Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

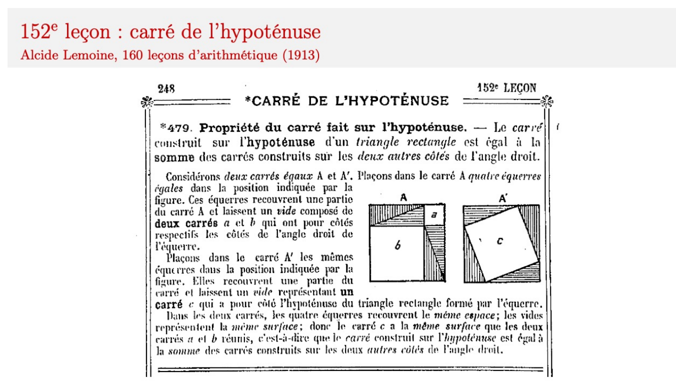
0 La chaise de la mariée

Des démonstrations du théorème de Pythagore, il en existe plusieurs centaines. Certains collectionneurs s'en sont fait une spécialité, et il en est paru des livres entiers. Alors : quelle est la meilleure ? Laquelle faut-il enseigner ?

1 152e leçon : carré de l'hypoténuse

Question pédagogie, j'ai tendance à faire confiance à Alcide Lemoine. Il a écrit un manuel à l'usage des candidats au certificat d'études que je vous cite parfois. Voici la cent cinquante deuxième leçon, sur le carré de l'hypoténuse. Remarquez qu'il ne parle pas de Pythagore.

Sa démonstration tient dans les deux figures que vous voyez. C'est une démonstration façon puzzle. Un découpage si vous voulez. Il place quatre équerres identiques dans deux carrés. Ce qui reste est, dans un cas, deux carrés qui ont pour côtés les deux côtés de l'angle droit de l'équerre, dans l'autre cas, un seul carré, celui de l'hypoténuse justement. À ma connaissance, on n'a jamais fait, ni plus simple, ni plus visuel. Écoutez ce qu'en dit Charles-Ange Laisant, qui n'a pas l'habitude de mâcher ses mots.


152e leçon : carré de l'hypoténuse
Alcide Lemoine, 160 leçons d'arithmétique (1913)

248 — 152e LEÇON

*CARRÉ DE L'HYPOTÉNUSE

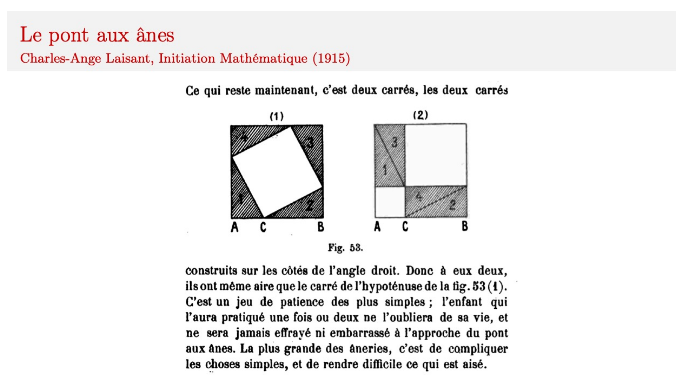
*479. **Propriété du carré fait sur l'hypoténuse.** — Le *carré* construit sur l'**hypoténuse** d'un *triangle rectangle* est égal à la **somme** des carrés construits sur les *deux autres côtés* de l'angle droit.

Considérons *deux carrés égaux* A et A'. Plaçons dans le carré A *quatre équerres égales* dans la position indiquée par la figure. Ces équerres recouvrent une partie du carré A et laissent un *vide* composé de **deux carrés** *a* et *b* qui ont pour côtés respectifs les côtés de l'angle droit de l'équerre.

Plaçons dans le carré A' les mêmes équerres dans la position indiquée par la figure. Elles recouvrent une partie du carré et laissent un *vide* représentant **un carré** *c* qui a pour côté l'hypoténuse du triangle rectangle formé par l'équerre.

Dans les deux carrés, les quatre équerres recouvrent le *même espace*; les vides représentent la *même surface*; donc le carré *c* a la *même surface* que les deux carrés *a* et *b* réunis, c'est-à-dire que le *carré* construit sur l'*hypoténuse* est égal à la *somme* des carrés construits sur les deux *autres côtés* de l'angle droit.

2 Le pont aux ânes


Le pont aux ânes
Charles-Ange Laisant, Initiation Mathématique (1915)

Ce qui reste maintenant, c'est deux carrés, les deux carrés

Fig. 53.

