Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 La crise des fondements

La crise des fondements, c'est cette période au tournant du vingtième siècle où les certitudes mathématiques se sont effondrées l'une après l'autre. Toutes les bases que l'on croyait à toute épreuve, ont été remises en question et il a fallu reconstruire. J'ai évoqué cette période en géométrie, à propos des postulats d'Euclide, et en analyse pour la définition de l'infini et des réels. Je vous parle aussi ailleurs de la définition des entiers. Aujourd'hui, c'est le tour de la logique.

Ceux qui ont commencé à la rendre mathématique, Leibniz puis Boole, croyaient apporter à l'expression du raisonnement, la rigueur et la solidité des mathématiques. Ils n'imaginaient certainement pas que leur logique formelle allait remettre en cause l'existence même des mathématiques.

histoires de logique

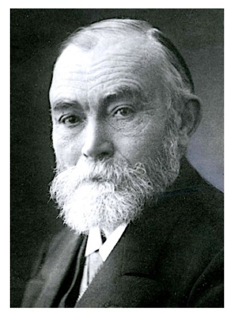
La crise des fondements

paradoxes et ensembles

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Gottlob Frege (1848–1925) Bertrand Russell (1872–1970)

Gottlob Frege (1848–1925) Bertrand Russell (1872–1970)



L'épisode qui illustre le mieux cette crise est un échange de lettres qui a eu lieu en juin 1902. Voici les deux protagonistes. Gottlob Frege a 54 ans. Ses travaux n'ont pas encore été reconnus à la mesure de leur importance, mais ils sont de tout premier ordre. Le second volume de son œuvre majeure, « Les fondements de l'arithmétique », est sous presse. C'est alors qu'il reçoit la lettre d'un jeune Anglais encore inconnu, qui a soigneusement étudié les deux livres de Frege déjà parus. Il s'appelle Bertrand Russell. L'échange a lieu en allemand. En voici des extraits traduits.

2 ce qui se fait de mieux de nos jours

« Je me trouve en complet accord avec vous sur tout ce qui est essentiel. [. . .] Sur beaucoup de questions particulières, je trouve dans votre travail des discussions, des distinctions et des définitions que l'on cherche en vain dans les travaux d'autres logiciens.[. . .] Il y a juste un point sur lequel j'ai rencontré une difficulté.

Dans vos travaux je trouve ce qui se fait de mieux de nos jours, et je me suis donc permis de vous exprimer mon profond respect. »

On ne peut pas dire qu'il n'y ait pas mis les formes. Voici la réponse de Frege.

ce qui se fait de mieux de nos jours

Russell à Frege (16 juin 1902)

Je me trouve en complet accord avec vous sur tout ce qui est essentiel. [. . .] Sur beaucoup de questions particulières, je trouve dans votre travail des discussions, des distinctions et des définitions que l'on cherche en vain dans les travaux d'autres logiciens.[. . .] Il y a juste un point sur lequel j'ai rencontré une difficulté.

Dans vos travaux je trouve ce qui se fait de mieux de nos jours, et je me suis donc permis de vous exprimer mon profond respect.

3 votre découverte est très remarquable

« Votre découverte de la contradiction m'a causé la plus grande surprise, et je dirais presque consternation, car elle a ébranlé la base sur laquelle j'entendais construire l'arithmétique. [. . .] C'est d'autant plus grave que, avec la perte de la Règle V, non seulement les fondations de mon arithmétique, mais encore les seules fondations possibles de l'arithmétique, semblent s'évanouir.

[. . .] En tout cas, votre découverte est très remarquable et entraînera peut-être une grande avancée en logique, aussi fâcheuse qu'elle puisse paraître au premier abord. »

Ah ça, pour être fâcheuse, elle l'était ! Frege a dû in extremis rajouter un appendice à son livre qui était sous presse, pour dire que tout le contenu du livre, et même des deux livres précédents, était plus ou moins caduc ! Avant de vous expliquer la découverte de Russell, je vais vous présenter le premier livre de Frege, et vous dire en quoi il était si important.

votre découverte est très remarquable

Frege à Russell (22 juin 1902)

Votre découverte de la contradiction m'a causé la plus grande surprise, et je dirais presque consternation, car elle a ébranlé la base sur laquelle j'entendais construire l'arithmétique. [. . .] C'est d'autant plus grave que, avec la perte de la Règle V, non seulement les fondations de mon arithmétique, mais encore les seules fondations possibles de l'arithmétique, semblent s'évanouir.

[. . .] En tout cas, votre découverte est très remarquable et entraînera peut-être une grande avancée en logique, aussi fâcheuse qu'elle puisse paraître au premier abord.

