0 De maximis et minimis

Le calcul différentiel et le calcul intégral ont commencé tous les deux bien avant Newton et Leibniz. On en trouve les prémisses dans les éléments d'Euclide. Mais la transmission de l'héritage grec a été différente dans les deux cas. Pour le calcul intégral, je vous raconte dans d'autres histoires les quadratures d'Archimède, celles de Thabit ibn Qurra, puis les calculs d'aires, de volumes et de centres de gravité, du dix-septième siècle européen.

Dans cette histoire-ci, il va être question de calcul différentiel, et en particulier de la lente maturation de la notion de dérivée, bien avant que Newton et Leibniz ne s'en emparent.

histoires d'analyse

De maximis et minimis

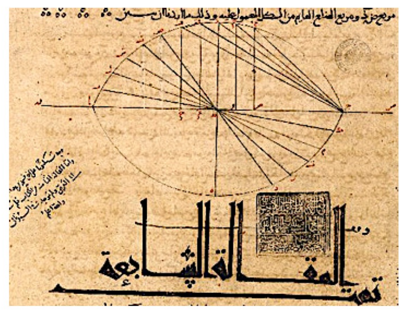
prémisses du calcul différentiel

hist-math.fr Bernard YCART

1 Apollonius (ca 240–190 av. J.-C.)

Apollonius (ca 240–190 av. J.-C.)

Coniques, Bibliothèque Bodleienne Manuscrit Marsh 144 (1070)



Il y a, dans le troisième livre des éléments d'Euclide, un certain nombre de propositions qui se rapportent aux tangentes du cercle. Si on excepte quelques autres travaux qui ont été perdus, on peut considérer que la théorie géométrique des tangentes, démarre avec les Coniques d'Apollonius. Ecoutez comment il présente le livre cinq.

2 Livre V : Maximales et minimales

« Dans ce livre se trouvent des propositions sur les lignes maximales et minimales. Il faut que tu saches que nos prédécesseurs et nos contemporains ne se sont que peu attachés à l'examen des minimales, et ont montré, grâce à cela, quelles sont les droites qui touchent les sections, et aussi la réciproque ; c'est-à-dire ce qui advient aux droites qui touchent les sections, de telle sorte que, si cela advient, les droites soient tangentes.

[. . .] Quant aux propositions dans lesquelles nous nous sommes exprimé sur les lignes minimales, nous les avons distinguées et isolées, à part, après un long examen ; et nous avons réuni tout ce qui en est dit à ce qui est dit des lignes maximales que nous avons expliquées auparavant. »

Livre V : Maximales et minimales

Apollonius (ca 240–190 av. J.-C.) Coniques

Dans ce livre se trouvent des propositions sur les lignes maximales et minimales. Il faut que tu saches que nos prédécesseurs et nos contemporains ne se sont que peu attachés à l'examen des minimales, et ont montré, grâce à cela, quelles sont les droites qui touchent les sections, et aussi la réciproque ; c'est-à-dire ce qui advient aux droites qui touchent les sections, de telle sorte que, si cela advient, les droites soient tangentes.

[. . .] Quant aux propositions dans lesquelles nous nous sommes exprimé sur les lignes minimales, nous les avons distinguées et isolées, à part, après un long examen ; et nous avons réuni tout ce qui en est dit à ce qui est dit des lignes maximales que nous avons expliquées auparavant.

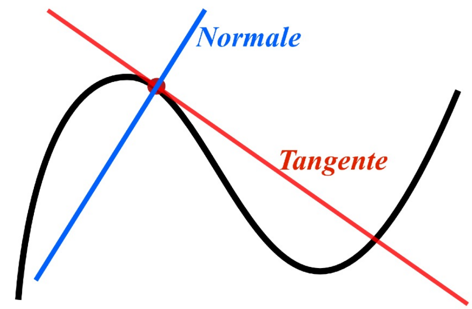
3 Tangente et Normale, Maximale et Minimale

Que sont ces lignes maximales et minimales ?

Si d'un point extérieur à une courbe, vous cherchez un segment de plus courte distance, celui-ci sera porté par une normale à la courbe. Si vous cherchez à mener un segment de longueur maximale, qui intersecte la courbe, celui ci sera porté par une tangente à la courbe.

Enfin, au moins si la courbe est suffisamment régulière, et suffisamment simple, et si on oublie de nombreux cas particuliers. Pour les coniques, on peut faire une théorie de ces lignes maximales et minimales, donc des tangentes et des normales. C'est ce qu'a fait Apollonius.

