Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Vérité éternelle et divine

histoires d'algèbre

Vérité éternelle et divine

l'algèbre des vecteurs

hist-math.fr Bernard YCART

C'est une histoire compliquée, et plutôt triste que celle de l'algèbre des vecteurs. Compliquée, parce que plusieurs théories différentes sont apparues entre 1835 et 1845. C'est une histoire triste, parce que l'importance de ce qui avait été fait n'a été comprise que longtemps après : les auteurs n'en ont pas retiré de leur vivant la renommée qu'ils en attendaient.

1 Hermann Günther Grassmann (1809–1877)

Hermann Günther Grassmann (1809–1877)

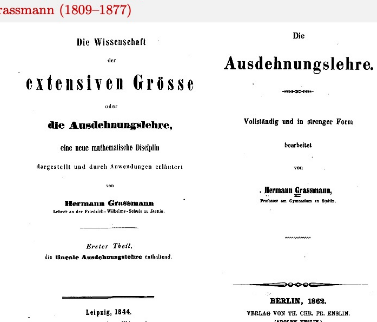
Prenez Hermann Grassmann par exemple. Il était professeur de collège à Stettin, sa ville natale, et il y enseignait un peu de tout, du latin à la physique. Il s'était lancé dans l'aventure des vecteurs avec tout son enthousiasme de trentenaire, et annonçait qu'il allait passer tout le reste de sa carrière à développer sa théorie, avec toutes les applications qu'il entrevoyait.

2 Ausdehnungslehre (1844–1862)

Cela, il l'annonçait dans la préface de sa théorie de l'extension, en 1844 : c'est l'image de gauche.

Ausdehnungslehre (1844–1862)

Hermann Günther Grassmann (1809–1877)



Die Wissenschaft
der
extensiven Grösse
oder
die Ausdehnungslehre,
eine neue mathematische Disciplin
dargestellt und durch Anwendungen erläutert
von
Hermann Grassmann
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Erster Theil,
die lineale Ausdehnungslehre enthaltend.

Leipzig, 1844.
Verlag von Otto Wigand.

Die
Ausdehnungslehre.
Vollständig und in strenger Form
bearbeitet
von
Hermann Grassmann,
Professor am Gymnasium zu Stettin.

BERLIN, 1862.
VERLAG VON TH. CHR. FR. ENSLIN.
(ADOLPH ENSLIN.)

Échec complet. Une louange par-ci, une critique par là, mais globalement un silence assourdissant. Personne n'avait lu son livre de 1844. Alors, conscient des problèmes de forme, il fait une nouvelle tentative, dix-sept ans plus tard. La nouvelle page de titre est celle de droite. Dans la préface, il rappelle sa première tentative, et en détaille longuement l'échec. Cette fois-ci, il a abandonné les longues digressions philosophiques, adopté un style plus conforme au discours mathématique de son temps. Mais sur le fond, il ne cède rien.

« Je sais – dit-il – et je me sens obligé d'affirmer (au risque de paraître arrogant) que même si ce travail devait encore rester inutilisé pour encore 17 ans ou même plus, viendra tout de même un jour où il sera tiré de la poussière de l'oubli, et où des idées actuellement en sommeil porteront leurs fruits. »

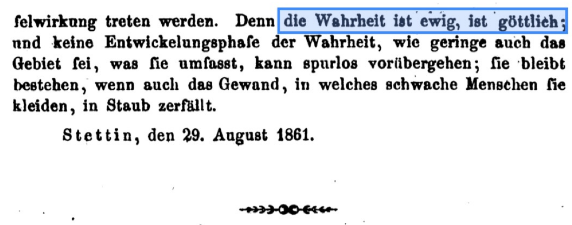
3 Denn die Warheit ist ewig, ist göttlich

« Car la vérité est éternelle, elle est divine ; et aucune phase dans le développement de la vérité, aussi petit que soit le domaine, ne peut disparaître sans laisser de trace. Elle restera, même si les vêtements dont les faibles humains l'ont habillée tombent en poussière. »

La preuve qu'il avait raison, c'est que je suis en train de vous raconter son histoire, et même de vous dire que dans toutes les théories d'algèbre linéaire du dix-neuvième siècle, la sienne était la plus complète et a fini par s'imposer. Mais il a fallu longtemps, et il n'a su que peu avant de mourir, que les vêtements dont il l'avait habillée, ne tomberaient pas en poussière. Il a juste eu le temps de réviser son livre de 1844 pour une nouvelle édition qui est parue en 1878, un an après sa mort.

Entre-temps, que s'était-il donc passé ?

Denn die Warheit ist ewig, ist göttlich
Grassmann, Ausdehnungslehre (1862)

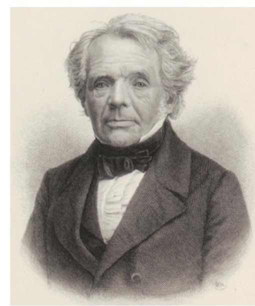

felwirkung treten werden. Denn die Wahrheit ist ewig, ist göttlich; und keine Entwickelungsphaſe der Wahrheit, wie geringe auch das Gebiet ſei, was ſie umfasst, kann spurlos vorübergehen; ſie bleibt bestehen, wenn auch das Gewand, in welches schwache Menschen ſie kleiden, in Staub zerfällt.

