

0 Où tout a commencé

Nous allons nous rendre là où tout a commencé, en Mésopotamie, il y a très longtemps. Prenez la durée qui nous sépare de Pythagore, reportez-là encore avant Pythagore, c'est de ce temps-là dont nous allons parler : 3000 ans avant notre ère.

Je ne vais pas vous résumer l'ensemble des connaissances que deux siècles de recherches ont apportées sur la Mésopotamie. D'ailleurs on trouve facilement en ligne quantité d'articles, de livres et de conférences. En particulier par Christine Proust qui vous en apprendra beaucoup plus long que moi.

Allons-y ! Il était une fois Outa-Napishtim. Il vivait une vie éternelle au-delà des eaux de la mort, et c'est lui qui raconte.

histoires d'arithmétique

Où tout a commencé

L'invention des nombres



hist-math.fr

Bernard YCART

1 L'épopée de Gilgamesh (ca. 3000 av. J.-C.)

« Ea, le seigneur de l'eau sous la terre, source de toutes les connaissances magiques, m'avertit en songe. Il m'ordonna de construire un bateau et me prévint que le déluge durerait sept jours. Sur ses conseils, je démolis ma maison de roseaux et construisis un bateau couvert où je rassemblai la semence de tous les êtres vivants. »

L'épopée de Gilgamesh (ca. 3000 av. J.-C.)

Outa-Napishtim

Ea, le seigneur de l'eau sous la terre, source de toutes les connaissances magiques, m'avertit en songe. Il m'ordonna de construire un bateau et me prévint que le déluge durerait sept jours. Sur ses conseils, je démolis ma maison de roseaux et construisis un bateau couvert où je rassemblai la semence de tous les êtres vivants.

2 L'épopée de Gilgamesh (ca. 3000 av. J.-C.)

« Puis je lâchai un corbeau. L'oiseau prit son envol. Il vit que les eaux s'étaient retirées. Il trouva de la nourriture, se posa sur la terre et ne revint plus. Alors je lâchai aux quatre vents tout ce que le bateau avait sauvé des eaux du Déluge puis j'offris un sacrifice aux dieux. »

Ça ne vous rappelle rien cette histoire ? À part qu'il ne s'appelle pas Noé et que c'est un corbeau et pas une colombe qui ne revient pas, vous connaissiez déjà. Eh oui, sauf que ce récit est bien antérieur à l'écriture de l'ancien testament.

L'épopée de Gilgamesh (ca. 3000 av. J.-C.)

Outa-Napishtim

Puis je lâchai un corbeau. L'oiseau prit son envol. Il vit que les eaux s'étaient retirées. Il trouva de la nourriture, se posa sur la terre et ne revint plus. Alors je lâchai aux quatre vents tout ce que le bateau avait sauvé des eaux du Déluge puis j'offris un sacrifice aux dieux.

3 Gilgamesh et Enkidu (ca. 3000 av. J.-C.)

C'est la toute première épopée de l'humanité, plus de 2000 ans avant Homère. L'épopée de Gilgamesh et de son double Enkidu, auteurs de toutes sortes d'exploits,

Gilgamesh et Enkidu

épopée de Gilgamesh (ca. 3000 av. J.-C.)



4 Enkidu étouffant un lion (ca. 3000 av. J.-C.)

Comme par exemple d'étouffer un lion à mains nues. Pour vous dire à quel point c'est un héros et qu'il a réussi, il a même une Rolex au poignet.

Enkidu étouffant un lion

épopée de Gilgamesh (ca. 3000 av. J.-C.)

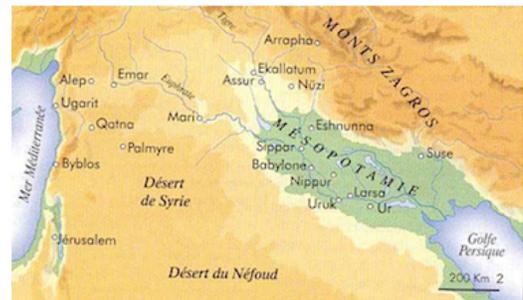


5 Mésopotamie

Oui l'histoire a commencé entre les deux fleuves, le Tigre et l'Euphrate. Mais qui dit histoire dit mémoire transmise : il n'y a eu histoire que parce qu'il y a eu écriture.