Tangente et Normale, Maximale et Minimale
Apollonius (ca 240–190 av. J.-C.) Coniques



4 Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Le manuscrit des Coniques que je vous ai montré plus tôt était une copie, datant du onzième siècle, de la traduction des coniques par Thabit ibn Qurra. Je lui consacre toute une histoire à propos de sa quadrature de la parabole, nous n'allons pas recommencer !

Vous l'avez déjà écoutée ? Ah, ça me fait plaisir, merci. Concernant les maximales et les minimales, Thabit ibn Qurra avait bien mis à profit sa lecture du livre V d'Apollonius. Quand il écrit un traité sur les sections du cylindre, le chapitre trois a pour titre « De la section maximale du cylindre et de ses sections minimales ».

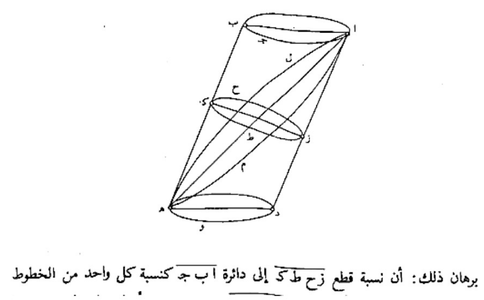
Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

5 Sections maximale et minimale

Pour Thabit Ibn Qurra, un cylindre est engendré par deux cercles dans des plans parallèles. Il démontre soigneusement l'existence d'une section minimale, au sens où son aire est la plus petite de toutes les autres sections elliptiques. Le plan qui engendre cette section minimale est orthogonal à l'axe du cylindre. Il existe aussi une section maximale, entre les deux cercles.

L'héritage de Thabit ibn Qurra sera mis à profit par ses successeurs, en particulier al-Haytham. Une vraie avancée viendra au douzième siècle d'un algébriste, continuateur de Omar Khayyam, qui s'appelle Sharaf al-Din al-Tusi. Attention, je vous parle souvent de Nadir al-Din al-Tusi, qui vivait au treizème siècle. Ce n'est pas le même. Euh... je suis d'accord avec vous, ça n'aide pas.

Sections maximale et minimale
Thābit ibn Qurra (ca. 826–901) Sur les sections du cylindre



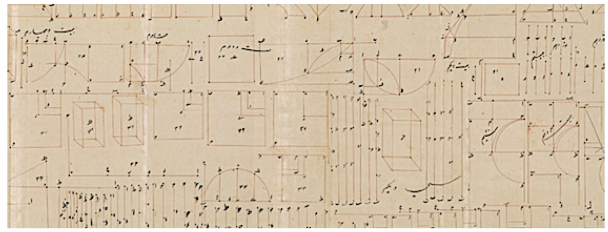
6 al-Mu`ādalāt (Les équations)

Ce Sharaf al-Tusi, prend l'algèbre là où Omar Khayyam l'avait laissée, un siècle plus tôt. Rappelez-vous : Khayyam avait classifié toutes les équations de degré trois, et pour chaque classe, il avait exprimé les solutions comme l'intersection de deux coniques.

Sharaf al-Tusi lui, donne en plus une méthode de recherche des valeurs numériques des solutions. C'est l'ancêtre de ce que nous appelons la méthode de Newton, qui avait été anticipée par Viète avant Newton. Vous expliquer comment al-Tusi s'y prend serait un peu long, et hors sujet par rapport à cette histoire. Ce n'est pas cette compilation de figures à la fin de son livre qui va nous en apprendre plus.

Sachez juste qu'il associe à chaque équation de degré trois, un polynôme du second degré, dans lequel nous reconnaissons la dérivée du polynôme de degré trois initial. Je dis bien « nous reconnaissons », car rien ne nous dit que pour al-Tusi ce polynôme dérivé avait son sens analytique. Par exemple, il ne parle jamais de tangente. Mais tout de même, al-Tusi affirme clairement que pour trouver des valeurs maximales ou minimales d'un polynôme de degré trois, il faut annuler le polynôme dérivé.

al-Mu`ādalāt (Les équations)
Sharaf al Din al Tusi (ca 1135–1213)



7 Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

C'est à peu près ce que redira Fermat quatre cent cinquante ans plus tard.

Mais Fermat ne partait pas des mêmes bases que Sharaf al-Tusi. Quand il invente sa méthode vers 1629, il ne dispose ni du cinquième livre des coniques d'Apollonius, ni bien sûr des travaux des Arabes. S'il appelle sa méthode « De maximis et minimis », c'est parce qu'il connaît la collection mathématique de Pappus, et que Pappus évoque le cinquième livre d'Apollonius, mais il n'en sait pas plus. Ce fameux cinquième livre ne sera redécouvert que trente ans plus tard.

