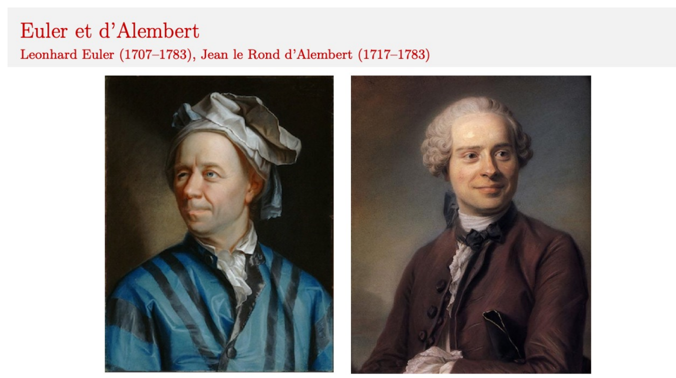
0 L'honneur de l'esprit humain

Ce jeune homme est Felix Mendelssohn, le grand compositeur romantique allemand. J'espère que vous voyez le rapport avec l'honneur de l'esprit humain ! Sinon, écoutez le Songe d'une nuit d'été, vous reconnaîtrez la marche nuptiale.

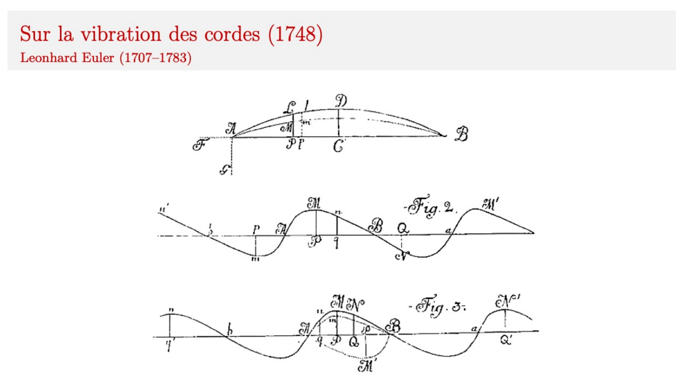
Bon, le rapport avec l'histoire de l'analyse saute moins au yeux, mais ça va venir, attendez un peu.

1 Euler et d'Alembert



Je vous raconte ailleurs la controverse entre Euler et d'Alembert à propos des cordes vibrantes. Le mérite d'avoir posé l'équation et d'en donner une solution générale revient à d'Alembert. Mais Euler pense qu'il peut y avoir d'autres solutions que celles de d'Alembert. Leur désaccord vient d'une mauvaise définition de ce qu'est une fonction.

2 Sur la vibration des cordes (1748)



Depuis un article de Taylor en 1713, on sait bien que les sinusoïdes dont les fréquences sont multiples de la fréquence de base sont toutes des solutions particulières. Par conséquent, toute combinaison linéaire, éventuellement infinie, de ces sinusoïdes, est aussi solution particulière de l'équation aux dérivées partielles. Mais est-on sûr que ce n'est vraiment qu'un cas particulier ?

D'Alembert en est persuadé. Euler est moins affirmatif, mais semble le penser également.

3 Daniel Bernoulli (1700–1782)

Daniel Bernoulli (1700–1782)

Le troisième protagoniste de l'affaire est Daniel Bernoulli. Il est ami avec Euler qu'il avait fait venir à Saint-Pétersbourg au début de sa carrière. Pour Bernoulli, les combinaisons de sinusoïdes sont les seules solutions physiquement admissibles, et il n'aime pas vraiment l'approche théorique de d'Alembert.

4 toute l'estime que j'ai pour lui disparaît

« Je tiens M. d'Alembert pour un grand mathématicien dans les questions abstraites ; mais dès qu'il fait une incursion dans les mathématiques appliquées, toute l'estime que j'ai pour lui disparaît [...]. Je suis d'avis qu'on réclame des déterminations physiques et non des intégrations abstraites. Un goût pernicieux commence à se répandre, qui fait que les sciences exactes pâtissent d'autant plus qu'elles sont moins avancées, et il vaudrait souvent mieux pour la physique expérimentale que les mathématiques aient disparu de la surface de la terre. »

toute l'estime que j'ai pour lui disparaît

Daniel Bernoulli, Lettre à Leonhard Euler (1750)

Je tiens M. d'Alembert pour un grand mathématicien dans les questions abstraites ; mais dès qu'il fait une incursion dans les mathématiques appliquées, toute l'estime que j'ai pour lui disparaît [...]. Je suis d'avis qu'on réclame des déterminations physiques et non des intégrations abstraites. Un goût pernicieux commence à se répandre, qui fait que les sciences exactes pâtissent d'autant plus qu'elles sont moins avancées, et il vaudrait souvent mieux pour la physique expérimentale que les mathématiques aient disparu de la surface de la terre.

