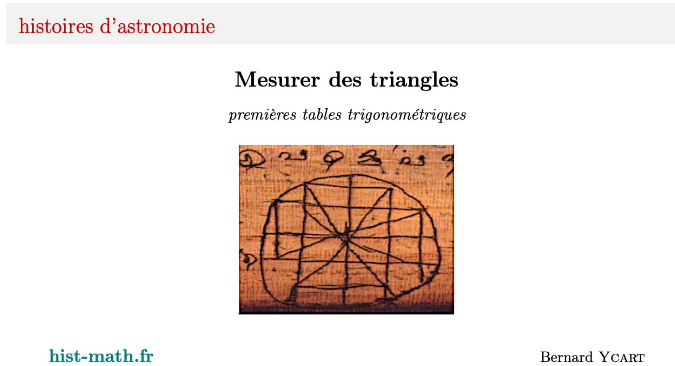
0 Mesurer des triangles



La trigonométrie, c'est la mesure des triangles. L'inventeur s'appelle Hipparque et il vivait au second siècle avant Jésus-Christ, donc deux siècles après Euclide, un siècle après Archimède, mais tout de même plus de deux siècles avant Ptolémée. Il est l'auteur des premières tables trigonométriques de l'histoire.

Non attendez, sérieux ? On voudrait nous faire croire que personne n'a mesuré de triangle avant Hipparque ?

1 Carré et diagonale

Je vous parle assez souvent de cette tablette, qui est probablement une sorte de cahier d'écolier. Un apprenti scribe a marqué dessus la valeur du côté d'un carré, celle de sa diagonale et de l'inverse de cette diagonale. Donc racine de deux et un sur racine de deux. Mais un sur racine de deux, c'est bien le sinus de 45 degrés non ?

2 Triangle équilatéral

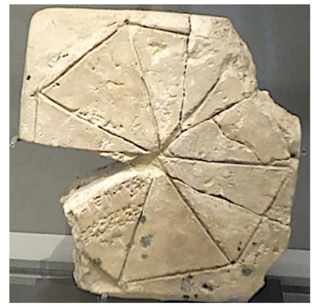
Le sinus et le cosinus de $\pi/3$ et $\pi/6$ étaient également connus. Tout au moins de façon approchée, puisque dans les tablettes où apparaissent des problèmes d'hexagones ou de triangles équilatéraux, on retrouve des constantes qui reviennent à prendre sept quarts comme approximation de racine de trois.

3 Heptagone

Les Mésopotamiens avaient une connaissance assez précise des dimensions des polygones réguliers. On a retrouvé des tables donnant les côtés et les hauteurs des polygones réguliers à n côtés, jusqu'à $n = 8$. Cette tablette porte un heptagone sur la face que vous voyez, un hexagone sur l'autre.

On savait donc en ce temps là, calculer les sinus et cosinus des angles de $\pi/6$ et $\pi/7$. Mais attention aux anachronismes : être capable d'effectuer la construction géométrique, voire de donner des valeurs approchées des longueurs, ne signifie pas que l'on exprime ces mêmes longueurs comme des grandeurs trigonométriques.

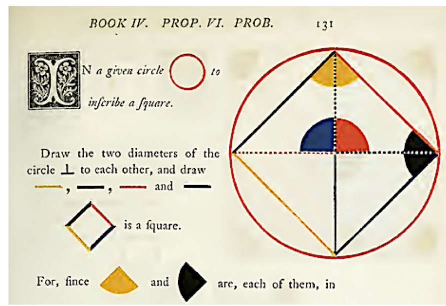
Heptagone
TMS 2, Musée du Louvre (ca 1700 av. J.C.)



4 Euclide, Les Éléments, livre IV proposition VI

Du temps d'Euclide, les constructions des polygones réguliers font partie des bases. Euclide consacre le livre quatre des Éléments, aux cercles inscrits ou circonscrits. Il commence par les triangles, ensuite il passe au carré.

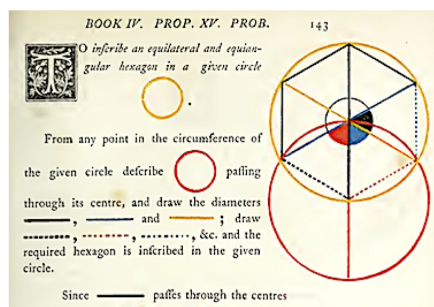
Euclide, Les Éléments, livre IV proposition VI
Byrne, The first six books of Euclid (1847)



5 Euclide, Les Éléments, livre IV proposition XV

L'inscription de l'hexagone est particulièrement facile. On savait depuis déjà longtemps que le côté de l'hexagone est le rayon du cercle.