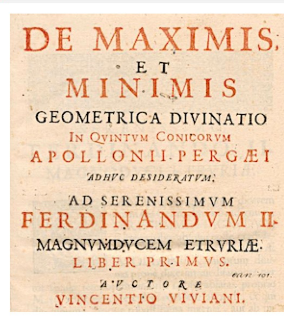
Pierre de Fermat (ca 1606–1665)
De maximis et minimis (1629)

8 De Maximis et Minimis (1659)

Je vous ai déjà raconté l'exploit retentissant de Viviani, le dernier disciple de Galilée. Viviani travaillait depuis quelque temps à reconstituer le cinquième livre d'Apollonius, quand il avait appris qu'un autre mathématicien, Borelli, avait retrouvé dans une bibliothèque un manuscrit arabe qui contenait la traduction de trois des livres perdus, dont le cinquième.

Viviani se dépêche de terminer sa propre reconstitution, et refuse de recevoir la moindre information de Borelli. Son livre paraît en 1659 : « de maximis et minimis, divination géométrique du cinquième livre d'Apollonius ».

De Maximis et Minimis (1659)
Vincenzo Viviani (1622–1703)


DE MAXIMIS,
ET
MINIMIS
GEOMETRICA DIVINATIO
IN QVINTVM CONICORVM
APOLLONII PERGÆI
ADHVC DESIDERATVM.
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM II.
MAGNVM DVCEM ETRVRIÆ.
LIBER PRIMVS.
AVCTORE
VINCENTIO VIVIANI.

9 Apollonii Pergæi Conicorum (1661)

Quelque temps plus tard paraît la traduction du manuscrit arabe, publiée par Borelli. La comparaison est très flatteuse pour Viviani : de l'avis des spécialistes, non seulement Viviani a parfaitement deviné le contenu du livre d'Apollonius, mais il a su aller plus loin sur plusieurs points importants.

Bien sûr il ne s'agit que de construire géométriquement les normales et tangentes à des courbes particulières : les coniques. La méthode de Fermat est beaucoup plus générale, puisqu'elle s'applique à n'importe quelle courbe dont on connaît une équation polynomiale. Surtout elle n'est plus uniquement géométrique, elle est aussi algébrique.

Enfin quand je dis la méthode de Fermat, c'est plutôt les méthodes, car il a donné plusieurs versions dans des lettres à ses correspondants, sans jamais rien publier, ni démontrer, et bien sûr sans dire comment il avait trouvé cela. Que voulez-vous, c'est Fermat !

Pour vous donner une idée plus précise, je vous propose de suivre un exemple de recherche de maximum, dans les propres mots de Fermat.

Apollonii Pergæi Conicorum (1661)

Giovanni Alfonso Borelli (1608–1679)


APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.
PARAPHRASTE
ABALPHATO ASPHAHANENSI
Nunc primùm editi.
ADDITVS IN CALCE
ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER,
EX CODICIBVS ARABICIS MSS.
SERENISSIMI
MAGNI DVCIS ETRVRIÆ
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA
In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit.
IO: ALFONSVS BORELLVS
In Pisana Academia Mathefeos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.

10 Recherche de maximum

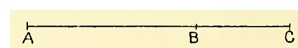
« Je veux par ma méthode couper la ligne AC donnée, en un point B, de sorte que le volume compris sous le carré de AB et le segment BC soit le plus grand de tous les volumes décrits de la même façon, à partir d'un autre point. »

Vous voyez la figure, elle est très simple. La longueur AC est donnée. On cherche le point B entre A et C, de sorte que le produit du carré de la longueur AB par la longueur BC soit maximal.

Recherche de maximum

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

Je veux par ma méthode *couper la ligne* AC *donnée en telle sorte au point* B, *que le solide compris soubs le quarré de* AB *et la ligne* BC *soit le plus grand* de tous les solides descrits de mesme sorte, en coupant AC en quelque autre point que ce soit.



11 Recherche de maximum

« Posons en notes (c'est à dire en symboles), que la ligne AC s'appelle grand B et la ligne AB inconnue grand A, BC sera $B - A$. Il faudra donc que le solide Aq in $B - Ac$ satisfasse à la question. »

Les notations nous sont peu familières. Fermat utilise celles de Viète. Les données sont des consonnes, ici grand B. Les inconnues sont des voyelles, ici grand A. Le « in » note le produit, petit q le carré, petit c le cube.