5 Nouvelles vibrations des cordes (1753)

En 1753, Bernoulli revient sur la polémique. Il explique les raisons pour lesquelles les combinaisons de sinusoïdes sont les seules solutions physiquement naturelles, puis il ajoute : « Voilà donc cette infinité de courbes trouvées sans aucun calcul, et notre équation est la même que celle de M. Euler. Il est vrai qu'il ne traite pas cette multitude infiniment infinie de générale, et qu'il ne la donne que comme des cas particuliers ; mais c'est sur quoi je ne suis pas encore assez éclairci : s'il y a encore d'autres courbes, je ne comprends pas dans quel sens on peut les admettre. »

Nouvelles vibrations des cordes (1753)

Daniel Bernoulli (1700–1782)

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

dans laquelle les quantités α, β, γ, δ, &c ſont arbitraires affirmatives ou négatives.

XIII. Voilà donc cette infinité de courbes trouvées ſans aucun calcul, & notre équation eſt la même que celle de M. *Euler* ; voyez les Mémoires de l'Académie pour l'Année 1748. page 85. Il eſt vrai que M. *Euler*, ne traite pas cette multitude infiniment infinie de générale, & qu'il ne la donne au §. 30. que comme des cas particuliers ; mais c'eſt ſur quoi je ne ſuis pas encore aſſez éclairci : s'il y a encore d'autres courbes, je ne comprens pas dans quel ſens on peut les admettre.

6 Guiseppe Luigi Lagrange (1736–1813)

Guiseppe Luigi Lagrange (1736–1813)

Quelques années plus tard, Lagrange intervient. Dès son premier article, il avait utilisé une approche nouvelle, qui le conduisait à donner raison à Euler sur la généralité des solutions. Il ne traite les séries trigonométriques que sept ans plus tard, au détour d'un énorme article sur les équations différentielles.

7 Solution d'une question relative à la théorie

On y lit cet alinea : Solution d'une question relative à la théorie des cordes vibrantes.

« La question que je vais examiner ici consiste à savoir si toutes les courbes qui rendent la solution du problème des cordes vibrantes possible, suivant la théorie de M. d'Alembert, sont renfermées ou non dans l'équation de la série trigonométrique, question que ce grand géomètre a vivement agitée avec Messieurs Bernoulli et Euler dans le premier Mémoire des ses opuscules mathématiques. »

Là, connaissant Lagrange, on se dit : il va mettre un point final au débat, et on va enfin savoir qui avait raison. En fait, pas vraiment. Il se contente de montrer que si la solution est une série trigonométrique, il en est de même de la condition initiale. Mais tout de même, un peu plus loin, il montre qu'une série trigonométrique peut interpoler une fonction donnée en autant de points qu'on veut, et donc en être arbitrairement proche.

Pour ce faire, il exprime les coefficients de la série interpolante sous forme d'intégrales. Dans notre langage, à partir d'une fonction, il donne l'expression de ses coefficients de Fourier.

Solution d'une question relative à la théorie

Lagrange, Solution de différens problêmes de calcul intégral (1766)

Solution d'une queſtion rélative à la théorie des cordes vibrantes.

XXV. La queſtion que je vais examiner ici conſiſte à ſavoir ſi toutes les courbes qui rendent la ſolution du problême des cordes vibrantes poſſible, ſuivant la théorie de M. D'Alembert, ſont renfermées ou non dans l'équation

$y = \alpha \sin. \frac{\pi x}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi x}{a} + \&c.$;

queſtion que ce grand Géomêtre a vivement agitée avec MM. Bernoulli & Euler dans le premier Mémoire de ſes Opuſcules Mathématiques.

8 Joseph Fourier (1768–1830)

Eh bien nous y voilà ! J'avais évité jusque là de prononcer son nom ; parce que comme vous l'avez vu, il n'est pas l'inventeur des séries trigonométriques.

Sa grande découverte, il l'a faite alors… qu'il était préfet de l'Isère, qu'il avait toute sorte de conflits humains à gérer, les marais de Bourgoin à assécher, la route de l'Oisans à planifier, les collections de l'expédition d'Égypte à classer, et son compte-rendu à rédiger.

On se demande un peu ce qui l'a motivé pour s'attaquer en plus, à la théorie de la chaleur. Dans son éloge historique, Arago fournit une information intéressante.