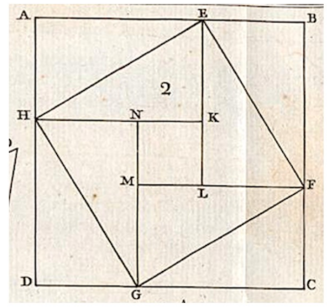
construits sur les côtés de l'angle droit. Donc à eux deux, ils ont même aire que le carré de l'hypoténuse de la fig. 53 (1). C'est un jeu de patience des plus simples ; l'enfant qui l'aura pratiqué une fois ou deux ne l'oubliera de sa vie, et ne sera jamais effrayé ni embarrassé à l'approche du pont aux ânes. La plus grande des âneries, c'est de compliquer les choses simples, et de rendre difficile ce qui est aisé.

« C'est un jeu de patience des plus simples. L'enfant qui l'aura pratiqué une fois ou deux ne l'oubliera de sa vie, et ne sera jamais ni effrayé ni embarrassé à l'approche du pont aux ânes. La plus grande des âneries, c'est de compliquer les choses simples, et de rendre difficile ce qui est aisé. »

Ça, c'est dit ! Ah mais si cette démonstration est la seule qui mérite d'être enseignée, c'est sans doute aussi la plus ancienne et la plus fréquemment répétée ? Eh bien non, pas du tout. La plus ancienne trace que j'ai réussi à en trouver se trouve dans le livre d'algèbre de Saunderson, au dix-huitième siècle.

3 The elements of algebra (1740)

The elements of algebra (1740)
Nicholas Saunderson (1682–1739)

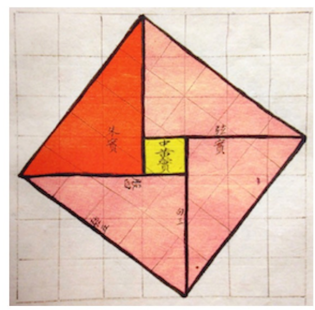


Nicholas Saunderson est ce mathématicien anglais de Cambridge, rendu aveugle par la variole à l'âge de un an. Il est d'autant plus remarquable qu'il ait réussi à imaginer la démonstration la plus visuelle.

En réalité, la figure que vous voyez ici illustre à la fois deux démonstrations : celle préconisée par Lemoine et Laisant, et une autre, beaucoup plus ancienne et un peu moins visuelle, ou bien plus algébrique.

4 Zhoubi Suanjing (1er siècle)

Zhoubi Suanjing (1er siècle)
Théorème de Pythagore



Le Zhoubi Suanjing dans lequel figure cette illustration est une compilation de textes sur l'astronomie dont certains datent peut-être de bien avant notre ère. De sorte qu'il est impossible de savoir si les Chinois connaissaient le théorème de Pythagore avant les Grecs.

Pour Bhaskara en tout cas, la démonstration est évidente. Voici ce qu'il en dit dans la Lilavati.

5 Le produit des côtés de l'angle droit

Le produit des côtés de l'angle droit
Bhāskara, Līlāvatī (1150)

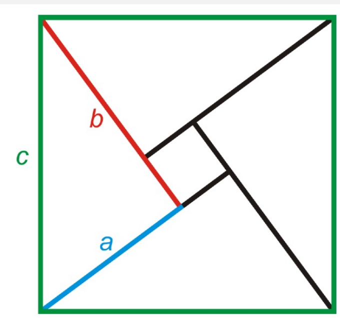
Le produit des deux côtés de l'angle droit, multiplié par deux, augmenté du carré de leur différence devrait être égal à la somme de leurs carrés. Donc, pour faire court, la racine carrée de la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit est l'hypoténuse : ainsi c'est démontré. Et sinon, quand on a placé les parties de la figure, il suffit de le voir.

« Le produit des deux côtés de l'angle droit, multiplié par deux, augmenté du carré de leur différence devrait être égal à la somme de leurs carrés. Donc, pour faire court, la racine carrée de la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit est l'hypoténuse : ainsi c'est démontré. Et sinon, quand on a placé les parties de la figure, il suffit de le voir. »

La figure dont il place les parties est la même que celle des Chinois.

6 le théorème de Pythagore

le théorème de Pythagore
Bhāskara, Līlāvatī (1150)



Il y a dans le grand carré de surface c^2, quatre triangles de surface totale $2ab$, et un petit carré oblique de côté $b - a$. Faites vos comptes, ça donne bien $c^2 = a^2 + b^2$.

Non, ce n'est pas tout à fait la démonstration préconisée par Laisant. Celle-là, vous la trouverez associée au nom de Bretschneider.

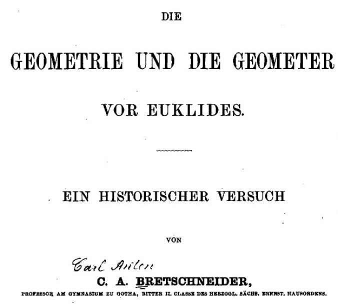
7 Die Geometrie und die Geometer vor Euklides

À cause de ce livre : la géométrie et les géomètres avant Euclide, une recherche historique. Bretschneider se demande quelle démonstration Pythagore lui-même pouvait bien avoir de son théorème. Il fait l'hypothèse que ce devait être la plus simple, et en déduit donc que la démonstration de Pythagore devait être le puzzle de Saunderson.