Stettin, den 29. August 1861.

4 August Ferdinand Möbius (1790–1868)

Les choses avaient plutôt bien commencé pour Grassmann. Il avait envoyé une copie de son livre à Möbius, qui en avait pensé beaucoup de bien.

August Ferdinand Möbius (1790–1868)



5 Möbius Strip I (1961)

Möbius, vous le connaissez mieux que Grassmann, à cause de son ruban. Oui bon, comme d'habitude, le ruban de Möbius n'est pas vraiment de Möbius.

Möbius Strip I (1961)
M.C. Escher (1898–1972)

6 Einseitige Polyëder (1858)

Einseitige Polyëder (1858)
August Ferdinand Möbius (1790–1868)

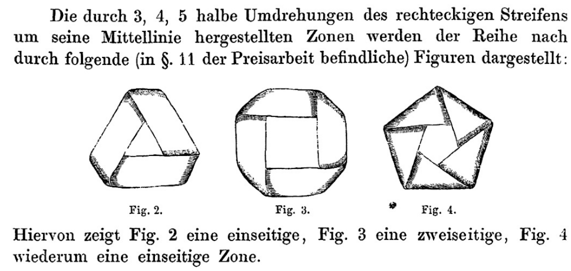

Die durch 3, 4, 5 halbe Umdrehungen des rechteckigen Streifens um seine Mittellinie hergestellten Zonen werden der Reihe nach durch folgende (in §. 11 der Preisarbeit befindliche) Figuren dargestellt:

Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Hiervon zeigt Fig. 2 eine einseitige, Fig. 3 eine zweiseitige, Fig. 4 wiederum eine einseitige Zone.

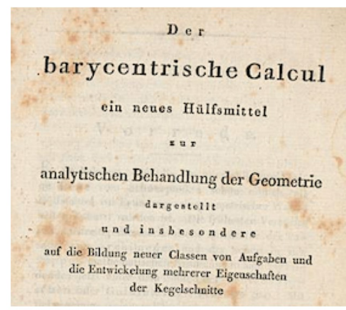
C'est vrai, on le trouve dans un mémoire qu'il a écrit pour un prix de l'Académie des sciences de Paris en 1858. Mais son compatriote Listing y avait pensé quelques mois avant lui.

En outre, il est bien possible que les deux aient tiré leur inspiration de Gauss, qui n'a rien publié comme d'habitude. De toutes façons, il se pourrait aussi que l'objet existe depuis beaucoup plus longtemps : certains le voient représenté sur des mosaïques romaines.

En 1844, Möbius était connu pour ceci.

7 Der barycentrische Calcul (1827)

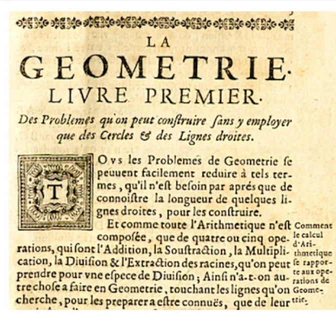
Der barycentrische Calcul (1827)
August Ferdinand Möbius (1790–1868)


Der
barycentrische Calcul
ein neues Hülfsmittel
zur
analytischen Behandlung der Geometrie
dargestellt
und insbesondere
auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte

Le calcul barycentrique. Le livre avait été publié en 1827. Au-delà de l'interprétation mécanique concrète, le livre répondait en partie à un vieux rêve, qui datait de Leibniz.

8 La Géométrie (1637)

La Géométrie (1637)
René Descartes (1596–1650)


LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.
Des Problemes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des Cercles & des Lignes droites.

TOus les Problemes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire à tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longueur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt composée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion; Ainſi n'a-t-on autre choſe a faire en Geometrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que de leur

Comment le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Descartes avait fait un grand pas en montrant comment utiliser l'algèbre pour calculer sur des figures de géométrie ; ce que nous appelons les coordonnées cartésiennes. Pendant le dix-septième, puis tout le dix-huitième siècle, l'outil avait été développé, perfectionné, et appliqué. Le calcul différentiel de Newton et Leibniz avait été un accélérateur puissant : de nombreuses questions qui échappaient même à la géométrie des Grecs, pouvaient désormais être résolues par le calcul sur des coordonnées.

Pourtant Leibniz n'était toujours pas satisfait. Voici ce qu'il écrit à Huygens en 1679.

9 Lettre à Huygens (8 septembre 1679)

« Mais après tous les progrès que j'ai faits en ces matières, je ne suis pas encore content de l'algèbre, en ce qu'elle ne donne ni les plus courtes voies, ni les plus belles constructions de géométrie. C'est pourquoi je crois qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique linéaire, qui nous exprime directement *situm* (les lieux), comme l'algèbre exprime *magnitudinem* (les grandeurs). »

En clair, ce que Leibniz reproche à l'algèbre c'est de compliquer artificiellement les calculs géométriques. Il voudrait pouvoir calculer directement sur des figures géométriques, sans passer par un système de coordonnées.

Alors il développe ce qu'il appelle une « Caractéristique », c'est-à-dire une analyse par symboles. Il l'envoie à Huygens, qu'il considère comme son maître, au moins en mathématiques. La réponse est plutôt décevante.