Joseph Fourier (1768–1830)

Préfet de l'Isère (1802–1815)

9 les voyageurs condamnés à hiverner

« Pour se dérober à de légères atteintes rhumatismales, notre confrère se vêtait dans la saison la plus chaude de l'année, comme ne le font même pas les voyageurs condamnés à hiverner au milieu des glaces polaires. On me suppose de l'embonpoint, disait-il quelquefois en riant ; soyez assuré qu'il y a beaucoup à rabattre de cette opinion. Si, à l'exemple des momies égyptiennes, on me soumettait, ce dont Dieu me préserve ! à l'opération du désemmaillottement, on ne trouverait pour résidu qu'un corps assez fluet. »

les voyageurs condamnés à hiverner

Arago, Éloge historique de Joseph Fourier (1833)

Pour se dérober à de légères atteintes rhumatismales, notre confrère se vêtait dans la saison la plus chaude de l'année, comme ne le font même pas les voyageurs condamnés à hiverner au milieu des glaces polaires. On me suppose de l'embonpoint, disait-il quelquefois en riant ; soyez assuré qu'il y a beaucoup à rabattre de cette opinion. Si, à l'exemple des momies égyptiennes, on me soumettait, ce dont Dieu me préserve ! à l'opération du désemmaillottement, on ne trouverait pour résidu qu'un corps assez fluet. Je pourrais

10 Joseph Fourier (1768–1830)

Au vu de ces deux portraits de Jules Boilly, il m'est difficile de croire que Fourier ait été si fluet que cela. Mais ce n'est pas là l'important.

Joseph Fourier (1768–1830)
Jules Boilly (ca. 1825)

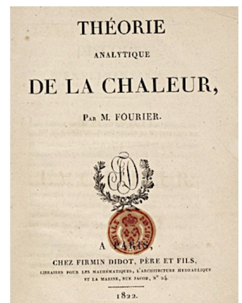
11 Théorie analytique de la chaleur (1822)

L'important c'est son œuvre majeure, la « Théorie analytique de la chaleur ».

C'est là qu'il établit l'équation aux dérivées partielles qui décrit la diffusion de la chaleur au cours du temps. Même si la théorisation de la chaleur avait commencé avant lui, en particulier avec Newton et Lambert, Fourier a réalisé une avancée cruciale, que personne ne lui conteste.

Ce qui nous intéresse ici, c'est sa technique de résolution de l'équation de la chaleur. La voici résumée en une seule formule.

Théorie analytique de la chaleur (1822)
Joseph Fourier (1768–1830)



THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,
PAR M. FOURIER.

A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

12 développer une fonction quelconque

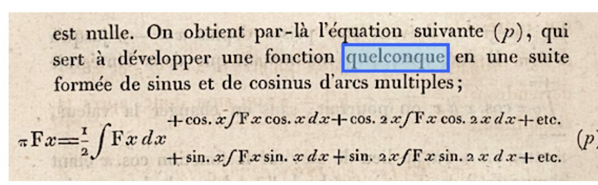
« On obtient par là l'équation suivante, qui sert à développer une fonction quelconque en une suite formée de sinus et de cosinus d'arcs multiples. »

Vous voyez l'équation, c'est bien le développement en série de Fourier tel que nous le connaissons. Fourier parle d'une fonction quelconque sans trop se préoccuper de savoir ce qu'est une fonction, ni si les intégrales qui donnent les coefficients, ont effectivement un sens.

À sa décharge, au moment où il écrit, les idées de continuité et d'intégrabilité ne sont pas encore très claires. Mais surtout, pour Fourier la question n'est pas mathématique, mais physique. Sa fonction grand F représente une répartition de chaleur. Il ne peut donc pas l'imaginer autrement que continue.

Une fois écrite la décomposition en série trigonométrique, Fourier a parfaitement vu qu'elle s'applique à d'autres équations que celle de la chaleur. Voici par exemple ce qu'il dit des cordes vibrantes.

développer une fonction quelconque
Fourier, Théorie analytique de la chaleur (1822)



est nulle. On obtient par-là l'équation suivante (p), qui sert à développer une fonction quelconque en une suite formée de sinus et de cosinus d'arcs multiples;

$$\pi Fx = \frac{1}{2}\int Fx\,dx \begin{array}{l} + \cos. x \int Fx \cos. x\,dx + \cos. 2x \int Fx \cos. 2x\,dx + \text{etc.} \\ + \sin. x \int Fx \sin. x\,dx + \sin. 2x \int Fx \sin. 2x\,dx + \text{etc.} \end{array} \qquad (p)$$

13 la question du mouvement des cordes vibrantes

« Si l'on applique ces principes à la question du mouvement des cordes vibrantes, on résoudra les difficultés qu'avait d'abord présentées l'analyse de Daniel Bernoulli. La solution donnée par ce géomètre suppose qu'une fonction quelconque peut toujours être développée en série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Or de toutes les preuves de cette proposition, la plus complète est celle qui consiste à résoudre en effet une fonction donnée en une telle série dont on détermine les coefficients. »

Pour lui la solution par les séries trigonométriques est universelle, et ne peut souffrir aucune contestation.

la question du mouvement des cordes vibrantes
Fourier, Théorie analytique de la chaleur (1822)

Si l'on applique ces principes à la question du mouvement des cordes vibrantes, on résoudra les difficultés qu'avait d'abord présentées l'analyse de Daniel Bernouilli. La solution donnée par ce géomètre suppose qu'une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Or de toutes les preuves de cette proposition la plus complète est celle qui consiste à résoudre en effet une fonction donnée en une telle série dont on détermine les coëfficients.

