=y$, on aura l'équation $19x+13y=1000$. Donc $13y=1000-19x=988+12-13x-6x$, & $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; d'où il ſuit que $12-6x$, ou $6x-12$, ou auſſi $x-2$, la ſixieme partie de ce nombre, doit être diviſible par 13. Qu'on faſſe donc $x-2=13z$, on aura x

23 Élémens d'algebre (1774)

Au bout de la dizaine de recettes de cuisine, et seulement après, vient la formalisation du problème : « une équation de la forme $ax + by = c$, où a, b, et c signifient des nombres entiers ».

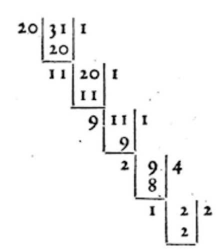
Élémens d'algebre (1774)
Leonhard Euler (1707–1783)

Les queſtions que nous avons conſidérées juſqu'à préſent, conduiſent toutes à une équation de la forme $ax+by=c$, où a, b & c ſignifient des nombres entiers & poſitifs, & où l'on demande pour x & y pareillement des nombres entiers poſitifs. Or ſi b eſt négatif, & que l'équation ait la forme $ax=by+c$, on a des queſtions d'une toute autre eſpece, & qui admettent une infinité de ſolutions: nous allons en traiter auſſi, avant que de finir ce Chapitre.

24 Élémens d'algebre (1774)

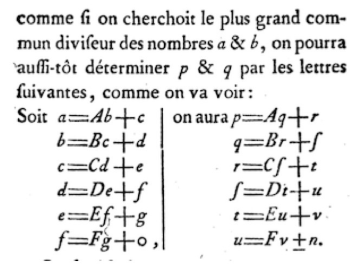
Ensuite Euler propose une manière de disposer l'algorithme d'Euclide.

Élémens d'algebre (1774)
Leonhard Euler (1707–1783)



25 Élémens d'algebre (1774)

Élémens d'algebre (1774)
Leonhard Euler (1707–1783)


comme ſi on cherchoit le plus grand commun diviſeur des nombres a & b, on pourra auſſi-tôt déterminer p & q par les lettres ſuivantes, comme on va voir :

Soit	on aura
$a = Ab + c$	$p = Aq + r$
$b = Bc + d$	$q = Br + ſ$
$c = Cd + e$	$r = Cſ + t$
$d = De + f$	$ſ = Dt + u$
$e = Ef + g$	$t = Eu + v$
$f = Fg + 0$,	$u = Fv + n$.

Et enfin, il commence à raisonner sur les quantités abstraites, avec des variables littérales.

Nous sommes en train de parler de Leonhard Euler, un des plus grands mathématiciens de tous les temps, si ce n'est le plus grand. Pourquoi il enseigne comme ça ? Ça vaut la peine de se poser la question, non ?

26 Carrés magiques

Je vais vous rejouer la même pièce, avec les mêmes personnages, sur un sujet différent. Ce sujet se prête encore plus difficilement à la mathématisation. Il s'agit des carrés magiques.

Carrés magiques
Ahmad al-Buni (ca. 1200)

Vous connaissez le problème : il s'agit de ranger les nombres de 1 à n^2, dans un carré de n par n, de façon que la somme sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur les deux diagonales, soit la même. On a trouvé des carrés magiques en Chine datant de bien avant Jésus-Christ. Les Indiens les connaissaient et les ont peut-être transmis aux Arabes. Les carrés d'ordre quatre et cinq que vous voyez sur cette image sont de al-Buni, vers 1200.

Le problème consiste à décrire des algorithmes pour construire systématiquement des carrés magiques d'ordre quelconque. La difficulté est double. D'une part il faut faire comprendre au lecteur comment fonctionne l'algorithme. D'autre part, il faut qu'il soit convaincu que le carré, s'il le construit ainsi, possèdera bien la propriété désirée. En d'autres termes, il faut dire comment ça marche, et pourquoi ça marche.

Le personnage du Grec n'est pas joué par Euclide, mais par Manuel Moschopoulos, qui est beaucoup plus récent. Il vivait à Constantinople. Il a écrit un traité sur les carrés magiques, dont voici un court extrait.

