

0 Preuve de la vérité

Je vais vous faire un aveu : les histoires sur les mathématiciens arabes me donnent beaucoup de mal. Oh, certes ce n'est pas la matière qui manque. Leurs travaux ont été suffisamment importants et méconnus par le passé, pour que je saisisse toutes les occasions de les citer. Oui mais voilà, que raconter comme anecdote pour leur donner vie ? quelles illustrations choisir ? On ne sait en général pas grand-chose sur la vie de ces gens-là. Les images des textes originaux sont rares et ne nous disent rien si on ne lit pas l'arabe ancien. Quant aux portraits, il n'y en a pas un dont on puisse garantir la ressemblance.

Alors pour une fois que nous avons un grand poète, célèbre dans le monde entier, dont les œuvres ont été abondamment illustrées, vous imaginez bien que je ne vais pas laisser passer l'occasion.

1 Omar Khayyām (1048–1131)

Nous parlons d'Omar Khayyam. Il a des statues un peu partout, mais évidemment, on ne sait pas vraiment à quoi il ressemblait.

2 Mausolée d'Omar Khayyām (1963)

Il n'était pas arabe mais persan, puisqu'il était de Nishapur, dans le Nord-Est de l'Iran actuel. Il y est enterré et on a même édifié un mausolée sur sa tombe au siècle dernier. Il écrivait ses mathématiques en arabe et ses poèmes en persan.

Les témoignages sur son œuvre et sa personnalité sont pour le moins contrastés.

histoires d'algèbre

Preuve de la vérité

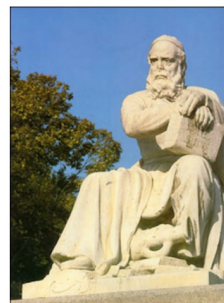
poète persan et mathématicien arabe



hist-math.fr

Bernard YCART

Omar Khayyām (1048–1131)



Mausolée d'Omar Khayyām (1963)

Nishapur, Iran



3 Tatimmat ṣiwān al-ḥikmah

Philosophe, *ḥujjat al-ḥaqq* (preuve de la vérité), [...] il fut un successeur d'Ibn Sīnā dans certaines parties de la philosophie, mais de caractère il était désagréable et borné.

Désagréable et borné, mettons. Reste que pour qu'on lui donne le titre honorifique de « preuve de la vérité », il devait être respecté non seulement comme savant, mais encore comme croyant.

Voici un autre témoignage, environ un siècle après.

Tatimmat ṣiwān al-ḥikmah
al-Bayhaqī (ca 1097–1170)

Philosophe, *ḥujjat al-ḥaqq* (preuve de la vérité), [...] il fut un successeur d'Ibn Sīnā dans certaines parties de la philosophie, mais de caractère il était désagréable et borné.

4 Ta'rīkh al-ḥukamā

Omar Khayyam, imām du Korāzān, le grand savant du temps, était versé dans les sciences des Grecs. Il exhortait à chercher le Dieu unique, gouverneur du monde, par la purification des mouvements corporels, de manière à rendre l'âme humaine exempte de toute impureté.

Preuve de la vérité, imam, il exhortait à chercher le Dieu unique : quelqu'un d'orthodoxe donc. Pourtant :

Ta'rīkh al-ḥukamā
al-Qifṭī (ca 1172–1248)

Omar Khayyam, imām du Korāzān, le grand savant du temps, était versé dans les sciences des Grecs. Il exhortait à chercher le Dieu unique, gouverneur du monde, par la purification des mouvements corporels, de manière à rendre l'âme humaine exempte de toute impureté.

5 Ta'rīkh al-ḥukamā

Comme les hommes de son temps blâmaient ses opinions religieuses, et mettaient à découvert ce qu'il cachait en secret, il craignit pour sa vie, et mit un frein aux écarts de sa langue et de sa plume. Il fit le pèlerinage, grâce plutôt à une rencontre fortuite que par piété ; et son extérieur trahit ses pensées secrètes, bien que rien n'en parût dans ses paroles.

Allons bon : un hypocrite plutôt retors. Mais quand même :

Ta'rīkh al-ḥukamā
al-Qifṭī (ca 1172–1248)

Comme les hommes de son temps blâmaient ses opinions religieuses, et mettaient à découvert ce qu'il cachait en secret, il craignit pour sa vie, et mit un frein aux écarts de sa langue et de sa plume. Il fit le pèlerinage, grâce plutôt à une rencontre fortuite que par piété ; et son extérieur trahit ses pensées secrètes, bien que rien n'en parût dans ses paroles.