Lettre à Huygens (8 septembre 1679)
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Mais apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres, je ne suis pas encore content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ni les plus belles constructions de Geometrie. C'est pour quoy je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique linéaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'Algebre exprime *magnitudinem*.

10 Lettre à Leibniz (22 novembre 1679)

« J'ai examiné attentivement ce que vous me mandez touchant votre nouvelle caractéristique, mais, pour vous l'avouer franchement, je ne conçois pas, par ce que vous m'en étalez, que vous y puissiez fonder de si grandes esperances. Car vos exemples des lieux ne regardent que des verités qui nous étaient déjà fort connues. »

Presque deux siècles plus tard, Möbius veut voir la théorie de l'extension de Grassmann, comme une concrétisation du rêve de Leibniz. Comme il souhaite encourager Grassmann, il se débrouille pour qu'il obtienne en 1846 un prix de la société Jablonowski à Leipzig. À l'occasion du bicentenaire de la naissance de Leibniz, ce prix était destiné à récompenser un continuateur de Leibniz, et Grassmann fait apparaître sa théorie de l'extension comme une analyse géométrique dans la lignée de la caractéristique géométrique de Leibniz.

En fait la théorie de l'extension était, comme notre algèbre linéaire, une théorie abstraite et générale, dont la géométrie n'était qu'une matérialisation. Mais cela, c'était beaucoup trop tôt pour le faire admettre.

Lettre à Leibniz (22 novembre 1679)
Christiaan Huygens (1629–1695)

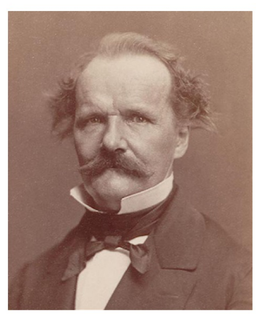
J'ay examiné attentivement ce que vous me mandez touchant vostre nouvelle Characteristique, mais, pour vous l'avouer franchement, je ne conçois pas, par ce que vous m'en estalez, que vous y puissiez fonder de si grandes esperances. Car vos exemples des Lieux ne regardent que des veritez qui nous estoient desia fort connues.

11 Ernst Kummer (1810–1893)

Presque deux siècles après Leibniz, la théorie de Grassmann a été rejetée par Kummer, dans des termes analogues à ceux que Huygens avait employés pour Leibniz.

Kummer, c'est le grand spécialiste de l'arithmétique au dixneuvième siècle, celui qui est allé le plus loin dans la démonstration du dernier théorème de Fermat, et dont les travaux ont ouvert la voie à la théorie des idéaux. Force est de constater que sur la théorie de Grassmann, il a manqué de perspicacité.

Ernst Kummer (1810–1893)



12 Rapport sur la théorie de l'extension (12 juin 1847)

« L'idée de base pour ceci [. . .] était déjà auparavant, souvent exprimée et était appliquée de plusieurs manières, sans que l'on ait trouvé nécessaire pour cela de créer une nouvelle discipline mathématique.

[. . .] En ce qui concerne d'abord la forme ou la représentation du traité, alors il faut en général convenir d'un échec ; car bien que le style soit bon et fait montre d'esprit, il manque partout un regroupement convenable de la matière où les points principaux se distingueraient clairement des choses de moindre importance. »

Et Kummer conclut défavorablement sur la candidature de Grassmann à une poste universitaire. Grassmann devra se contenter d'un poste de professeur de lycée.

Rapport sur la théorie de l'extension (12 juin 1847)
Ernst Kummer (1810–1893)

L'idée de base pour ceci [. . .] était déjà auparavant souvent exprimée et était appliquée de plusieurs manières, sans que l'on ait trouvé nécessaire pour cela de créer une nouvelle discipline mathématique.

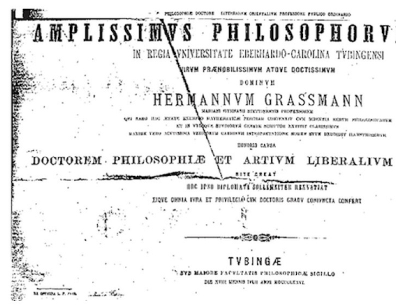
[. . .] En ce qui concerne d'abord la forme ou la représentation du traité, alors il faut en général convenir d'un échec ; car bien que le style soit bon et fait montre d'esprit, il manque partout un regroupement convenable de la matière où les points principaux se distingueraient clairement des choses de moindre importance.

13 Doctorat Honoris Causa (18 juillet 1876)

Une nouvelle demande en 1862 ayant été rejetée et la nouvelle version de son Ausdehnungslehre n'ayant pas plus de succès que l'ancienne, Grassmann se tourne vers la philologie, et plus particulièrement le sanscrit. Il publie dix ans plus tard une traduction et un monumental dictionnaire du Rig Veda, qui lui ont enfin valu, deux ans avant sa mort, un titre de docteur Honoris Causa accordé par l'université de Tübingen. Voici le certificat.