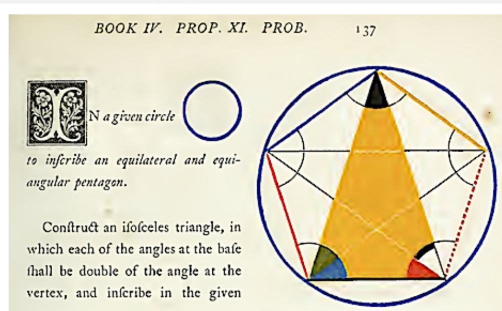
Euclide, Les Éléments, livre IV proposition XV
Byrne, The first six books of Euclid (1847)



6 Euclide, Les Éléments, livre IV proposition XI

La construction du pentagone inscrit est un peu plus compliquée, mais elle est bien connue également. À partir du pentagone et du triangle équilatéral, le polygone à quinze côtés est déduit. Il faudra attendre Gauss pour faire mieux.

Euclide, Les Éléments, livre IV proposition XI
Byrne, The first six books of Euclid (1847)

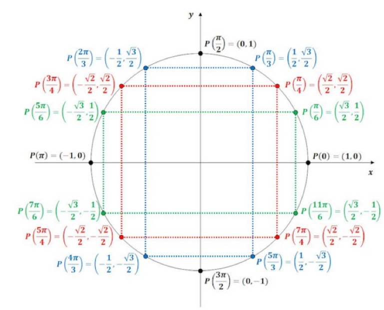


7 Cercle trigonométrique

Avec les constructions d'Euclide, on sait tracer à la règle et au compas, un assez grand nombre d'angles ; en fait une bonne partie de ce que nous appelons cercle trigonométrique. Euclide n'effectue pas explicitement les calculs des coordonnées : cela n'aurait pas eu de sens dans les Éléments. Mais ces calculs n'impliquent rien d'autre que des extractions de racines carrées, que l'on savait approcher depuis longtemps. Je vous parle ailleurs assez en détail de la méthode de Héron, nous n'allons pas recommencer.

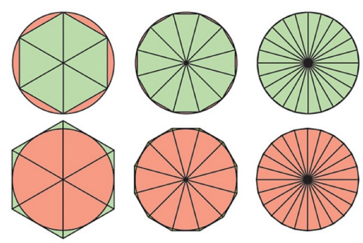
Je voudrais vous convaincre du fait que, si les premières tables trigonométriques ne datent que du second siècle avant notre ère, les outils pour les calculer étaient disponibles bien avant. Nous en avons la preuve, avec la méthode d'exhaustion.

Cercle trigonométrique



8 Méthode d'exhaustion

Méthode d'exhaustion
Eudoxe de Cnide (408–355 av. J.C.)



Elle est en général attribuée à Eudoxe. On la trouve utilisée au début du livre douze des Éléments d'Euclide. Elle consiste à encadrer le cercle par des polygones inscrits et circonscrits, pour majorer et minorer la quantité que l'on cherche. Ensuite, on double le nombre de côtés, en divisant par deux chacun des angles du polygone précédent.

9 Archimedis circuli dimensio

Dans son mémoire sur la mesure du cercle, Archimède l'utilise avec virtuosité. Il part d'un hexagone, dont il divise les angles quatre fois successivement, pour en arriver à un polygone à 96 côtés. À chaque fois, le dédoublement des angles le conduit à calculer des racines carrées, qu'il encadre soigneusement par des rationnels. Archimède ne s'attarde pas, ni sur le calcul des longueurs pour l'angle moitié, ni sur l'extraction des racines carrées. J'imagine qu'il voyait les deux comme des outils basiques.

Or, entre un polygone à 96 côtés et une table trigonométrique pour 24 angles régulièrement espacés entre 0 et $\pi/2$, il n'y a qu'une différence de point de vue, pas de technique. Je vous propose de détailler la construction de cette table, pour vous convaincre du fait qu'elle était largement à la portée d'Archimède, et même d'Euclide avant lui.

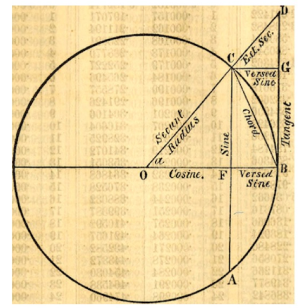
Archimedis circuli dimensio
Biblioteca Apostolica Vaticana, manuscrit Urb. Lat. 261

10 Corde et flèche

Commençons par un peu de vocabulaire. Nous sommes dans un cercle de rayon donné. L'habitude de fixer le rayon du cercle à 1 pour ne considérer que des rapports est tardive. Elle date d'Abu l-Wafa au dixième siècle, mais n'a été unanimement adoptée que bien plus tard.

Du temps des Grecs, et encore longtemps après eux, le segment naturellement associé à un angle était la corde, comme la corde d'un arc. Les Indiens ont compris les premiers qu'il était plus facile d'utiliser la demi-corde, qui est notre sinus.

Corde et flèche

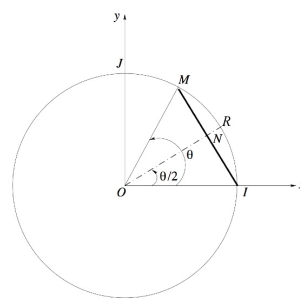


11 de la corde au sinus

Comme vous le voyez, la corde d'un angle est le double du sinus de l'angle moitié. La première trace qu'on en a est la table d'Aryabhata, à la fin du cinquième siècle. Je vous en reparle un peu plus loin.

