Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Le rat et le faucon

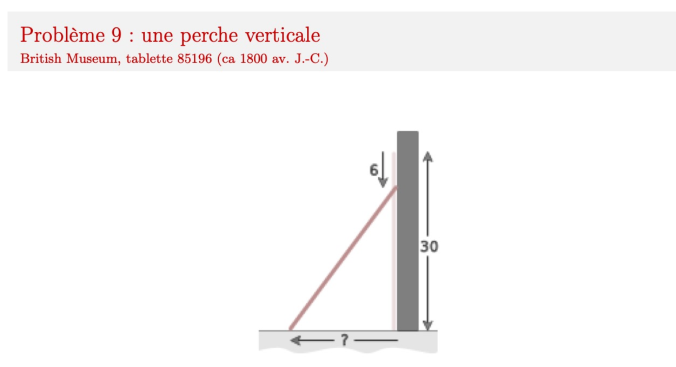
Je vous annonce un rat et un faucon, et je vous montre des lotus dépassant d'une mare : quel est le rapport ?

Nous allons parcourir les siècles et les pays, à la recherche d'habillages du théorème de Pythagore sous forme d'énigmes géométriques. Certaines de ces devinettes mathématiques ont traversé les siècles. La plus ancienne parle d'une perche qui quitte la verticale.

1 Tablette 85196 (ca 1800 av. J.-C.)

Elle vient d'une tablette du British Museum, qui est un recueil de problèmes mathématiques. C'est le neuvième problème. Il est passablement abîmé et difficile à interpréter. Voici comment on peut le reconstruire.

2 Problème 9 : une perche verticale



« Soit une perche verticale de longueur trente. Elle glisse de sorte que son extrémité descend de 6. On demande de combien sa base s'est-elle écartée. »

Faites le calcul : 30 pour l'hypoténuse, 24 pour le côté vertical, donc 30 au carré moins 24 au carré, cela fait 18 au carré. Il s'agit d'un triplet pythagoricien, proportionnel à 3, 4, 5. Même si le problème se pose sous forme géométrique, la réponse est un triplet d'entiers. C'est très souvent le cas.

Ma seconde remarque porte sur la position géométrique de l'angle droit. L'un des deux côtés du triangle rectangle est vertical, l'autre horizontal, et ce sera vrai dans tous les exercices que nous allons parcourir.

3 Problème 12 : une perche contre un mur

Voici BM 34568 : elle ressemble à la précédente vous ne trouvez pas ? Quelle est la différence ? Oh, pas grand chose, juste quinze siècles. Celle-ci date du royaume séleucide, les héritiers d'Alexandre le Grand. Elle contient aussi un problème de perche. Il est légèrement plus compliqué.

« La perche descend de 3 pour atteindre le haut du mur, et ce faisant, sa base s'est écartée de 9 par rapport au mur. On demande la longueur de la perche et la hauteur du mur. »

Le petit côté de l'angle droit étant 9, vous trouverez 12 pour la hauteur du mur et 15 pour la longueur de la perche. C'est encore un triplet pythagoricien multiple de 3,4,5.

On retrouve quasiment les mêmes problèmes de perches dans des papyrus égyptiens à peu près à la même période.

Problème 12 : une perche contre un mur
British Museum, tablette 34568 (ca 250 av. J.-C.)

4 Problème 27 : une perche de 10 coudées

Ce papyrus écrit en écriture démotique pourrait dater du second ou du troisième siècle avant Jésus-Christ, soit après Euclide, disons au temps d'Archimède, Apollonius et Ératosthène. D'après les spécialistes, il est la preuve d'une influence directe des mathématiques babyloniennes en Égypte.

