Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Le jet d'eau de Sans-Souci

Comment vous parler des exploits d'Euler dans l'histoire de l'analyse sans y consacrer des dizaines d'histoires ? Il y en a eu tant ! Les séries, les équations différentielles, la fonction gamma, la fonction zéta. Vous finiriez par vous lasser de m'entendre chanter ses louanges. Cette fois-ci, je voudrais vous parler d'exploits d'autant plus impressionnants qu'ils n'ont été compris et appréciés à leur juste valeur, que bien après la mort d'Euler.

histoires d'analyse

Le jet d'eau de Sans-Souci

exploits d'Euler

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Leonhard Euler (1707–1783)

L'histoire se déroule entre 1748 et 1760. Euler est à l'apogée de sa productivité. Il est arrivé à Berlin en 1741, attiré à l'Académie des sciences par le roi Frédéric II de Prusse.

Leonhard Euler (1707–1783)
Emmanuel Handmann (1753)

2 Frédéric II de Prusse (1712–1786)

Pendant les 25 années qu'il a passées à Berlin, Euler a écrit plus de 380 mémoires ou livres. Le nombre seul est déjà inouï dans l'histoire des mathématiques. Mais il y avait en plus la profondeur, l'originalité, la diversité des sujets, des études de physique les plus appliquées, aux calculs mathématiques les plus abstraits.

Frédéric II est incapable de se rendre compte du travail qu'Euler accomplit à Berlin. Il est beaucoup plus sensible à la poésie, à ce qu'il appelle « le bel esprit » à la française. En clair, il préfèrerait de beaucoup attirer Voltaire à Berlin. Il le lui écrit sans détours. Nous sommes fin novembre 1748, Voltaire prétexte les exigences d'Émilie du Châtelet pour se faire prier. Soit dit en passant, Émilie a un nouvel amant, et ce n'est certainement pas elle qui empêche Voltaire de se rendre à Berlin. Mais bref...

Frédéric II de Prusse (1712–1786)
Antoine Pesne (1745)

3 un gros cyclope de géomètre

« Les nouvelles publiques m'ont mis de mauvaise humeur. Je trouve que comme vous n'êtes point à Paris, vous seriez tout aussi bien à Berlin qu'à Lunéville. Si madame du Châtelet est une femme à composition, je lui propose de lui emprunter son Voltaire à gage. Nous avons ici un gros cyclope de géomètre que nous lui engagerons contre le bel-esprit ; mais qu'elle se détermine vite. Si elle souscrit au marché, il n'y a point de temps à perdre. Il ne reste plus qu'un œil à notre homme ; et une courbe nouvelle qu'il calcule à présent pourrait le rendre aveugle tout-à-fait avant que notre marché fût conclu. Faites-moi savoir sa réponse, et recevez en même temps de bonne part les profondes salutations que ma muse fait à votre puissant génie. »

Pour mieux flatter Voltaire, Frédéric tente de se montrer spirituel, en se moquant du handicap physique d'Euler. Il ne réussit qu'à être vulgaire. Pour comprendre ce que Frédéric reproche à Euler, il faut replacer cette lettre dans son contexte.

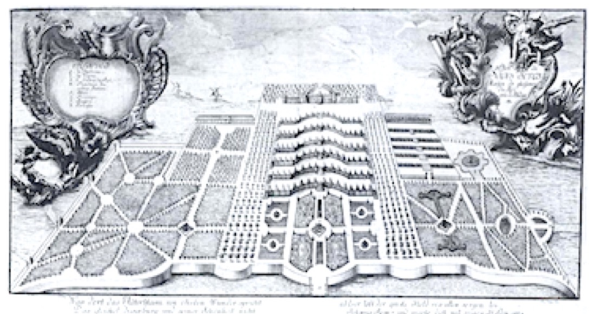
un gros cyclope de géomètre
Frédéric II à Voltaire (28 novembre 1748)

Les nouvelles publiques m'ont mis de mauvaise humeur. Je trouve que comme vous n'êtes point à Paris, vous seriez tout aussi-bien à Berlin qu'à Lunéville. Si madame du Châtelet est une femme à composition, je lui propose de lui emprunter son Voltaire à gage. Nous avons ici un gros cyclope de géomètre que nous lui engagerons contre le bel-esprit ; mais qu'elle se détermine vite. Si elle souscrit au marché, il n'y a point de temps à perdre. Il ne reste plus qu'un œil à notre homme ; & une courbe nouvelle qu'il calcule à présent pourrait le rendre aveugle tout-à-fait avant que notre marché fût conclu. Faites-moi savoir sa réponse, & recevez en même temps de bonne part les profondes salutations que ma muse fait à votre puissant génie.