Qui dit arc, dit corde, mais aussi flèche. Pour nous, le cosinus de $\theta/2$ est la longueur ON. Pour les Indiens la flèche de l'arc θ était la distance de N au cercle, soit pour nous le rayon moins le cosinus. C'est devenu en Europe le « sinus verse », qui a maintenant disparu.

de la corde au sinus
Āryabhaṭa (476–550)



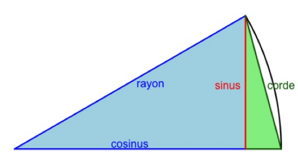
12 Théorème de Pythagore

Les deux ingrédients de base du calcul d'une table trigonométrique, sont deux applications élémentaires du théorème de Pythagore.

Regardez cette figure d'un secteur angulaire, dans lequel un des rayons est projeté orthogonalement sur l'autre. Cela donne deux triangles rectangles. Le bleu a pour hypoténuse le rayon, pour côtés de l'angle droit le sinus et le cosinus. La symétrie par rapport à la diagonale transforme le cosinus en le sinus de l'angle complémentaire.

Dans le triangle vert, l'hypoténuse est la corde, qui est le double du sinus de l'angle moitié. Les deux côtés de l'angle droit sont le sinus et la flèche, qui est le rayon moins le cosinus. Le théorème de Pythagore permet donc de calculer le sinus de l'angle moitié connaissant le sinus de l'angle et de son complémentaire. Voici les formules.

Théorème de Pythagore



$$\text{sinus}^2 + \text{cosinus}^2 = \text{rayon}^2$$

$$\text{sinus}^2 + \text{flèche}^2 = \text{corde}^2$$

13 Formules de calcul

Formules de calcul

$$\text{sinus}^2 + \text{cosinus}^2 = \text{rayon}^2$$
$$\text{Sin}(90^\circ - \theta) = \sqrt{R^2 - \text{Sin}^2(\theta)}$$

$$\text{sinus}^2 + \text{flèche}^2 = \text{corde}^2$$
$$\text{Sin}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{\text{Sin}^2(\theta) + (R - \text{Sin}(90^\circ - \theta))^2}}{2}$$

Pour calculer le sinus de l'angle complémentaire, il faut prendre la racine carrée de la différence entre le carré du rayon et le carré du sinus de l'angle.

Quant au sinus de l'angle moitié, c'est la moitié de la racine carrée de la somme des carrés du sinus et du sinus verse.

14 Calculer une table de 24 sinus

Calculer une table de 24 sinus

$$S_i = \text{Sin}\left(\frac{i}{24} \times 90^\circ\right), \quad i = 1, \ldots, 24$$
$$S_{24} = R$$

$$S_{24} \longrightarrow S_{12} \longrightarrow S_6\ (S_{18}) \longrightarrow S_3\ (S_{21})$$

$$S_{18} \longrightarrow S_9\ (S_{15})$$

Ces deux formules très simples, suffisent à calculer une table de valeurs. Voici comment trouver les sinus de 24 angles régulièrement répartis sur un quart de cercle. Le calcul des 24 cordes serait analogue.

La vingt-quatrième valeur est le sinus de quatre-vingt dix degrés, il est égal au rayon. En divisant l'angle par deux à chaque fois, vous calculez successivement le douzième sinus, puis le sixième et le troisième. Le passage au complémentaire vous donne le dix-huitième et le vingt-et-unième.

Partant du dix-huitième, vous obtenez le neuvième en divisant par deux, et le quinzième par passage au complémentaire.

15 Calculer une table de 24 sinus (suite)

Calculer une table de 24 sinus (suite)

$$S_i = \text{Sin}\left(\frac{i}{24} \times 90^\circ\right), \quad i = 1, \ldots, 24$$
$$S_8 = \frac{R}{2}$$

$$S_8\ (S_{16}) \longrightarrow S_4\ (S_{20}) \longrightarrow S_2\ (S_{22}) \longrightarrow S_1\ (S_{23})$$
$$S_{20} \longrightarrow S_{10}\ (S_{14}) \longrightarrow S_5\ (S_{19})$$
$$S_{14} \longrightarrow S_7\ (S_{17})$$
$$S_{22} \longrightarrow S_{11}\ (S_{13})$$

Vous avez déja calculé huit valeurs, et vous n'avez pas encore utilisé le sinus de trente degrés. Il est la moitié du rayon, ce que vous dit le tracé de l'hexagone régulier. Le huitième sinus de votre table est donc $R/2$.

Du huitième sinus, vous passez au quatrième, au second et au premier en divisant successivement par deux, puis au seizième, au vingtième, au vingt-deuxième et au vingt-troisième qui sont les complémentaires.