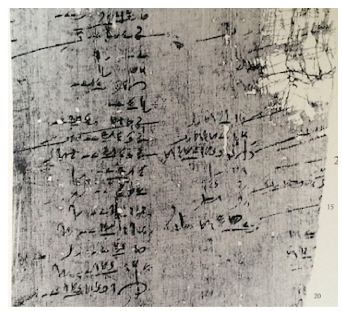
Le problème 27 dans ce papyrus, est quasiment identique au premier que nous avons vu. Les données ont juste été divisées par trois.

« Une perche fait dix coudées. On abaisse son sommet de deux coudées. De combien la base a-t-elle été écartée ? »

Le problème 31 du même papyrus ressemble à celui de la tablette séleucide. La base de la perche est écartée de 10 coudées, et le sommet est descendu de 4 coudées. Quelle est sa longueur ?

Ah tiens, pour une fois le résultat n'est pas entier : la longueur de la perche est 14 et demi, l'autre côté de l'angle droit est 10 et demi. Le triplet est la moitié du triplet pythagoricien 20, 21, 29.

Problème 27 : une perche de 10 coudées
Papyrus Cairo 89127 (ca 250 av. J.-C.)

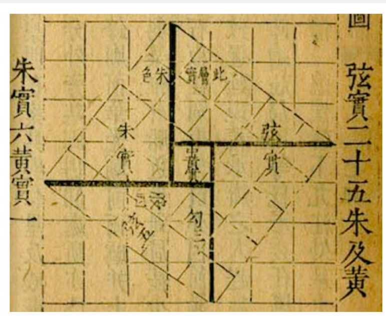


5 Zhoubi Suanjing (1^{er} siècle)

Les Chinois, eux aussi, connaissaient le théorème de Pythagore, et en avaient même une démonstration graphique. Le Zhoubi Suanjing dans lequel figure cette illustration est une compilation de textes sur l'astronomie dont certains datent peut-être de bien avant notre ère. De sorte qu'il est impossible de savoir si les Chinois connaissaient le théorème de Pythagore avant les Grecs.

En tout cas le Zhoubi Suanjing ne contient pas de devinettes sur les perches et les murs. Par contre, les Neuf chapitres sur l'art du calcul, compilé vers la même époque, contient bien un problème de perche qu'on appuie contre un mur. Mais il contient aussi d'autres problèmes plus originaux.

Zhoubi Suanjing (1^{er} siècle)
Théorème de Pythagore



6 Chapitre 9 : base et hauteur, problème 6

« Supposons que l'on ait un étang carré de 1 zhang de côté, au centre duquel pousse un roseau qui dépasse de 1 chi le niveau de l'eau. Quand on tire le roseau vers la rive, il arrive juste au bord. On demande combien valent respectivement la profondeur de l'eau et la longueur du roseau. »

Chapitre 9 : base et hauteur, problème 6
Neuf chapitres sur l'art du calcul

Supposons que l'on ait un étang carré de 1 zhang de côté, au centre duquel pousse un roseau qui dépasse de 1 chi le niveau de l'eau. Quand on tire le roseau vers la rive, il arrive juste au bord. On demande combien valent respectivement la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.

1 zhang = 10 chi

7 Chapitre 9 : base et hauteur, problème 12

Ou bien le bambou brisé :

« Supposons qu'on ait un bambou de 1 zhang de hauteur et que son extrémité, alors qu'il est brisé, touche le sol à une distance de 3 chi de sa base. On demande à quelle hauteur il a été brisé. »

Chapitre 9 : base et hauteur, problème 12
Neuf chapitres sur l'art du calcul

8 Bambou brisé et lotus coulé

Il est impossible de prouver une influence des mathématiques chinoises sur l'Inde ; toujours est-il que les mêmes problèmes s'y retrouvent, quasiment à l'identique. Par exemple le bambou brisé :

« Un bambou de seize *hastas* est brisé par le vent. Il tombe et son sommet arrive au sol à huit *hastas* de sa racine. Où a-t-il été brisé par le dieu du vent ? C'est ce qui doit être dit. »

Le roseau au milieu de la mare est devenu un lotus :

« Un lotus en fleur de huit *aṅgulas* est vu au-dessus de l'eau. Déplacé par le vent, il coule en un *hasta*. Rapidement, la longueur du lotus et la profondeur de l'eau devraient être dites. »

Ces exercices proviennent du commentaire de Bhaskara I au texte d'Aryabhata, dont je vous parle souvent. Bhaskara I vivait au septième siècle. Ce n'est pas le Bhaskaracharya de la Lilavati, qui lui, vivait cinq siècles plus tard.