Peut-être, mais on n'a pas le moindre début de justification. Aucun écrit ne provient directement de Pythagore. Les témoignages nous viennent de plusieurs siècles après lui. On ne sait même pas si Pythagore voyait le résultat géométrique comme une propriété des triangles rectangles quelconques, ou bien uniquement comme une propriété arithmétique de certains triplets d'entiers.

Die Geometrie und die Geometer vor Euklides

Carl Anton Bretschneider (1808–1878)


DIE

GEOMETRIE UND DIE GEOMETER

VOR EUKLIDES.

EIN HISTORISCHER VERSUCH

VON

Carl Anton

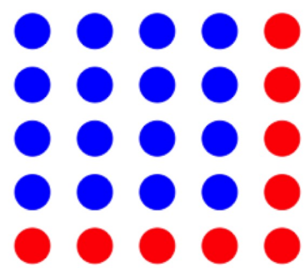
C. A. BRETSCHNEIDER,

8 La méthode géométrique de Pythagore

Il est possible que pour Pythagore, la géométrie se soit limitée à des tableaux discrets. Par exemple un nombre carré est une collection de jetons que l'on peut disposer en carré. Pythagore devait savoir que le passage d'un nombre carré au suivant se fait par une équerre, ou gnomon, comme vous le voyez sur la figure. Quand ce gnomon est lui-même un nombre carré, comme neuf ici, on obtient un triplet pythagoricien particulier. Rien ne permet d'affirmer que Pythagore voyait ces nombres carrés comme construits à partir des côtés d'un triangle rectangle.

Cela ne prouve pas que l'hypothèse de Bretschneider soit fausse, ni invraisemblable d'ailleurs. Les visualisations par découpages et réarrangement de surfaces façon puzzle, ont accompagné la géométrie depuis ses débuts, plus d'un millénaire avant Pythagore.

La méthode géométrique de Pythagore

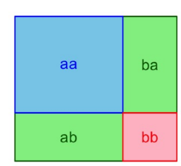


9 Découpages à Babylone

Les spécialistes ont pu démontrer que le tout début de l'algèbre dans l'ancienne Mésopotamie, vers 1800 avant Jésus-Christ, consistait en des découpages de figures géométriques. Pour vous faire une idée, la figure que vous voyez illustre l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Évidemment, les Mésopotamiens ne l'écrivaient pas avec des lettres. Ils voyaient simplement qu'en bordant deux carrés, le bleu et le rouge, de deux rectangles verts identiques judicieusement placés, on obtenait un nouveau carré. Pour arriver à la démonstration de Lemoine, il ne manquait que de tracer des diagonales aux deux rectangles : c'était tout à fait à leur portée. Mais rien ne prouve qu'ils l'aient fait.

Découpages à Babylone



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

10 Carrés et losanges

Seules des représentations de carrés formés sur les diagonales d'autres carrés nous sont parvenues, comme sur cette tablette. Elle date probablement du temps d'Hammurabi. On sait d'autre part que les Mésopotamiens disposaient d'une excellente approximation de racine de deux. Il est donc raisonnable de penser qu'ils voyaient, que quand deux carrés sont emboîtés comme sur cette tablette, le plus grand est le double du plus petit.

Cela peut être pris comme une démonstration du théorème de Pythagore pour le cas particulier d'un triangle rectangle isocèle. Mais rien n'indique que les Babyloniens l'aient perçu ainsi, ni même qu'ils aient eu une notion de démonstration similaire à la nôtre.

Carrés et losanges
British Museum BM15285 (ca 1800 av. J.-C.)

11 Cérémonie Védique

On peut en dire autant des Indiens.

Les Shulba Sutras sont un ensemble de textes visant à codifier la fabrication des autels sacrificiels pour des cérémonies religieuses. On y trouve nombre d'indications géométriques. Dès les premiers versets de chaque texte apparaissent deux affirmations. La première dit que la diagonale d'un carré engendre le double de son aire. C'est le cas particulier du triangle isocèle. L'autre dit que l'aire engendrée par la longueur et la largeur d'un rectangle ensemble égale l'aire engendrée par la diagonale. C'est l'énoncé du cas général.

Mais comme pour les Mésopotamiens, rien n'indique que les religieux hindous aient eu l'idée de *démontrer* ce qui apparaissait comme une vérité religieuse.

Pourtant leur manière de fabriquer les autels en comptant les briques indique clairement qu'ils savaient découper une figure géométrique pour en fabriquer une autre de même aire.

Cérémonie Védique
Śulba Sūtra (ca 800 av. J.-C.)

