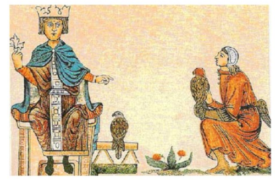
0 La stupeur du monde

histoires d'arithmétique

Stupeur du monde

l'arithmétique de Fibonacci



hist-math.fr Bernard Ycart

Promis, je vais vous parler de Fibonacci, mais avant, il faut bien justifier le titre.

1 Du mariage au baptême

Du mariage au baptême

Frédéric de Hohenstaufen (1194–1250)

« Le plus grand des princes, la stupeur du monde, et l'innovateur admirable », c'est ainsi qu'un chroniqueur anglais a désigné Frédéric de Hohenstaufen. Malgré son nom, c'est en Sicile qu'il est né et qu'il a régné pour l'essentiel.

Vous voyez ici un raccourci saisissant du mariage de ses parents, Henri et Constance, de sa mère en couche, et de son baptême.

Mais sa naissance ne s'est pas passée si simplement que ça.

2 Naissance en public

Naissance en public

Frédéric de Hohenstaufen (1194–1250)

Sa mère avait 40 ans quand il est né, ce qui à l'époque était à la fois rare et dangereux. Pour prouver la légitimité de l'enfant, elle a accouché en public, sous une tente. Et comme l'accouchement s'annonçait difficile, deux médecins arabes ont été appelés en renfort. Ils ont réussi à sauver la mère et l'enfant. Forcément, ça doit marquer.

Songez que l'histoire se déroule au milieu des siècles de croisade : le fanatisme et l'intolérance sont de règle en Occident. Frédéric lui, parle couramment l'arabe, et pendant toute sa vie il recherchera le dialogue.

3 Rencontre avec le sultan al-Kamil (1219)

Rencontre avec le sultan al-Kamil (1219)
Saint-François d'Assise (1182–1226)

Pas seulement le dialogue dans le seul but de convertir, comme François d'Assise ou plus tard Ramon Llull. Il cherche honnêtement à comprendre la religion de l'autre, et manifeste un respect sincère. Il ira jusqu'à envoyer une liste de questions philosophiques et théologiques aux savants musulmans en Espagne. C'est un tout jeune homme qui répond, assez effrontément d'ailleurs : il s'appelle Ibn Sabin.

4 Questions siciliennes (ca 1240)

Questions siciliennes (ca 1240)
Abu Mohammed Abd el-Hakh Ibn Sab'in (1217–1271)

« Ô prince désireux de marcher dans la bonne voie, tu as fait des demandes sur l'âme, sans déterminer de quelle espèce d'âme tu voulais parler. Ainsi tu as omis ce qu'il ne fallait pas laisser de côté, et tu as réuni ce qui devait rester séparé. Voilà à quoi t'a conduit ton défaut d'études en fait de sciences spéculatives et de recherches expérimentales. »

Ô prince désireux de marcher dans la bonne voie, tu as fait des demandes sur l'âme, sans déterminer de quelle espèce d'âme tu voulais parler. Ainsi tu as omis ce qu'il ne fallait pas laisser de côté, et tu as réuni ce qui devait rester séparé. Voilà à quoi t'a conduit ton défaut d'études en fait de sciences spéculatives et de recherches expérimentales.

5 Cour de Palerme

Cour de Palerme
Frédéric de Hohenstaufen (1194–1250)

Frédéric cotoye les Musulmans de Sicile qui ont le droit d'exercer leur religion sous son règne. Comme Saint-François d'Assise, il rencontre le sultan al-Kamil.

6 rencontre avec le sultan al-Kamil

rencontre avec le sultan al-Kamil
Frédéric de Hohenstaufen (1194–1250)

En quelques mois de négociation et de diplomatie, il réussit l'impensable : le sultan lui cède le gouvernement de Jérusalem. Il faut dire que le sultan avait d'autres ennemis à combattre, et que ça l'arrangeait plutôt de ne pas affronter les chrétiens en plus.

Rendez-vous compte : conquérir le tombeau du Christ, ce à quoi plus d'un siècle de croisades meurtrières avaient échoué, et cela sans verser une goutte de sang ! Évidemment, ça ne plaît pas à tout le monde.

7 Excommunication

Il avait été élu empereur des Romains sous le nom de Frédéric II, en échange de la promesse de partir en croisade. Mais à force de traîner des pieds, il avait fini par provoquer l'échec d'une expédition. Alors le pape l'avait excommunié. Cette miniature le montre en train de perdre sa couronne et son sceptre sous le regard sévère d'un pape beaucoup plus grand que lui. C'est de la propagande papiste. Après sa victoire diplomatique à Jérusalem, la même propagande l'accuse d'hérésie, et même, horreur suprême, d'athéisme. Il est excommunié à nouveau. Il le sera en tout quatre fois, et ça ne lui a fait ni chaud ni froid.