Je vous propose une traduction moderne : la donnée sera petit b et l'inconnue petit x. Le problème posé consiste à maximiser x^2 fois $(b - x)$, donc $bx^2 - x^3$, pour x entre 0 et b.

Voyons comment Fermat s'y prend.

Recherche de maximum

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

Posons en notes que la ligne AC s'appelle B et la ligne AB inconnue A, BC sera $B - A$. Il faudra donc que le solide Aq in $B - Ac$ satisface à la question.

$$\mathrm{AC} = b\,, \quad \mathrm{AB} = x\,, \quad \mathrm{BC} = b - x$$

$$\operatorname*{arg\,max}_{x\in[0,b]} x^2(b - x)$$

12 adæqualitatem comme Diophante l'appelle

« Prenons derechef au lieu de A, $A+E$; le solide qui se fera du carré de $A+E$ et de $B-A-E$ sera, etc. » Donc Fermat remplace A par $A+E$, et refait le calcul de la fonction objectif. Par rapport aux notations, E est une autre inconnue, que j'ai sournoisement appelée epsilon. Bis et Ter signifient deux fois et trois fois. Vous voyez en bleu la formule traduite terme à terme. Ensuite Fermat compare avec la première valeur, pour nous $bx^2 - x^3$, par ce qu'il appelle « adégalité ». Beaucoup d'encre a coulé sur ce terme d'adégalité, et il est impossible de savoir ce qu'il signifiait exactement pour Fermat. Pensons « presque égal » ou bien « égal en quelque sorte », et continuons.

adæqualitatem comme Diophante l'appelle

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

Prenons derechef au lieu de A, $A+E$; le solide qui se fera du quarré de $A+E$ et de $B-A-E$ sera :

$$B \text{ in } Aq. + B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}$$

$$-Ac. - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.$$

Je le compare avec le premier solide

$$Aq \text{ in } B - A$$

comme s'ils estoient esgaux, bien qu'en effect ils ne le soient pas, et i'ay appellé en mon escrit latin cette sorte de comparaison *adæqualitatem* comme Diophante l'appelle.

$$bx^2 + b\epsilon^2 + 2bx\epsilon - x^3 - 3x\epsilon^2 - 3x^2\epsilon - \epsilon^3$$

13 Recherche de maximum

« Cela fait de ces deux solides, j'en ôte ce qu'ils ont de commun, qui est B A carré moins A cube, etc. »

Donc Fermat a calculé la fonction objectif pour A et $A+E$ et il simplifie les termes communs. Il reste zéro d'un côté, des termes positifs et négatifs de l'autre. Nous sommes encore au temps où l'on aime bien égaler des quantités positives. Fermat met donc les plus dans un membre et les moins dans l'autre.

Viennent ensuite deux étapes cruciales. Je les marque uniquement en notation moderne.

Recherche de maximum

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

Cela fait de ces deux solides, j'en oste ce qu'ils ont de commun, qui est

$$B \text{ in } Aq. - Ac. \,;$$

Après quoi il ne reste rien plus d'un costé ; et de l'autre il reste

$$B \text{ in } Eq + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} - A \text{ in } Eq \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.$$

Il faut donc comparer les homogènes qui sont marquéz du signe $+$ avec ceux qui sont marquéz du signe $-$, et faire derechef comparaison *adæqualitatem* entre

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}$$

d'un côté et

$$A \text{ in } Eq. \text{ ter} + Aq. \text{ in } E \text{ ter} + E \text{ in } c.$$

$$b\epsilon^2 + 2bx\epsilon \simeq 3x\epsilon^2 + 3x^2\epsilon + \epsilon^3$$

14 Recherche de maximum

Fermat a bien conscience que dans la différence, tous les termes ont epsilon en facteur. Il divise donc par epsilon. C'est la seconde équation. Certains termes contenaient seulement un facteur epsilon, et donc on ne peut plus simplifier par epsilon. Mais Fermat est bien conscient que cela pourrait ne pas être le cas, et il préconise de simplifier par epsilon autant qu'il est possible.

Alors vient la seconde étape : il élimine froidement tous les termes qui contiennent encore epsilon. Il arrive ainsi à une équation qui lui permet d'écrire l'inconnue x en fonction du paramètre b, et affirme que la solution qu'il cherchait est x égale deux tiers de b.

Ne comptez pas sur lui pour vous dire pourquoi. Ne comptez pas sur lui non plus pour mentionner la solution $x = 0$, ni pour prouver que x égale deux tiers de b correspond bien à un maximum.