Mésopotamie

entre Tigre et Euphrate



6 Gilgamesh et Enkidu

Cette fameuse écriture cunéiforme qui s'écrivait à la pointe du roseau sur des tablettes d'argile. C'est sur des tablettes comme celle-ci qu'on peut lire encore aujourd'hui les aventures de Gilgamesh et Enkidu.

Gilgamesh et Enkidu

Tablette V, Sulaymaniyah Museum, Iraqi Kurdistan



7 La tour de Babel (1563)

Le mythe de Gilgamesh n'est pas le seul emprunt mésopotamien de la Bible. Il y a aussi la tour de Babel.

La tour de Babel (1563)
Pieter Bruegel l'Ancien (1525–1569)



8 La Ziggurat de Babylone (ca. 1000 av. J.-C.)

Elle a probablement été inspirée par la Ziggurat de Babylone, qui frappait les imaginations des contemporains par ses dimensions : 7 étages, 91 mètres de côté à la base. On l'appelait « Etemanki », soit « plate-forme de fondation du ciel et de la terre ».

Elle a disparu depuis longtemps. Si on a pu imaginer la reconstitution que vous voyez, c'est parce que la trace écrite en a été conservée, sur la tablette de l'Esagil, qui donne ses dimensions sous forme de problème mathématique.

La Ziggurat de Babylone (ca. 1000 av. J.-C.)
Etemanki, Tablette de l'Esagil (229 av. J.C)



9 Hammurabi (ca. 1800–1750 av. J.-C.)

Hammurabi vivait plus de 1000 ans après l'invention de l'écriture. Son règne a duré 43 ans, de 1792 à 1750 avant notre ère.

Hammurabi (ca. 1800–1750 av. J.-C.)



10 Le code d'Hammurabi

Il a laissé le premier code judiciaire de l'histoire. Bien sûr, la justice de l'époque nous semble maintenant barbare, voire totalement irrationnelle. En particulier l'ordalie par le fleuve.

Le code d'Hammurabi
Hammurabi (ca. 1800–1750 av. J.-C.)



11 l'ordalie par le fleuve

« Quiconque porte une accusation contre un homme, et que l'accusé va au fleuve et saute dans le fleuve, s'il coule dans le fleuve l'accusateur prendra possession de sa maison. Mais si le fleuve prouve que l'accusé n'est pas coupable, et qu'il en réchappe sans dommage, alors celui qui a porté l'accusation sera mis à mort, cependant que celui qui a sauté dans le fleuve prendra possession de la maison qui appartenait à son accusateur. »

C'est toujours du code d'Hammurabi que dérive la loi du Talion, le fameux « œil pour œil, dent pour dent ».

12 œil pour œil, dent pour dent

« Si un homme arrache l'œil d'un autre homme, son œil sera arraché.

Si un homme brise un os d'un autre homme, son os sera brisé.

Si un homme brise une dent de son égal, une dent doit lui être brisée aussi. »

Rassurez-vous, si un homme arrache l'œil de l'esclave d'un autre homme, il devra simplement payer la moitié de la valeur de l'esclave.

Pour aussi choquant qu'il nous paraisse, le code d'Hammurabi était un pas décisif dans l'histoire de la justice.

13 qu'il lise ma stèle inscrite

« Que l'homme maltraité qui a un procès vienne devant ma statue de roi de justice, qu'il lise ma stèle inscrite, qu'il entende mes paroles très précieuses, que ma stèle lui montre son cas et qu'il voie son verdict. »

Oui, une justice équitable et codifiée est un progrès majeur dans l'histoire de l'humanité. Ce progrès n'a été possible que parce qu'il y avait une écriture.

14 code d'Hammurabi

Parce que le code d'Hammurabi pouvait être recopié et lu.

Cette invention fondamentale qu'est l'écriture, a des explications multiples. Je vais vous en livrer une, qui à défaut d'être unique, présente l'avantage de relier de façon très plausible l'apparition de l'écriture à l'histoire des mathématiques.

l'ordalie par le fleuve

Code d'Hammurabi (ca. 1750 av. J.-C.)