6 Ta'rīkh al-ḥukamā

Il était sans pareil dans l'astronomie et dans la philosophie ; et sa capacité éminente dans ces sciences aurait passé en proverbe, s'il avait reçu en partage le respect des convenances. On a de lui des poésies légères dont le sens caché perce à travers leurs expressions voilées, et dans lesquelles la veine de la conception poétique est troublée par l'impureté de l'intention cachée.

Ah voilà donc ce qu'on lui reproche : l'irrespect des convenances, et des poésies légères. Hmm, des poésies légères ? Eh bien oui, et ce sont précisément ces poésies qui sont responsables de sa célébrité.

Ta'rīkh al-ḥukamā
al-Qifṭī (ca 1172–1248)

Il était sans pareil dans l'astronomie et dans la philosophie ; et sa capacité éminente dans ces sciences aurait passé en proverbe, s'il avait reçu en partage le respect des convenances. On a de lui des poésies légères dont le sens caché perce à travers leurs expressions voilées, et dans lesquelles la veine de la conception poétique est troublée par l'impureté de l'intention cachée.

7 Rubāiyāt

Les Rubaiyat, ce sont des quatrains, des groupes de quatre vers d'un format précis. Il en existe des centaines et, on ne sait pas vraiment lesquels sont authentiques. Toujours est-il que dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle un poète anglais, Edward Fitzgerald en a traduit quelques dizaines, et que cette traduction a connu un important succès d'édition, en particulier aux États-Unis. Une société Omar Khayyam a même existé au début du vingtième siècle, et la plupart des familles américaines possédaient les Rubaiyat d'Omar Khayyam dans la traduction de Fitzgerald.

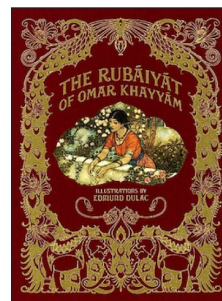
Oui mais voilà, les spécialistes disent que la traduction de Fitzgerald était plus que libre, parfois en contradiction complète avec l'original. Quand on ne connaît pas la langue originale, comment apprécier la musique d'un poème traduit ? Et quand la traduction est belle, comment savoir ce qui est dû à l'auteur ?

Ces précautions oratoires étant prises, je vais vous laisser goûter une traduction française, qui se veut proche de l'original. Les quatrains seront accompagnés d'illustrations provenant d'éditions qui datent pour l'essentiel du début du vingtième siècle.

Le premier thème ne vous surprendra pas : la fuite du temps, la vanité de l'existence, « mignonne allons voir si la rose », « et rose elle a vécu ce que vivent les roses », tout ça, tout ça.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



8 Rubāiyāt

La brise a déchiré la robe de la rose
et l'on entend chanter la voix du rossignol.
Demeure donc assis à l'ombre de la rose,
car elle va bientôt s'effeuiller sur le sol.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



9 Rubāiyāt

Point de chasse au bonheur : la vie est bien trop brève.
Chaque atome est un grain de poussière de roi
retourné en poussière. Et le monde ici-bas
n'est que songe trompeur, qu'escroquerie au rêve.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



10 Rubāiyāt

À qui donc puis-je révéler le grand mystère
de la nature humaine et de notre destin ?
L'homme est né façonné d'argile et de chagrin,
puis il fait quelques pas et quitte cette terre.

Le thème le plus fréquent dans les quatrains d'Omar Khayyam, n'est pas celui qu'on attendrait en terre d'Islam.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



11 Rubāiyāt

Ce vin est un breuvage éternel : il faut boire.
La source du bonheur ici-bas doit se boire.
C'est comme une eau de feu, qui chasse le chagrin
comme une eau de jouvence immortelle : il faut boire !