Recherche de maximum

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

$$b\epsilon^2 + 2bx\epsilon \simeq 3x\epsilon^2 + 3x^2\epsilon + \epsilon^3$$

$$b\epsilon + 2bx \simeq 3x\epsilon + 3x^2 + \epsilon^2$$

$$2bx = 3x^2$$

$$x = \frac{2}{3}b$$

15 Recherche de maximum

De notre point de vue, la méthode de Fermat est limpide. Si f est la fonction objectif, Fermat calcule $f(x+\epsilon)-f(x)$, puis il divise par epsilon pour avoir l'accroissement. Annuler les termes où epsilon reste en facteur, revient à prendre la limite quand epsilon tend vers zéro, c'est-à-dire la dérivée. Le maximum est bien atteint au point où la dérivée s'annule. Quelques années plus tard, Fermat comprendra en plus que le signe du terme en grand E au carré, indique la nature de l'extremum, maximum ou minimum. Pour nous le coefficient du terme en E au carré, c'est la dérivée seconde.

Sauf qu'en parlant de dérivée, en remplaçant le grand E de Fermat par epsilon, nous avons projeté notre propre vision, en imaginant que epsilon était destiné à tendre vers 0. Or Fermat ne dit strictement rien qui puisse permettre de penser qu'il considérait son grand E comme une quantité infinitésimale, ou évanouissante, comme on dira bien après lui. Sa méthode est strictement algébrique, elle s'applique à une équation polynômiale, et arrive au résultat par un algorithme en un nombre fini de pas, dont aucun n'utilise une quelconque limite.

La méthode de Fermat lui permet non seulement de calculer des maxima et minima, mais aussi des tangentes et des centres de gravité, qu'il écrit comme des solutions de problèmes d'optimisation. Malgré la limitation aux polynômes, c'est incontestablement un progrès sur tous ses prédécesseurs.

Recherche de maximum

Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

$$f(x)=bx^2-x^3$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}=f'(x)=2bx-3x^2$$

16 René Descartes (1596–1650)

Un qui n'est pas d'accord, mais alors vraiment pas du tout, c'est René Descartes. Les choses se sont passées de la façon suivante. Le Discours de la Méthode, avec ses Appendices, dont la Dioptrique et la Géométrie, est paru en 1637. Peu avant la parution, Fermat s'était procuré la Dioptrique, dont il avait critiqué plusieurs arguments. Cela n'avait évidemment pas plu à Descartes, avec le caractère que vous lui connaissez.

Il se trouve que dans sa Géométrie, Descartes propose lui aussi, une méthode algébrique pour trouver des normales et des tangentes. Voici ce qu'il en dit.

René Descartes (1596–1650)

Discours de la Méthode (1637)

17 La géométrie, Livre II

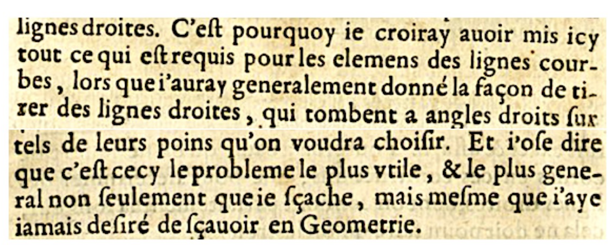
« C'est pourquoi je croirai avoir mis ici tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j'aurai généralement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile, et le plus général non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré savoir en géométrie. »

Ayant lu ceci, Fermat rédige enfin sa méthode qui était restée confidentielle jusque-là, et l'envoie à Mersenne, qui la communique à Descartes, lequel comme il fallait s'y attendre, pousse des hauts cris.

Pendant plusieurs années, les échanges de missiles entre Fermat et Descartes, souvent par Mersenne interposé, se sont succédés. Je ne vous donne que deux extraits pour que vous vous fassiez une idée du ton.

La géométrie, Livre II

Descartes, Discours de la Méthode (1637)



lignes droites. C'eſt pourquoy ie croiray auoir mis icy tout ce qui eſt requis pour les elemens des lignes courbes, lors que i'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent a angles droits ſur tels de leurs poins qu'on voudra choiſir. Et i'oſe dire que c'eſt cecy le probleme le plus vtile, & le plus general non ſeulement que ie ſçache, mais meſme que i'aye iamais deſiré de ſçauoir en Geometrie.