27 Traité sur les carrés magiques

« En règle générale, à chaque passage à un nombre supérieur, elle monte elle-même d'une case, en sorte qu'elle se trouve toujours placée sur la case située immédiatement et directement au-dessous de celle qui est précisément au milieu de toutes les cases du carré proposé de cette espèce : on verra tout cela plus clairement sur les figures. »

Traité sur les carrés magiques
Manuel Moschopoulos (ca. 1270–1320)

en règle générale, à chaque passage à un nombre supérieur, elle monte elle-même d'une case, en sorte qu'elle se trouve toujours placée sur la case située immédiatement et directement au-dessous de celle qui est précisément au milieu de toutes les cases du carré proposé de cette espèce : on verra tout cela plus clairement sur les figures.

Inutile de vous en lire plus : il faut vraiment un gros effort de bonne volonté pour comprendre l'algorithme de Moschopoulos. Et comme il le dit lui-même, il faut suivre les pas successifs sur les cas particuliers, qu'il donne dans quelques figures.

28 disposer en trois rangs les neuf premières cartes

Disposer en trois rangs les neuf premières cartes
Bachet de Méziriac, problèmes plaisans et délectables (1624)

PROBLEME XXI.

Disposer en trois rangs les neuf premieres cartes, despuis l'As, iusques au 9. tellement que les points de chasque rang assemblez fassent tousiours la mesme somme, tant en long, qu'en large, & en diametre.

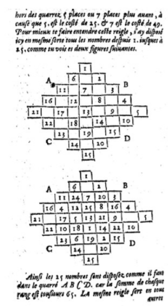
	G	K	M	
A	4	9	2	B
C	3	5	7	D
E	8	1	6	F
	H	L	O	

IE ne sçaurois mieux te declarer le sens de la proposition de ce probleme ny mieux t'enseigner le moyen de le parfaire, qu'en t'exposant la figure que i'ay mise à costé; ou tu vois que les neuf premiers nombres sont disposez en trois rangs, tellement que chascun des rangs AB. CD. EF. faict la somme de 15. & derechef chascun des trois rangs GH. KL. MN. faict semblablement 15. & les nombres qui sont disposez en diametre, à sçauoir

Comment fait Bachet de Méziriac ? Il utilise sa technique de l'algorithme littéral, instancié au début du texte, pour que le lecteur puisse suivre. Remarquez qu'il ne donne pas tout de suite l'algorithme général. Le premier énoncé porte sur les carrés d'ordre 3. Ce n'est qu'après qu'il généralise.

29 comme tu vois es deux figures suivantes

comme tu vois es deux figures suivantes
Bachet de Méziriac, problèmes plaisans et délectables (1624)



hors des quarrez 5 places ou 7 places plus auant, à cause que 5. est le costé de 25. & 7 est le costé de 49. Pour mieux te faire entendre ceste reigle, i'ay disposé icy en mesme sorte tous les nombres despuis 1. iusques à 25. comme tu vois es deux figures suiuantes.

Ainsi les 25 nombres sont disposez comme il faut dans le quarré ABCD. car la somme de chasque rang est tousiours 65. La mesme reigle sert en tous quarres

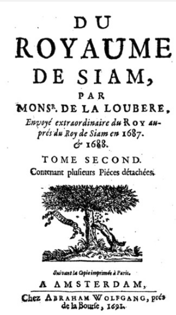
Il a une technique originale, basée sur des losanges à remplir par des progressions arithmétiques en laissant vide une case sur deux, « comme tu vois es deux figures suivantes » dit-il.

Ses figures successives, peuvent effectivement suffire à comprendre comment ça marche. Quant à la démonstration du « pourquoi ça marche », le lecteur est prié de se convaincre tout seul.

30 Du royaume de Siam (1691)

Et revoici Simon de la Loubère. Comme vous le constatez, il a été envoyé extraordinaire du roi Louis XIV au royaume de Siam, en 1687 et 1688. Le royaume de Siam, c'est la Thaïlande actuelle. Il en a ramené un récit de voyage curieux et intéressant. Ce récit a été largement diffusé et même traduit en anglais. Il lui a valu d'être élu à l'Académie française.

Du royaume de Siam (1691)
Simon de la Loubère (1642–1729)



DU ROYAUME DE SIAM,
PAR MONS^R. DE LA LOUBERE,
Envoyé extraordinaire du ROY *auprès du Roy de Siam en 1687. & 1688.*
TOME SECOND.
Contenant plusieurs Pièces détachées.
Suivant la Copie imprimée à Paris.
A AMSTERDAM,
Chez ABRAHAM WOLFGANG, près de la Bourse, 1692.