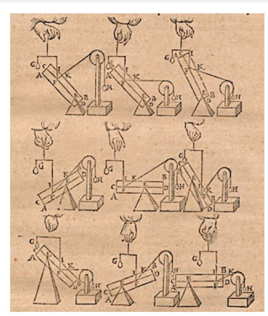
Comment expliquer que la notion d'espace vectoriel, qui nous paraît aussi naturelle, ait eu autant de difficulté à s'imposer ? Serait-ce que la notion de vecteur était trop abstraite ? Probablement pas. On parlait depuis longtemps de « rayon vecteur » en termes d'attraction. Un vecteur en mécanique peut symboliser une force, ou une vitesse. La somme de deux vecteurs peut se voir comme la combinaison de deux forces ou de deux mouvements. La combinaison des forces et des mouvements était connue depuis les Grecs. À la fin du seizième siècle, Simon Stevin y apporte un complément théorique.

Doctorat Honoris Causa (18 juillet 1876)
Université de Tübingen


AMPLISSIMVS PHILOSOPHORVM
IN REGIA VNIVERSITATE EBERHARDO-CAROLINA TVBINGENSI
VIRVM PRAENOBILISSIMVM ATQVE DOCTISSIMVM
DOMINVM
HERMANNVM GRASSMANN
DOCTOREM PHILOSOPHIAE ET ARTIVM LIBERALIVM
TVBINGAE

14 De Beghinselen der weeghconst (1586)

De Beghinselen der weeghconst (1586)
Simon Stevin (1548–1620)



Son livre s'appelle « Les principes de l'art de peser », et il est paru en 1586. Stevin y montre comment déterminer toutes sortes d'équilibres, qu'il symbolise par des jeux de poids, de ficelles et de poulies, comme ceux que vous voyez ici.

Pour les plans inclinés, il dispose de ce qui serait pour nous la décomposition d'un poids en composante tangentielle et orthogonale au plan. Mais ce n'est pas ainsi qu'il l'exprime.

15 Wonder en is gheen Wonder

Pour justifier le fait que la force dépend du sinus de l'angle d'inclinaison du plan, il utilise une expérience de pensée extrêmement astucieuse qui a fait l'admiration des siècles suivants.

Wonder en is gheen Wonder
Stevin, De Beghinselen der weeghconst (1586)

Lui-même en est plutôt fier, car il l'utilise comme image de titre du livre, accompagnée d'une devise en hollandais, qui se traduit en gros par : le merveilleux n'est pas miraculeux.

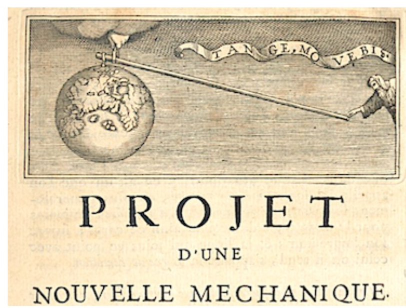
Voici l'argument. Il met sur deux plans inclinés d'angles différents mais de même hauteur, des poids proportionnels à la longueur, symbolisés ici par quatre billes à gauche et deux billes à droite. Ensuite il dit : refermons le collier. Il n'est pas possible qu'il se mette à tourner, car sinon, cela ferait un mouvement perpétuel. Donc, les billes à gauche et à droite s'équilibrent. Élégant, vous ne trouvez pas ?

Oh, bien sûr, ce n'est pas exactement la règle du parallélogramme, même si on s'en approche. Cette règle ne sera acquise qu'un siècle plus tard, plus précisément en 1687.

16 Projet d'une nouvelle méchanique (1687)

Cette année-là paraît le « Projet d'une nouvelle mécanique » de Pierre Varignon. Vous constatez sur la gravure de titre qu'on a enfin donné à Archimède un point d'appui pour soulever le monde. On y trouve, clairement énoncée et abondamment illustrée, la règle du parallélogramme pour toutes sortes de compositions de forces.

Projet d'une nouvelle méchanique (1687)
Pierre Varignon (1654–1722)



Il faut l'avouer, Varignon joue de malchance ; parce que 1687 est aussi l'année de parution des « Principia Naturalis » de Newton. Newton n'est pas du genre à délayer. Il ne lui faut qu'un tout petit corollaire pour exprimer ce qui a pris des siècles aux autres. Voici ce corollaire dans la traduction d'Émilie du Châtelet.

17 Philosophiae naturalis principia mathematica (1687)

Philosophiae naturalis principia mathematica (1687)
Newton, traduction Émilie du Châtelet (1759)

« Un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il aurait parcouru ses côtés séparément. »

DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE. 39

COROLLAIRE I.

Un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la Diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il auroit parcouru ses côtés séparément.

Voilà, pas besoin d'en dire plus. Armé de la règle du parallélogramme, ajouter entre eux des segments orientés n'est plus un problème. Les multiplier par un scalaire est aussi une trivialité. Mais qu'y a-t-il d'autre dans un espace vectoriel ? Rien me direz-vous. Pour nous, c'est vrai. Mais au dix-neuvième siècle, on voulait plus : on cherchait à définir le *produit* de deux segments.

18 Jean-Robert Argand (1768–1822)

Jean-Robert Argand (1768–1822)

Les premiers à réussir avaient été le Norvégien Wessel et le Suisse Argand. La représentation des nombres complexes donnait une interprétation géométrique de la somme et du produit de deux complexes, vus comme des vecteurs dans le plan. Mais comment passer à la dimension supérieure ?