18 Lettre à Mersenne (février 1638)

« J'ai appris par votre lettre que ma réplique à M. Descartes n'était pas appréciée, que même il avait trouvé à redire à mes méthodes *de maximis et minimis et de tangentibus*[...]. C'est une vérité géométrique, et je soutiens que mes méthodes sont aussi certaines que la construction de la première proposition des Éléments d'Euclide. Peut-être que les ayant proposées simplement et sans démonstration, elles n'ont pas été comprises ou qu'elles ont paru trop faciles à M. Descartes, qui a fait tant de chemin et a pris une voie si pénible pour ces tangentes dans sa Géométrie.

[...] Je ne vous enverrai donc plus rien pour M. Descartes, puisqu'il met des lois si sévères à un commerce innocent, et je me contente de vous dire que je n'ai trouvé encore personne ici qui ne soit de mon avis, que sa Dioptrique n'est pas prouvée. »

Descartes, qui avait compris la méthode de Fermat de travers, commence par essayer de démontrer qu'elle est fausse. Au bout de quelques mois, il se ravise.

Lettre à Mersenne (février 1638)
Pierre de Fermat (ca 1606–1665)

J'ai appris par votre lettre que ma réplique à M. Descartes n'étoit pas goûtée, que même il avoit trouvé à dire à mes méthodes *de maximis et minimis et de tangentibus*[...]. C'est une vérité géométrique, et je soutiens que mes méthodes sont aussi certaines que la construction de la 1re proposition des Éléments. Peut-être que les ayant proposées nuement et sans démonstration, elles n'ont pas été entendues ou qu'elles ont paru trop aisées à M. Descartes, qui a fait tant de chemin et a pris une voie si pénible pour ces tangentes dans sa Géométrie.

[...] Je ne vous envoierai donc plus rien pour M. Descartes, puisqu'il met des loix si sévères à un commerce innocent, et me contente de vous dire que je n'ai trouvé encore personne ici qui ne soit de mon avis, que sa Dioptrique n'est pas prouvée.

19 Lettre à Hardy (Juin 1638)

« Concernant ce que j'ai dit, dès mon premier écrit, qu'on pouvait la rendre bonne en la corrigeant, et que j'ai toujours soutenu la même chose depuis, je suis sûr que vous ne serez pas fâché que je vous en dise ici le fondement ; aussi bien je me persuade que ces Messieurs, qui l'estiment tant, ne la comprennent pas, ni peut-être même celui qui en est l'auteur. »

Donc Fermat n'a rien compris, heureusement que Descartes est là pour tout expliquer !

Bon, tout cela n'est pas bien grave. Plus importante est la postérité des idées de Fermat. Je vous ai dit que rien dans ce qu'avait laissé Fermat, ne permet de savoir ce qu'il avait exactement en tête. En particulier, on ne connaît pas le statut de la variable auxiliaire grand E. Le premier à prononcer à son propos l'expression fatidique « infiniment petit » est Christian Huygens.

Il le fait dans une communication à la toute nouvelle Académie des sciences de Louis XIV, en 1667. Le titre est « Démonstration de la règle de Maximis et Minimis ».

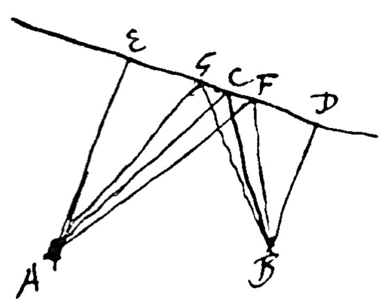
Lettre à Hardy (Juin 1638)
René Descartes (1596–1650)

Mais pour ce que i'ay mis, dés mon premier Escrit, qu'on la pouuoit rendre bonne en la corrigeant, & que i'ay toûjours depuis soûtenu la mesme chose, ie m'assure que vous ne serez pas marry que ie vous en die icy le fondement ; aussi bien ie me persuade que ces Messieurs, qui l'estiment tant, ne l'entendent pas, ny peut-estre mesme celuy qui en est l'Autheur.

20 Demonstratio regulæ de Maximis et Minimis (1667)

Cette figure est extraite du propre manuscrit de Huygens. L'exemple qu'il prend est le suivant. Étant donnée une droite et deux points A et B, comment choisir le point C de sorte que la somme des carrés des distances AC et BC soit minimale ? Huygens modélise le problème sous forme algébrique, écrit sa fonction objectif comme un polynôme, il note petit e la quantité que Fermat notait grand E, puis il dit :

Demonstratio regulæ de Maximis et Minimis (1667)
Christiaan Huygens (1629–1695)



21 Demonstratio regulæ de Maximis et Minimis (1667)

Demonstratio regulæ de Maximis et Minimis (1667)

Christiaan Huygens (1629–1695)

En prenant e infiniment petite, la même équation donnera la valeur de EG lorsqu'elle est égale à EF.