4 Plan du palais de Sans-souci (1746)

En 1748, la construction du palais de Sans-Souci, près de Potsdam, s'achève. Il reste des détails à mettre au point, en particulier dans l'aménagement des jardins.

Plan du palais de Sans-souci (1746)
Frédéric II de Prusse (1712–1786)



5 Esquisse de Frédéric II pour le palais de Sans-Souci

Comme en témoigne cette esquisse de la main même de Frédéric II, il suit de près toutes les étapes de la conception, et impose ses goûts en matière de décoration. Il a ordonné que soit installée une fontaine, avec un immense jet d'eau de cent pieds de haut, soit plus de trente mètres.

Esquisse de Frédéric II pour le palais de Sans-Souci
Frédéric II de Prusse (1712–1786)

6 Jet d'eau de Sans-Souci

Jet d'eau de Sans-Souci

Ce jet d'eau a fini par être réalisé, mais longtemps après la mort de Frédéric, qui a rendu Euler responsable de cet échec.

7 Vanité de la géométrie !

« Je voulus faire un jet d'eau dans mon jardin ; Euler calcula l'effort des roues pour faire monter l'eau dans un bassin, d'où elle devait retomber par des canaux, afin de jaillir à Sans-Souci. Mon moulin a été exécuté géométriquement, et il n'a pu élever une goutte d'eau à cinquante pas du bassin. Vanité des vanités ! Vanité de la géométrie ! »

Là, Frédéric se montre particulièrement injuste. Si son jet d'eau n'a pas pu être réalisé c'est dû à l'incompétence de ses ingénieurs, mais certainement pas aux calculs d'Euler. Ce n'est qu'après un premier échec où les conduites en bois avaient éclaté, que Euler avait été sollicité. Peu de temps après, il rendait son verdict.

Vanité de la géométrie !
Frédéric II à Voltaire (25 janvier 1778)

Je voulus faire un jet d'eau dans mon jardin ; Euler calcula l'effort des roues pour faire monter l'eau dans un bassin, d'où elle devait retomber par des canaux, afin de jaillir à Sans-Souci. Mon moulin a été exécuté géométriquement, et il n'a pu élever une goutte d'eau à cinquante pas du bassin. Vanité des vanités ! vanité de la géométrie !

8 la destruction de la machine et des tuyaux

« Car si l'on ne voulait rien changer de ce coté, il serait presque impossible d'élever plus de 160 pieds cubes par heure ; pour cet effet il faudrait même faire des changements considerables dans les dimensions des pompes. Car sur le pied qu'elles se trouvent actuellement, il est bien certain, qu'on n'élèverait jamais une goutte d'eau jusqu'au réservoir et toute la force ne serait employée qu'à la destruction de la machine et des tuyaux. »

C'est effectivement ce qui s'était passé. La conclusion d'Euler est que cela ne pourrait marcher qu'à condition de n'utiliser que des tuyaux de plomb, et Frédéric II avait refusé la dépense. Il n'y avait rien de plus qu'Euler pouvait faire, à part ce qu'il faisait de mieux : théoriser, simplifier, généraliser, expliquer.

la destruction de la machine et des tuyaux
Euler à Frédéric II (17 octobre 1748)

Car si l'on ne vouloit rien changer de ce coté, il seroit presque impossible d'élever plus de 160 pied cubes par heure ; pour cet effet il faudroit meme faire des changemens considerables dans les dimensions des pompes. Car sur le pied qu'elles se trouvent actuellement, il est bien certain, qu'on n'éleveroit jamais une goutte d'eau jusqu'au réservoir et toute la force ne seroit employée qu'à la destruction de la machine et des tuyaux.

9 Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux (1754)

Ses calculs sur l'écoulement dans les tuyaux, Euler les a exposés à l'Académie de Berlin en octobre 1749. Le mémoire a été publié en 1754. Qu'il ait eu en tête à ce moment-là l'application concrète au jet d'eau de Sans-Souci, transparaît presque à chaque ligne de ce mémoire. Mais Euler n'en est pas resté là.

Au passage, remercions la francophilie extrême de Frédéric II qui avait imposé que les mémoires de l'Académie de Berlin soient écrits en français.

Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux (1754)
Leonhard Euler (1707–1783)

SUR
LE MOUVEMENT DE L'EAU
PAR DES TUYAUX DE CONDUITE,
PAR M. EULER.