Bhaskara I pourrait être l'inventeur d'un autre habillage de Pythagore, lui aussi promis à un certain avenir.

Bambou cassé et lotus coulé
Bhāskara I, Āryabhaṭīyabhāṣa (629)

9 Le rat et le faucon

« Un faucon est sur une colonne de hauteur dix-huit. Il y a un rat éloigné de son trou de quatre-vingt un. À cause de sa peur du faucon, le rat commence à courir vers son trou qui est au pied de la colonne. Comme il arrive en vue de son terrier, il est tué en chemin par le cruel faucon. On demande à quelle distance est le trou et quel chemin le faucon a parcouru. »

Implicitement, vous devez supposer que le rat court horizontalement à la vitesse à laquelle vole le faucon, et que les deux parcourent donc la même distance. Vous allez trouver 42 et demi pour la distance parcourue.

Après Aryabhata, l'autre grand mathématicien indien est Brahmagupta, qui vivait aussi au septième siècle et était donc contemporain de Bhaskara I. Les écrits mathématiques de Brahmagupta ont aussi été commentés, et les commentateurs ont aussi exercé leur imagination sur les habillages du théorème de Pythagore.

Le rat et le faucon
Bhāskara I, Āryabhaṭīyabhāṣa (629)

Un faucon est sur une colonne de hauteur dix-huit. Il y a un rat éloigné de son trou de quatre-vingt un. À cause de sa peur du faucon, le rat commence à courir vers son trou qui est au pied de la colonne. Comme il arrive en vue de son terrier, il est tué en chemin par le cruel faucon. On demande à quelle distance est le trou et quel chemin le faucon a parcouru.

10 Deux ascètes sur une montagne

Prithudaka Swami, qui écrivait au neuvième siècle, reprend le bambou brisé, ainsi que le faucon, qu'il transforme en chat. Il y ajoute une situation plus spectaculaire.

« Au sommet d'une montagne vivent deux ascètes. L'un d'eux, qui est sorcier, voyage dans les airs. Sautant du sommet de la montagne, il monte jusqu'à une certaine hauteur, et descend en oblique jusqu'à une ville voisine. L'autre, descendant la colline à pied, se rend par voie de terre jusqu'à la même ville. Leurs voyages sont de même longueur. Je désire savoir de combien le sorcier s'est élevé. »

Comme aucune donnée numérique n'est fournie dans l'énoncé, vous devrez supposer que la hauteur de la colline est 12 et la distance à la ville est 48. Vous trouverez que le sorcier est monté en l'air de huit, juste pour épater la galerie, parce que son compagnon plus modeste a parcouru à pied la même distance. Il faut dire que l'énoncé suppose qu'il est descendu de sa montagne à la verticale. C'est vous dire la technicité des ascètes hindous.

Deux ascètes sur une montagne
Brahma sur son cygne dans les montagnes avec les ascètes (ca. 1825)

11 Deux mendiants religieux

Vous pensez bien que je n'allais pas laissser passer l'occasion de vous soumettre un nouvel échantillon de l'imagination débordante de Mahavira. Passons sur les piliers, les perches et les lotus, passons même sur les ascètes voyageurs. Voici deux mendiants religieux, des Sadhus comme celui de cette photo.