19 William Rowan Hamilton (1805–1865)

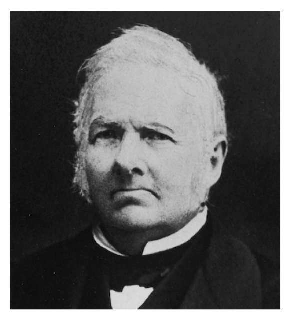
William Rowan Hamilton (1805–1865)

Le premier à réussir avait été Hamilton, en 1843, juste un an avant la parution de la théorie de l'extension. Il avait cherché pendant des années à définir un produit de vecteurs en dimension trois, avant de se rendre compte qu'il lui fallait associer un scalaire à un vecteur de l'espace.

Mais je ne vais pas vous raconter deux fois ses amours malheureux tout de même !

20 Giusto Bellavitis (1803–1880)

Giusto Bellavitis (1803–1880)



Avant Grassmann et Hamilton, il y avait eu Bellavitis. Lui avait compris sur les vecteurs un point fondamental qui est qu'un vecteur n'est pas tout à fait un segment orienté, dans la mesure où deux segments orientés peuvent représenter le même vecteur. Cette « égalité à une translation près », il l'appelle « équipollence ». Il n'était pas question à l'époque de dire que c'était une relation d'équivalence, ni de définir les vecteurs comme des classes d'équivalence. Mais l'idée était bien celle là.

21 Calcolo delle equipollenze (1835)

Calcolo delle equipollenze (1835)
Giusto Bellavitis (1803–1880)

Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica (Calcolo delle equipollenze); *Memoria di* Giusto Bellavitis *di Bassano*.

1. Quando io osservava una legge a cui sono sottoposte le scambievoli posizioni dei punti di un piano, e ne deduceva un general metodo per iscoprire nuove proprietà di tali punti *derivandole* (Vegg. in questi Annali 5.° Bim. 1832, pag. 250) da quelle più semplici e meglio conosciute dei punti posti sopra una sola retta, io era ancor lontano dall' immaginare la generalità che poteva darsi a quel metodo, ed i vantaggi che esso poteva arrecare nella risoluzione di gran parte dei problemi della Geometria analitica: nel Settembre 1832 io presentava all'Ateneo veneto una breve raccolta di proprietà delle sezioni coniche esposte col mio nuovo metodo che intitolava delle *equazioni geometriche* ossia *equipollenze* (Vegg. Poligrafo di Verona, Gennajo 1833 pag. 53): in seguito riconobbi che col mezzo di queste lo stu-

Cet article date de 1835. C'est le premier où il explique son calcul des équipollences en général. Au début, il raconte la genèse de son idée, qu'il a d'abord vue en dimension un, avant de comprendre qu'elle s'appliquait aussi en dimensions 2 et 3.

Reconnaissons-le, Bellavitis n'a pas eu beaucoup plus de succès que Grassmann. D'autres après lui ont réinventé la même roue.

22 Matthew O'Brien (1814–1855)

Matthew O'Brien (1814–1855)

Par exemple ce Matthew O'Brien, un Irlandais qui avait été l'élève de Hamilton, et qui a tenté de développer sa propre théorie, indépendante de la dimension trois. Il ignorait les travaux de Grassmann, comme les siens ont été ignorés.

23 Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1888)

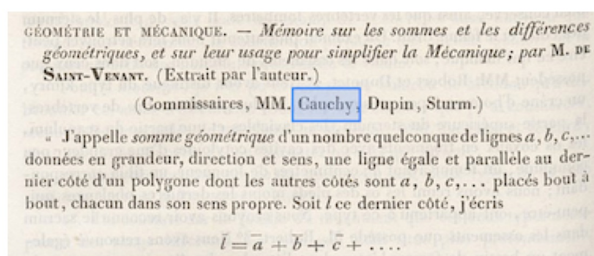
Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1888)

Il y a eu aussi Adhémar Barré de Saint-Venant, que vous voyez ici en habit d'académicien, et en buste.

Il avait hérité de ses origines aristocratiques de fortes convictions, religieuses et politiques, qui n'étaient pas vraiment dans l'esprit de l'École polytechnique où il était rentré à seize ans seulement. Il était de ceux pour qui la Révolution représentait l'antéchrist, et pour qui Napoléon n'était qu'un usurpateur. Si cela lui a valu certains retards de carrière (il n'est devenu académicien qu'à 71 ans), cela ne pouvait que lui attirer la sympathie de Cauchy, qui partageait les mêmes idées.

24 Sommes et différences géométriques (1845)

Sommes et différences géométriques (1845)



GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE. — *Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique; par* M. DE SAINT-VENANT. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Cauchy, Dupin, Sturm.)

« J'appelle *somme géométrique* d'un nombre quelconque de lignes $a, b, c, \ldots$ données en grandeur, direction et sens, une ligne égale et parallèle au dernier côté d'un polygone dont les autres côtés sont $a, b, c, \ldots$ placés bout à bout, chacun dans son sens propre. Soit l ce dernier côté, j'écris

$$\bar{l} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \ldots.$$

En 1845, soit un an seulement après le livre de Grassmann, paraît cet article : « Mémoire sur les sommes et les différences géométriques et sur leur usage pour simplifier la mécanique ». Vous le voyez, Cauchy est un des trois commissaires chargés de présenter l'article à l'Académie.