Son personnage a été tellement récupéré qu'il est difficile de savoir qui il était vraiment.

Excommunication
Frédéric de Hohenstaufen (1194–1250)

8 Castel del Monte (ca. 1240)

C'était probablement un chrétien sincère. Ce magnifique château octogonal qu'il a fait bâtir est censé suivre les plans de la Jérusalem céleste.

Castel del Monte (ca 1240)
Frédéric de Hohenstaufen (1194–1250)

9 De arte venandi cum avibus (ca. 1240)

C'était un passionné de sciences et de nature. Un grand amateur de chasse et en particulier de fauconnerie, ce qui lui fait un point commun de plus avec les Musulmans, dont il fait traduire les traités de chasse. Il écrit lui-même un livre, « l'Art de chasser avec des oiseaux ».

Et puis il attire à sa cour autant de savants qu'il peut.

De arte venandi cum avibus (ca 1240)
Frédéric de Hohenstaufen (1194–1250)

10 Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)

En particulier Fibonacci. Ah ben voilà, on a fini par y arriver ! Oui, mais on en sait beaucoup moins sur Fibonacci que sur Frédéric.

Fibonacci, c'est une suite de trompe-l'œil. D'abord son nom : en mathématiques, on l'appelle Fibonacci, mais c'est surtout à cause de Guillaume Libri au dix-neuvième siècle. Lui-même n'a jamais utilisé ce nom-là. Il se désignait par Léonard, fil de Bonacius, de la ville de Pise. Et puis aussi « Bigollone » qui est un nom plutôt dépréciatif, du style bon-à-rien, mais on n'a pas vraiment réussi à savoir d'où lui venait ce surnom. Léonard de Pise ou Pisano est la manière la plus correcte de le désigner, mais puisque tout le monde a pris l'habitude de Fibonacci, allons-y.

Le peu que l'on sache sur sa vie tient dans quelques lignes de l'introduction de son livre le plus connu, le livre de l'abaque : liber abaci.

Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)

11 Liber Abaci (1202)

« Quand mon père était employé par Pise à la douane de Bougie pour assister les marchands qui la fréquentaient, il me fit venir à lui alors que j'étais enfant, dans l'intention de m'assurer un avenir utile et avantageux ; il voulut que je restasse quelques jours pour qu'on m'y enseigne l'étude du calcul. Là, introduit par un enseignement admirable dans l'art des neuf chiffres indiens, j'ai aimé cette science plus que tout, et j'ai compris ce qu'en elle on étudiait en Égypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile, et en Provence, avec ses différentes méthodes ; autant de places de commerce dans lesquelles je me suis rendu par la suite et où je me suis instruit par beaucoup d'étude et par le conflit des discussions. »

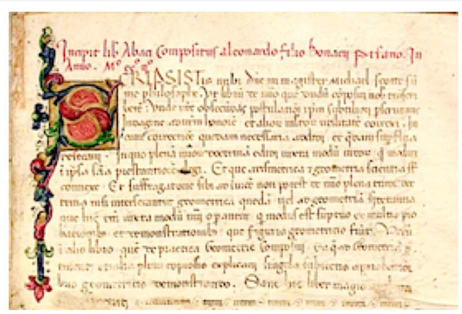
Liber Abaci (1202)
Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)

Quand mon père était employé par Pise à la douane de Bougie pour assister les marchands qui la fréquentaient, il me fit venir à lui alors que j'étais enfant, dans l'intention de m'assurer un avenir utile et avantageux ; il voulut que je restasse quelques jours pour qu'on m'y enseigne l'étude du calcul. Là, introduit par un enseignement admirable dans l'art des neuf chiffres indiens, j'ai aimé cette science plus que tout, et j'ai compris ce qu'en elle on étudiait en Égypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile, et en Provence, avec ses différentes méthodes ; autant de places de commerce dans lesquelles je me suis rendu par la suite et où je me suis instruit par beaucoup d'étude et par le conflit des discussions.

12 Liber Abaci (1202)

Le livre de l'abaque : encore un trompe-l'œil. D'abord le titre : il faut prendre le mot « abaque » au sens de calcul, et plus particulièrement « calcul indien » : presque le contraire de l'objet « abaque ».

Liber Abaci (1202)
Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)



13 les lapins de Fibonacci

Ensuite le contenu : tout ce qui en est resté c'est la suite de Fibonacci, et le fameux problème des lapins. Vous voyez ici la page où ce problème apparaît avec le décompte des lapins mois par mois dans la marge de droite.