Le vingtième mène au dixième et au cinquième, donc au quatorzième et au dix-neuvième.

À son tour le quatorzième conduit au septième, donc au dix-septième. Il reste à exploiter le vingt-deuxième, qui conduit au onzième donc au treizième.

Faites vos comptes : vous avez bien calculé vingt-quatre valeurs, et vous n'avez utilisé que des opérations élémentaires et des extractions de racines carrées. Maintenant voici la traduction du verset douze de l'Aryabhatiya, qui date de 499.

16 Āryabhaṭīya (499), Verset XII

C'est une collection de nombres entiers, qu'il faut comprendre comme des différences entre 24 sinus successifs. Ces différences suffisent à retrouver les sinus, par sommes cumulées, et elles sont plus faciles à mémoriser. Le rayon du cercle est la somme de toutes les différences, à savoir 3438. Vous pouvez vérifier que la huitième somme cumulée est bien la moitié de 3438.

La précision est relativement bonne. Divisez les valeurs cumulées par 3438, et comparez aux sinus des multiples de $\pi/48$. L'erreur maximale en valeur absolue est deux sur dix mille.

Eh bien la table que vous voyez, a été calculée par la méthode expliquée plus haut. Comment le sait-on ? Nous avons deux sources plus détaillées que Aryabhata.

Āryabhaṭīya (499), Verset XII

Āryabhaṭa (476–550)

225	224	222	219	215	210	205	199
191	183	174	164	154	143	131	119
106	93	79	65	51	37	22	7

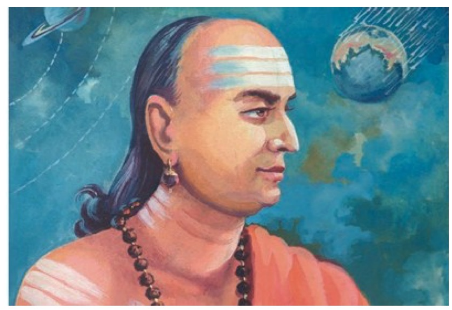
17 Varahāmihira (ca 505–587)

La première vient de Varahamihira, au sixième siècle. Il est possible que ce soit Aryabhata qui ait déterminé sa vocation pour l'astronomie. Le titre de son livre, Panca-siddantika, signifie les cinq canons astronomiques. C'est une compilation de la science de son temps. Il y décrit la fabrication d'une table de 24 sinus, celle que nous avons vue plus tôt.

Voici la traduction de quelques phrases au début de la description.

Varahāmihira (ca 505–587)

Pañca-siddhāntikā (575)



18 Pañca-siddhāntikā (575)

« Nous supposons un diamètre de 240, et nous donnons ci-dessous les sinus tabulés pour des angles de 3° 45′. »

Le premier diamètre de 240 est conventionnel. Trois degrés et 45 minutes, c'est exactement 90 degrés divisé par 24.

« [. . .] Le carré du rayon (14 400) est appelé *dhruvakaraṇī*. Sa quatrième partie (3 600) est le *karaṇī* relié au premier signe (30°). *Dhruvakaraṇī* moins le *karaṇī* de Meṣa (14 400-3 600=10 800), est le *karaṇī* de deux signes (60°). La racine carrée d'un *karaṇī* est le sinus de la table. »

La traduction littérale de karani est « irrationel ». Ce premier pas consiste à passer du sinus de 30 degrés, au sinus du complémentaire, 60 degrés.

Pañca-siddhāntikā (575)

Varahāmihira (ca 505–587)

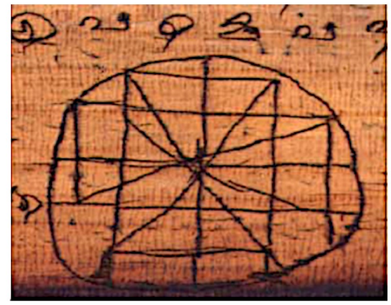
Nous supposons un diamètre de 240, et nous donnons ci-dessous les sinus tabulés pour des angles de 3° 45′.

[. . .] Le carré du rayon (14 400) est appelé *dhruvakaraṇī*. Sa quatrième partie (3 600) est le *karaṇī* relié au premier signe (30°). *Dhruvakaraṇī* moins le *karaṇī* de Meṣa (14 400-3 600=10 800), est le *karaṇī* de deux signes (60°). La racine carrée d'un *karaṇī* est le sinus de la table.

19 Cercle trigonométrique

Cercle trigonométrique

Bhāskara I (ca. 600–680) Āryabhaṭīyabhāṣya, KUOML Co 1712



Un autre témoignage sur la manière de calculer une table de sinus est celui de Bhaskara I, au siècle suivant. Son texte est accompagné de la figure que vous voyez. Elle montre un cercle trigonométrique sur lequel les angles multiples de 30 degrés sont marqués avec leurs sinus et cosinus.

Bhaskara I décrit à nouveau la procédure qui conduit à la table de 24 sinus.