14 il serait aujourd'hui superflu de les discuter

« Les solutions que l'on obtient par cette méthode sont complètes, et consistent dans des intégrales générales. Aucune autre intégrale ne peut avoir plus d'étendue. Les objections qui avaient été proposées à ce sujet sont dénuées de tout fondement ; il serait aujourd'hui superflu de les discuter. »

Fourier, qui était connu pour pour ses qualités humaines, emploie là un ton cassant qui ne lui ressemble pas vraiment. Pour comprendre pourquoi, il faut retracer l'histoire quelque peu difficile de ce livre. Fourier avait commencé par envoyer en 1807, donc quinze ans auparavant, un mémoire à l'Académie des sciences. À part un bref compte-rendu par Poisson l'année suivante, rien n'avait été publié. Mais tout de même, trois ans après, l'Académie avait ouvert un prix sur le même sujet, ce qui était un moyen d'encourager Fourier à revoir sa copie. Voici le compte-rendu de la séance publique du 6 janvier 1812, paru dans plusieurs journaux de l'époque.

il serait aujourd'hui superflu de les discuter
Fourier, Théorie analytique de la chaleur (1822)

Les solutions que l'on obtient par cette méthode sont complètes, et consistent dans des intégrales générales. Aucune autre intégrale ne peut avoir plus d'étendue. Les objections qui avaient été proposées à ce sujet sont dénuées de tout fondement; il serait aujourd'hui superflu de les discuter.

15 Séance publique du 6 janvier 1812

« Proclamation des prix décernés dans la séance publique du 6 janvier 1812.

La Classe des Sciences avait proposé en 1810, pour sujet du prix de mathématiques qu'elle devait distribuer cette année, la question suivante : « Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur, et comparer le résultat de cette théorie à des expériences exactes. »

La Classe a décerné le prix, valeur d'une médaille d'or de 3000 francs ; au mémoire enregistré sous le numéro 2 [. . .].

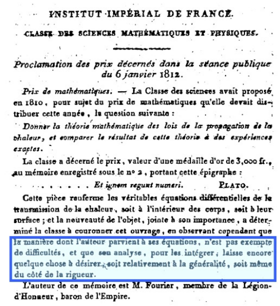
Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface ; et la nouveauté de l'objet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'auteur parvient à ses équations, n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.

L'auteur de ce mémoire est Monsieur Fourier, membre de la Légion d'honneur, baron de l'Empire. »

Imaginez un peu la réaction de Fourier, baron de l'Empire et préfet de l'Isère, lisant dans les journaux que certes on lui donne un prix, mais du bout des lèvres, en observant qu'il manque de rigueur. Cela ne pouvait pas lui faire plaisir.

Séance publique du 6 janvier 1812

Mercure de France, 22 février 1812



INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

Proclamation des prix décernés dans la séance publique du 6 janvier 1812.

Prix de mathématiques. — La Classe des sciences avait proposé en 1810, pour sujet du prix de mathématiques qu'elle devait distribuer cette année, la question suivante :

Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur, et comparer le résultat de cette théorie à des expériences exactes.

La classe a décerné le prix, valeur d'une médaille d'or de 3,000 fr., au mémoire enregistré sous le n° 2, portant cette épigraphe :

. . . . *Et ignem regunt numeri.* PLATO.

Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface ; et la nouveauté de l'objet, jointe à son importance, a déterminé la classe à couronner cet ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'auteur parvient à ses équations, n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.

L'auteur de ce mémoire est M. Fourier, membre de la Légion-d'Honneur, baron de l'Empire.