Quiconque porte une accusation contre un homme, et que l'accusé va au fleuve et saute dans le fleuve, s'il **coule dans le fleuve** l'accusateur prendra possession de sa maison. Mais si le fleuve prouve que l'accusé n'est pas coupable, et qu'il **en réchappe sans dommage**, alors celui qui a porté l'accusation sera mis à mort, cependant que celui qui a sauté dans le fleuve prendra possession de la maison qui appartenait à son accusateur.

œil pour œil, dent pour dent

Code d'Hammurabi (ca. 1750 av. J.-C.)

Si un homme arrache l'œil d'un autre homme, son œil sera arraché.
Si un homme brise un os d'un autre homme, son os sera brisé.
Si un homme brise une dent de son égal, une dent doit lui être brisée aussi.

qu'il lise ma stèle inscrite

Code d'Hammurabi (ca. 1750 av. J.-C.)

Que l'homme maltraité qui a un procès vienne devant ma statue de roi de justice, qu'il **lise ma stèle inscrite**, qu'il entende mes paroles très précieuses, que ma stèle lui montre son cas et qu'il voie son verdict.

code d'Hammurabi

Tablette trouvée à Nippur (ca. 1790 av. J.-C.)



15 Vase de Warka (ca. 3000 av. J.-C.)

Pour qu'il y ait nécessité d'une écriture, il faut qu'il y ait une mémoire à enregistrer, qu'il soit utile de conserver. Ça a été le cas, à partir du moment où une société de redistribution s'est organisée.

Vous en voyez le récit le plus ancien sur ce magnifique vase, le vase de Warka.

Vase de Warka (ca. 3000 av. J.-C.)
trouvé à Uruk, musée de Bagdad



16 Vase de Warka (ca. 3000 av. J.-C.)

Le tiers inférieur du vase représente des paysans en train de travailler la terre, avec production de plantes et d'animaux domestiques.

Vase de Warka (ca. 3000 av. J.-C.)
tiers inférieur



17 Vase de Warka (ca. 3000 av. J.-C.)

Sur le tiers médian, la production est suffisante pour engendrer des excédents, que les producteurs recueillent et apportent au temple comme offrande aux Dieux.

Vase de Warka (ca. 3000 av. J.-C.)
tiers médian



18 Vase de Warka (ca. 3000 av. J.-C.)

Sur le tiers supérieur du vase de Warka, les richesses accumulées dans le temple, sont gérées et éventuellement redistribuées par les prêtres.

Dans une économie où les denrées ne sont plus nécessairement consommées par leurs producteurs, il est indispensable d'avoir un système de décompte et d'enregistrement de ce qui a été donné et reçu. Ce système d'enregistrement est bien antérieur à l'écriture.

Vase de Warka (ca. 3000 av. J.-C.)
tiers supérieur



19 Bulle comptable (ca. 3300 av. J.-C.)

Voici une bulle comptable. C'est une boule d'argile creuse contenant des jetons, qui pouvaient symboliser des quantités de différentes denrées. Une fois la bulle refermée, le compte était scellé, mais si on voulait le vérifier, on ne pouvait le faire qu'en cassant la bulle.

Alors l'idée est venue d'imprimer sur la surface extérieure de la bulle des marques qui symboliseraient le contenu ; de manière à savoir ce qu'elle contenait sans qu'il y ait besoin de la casser.

Ensuite, on s'est dit qu'il n'était pas indispensable de remplir la bulle : des marques sur une tablette d'argile contiendraient exactement la même information.

Bulle comptable (ca. 3300 av. J.-C.)

Suze, époque d'Uruk, Musée du Louvre



20 Jetons de comptabilité (ca. 3300 av. J.-C.)

Vous voyez ici des jetons de formes variées. Les formes correspondaient aux différentes denrées et à leurs quantités. Quand le système des jetons a laissé place aux marques sur les tablettes d'argile, il a fallu des marques pour les quantités, et des marques pour les différentes sortes de denrées. Les premiers nombres seraient donc apparus en même temps que les premiers idéogrammes.

Jetons de comptabilité (ca. 3300 av. J.-C.)

