

0 Les pavages de Truchet

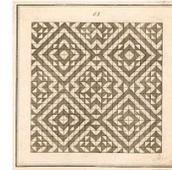
« Ceux qui ont quelque talent singulier peuvent l'ignorer quelque temps, et ils en sont d'ordinaire avertis par quelque petit évènement, par quelque hasard favorable. Un homme destiné à être un grand mécanicien ne pouvait être placé par le hasard dans un lieu où il en fût ni plus promptement, ni mieux averti qu'à Lyon. »

Celui qui écrit ceci en 1729 est Fontenelle, le secrétaire de l'Académie royale des sciences. Le grand mécanicien placé par le hasard à Lyon, est un religieux de l'ordre des Carmes. . .

histoires de géométrie

Les pavages de Truchet

combinatoire géométrique



hist-math.fr

Bernard YCART

1 Jean Truchet (1657–1729)

le Père Sébastien. Il s'appelait Jean Truchet de son nom de baptême. Rentrer dans les ordres chez les Carmes lui avait permis de faire des études à Paris.

Là, à l'âge de dix-neuf ans, l'opportunité de sa vie s'était présentée. C'est toujours Fontenelle qui parle.

Jean Truchet (1657–1729)

Père Sébastien



2 elles ne pouvaient s'ouvrir que par un secret

« Charles II, roi d'Angleterre, avait envoyé à Louis XIV deux montres à répétition, les premières qu'on ait vues en France. Elles ne pouvaient s'ouvrir que par un secret, précaution des ouvriers anglais pour cacher la nouvelle construction et s'en assurer d'autant plus la gloire et le profit. »

Les montres se détraquent, l'horloger du roi déclare (fort honnêtement) qu'il ne connaît qu'un jeune Carme capable d'ouvrir les montres. Celui-ci réussit, et les répare aussitôt.

elles ne pouvaient s'ouvrir que par un secret

Charles II (1630–1685), Louis XIV (1638–1715)



3 Éloge du P. Sébastien Truchet, Carme (1729)

« Quelque temps après il vient de la part de M. Colbert un ordre au Père Sébastien de venir le trouver à sept heures du matin, d'un jour marqué. Nulle explication sur le motif de cet ordre, un silence qui pouvait causer quelque terreur. Le P. Sébastien ne manque pas l'heure, il se présente interdit et tremblant, le Ministre accompagné de deux membres de cette Académie, [...] le loue sur les montres, et lui apprend pour qui il a travaillé, l'exhorte à suivre son grand talent pour les mécaniques, surtout à étudier les hydrauliques, qui devenaient nécessaires à la magnificence du roi, lui recommande de travailler sous les yeux de ces deux académiciens, qui le dirigeront, et pour l'animer davantage, et parler plus dignement en Ministre, il lui donne 600 livres de pension. »

Et voilà, l'avenir du Père Sébastien assuré, pour la plus grande gloire du roi Louis XIV. Mais au fait, pourquoi était-ce un si heureux hasard pour Jean Truchet que d'être né à Lyon ?

Éloge du P. Sébastien Truchet, Carme (1729)

Bernard Le Bouyer de Fontenelle (1657–1757)

~~s'y exercer. Quelque temps après il vient de la part de M. Colbert un ordre au P. Sébastien de le venir trouver à sept heures du matin d'un jour marqué, nulle explication sur le motif de cet ordre, un silence qui pouvoit causer quelque terreur. Le P. Sébastien ne manque pas à l'heure, il se présente interdit & tremblant, le Ministre accompagné de deux Membres de~~

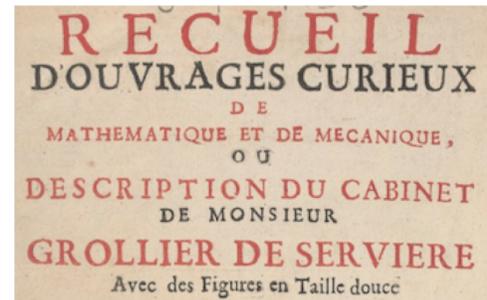
4 Recueil d'ouvrages curieux de Mathématique ou de Mécanique

Quand il était enfant, il y avait à Lyon un militaire retraité, Nicolas Grollier de Servière, qui occupait sa retraite en inventant des mécanismes, qu'il réalisait et exposait ensuite, dans ce que l'on appelait alors un cabinet.