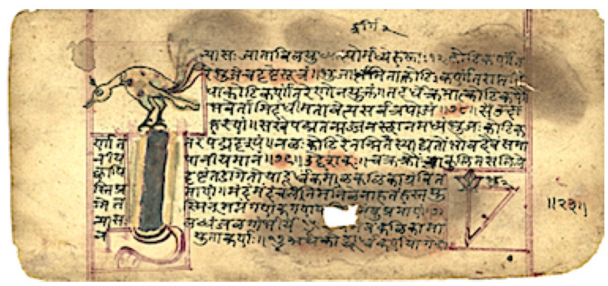
Deux mendiants religieux
Mahāvīra, Ganita-sāra-saṅgraha, ca. 850

« La hauteur d'une colline est 22 *yōjanas*. Celle d'une autre colline est de 18 *yōjanas*. Entre les deux collines il y a un espace de 20 *yōjanas*. Là se tiennent deux mendiants religieux, un sur chaque sommet, qui peuvent se déplacer dans les airs. Afin de mendier leur nourriture, ils se rendent à la ville qui est entre les collines. Il advient qu'ils ont parcouru en l'air des distances égales. Quelles étaient les distances de chaque colline à la ville ? »

Vous trouverez facilement que la ville est à six *yōjanas* de la colline la plus haute, donc à 14 de la plus basse. Vous vous demanderez ensuite comment il se fait que des religieux dotés de capacités aussi stupéfiantes ont encore besoin de mendier pour assurer leur existence.

12 Le serpent et le paon

Le serpent et le paon
Bhāskarāchārya (1114-1185), Līlāvatī (1150)



Et le Bhaskara de la Lilavati ? Vous ne croyez tout de même pas qu'il allait rester à la traîne ?

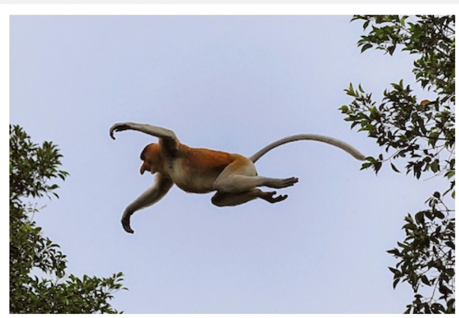
Comme vous le constatez sur l'illustration à gauche, le rat est devenu un serpent, tandis que son prédateur s'est transformé en un magnifique paon. Dans le petit encadré en bas à droite, c'est le problème de la fleur de lotus dans une mare qui est illustré.

Dans la Lilavati, on trouve encore ceci.

13 Les deux singes et la mare

« Depuis un arbre haut de cent coudées, un singe descendit et se rendit à une mare distante de deux cent coudées. Cependant un autre singe, sautant jusqu'à une certaine hauteur depuis le haut de l'arbre, se rendit en oblique au même endroit. Si les deux parcours étaient de longueurs égales, dis-moi rapidement, homme savant, la hauteur du saut, si tu as étudié le calcul avec assiduité. »

Les deux singes et la mare
Bhāskarāchārya (1114-1185), Līlāvatī (1150)



Vous avez bien sûr reconnu les deux ascètes sur leur montagne. Je vous sentirais presque déçus d'une situation aussi prosaïque.

Autant l'influence de la Chine sur l'Inde est difficile à démontrer, autant l'influence de l'Inde sur les mathématiques arabes est abondamment attestée, par les intéressés eux-mêmes. On retrouve donc logiquement chez les Arabes, les habillages de Pythagore dont nous venons de parler.

Quant à la transmission vers l'Europe, nous parlons le plus souvent de Fibonacci, mais il n'a pas été le seul. Les traductions des manuels arabes en Espagne, ont commencé avant le treizième siècle, et je vous ai déjà raconté que les arithmétiques commerciales du Moyen-Âge tardif pouvaient très bien avoir des sources espagnoles.