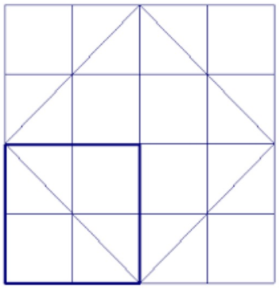
12 Ménon

Le plus ancien raisonnement qui ait été conservé sur le cas particulier du triangle rectangle isocèle, est dû à Platon, qui l'attribue à Socrate. Il se trouve dans le Ménon, un dialogue où Socrate et Ménon débattent de l'acquisition des vertus. Pour vérifier si la connaissance est un attribut acquis ou une réminiscence, Socrate fait venir un esclave à qui il propose de découvrir un carré dont la surface est double d'un carré donné. Il commence par un carré de deux unités de côté. C'est celui qui apparaît en gras. Il a pour surface quatre. Il l'agrandit alors. Le carré cherché ne peut pas avoir pour côté trois. car sa surface serait neuf, ni quatre dont la surface serait 16, quatre fois la surface initiale. Par contre quand Socrate trace les diagonales, l'esclave doit se rendre à l'évidence : le carré oblique a bien pour surface huit, soit deux fois la surface du carré initial.

Et comme l'esclave a toujours acquiescé à ce qu'on voulait lui faire dire, Socrate en conclut que, je cite, « celui qui ignore, a en lui-même sur ce qu'il ignore des opinions vraies : la science qu'a l'esclave, il faut qu'il l'ait acquise autrefois, ou qu'il l'ait toujours eue. »

Contrairement à l'esclave de Ménon, vous n'êtes pas obligé de suivre les conclusions de Socrate.

Ménon
Platon (ca 428–348 av. J.-C.)



13 La chaise de la mariée (1883)

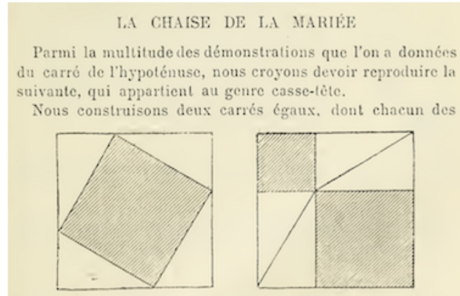
Vous ne serez pas surpris d'apprendre que Édouard Lucas propose pour l'enseignement la même démonstration que son ami Laisant.

« Parmi la multitude des démonstrations que l'on a données du carré de l'hypoténuse, nous croyons devoir reproduire la suivante, qui appartient au genre casse-tête. »

Soit, mais d'où lui vient ce nom de chaise de la mariée qu'il donne en titre ? L'a-t-il toujours connu dans une vie antérieure, comme l'esclave de Ménon ?

Certes, il y a bien une raison pour associer le théorème de Pythagore ou plutôt le triplet pythagoricien 3,4,5, au nombre nuptial de Platon. Ça, je vous l'ai déjà raconté. Cela expliquerait la mariée. Mais d'où viendrait la chaise ?

La chaise de la mariée (1883)
Édouard Lucas (1842–1891)


LA CHAISE DE LA MARIÉE

Parmi la multitude des démonstrations que l'on a données du carré de l'hypoténuse, nous croyons devoir reproduire la suivante, qui appartient au genre casse-tête.

Nous construisons deux carrés égaux, dont chacun des

14 La chaise de la mariée (ca. 1920)

Certains invoquent cette illustration du début du vingtième siècle, dont je n'ai pas réussi à retrouver l'origine. On y voit un poilu de la guerre de 14, portant sur son dos, en plus de son barda, une jeune femme assise. Sur la figure, des lignes sont tracées : un triangle rectangle, les trois carrés formés sur les trois côtés, la hauteur du triangle issue de l'angle droit, prolongée sur le carré du bas. C'est la fameuse figure du moulin à vent, qui accompagne la démonstration d'Euclide.

La chaise de la mariée (ca. 1920)

15 Éléments, Livre I, Proposition 47

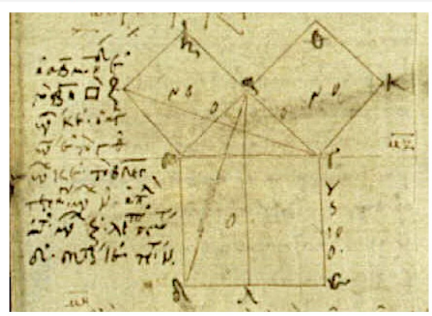
Parce que c'est bien Euclide qui a donné dans les Élements, la première démonstration rigoureuse du théorème de Pythagore.

Son énoncé est le suivant. « Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit. »

La démonstration est basée sur la figure du moulin à vent. Elle vise à prouver que la hauteur issue de l'angle droit partage le carré de l'hypoténuse en deux rectangles, dont chacun a la même surface que l'un des deux carrés formés sur les côtés de l'angle droit. Le raisonnement n'est pas du tout intuitif : il passe par une chaîne de triangles intermédiaires de surfaces égales.

Je vous laisse le plaisir de le lire, et surtout de suivre la démonstration dans le texte d'Euclide.