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



12 Rubāiyāt

Mes biens chers compagnons, abreuvez-moi de vin :
que de chaudes couleurs me donnent un air digne.
S'il faut mourir un jour, lavez-moi dans le vin
et faites mon cercueil avec des ceps de vigne.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



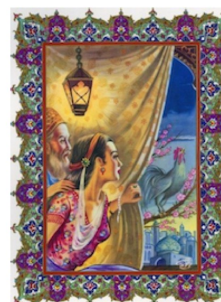
13 Rubāiyāt

Tu ne bois pas de vin ? Laisse les autres boire
et cesse de tricher et de jouer au saint.
Tu es bien fier de ne toucher jamais au vin,
mais tu fais cent péchés bien pires et sans gloire.

Parfois, Khayyam est encore plus audacieux, à la limite du blasphème. Ce qui suit suffit à expliquer la réputation sulfureuse du personnage.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



14 Rubāiyāt

C'est Toi qui as cassé mon flacon, ô mon Dieu.
Tu m'as fermé les portes du bonheur, mon Dieu.
Mon vin trempe le sol par ta faute, ô mon Dieu.
Soit ! Mais serais-tu ivre, par hasard, mon Dieu ?

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



15 Rubāiyāt

Tu es mon Créateur. C'est Toi qui as voulu
que je sois amoureux de vin et de musique.
Puisque c'est Toi auquel, depuis toujours, il plut
de me créer ainsi : n'es-tu pas diabolique ?

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



16 Rubāiyāt

Ai-je égrené les perles devant Toi ? Jamais.
Balayé les péchés de ma face ? Jamais.
Pourtant je ne désespère pas de Ta grâce,
car je n'ai jamais dit qu'Un fait Deux : ça jamais !

Certes, il est un peu cavalier de s'adresser ainsi à Dieu, mais
il y a deux manières de comprendre ce dernier vers : « je
n'ai jamais dit qu'Un fait Deux ». C'est une profession de foi
religieuse, pour le monothéisme et contre le dualisme. Mais
c'est aussi l'affirmation de sa fierté de scientifique, la croyance
que Dieu pardonne tout, sauf d'abdiquer sa raison.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



17 Rubāiyāt

Voilà donc pour ses poésies légères. Je dois quand même vous
préciser que les illustrations que vous avez vues sont au goût
occidental du vingtième siècle. Elles dépeignent un Orient
fantasmé par les Occidentaux, peuplé de belles danseuses.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048–1131)



18 Rubāiyāt

Omar Khayyam en aurait probablement été bien étonné. En fait de belles personnes, c'est plutôt à de jeunes hommes qu'il s'adresse. Mais ça, s'était un peu trop pour l'Angleterre victorienne. Cette illustration-ci ne date que de 1963.

Bon : trêve de fanstasmes et d'images projetées, si on écoutait vraiment ce qu'il a à nous dire ? Vous allez comprendre sa réputation de mauvais coucheur.

Rubāiyāt

Omar Khayyām (1048-1131)



19 Le dépérissement des hommes de la science

« Nous avons été témoin du dépérissement des hommes de la science, réduits maintenant à une mince troupe dont le nombre est aussi petit que les afflictions sont grandes, et à laquelle les rigueurs de la fortune ont imposé l'obligation commune de s'adonner, tant qu'elles durent, au perfectionnement et à l'exploration d'une seule science. »

Khayyam fait ici référence aux luttes philosophiques entre différents courants de l'Islam. Lui même se présente comme un continuateur de Ibn Sina (Avicenne), et donc un représentant d'une conception rationaliste de la religion. Il est un contemporain d'al-Ghazzali qui s'oppose à ce courant. Après Khayyam, Ibn Rushd (Averroès pour les Occidentaux), reprendra le flambeau. Khayyam est donc victime de médisances des intégristes parce qu'il défend le rationalisme ? Euh pas seulement : il faut bien avouer que côté respect des convenances, il y a du travail.

Le dépérissement des hommes de la science

Khayyām, Article sur al-jabr et al-muqābala

Nous avons été témoin du [dépérissement des hommes de la science](#), réduits maintenant à une mince troupe dont le nombre est aussi petit que les afflictions sont grandes, et à laquelle les rigueurs de la fortune ont imposé l'obligation commune de s'adonner, tant qu'elles durent, au perfectionnement et à l'exploration d'une seule science.