20 Brahmagupta (598–668)

Brahmagupta (598–668)

Brāhmasphuṭasiddhānta (628)

Toujours au septième siècle, Brahmagupta explique lui-aussi comment consruire la table à 24 entrées.

Mais attendez : le septième siècle, cela fait tout de même un bon millénaire après Eudoxe ça ! Je vous propose d'écouter Théon d'Alexandrie, un des derniers mathématiciens grecs. Mais si, vous le connaissez, c'est le papa d'Hypatie !

21 Commentaire sur la composition mathématique

Commentaire sur la composition mathématique

Théon d'Alexandrie (ca 335–405)

Hipparque avait déjà donné en douze livres la méthode pour trouver les droites inscrites dans le cercle. Ménélaüs a traité aussi cette matière en six livres. Mais on ne peut s'empêcher d'admirer la facilité avec laquelle Ptolémée, par le moyen de quelques théorèmes simples et en petit nombre, parvient à trouver ces valeurs.

« Hipparque avait déjà donné en douze livres la méthode pour trouver les droites inscrites dans le cercle. Ménélaüs a traité aussi cette matière en six livres. Mais on ne peut s'empêcher d'admirer la facilité avec laquelle Ptolémée, par le moyen de quelques théorèmes simples et en petit nombre, parvient à trouver ces valeurs. »

La table d'Hipparque n'a pas été conservée, pas plus que celle de Ménélaüs : qu'elles aient été construites en douze ou six livres est sans doute une exagération de Théon. Par contre, il a raison d'insister sur l'élégance de la construction de Ptolémée.

22 Table de cordes

Table de cordes

Ptolémée (ca 85–165) Composition Mathématique, Livre I, chapitre IX

38 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés	Min.	Part. du Diam.	Prim.	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ.			
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ο̄	ς'	ο̄	λα	κε	ο̄	α	β	ν
α	ο̄	α	β	ν	ο̄	α	β	ν
α	ς'	α	λδ	ιε	ο̄	α	β	ν
β	ο̄	β	ε	μ	ο̄	α	β	ν
β	ς'	β	λζ	δ	ο̄	α	β	μη
γ	ο̄	γ	η	κη	ο̄	α	β	μη
γ	ς'	γ	λθ	νβ	ο̄	α	β	μη
δ	ο̄	δ	ια	ις	ο̄	α	β	μζ
δ	ς'	δ	μβ	μ	ο̄	α	β	μζ

L'exploit est impressionnant. Ptolémée donne une table de toutes les cordes des angles de 0 à 180 degrés, précise au demi-degré. Cela revient à une table de sinus précise au quart de degré, soit trois cent soixante valeurs. Ces valeurs sont données par rapport à un diamètre de 120, avec trois chiffres sexagésimaux, donc en trois mille six centièmes. La précision en termes de sinus est de l'ordre de 10^{-7}.

Comment Ptolémée fait-il ? Comme point de départ, il utilise non seulement l'hexagone, mais en plus le pentagone, qui lui donne l'angle de 72 degrés. Ensuite, il utilise comme précédemment le passage au complémentaire et la division des angles par deux. Mais il a un autre outil.

23 Théorème de Ptolémée

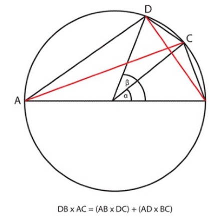
C'est ce que nous appelons toujours le « théorème de Ptolémée ». Il dit que pour un quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est la somme des deux produits de côtés opposés. Utilisé convenablement, ce théorème permet de calculer les cordes de sommes et de différences. Ce que vous voyez ici n'est qu'un exemple, qui vous montre comment Ptolémée calculait la corde de la différence de deux angles.

C'est un outil puissant, qui permet de gagner en précision. Par exemple, l'angle de 72 degrés, divisé par deux, puis quatre, puis huit, conduit à l'angle de 9 degrés. La table de 24 valeurs contient la corde de 7 degrés et demi. Par différence, on obtient la corde de un degré et demi.

On peut encore diviser par deux, mais on n'atteint pas la corde de un degré. Écoutez Ptolémée vous dire comment il a fait.

Théorème de Ptolémée

Ptolémée (ca 85–165) Composition Mathématique, Livre I, chapitre IX



$$\mathrm{Crd}(\beta) \times \mathrm{Crd}(180^\circ - \alpha) = \mathrm{Diam} \times \mathrm{Crd}(\beta - \alpha) + \mathrm{Crd}(180^\circ - \beta) \times \mathrm{Crd}(\alpha)$$