4 Gottlob Frege (1848–1925)

Ce livre, Frege l'a écrit à l'âge qu'avait Russell en 1902 : trente ans. Dans le titre, Begriff signifie idée ou concept et schrift, écriture. C'est donc une écriture des concepts. Le sous-titre annonce « un langage formel pour la pensée pure, inspiré de celui de l'arithmétique. »

On ignore si Frege connaissait les travaux de Boole, parus quinze ans auparavant, au moment où il a écrit ce livre. Les points de vue sont différents. Pour Frege, son écriture des concepts est une avancée vers la caractéristique universelle de Leibniz. Voici ce qu'il en dit dans la préface.

Gottlob Frege (1848–1925)

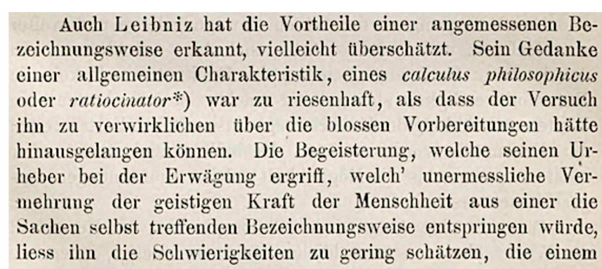
Begriffsschrift (1879)

5 der geistigen Kraft des Menscheit

« Leibniz aussi a reconnu, et peut-être surestimé, les avantages d'un système de notations approprié. Son idée d'une caractéristique universelle, d'un *calculus philosophicus* ou *ratiocinator*, était si gigantesque, qu'elle ne pouvait pas aller au-delà des préliminaires. L'enthousiasme qui a saisi son initiateur quand il a envisagé l'accroissement immense de la puissance intellectuelle de l'humanité qu'apporterait un système de notations adapté aux objets eux-mêmes, l'a conduit à sous-estimer les difficultés qui entravaient une telle entreprise. »

der geistigen Kraft des Menscheit

Frege, Begriffsschrift (1879)



Auch Leibniz hat die Vortheile einer angemessenen Bezeichnungsweise erkannt, vielleicht überschätzt. Sein Gedanke einer allgemeinen Charakteristik, eines *calculus philosophicus* oder *ratiocinator**) war zu riesenhaft, als dass der Versuch ihn zu verwirklichen über die blossen Vorbereitungen hätte hinausgelangen können. Die Begeisterung, welche seinen Urheber bei der Erwägung ergriff, welch' unermessliche Vermehrung der geistigen Kraft der Menschheit aus einer die Sachen selbst treffenden Bezeichnungsweise entspringen würde, liess ihn die Schwierigkeiten zu gering schätzen, die einem

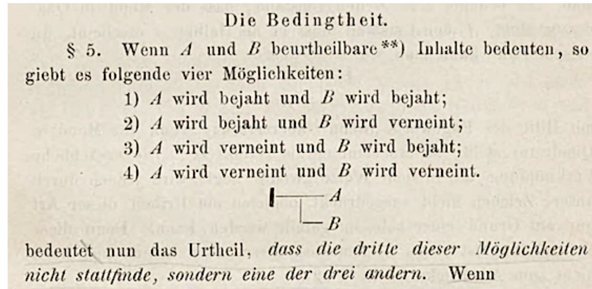
6 Die Bedingtheit

L'écriture des concepts de Frege dépasse de loin ce qui s'est fait jusque-là, y compris en Angleterre. Son idée est d'utiliser les deux dimensions, horizontale pour les propositions, verticale pour développer l'arborescence de la structure logique. Vous voyez ici la figure de base, qu'il appelle « conditionalité » ; pour nous c'est l'implication. Frege la définit soigneusement, par ce que nous appelons sa table de vérité.

Voici ce qu'il dit. « Si A et B sont des contenus qui pourront devenir des jugements, il y a quatre possibilités. (1) A est affirmé et B est affirmé (2) A est affirmé et B est nié, (3) A est nié et B est affirmé (4) A est nié et B est nié. La figure exprime le jugement disant que la troisième possibilité n'a pas lieu. » Dans notre langage, nier la proposition « non-A et B », c'est affirmer A ou non-B, c'est bien la définition de « B implique A ».

C'était une avancée réelle, la solution à un dilemme qui posait problème depuis longtemps. Dix ans plus tard en Angleterre, le fait qu'une implication puisse être vraie avec une prémisse fausse, était encore âprement discuté : en temoigne le problème posé par Lewis Carroll en 1894. Vous l'avez déjà écouté ? Ah c'est bien, il y en a qui suivent !

Die Bedingtheit
Frege, Begriffsschrift (1879)


Die Bedingtheit.