20 l'imposture et l'ostentation savante

« La plupart de ceux qui par le temps actuel ont l'air de savants, déguisent la vérité par le mensonge, ne dépassent pas les limites de l'imposture et de l'ostentation savante, et ne font servir la quantité de savoir qu'ils possèdent qu'à des buts matériels et vils. Et s'ils rencontrent un homme distingué par la recherche et l'amour de la vérité, s'efforçant de rejeter la vanité et le mensonge, et d'abandonner l'ostentation et la tromperie, ils en font l'objet de leurs mépris et de leurs railleries. »

Ça, c'est dit, et c'est même écrit.

Je ne sais pas si vous avez remarqué le sous-titre, ces déclarations fracassantes sont extraites de l'introduction de son livre d'algèbre.

Ben quoi, vous avez l'air déçu ! C'est bien joli de vider des coupes de vin, je n'oublie pas que je suis parti pour vous raconter l'histoire de l'algèbre.

l'imposture et l'ostentation savante

Khayyām, Article sur al-jabr et al-muqābala

La plupart de ceux qui par le temps actuel ont l'air de savants, déguisent la vérité par le mensonge, [ne dépassent pas les limites de l'imposture et de l'ostentation savante](#), et ne font servir la quantité de savoir qu'ils possèdent qu'à des buts matériels et vils. Et s'ils rencontrent un homme distingué par la recherche et l'amour de la vérité, s'efforçant de rejeter la vanité et le mensonge, et d'abandonner l'ostentation et la tromperie, ils en font l'objet de leurs mépris et de leurs railleries.

21 Six types d'équations du second degré

Reprenons au début. Le début c'est le livre d'algèbre et al-muqabala d'al-Khwarizmi, qui a fondé la discipline. Bon pour les quelques rares qui n'auraient pas déjà écouté l'histoire correspondante : dans le livre d'al-Khwarizmi, les équations du second degré sont classifiées en six types. Pourquoi six, là où nous n'en voyons qu'un seul ? Parce que le zéro et les nombres négatifs ne sont pas acceptés. Quand al-Khwarizmi dit « des carrés sont égaux à des racines », il sous-entend une équation entre un certain nombre de fois l'inconnue au carré et un autre nombre de fois l'inconnue. Ces nombres sont entiers, à la limite rationnels, mais de toutes façons strictement positifs.

Khayyam écrit, environ trois siècles après al-Khwarizmi. De son temps, l'algèbre et al-muqabala est une discipline établie, dont le vocabulaire et les méthodes sont bien connues. Des généralisations ont été proposées, mais la contrainte des coefficients positifs est restée. De sorte que pour passer au degré supérieur et introduire des cubes dans les équations, Khayyam se trouve face à un nombre encore plus important de cas particuliers. Il y a d'abord les six types d'al-Khwarizmi. En multipliant chaque type par l'inconnue, on arrive en tout à 11 types d'équations quadratiques ou cubiques, dont on connaît la solution explicite en fonction des coefficients. Il reste encore quatorze types d'équations cubiques, dont le terme de degré trois et le terme constant sont non nuls. Comment Khayyam s'y prend-il ? Il ne connaît pas de méthode pour atteindre une solution explicite, par contre il connaît bien les classiques grecs.

Six types d'équations du second degré

al-Khwārizmī, livre d'al-jabr et d'al-muqābala

des carrés égaux à des racines	$ax^2 = bx$
des carrés égaux à un nombre	$ax^2 = c$
des racines égales à un nombre	$bx = c$
des carrés plus des racines égaux à un nombre	$ax^2 + bx = c$
des carrés plus un nombre égaux à des racines	$ax^2 + c = bx$
des racines plus un nombre égaux à des carrés	$bx + c = ax^2$

22 Euclide et Apollonius

« Il faut bien savoir que ce traité ne sera compris que de ceux qui maîtrisent le livre d'Euclide sur les Éléments et son livre sur les Données, ainsi que deux parties de l'ouvrage d'Apollonius sur les Coniques. Celui à qui la connaissance de l'un de ces trois livres fait défaut ne peut avoir accès à la compréhension de ce traité. »

Nous voilà prévenus. Euclide est un passage obligé, quel que soit le type de mathématiques. Même l'algèbre d'al-Khwarizmi n'y échappait pas pour ses démonstrations. Mais pourquoi les coniques d'Apollonius ? En langage moderne, une conique répond à une équation de degré deux entre ses coordonnées. L'intersection de deux coniques a pour abscisse la solution d'une équation de degré inférieur ou égal à quatre. Voici un exemple simple.