Je le cite :

« M. Vincent, me voyant un jour, dans le vaisseau pendant notre retour, ranger par amusement des carrés magiques à la manière de Bachet, me dit que les Indiens de Suratte les rangeaient avec bien plus de facilité, et m'enseigna leur méthode pour les carrés impairs seulement, ayant, disait-il oublié celle des pairs. »

Et donc, un chapitre du livre est consacré à cette méthode. Au passage, il semble que la Loubère soit le premier à utiliser l'expression « carré magique » en français.

31 Quarrés magiques selon les Indiens

Voici le début du chapitre : le problème des carrés magiques selon les Indiens. Le chapitre fait 54 pages, et il n'est pas question de tout éplucher.

L'énoncé du problème est le plus général possible. « Un carré étant divisé en autant de petits carrés égaux qu'on voudra, il faut remplir les petits carrés d'autant de nombres donnés en progression arithmétique. »

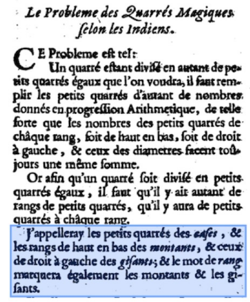
Il n'est pas encore question d'ordre pair ou impair, ni des entiers consécutifs à partir de 1.

Très mathématiquement, il commence par des définitions.

« J'appellerai les petits carrés des cases, et les rangs de haut en bas des montants, et ceux de droite à gauche des gisants, et le mot de rang marquera également les montants et les gisants. »

Ensuite, la Loubère annonce qu'il va « donner les règles et la démonstration de cette méthode, qui est surprenante par son extrême facilité à exécuter une chose, qui a paru difficile à tous nos mathématiciens ».

Quarrés magiques selon les Indiens
Simon de la Loubère, Du royaume de Siam (1691)


Le Probleme des Quarrés Magiques selon les Indiens.

CE Probleme est tel:
Un quarré estant divisé en autant de petits quarrés égaux que l'on voudra, il faut remplir les petits quarrés d'autant de nombres donnés en progression Arithmetique, de telle sorte que les nombres des petits quarrés de châque rang, soit de haut en bas, soit de droit à gauche, & ceux des diametres facent toûjours une même somme.

Or afin qu'un quarré soit divisé en petits quarrés égaux, il faut qu'il y ait autant de rangs de petits quarrés, qu'il y aura de petits quarrés à châque rang.

J'appelleray les petits quarrés des *cases*, & les rangs de haut en bas des *montants*, & ceux de droit à gauche des *gisants*; & le mot de *rang* marquera également les montants & les gisants.

32 Quarrés magiques selon les Indiens

Effectivement, il décrit l'algorithme sous forme de cinq règles. Ce n'est pas véritablement un algorithme au sens moderne, plutôt une recette de cuisine.

Voyez la conclusion : « ce peu de règles aisées à retenir suffisent à ranger tous les carrés impairs généralement. Un exemple les va rendre plus intelligibles. »

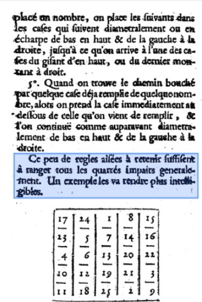
Effectivement, ce n'est pas du luxe.

Puis il continue : « Comme Bachet n'a pas donné la démonstration de sa méthode, je l'ai cherchée ne doutant pas qu'elle ne me donnât aussi celle de la méthode indienne. »

Donc la Loubère est conscient que décrire l'algorithme ne suffit pas. Il reprend la méthode de Bachet, et annonce une démonstration.

Elle est basée sur une idée originale.

Quarrés magiques selon les Indiens
Simon de la Loubère, Du royaume de Siam (1691)


placé un nombre, on place les suivants dans les cases qui suivent diametralement ou en écharpe de bas en haut & de la gauche à la droite, jusqu'à ce qu'on arrive à l'une des cases du gisant d'en haut, ou du dernier montant à droit.

5°. Quand on trouve le chemin bouché par quelque case déja remplie de quelque nombre, alors on prend la case immediatement au dessous de celle qu'on vient de remplir, & l'on continuë comme auparavant diametralement de bas en haut & de la gauche à la droite.