Éléments, Livre I, Proposition 47
Euclide (ca. 325–265 av. J.-C.)

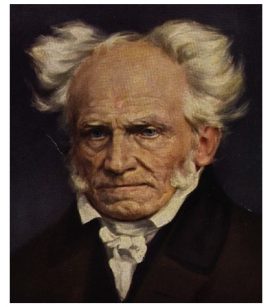


16 Arthur Schopenhauer (1788–1860)

Vous ne serez pas le premier à la trouver indigeste, et à lui préférer la démonstration des Chinois ou celle de Lemoine. Avant vous, Arthur Schopenhauer, un des philosophes marquants du dix-neuvième siècle, s'en était pris à Euclide en général, et à cette démonstration en particulier.

Il parle du sentiment de malaise qu'on éprouve après avoir assisté, dit-il, à des tours d'escamotage, auxquels, en effet, la plupart des démonstrations d'Euclide ressemblent étonnamment. Et concernant la démonstration du théorème de Pythagore :

Arthur Schopenhauer (1788–1860)



17 Une brillante absurdité

« On tire des lignes, on ne sait pour quelle raison : on s'aperçoit, plus tard, que c'étaient des nœuds coulants qui se serrent à l'improviste, pour surprendre le consentement du curieux qui cherchait à s'instruire ;

À nos yeux, la méthode d'Euclide n'est qu'une brillante absurdité.

La démonstration boîteuse et même captieuse d'Euclide nous abandonne au *pourquoi*, tandis que la simple figure, déjà connue, que nous reproduisons, nous fait entrer, du premier coup, et bien plus profondément que la démonstration, au cœur même de la question : elle nous amène à une plus intime conviction de la nécessité de cette propriété, et de sa liaison avec l'essence même de triangle rectangle. »

La figure dont Schopenhauer parle est celle du Ménon pour le triangle isocèle. Dans ce cas comme dans d'autres, il se prononce sans ambiguïté, comme Laisant, Lemoine et Lucas, pour une démonstration visuelle.

Pourtant c'est bien la démonstration d'Euclide qui a été répétée aux apprentis mathématiciens pendant des siècles.

Une brillante absurdité

Schopenhauer (1788–1860), Le monde comme volonté et comme représentation

[. . .] on tire des lignes, on ne sait pour quelle raison : on s'aperçoit, plus tard, que c'étaient des nœuds coulants qui se serrent à l'improviste, pour surprendre le consentement du curieux qui cherchait à s'instruire ;

[. . .] A nos yeux, la méthode d'Euclide n'est qu'une brillante absurdité.

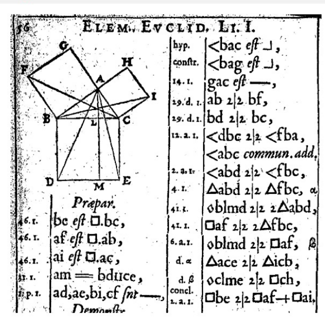
[. . .] La démonstration boîteuse et même captieuse d'Euclide nous abandonne au *pourquoi*, tandis que la simple figure, déjà connue, que nous reproduisons, nous fait entrer, du premier coup, et bien plus profondément que la démonstration, au coeur même de la question : elle nous amène à une plus intime conviction de la nécessité de cette propriété, et de sa liaison avec l'essence même de triangle rectangle.

18 Cours Mathématique (1634)

La voici dans le Cours Mathématique de Pierre Hérigone. C'est la première tentative de formalisation d'un raisonnement symbolique. Une grande innovation sur la forme, mais le fond de la démonstration, vous le voyez sur la figure, reste le même.

Cours Mathématique (1634)

Pierre Hérigone (ca 1580–1643)



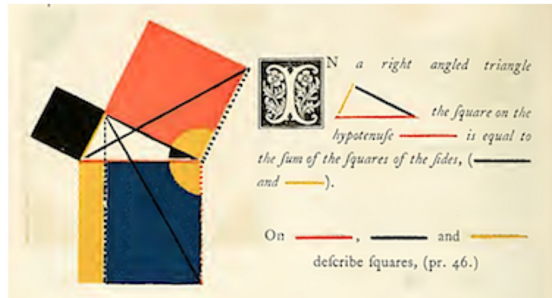
19 The first six books of the Elements of Euclid (1847)

Autre innovation pédagogique : les Éléments d'Euclide en couleurs. Byrne remplace les lettres par des petits dessins, mais il reste strictement fidèle au texte d'Euclide.

Est-ce à dire que personne depuis Euclide n'a cherché d'autre démonstration ? Non bien sûr. L'explosion des démonstrations différentes date de la seconde moitié du dix-neuvième, quand l'enseignement par les Éléments d'Euclide a commencé à être sérieusement contesté.

Mais avant cela, nombre de traducteurs et commentateurs d'Euclide s'étaient posé la question des alternatives à sa démonstration.