Euclide et Apollonius

Khayyām, Article sur al-jabr et al-muqābala

Il faut bien savoir que ce traité ne sera compris que de ceux qui maîtrisent le livre d'Euclide sur les Éléments et son livre sur les Données, ainsi que deux livres de l'ouvrage d'Apollonius sur les Coniques. Celui à qui la connaissance de l'un de ces trois livres fait défaut ne peut avoir accès à la compréhension de ce traité.

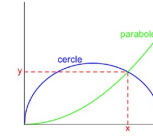
23 cercle et parabole

Prenez l'intersection du cercle d'équation $y^2 = x(x - a)$ et de la parabole $y = bx^2$. Les deux se coupent à l'origine et en un autre point, dont l'abscisse vérifie l'équation de degré trois $b^2x^3 + a = x$.

En général, il y a plusieurs manières d'écrire la solution positive d'une équation de degré trois comme l'abscisse de l'intersection de deux coniques. Khayyam n'est pas le premier à le remarquer, mais il est le premier à systématiser le procédé et à donner ainsi une solution géométrique à toutes les équations de degré trois. Pour chacun des quatorze types d'équations cubiques qui ne se ramènent pas au cas du second degré, Khayyam donne un couple de coniques, mais il ne justifie pas son choix. Par contre il prend bien soin d'indiquer quelles équations peuvent ne pas avoir de solutions positives et dans quels cas.

cercle et parabole

Khayyām, Article sur al-jabr et al-muqābala



$$y^2 = x(x - a) = (bx^2)^2$$

$$b^2x^3 + a = x$$

24 quatorze types d'équations cubiques

Voici les quatorze types d'équations cubiques dans l'ordre où Omar Khayyam les énumère, avec son choix de deux coniques.

quatorze types d'équations cubiques

Khayyām, Article sur al-jabr et al-muqābala

$x^3 = c$	parabole	parabole
$x^3 + bx = c$	parabole	cercle
$x^3 + c = bx$	parabole	hyperbole
$x^3 = bx + c$	parabole	hyperbole
$x^3 + ax^2 = c$	parabole	hyperbole
$x^3 + c = ax^2$	parabole	hyperbole
$x^3 = ax^2 + c$	parabole	hyperbole
$x^3 + ax^2 + bx = c$	cercle	hyperbole
$x^3 + ax^2 + c = bx$	hyperbole	hyperbole
$x^3 + bx + c = ax^2$	cercle	hyperbole
$x^3 = ax^2 + bx + c$	hyperbole	hyperbole
$x^3 + ax^2 = bx + c$	hyperbole	hyperbole
$x^3 + bx = ax^2 + c$	cercle	hyperbole
$x^3 + c = ax^2 + bx$	hyperbole	hyperbole

25 Un cube et deux carrés et dix racines égaux à vingt

Après avoir traité tous les types d'équations cubiques, Khayyam présente quelques équations qui s'y ramènent. Par exemple celle-ci.

« Si l'on dit : « Une racine et deux en nombre et dix parties de racine sont égaux à vingt parties de carré, » cela équivaudra à « Un cube et deux carrés et dix racines sont égaux à vingt en nombre. » Nous déterminerons le côté du cube au moyen de la méthode des coniques, et ce sera la racine cherchée. »

Comprenez le mot « partie » comme « inverse ». Écrit en langage moderne, Khayyam ramène « x plus 2 plus 10 sur x égale 20 sur x^2 » à « $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ ».

Un cube et deux carrés et dix racines égaux à vingt

Khayyām, Article sur al-jabr et al-muqābala

Si l'on dit : « Une racine et deux en nombre et dix parties de racine sont égaux à vingt parties de carré, » cela équivaudra à « Un cube et deux carrés et dix racines sont égaux à vingt en nombre. » Nous déterminerons le côté du cube au moyen de la méthode des coniques, et ce sera la racine cherchée.

$$x + 2 + \frac{10}{x} = \frac{20}{x^2},$$

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

26 Flos super solutionibus (1225)

Et voyez donc ce que l'on trouve dans le « Flos » de Fibonacci.