16 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Maintenant, mettez-vous aussi à la place de Lagrange. Il a 76 ans, mais il se souvient parfaitement qu'il avait travaillé sur les cordes vibrantes, cinquante ans auparavant. Il se souvient certainement aussi de son article de 1766, où il donnait le calcul des coefficients d'une série trigonométrique interpolant une fonction. Il est probable que si à l'époque il n'avait pas énoncé un résultat général de convergence, c'est qu'il ne lui paraissait pas évident. Et 46 ans plus tard, les affirmations péremptoires de Fourier ne lui suffisent toujours pas. Il n'a certainement eu aucun mal à convaincre ses collègues plus jeunes, Lacroix, Legendre, Poisson et Prony, chargés de l'examen du mémoire, que les justifications de Fourier étaient insuffisantes.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Mais l'essentiel restait tout de même l'équation de la chaleur, qui à elle seule justifiait l'attribution du prix. Et puis le temps a passé : Lagrange est mort en 1813 ; Fourier s'est installé à Paris après la chute de Napoléon ; il a été élu à l'Académie des sciences en 1817. L'année où paraît sa Théorie analytique de la chaleur, il en est même devenu secrétaire perpétuel. Quelle revanche ! Alors il trouve légitime de léguer à la postérité sa philosophie des mathématiques.

17 la source la plus féconde des découvertes mathématiques

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. »

Fourier écrivait ceci au moment de la transition entre les mathématiques du dix-huitième et celles du dix-neuvième siècle. Les nouvelles générations auraient un point de vue totalement différent du sien. Voici ce que Jacobi, alors âgé de 26 ans, écrivait au moment de la mort de Fourier.

la source la plus féconde des découvertes mathématiques
Fourier, Théorie analytique de la chaleur (1822)

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non-seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré de former l'analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.

18 Lettre à Legendre (2 juillet 1830)

« M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que, sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde. »

Justement, c'est le meilleur ami de Jacobi, Gustav Lejeune-Dirichlet, qui a donné la première justification rigoureuse de la convergence des séries trigonométriques.

Lettre à Legendre (2 juillet 1830)
Carl Gustav Jacobi (1804–1851)

[...] M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que, sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde.

19 Sur la convergence des séries trigonométriques (1829)

« Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

Les séries de sinus et de cosinus, jouissent entre autres propriétés remarquables aussi de celle d'être convergentes. Cette propriété n'avait pas échappé au géomètre illustre, c'est-à-dire Fourier, etc. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. »

Il a raison : il est bien le premier à donner une démonstration au sens moderne du terme. En plus de cette démonstration, ce qui frappe dans sa démarche, c'est son souci de définir précisément les objets qu'il manipule.

Sur la convergence des séries trigonométriques (1829)
Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859)

Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Les séries de sinus et de cosinus, au moyen desquelles on peut représenter une fonction arbitraire dans un intervalle donné, jouissent entre autres propriétés remarquables aussi de celle d'être convergentes. Cette propriété n'avait pas échappée au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question ; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premières recherches sur la chaleur. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne connais sur cet objet qu'un tra-

20 une fonction qui a une valeur finie et déterminée

Comme ici ce qu'est une fonction continue sur un intervalle. À quelques détails de formulation près, c'est bien notre définition moderne.

Pour cerner la portée de ses résultats, il donne des contre-exemples, et c'est aussi une démarche nouvelle.

une fonction qui a une valeur finie et déterminée
Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques (1829)

9. *Dirichlet, convergence des séries trigonométriques.* 159

menés. Désignons par h un nombre positif inférieur ou tout au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ et par $f(\beta)$ une fonction de β qui reste continue entre les limites 0 et h ; j'entends par là une fonction qui a une valeur finie et determinée pour toute valeur de β comprise entre 0 et h, et en outre telle que la différence $f(\beta+\varepsilon)-f(\beta)$ diminue sans limite lorsque ε devient de plus en plus petit. Supposons encore que la fonction reste toujours positive entre

21 la première de ces séries est convergente

Ici, il montre deux séries dont les termes généraux sont équivalents, dont l'une est convergente, l'autre divergente.

la première de ces séries est convergente
Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques (1829)

On en voit un exemple très simple dans les deux séries, ayant l'une pour terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et l'autre $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. La première de ces séries est convergente, la seconde au contraire est divergente, car en la soustraiant de la première on obtient la série divergente:

$$-1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}-\text{etc.}$$

et cependant le rapport de deux termes correspondans, qui est $1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, converge vers l'unité à mesure que n croît.

22 les différentes intégrales perdroient toute signification

Là, il donne une fonction discontinue partout qui ne peut pas être intégrée : elle prend des valeurs différentes sur les rationnels et sur les irrationnels.

De nos jours, quand on parle de l'importance historique des séries trigonométriques, on souligne d'abord leur actualité et leurs applications : de la transformée de Fourier rapide aux images jpeg. Certes, mais c'est faire de l'histoire a posteriori. Pendant tout le dix-neuvième siècle, le rôle des séries trigonométriques a été de servir de banc d'essai à la rigueur mathématique. Vous allez voir ce que je veux dire.

les différentes intégrales perdroient toute signification
Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques (1829)

satisfait à la condition précédemment énoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationnelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de x, et cependant on ne saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdroient toute signification dans ce cas. La restriction que je

23 Sur la possibilité de représenter (1854)

Quand Riemann est mort, il n'avait pas encore 40 ans. Son ami Dedekind a cherché dans ses papiers ce qui devait être publié. Il a trouvé en particulier cet article « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique ». Regardez ce qu'il en dit en note de bas de page.