§ 5. Wenn A und B beurtheilbare**) Inhalte bedeuten, so giebt es folgende vier Möglichkeiten:

1) A wird bejaht und B wird bejaht;
2) A wird bejaht und B wird verneint;
3) A wird verneint und B wird bejaht;
4) A wird verneint und B wird verneint.

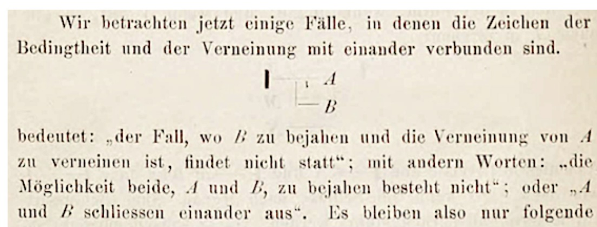
bedeutet nun das Urtheil, *dass die dritte dieser Möglichkeiten nicht stattfinde, sondern eine der drei andern.* Wenn

7 Die Verneinung

Après l'implication, Frege introduit le signe de la négation, qui est un petit trait vertical. Puis il dit : « si nous combinons les signes de la conditionalité et de la négation selon cette figure, elle traduit le fait que A et B s'excluent mutuellement ». Pour nous : non-A ou non-B.

Frege est maintenant capable de traduire toutes les opérations logiques par ses diagrammes. Une autre innovation fondamentale va consister à transformer les prédicats en fonctions. Dans « Socrate est mortel », « mortel » est désormais une fonction appliquée à la variable « être vivant », et « Socrate » est une instanciation de cette variable. La notion de quantificateur s'impose alors naturellement, et Frege la traduit en une notation appropriée.

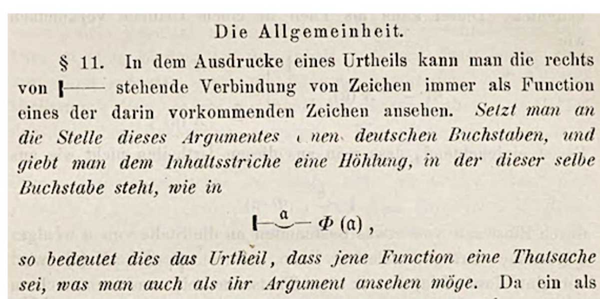
Die Verneinung
Frege, Begriffsschrift (1879)


Wir betrachten jetzt einige Fälle, in denen die Zeichen der Bedingtheit und der Verneinung mit einander verbunden sind.

bedeutet: „der Fall, wo B zu bejahen und die Verneinung von A zu verneinen ist, findet nicht statt"; mit andern Worten: „die Möglichkeit beide, A und B, zu bejahen besteht nicht"; oder „A und B schliessen einander aus". Es bleiben also nur folgende

8 Die Allgemeinheit

Die Allgemeinheit
Frege, Begriffsschrift (1879)


Die Allgemeinheit.

§ 11. In dem Ausdrucke eines Urtheils kann man die rechts von $\vdash$—— stehende Verbindung von Zeichen immer als Function eines der darin vorkommenden Zeichen ansehen. *Setzt man an die Stelle dieses Argumentes einen deutschen Buchstaben, und giebt man dem Inhaltsstriche eine Höhlung, in der dieser selbe Buchstabe steht, wie in*

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \Phi(\mathfrak{a}),$$

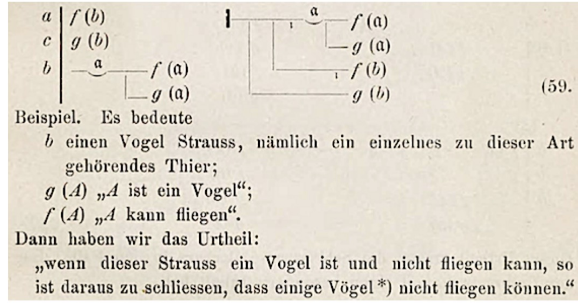
so bedeutet dies das Urtheil, dass jene Function eine Thatsache sei, was man auch als ihr Argument ansehen möge. Da ein als

Die Allgemeinheit signifie « La Généralité ». La figure exprime le jugement selon lequel, pour toute valeur de l'argument, l'affirmation qui résulte de la fonction appliquée à cet argument, est un fait. C'est donc notre quantificateur universel « quel que soit ». La combinaison avec le signe de négation induit l'autre quantificateur « il existe ».

9 dieser Strauss ein Vogel ist

dieser Strauss ein Vogel ist

Frege, Begriffsschrift (1879)



Beispiel. Es bedeute

b einen Vogel Strauss, nämlich ein einzelnes zu dieser Art gehörendes Thier;

$g(A)$ „A ist ein Vogel";

$f(A)$ „A kann fliegen".