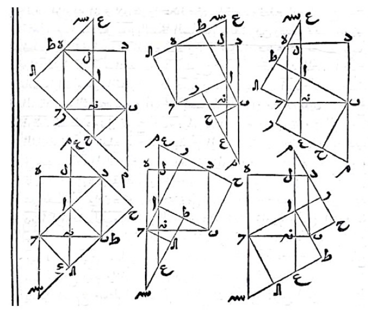
The first six books of the Elements of Euclid (1847)
Oliver Byrne (ca 1810–1880)



20 Kitāb taḥrīr uṣūl li-Uqlīdus (1248)

Voici quelques unes des figures que propose al-Tusi dans sa version écrite en 1248. L'édition que vous voyez date de 1594.

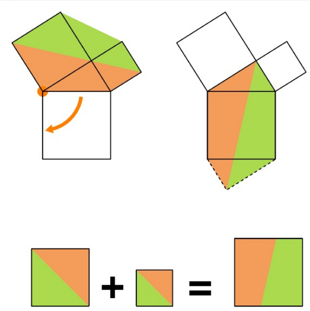
Kitāb taḥrīr uṣūl li-Uqlīdus (1248)
al-Tusi (1201–1274)



21 Démonstration de Léonard de Vinci ?

Cette démonstration-ci, vous la trouverez attribuée un peu partout à Léonard de Vinci. En fait il n'y en a aucune trace dans les cahiers de Léonard. Par contre, on y trouve de nombreuses figures géométriques, qui prouvent qu'il avait soigneusement étudié Euclide. Il était sans doute inspiré par son ami Lucas Pacioli, qui avait lui-même publié une traduction des Éléments d'Euclide en 1509.

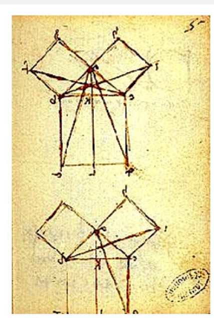
Démonstration de Léonard de Vinci ?
Leonardo da Vinci (1452–1519)



22 Éléments, Livre I, proposition 47

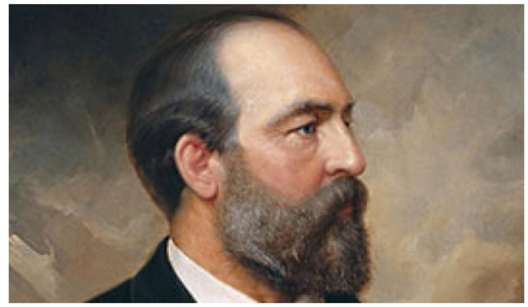
Voici la figure du moulin à vent, de la propre main de Léonard. Sur le feuillet précédent, il a rédigé la démonstration d'Euclide.

Éléments, Livre I, proposition 47
Leonardo da Vinci (1452–1519), Manuscrit



23 James Abram Garfield (1831–1881)

James Abram Garfield (1831–1881)

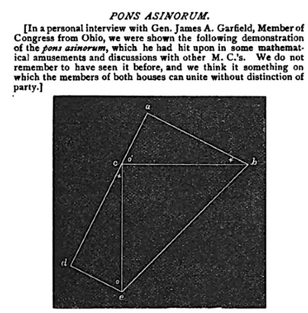


Il y aurait même eu un président américain pour proposer une démonstration : James Garfield. C'était en 1876, cinq ans avant qu'il ne devienne président, et qu'il soit assassiné quelques mois plus tard. Voici l'article.

24 New-England Journal of Education, April 1, 1876

« Au cours une entrevue personnelle avec James Garfield, membre du congrès de l'Ohio, il nous a fourni la démonstration suivante du pont-aux ânes. Il était tombé dessus durant des amusements et discussions mathématiques avec d'autres membres du congrès. Nous n'avons pas souvenir de l'avoir déjà vue auparavant, et elle nous apparaît comme propre à unir les membres des deux chambres, sans distinction de parti. »

New-England Journal of Education, April 1, 1876
James Abram Garfield (1831–1881)



PONS ASINORUM.

[In a personal interview with Gen. James A. Garfield, Member of Congress from Ohio, we were shown the following demonstration of the *pons asinorum*, which he had hit upon in some mathematical amusements and discussions with other M. C.'s. We do not remember to have seen it before, and we think it something on which the members of both houses can unite without distinction of party.]

Personnellement, je me joins de bon cœur au concert de louanges. Je me permettrai tout de même d'observer deux détails tout à fait mineurs. Le premier est que la figure montrée est celle de Laisant, Lucas, et Saunderson, simplement coupée en deux. Le second est que l'article est paru dans le numéro quatorze de l'année 1876, rhmm… daté du premier avril.

Je suis sûr qu'en cherchant un peu, on devrait trouver une démonstration dont la figure est en forme de poisson.

Bon, redevenons un peu sérieux. La question est : pourquoi Euclide donne-t-il une démonstration aussi compliquée de ce résultat ? Écoutons le commentaire de Proclus (daté de sept bons siècles après Euclide).