Tello, ancienne Girsu, Musée du Louvre



21 Tablette de compte (ca. 3000 av. J.-C.)

Voici une tablette de compte datant des débuts de l'écriture. Les quantités sont clairement lisibles. Une encoche en forme de lunule est une unité, une encoche ronde une dizaine. Sur une face de la tablette, à gauche sur l'image, vous lisez 5, 5, et 10 en haut, 13, 10 et 5 en bas. À côté de chacun des nombres figure une représentation de ce qui a été dénombré : une sorte d'idéogramme.

L'autre face de la tablette, à droite de l'image, montre le cumul des quantités de la première face : 5 plus 5, 10, 13, 10 plus 5 égale 48, c'est bien ce qui est noté.

Tablette de compte (ca. 3000 av. J.-C.)

VAT 14942, Uruk



22 numération sexagésimale (ca. 3000 av. J.-C.)

Il a fallu une évolution de plusieurs siècles pour passer des idéogrammes et des marques numériques à l'écriture cunéiforme et à la numération sexagésimale.

Un clou vertical est une unité. Un chevron ouvert à droite, une dizaine. Jusqu'à 60, l'écriture des chiffres est cumulative et décimale, comme vous le voyez : autant de chevrons que de dizaines et autant de clous que d'unités.

Mais le nombre 60 est noté à nouveau par un clou, de même que le nombre $1/60$ et le nombre 60^2 . D'où le nom de numération sexagésimale, pour la base 60.

Chaque civilisation qui a mis au point une écriture, a eu un système de numération. La plupart des systèmes étaient en base 10, certains en base 5 ou 20, ce qui se comprend aisément par l'habitude de compter sur ses doigts.

La base 12 a eu aussi ses adeptes. Pourquoi 12 plutôt que 10 ? Deux raisons possibles. D'une part 10 n'a que deux diviseurs propres, alors que 12 en a quatre. D'autre part, chaque doigt a 3 phalanges et si on utilise le pouce pour désigner les phalanges des quatre autres, on compte bien jusqu'à 12.

Il n'existe qu'un seul exemple de civilisation ayant compté en base 60, et c'est la plus ancienne. Pourquoi 60 ? Des quantités d'hypothèses ont été émises, aucune n'a été véritablement démontrée.

23 pourquoi 60 ?

La première hypothèse est l'origine astronomique. Il y a un peu plus de 365 jours dans une année, ce qui a été arrondi à 360. Comme 360 est une base beaucoup trop grande pour être utile en pratique, la base 60 s'est imposée.

Parmi les bases possibles en pratique, 60 est celle qui a le plus de diviseurs. En particulier elle est divisible par les premiers entiers jusqu'à six.

Georges Ifrah a émis l'hypothèse d'une synthèse entre deux peuplades dont l'une utilisait la base 10, l'autre la base 12. Il donne des arguments étymologiques assez convaincants.

24 notation flottante

Toujours est-il que pour manipuler les nombres en base 60, il valait mieux avoir une idée claire de l'ordre de grandeur de ce qu'on était en train de compter. Les ambiguïtés sont nombreuses : deux clous verticaux l'un à côté de l'autre peuvent bien sûr désigner, 2 ou 120, ou $2/60$. Mais aussi 61, voire 3660 ou 3601.

Pour nous qui sommes habitués à la rigueur de la numération indienne, comprendre les opérations mésopotamiennes demande une certaine souplesse intellectuelle. Par exemple il faut s'habituer à lire que 40 et 20 font 1, ou bien que 20 fois 9 (180) égale 3, ou bien que l'inverse de 20 est 3, ou encore que 30 au carré vaut 15 (15 fois 60 ce qui est implicite).

numération sexagésimale (ca. 3000 av. J.-C.)