Ce peu de regles aisées à retenir suffisent à ranger tous les quarrés impairs generalement. Un exemple les va rendre plus intelligibles.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

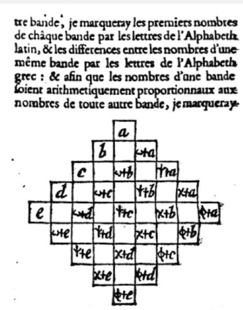
33 Quarrés magiques selon les Indiens

« Je marquerai les premiers nombres de chaque bande par les lettres de l'alphabet latin, et les différences entre les nombres d'une même bande par les lettres de l'alphabet grec. »

Vous voyez ce que ça donne sur le losange de Bachet.

Il se lance alors dans la démonstration proprement dite. Je vais vous l'épargner. Elle est plutôt verbeuse, mais les arguments principaux m'ont semblé corrects. En tout cas il faut reconnaître à la Loubère le mérite d'être le premier à proposer une démonstration pour un algorithme de carrés magiques.

Quarrés magiques selon les Indiens
Simon de la Loubère, Du royaume de Siam (1691)


tre bande, je marqueray les premiers nombres de châque bande par les lettres de l'Alphabeth latin, & les differences entre les nombres d'une même bande par les lettres de l'Alphabeth grec : & afin que les nombres d'une bande soient arithmetiquement proportionnaux aux nombres de toute autre bande, je marqueray

34 Recherches sur une nouvelle espèce. . . (1782)

Il y a les autres, et puis il y a Euler. Le mémoire dont il est question a été lu à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg le 8 mars 1779. Euler avait donc 72 ans. Il était aveugle depuis plus de dix ans. Au début des années 1770, sa maison a disparu dans un incendie, sa femme est décédée après 40 ans de mariage. Il a continué à faire des maths, à raison de plusieurs articles par mois, avec manifestement le même plaisir et le même enthousiasme.

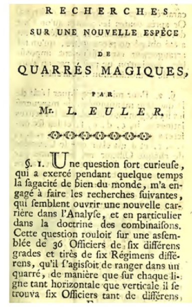
L'article que vous voyez, « Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques », en est un exemple magnifique.

« Une question fort curieuse, qui a exercé pendant quelque temps la sagacité de bien du monde, m'a engagé à faire les recherches suivantes, qui semblent ouvrir une nouvelle carrière dans l'analyse, et en particulier dans la doctrine des combinaisons.

Cette question roulait sur une assemblée de 36 officiers de six différents grades et tirés de six régiments différents, qu'il s'agissait de ranger dans un carré, de manière que sur chaque ligne tant horizontale que verticale, il se trouvât six officiers, tant de différents caractères que de régiments différents. »

Et Euler commence à expliquer pourquoi c'est impossible.

Recherches sur une nouvelle espèce. . . (1782)
Leonhard Euler (1707–1783)

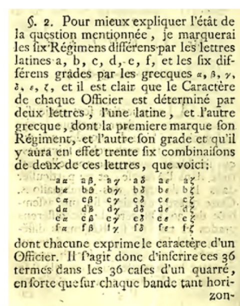


RECHERCHES
SUR UNE NOUVELLE ESPÈCE
DE
QUARRÉS MAGIQUES,
PAR
Mr. L. EULER.

§. 1. Une question fort curieuſe, qui a exercé pendant quelque temps la ſagacité de bien du monde, m'a engagé à faire les recherches ſuivantes, qui ſemblent ouvrir une nouvelle carrière dans l'Analyſe, et en particulier dans la doctrine des combinaiſons. Cette question rouloit ſur une aſſemblée de 36 Officiers de ſix différens grades et tirès de ſix Régimens différens, qu'il ſ'agiſſoit de ranger dans un quarré, de manière que ſur chaque ligne tant horizontale que verticale il ſe trouva ſix Officiers tant de différens,

35 Recherches sur une nouvelle espèce. . . (1782)

Recherches sur une nouvelle espèce. . . (1782)
Leonhard Euler (1707–1783)



§. 2. Pour mieux expliquer l'étât de la question mentionnée, je marquerai les ſix Régimens différens par les lettres latines a, b, c, d, e, f, et les ſix différens grades par les grecques α, β, γ, δ, ϵ, ζ, et il est clair que le Caractère de chaque Officier est déterminé par deux lettres, l'une latine, et l'autre grecque, dont la premiere marque ſon Régiment, et l'autre ſon grade et qu'il y aura en effet trente ſix combinaiſons de deux de ces lettres, que voici:

$a\alpha$	$a\beta$	$a\gamma$	$a\delta$	$a\epsilon$	$a\zeta$
$b\alpha$	$b\beta$	$b\gamma$	$b\delta$	$b\epsilon$	$b\zeta$
$c\alpha$	$c\beta$	$c\gamma$	$c\delta$	$c\epsilon$	$c\zeta$
$d\alpha$	$d\beta$	$d\gamma$	$d\delta$	$d\epsilon$	$d\zeta$
$e\alpha$	$e\beta$	$e\gamma$	$e\delta$	$e\epsilon$	$e\zeta$
$f\alpha$	$f\beta$	$f\gamma$	$f\delta$	$f\epsilon$	$f\zeta$

dont chacune exprime le caractère d'un Officier. Il ſ'agit donc d'inſcrire ces 36 termes dans les 36 caſes d'un quarré, en ſorte que ſur chaque bande tant horizon-

« Je marquerai les six régiments différents par les lettres latines a,b,c,d,e,f, et les six différents grades par les grecques α, β, γ, δ, ϵ, ζ. »

Tiens, comme la Loubère. Mais Euler va aller beaucoup plus loin. Il commence par changer de notation.

36 Recherches sur une nouvelle espèce. . . (1782)

Il remplace les lettres grecques et latines par les nombres de 1 à n, en écrivant les seconds en exposant des premiers. Il continue à parler de nombres latins pour ceux qui sont en bas, et nombres grecs pour les exposants. Cela donne les carrés gréco-latins que nous utilisons toujours.

Évidemment, il commence par un exemple. C'est le carré 7 par 7 que vous voyez en bas de l'image. Puis il développe son raisonnement d'abord sur cet exemple, en prenant bien soin de montrer comment le généraliser.

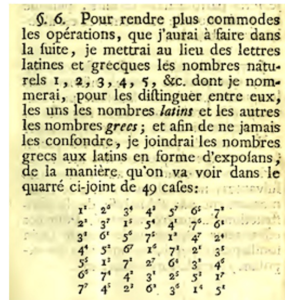
Je ne vais pas parcourir tout l'article. Il est beaucoup trop long et surtout beaucoup trop riche.

Euler commence par expliquer comment fabriquer des carrés latins : ceux qui ont chaque nombre une fois et une seule dans chaque ligne et chaque colonne. Il raisonne sur des permutations et des cycles. Puis il passe aux carrés gréco-latins, qui combinent deux carrés latins. Il montre ensuite comment fabriquer un carré magique à partir d'un carré gréco-latin.

C'est clair, foisonnant, jubilatoire, brillant : c'est Euler quoi !

Recherches sur une nouvelle espèce. . . (1782)

Leonhard Euler (1707–1783)


§. 6. Pour rendre plus commodes les opérations, que j'aurai à faire dans la ſuite, je mettrai au lieu des lettres latines et grecques les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. dont je nommerai, pour les diſtinguer entre eux, les uns les nombres *latins* et les autres les nombres *grecs* ; et afin de ne jamais les confondre, je joindrai les nombres grecs aux latins en forme d'expoſans, de la manière qu'on va voir dans le quarré ci-joint de 49 caſes:

1^1	2^6	3^4	4^3	5^7	6^5	7^2
2^3	3^7	1^5	5^4	4^1	7^6	6^2
3^2	6^1	5^6	7^5	1^3	4^7	2^4
4^4	5^2	6^7	1^6	7^1	2^3	3^5
5^5	1^3	7^2	2^7	6^4	3^1	4^6
6^6	7^4	4^2	3^1	2^5	5^3	1^7
7^7	4^5	2^3	6^2	3^6	1^4	5^1

37 références

références

Ne croyez pas que je sois de mauvaise volonté : je veux bien digérer des algorithmes à la Euclide.

À condition qu'ils soient cuisinés par Euler.

- J.-L. Chabert et al. (1994) *Histoire d'algorithmes*, Paris : Belin
- D. E. Knuth (1972) Ancient Babylonian algorithms, *Communications of the ACM*, 15(7), 671–677
- Y. Martin (1997) Les carrés magiques dans la tradition mathématique arabe, *in : L'océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, 241–267, D. Tournès ed., Saint-Denis : IREM
- J. Shallit (1994) Origins of the analysis of the Euclidean algorithm, *Historia Mathematica*, 21, 401–419