Le cabinet de Grollier de Servière était devenu si célèbre qu'il attirait de nombreuses visites, y compris celle de Louis XIV. On en connaît le contenu, grâce à ce livre, publié en 1719 par son petit-fils. Voici une des magnifiques figures en taille douce qu'il annonce.

Recueil d'ouvrages curieux

Nicolas Grollier de Servière (1596–1689)



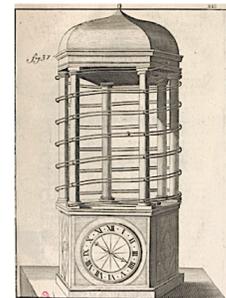
5 Horloge

Elle représente une des horloges inventées par Grollier de Servière. Le temps n'est pas rythmé par un balancier, mais par la chute d'une boule le long d'une spirale formée de deux rails de cuivre parallèles. Dès que la boule arrive en bas, elle est renvoyée immédiatement et la chute recommence.

Maintenant voici ce que Truchet a fait de cette même idée.

Horloge

Grollier de Servière, Recueil d'ouvrages curieux (1719)



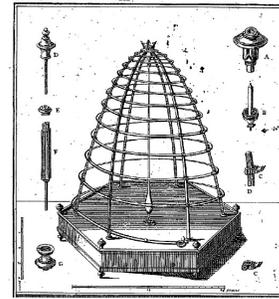
6 Machine pour mesurer l'accélération des boules (1699)

Louis XIV l'avait nommé membre honoraire de l'Académie royale des sciences, et ceci est une de ses premières contributions. Il s'agissait de vérifier expérimentalement la loi de la chute des corps. Vous voyez une sorte de cage en forme de parabolôïde de révolution, le long de laquelle court une spirale formée de deux rails parallèles. Si on place une boule au sommet entre les deux rails, elle va descendre en tournant. La taille des spires augmente en gros avec le carré de la distance au sommet, de sorte qu'avec l'accélération les spires sont parcourues à peu près dans le même temps. On peut le vérifier en lâchant plusieurs boules à intervalles réguliers, ce que Truchet automatise par un ressort qui renvoie les boules en haut du dispositif.

Exactement comme dans l'horloge que Truchet avait vue dans le cabinet de Grollier de Servière quand il était enfant. Astucieux, non ? Il y avait d'autres automates dans ce cabinet. Celui-ci entre autres.

Machine pour mesurer l'accélération des boules (1699)

Jean Truchet (1657-1729)



7 à chaque fois, on y trouve des objets nouveaux

« D'un autre côté il y a une armoire dans laquelle on voit en relief un château et des jardins, qui paraissent multipliés au moyen de plusieurs miroirs. L'on referme et l'on ouvre quatre fois la porte de cette armoire, et à chaque fois on y trouve des objets nouveaux ; à la seconde fois, c'est-à-dire après le château ce sont des pièces d'or et d'argent, à la troisième fois ce sont des fleurs, et enfin à la quatrième c'est une représentation d'une collation en relief. »

Maintenant, écoutez la description d'un tableau mouvant, offert au roi par le Père Sébastien. C'est une lettre de la princesse Palatine, la belle-sœur du roi.