Ensuite on divise tous les termes par e et on détruit ceux qui après cette division, contiennent encore cette lettre, puisqu'ils représentent des quantités infiniment petites par rapport à ceux qui ne renferment plus e.

« En prenant e infiniment petite, la même équation donnera la valeur de EG lorsqu'elle est égale à EF.

Ensuite on divise tous les termes par e et on détruit ceux qui après cette division, contiennent encore cette lettre, puisqu'ils représentent des quantités infiniment petites par rapport à ceux qui ne renferment plus e. »

Il n'y a plus d'ambigüité : Fermat est officiellement intronisé présurseur du calcul différentiel.

22 Constantijn Huygens et ses cinq enfants (1640)

Constantijn Huygens et ses cinq enfants (1640)

Je vous montre toujours le même portrait de Huygens, alors pour une fois, le voici enfant. Enfin presque : je n'ai pas réussi à savoir exactement où il est représenté. En haut vous voyez sa petite sœur Suzanne. Christian était le second, il avait onze ans sur ce portrait. Je vous laisse deviner où il est. Le médaillon gravé en bas de l'image dit en latin « Voici la descendance du maître ». Le maître en question, Constantin Huygens, pouvait être fier de sa descendance : les fratries de cinq enfants, tous vivants, n'étaient pas courantes. Par contre la mère des cinq enfants, elle, n'avait pas survécu à la naissance de la petite dernière.

23 Constantijn Huygens et Suzanna van Baerle (1635)

Constantijn Huygens et Suzanna van Baerle (1635)

La voici avec son mari deux ans avant sa mort. Ils lisent une partition. La fortune personnelle de Constantin lui permettait de s'offrir ces beaux portraits. Elle lui permettait aussi de consacrer sa vie à la musique et à la poésie, après avoir été diplomate en Angleterre. Il a pu aussi offrir une bonne éducation à ses enfants, dont Christian.

Mais revenons aux infiniment petits. Au moment où Huygens expliquait à Paris la méthode de Fermat, une révolution d'une autre ampleur couvait en Angleterre.

24 Isaac Newton (1643–1727)

Isaac Newton (1643–1727)

On a retrouvé le brouillon d'une lettre de Newton, où il reconnaît ce qu'il doit à ses prédécesseurs. Voici ce qu'il dit : « J'ai eu l'indication de cette méthode par la manière dont Fermat trace les tangentes, et en l'appliquant à des équations abstraites, de manière directe et inverse, je l'ai rendue générale. M. Gregory et le docteur Barrow ont utilisé et amélioré la même méthode pour tracer des tangentes. »

25 Isaac Barrow (1630–1677)

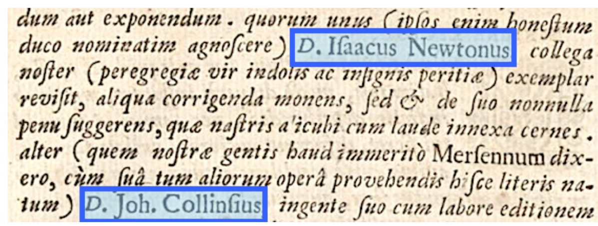
Isaac Barrow (1630–1677)

Il ne semble pas que Gregory ait directement influencé Newton. Par contre Barrow est responsable d'une bonne partie de sa formation mathématique. C'est lui qui a accueilli Newton à Cambridge en 1664, et qui lui a enseigné ses théories sur l'optique et sur la géométrie. Ces mêmes cours qui ont été enseignés à Newton, Barrow les a publiés en 1670.

Dans la préface, Barrow remercie les amis qui l'ont aidé à mettre au monde le livre…

26 Lectiones Geometriæ (1670)

Lectiones Geometriæ (1670)
Isaac Barrow (1630–1677)



dum aut exponendum. quorum unus (ipſos enim honeſtum duco nominatim agnoſcere) D. Iſaacus Newtonus collega noſter (peregregiæ vir indolis ac inſignis peritiæ) exemplar reviſit, aliqua corrigenda monens, ſed & de ſuo nonnulla penu ſuggerens, quæ naſtris alicubi cum laude innexa cernes. alter (quem noſtræ gentis haud immeritò Merſennum dixero, cùm ſuâ tum aliorum operâ provehendis hiſce literis natum) D. Joh. Collinſius ingente ſuo cum labore editionem

« Parmi lesquels, car il est juste que vous connaissiez leur nom, Isaac Newton (un homme remarquablement doué et d'un savoir faire exceptionnel) a revu le manuscrit, signalant quelques erreurs, et ajoutant quelques éléments non négligeables de son propre travail, que vous trouverez cités avec louanges ici et là. »

L'autre collègue remercié est John Collins, que Barrow qualifie de « Mersenne de notre nation ». Effectivement les archives de sa correspondance seront une aide précieuse dans la querelle avec Leibniz.