« L'impression de ce travail sans changement de forme paraîtra suffisamment justifiée, tant par l'intérêt considérable qui s'attache au sujet, que par la manière dont y sont traités les principes les plus importants de l'analyse infinitésimale. » Et en effet, à propos du calcul des coefficients de Fourier, Riemann se pose la question fondamentale du calcul de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle : sa réponse est ce que nous appelons toujours l'intégrale de Riemann.

Sur la possibilité de représenter (1854)
Bernhard Riemann (1826–1866), Richard Dedekind (1831–1916)

SUR LA POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER UNE FONCTION PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR B. RIEMANN.

Publié, d'après les papiers de l'auteur, par R. DEDEKIND (1).

(Traduit de l'allemand.)

Le présent travail sur les séries trigonométriques se compose de deux Parties essentiellement distinctes. La première contient une histoire des recherches et des opinions des géomètres sur les fonc-

(1) Ce Mémoire a été présenté par l'auteur, en 1854, à la Faculté de Philosophie pour son habilitation à l'Université de Gœttingue. Bien que l'auteur ne semble pas l'avoir destiné à la publicité, cependant l'impression de ce travail sans aucun changement de forme paraitra suffisamment justifiée tant par l'intérêt considérable qui s'attache au sujet, que par la manière dont y sont traités les principes les plus importants de l'Analyse infinitésimale.

Brunswick, juillet 1867. R. DEDEKIND.

24 Ueber trigonometrische Reihen (1870)

Eduard Heine est un élève de Dirichlet. À la suite de Dirichlet et Weierstrass, il a travaillé à l'élaboration et à la clarification du concept de continuité uniforme. Il a démontré par exemple qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné était uniformément continue.

À la suite de son article « Sur les séries trigonométriques » que vous voyez, il transmet à son jeune collègue Georg Cantor le problème de l'unicité.

Ueber trigonometrische Reihen (1870)
Eduard Heine (1821–1881)

Ueber trigonometrische Reihen.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle a. S.)

§. 1. Bis in die neueste Zeit glaubte man, es sei das Integral einer convergenten Reihe, deren Glieder zwischen endlichen Integrationsgrenzen endlich bleiben, gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder, und erst Herr *Weierstrass* hat bemerkt, der Beweis dieses Satzes erfordere, dass die Reihe in den Integrationsgrenzen nicht nur convergire, sondern dass sie auch in gleichem Grade convergire *). Hiermit ist aber der Satz:

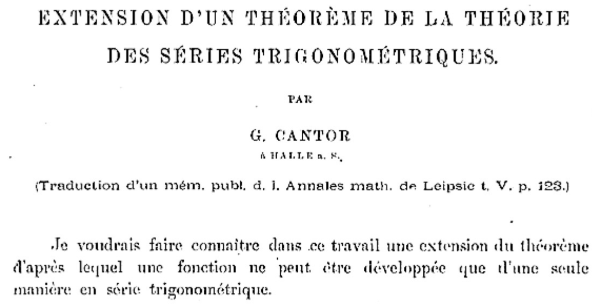
Eine zwischen $x=-\pi$ und $x=\pi$ gegebene endliche Function $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form

$$(\alpha.)\qquad f(x) = \tfrac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$$

entwickeln

25 Extension d'un théorème (1872)

Extension d'un théorème (1872)
Georg Cantor (1845–1918)



EXTENSION D'UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR

G. CANTOR
À HALLE a. S.

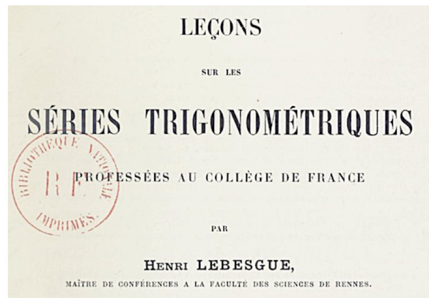
(Traduction d'un mém. publ. d. l. Annales math. de Leipsic t. V. p. 123.)

Je voudrais faire connaître dans ce travail une extension du théorème d'après lequel une fonction ne peut être développée que d'une seule manière en série trigonométrique.

Cela donne cet article : « Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques. » L'essentiel de l'article n'est pas dans la démonstration de l'unicité, mais dans la définition que Cantor donne des nombres réels, comme classe d'équivalence de suites de rationnels. Ce sera le point de départ de sa théorie des ensembles.