Comme expliqué au début, les sommes sont définies par la règle du parallélogramme. L'article présente aussi une notion de produit, qui est la surface d'un parallélogramme. Au bilan, des notions moins abstraites, moins complètes, mais assez proches de celles de Grassmann.

Grassmann prend connaissance du mémoire de Saint-Venant en 1847, et puisqu'il ne connaît pas son adresse, il décide d'écrire à l'Académie à l'intention de Cauchy. Cauchy avertit Saint-Venant, un bref échange de lettres s'ensuit, et six ans plus tard paraît un nouveau mémoire de, devinez qui ?

25 Sur les clés algébriques (1853)

Augustin Cauchy. « Sur les clés algébriques ». Cauchy fait de la pub pour l'écriture sous forme de combinaisons linéaires, de ce qu'il appelle les « clefs algébriques ». Ces clés jouent le rôle de qui est pour nous la base d'un espace vectoriel. Cauchy les appelle des « clefs » puisqu'elles ouvrent la porte aux calculateurs et aux quantités nouvelles dit-il.

En tout cas elles n'ouvrent aucune porte à Grassmann, qui n'est même pas cité. Il décide de déposer une réclamation, directement auprès de l'Académie.

Sur les clés algébriques (1853)
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les clefs algébriques;* *par* M. AUGUSTIN CAUCHY. (Suite.)

« Les *clefs algébriques*, telles que je les ai définies, peuvent être considérées comme des quantités véritables. Mais ce sont des quantités dont le rôle est spécial et transitoire, des quantités qui n'apparaissent que passagèrement dans les formules où leurs produits sont définitivement remplacés par d'autres quantités qui n'ont avec elles aucune relation, aucune liaison nécessaire. Elles méritent doublement le nom de clefs, puisqu'elles ouvrent la porte en quelque sorte, non-seulement au calculateur dont elles guident la marche et facilitent les recherches, mais encore aux quantités nouvelles qui, se glissant à leur suite, viennent s'emparer de postes où elles puissent utilement concourir à la démonstration des théorèmes ou à la solution des problèmes que l'on a en vue. C'est ce que l'on a pu déjà reconnaître, en

26 Réclamation (1854)

Réclamation (1854)
Hermann Grassmann (1809–1877)

« Je prie l'Académie des Sciences de vouloir bien prendre connaissance de la réclamation que je me trouve dans le cas de faire à l'occasion des articles de Cauchy et Saint-Venant. »

Grassmann rappelle l'antériorité de sa théorie de l'extension, puis il conclut :

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Extrait d'un Mémoire de* M. GRASSMANN.

« Je prie l'Académie des Sciences de vouloir bien prendre connaissance de la réclamation que je me trouve dans le cas de faire à l'occasion des articles, *Sur les clefs algébriques,* par M. Cauchy, et *De l'interprétation des clefs algébriques et des déterminants,* par M. de Saint-Venant, insérés dans les *Comptes rendus,* tome XXXVI, pages 70, 129, 582. J'ai, dès l'année 1844, publié les principes établis dans ces articles, et les résultats qu'en déduisent les deux géomètres que je viens de nommer. J'ai l'honneur

27 Réclamation (1854)

« Toutes ces recherches sont fondées sur des quantités que j'ai nommées « quantités extensives », et qui ne sont, au fond, autre chose que les « facteurs symboliques » et que les « clefs algébriques » de M. Cauchy.

Mais comme le point de vue sous lequel j'ai envisagé des quantités est tout différent de celui de M. Cauchy, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails. Tel est l'objet de la note que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui au jugement de l'Académie. »

Et comme vous le constatez en bas, l'Académie décide froidement que la « note ne peut, en raison de sa longueur, être reproduite ici in extenso », et qu'elle sera renvoyée à l'examen d'une commission. Et bien sûr, Cauchy est nommé juge, alors qu'il était déjà partie.

Vous ne serez pas étonnés d'apprendre que ladite commission n'a jamais rendu aucune conclusion.

Réclamation (1854)
Hermann Grassmann (1809–1877)

» Toutes ces recherches sont fondées sur des quantités que j'ai nommées *quantités extensives,* et qui ne sont, au fond, autre chose que les *facteurs symboliques* et que les *clefs algébriques* de M. Cauchy. Mais comme le point de vue sous lequel j'ai envisagé ces quantités est tout différent de celui de M. Cauchy, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails. Tel est l'objet de la Note que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui au jugement de l'Académie. »

Cette Note, par sa nature peu susceptible d'analyse, n'a pu, à raison de sa longueur, être reproduite ici *in extenso.* Elle est renvoyée à l'examen d'une Commission composée de MM. Cauchy, Lamé et Binet.