Mais le livre de l'abaque, ce n'est pas que ça, loin de là : il y a des centaines d'autres exercices, dont la plupart beaucoup plus difficiles que celui-là. Le livre de l'abaque, c'est une compilation des mathématiques du temps, qui inclut une bonne partie des avancées des mathématiciens arabes. Fibonacci a lu al-Khwarizmi, et détaille sa méthode d'Algèbre et al Muqabala. Mais il a lu aussi al-Kamil, al-Haytham, al-Khazin, et bien d'autres. Cela fait du livre de l'abaque le livre de mathématiques le plus important en Europe, entre Boèce et la Renaissance. Pendant trois siècles, les mathématiques prendront modèle sur ce livre-là. Il donnera même naissance à un genre que l'on appelle les « arithmétiques commerciales ». Ce livre ne sera égalé que par Luca Pacioli, à la toute fin du quinzième siècle, trois siècles après Fibonacci.

les lapins de Fibonacci

Fibonacci, Liber Abaci (1202)

14 Liber quadratorum (1225)

Le dernier trompe-l'œil de Fibonacci c'est son originalité en tant que mathématicien. Le livre de l'abaque est un livre d'enseignement, reprenant pour le public européen, les méthodes mises au point par les Arabes. Certains en ont profité pour réduire Fibonacci à un opportuniste sans originalité, qui n'aurait eu que le mérite de lire l'arabe. Non, Fibonacci c'est bien plus que cela.

Voici le début du Liber Quadratorum, le livre des carrés. Dans l'encadré bleu, il n'y a qu'une initiale, F pour Frédéric, la Stupeur du Monde. Oui, en plus de m'être sympathique, il fallait bien une raison pour qu'il apparaisse dans cette histoire.

La première ligne dit : « Ici commence le Livre des Carrés, par Léonard de Pise, en l'an 1225 ». Dans les lignes suivantes, Fibonacci raconte les circonstances dans lesquelles le livre est né.

Liber quadratorum (1225)

Leonardo Pisano (Fibonacci) (ca 1170–1240)

15 Maître Jean de Palerme

« Quand Maître Dominique m'a conduit aux pieds de votre majesté céleste, prince très glorieux, seigneur Frédéric, je rencontrai Maître Jean de Palerme ; il me proposa une question qui lui était venue à l'esprit, appartenant autant à la géométrie qu'à l'arithmétique : trouver un nombre carré tel que, quand cinq est ajouté ou soustrait, on trouve encore des carrés. »

Évidemment quand il s'agit de nombres, il s'agit de nombres *entiers*, ou éventuellement de nombres rationnels.

Maître Jean de Palerme

Fibonacci, Liber Quadratorum (1125)

Quand Maître Dominique m'a conduit aux pieds de votre majesté céleste, prince très glorieux, seigneur Frédéric, je rencontrai Maître Jean de Palerme ; il me proposa une question qui lui était venue à l'esprit, appartenant autant à la géométrie qu'à l'arithmétique : trouver un nombre carré tel que, quand cinq est ajouté ou soustrait, on trouve encore des carrés.

16 carrés en progression arithmétique

carrés en progression arithmétique

Fibonacci, Liber Quadratorum (1125)

Donc si on oublie la valeur 5 qui n'a rien de spécial, Fibonacci cherche trois carrés x^2, y^2, z^2 en progression arithmétique, c'est-à-dire tels que $x^2 + z^2 = 2y^2$.

Mais si x^2+z^2 est pair, c'est que x^2 et z^2 ont la même parité, donc aussi x et z sont de même parité, et $z+x$ comme $z-x$ sont pairs. On trouve donc que $(z-x)/2$, $(z+x)/2$ et y forment un triplet pythagoricien.

Trouver $x^2 < y^2 < z^2$ tels que $x^2 + z^2 = 2y^2$.

Posons : $z + x = 2p$ et $z - x = 2q$.

Alors $x = p - q$ et $z = p + q$, donc :

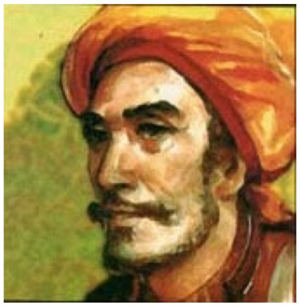
$$x^2 + z^2 = 2p^2 + 2q^2 ,$$

donc :

$$p^2 + q^2 = y^2 .$$

17 Abū Ja'far al-Khāzin (900–971)

Abū Ja'far al-Khāzin (900–971)



Ce que Fibonacci oublie de dire, c'est que le problème n'est pas nouveau. Il figure chez Diophante, dans lequel le rapport avec les triplets pythagoriciens, apparaissait déjà. À la suite de Diophante, il avait été traité par les mathématiciens arabes, qui en avaient reconnu toute l'importance. Parmi eux, al-Khazin, au dixième siècle.