25 L'irrésistible puissance

« Lorsqu'on entend parler de ce théorème, il n'est pas rare de rencontrer des gens qui, voulant montrer leur science en antiquité, le font remonter à Pythagore, et vous parlent du sacrifice que ce philosophe offrit pour sa découverte. Quant à moi, après avoir rendu aux premiers sages qui en ont reconnu la vérité, tout l'honneur qu'ils méritent, je n'hésite pas à dire que je professe une admiration beaucoup plus grande envers l'auteur de ces Éléments, non-seulement pour y avoir attaché une démonstration de la dernière évidence, mais encore pour en avoir fait ressortir, en le soumettant à l'irrésistible puissance de sa savante analyse, un autre théorème beaucoup plus général. »

L'irrésistible puissance
Proclus, Commentaire sur le premier livre des Éléments (ca. 460)

Lorsqu'on entend parler de ce théorème, il n'est pas rare de rencontrer des gens qui, voulant montrer leur science en antiquité, le font remonter à Pythagore, et vous parlent du sacrifice que ce philosophe offrit pour sa découverte. Quant à moi, après avoir rendu aux premiers sages qui en ont reconnu la vérité, tout l'honneur qu'ils méritent, je n'hésite pas à dire que je professe une admiration beaucoup plus grande envers l'auteur de ces Éléments, non-seulement pour y avoir attaché une démonstration de la dernière évidence, mais encore pour en avoir fait ressortir, en le soumettant à l'irrésistible puissance de sa savante analyse, un autre théorème beaucoup plus général.

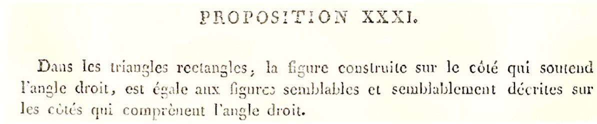
Allons bon : un théorème de Pythagore pourrait-il en cacher un autre ? Eh bien oui : Proclus parle de la proposition 31 du livre 6. La voici.

26 Livre VI, proposition 31

« Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui sous-tend l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés qui comprennent l'angle droit. »

Que veut-il dire par là ?

Livre VI, proposition 31
Euclide, Éléments (ca 300 av. J.-C.)



PROPOSITION XXXI.

Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés qui comprènent l'angle droit.

27 Livre VI, proposition 31

Tout simplement ceci. Prenez une figure quelconque. Fabriquez-en deux autres, semblables à la première, dans des rapports d'homothétie égaux aux rapports entre les deux côtés de l'angle droit et l'hypoténuse.

Alors l'aire de la première figure est la somme des aires des deux plus petites qui lui sont semblables. Vous pouvez dire comme Euclide que les trois figures sont *construites* sur les trois côtés de l'angle droit, mais en réalité ce n'est qu'une question de rapports de similitude.

Livre VI, proposition 31
Euclide, Éléments (ca 300 av. J.-C.)

28 Livre VI, proposition 31

La démonstration que donne Euclide est lumineuse. Exactement le contraire de ce que lui reproche Schopenhauer. La voici sous forme moderne.

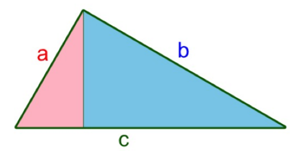
Prenez un triangle rectangle d'hypoténuse c. La hauteur issue de l'angle droit le partage en deux triangles rectangles, le rouge et le bleu, d'hypoténuses a et b. L'aire du triangle rouge plus l'aire du triangle bleu est l'aire du grand triangle, bien sûr.

Les trois triangles, le vert, le rouge et le bleu, sont semblables, parce que leurs angles sont égaux deux à deux. Le rapport de similitude du rouge au vert est a/c, du bleu au vert est b/c. Or quand des figures sont semblables, les rapports des aires sont les carrés des rapports de similitude. Donc $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$.

Et voilà : le vrai théorème ne porte pas sur des *figures* carrées, mais sur des rapports de similitude *élevés au carré*. Pour en arriver là, Euclide avait besoin d'expliquer ce que sont des rapports de longueur, de définir ce que sont des triangles semblables, de démontrer que des aires de deux triangles semblables ont un rapport égal au carré du rapport de similitude, enfin de définir ce que sont deux figures semblables, afin d'étendre le rapport des aires à deux figures semblables. Il lui faut cinq livres et de nombreuses propositions avant de pouvoir passer du carré de l'hypoténuse aux figures quelconques. Dommage que les siècles suivants n'aient pas eu la patience de dépasser le premier livre.

Non, c'est un peu injuste de le présenter ainsi. Il y a eu au cours des siècles, des mathématiciens qui ont compris l'intérêt de la généralisation, et qui ont même su aller plus loin.

Livre VI, proposition 31
Euclide, Éléments (ca 300 av. J.-C.)