à chaque fois, on y trouve des objets nouveaux

Grollier de Servière, Recueil d'ouvrages curieux (1719)

D'un autre côté il y a une armoire qui ne s'ouvre pas en même temps que celles dont nous avons parlé, & dans laquelle on voit en relief un Château & des jardins, qui paroissent multipliés au moyen de plusieurs glaces de miroir qui font tout au tour, & qui réfléchissent les objets. L'on referme & l'on ouvre par quatre différentes fois la porte de cette armoire, & à chaque fois on y trouve des objets nouveaux ; à la seconde fois, c'est-à-dire, après le Château ce sont grand nombre de pièces d'or & d'argent. A la troisième ce sont des fleurs ; & enfin à la quatrième c'est une représentation d'une collation en relief. Tous ces

8 Lettre du 16 janvier 1710

« On invente de bien jolies choses à présent. C'est ainsi qu'un Carme a fait un tableau mouvant au roi. Mais vous ne savez peut-être pas ce que c'est qu'un Carme. C'est un moine ; on l'appelle le Père Sébastien. Eh bien c'est lui qui a fait le tableau où se meuvent plus de cent pièces : les femmes font la lessive et battent le linge ; les hommes fendent du bois, ferment les chevaux ; il y en a deux qui scient ; d'autres sont assis dans des chaises et font des saluts ; un mendiant ôte le chapeau et demande la charité, puis quand le monde a passé il le remet. »

Lettre du 16 janvier 1710

Élisabeth-Charlotte de Bavière (1652-1722)



9 Tableau automate (XVIII^e siècle)

« À la porte du château, il y a une horloge qui marche fort bien. Dans le lointain est une mer où les navires voguent à pleines voiles. . . Ce qui est gentil aussi c'est une roue à l'aide de laquelle on sort la pierre des carrières; elle tourne tout lentement tant que la pierre n'est pas dehors, mais une fois que celle-ci est sortie, la roue se met à tourner très vite, absolument comme dans la réalité. »

Le Père Sébastien n'était pas pensionné que pour amuser le roi avec des tableaux automatiques.

Tableau automate (XVIII^e siècle)

Élisabeth-Charlotte de Bavière, lettre du 16 janvier 1710



10 Château de Marly (ca 1700)

Colbert lui avait ordonné dans sa jeunesse de se consacrer aux hydrauliques. Le Père Sébastien a suivi fidèlement la voie tracée.

Fontenelle dit, qu'il ne s'est guère fait ou projeté en France pendant sa vie de grands canaux de communication de rivières, pour lesquels on n'ait, au moins, pris ses conseils. Il a participé à la mise en eau des bassins de Versailles. Il a surtout travaillé à l'aménagement du château de Marly.

Château de Marly (ca 1700)



11 Machine de Marly (1723)

L'alimentation était assurée par une gigantesque machine, pompant directement l'eau de la Seine par un système de roues à aubes.

Cette machine a dû encore rappeler à Truchet quelques souvenirs lyonnais.

Machine de Marly (1723)



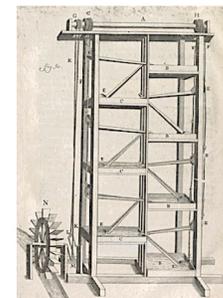
12 Machine pour élever l'eau d'une rivière

On trouvait dans le cabinet de Grollier de Servières plusieurs machines comme celle-ci, servant à élever l'eau d'une rivière.

Cependant, la raison qui a valu à Truchet de rester dans l'histoire des mathématiques, n'a rien à voir, ni avec ses propres qualités de mécanicien, ni avec le cabinet de Grollier de Servière. C'est un « Mémoire sur les combinaisons », présenté à l'Académie des Sciences en 1704.

Machine pour élever l'eau d'une rivière

Grollier de Servière, Recueil d'ouvrages curieux (1719)



13 Mémoire sur les combinaisons (1704)

« Dans le dernier voyage que j'ai fait au Canal d'Orléans par ordre de son Altesse Royale, je trouvai dans un Château nommé la Motte Saint Lyé à quatre lieues en-deçà d'Orléans, plusieurs carreaux de faïence carrés et mipartis de deux couleurs par une ligne diagonale, qui étaient destinés à carreler une chapelle et plusieurs autres appartements.