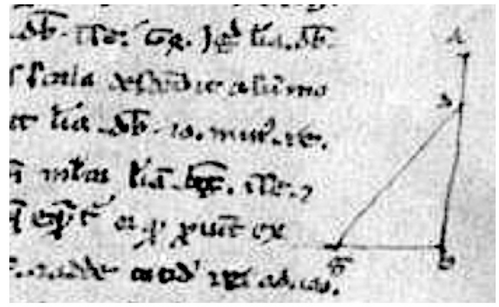
14 Échelles et arbres

En particulier le Liber Mahameleth ou « livre des transactions », est une compilation de techniques mathématiques pour le commerce, probablement écrite à Séville, alors sous domination musulmane.

On y trouve quelques énigmes mathématiques, dont la bonne vieille perche contre un mur, qui depuis les Mésopotamiens s'est transformée en échelle. On y trouve aussi le bambou brisé, devenu un arbre, et décliné sous différentes formes. Mais globalement, la fantaisie exhubérante des Indiens s'est quelque peu diluée.

Échelles et arbres

Liber Mahameleth (ca 1150)



15 Perche contre une tour

Le Liber Abaci de Fibonacci lui, ne parle pas d'échelle, mais conserve les bonnes vieilles perches. Par exemple :

« Une perche de 20 pieds est dressée contre une tour. On demande, si la base de la perche est séparée de la tour de 12 pieds, de combien son sommet descendra. »

On trouve encore chez Fibonacci des énoncés plus compliqués, avec deux perches dont l'une penche vers l'autre. Et puis apparaît l'énoncé suivant.

Perche contre une tour

Fibonacci, Liber Abaci (1202)

16 Des oiseaux et des tours

« Sur un certain terrain sont deux tours, dont l'une fait 30 pieds de haut, l'autre 40, et elles sont distantes de 50 pieds. En bas se trouve une fontaine. Deux oiseaux descendent ensemble du haut de chaque tour, volent sur la même distance jusqu'au milieu de la fontaine. On demande les distances du centre de la fontaine à chacune des tours. »

Et voilà nos mendiants acrobates transformés en oiseaux. Vous imaginez bien qu'un tel énoncé ne pouvait pas se perdre.

Des oiseaux et des tours

Fibonacci, Liber Abaci (1202)

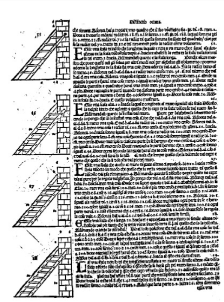
In quodam plano sunt due turres, quarum una est alta passibus XXX, altera XL, et distant in solo passibus L ; infra quas est fons, ad cuius centrum uolitant due aues pari uolatu, descentes pariter ex altitudine ipsarum ; queritur distancia centri ab utraque turri.

17 Summa de arithmetica (1494)

Le successeur le plus célèbre de Fibonacci est Pacioli, dont la Summa Arithmetica est parfois présenté à tort comme le premier livre de mathématiques imprimé. On y trouve plusieurs problèmes d'échelles dressées contre des tours. On y retrouve aussi les deux oiseaux qui volent jusqu'à une fontaine entre deux tours. Cette fois-ci, les hauteurs sont de 100 et 70 brasses, la distance entre les deux tours est de 150 brasses.

Summa de arithmetica (1494)

Luca Pacioli (ca 1445–1517)

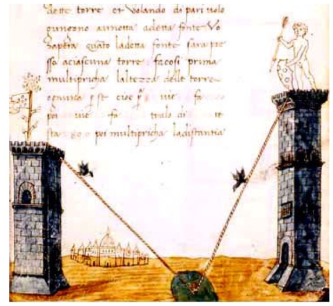


18 De arithmetica opusculum (1491)

Au début de l'imprimerie, plusieurs livres du type de la Summa Arithmetica sont sortis. Pour celui de Filippo Calandri, la version imprimée se double d'un manuscrit magnifiquement enluminé. Revoici le problème des oiseaux et des deux tours. Les données ont changé. Les hauteurs sont 80 et 90 brasses, la distance est de 100 brasses.