Dann haben wir das Urtheil:

„wenn dieser Strauss ein Vogel ist und nicht fliegen kann, so ist daraus zu schliessen, dass einige Vögel *) nicht fliegen können."

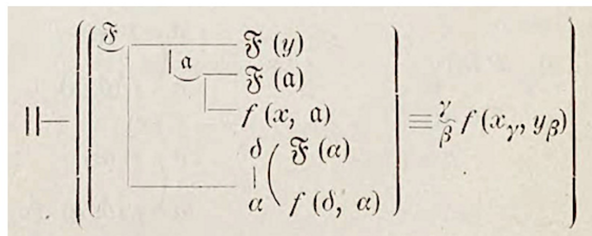
Comme vous, Frege trouve qu'un exemple ne sera pas superflu. Considérez parmi les êtres vivants : être un oiseau noté g, et savoir voler, noté f. L'autruche est notée b. La figure traduit la proposition suivante : « le fait que l'autruche soit un oiseau et ne sache pas voler implique qu'il existe des oiseaux ne sachant pas voler »

Vous savez quoi ? repassez-vous calmement ce slide tant que vous voulez, je vous attends au suivant.

10 Propriété héréditaire

Propriété héréditaire

Frege, Begriffsschrift (1879)



Je ne vous détaillerai pas cette figure, qui est censée exprimer le fait qu'une propriété est héréditaire, pour une suite. Elle traduit un point crucial dans la théorie de Frege. Il a compris le premier que la logique formelle était indissociable d'une définition axiomatique de l'arithmétique, et que celle-ci passait par la notion de récurrence. Son programme consiste donc non seulement à calquer son langage sur l'arithmétique, comme l'annonce le sous-titre, mais encore à éclaircir les fondements de l'arithmétique, ce qu'il fera dans les deux livres suivants. C'est ce programme que la lettre de Russell a gravement compromis. Que disait donc cette lettre ?

11 à cause de la contradiction suivante

à cause de la contradiction suivante

Russell à Frege (16 juin 1902)

Vous affirmez qu'une fonction peut elle-même être un élément déterminé. Je le croyais aussi auparavant, mais maintenant cela me semble douteux, à cause de la contradiction suivante. Soit w le prédicat « être un prédicat qui n'est pas le prédicat de lui-même ». Est-ce que w est prédicat de lui-même ? De chacune des deux réponses, son opposé s'ensuit. Nous devons donc conclure que w n'est pas un prédicat. De même, il n'existe pas de classe, de toutes les classes qui n'appartiennent pas à elles-mêmes. De là je conclus qu'une collection définissable, ne forme pas nécesairement une totalité.

« Vous affirmez qu'une fonction peut elle-même être un élément déterminé. Je le croyais aussi auparavant, mais maintenant cela me semble douteux, à cause de la contradiction suivante. Soit w le prédicat « être un prédicat qui n'est pas le prédicat de lui-même ». Est-ce que w est prédicat de lui-même ? De chacune des deux réponses, son opposé s'ensuit. Nous devons donc conclure que w n'est pas un prédicat. De même, il n'existe pas de classe, de toutes les classes qui n'appartiennent pas à elles-mêmes. De là je conclus qu'une collection définissable, ne forme pas nécessairement une totalité. »

J'ai conservé dans la traduction le vocabulaire d'époque, mais c'est plus facile à comprendre avec notre langage ensembliste. Voici le paradoxe de Russell en termes modernes.

12 Paradoxe de Russell

La difficulté vient de ce qu'on croit qu'une propriété définit un ensemble. C'est vrai, quand on définit des ensembles de nombres, comme l'ensemble des entiers strictement positifs. On aurait envie de parler par exemple, de l'ensemble des ensembles qui ont un nombre d'éléments strictement positif. Celui-là appartiendrait à lui-même, puisqu'il n'est pas vide. Mais maintenant, appelez A l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. La question est : est-ce que A appartient à lui-même ? Si c'est le cas, alors par définition A n'appartient pas à lui-même. Mais si A n'appartient pas à lui-même, alors, toujours par définition, A appartient à A. La définition conduit donc à une contradiction : bien qu'apparemment on l'ait défini, l'ensemble A n'existe tout simplement pas. Pas plus d'ailleurs que l'ensemble de tous les ensembles.

Je ne voudrais pas vous laisser croire que ce genre de casse-tête est apparu comme un coup de tonnerre dans un ciel serein, un beau jour de juin 1902. Les paradoxes liés à l'auto-référence sont au moins aussi anciens que la philosophie grecque. Le plus ancien semble être le paradoxe du menteur. Comme le dit Cicéron : « Si tu dis que tu mens et que tu dis vrai, tu mens alors que tu dis la vérité ». Écoutez la solution d'Aristote.