Pour pouvoir former des dessins et des figures agréables par l'arrangement de ces carreaux, j'examinai d'abord en combien de manières deux de ces carreaux pourraient se joindre ensemble, en les disposant toujours en échiquier. »

14 Carreaux de fayence quarrés & mipartis

Voici un carrelage du type de ceux qu'étudie Truchet. Tous les carreaux sont identiques, et Truchet commence par observer que les rotations d'un angle droit, engendrent quatre images différentes.

Mémoire sur les combinaisons (1704)

Jean Truchet (1657-1729)

MEMOIRE SUR LES COMBINAISONS.

PAR LE R. P. SEBASTIEN TRUCHET.

Dans le dernier voyage que j'ai fait au Canal d'Orléans par ordre de son Altesse Royale, je trouvai dans un Château nommé la Motte S. Lyé à 4 lieues en-deçà d'Orléans, plusieurs Carreaux de fayence quarrés & mipartis de deux couleurs par une ligne diagonale, qui étoient destinés à carreler une Chapelle & plusieurs autres appartemens. Pour pouvoir former des dessins & des figures agréables par l'arrangement de ces carreaux, j'examinai d'abord en combien de manières deux de ces Carreaux pourroient se joindre ensemble, en les dispoant toujours en échiquier.

Carreaux de fayence quarrés & mipartis

Azulejos diagonales, Orihuela



15 Table I : Des 64 combinaisons de deux carreaux

Ensuite, il forme 64 combinaisons différentes, en choisissant d'abord un des seize couples de deux carreaux, puis une des quatre positions du second par rapport au premier.

Table I : Des 64 combinaisons de deux carreaux

Truchet, Mémoire sur les combinaisons (1704)

16 Table II : Réduction des 64 combinaisons

Truchet remarque que ces 64 combinaisons se réduisent d'abord à 32, puis à 10 seulement si on tient compte des invariances par rotation. Sur le plan combinatoire, il ne va pas beaucoup plus loin. Voici ce qu'il dit.

« Après avoir examiné les combinaisons de deux carreaux, on pourrait mettre ici les combinaisons que l'on pourrait faire avec plusieurs carreaux. Mais comme ce détail sera long, et que nous ne sommes pas encore content de ce que nous avons fait là-dessus, nous remettrons cet article à un autre mémoire. »

Le service du roi, et l'examen des multiples machines soumises à l'Académie, ne lui ont pas laissé le temps d'écrire cet autre mémoire.

Table II : Réduction des 64 combinaisons

Truchet, Mémoire sur les combinaisons (1704)

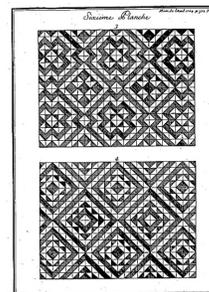
17 Sixième planche

Il se contente alors de montrer des exemples de configurations obtenues en agençant ses 64 combinaisons de deux carreaux d'une certaine façon.

C'est ce qu'on appelle les « pavages de Truchet ».

Sixième planche

Truchet, Mémoire sur les combinaisons (1704)



18 Méthode pour faire une infinité de desseins (1722)

Truchet a eu un successeur, en la personne du Père Dominique Douat, Carme comme Truchet, qui publie en 1722 sa « Méthode pour faire une infinité de dessins différents avec des carreaux mipartis de deux couleurs ».

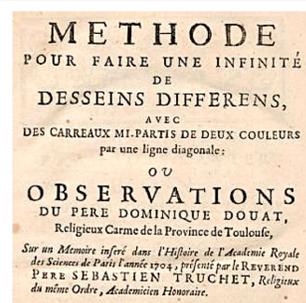
Dans l'introduction, Douat précise :

« Le savant révérend Père Sébastien Truchet, avait eu le premier l'idée de cet ouvrage, et l'aurait mieux remplie que moi, si de sérieuses occupations auprès de Louis le Grand, lui avaient permis de poursuivre sa découverte. »

Pourtant Douat va sensiblement plus loin que Truchet, en particulier sur le plan mathématique.

Méthode pour faire une infinité de desseins (1722)

Dominique Douat



19 Table contenant 256 permutations

Il commence par coder les quatre positions différentes par A, B, C, D. Puis il forme les quatre puissance quatre, soit 256 combinaisons de quatre lettres.