26 Leçons sur les séries trigonométriques (1906)

Leçons sur les séries trigonométriques (1906)
Henri Lebesgue (1875–1941)



LEÇONS

SUR LES

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

HENRI LEBESGUE,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

Vous voyez ici la première page des « Leçons sur les séries trigonométriques professées par Henri Lebesgue, maître de conférences à la faculté des sciences de Rennes. » C'est l'occasion pour lui d'appliquer sa toute nouvelle théorie de l'intégration, l'intégrale de Lebesgue que nous utilisons toujours.

27 Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859)

Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859)

Maintenant que vous voilà convaincus de l'importance des séries trigonométriques dans l'histoire de l'analyse, il est temps de vous raconter le lien avec l'histoire de la musique. Ce sera plus mondain.

Vous vous souvenez n'est-ce pas, que Dirichlet est le premier à avoir traité de manière rigoureuse la convergence des séries de Fourier. L'article date de 1829, Dirichlet n'a que 24 ans, mais il commence déjà à être connu.

28 Maximilien Sébastien Foy (1775–1825))

Maximilien Sébastien Foy (1775–1825))

Sa carrière a commencé à Paris, où il est arrivé à l'âge de 17 ans. Là il a suivi des cours au collège de France et à la Faculté des sciences, tout en étudiant les Disquisitiones Arithmeticae de Gauss. Comme il n'a pas de fortune personnelle et qu'il faut bien vivre, il trouve un poste de professeur d'allemand chez le général Foy, qui le loge et le nourrit.

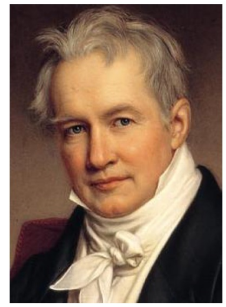
Il réalise son premier coup d'éclat en démontrant le cas $n = 5$ du théorème de Fermat-Wiles. Cela lui vaut une invitation à exposer à l'Académie des sciences, à seulement 20 ans, sans qu'il ait le moindre diplôme. C'est là qu'il fait la connaissance de Fourier et Poisson, et probablement aussi qu'il entend parler des séries trigonométriques.

29 Alexander von Humboldt (1769–1859))

Le général Foy étant décédé la même année, Fourier et Poisson le présentent à Humboldt. Il me faudrait une histoire entière pour vous parler de lui. Il a marqué son siècle et l'histoire des sciences par ses explorations et ses récits. Mais restons-en aux mathématiques.

Humboldt comprend l'intérêt de conserver en Allemagne un jeune homme aussi brillant. Il s'adresse à Gauss, qui écrit une recommandation exceptionnellement louangeuse. Grâce à Humboldt et Gauss, Dirichlet est nommé à Breslau, actuellement Wroslaw en Pologne. Mais pour Humboldt l'objectif final est d'installer Dirichlet à Berlin, ce qu'il réussit en 1828.

Alexander von Humboldt (1769–1859))



30 Fanny et Felix Mendelssohn

À Berlin, Humboldt est souvent invité chez les Mendelssohn. La fille aînée, Fanny et son frère Felix, sont des musiciens surdoués, et ils organisent chez eux des concerts exceptionnels. Pourquoi connaît-on plus Felix que Fanny ? Écoutez ce qu'écrivait le père à sa fille.

« Il est permis à Félix d'avoir l'ambition de faire connaître son talent, dont le succès importe à son avenir ; mais toi mon enfant, renonce à des triomphes qui ne siéent pas à ton sexe, et cède la place à ton frère. »

Sans commentaire… à part celui de Fanny elle-même. Elle s'adresse à un ami, le 25 décembre 1827.

Fanny et Felix Mendelssohn
Fanny Mendelssohn (1805–1847), Felix Mendelssohn (1809–1847)

31 Lettre à Klingemann (25 décembre 1827)

« Vous avez peut-être appris qu'Alexandre de Humboldt fait un cours de géographie à l'université ; mais vous ignorez qu'il a commencé une série de conférences au conservatoire de musique. Elles sont suivies par quiconque a quelque prétention de culture et de savoir vivre, depuis le roi, la cour, les ministres, les généraux, les artistes, les savants, les beaux et les fâcheux esprits, les étudiants et les dames, parmi lesquelles se faufile votre humble correspondante. »

Lettre à Klingemann (25 décembre 1827)
Fanny Mendelssohn (1805–1847)

Vous avez peut-être appris qu'Alexandre de Humboldt fait un cours de géographie à l'université ; mais vous ignorez qu'il a commencé une série de conférences au Conservatoire de musique. Elles sont suivies par quiconque a quelque prétention de culture et de savoir vivre, depuis le roi, la cour, les ministres, les généraux, les artistes, les savants, les beaux et les fâcheux esprits, les étudiants et les dames, parmi lesquelles se faufile votre humble correspondante.