C'est exactement l'équation cubique de Khayyam : un cube, deux carrés et dix racines sont égaux à vingt. Le titre se traduit par « Florilège sur les solutions de quelques questions de nombres et de géométrie ». Il a été écrit en 1225, la même année que le Liber quadratorum, le livre des carrés. Fibonacci présente cette équation cubique comme l'un des problèmes que Jean de Palerme lui a posés à la cour de Frédéric II. Pour compliquer le problème, Jean de Palerme lui a demandé une solution tirée du dixième livre d'Euclide, c'est-à-dire une combinaison de racines carrées.

Fibonacci commence par démontrer qu'une telle solution n'existe pas, puis il donne une approximation numérique, d'ailleurs excellente, sans dire comment il l'a calculée. Par contre, il ne semble pas conscient de la solution géométrique de Khayyam.

Comment l'équation de Khayyam a-t-elle voyagé jusqu'à la cour de Frédéric II ? Pourquoi Jean de Palerme connaissait-il Khayyam, alors que Fibonacci semble l'ignorer ? Mystères.

Le livre d'algèbre de Khayyam n'a pas eu en Occident le retentissement de ceux d'al-Khwarizmi et al-Kamil. Il marquait pourtant une étape importante, et les successeurs arabes d'Omar Khayyam, en particulier al-Tusi, ne s'y sont pas trompés. Cette étape, c'est la naissance de la géométrie algébrique, ce que nous appelons la géométrie de Descartes.

Dans son introduction, Khayyam commence par décrire ses objets.

27 grandeurs mesurables

« Par grandeurs mesurables j'entends la quantité continue, dont il y a quatre espèces : la ligne, la surface, le solide et le temps, ainsi qu'on le trouve exposé généralement dans les catégories, et spécialement dans la métaphysique. »

Les catégories et la métaphysique font référence à Aristote. Khayyam a beau se retrancher derrière l'autorité d'Aristote, c'est bien un tournant décisif qu'il fait prendre à l'algèbre. Jusque là, l'algèbre était issue de l'arithmétique. Elle en avait hérité un impératif : les solutions devaient être entières, ou rationnelles. À l'extrême rigueur, elles pouvaient être des combinaisons de racines irrationnelles, celles du dixième livre d'Euclide. En exprimant les solutions des équations cubiques comme des intersections de coniques, Khayyam s'affranchit des ensembles de solutions discrets. Désormais l'algèbre investit le champ de la grandeur continue, celui de la géométrie.

Flos super solutionibus (1225)

Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170-1240)

Altera uero questio á predicto magistro Iohanne proposita fuit, vt inueniretur quidam **cubus numerus**, qui cum suis **duobus quadratis** et **decem radicibus** in unum collectis essent **uiginti** super hoc meditando putavi huius questionis solutionem egredi ex his que continentur in .x.^o lib.^o Euclidis; et ob hoc super ipso .x.^o Euclidis accuratius studui, adeo quod sui teormata ipsius memorie commendauim, et ipsarum intellectum comprehendim. Et quia difficilior est antecedentium et quorundam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum x.^o librum glosare incepi, reducens intellectum ipsius ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur; qui liber .x.^o tractat de diuersitatibus xv. linearum rectorum, quarum .xv. linearum due uocantur rite, seu ratiocinate.

grandeurs mesurables

Khayyām, Article sur al-jabr et al-muqābala

Par grandeurs mesurables j'entends la **quantité continue**, dont il y a quatre espèces : la ligne, la surface, le solide et le temps, ainsi qu'on le trouve exposé généralement dans les catégories, et spécialement dans la métaphysique.

Allez : un dernier quatrain pour la route ?

Là, ces débris d'algèbre aux tristes ossements
Cachent la lettre tendre où j'ai mis ce que j'aime.
Et vois ici ! Ci-gît la cendre d'un poème !
Il naquit de mon cœur au cœur noir de la nuit.

Vous croyez que c'est Omar Khayyam qui a écrit ça ? Ben non : c'est Paul Valéry.

références

- N. Farès (2017) *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*, Beyrouth : Dār al-Fārābī
- V.-M. Monteil (1996) *Khayyām - quatrains, Hāfez - balades*, Paris : Actes Sud
- J. A. Oaks (2011) Al-Khayyām's scientific revision of algebra, *Suḥayl*, 10, 47–75
- R. Rashed, B. Vahabzadeh (1999) *Al-Khayyām mathématicien*, Paris : Blanchard
- R. Rashed (2015) *Classical mathematics from al-Khwārizmī to Descartes*, London : Routledge