Paradoxe de Russell
Bertrand Russell (1872–1948))

$$A = \{x\,,\ x \notin x\}$$

$$A \in A \quad \Longleftrightarrow \quad A \notin A$$

13 Le non-être peut-il donc être ?

« Tous les paralogismes de ce genre sous-entendent ce principe : le non-être peut-il donc être ? Le non-être est certainement quelque chose. Et de même l'être ne sera pas ; car il ne sera pas quelqu'une des choses qui sont. Le même homme peut-il en même temps jurer vrai, et se parjurer ? »

En clair, la solution d'Aristote consiste à dire qu'on peut mentir en général, et ne pas mentir sur une phrase donnée. Peut-être, mais alors que dire de la proposition : « La proposition que je suis en train d'énoncer, est fausse » ?

Le non-être peut-il donc être ?
Aristote (384–322 av. J.-C.) Réfutation des sophistes XXV

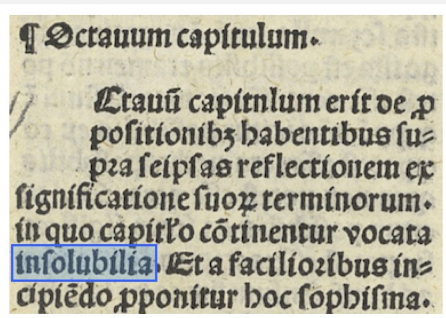
Tous les paralogismes de ce genre sous-entendent ce principe : le non-être peut-il donc être ? Le non-être est certainement quelque chose. Et de même l'être ne sera pas ; car il ne sera pas quelqu'une des choses qui sont. Le même homme peut-il en même temps jurer vrai, et se parjurer ?

14 in quo capitl'o cõtinentur vocata insolubilia

Comme tout l'Organon d'Aristote, la Réfutation des sophistes a beaucoup fait réfléchir les penseurs du Moyen-Âge, à la suite de Thomas d'Aquin. Les paradoxes de l'auto-référence sont même devenus au quatorzième siècle une sorte de genre littéraire, les Insolubilia.

Je vous montre le début du chapitre huit des sophismes de Jean Buridan, mais j'aurais pu aussi vous parler des calculateurs d'Oxford, de Robert Grosseteste, Guillaume d'Okham et beaucoup d'autres moins connus.

in quo capitl'o cõtinentur vocata insolubilia
Jean Buridan (ca 1300–1358) Sophismata buridani


¶ Octauum capitulum.
Octauū capitulum erit de ꝓ
positionibꝫ habentibus su-
pra seipsas reflectionem ex
significatione suoꝝ terminorum.
in quo capitl'o cõtinentur vocata
insolubilia. Et a facilioribus in-
cipiēdo ꝓponitur hoc sophisma.

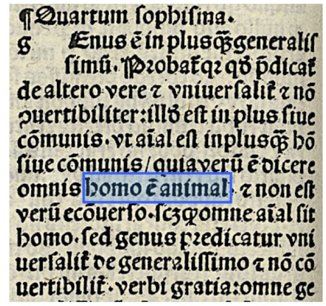
15 Genus ẽ in plusq̃ generalissimũ

L'un des sophismes réfutés par Jean Buridan, a une résonance particulièrement moderne. Il concerne les genres. L'énoncé est : « Le genre est plus général que le genre le plus général ». Il y a en effet un ordre induit par la généralité entre les genres. Buridan prend l'exemple du genre homme, qui est moins général que le genre animal, car tout homme est un animal, tandis que l'inverse est faux. Mais alors, le genre le plus général est bien un genre, tandis que tout genre n'est pas le plus général.

Remplacez maintenant genre par ensemble et « plus général » par « contient » : le genre le plus général devrait être l'ensemble de tous les ensembles, qui devrait se contenir lui-même… à condition qu'il existe ! Troublant non ?

Genus ẽ in plusq̃ generalissimũ

Jean Buridan (ca 1300–1358) Sophismata buridani



¶ Quartum sophisma.
Genus ẽ in plusq̃ generalissimũ. Probatur quia quod pdicatur de altero vere et vniuersaliter et nõ ɔuertibiliter: illud est in plus siue cõmunis. vt aial est inplusq̃ hõ siue cõmunis / quia verũ ẽ dicere omnis homo ẽ animal. et non est verũ ecõuerso. scz quod omne aial sit homo. sed genus predicatur vniuersaliter de generalissimo et nõ cõuertibiliter. verbi gratia: omne ge

16 Sãcho Pãça Gouernador de la insula Barataria

Je ne vais pas vous infliger une histoire détaillée des paradoxes de l'auto-référence. Je vous propose simplement celui de Cervantes, qui est plus divertissant. Nous sommes dans la seconde partie du Don Quichotte. Son fidèle serviteur, Sancho Pança, vient d'être nommé gouverneur de l'île de Barataria. Certains ont proposé Alcalá de Ebro comme localisation de l'île, et on y a érigé une statue au bon Sancho. C'était amplement mérité : voyez plutôt ce cas épineux, soumis au nouveau gouverneur.