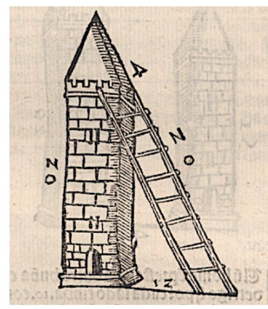
Je ne vais pas vous infliger un recensement exhaustif de tous les habillages de Pythagore dans les siècles suivants. Vous savez que j'aime bien vous parler de mathématiciens peu connus. En voici deux.

De arithmetica opusculum (1491)
Filippo Calandri (ca. 1400–1469)



19 L'échelle et la tour

L'échelle et la tour
Gaspar Nicolas, Tratado da pratica darismetica (1519)

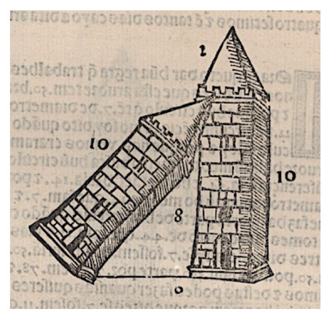


Gaspar Nicolas, est l'auteur du tout premier livre de mathématiques en portugais, et on ne sait rien de plus de lui. Son traité a tout de même connu onze éditions successives en deux siècles.

Vous voyez ici le très vieux problème de l'échelle que l'on retire d'un mur de hauteur identique. La figure n'est pas très explicite, mais je suppose que le triangle est 12,16,20, soit quatre fois le triangle de 3,4,5.

20 Les deux tours

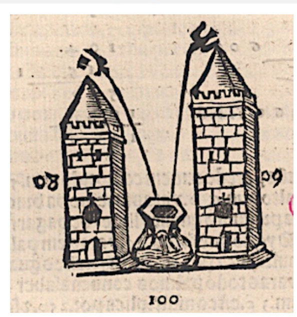
Les deux tours
Gaspar Nicolas, Tratado da pratica darismetica (1519)



Ce problème des deux tours dont l'une penche vers l'autre me paraît source de questions architecturales dépassant le niveau de Pythagore.

21 Des oiseaux et des tours

Des oiseaux et des tours
Gaspar Nicolas, Tratado da pratica darismetica (1519)

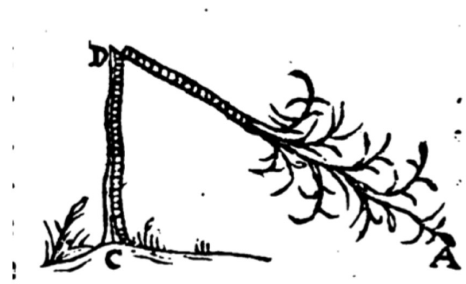


Et revoici les deux oiseaux volant depuis leurs tours. Les données numériques sont exactement celles de Calandri.

22 Arbre brisé

Arbre cassé

Denis Henrion, Deux cent questions ingénieuses et récréatives (1620)



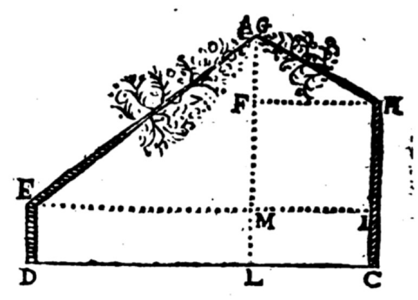
Un siècle plus tard, c'est la mode des livres de récréations mathématiques. L'un d'eux est écrit par Denis Henrion. Il a traduit les éléments d'Euclide, et il est l'auteur de la première table de logarithmes française. Mais on ne sait pas grand-chose d'autre sur lui.

Remarquez que le bambou brisé a été remplacé par un arbre, comme dans le liber Mahameleth.