10 Hydrostatique, hydrodynamique (1757)

Deux mémoires fondamentaux avaient suivi quatre ans plus tard. On y trouve pour la première fois la notion de pression clairement expliquée, les équations fondamentales de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique, bref, Euler avait fondé une nouvelle science, la mécanique des fluides.

Pour que vous ayez une petite idée de sa puissance intellectuelle, je vous propose de lire l'introduction du troisième mémoire qu'il a écrit sur le sujet.

Hydrostatique, hydrodynamique (1757)
Leonhard Euler (1707–1783)

PRINCIPES GÉNÉRAUX
DE L'ETAT D'EQUILIBRE DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX
DU MOUVEMENT DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

11 sur la théorie du mouvement des fluides (1757)

Il s'intitule : « Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides ».

« Ayant réduit dans mes deux mémoires précédents toute la théorie des fluides, tant de leur équilibre que de leur mouvement, à deux équations analytiques, la considération de ces formules paraît de la plus grande importance ; puisqu'elles renferment non seulement tout ce qu'on a déjà découvert par des méthodes fort différentes et pour la plupart peu convainquantes, tant sur l'équilibre que sur le mouvement des fluides, mais aussi tout ce qu'on peut encore désirer dans cette science. Quelque sublimes que soient les recherches sur les fluides, dont nous sommes redevables à Messieurs Bernoullis, Clairaut et d'Alembert, elles découlent si naturellement de mes deux formules générales qu'on ne saurait assez admirer cet accord de leurs profondes méditations avec la simplicité des principes d'où j'ai tiré mes deux équations, et auxquels j'ai été conduit immédiatement par les premiers axiomes de la mécanique. »

sur la théorie du mouvement des fluides (1757)
Leonhard Euler (1707–1783)

Ayant réduit dans mes deux Mémoires précedens toute la Théorie des fluides, tant de leur équilibre que de leur mouvement, à deux équations analytiques, la conſidération de ces formules paroit de la plus grande importance; puisqu'elles renferment non ſeulement tout ce qu'on a déjà découvert par des méthodes fort différentes & pour la plûpart peu convainquantes, tant ſur l'équilibre que ſur le mouvement des fluides, mais auſſi tout ce qu'on peut encore déſirer dans cette Science. Quelque ſublimes que ſoient les recherches ſur les fluides, dont nous ſommes redevables à Mrs. *Bernoullis*, *Clairaut*, & *d'Alembert*, elles découlent ſi naturellement de mes deux formules générales: qu'on ne ſçauroit aſſés admirer cet accord de leurs profondes méditations avec la ſimplicité des principes, d'où j'ai tiré mes deux équations, & auxquels j'ai été conduit immédiatement par les premiers axiomes de la Mécanique.

12 Mémoire sur un beau rapport (1768)

Ce mémoire-ci a été écrit aussi en 1749, comme l'étude du jet d'eau de Sans-Souci, mais n'a été publié que presque vingt ans plus tard. « Mémoire sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques. »

Le beau rapport qu'il expose n'est autre que l'équation fonctionnelle de la fonction zéta. Lisez la première phrase. « Le rapport, que je me propose de développer ici, regarde les sommes de ces deux séries infinies générales. » suivent deux séries dépendant d'un paramètre entier m, dont la première, dans l'eencadré bleu, est évidemment divergente pour tout m.

Comment ? Euler dirait donc n'importe quoi ? Non bien sûr ! Même si beaucoup l'ont cru. Euler connaît bien la différence entre série convergente et série divergente. Mais il sait aussi donner un sens à la somme d'une série divergente.

Mémoire sur un beau rapport (1768)
Leonhard Euler (1707–1783)


REMARQUES
SUR UN BEAU RAPPORT ENTRE LES SÉRIES DES PUISSANCES TANT DIRECTES QUE RÉCIPROQUES.
PAR M. L. EULER *).

1.

Le rapport, que je me propose de développer ici, regarde les sommes de ces deux séries infinies générales:

$$\boxed{1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \&c.}$$

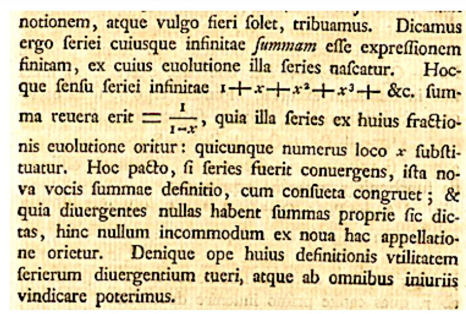
$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \&c.$$