Table contenant 256 permutations

Douat, Méthode pour faire une infinité de desseins (1722)

METHODE POUR FAIRE QUATRIEME TABLE, Contenant 256 Permutations.			
1 AAAA	17 ABBA	33 ACBA	49 ABCC
2 AAAB	18 ACCA	34 ABDA	50 ADCC
3 AAAC	19 ADDA	35 ABDA	51 ABDD
4 AAAD	20 AABC	36 ACDA	52 ACDD
5 AABA	21 AACB	37 ADCA	53 ABCB
6 AACA	22 AADB	38 ABDB	54 ABDB
7 AADA	23 AADB	39 ACCC	55 ACBC
8 AABA	24 AACD	40 ADDD	56 ACDC
9 ACAA	25 AACD	41 ABBC	57 ABDB
10 ADAA	26 ABAC	42 ABDD	58 ADCC
11 AABB	27 ACAB	43 ACCB	59 ABCD
12 AACC	28 ABAD	44 ACCD	60 ADCB
13 AADD	29 ADA3	45 ADDB	61 ADCB
14 ABAB	30 ACAD	46 ADDC	62 ACBD
15 ACAC	31 ADAC	47 ACBD	63 ABCD
16 ADAD	32 ABCA	48 ABDB	64 ACDB

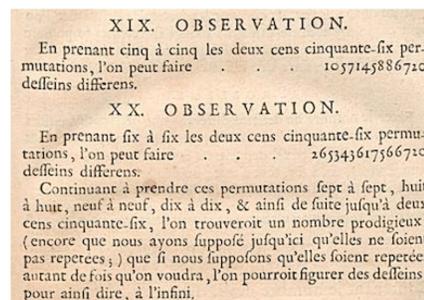
20 En prenant quatre à quatre

Ensuite il calcule le nombre des arrangements, deux à deux, trois à trois, etc, jusqu'à six. Il commente alors :

« Continuant à prendre ces permutations sept à sept, huit à huit, et ainsi de suite jusqu'à deux cent cinquante six, l'on trouverait un nombre prodigieux, encore que nous avons supposé jusqu'ici qu'elles ne soient pas répétées, que si nous supposons qu'elle soient répétées autant de fois que l'on voudra, l'on pourrait figurer des dessins, pour ainsi dire, à l'infini. »

En prenant quatre à quatre

Douat, Méthode pour faire une infinité de desseins (1722)



21 Tot tibi sunt dotes Virgo

Aussitôt après, Douat montre qu'il a bien assimilé les pages consacrées à la combinatoire dans les *Éléments* de mathématiques de Jean Prestet. Il y renvoie le lecteur, en particulier à cet exemple des combinaisons d'un vers latin qui a longtemps fait débat... et que vous connaissez par cœur depuis que je vous ai raconté l'histoire de « la combinatoire des hexamètres ».

La suite du livre de Douat ressemble au mémoire de Truchet. Il y donne des exemples de pavages, décrits par les numéros des quadruplets successifs.

Tot tibi sunt dotes Virgo

Douat, *Méthode pour faire une infinité de desseins* (1722)

Dans ces Elemens ils apprendront que les huit mots latins de ce Vers fait à la louange de la très Sainte Vierge Mere de Dieu,

Tot tibi sunt dotes Virgo, quot sidera caelo,

pris tous ensemble, ou huit à huit, peuvent recevoir 40320 permutations, si l'on n'a pas egard à la mesure d'un Vers hexametre, & 3276 permutations en gardant les regles de la Poësie; & qu'avec les vingt-quatre lettres de l'alphabet repetées & prises deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, & ainsi de suite jusqu'à vingt-quatre, l'on peut faire ce grand nombre 13917428887252999425128493402200 de mots differens; les uns compotez de deux lettres, les autres de trois, les autres de quatre, & ainsi de suite, & les derniers de vingt-quatre.