1	┆	11	<┆	21	<<┆	31	<<<┆	41	<<<<┆	51	<<<<<┆
2	┆┆	12	<┆┆	22	<<┆┆	32	<<<┆┆	42	<<<<┆┆	52	<<<<<┆┆
3	┆┆┆	13	<┆┆┆	23	<<┆┆┆	33	<<<┆┆┆	43	<<<<┆┆┆	53	<<<<<┆┆┆
4	┆┆┆┆	14	<┆┆┆┆	24	<<┆┆┆┆	34	<<<┆┆┆┆	44	<<<<┆┆┆┆	54	<<<<<┆┆┆┆
5	┆┆┆┆┆	15	<┆┆┆┆┆	25	<<┆┆┆┆┆	35	<<<┆┆┆┆┆	45	<<<<┆┆┆┆┆	55	<<<<<┆┆┆┆┆
6	┆┆┆┆┆┆	16	<┆┆┆┆┆┆	26	<<┆┆┆┆┆┆	36	<<<┆┆┆┆┆┆	46	<<<<┆┆┆┆┆┆	56	<<<<<┆┆┆┆┆┆
7	┆┆┆┆┆┆┆	17	<┆┆┆┆┆┆┆	27	<<┆┆┆┆┆┆┆	37	<<<┆┆┆┆┆┆┆	47	<<<<┆┆┆┆┆┆┆	57	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆
8	┆┆┆┆┆┆┆┆	18	<┆┆┆┆┆┆┆┆	28	<<┆┆┆┆┆┆┆┆	38	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆	48	<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆	58	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆
9	┆┆┆┆┆┆┆┆┆	19	<┆┆┆┆┆┆┆┆┆	29	<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆	39	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆	49	<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆	59	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
10	<	20	<<	30	<<<	40	<<<<	50	<<<<<		

pourquoi 60 ? hypothèses

- $\simeq 360$ jours dans l'année
- $\text{ppcm}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$
- $\text{ppcm}(10, 12) = 60$

notation flottante numération sexagésimale

- $40 + 20 = 1$
- $20 \times 9 = 3$
- $1/20 = 3$
- $30^2 = 15$

25 ce qui nous reste

L'astronomie mésopotamienne a influencé celle des Grecs, qui ont conservé le mode de numération de leurs prédécesseurs. C'est ainsi qu'il nous reste les 12 mois de l'année, et les 12 signes du zodiaque, les 360 degrés dans un cercle, et la division sexagésimale des heures et des degrés d'angle.

ce qui nous reste numération sexagésimale

- 12 mois dans l'année
- 12 signes du zodiaque
- 360 degrés dans un cercle
- 60 minutes dans un degré / heure
- 60 secondes dans une minute

26 Les plus anciennes observations qui nous soient parvenues

« Les plus anciennes observations qui nous soient parvenues avec un détail suffisant pour en faire usage dans l'astronomie, sont trois éclipses de lune, observées à Babylone, dans les années 719 et 720 avant l'ère chrétienne. Ptolémée qui les rapporte dans son *Almageste*, s'en est servi pour déterminer le moyen mouvement de la lune. »

C'est Pierre-Simon Laplace qui écrit ceci en 1796 après Jésus-Christ, à propos de Ptolémée, qui date du second siècle.

Les plus anciennes observations qui nous soient parvenues

P.-S. Laplace, *Exposition du système du monde* (1796)

Les plus anciennes observations qui nous soient parvenues avec un détail suffisant pour en faire usage dans l'astronomie, sont trois éclipses de lune, observées à Babylone, dans les années 719 et 720 avant l'ère chrétienne. Ptolémée qui les rapporte dans son *Almageste*, s'en est servi pour déterminer le moyen mouvement de la lune.

27 références

Rendez-vous compte : Hammurabi était plus ancien pour Ptolémée que Ptolémée pour Laplace. En même temps, Ptolémée ne connaissait pas Hammurabi. Quand Ptolémée vivait, il y avait bien longtemps que la compréhension de l'écriture cunéiforme s'était perdue, avec les langues qu'elle notait, et la tour de Babel.

L'astronomie et la base 60, elles, ne se sont jamais perdues.

références

- G. Ifrah (1996) *Histoire universelle des chiffres*, 2 volumes, Paris : Robert Laffont
- IREM (2016) *Les Mathématiques en Mésopotamie & variations sur les aires*, 2 brochures, Grenoble : Université Grenoble-Alpes
- C. Proust (2008) Quantifier et calculer : usages des nombres à Nippur, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14(2), 143-209
- E. Robson (2007) Mathematics, metrology, and professional numeracy, in *The Babylonian World*, G. Leick ed., London : Routledge
- D. Schmandt-Besserat (2001) *How writing came about*, Austin : University of Texas Press