13 ab omnibus iniuriis vidicare poterimus

« Ces contradictions apparentes peuvent être évitées si nous donnons au mot somme une signification différente de la signification usuelle. Disons que la *somme* de n'importe quelle série infinie est une expression finie dont la série peut être déduite. En ce sens, la véritable somme de la série $1 + x + x^2 +$ etc. est un sur $1 - x$, car la série provient de la fraction, quelle que soit la valeur de x. Ceci étant admis, si la série est convergente, la nouvelle définition de somme est en accord avec l'ancienne. Comme les séries divergentes n'ont pas de somme à proprement parler, il n'y a aucune difficulté à cette nouvelle acception. Finalement, à l'aide de cette définition, nous conservons l'utilité des séries divergentes, et nous pourrons les venger de toute injure. »

Allons bon, parce que certains auraient été prêts à les injurier ?

ab omnibus iniuriis vidicare poterimus
Euler, Institutiones calculi differentialis (1755)


notionem, atque vulgo fieri solet, tribuamus. Dicamus ergo seriei cuiusque infinitae *summam* esse expressionem finitam, ex cuius euolutione illa series nascatur. Hocque sensu seriei infinitae $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. summa reuera erit $= \frac{1}{1-x}$, quia illa series ex huius fractionis euolutione oritur: quicunque numerus loco x substituatur. Hoc pacto, si series fuerit conuergens, ista noua vocis summae definitio, cum consueta congruet; & quia diuergentes nullas habent summas proprie sic dictas, hinc nullum incommodum ex noua hac appellatione orietur. Denique ope huius definitionis vtilitatem serierum diuergentium tueri, atque ab omnibus iniuriis vindicare poterimus.

14 Oresme (1323–1382)

Le premier à avoir démontré rigoureusement la divergence d'une série est Oresme, dont je vous parle souvent comme fondateur de l'analyse. Il s'agit de la série harmonique, qu'il prend comme exemple de termes tendant vers zéro, dont la somme est infinie.

J'aurais adoré vous montrer un magnifique manuscrit enluminé des ses « Questions sur la géométrie d'Euclide », mais il faut croire qu'elles n'ont pas inspiré les enlumineurs. Alors cette image est issue de sa traduction de l'Éthique d'Aristote, vers la même époque. Il y est représenté en train d'offrir son livre au roi Charles V. Mais je digresse.

Oresme (1323–1382)
Traduction de l'Ethique d'Aristote (1453)

15 Dico quod totum fieret infinitum

« Que soit supposée une quantité d'un pied, à laquelle soit ajoutée une première partie proportionnelle d'une moitié, ensuite d'un tiers, ensuite d'un quart, ensuite d'un cinquième, et ainsi à l'infini selon l'ordre des nombres. Je dis que le total devient infini, ce que je prouve ainsi : il existe une infinité de parties dont chacune est plus grande qu'un demi-pied, donc le tout est infini. Il est clair que un quart et un tiers sont plus qu'une moitié, de même que un cinquième jusqu'à un huitième, et un neuvième jusqu'à un seizième, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. »

Voici la version moderne.

Dico quod totum fieret infinitum
Oresme, Questiones super geometriam Euclidis (1450)

Verbi gratia, sit pedalis quantitas assumpta, cui addatur in prima parte proportionali hore una medietas pedis, deinde una tertia in alia, et deinde una quarta, deinde una quinta, et sic in infinitum secundum ordinem numerorum. Dico quod totum fieret infinitum, quod probo sic : ibi existunt infinite partes quarum quelibet erit major quam medietas pedis, ergo totum erit infinitum. Antecedens patet quia 4^{a} et 3^{a} sunt plus quam una medietas, similiter de 5^{a} ad 8^{am} et de 9^{a} usque ad 16^{am}, et sic in infinitum.

16 Divergence de la série harmonique

En clair Oresme regroupe 2 puissance n termes dont chacun est supérieur au dernier, qui est un sur deux puissance $n+1$. Donc la somme de chaque paquet est supérieure à un demi, et il y a une infinité de paquets.

L'argument est magnifique, mais il n'aura pas de postérité. Il faudra longtemps avant de considérer les séries divergentes comme des objets mathématiques à part entière, et surtout pour se poser la question de leur somme.

Divergence de la série harmonique
Oresme, Questiones super geometriam Euclidis

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty$$

$$\begin{aligned} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots \\ = \; & 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+ \\ & \quad \left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots \\ > \; & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty \end{aligned}$$

17 Guido Grandi (1671–1742)

Cette question, qui peut paraître farfelue, devient tout à fait naturelle dans la pensée du siècle des Lumières. Si Dieu a mis un objet devant les yeux des hommes, c'est pour qu'ils en découvrent les propriétés. Si la série plus un, moins un, plus un, etc., existe, c'est aux hommes d'en découvrir la somme.