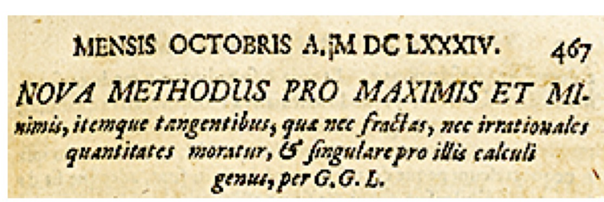
27 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Justement Leibniz, parlons-en : parmi les travaux de ses prédécesseurs, desquels s'est-il inspiré ? Durant son séjour à Paris, de 1672 à 1676, il a soigneusement étudié Descartes et Pascal ; il a surtout bénéficié des conseils et des leçons de Huygens. On sait aussi qu'il avait acheté le livre de Barrow en 1673. Sa propre théorie a été mise au point entre 1673 et 1675, même si sa première publication ne date que de 1684. Voici le titre.

28 Nova methodus pro maximis et minimis (1684)

Nova methodus pro maximis et minimis (1684)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)



MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MI-
nimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales
quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi
genus, per G. G. L.

« Une nouvelle méthode pour trouver les maxima et les minima, de même pour les tangentes, avec un seul type de calcul pour celles-ci, qui n'est arrêté ni par les fractions, ni par les quantités irrationnelles. »

Leibniz nous dit donc par son titre, d'une part que sa méthode se situe dans la droite ligne de celle de Fermat, d'autre part que son calcul différentiel n'est plus limité aux polynômes.

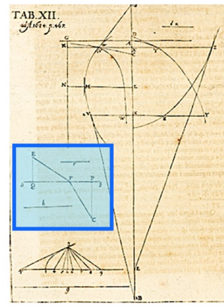
29 Nova methodus pro maximis et minimis (1684)

Maintenant regardez la planche de figures qui accompagne l'article. La plus grande explique le calcul des tangentes. Celle qui est encadrée en bleu illustre l'application principale que Leibniz donne de sa méthode dans cet article : l'explication du phénomène de réfraction.

Il s'agit d'obtenir la loi des sinus en calculant le plus court chemin que peut parcourir la lumière dans deux milieux différents. Cette loi est appelée parfois Loi de Descartes, de manière doublement impropre. D'une part, Descartes n'était pas le premier à l'énoncer, d'autre part l'explication qu'il en donne dans sa Dioptrique est fausse, et Fermat ne s'était pas privé de le démontrer. Bien sûr, Fermat avait appliqué sa propre méthode de Maximis et Minimis pour donner une explication correcte. C'est également ce que fait Leibniz.

Nova methodus pro maximis et minimis (1684)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)



30 références

Non, je n'ai pas voulu minimiser le double exploit de Newton et Leibniz. Leur invention marque un tournant majeur dans l'histoire des mathématiques, et même si plusieurs autres avaient tourné autour des mêmes concepts avant eux, c'est bien eux qui ont su synthétiser les méthodes antérieures, et introduire une véritable rupture.

Comment ? Non, moi je ne dis rien de nouveau, j'en suis bien incapable. D'ailleurs vous n'avez qu'à lire les références, vous les avez sous les yeux.

références

- J. Bair, V. Henry (2006) Étude épistémologique sur la méthode de Fermat pour la recherche d'extrémums, *Mathématique et Pédagogie*, 156, 49-61
- S. Bella (2018) *De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690–1706)*, Nantes : Thèse de Doctorat, Université Bretagne Loire
- E. Giusti (2009) Les méthodes des maxima et minima de Fermat, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 18(2), 59-85
- M. Grégoire (1998) La correspondance entre Descartes et Fermat, *Revue d'histoire des sciences*, 51(2-3), 355-362
- M. G. Katz, D. M. Schaps, S. Shnider (2013) Almost equal : the method of adequality from Diophantus to Fermat and beyond, *Perspectives on Science*, 21(3), 283–324
- A. Michel-Pajus (2016) La querelle sur les tangentes entre Descartes et Fermat, *Bulletin de l'APMEP*, 519, 301-309