32 Ces Messieurs ont beau railler

« La cohue est indescriptible, le public imposant, et la conférence des plus intéressantes. Ces Messieurs ont beau railler, ne trouvez-vous pas équitable qu'il nous soit enfin permis, à nous autres femmes, d'entendre une parole intelligente ? Dites-vous bien que nous apprécions le privilège, et que nous prenons notre parti de l'ironie masculine. »

Un an plus tard, dans une lettre au même Klingemann, Fanny ajoute en passant : « Signalons parmi les derniers membres admis, le beau et aimable, exubérant et savant docteur ès-sciences mathématiques, Dirichlet.

Ces Messieurs ont beau railler
Fanny Mendelssohn, Lettre à Klingemann (25 décembre 1827)

La cohue est indescriptible, le public imposant, et la conférence des plus intéressantes. Ces Messieurs ont beau railler, ne trouvez-vous pas équitable qu'il nous soit enfin permis, à nous autres femmes, d'entendre une parole intelligente ? Dites-vous bien que nous apprécions le privilège, et que nous prenons notre parti de l'ironie masculine.

33 Rebecka Mendelssohn (1811–1858)

Lors des réceptions de la famille Mendelssohn, Dirichlet se montre d'autant plus aimable, exubérant et savant, qu'il y rencontre la jeune sœur de Fanny et Felix : Rebecka. Elle n'a que 17 ans, et même si elle est moins exceptionnellement douée que ses aînés, elle est jolie, spirituelle, et très courtisée. Malgré la réticence des parents, et grâce à Felix et Fanny, c'est Dirichlet qui sera choisi.

Et voilà le rapport entre les séries trigonométriques et l'histoire de la musique : Dirichlet était le beau-frère de Fanny et Felix Mendelssohn. Ce n'est d'ailleurs pas le seul lien de cette famille avec des mathématiciens : Kummer était marié à une cousine de Rebecka ; et Heine, dont nous avons parlé plus tôt, était le beau-frère de son plus jeune frère.

Devenue Madame Dirichlet, Rebecka a continué la tradition familiale d'hospitalité. Même à Göttingen, où Dirichlet a été nommé à la mort de Gauss, elle a continué à organiser des concerts privés. Et vu les invités, la qualité musicale devait être exceptionnelle. Voici quelques noms, parmi ceux que Dirichlet a pu cotoyer.

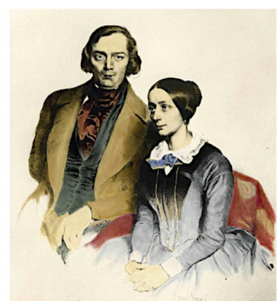
Rebecka Mendelssohn (1811–1858)

34 Robert et Clara Schumann

Le couple Schumann, lui compositeur, elle pianiste virtuose.

Robert et Clara Schumann

Robert Schumann (1810–1856), Clara Wieck (1819–1896)

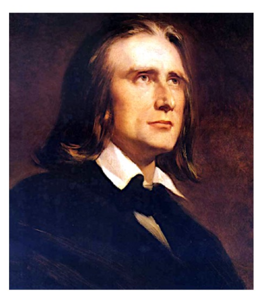


35 Liszt et Gounod

Et encore Franz Liszt et Charles Gounod.

Liszt et Gounod

Franz Liszt (1811–1886), Charles Gounod (1818–1893)



36 Joachim et Brahms

Et parmi la génération suivante Joseph Joachim et Johannes Brahms. Ils ont joué ensemble des œuvres de Felix Mendelssohn dans le salon des Dirichlet à Göttingen.

Joachim et Brahms

Joseph Joachim (1831–1907), Johannes Brahms (1833–1897)

37 références

Dites donc, entre les pianos et les violons, il devait y avoir tout de même beaucoup de cordes vibrantes certains soirs chez les Dirichlet, vous ne pensez pas ?

références

- J. Dhombres, J.-B. Robert (1998) *Joseph Fourier, créateur de la physique mathématique*, Paris : Belin
- J. Elstrodt (2007) The life and work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), *in W. Duke, Y. Tschinkel eds., Analytic Number Theory, a Tribute to Gauss and Dirichlet, Clay Mathematics Proceedings*, 7 , 1–37, American Mathematical Society
- S. B. Engelsman (1984) D'Alembert et les équations aux dérivées partielles, *Dix-huitième siècle*, 16, 27–37
- J.-P. Kahane (2009) Fourier, un mathématicien inspiré par la physique *Images de la Physique*, 13(4), 3–10
- B. Maurey (2018) Fourier, un homme, plusieurs vies, *Gazette de la SMF*, 158, 7–24
- D. Shavin (2004) Lejeune Dirichlet and the Mendelssohn youth movement, *Fidelio*, 13(4), 89–93