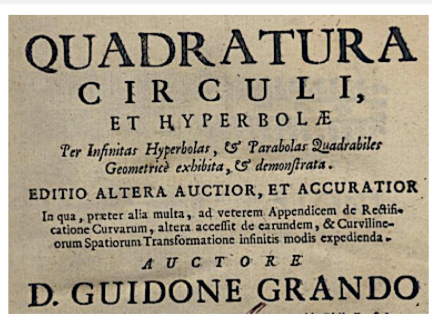
Guido Grandi est un moine italien, formé chez les Jésuites, qui enseigne les mathématiques à Pise. Il est un des propagateurs en Italie des nouvelles techniques de calcul différentiel de Newton et Leibniz.

Guido Grandi (1671–1742)

18 Quadratura circuli et hyperbolae (1703–1710)

Il a publié deux éditions de sa « Quadrature du cercle et de l'hyperbole ». Ce que nous appelons la série de Grandi figurait déjà dans la première, et lui avait valu quelques critiques acerbes. Alors pour la seconde édition, il a affiné ses arguments.

Quadratura circuli et hyperbolae (1703–1710)
Guido Grandi (1671–1742)



QUADRATURA
CIRCULI,
ET HYPERBOLÆ
Per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas Quadrabiles
Geometricè exhibita, & demonstrata.
EDITIO ALTERA AUCTIOR, ET ACCURATIOR
In qua, præter alia multa, ad veterem Appendicem de Rectificatione Curvarum, altera accessit de earundem, & Curvilineorum Spatiorum Transformatione infinitis modis expedienda.
AUCTORE
D. GUIDONE GRANDO

19 relinquere sui medietatem

Voici comment il énonce le résultat. Pour lui il s'agit d'une ligne géométrique que l'on ajoute ou que l'on soustrait. Si on l'ajoute une infinité de fois et que l'on la soustrait une infinité de fois, il reste la moitié.

Ah bon ? Si, si, il l'écrit au dessus : $bV - bV$, $+bV - bV$, etc. égale VS, qui est la moitié.

relinquere sui medietatem
Grandi, Quadratura circuli et hyperbolæ (1710)

COROLL. III. Ex quo ubique YG — 1G, † 2G — 3G, † 4G — 5G &c. æquetur ordinatæ GD, conſtat, etiam *b*V — *b*V, † *b*V — *b*V, † *b*V — *b*V &c. æquari VS, ideſt eandem lineam infinities poſitam, & infinities ſubtractam relinquere ſui medietatem: Id quod etiam ex ſupradictis *propoſitione* *III.* deduci poterat.

20 Série de Grandi

L'argument a beau être géométrique, c'est à peu de choses près celui que nous avons vu plus haut chez Euler. On développe la série entière un sur un plus x, et on prend sa valeur en $x = 1$. Reste à expliquer pourquoi, en ajoutant une infinité de termes égaux à zéro, on obtient autre chose que zéro.

Grandi fournit d'abord l'explication religieuse.

Série de Grandi
Grandi, Quadratura circuli et hyperbolæ (1710)

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{1}{1+x}$$

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$$

21 Dei Creatoris potentiam omnia

« Comment peut-il se faire qu'en agrégeant des zéros à l'infini, on puisse obtenir une quantité notable ? À cela je réponds qu'il faut se rendre compte de la force de l'infini. La toute puissance du Dieu créateur est bien capable d'obtenir n'importe quelle quantité à partir du néant. »

Puis, comme cela risque de ne pas convaincre tout le monde, vient une démonstration juridique.

Dei Creatoris potentiam omnia
Grandi, Quadratura circuli et hyperbolæ (1710)

ſumptarum, eſt demum ſumma ex infinitis nullitatibus, ſeu 0, quomodo ergo quantitatem notabilem aggreget? At repono, eam Infiniti vim agnoſcendam, ut etiam quod per ſe nullum eſt multiplicando, in aliquid commutet, ſicuti finitam magnitudinē dividendo, in nullam degenerare cogit; unde per infinitam Dei Creatoris potentiam omnia ex nihilo facta, omniaque in nihilum redigi poſſe: neque adeò abſurdum eſſe, quantitatem aliquam, ut ita dicam, creari per infinitam vel multiplicationem, vel additionem ipſius nihili, aut quodvis quantum infinita diviſione, aut ſubductione in nihilum redigi..