28 Sur les différents genres de multiplication (1855)

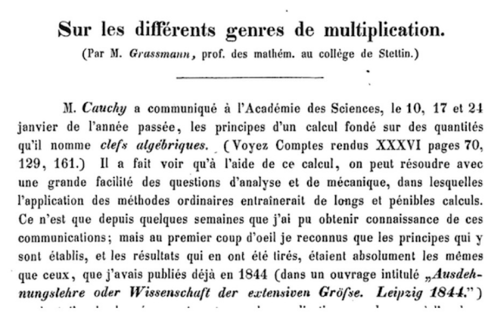
Grassmann qui n'était pas plus étonné que vous, a pris la peine d'écrire un article en français, dans un journal allemand : le Journal de Crelle.

« M. Cauchy a communiqué à l'Académie des Sciences, les principes d'un calcul fondé sur des quantités qu'il nomme « clefs algébriques ». Au premier coup d'œil, je reconnus que les principes qui y sont établis, et les résultats qui en ont été tirés, étaient absolument les mêmes que ceux que j'avais publiés déjà en 1844. »

Il se retient d'ajouter : « et que Cauchy avait depuis longtemps entre les mains ».

Bien ; oublions un peu les querelles de priorité. Comment l'algèbre linéaire de Grassmann, qui avait si mal démarré, a-t-elle fait pour s'imposer finalement, certes longtemps après la mort de tous les acteurs ? Jusqu'à la toute fin du dix-neuvième siècle, on parlait largement plus de quaternions que de Grassmann. Comment la tendance s'est-elle inversée ? C'est dû, me semble-t-il, largement à la pression des enseignants universitaires.

Sur les différents genres de multiplication (1855)
Hermann Grassmann (1809–1877)


Sur les différents genres de multiplication.

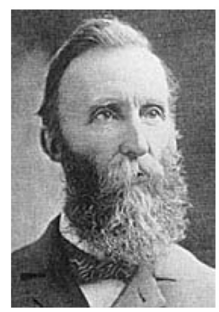
(Par M. *Grassmann*, prof. des mathém. au collége de Stettin.)

M. *Cauchy* a communiqué à l'Académie des Sciences, le 10, 17 et 24 janvier de l'année passée, les principes d'un calcul fondé sur des quantités qu'il nomme *clefs algébriques*. (Voyez Comptes rendus XXXVI pages 70, 129, 161.) Il a fait voir qu'à l'aide de ce calcul, on peut résoudre avec une grande facilité des questions d'analyse et de mécanique, dans lesquelles l'application des méthodes ordinaires entraînerait de longs et pénibles calculs. Ce n'est que depuis quelques semaines que j'ai pu obtenir connaissance de ces communications; mais au premier coup d'oeil je reconnus que les principes qui y sont établis, et les résultats qui en ont été tirés, étaient absolument les mêmes que ceux, que j'avais publiés déjà en 1844 (dans un ouvrage intitulé „*Ausdehnungslehre oder Wissenschaft der extensiven Gröfse. Leipzig 1844.*")

29 Edward Wyllys Hyde (1843–1930)

J'ai choisi l'un d'entre eux, pour son point de vue particulièrement clair. Il s'agit d'Edward Hyde. Il n'a pas laissé de trace particulière dans l'histoire des mathématiques. Il a passé toute sa carrière à l'université de Cincinatti, dans l'Ohio.

Edward Wyllys Hyde (1843–1930)

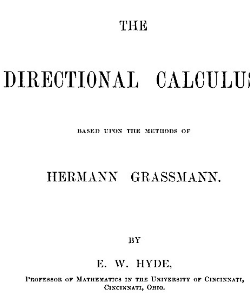


30 The directional calculus (1890)

En 1890, il a écrit un livre d'enseignement , « le calcul directionnel, basé sur les méthodes de Hermann Grassmann ».

Voici ce qu'il dit dans la préface.

The directional calculus (1890)
Edward Wyllys Hyde (1843–1930)


THE

DIRECTIONAL CALCULUS,

BASED UPON THE METHODS OF

HERMANN GRASSMANN.

BY

E. W. HYDE,

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CINCINNATI, CINCINNATI, OHIO.

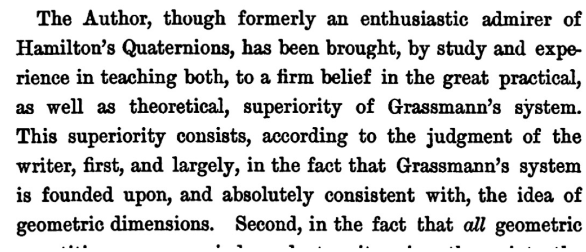
31 an enthusiastic admirer of Hamilton’s quaternions

« L’auteur, bien qu’ancien admirateur des quaternions de Hamilton, a été amené, à la fois par l’étude et l’expérience de l’enseignement, à croire fermement en la supériorité pratique autant que théorique, du système de Grassmann. Cette supériorité consiste, en ce que le système de Grassmann est fondé sur, et absolument consistant avec, l’idée de dimension géométrique. »

Je crois que Hyde a raison : le nœud du problème était la notion de dimension. Au temps de Grassmann et Hamilton, la droite le plan et l’espace étaient trois entités différentes. Ce n’est que graduellement, que l’on s’est habitué à les voir comme des cas particuliers d’une même notion. Si la droite est de dimension 1, le plan de dimension 2, et l’espace physique de dimension 3, alors pourquoi ne pas aller au-delà ?

an enthusiastic admirer of Hamilton’s quaternions

Hyde, The directional calculus (1890)



The Author, though formerly an enthusiastic admirer of Hamilton’s Quaternions, has been brought, by study and experience in teaching both, to a firm belief in the great practical, as well as theoretical, superiority of Grassmann’s system. This superiority consists, according to the judgment of the writer, first, and largely, in the fact that Grassmann’s system is founded upon, and absolutely consistent with, the idea of geometric dimensions. Second, in the fact that *all* geometric

32 Edwin Abbott (1838–1926)

Un des premiers à poser la question est cet austère clergyman britannique. Il a écrit des livres de théologie, et aussi un livre de science-fiction : Flatland.