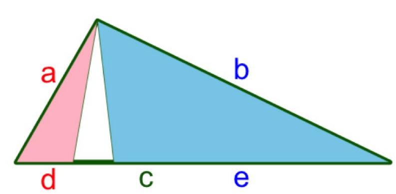
$$\frac{S_A}{S_C} + \frac{S_B}{S_C} = 1$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

29 Sur l'argument attribué à Socrate...

Prenez Thabit ibn Qurra par exemple ; Un des grands de la maison de la sagesse à Bagdad, au neuvième siècle. C'est un fin connaisseur d'Euclide, qu'il a lui même traduit. Quand il écrit une « épître sur l'argument attribué à Socrate au sujet du carré et de sa diagonale », il fait référence au dialogue de Ménon dont nous avons parlé plus haut. Il critique le fait que l'argument se limite au cas particulier d'un triangle, puis expose la démonstration d'Euclide avec les rapports de similitude. Il observe alors que rien n'empêche, dans un triangle quelconque, de tracer deux segments issus d'un des sommets, de manière à ce que les deux triangles ainsi formés, le rouge et le bleu, soient encore semblables au triangle initial. Le même argument sur les rapports de similitude conduit à une autre expression de la somme $a^2 + b^2$. Ibn Qurra considère cela comme une évidence et ne se donne même pas la peine de détailler la démonstration.

Comme d'habitude, le résultat a été oublié pendant un assez grand nombre de siècles, pour être retrouvé ensuite par les Européens. En l'occurrence, le premier à donner un résultat qu'on peut considérer comme équivalent à celui d'Ibn Qurra est John Wallis. Mais ce n'est pas de lui dont je voudrais vous parler pour terminer.

Sur l'argument attribué à Socrate...
Thabit ibn Qurra (ca 826–901)



$$a^2 + b^2 = c(d + e)$$

30 Proposition élémentaire de géométrie (1729)

Le résultat d'Ibn Qurra se trouve aussi dans un article paru dans le Journal des Savants en mai 1730. Il avait été lu l'année précédente à la Société des Arts. Regardez la présentation.

« La pièce suivante est d'un des fils du célèbre Monsieur Clairaut. Ce fils âgé seulement de treize ans, est le cadet d'un frère qui n'en a que seize, auquel à cause de sa science dans les mêmes mathématiques, le roi vient d'accorder une dispense d'âge pour être reçu dans l'Académie royale des sciences à la première place vacante. »

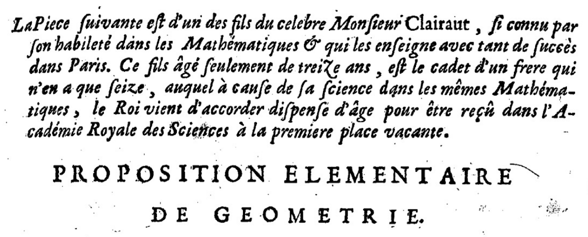
Ce frère nanti d'une dispense royale pour entrer à l'Académie des sciences, c'est Alexis Clairaut ; je vous en parle assez souvent. Il avait donc un frère cadet, dont l'histoire n'a pas retenu le prénom, qui avait tout autant profité que lui des leçons du père. Malheureusement, Clairaut le cadet n'a pas eu le temps de se faire un prénom. Il a été emporté par la variole en deux jours, en décembre 1732. Il avait tout juste seize ans.

31 références

Mmhh : une démonstration peut en cacher une autre, un théorème peut en cacher un autre, un frère Clairaut peut en cacher un autre, finalement cette histoire était pleine de faux-semblants. Que reste-t-il d'autre à quoi se raccrocher, sinon « la brillante absurdité d'Euclide » ?

Proposition élémentaire de géométrie (1729)

Clairaut le Cadet (1716–1732)



LaPiece suivante est d'un des fils du celebre Monsieur Clairaut, si connu par son habileté dans les Mathématiques & qui les enseigne avec tant de succès dans Paris. Ce fils âgé seulement de treize ans, est le cadet d'un frere qui n'en a que seize, auquel à cause de sa science dans les mêmes Mathématiques, le Roi vient d'accorder dispense d'âge pour être reçû dans l'Académie Royale des Sciences à la premiere place vacante.

PROPOSITION ELEMENTAIRE DE GEOMETRIE.

références

- K. Chemla ed. (2012) *The history of mathematical proof in ancient traditions*, Cambridge : University Press
- É. Cousquer (2010) Histoire du théorème de Pythagore, *mediamaths.net*
- R. Hahn (2017) *The metaphysics of the Pythagorean theorem*, New York : State University Press
- E. Maor (2007) *The Pythagorean theorem, a 4,000-year history*, Princeton : University Press
- F. Rostand (1953) Schopenhauer et les démonstrations mathématiques, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 6(3), 203–230
- J. C. Sparks (2008) *The Pythagorean theorem, crown jewel of mathematics*, Cambridge : University Press