22 unico pretiosissimo lapide

« Titius et Maevius sont deux frères qui héritent de leur père. L'héritage se compose d'une unique pierre précieuse, d'une valeur immense, sur laquelle l'effigie de la concorde a été sculptée. Il n'est pas question de la vendre pour partager son prix entre les deux frères, car le père, dans son testament, a bien précisé qu'une pierre aussi rare devait impérativement rester dans la famille. » Que faire ? On consulte les juristes les plus fins, qui après d'interminables palabres accouchent enfin d'une solution équitable : chacun des deux frères aura la pierre à sa garde un jour sur deux. Il l'aura aujourd'hui, la rendra le lendemain, la reprendra ensuite, etc. : plus un, moins un, plus un, moins un,... égale un demi : puisqu'on vous dit que la solution est équitable !

unico pretiosissimo lapide
Grandi, Quadratura circuli et hyperbolæ (1710)

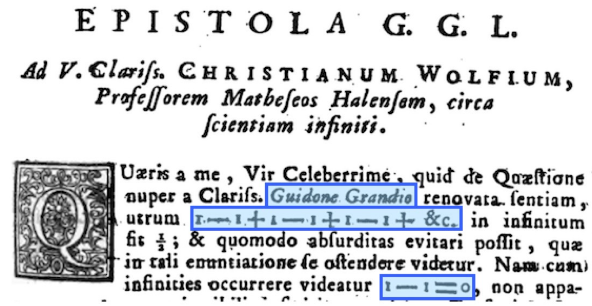
etiam perſuaderi poſſe cenſebam, hoc pacto. Titius, & Mævius fratres, dum Patris hæreditatem inter ſe ex æquo dividunt, de unico pretioſiſſimo lapide, immenſi valoris, in quo effigies Concordiæ affabrè exſculpta viſitur, contendunt. Nefas eſt vendere, ac pretium inter ſe diſtribuere, nam Pater teſtamento cautum voluit, ne tam raram gemmam à familia alienari poſteri ſui paterentur; neque alter ab altero illam redimere poſſet, vel totius

23 quomodo absurditas evitari possit

D'ailleurs Leibniz est d'accord. Non, pas avec le partage de la pierre précieuse, mais avec la somme de la série de Grandi. Son argument est le suivant : les sommes partielles d'indice pair sont égales à 0, les sommes d'indice impair sont égales à 1. Comment éviter l'absurdité ? En prenant la moyenne des deux bien sûr !

quomodo absurditas evitari possit

Leibniz à Wolf (1716)



EPISTOLA G. G. L.

Ad V. Clarifs. CHRISTIANUM WOLFIUM, Profefforem Mathefeos Halenfem, circa fcientiam infiniti.

Quæris a me, Vir Celeberrime, quid de Quæftione nuper a Clarifs. Guidone Grandio renovata fentiam, utrum $1-1+1-1+1-1+$ &c. in infinitum fit $\frac{1}{2}$; & quomodo abfurditas evitari poffit, quæ in tali enuntiatione fe oftendere videtur. Nam cum infinities occurrere videatur $1-1=0$, non appa-

24 De seriebus divergentibus (1760)

Leibniz n'est pas très loin de la bonne solution. Euler a exposé sa théorie dans cet article en latin. Le délai a été long. L'article a été présenté pour la première fois en 1746, à nouveau en 1753, et finalement publié en 1760.

Euler traite les séries divergentes par un procédé de resommation, qui consiste à remplacer la série initiale par une autre série dont les termes sont des combinaisons linéaires de la série initiale. Si la série initiale convergeait, la série resommée converge vers la même somme, et en plus la convergence est accélérée. Si elle divergeait, il se peut que la série resommée converge, auquel cas, on garde la nouvelle somme. Sinon on itère le procédé.

De seriebus divergentibus (1760)

Leonhard Euler (1707–1783)

205

DE SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

25 Convergence au sens de Cesàro

Nous ne trouvons pas choquant de parler de la limite d'une suite « au sens de Cesàro », quand la suite formée des moyennes des n premiers termes converge. Par exemple la suite qui vaut alternativement 0 ou 1 converge au sens de Cesàro vers 1/2. Au fond, c'est ce que disait Leibniz, et c'est ce que Euler a formalisé. Bien sûr les standards de rigueur d'Euler n'étaient pas les nôtres.

Convergence au sens de Cesàro

Ernesto Cesàro (1859–1906)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} = l$$

$$\frac{0+1+0+1+\cdots+0+1}{1+1+1+1+\cdots+1+1} \to \frac{1}{2}$$

26 Ernesto Cesàro (1859–1906)

La véritable théorie des séries divergentes est arrivée avec Cesàro justement : il est né un siècle et demi après Euler. Il est mort tragiquement à 47 ans.