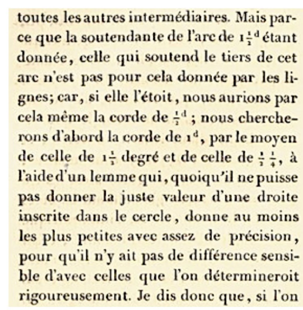
24 Corde de 1°

« Parce que la soutendante de l'arc de un degré et demi étant donnée, celle qui soutend le tiers de cet arc n'est pas pour cela donnée par les lignes ; (Il veut dire que la corde du tiers d'un angle n'est pas constructible à la règle et au compas en général) car, si elle l'était, nous aurions par cela même la corde de un demi degré ; nous chercherons d'abord la corde de un degré, par le moyen de celle de un degré et demi et de celle de trois quarts de degré, à l'aide d'un lemme qui, quoiqu'il ne puisse pas donner la juste valeur d'une droite inscrite dans le cercle, donne au moins les plus petites avec assez de précision, pour qu'il n'y ait pas de différence sensible d'avec celles que l'on déterminerait rigoureusement. »

En clair, Ptolémée approche la corde de un degré par interpolation linéaire entre trois quart et un et demi. Le calcul exact ne sera effectué que bien plus tard, par al-Kashi au début du quinzième siècle.

Corde de 1°

Ptolémée (ca 85–165) Composition Mathématique, Livre I, chapitre IX



toutes les autres intermédiaires. Mais parce que la soutendante de l'arc de $1\frac{1}{2}^{d}$ étant donnée, celle qui soutend le tiers de cet arc n'est pas pour cela donnée par les lignes; car, si elle l'étoit, nous aurions par cela même la corde de $\frac{1}{2}^{d}$; nous chercherons d'abord la corde de 1^{d}, par le moyen de celle de $1\frac{1}{2}$ degré et de celle de $\frac{3}{4}$, à l'aide d'un lemme qui, quoiqu'il ne puisse pas donner la juste valeur d'une droite inscrite dans le cercle, donne au moins les plus petites avec assez de précision, pour qu'il n'y ait pas de différence sensible d'avec celles que l'on détermineroit rigoureusement. Je dis donc que, si l'on

25 Jamshīd al-Kāshī (ca 1380-1429)

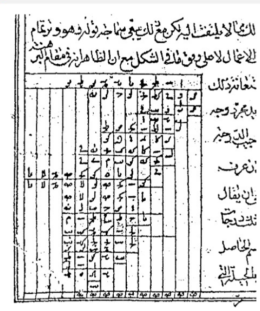
Mais si vous savez bien, al-Kashi c'est cet astronome de la cour d'Ulugh Beg à Samarcande. Il a calculé π avec une précision de 10^{-17}, mais il n'a aucun rapport avec le théorème d'al-Kashi.

Bref. Comment a-t-il fait pour calculer le sinus de un degré ? Il a commencé par appliquer le théorème de Ptolémée pour relier le sinus de un degré et celui de trois degrés par une équation de degré trois. Ensuite, il a inventé un algorithme d'approximation pour résoudre cette équation. Les calculs sont assez compliqués et ils sont présentés sous forme de tableau comme celui que vous voyez.

Au fait, le titre du mémoire d'al-Kashi est « Traité sur la détermination du sinus de un degré ». Vous voyez la transcription du titre arabe. Dans cette transcription, le mot qui signifie sinus est « jayb ». C'est une adaptation phonétique du mot indien qui signifie corde.

Jamshīd al-Kāshī (ca 1380-1429)

Risāla fī stikhrāj jayb daraja wāḥida

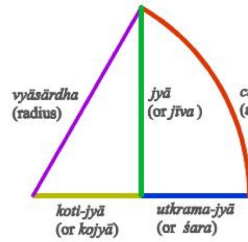


26 Trigonométrie indienne

Voici comment on est passé du mot corde, au mot sinus. Quand ils se sont rendu compte qu'il était plus facile de manipuler les moitiés de corde, les Indiens les ont appelé ardha-jya, c'est-à-dire demi-cordes. Et puis comme il n'y avait plus ambiguïté, le préfixe est tombé, et le mot jya, ou jyba a désigné le sinus. Le mot désignant le cosinus était littéralement le sinus du complémentaire : koti-jya. Restait son complément au rayon, qui était la flèche.

Les Arabes ont appris l'astronomie indienne, avant que l'almageste de Ptolémée ne soit traduit. Ils ont importé le mot Jiba, qui ne signifiait rien en arabe. La prononciation a dérivé vers Jayb, qui signifie « poche ». Le mot « sinus » en latin signifie entre autres « repli de vêtement », et c'est le plus proche équivalent que les traducteurs du Moyen-Âge ont trouvé.

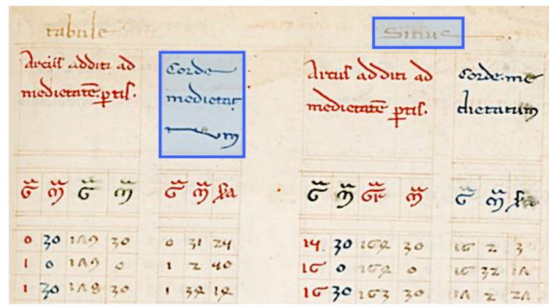
Trigonométrie indienne



27 Tabule Sinus

Les tables de Tolède sont l'œuvre d'un astronome Arabe de la péninsule ibérique. Elles ont été traduites une première fois par Gérard de Crémone au onzième siècle. Ceci est tiré d'un manuscrit du quatorzième siècle. C'est le début d'une table de sinus qui s'étend sur trois pages. Vous voyez que le titre contient bien le mot « sinus ». Par contre la colonne des sinus porte en titre : « corde medietatum », c'est-à-dire « demi-corde ».