22 Figures 1 à 6

Il commence par les plus simples,

Figures 1 à 6

Douat, *Méthode pour faire une infinité de desseins* (1722)

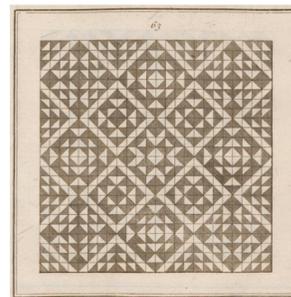


23 Figure 63

Pour en arriver ensuite à des effets beaucoup plus décoratifs, comme celui-ci, ...

Figure 63

Douat, *Méthode pour faire une infinité de desseins* (1722)

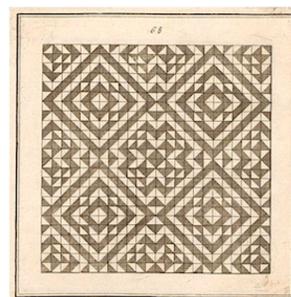


24 Figure 68

ou encore celui-là. Il vous plaît ?

Figure 68

Douat, *Méthode pour faire une infinité de desseins* (1722)



25 Album de problèmes & dessins divers (1862)

Après Douat, la combinatoire géométrique s'endort. Elle est à peine réveillée par cet « Album de problèmes et dessins divers », d'un certain Lemaire, qui se présente comme ancien architecte, et titulaire de sept médailles de différentes sociétés. Il annonce des dessins selon les systèmes de Douat et Truchet entre autres, sans que l'on comprenne vraiment ce qu'il entend par système.

Album de problèmes & dessins divers (1862)

P. Lemaire



26 Pavage de Truchet

On y trouve des pavages qui ressemblent à ceux de Truchet et Douat, comme celui-ci, du moins si on fait abstraction de la bordure.

Pavage de Truchet

Lemaire, Album de problèmes & dessins divers (1862)

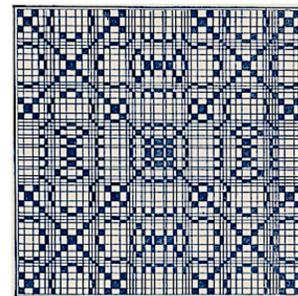


27 Pavage à carreaux irréguliers

Il y a aussi des pavés de dimensions irrégulières, et qui ne sont plus bipartis.

Pavage à carreaux irréguliers

Lemaire, Album de problèmes & dessins divers (1862)

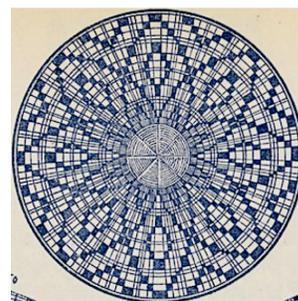


28 Rosace

Mais même si sa compréhension de la combinatoire reste problématique, on ne peut pas nier à Lemaire un certain sens de l'esthétique.

Rosace

Lemaire, Album de problèmes & dessins divers (1862)



Voilà, d'habitude je sors n'importe quoi sur la dernière planche, juste pour que vous ayez les références sous les yeux pendant quelques instants. Mais là, si vous voulez savoir ce que l'on fait de nos jours avec les pavages de Truchet, il va bien falloir que vous alliez les lire. Je vous jure, ça en vaut la peine, il y a des images magnifiques.

références

- J. André, D. Girou (2007) *Truchet & types*, <http://jacques-andre.fr/faqtypo/truchet/>
- P. Esperet, D. Girou (1998) Coloriage du pavage dit « de Truchet », *Cahiers GUTenberg*, 31, 5–18
- E. Léry (1929) Le P. Sébastien Truchet, *Revue de l'Histoire de Versailles et de Seine-et-Oise*, 220–241
- E. A. Lord, S. Ranganathan (2006) Truchet tilings and their generalisations, *Resonance*, 6, 42–50
- C. S. Smith, P. Boucher (1987) The tiling patterns of Sebastien Truchet and the topology of structural hierarchy, *Leonardo*, 20(4), 373–385