« Il y avait sur une certaine rivière un pont, et au bout de ce pont une potence. La loi voulait que chacun de ceux qui passaient sur le pont déclare sous serment où il allait et ce qu'il allait y faire. S'il disait vrai, on le laissait passer ; s'il mentait, il était pendu à la potence. »

Sãcho Pãça Gouernador de la insula Barataria

Cervantes, Segunda parte del ingenioso cavallero don Quixote de la Mancha (1615)

17 que le dexen passar libremente

Il arriva qu'un homme prêta serment et déclara : « Par le serment que je viens de faire, je jure que je vais mourir à cette potence ».

Les juges réfléchirent à cette déclaration et dirent : « Si nous laissons passer cet homme librement, il a menti sous serment, et, selon la loi, il doit mourir ; mais si nous le pendons, il a juré qu'il allait mourir à cette potence, et, ayant juré la vérité, selon la même loi il doit rester libre. »

Ayant bien compris le dilemme, Sancho rend son verdict : « Les raisons de condamner cet homme ou de l'absoudre étant égales, mon avis est qu'on le laisse passer librement, car on glorifie toujours plus le bien que le mal. »

Comme quoi, avec un peu de bon sens, on peut s'extraire de n'importe quel paradoxe. C'est peut-être ce qu'a pensé David Hilbert quand Frege lui a envoyé son nouveau livre.

que le dexen passar libremente

Cervantes, Segunda parte del ingenioso cavallero don Quixote de la Mancha (1615)

18 la logique traditionnelle est inadéquate

« Je vous remercie beaucoup pour le second volume de vos fondements, que je trouve très intéressant. Votre exemple à la fin du livre, était déjà connu ici. J'ai trouvé des contradictions encore plus convainquantes, il y a déjà quatre ou cinq ans ; elles m'ont conduit à la certitude que la logique traditionnelle est inadéquate et que la théorie de la formation des concepts doit être affinée. »

la logique traditionnelle est inadéquate
Hilbert à Frege (7 novembre 1903)

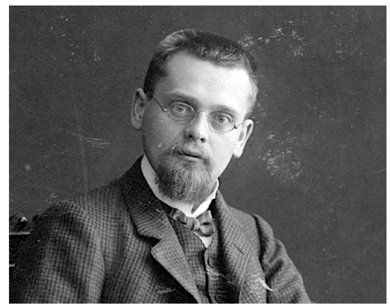
Je vous remercie beaucoup pour le second volume de vos fondements, que je trouve très intéressant. Votre exemple à la fin du livre, était déjà connu ici. J'ai trouvé des contradictions encore plus convaincantes, il y a déjà quatre ou cinq ans ; elles m'ont conduit à la certitude que la logique traditionnelle est inadéquate et que la théorie de la formation des concepts doit être affinée.

19 Ernst Zermelo (1871–1953)

À propos du paradoxe de Russell, en note de bas de page, Hilbert ajoute : « je crois que Zermelo l'a découvert il y a trois ou quatre ans, après que je lui aie communiqué mes exemples. »

Son travail sur les fondements de la logique conduira ce même Zermelo à proposer un système consistant d'axiomes, mettant enfin la théorie des ensembles à l'abri des mauvaises surprises.

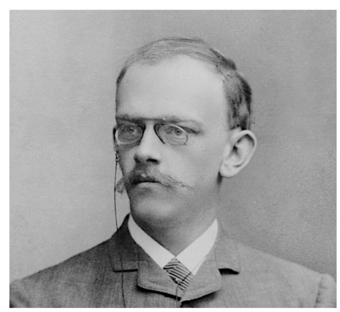
Ernst Zermelo (1871–1953)



20 David Hilbert (1862–1943)

La preuve qu'au moment du paradoxe de Russell, Hilbert réfléchissait déjà depuis longtemps aux fondements axiomatiques, on la trouve entre autres dans sa célèbre conférence au second congrès international des mathématiciens à Paris, le 8 août 1900. Il y liste les 23 problèmes importants pour le siècle à venir. Le second problème est intitulé « de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique ». Il commence par décrire ce qu'il entend par système d'axiomes.