Tabule Sinus
Tables de Tolède (ca 1080)

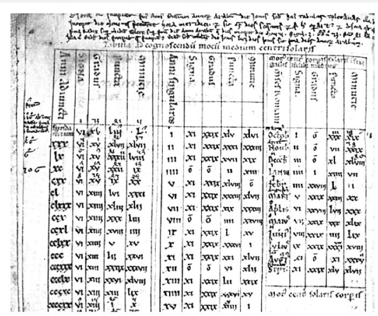


28 Al-Khwārizmī (ca 780–850) Zīj al Sindhind

Je n'ai pas réussi à savoir quel est le premier traducteur à avoir utilisé le mot sinus. Cela a dû se faire au onzième siècle, quand les tables astronomiques arabes ont commencé à être traduites, en particulier en Espagne. Parmi les plus célèbres, on trouve les « tables indiennes » (c'est ce que signifie le titre Zij al Sindhind) d'al-Khwarizmi.

À propos de tables indiennes, il ne vous aura pas échappé que la table d'Aryabhata avec ses 24 valeurs, n'arrivait pas à la cheville de celle de Ptolémée, pourtant plus ancienne d'au moins trois siècles. Il me semble raisonnable d'en conclure que la trigonométrie des Indiens s'est développée indépendamment de celle des Grecs.

Al-Khwārizmī (ca 780–850) Zīj al Sindhind
Cambridge Corpus Christi College MS 283 (XII[e] siècle)

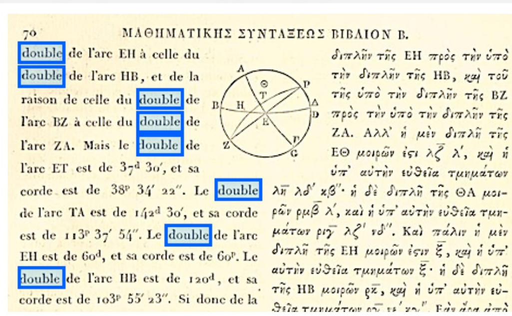


29 La grandeur du plus long jour étant donnée

Au fait pourquoi Ptolémée avait-il besoin d'une table de cordes ? La plupart des calculs astronomiques font appel à une ou plusieurs fonctions trigonométriques. Un des exemples les plus simples consiste à relier la latitude d'un lieu à la durée du jour le plus long. Vous voyez ici un exemple, traité par Ptolémée à grand renfort de cordes. Au vu du nombre d'occurrences du mot « double », vous serez convaincus je pense, de l'utilité de remplacer la corde par le sinus.

D'autres applications relient l'heure du jour, la latitude du lieu, et le jour de l'année. Les formules utilisent chaque fois plusieurs sinus.

La grandeur du plus long jour étant donnée
Ptolémée (ca 85–165) Composition Mathématique, Livre II, chapitre II



70 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

double de l'arc EH à celle du double de l'arc HB, et de la raison de celle du double de l'arc BZ à celle du double de l'arc ZA. Mais le double de l'arc ET est de 37[d] 30′, et sa corde est de 38[p] 34′ 22″. Le double de l'arc TA est de 142[d] 30′, et sa corde est de 113[p] 37′ 54″. Le double de l'arc EH est de 60[d], et sa corde est de 60[p]. Le double de l'arc HB est de 120[d], et sa corde est de 103[p] 55′ 23″. Si donc de la

διπλῆν τῆς ΕΗ πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΗΒ, καὶ τοῦ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΒΖ πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΖΑ. Ἀλλ' ἡ μὲν διπλῆ τῆς ΕΘ μοιρῶν ἐστι λζ̄ λ′, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων λη̄ λδ′ κβ″· ἡ δὲ διπλῆ τῆς ΘΑ μοιρῶν ρμβ̄ λ′, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων ριγ̄ λζ′ νδ″. Καὶ πάλιν ἡ μὲν διπλῆ τῆς ΕΗ μοιρῶν ἐστιν ξ̄, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων ξ̄· ἡ δὲ διπλῆ τῆς ΗΒ μοιρῶν ρκ̄, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων ργ̄ νε′ κγ″. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ

30 Canon sinuum (1613)

La trigonométrie en tant que discipline n'est pas allée au-delà des traductions arabes avant le quinzième siècle. Ce n'est d'ailleurs qu'à la toute fin du seizième siècle que Pitiscus a introduit le mot « trigonométrie ». Le même Pitiscus est l'auteur d'une impressionnante table de sinus rapportée à un rayon de 10^{15}. Vous en voyez la page de titre. Elle a été publiée l'année de la mort de Pitiscus, 1613. Vous vous souvenez de ce qui s'est passé l'année suivante ?