Edwin Abbott (1838–1926)

33 Flatland (1884)

La page de titre résume assez bien le propos. Il s’agit d’un roman à beaucoup de dimensions. À gauche, vous voyez écrit « aucune dimension », c’est « pointland », à droite « une dimension », c’est lineland. En dessous, « deux dimensions Flatland », puis « trois dimensions, spaceland ». Dans le nuage sous le titre flottent « cinq, six, sept, huit, neuf dimensions ». L’auteur est censé être « A Square », c’est-à-dire un carré, qui vit à deux dimensions, donc à Flatland. Il est alerté par une sphère qui traverse Flatland en apparaissant d’abord comme un point, puis un cercle qui grandit, pour ensuite rapetisser.

Dans la demeure pentagonale du héros carré, il y a des chambres pour ses fils qui sont des pentagones, et pour ses petits-fils les hexagones, tandis que les serviteurs sont des triangles. Ils sont tout de même plus visibles que sa femme et sa fille qui ne sont que des segments. C’est vous dire le biais sexiste de l’époque.

Flatland (1884)

Edwin Abbott (1838–1926)

34 Flatland (2007)

Flatland (2007)

Jeffrey Travis

Il a été opportunément corrigé dans ce film d'animation de 2007, pour lequel la fille du héros est un mignon petit hexagone avec un nœud rose.

35 Charles-Ange Laisant (1841–1920)

Charles-Ange Laisant (1841–1920)

En France, cet homme : Charles-Ange Laisant, a joué un rôle particulier dans la diffusion des vecteurs, surtout au niveau de l'enseignement secondaire. Je vous raconte ailleurs sa vision récréative de l'enseignement des mathématiques.

Il avait fait sa thèse sur les quaternions, puis il avait traduit le livre de Bellavitis sur les équipollences, sans avoir connaissance du travail de Grassmann, qu'il a découvert plus tard. Voici quelques extraits de la seconde édition de son livre sur l'enseignement des mathématiques, datée de 1907.

36 La mathématique : Philosophie, Enseignement (1907)

La méthode de Grassmann, mise sous une forme accessible et réduite à des limites raisonnables, devrait aussi être enseignée dans tous les cours de Géométrie analytique. Rien que la connaissance de ses principes essentiels suffirait à lever bien des difficultés, à éclairer bien des sujets, à éviter bien des calculs inutiles.

Et comme Laisant est un incorrigible optimiste, il ajoute :

« Le jour où le calcul géométrique s'imposera dans l'enseignement aussi bien que dans la Science est peut-être plus proche qu'on ne croit. Quand auront disparu certaines générations, disparaîtront du même coup certaines résistances. »

La mathématique : Philosophie, Enseignement (1907)

Charles-Ange Laisant (1841–1920)

La méthode de Grassmann, mise sous une forme accessible et réduite à des limites raisonnables, devrait aussi être enseignée dans tous les cours de Géométrie analytique. Rien que la connaissance de ses principes essentiels suffirait à lever bien des difficultés, à éclairer bien des sujets, à éviter bien des calculs inutiles.

[...] Le jour où le calcul géométrique s'imposera dans l'enseignement aussi bien que dans la Science est peut-être plus proche qu'on ne croit. Quand auront disparu certaines générations, disparaîtront du même coup certaines résistances.

37 références

Vous savez ce que j'aime bien chez Laisant ? C'est qu'il ne mâche pas ses mots. Voici une autre citation de 1907.

« Comme l'enseignement de l'algèbre élémentaire est incomplet à un tel point qu'il ne comprend même pas l'étude des fonctions circulaires, comme celui de la géométrie a consisté pendant des siècles à dicter Euclide et à le recopier, on a bien été forcé de former un amalgame composite sans suite, qu'on a décoré d'un nom particulier. »

Voilà : ça, c'est dit. Je me demande ce qu'il penserait de notre dernière réforme de l'enseignement des mathématiques. Pas vous ?

références

- J. Auvinet (2011) *Charles-Ange Laisant, Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841–1920)*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes
- M. J. Crowe (1985) *A history of vector analysis*, New York : Dover
- J.-L. Dorier (2000) Originalité et Postérité : l'Ausdehnungslehre de Hermann Günther Grassmann (1844), *Philosophia Scientiæ*, 4(1), 3–45
- D. Flament (2005) H. G. Grassmann et l'introduction d'une nouvelle discipline mathématique : l'Ausdehnungslehre, *Philosophia Scientiæ*, CS5, 81–141
- H. J. Petsche (2009) *Hermann Grassmann biography*, Basel : Birkhäuser