David Hilbert (1862–1943)
Sur les problèmes futurs des mathématiques (8 août 1900)



21 une description complète et exacte

« Lorsqu'il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science, l'on doit établir un système d'axiomes renfermant une description complète et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science. Ces axiomes sont en même temps les définitions de ces concepts élémentaires ; aucune affirmation relative à la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exacte, à moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un nombre fini de déductions. »

Le système d'axiomes ne doit pas être redondant.

une description complète et exacte
Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques (1900)

Lorsqu'il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science, l'on doit établir un système d'axiomes renfermant une description complète et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science. Ces axiomes sont en même temps les définitions de ces concepts élémentaires ; aucune affirmation relative à la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exacte, à moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un nombre fini de déductions.

22 un système d'axiomes complètement indépendants

« Si l'on considère les choses plus exactement, la question suivante se pose : *Certaines affirmations contenues dans des axiomes ne sont-elles pas dépendantes les unes des autres, et, par suite, ces axiomes ne renferment-ils pas des parties communes superflues que l'on doit supprimer si l'on veut obtenir un système d'axiomes complètement indépendants ?* »

Mais surtout, le système d'axiomes doit éviter les contradictions.

un système d'axiomes complètement indépendants
Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques (1900)

Si l'on considère les choses plus exactement, la question suivante se pose : *Certaines affirmations contenues dans des axiomes ne sont-elles pas dépendantes les unes des autres, et, par suite, ces axiomes ne renferment-ils pas des parties communes superflues que l'on doit supprimer si l'on veut obtenir un système d'axiomes complètement indépendants ?*

23 Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires

« Mais avant tout, parmi tant de questions soulevées par l'examen des axiomes, je regarde comme la plus importante celle-ci : *Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires ; c'est-à-dire démontrer qu'en se basant sur les axiomes l'on ne pourra jamais arriver à des résultats contradictoires au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.* »

Peut-être, mais pourquoi mettre l'accent sur l'arithmétique ? Parce qu'il a résolu le problème pour la géométrie l'année précédente, justement en la subordonnant à l'arithmétique.

Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires
Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques (1900)

Mais avant tout, parmi tant de questions soulevées par l'examen des axiomes, je regarde comme la plus importante celle-ci : *Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires ; c'est-à-dire démontrer qu'en se basant sur les axiomes l'on ne pourra jamais arriver à des résultats contradictoires au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.*

24 la non-contradiction des axiomes géométriques

« En Géométrie on démontre la non-contradiction des axiomes en construisant un domaine convenable de nombres tel qu'aux axiomes géométriques correspondent des relations analogues entre les nombres de ce domaine et tel, par conséquent, que toute contradiction dans les conclusions tirées des axiomes géométriques serait forcément reconnaissable dans l'arithmétique de ce domaine. De cette façon la non-contradiction des axiomes géométriques est ramenée à la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique. »

Le second problème de Hilbert et le paradoxe de Russell n'étaient que le début d'une longue aventure, qui n'est toujours pas achevée. Dans les premières décennies du vingtième siècle, l'optimisme dominait. Hilbert lui même a donné plusieurs formulations de son rêve, ce que l'on a appelé « Le programme de Hilbert ». En voici une, lors d'une conférence en août 1927.

la non-contradiction des axiomes géométriques
Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques (août 1900)

En Géométrie on démontre la non-contradiction des axiomes en construisant un domaine convenable de nombres tel qu'aux axiomes géométriques correspondent des relations analogues entre les nombres de ce domaine et tel, par conséquent, que toute contradiction dans les conclusions tirées des axiomes géométriques serait forcément reconnaissable dans l'arithmétique de ce domaine. De cette façon la non-contradiction des axiomes géométriques est ramenée à la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique.

25 Le programme de Hilbert

« Avec cette nouvelle manière de fournir une fondation aux mathématiques, que l'on peut appeler une théorie de la démonstration, je vise un enjeu d'importance, car je voudrais éliminer une fois pour toutes les questions concernant les fondements des mathématiques telles qu'elles se posent actuellement. Pour cela, je voudrais transformer les définitions et les inférences mathématiques, de sorte qu'elles soient inébranlables, tout en fournissant une image adéquate de la science en son entier. Je crois pouvoir atteindre ce but avec ma théorie de la démonstration, même si un gros travail reste à faire avant qu'elle soit complète. »

En résumé, le programme de Hilbert consistait à démontrer que l'ensemble des mathématiques était constitué de propositions dont on pouvait montrer pour chacune, qu'elles étaient vraies ou bien fausses, en un nombre fini d'étapes logiques à partir d'un ensemble fini d'axiomes.