Il écrit une « épître sur la formation des triangles rectangles à côtés rationnels, et sur l'utilité qu'offre leur connaissance. » Il est raisonnable de penser que Fibonacci connaissait ce texte. Voici ce que al-Khazin y démontre.

18 Sur la formation des triangles rectangles

« Quant au but de la connaissance de ces triangles, c'est de trouver un nombre qui a une racine, et tel que si on y ajoute un certain nombre, la somme a une racine, et si on retranche le même nombre, le reste a une racine. »

Et al-Khazin énonce, et démontre géométriquement, l'équivalence entre le problème des nombres congruents et les triplets pythagoriciens. En termes modernes, cela s'énonce de manière très simple.

Ceci montre que si on trouve trois nombres en progression arithmétique qui soient tous les trois des carrés entiers, la raison de cette progression, à savoir le nombre $2xy$ dans l'écriture ci-dessus ne peut pas être quelconque. Déjà elle est paire, mais comme x et y sont multiples de deux nombres de parité différentes, le produit $2xy$ est multiple de 4, et même de 24. Fibonacci va aller beaucoup plus loin.

Sur la formation des triangles rectangles

Abū Ja'far al-Khāzin (900–971)

Quant au but de la connaissance de ces triangles, c'est de trouver un nombre qui a une racine, et tel que si on y ajoute un certain nombre, la somme a une racine, et si on retranche le même nombre, le reste a une racine.

$$x^2 + y^2 = z^2 \iff \begin{cases} z^2 + 2xy &= (x+y)^2 \\ z^2 - 2xy &= (x-y)^2 . \end{cases}$$

19 Numerus congruus

D'abord il montre que la raison de la progression arithmétique est forcément de la forme $4mn$ fois $m+n$ fois $m-n$, où m et n sont deux entiers. C'est ce qu'il appelle un nombre congru.

Ensuite, il démontre que si m est supérieur à n, alors le rapport m sur n ne peut pas être égal au rapport $m+n$ sur $m-n$.

$$\frac{m}{n} \neq \frac{m+n}{m-n}$$

Numerus congruus
Fibonacci, Liber Quadratorum (1225)

$$4mn(m+n)(m-n)$$

$$\frac{m}{n} \neq \frac{m+n}{m-n}$$

20 Numerus congruus

En suivant, il dit :

« De cela, on déduira en fait que aucun nombre carré ne peut être un nombre congru ; car si c'était possible, alors le rapport de la somme à la différence serait comme celui du plus grand au plus petit. »

Et là, malheureusement, on ne saura jamais ce qu'il avait en tête. Il est parfaitement exact que si le rapport de la somme à la différence était égal au rapport des deux nombres m et n, alors le nombre congru $4mn$ fois $m+n$ fois $m-n$ serait un carré. D'accord, mais l'implication inverse ne peut pas s'en déduire, et ça, c'est vraiment dommage.

Numerus congruus
Fibonacci, Liber Quadratorum (1225)

De cela, on déduira en fait que aucun nombre carré ne peut être un nombre congru ; car si c'était possible, alors le rapport de la somme à la différence serait comme celui du plus grand au plus petit.

21 aucun carré ne peut être un nombre congru

Parce que cette simple affirmation, un nombre congru ne peut pas être un carré, a des conséquences importantes. Si on revient au probleme initial, Fibonacci dit qu'il n'existe pas quatre entiers x, y, z, c tels que $x^2 = y^2 - c^2$ et $z^2 = y^2 + c^2$, c'est-à-dire que le premier problème écrit ici est impossible. Mais si ce premier problème était possible, alors le second, trouver une différence de deux puissances quatrièmes qui soit un carré, le serait aussi. C'est-à-dire qu'on n'est pas loin du tout du cas $n = 4$ dans le grand théorème de Fermat. Avec cette affirmation, et même s'il ne l'avait pas tout à fait démontrée, Fibonacci va très au-delà de Diophante, et même des arithméticiens arabes comme al-Khazin. Il faudra attendre plus de quatre siècles pour que Fermat démontre que les trois problèmes que vous voyez sont impossibles. Apparemment, Fermat ne connaissait pas le livre des carrés de Fibonacci. Pourquoi donc : parce qu'il avait été perdu, oublié ?

aucun carré ne peut être un nombre congru
Fibonacci, Liber Quadratorum (1225)

$$\exists x, y, z, c \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x^2 &= y^2 - c^2 \\ z^2 &= y^2 + c^2 \end{cases}.$$

$$\exists a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a^2 = b^4 - c^4 .$$

$$\exists a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a^4 + b^4 = c^4 .$$

22 Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (1447–1517)

Non, pas vraiment : Les livres de Fibonacci ont été soigneusement étudiés par cet homme, Luca Pacioli, un copain de Léonard de Vinci.

Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (1447–1517)

23 Summa de arithmetica (1494)

Il en a tiré ce livre, la Somme d'Arithmétique, écrit en italien et non en latin, qui a joué pour les mathématiques européennes du seizième siècle, le rôle que le livre de l'abaque avait joué pendant les trois siècles précédents.

On y trouve non seulement les méthodes algébriques du livre de l'abaque, mais aussi la notion de nombre congru venant du livre des carrés.

Summa de arithmetica (1494)
Luca Pacioli (1447–1517)


Summa de
Arithmetica geo
metria. Proportioni: et proportionalita:

Continentia de tutta lopera.

24 Niccolò Fontana Tartaglia (1499–1557)

Un demi-siècle après Pacioli, Tartaglia reprend le problème dans son magistral « Trattato di Numeri », le traité des nombres.

Pacioli puis Tartaglia avaient écrit en italien, et cela pourrait expliquer que Fermat n'en ait pas eu connaissance ?

Niccolò Fontana Tartaglia (1499–1557)

25 L'arithmétique de Nicolas Tartaglia (1578)

Pas du tout : les œuvres de Tartaglia ont été traduites en français par Guillaume Gosselin, de Caen, qui qualifie Tartaglia de grand mathématicien et prince des praticiens. On trouve dans le livre un chapitre sur les nombres congrus, dans lequel Pacioli et Fibonacci sont cités plusieurs fois.

L'arithmétique de Nicolas Tartaglia (1578)
Guillaume Gosselin (ca 1533–1590)


L'ARITHMETIQVE
DE NICOLAS
TARTAGLIA BRESCIAN,
GRAND MATHEMATICIEN,
ET PRINCE DES PRATICIENS.
Diuisée en deux parties.
La declaration se verra en la page suyuante:
Recueillie & traduite d'Italien en François, par
GVILLAVME GOSSELIN de Caen.
Auec toutes les demonstrations Mathematiques: & plusieurs inuentions dudit GOSSELIN, esparses chacune en son lieu.

26 il faut icy auoir sel en bouche

il faut icy auoir sel en bouche
Gosselin, L'arithmétique de Nicolas Tartagia (1578)

« Frère Luc du Bourg (il s'agit de Pacioli) en dit plus en cet endroit, par l'autorité de Léonard de Pise : il faut ici avoir sel en bouche, car c'est une matière très difficile : souvent si on propose un nombre, il n'aura pas de carré congruent, et savoir quand on peut trouver un carré congruent est très difficile, comme le montrera l'expérience. »

Dauantage dit en cet endroit Frere Luc du Bourg par l'autorité de Leonard Pisan, qu'il faut icy auoir sel en bouche, pour estre matiere tres difficile, pourautant qu'il dit que beaucoup de fois on nous proposera un nõbre, à sçauoir si on luy pourra trouuer vn quarré Cõgruent, ce qui est tres difficile à cognoistre, ainsi que l'experiẽce le monstrera.

27 références

références

Je n'ai pas trouvé l'expression « avoir sel en bouche » dans les dictionnaires anciens. J'imagine qu'elle fait référence à une des deux fonctions symboliques du sel, la purification, comme dans le baptême, ou la sagesse, et je pencherais plutôt pour la seconde. J'espère que cela ne vous empêchera pas de goûter tout le sel de cette histoire, qui pour une fois, n'a absolument rien de salace.

- K. Devlin (2011) *The man of numbers, Fibonacci's arithmetic revolution*, New York : Walker
- L. Sigler (2002) *Fibonacci's Liber Abaci*, New York : Springer
- L. Sigler (1987) *Leonardo Pisano Fibonacci : The book of squares*, Boston : Academic Press
- P. Ver Eecke (1952) *Leonard de Pise : le livre des nombres carrés*, Paris : Blanchard
- M. Moyon (2016) *Fibonacci, Liber Abaci, textes choisis et traduits*, Paris : ACL-Kangourou
- R. Rashed (1979) L'analyse diophantienne au Xe siècle : l'exemple d'al-Khazin, *Revue d'Histoire des Sciences*, 32(3), 193–222