Ernesto Cesàro (1859–1906)

27 Le Lido de Torre Annunziata vers 1900

Ce 12 septembre 1906, la mer est très agitée à Torre Annunziata, mais Cesàro décide quand même d'aller se baigner avec quatre de ses fils. Il est encore dans sa cabine quand il entend crier : l'un de ses fils, âgé de dix-sept ans, ne parvient pas à revenir au rivage. Le père se précipite, mais les vagues le drossent tête la première contre un des pilotis qui soutiennent la jetée, il meurt peu après du traumatisme crânien. Le corps de son fils n'a été retrouvé que le lendemain.

Écoutez ce qu'il disait sur les séries divergentes en 1890.

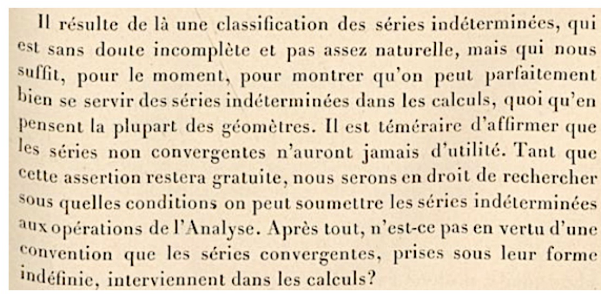
Le Lido de Torre Annunziata vers 1900
Ernesto Cesàro (1859–1906)

28 une classification des séries indéterminées

« Il résulte de là une classification des séries indéterminées, qui est sans doute incomplète et pas assez naturelle, mais qui nous suffit, pour le moment, pour montrer qu'on peut parfaitement bien se servir des séries indéterminées dans les calculs, quoi qu'en pensent la plupart des géomètres. Il est téméraire d'affirmer que les séries non convergentes n'auront jamais d'utilité. Tant que cette assertion restera gratuite, nous serons en droit de rechercher sous quelles conditions on peut soumettre les séries indéterminées aux opérations de l'Analyse. Après tout, n'est-ce pas en vertu d'une convention que les séries convergentes, prises sous leur forme indéfinie, interviennent dans les calculs ? »

Déjà Euler dans son article de 1760, argumentait longuement contre les adversaires des séries divergentes. Parmi eux, l'inévitable d'Alembert. À propos, le fameux critère de d'Alembert pour la convergence des séries à termes positifs, il ne l'a jamais formulé. Par contre, il a rarement laissé passer une occasion de s'en prendre à Euler. Ce qui suit est paru un an après l'article d'Euler.

une classification des séries indéterminées
Cesaro, Sur la multiplication des séries (1890)


Il résulte de là une classification des séries indéterminées, qui est sans doute incomplète et pas assez naturelle, mais qui nous suffit, pour le moment, pour montrer qu'on peut parfaitement bien se servir des séries indéterminées dans les calculs, quoi qu'en pensent la plupart des géomètres. Il est téméraire d'affirmer que les séries non convergentes n'auront jamais d'utilité. Tant que cette assertion restera gratuite, nous serons en droit de rechercher sous quelles conditions on peut soumettre les séries indéterminées aux opérations de l'Analyse. Après tout, n'est-ce pas en vertu d'une convention que les séries convergentes, prises sous leur forme indéfinie, interviennent dans les calculs?

29 Réflexions sur les suites (1761)

« Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements et les calculs fondés sur des séries qui ne sont pas convergentes, ou qu'on peut supposer ne pas l'être, me paraîtront toujours très suspects, même quand les résultats de ces raisonnements s'accorderont avec des vérités connues d'ailleurs. »

Au siècle suivant Abel, dans une lettre privée, mâchait beaucoup moins ses mots.

Réflexions sur les suites (1761)
Jean le Rond dit d'Alembert (1717–1783)

Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements et les calculs fondés sur des séries qui ne sont pas convergentes, ou qu'on peut supposer ne pas l'être, me paraîtront toujours très suspects, même quand les résultats de ces raisonnements s'accorderont avec des vérités connues d'ailleurs.

30 Peut-on imaginer rien de plus horrible

« Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$

où n est un nombre entier positif. »

Il a fallu longtemps, pour que le sujet des séries divergentes cesse d'être un tabou, pour devenir une discipline mathématique.