Le programme de Hilbert

Hilbert, Les fondements des mathématiques (août 1927)

Avec cette nouvelle manière de fournir une fondation aux mathématiques, que l'on peut appeler une théorie de la démonstration, je vise un enjeu d'importance, car je voudrais éliminer une fois pour toutes les questions concernant les fondements des mathématiques telles qu'elles se posent actuellement. Pour cela, je voudrais transformer les définitions et les inférences mathématiques, de sorte qu'elles soient inébranlables, tout en fournissant une image adéquate de la science en son entier. Je crois pouvoir atteindre ce but avec ma théorie de la démonstration, même si un gros travail reste à faire avant qu'elle soit complète.

26 Kurt Gödel (1906–1978)

En 1931, un jeune Autrichien d'origine tchèque, Kurt Gödel, met le doigt sur une difficulté majeure. Toute théorie qui englobe la définition des nombres entiers, comporte nécessairement des propositions dont il est impossible de décider si elles sont vraies ou fausses.

L'article est intitulé « Sur les propositions indécidables des Principia Mathematica ».

Kurt Gödel (1906–1978)

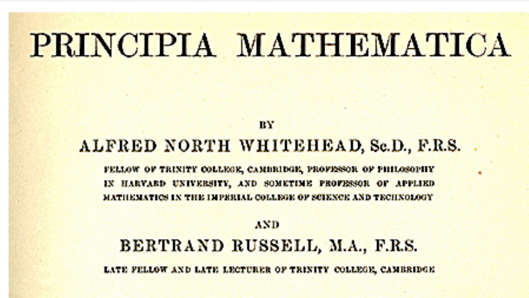
Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica (1931)

27 Principia Mathematica (1910–1925)

C'est une référence à Whitehead et Russell qui ont cosigné une sorte d'encyclopédie de logique mathématique en trois volumes. Publiée une première fois avant la première guerre mondiale, elle a été rééditée en 1925, ce qui tombait à pic pour le programme de Hilbert. On y trouve, à quelques notations près, la logique telle que nous la connaissons, beaucoup plus simple que celle de Frege. Cette logique exprime encore l'espoir de réduire l'ensemble des mathématiques à des combinaisons finies de signes logiques. Pour Russell, c'est une réponse à son propre paradoxe de 1902.

Principia Mathematica (1910–1925)

A. N. Whitehead (1861–1947) B. Russell (1872–1970)



PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.

FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE, PROFESSOR OF PHILOSOPHY IN HARVARD UNIVERSITY, AND SOMETIME PROFESSOR OF APPLIED MATHEMATICS IN THE IMPERIAL COLLEGE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.

LATE FELLOW AND LATE LECTURER OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

28 Jacques Herbrand (1908–1931)

En 1931, un jeune mathématicien français, en visite à Göttingen depuis sa thèse, suit attentivement les développements de la meta-mathématique impulsée par Hilbert. Il connaît à fond les Principia Mathematica de Whitehead et Russell. Il a déjà démontré dans sa thèse, un théorème de meta-mathématique fort utile pour déterminer si une théorie peut être contradictoire. L'article qu'il envoie au Journal de Crelle « Sur la non-contradiction de l'arithmétique » parvient à la rédaction le 27 juillet 1931.

Ce même jour, Herbrand réalisait l'ascension des Bans dans le massif des Écrins. Cette photo prise au sommet, est la dernière que l'on ait de lui. Quelques instants plus tard, il se tuait dans la descente. Il avait 23 ans.

Jacques Herbrand (1908–1931)

Sur la non-contradiction de l'arithmétique (27 juillet 1931)

29 références

Normalement, c'est sur le slide des références que je suis supposé vous sortir une vanne de fin, finement auto-référente au contenu de l'histoire. Mais vu la fin tragique d'Herbrand qui la termine, j'ai comme l'impression que ce serait un peu contradictoire. Qu'en pensez-vous ?

références

- P. de Rouilhan (1995) *Russell et le cercle des paradoxes*, Paris : Presses Universitaires de France
- J. Ferreirós (2007) *Labyrinth of thought, a history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel : Birkhäuser
- D. M. Gabbay, J. Woods eds. (2009) *Handbook of the history of logic, vol. 5 : logic from Russell to Church*, Amsterdam : North-Holland
- F. Lepage, K. Fradet eds. (2013) *La crise des fondements, quelle crise ?* Montréal : Les Cahiers d'Ithaque
- G. Link ed. (2004) *One hundred years of Russell's paradox*, Berlin : Walter de Gruyter
- J. van Heijenhoort ed. (1967) *From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879–1931*, Cambridge MA : Harvard University Press