Allons allons, un petit effort : en 1615 Louis XIII a épousé Anne d'Autriche et la mère de Kepler a été arrêtée ; en 1616, Shakespeare et Cervantes sont morts tous les deux à quelques semaines d'intervalle ; mais en 1614 hein ?

Canon sinuum (1613)
Bartholomaeus Pitiscus (1561–1613)


THESAVRVS MATHEMATICVS
sive
CANON SINUUM
AD RADIUM
1. 00000. 00000. 00000.
ET AD DENA QVÆQVE SCRVPVLA
secunda Quadrantis:
UNA CUM SINIBUS PRIMI
ET POSTREMI GRADUS, AD
EVNDEM RADIVM, ET AD SINGVLA
scrupula secunda Quadrantis.
IAM OLIM QVIDEM INCREDIBILI LABORE
AT NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITVS
A
BARTHOLOMÆO PITISCO
GRUNBERGENSI SILESIO.

31 Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (1614)

1614, c'est la date de parution de la « Description de l'admirable table des logarithmes » de John Napier. Quel rapport entre les logarithmes et la trigonométrie ? Napier l'avait bien vu, puisqu'il met en avant la trigonométrie, dans le titre même de son ouvrage. Il ne s'était pas trompé sur l'importance de calculer, non seulement des logarithmes ordinaires, mais encore des logarithmes de sinus et de tangentes. Il en donne des exemples et en décrit les applications.

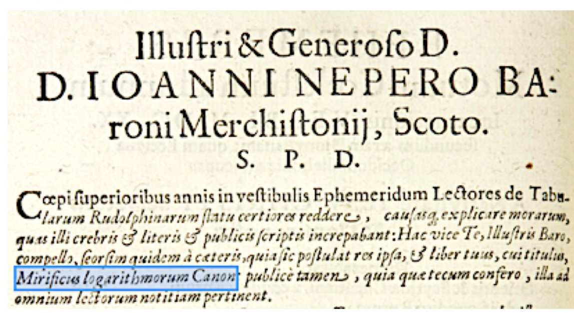
Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (1614)
John Napier (1550–1617)


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

32 Ephemerides 1620 (1619)

Cinq ans plus tard, Kepler dédie son éphéméride à l'« illustre et généreux John Napier, Baron de Merchiston, écossais ». Dans la préface il explique que ses tables rudolphines n'auraient pas pu être calculées sans les logarithmes. Elles ont aussi permis un autre exploit, la troisième loi de Kepler. Désormais, la trigonométrie et donc les calculs astronomiques ne sont plus seulement liés aux tables de sinus ou de tangentes, mais aux tables de leurs logarithmes. Mais cela, vous le saviez déjà non ?

Ephemerides 1620 (1619)
Johann Kepler (1571–1630)


Illustri & Generoso D.
D. IOANNI NEPERO BA:
roni Merchistonij, Scoto.
S. P. D.
Cœpi superioribus annis in vestibulis Ephemeridum Lectores de Tabularum Rudolphinarum statu certiores reddere, causasq; explicare morarum, quas illi crebris & literis & publicis scriptis increpabant: Hac vice Te, Illustris Baro, compello, seorsim quidem à cæteris, quia sic postulat res ipsa, & liber tuus, cui titulus, Mirificus logarithmorum Canon publicè tamen, quia quæ tecum confero, illa ad omnium lectorum notitiam pertinent.

33 références

Vous pouvez maintenant calculer une table de sinus et une table de logarithmes, par les méthodes anciennes. Rien ne vous empêche donc de calculer votre propre table de logarithmes de sinus, pour refaire les calculs de Kepler.

Mais n'en déduisez pas pour autant que c'est ce qui est programmé dans votre calculatrice. Au dix-huitième siècle les approximations polynomiales et la méthode des différences divisées de Newton ont remplacé les méthodes anciennes. Définitivement ? Non bien sûr. Depuis le siècle dernier, les programmes de calcul sont basés sur l'algorithme CORDIC, qui est encore différent. Allez savoir combien de temps il durera…

références

- B. Datta, A. N. Singh (1983) Hindu trigonometry, *Indian Journal of History of Science*, 18(1), 39–108
- M.-T. Debarnot (1997) Trigonométrie, *in R. Rashed, R. Morelon eds. Histoire des sciences arabes II*, Paris : Seuil, 163–198
- A. Djebbar (2004) La phase arabe de l'histoire de la trigonométrie, *in É. Hébert ed. Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Paris : Ellipses, 415–434
- T. Hayashi (1997) Āryabhaṭa's rule and table for sine-differences, *Historia Mathematica*, 24, 396–406
- A. Keller (2006) *Expounding the mathematical seed*, Basel : Birkhäuser
- B. A. Rosenfeld, J. P. Hogendijk (2003) A mathematical treatise written in the Samarquand observatory of Ulugh Beg, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 15, 25–65