Peut-on imaginer rien de plus horrible
Abel à Holmboe (16 janvier 1826)

Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

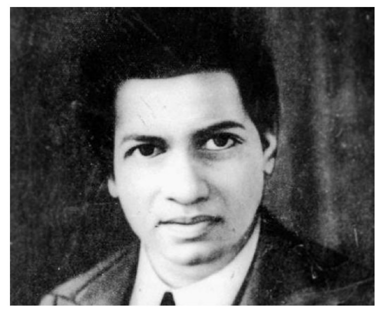
$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$

où n est un nombre entier positif.

31 Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

Parmi les premiers travaux de Ramanujan au début du vingtième siècle, figuraient des recherches sur la fonction zéta et des sommes de séries, analogues à celles d'Euler. Quand il les envoie en Angleterre, le fiasco est total. Voici l'extrait d'une lettre entre deux mathématiciens anglais dont l'un a demandé son avis à l'autre.

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)



32 the very difficult subject of Divergent Series

« M. Ramanujan est tombé dans les pièges du sujet très difficile des séries divergentes. Sinon, il n'aurait pas obtenu les résultats faux que vous m'avez envoyés un plus deux plus trois égale moins un douzième, etc. Ces trois séries ont une somme infinie. »

Ramanujan avait bien conscience ne n'être pas dans les clous. Voici ce qu'il écrit à Hardy quelques semaines plus tard.

the very difficult subject of Divergent Series
M.J.M. Hill to C.L.T. Griffith (3 December 1912)

Mr Ramanujan has fallen into the pitfalls of the very difficult subject of Divergent Series. Otherwise he could not have got the erroneous results you send me

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+\infty &= -\frac{1}{12} \\ 1+2^2+3^2+\cdots+\infty^2 &= 0 \\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+\infty^3 &= \frac{1}{240} \end{aligned}$$

All 3 series have infinity for their sum.

33 the lunatic asylum as my goal

« En fait, je ne lui ai donné aucune démonstration, mais j'ai fait quelques assertions, comme la suivante, sous ma nouvelle théorie. Je lui ai dit que la somme d'un nombre infini de termes de la série $1 + 2 + 3$ etc. est égale à moins un douzième sous ma théorie. Si je vous dis cela, vous me dirigez immédiatement vers l'asile d'aliénés. »

Hardy, qui a fait venir Ramanujan à Cambrige, avait l'esprit plus ouvert que son collègue Hill. Il finira par adopter les séries divergentes comme un de ses sujets de recherche, et même par écrire un livre dessus. Ce sera son dernier livre, publié en 1949 à titre posthume. Son ami Littlewood en a écrit la préface. Voici la conclusion de cette préface.

the lunatic asylum as my goal
Ramanujan to Hardy (27 February 1913)

But as a fact I did not give him any proof but made some assertions as the following under my new theory. I told him that the sum of an infinite number of terms of the series $1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$ under my theory. If I tell you this you will at once point out to me the lunatic asylum as my goal.

34 an aroma of paradox and audacity

« Ceci est maintenant une évidence, mais dans les premières années du siècle le sujet, bien que nullement mystique ou non-rigoureux était regardé comme sensationnel. Autour du titre de ce livre, maintenant neutre, flottait un parfum de paradoxe et d'audace. »

an aroma of paradox and audacity

Hardy, Divergent Series (1940)

This is now a matter of course, but in the early years of the century the subject, while in no way mystical or unrigorous, *was* regarded as sensational, and about the present title, now colourless, there hung an aroma of paradox and audacity.

35 références

Autour du « gros cyclope de géomètre », brocardé par Frédéric II, il flotte bien toujours un parfum de paradoxe et d'audace. Autour de Ramanujan aussi. La différence est que la carrière de Ramanujan a duré beaucoup moins que celle d'Euler. Je suis sûr qu'il auraient adoré se rencontrer. Vous ne croyez pas ?

références

- E. J. Barbeau, P. J. Leah (1976) Euler's 1760 paper on divergent series, *Historia mathematica*, 3, 141–160
- R. E. Bradley, C. E. Sandifer eds. (2007) *Leonhard Euler : life, work and legacy*, Amsterdam : Elsevier
- R. S. Calinger (2016) *Euler, mathematical genius in the Enlightenment*, Princeton : University Press
- M. A. Coppo (2009) Une histoire des séries infinies d'Oresme à Euler, *Gazette des Mathématiciens*, 120, 39–52
- M. Eckert (20002) Euler and the fountains of Sanssouci, *Archive for History of Exact Sciences*, 56, 451–468
- V. Kowalenko (2011) Euler and divergent series, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4(4), 370–423–160
- J.-P. Ramis (1993) *Series divergentes et théories asymptotiques*, Paris : Société mathématique de France