23 Arbres brisés

Arbres cassés

Denis Henrion, Deux cent questions ingénieuses et récréatives (1620)

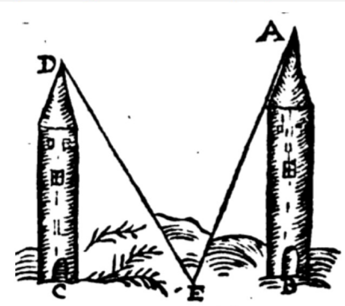


Quitte à compliquer quelque peu en introduisant un second arbre, également brisé. Par un miracle typiquement mathématique, les deux arbres sont tombés l'un vers l'autre de manière que leurs cimes se touchent exactement : rendez-vous compte !

24 Les deux tours

Les deux tours

Denis Henrion, Deux cent questions ingénieuses et récréatives (1620)



Vous vous attendriez à trouver deux arbres de hauteurs différentes de la cime desquels deux alouettes volètent gaiement et à la même vitesse vers quelque fruit magnifique tombé entre les deux.

Eh bien non : quitte à vous décevoir, Henrion prend deux tours, et tend deux cordes de longueurs égales depuis leur sommet. Un tel manque de poésie explique peut-être pourquoi il n'est pas plus resté dans l'histoire vous ne croyez pas ?

25 152^{e} leçon : carré de l'hypoténuse

Je vous parle de temps en temps de ce manuel d'arithmétique à succès du début du vingtième siècle. Il est destiné aux élèves de cours moyen, préparant le certificat d'études. L'auteur se présente comme directeur d'école primaire à Paris. et chevalier de la légion d'honneur.

Regardez les exercices de la 152-ième leçon. Les deux exercices dit oraux font appel au triangle de 3, 4, 5. Encore faut-il que l'élève s'en rende compte. Les exercices écrits sont plutôt théoriques, à part l'exercice 2356 : la bonne vieille échelle contre un mur. Mais cette fois-ci plus question de triplet pythagoricien : vous allez devoir extraire la racine carrée de 24 à la main.

152^{e} leçon : carré de l'hypoténuse

Alcide Lemoine, 160 leçons d'arithmétique (1913)

Oraux. — ***2353.** *Quelle est la surface d'un champ ayant la forme d'un triangle isocèle dont la base a 80 mètres et chacun des deux autres côtés 50 mètres ?* — ***2354.** *La diagonale d'un terrain rectangulaire mesure 50 mètres. La largeur du terrain a 30 mètres. Quelle est la surface du terrain ?*

Écrits. — ***2355.** Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit ont : 1° 6 mètres et 18 mètres ; 2° 9^{m},20 et 14^{m},50.

***2356.** On a une échelle de 7 mètres de long pour atteindre exactement le bord d'une fenêtre qui est à 5 mètres de hauteur. A quelle distance du mur est le pied de l'échelle ?

***2357.** Quelle est la surface d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a 132^{m},30 et l'un des côtés 48^{m},50 ?

***2358.** Calculer la surface d'un triangle équilatéral qui a 8 mètres de côté.

Bon c'est facile de critiquer : qu'est ce qu'on pourrait inventer comme énoncé ?

Voyons. La tour Eiffel est haute de 300 mètres, la tour Montparnasse de 210 mètres. Elles sont distantes de 3 kilomètres. Deux drones partent au même instant du sommet de chacune d'elles, volent à la même vitesse, et se retrouvent miraculeusement au même endroit, sans avoir provoqué d'accident, et sans s'être empêtrés dans une ligne électrique. Où sont-ils ?

Qui a dit que le survol de Paris est interdit ?

références

- J. Friberg (2005) *Unexpected links between Egyptian and Babylonian mathematics*, New Jersey : World Scientific
- J. Høyrup (2002) *Lengths, Widths, Surfaces : a portrait of Old-Babylonian algebra and its kin*, New York : Springer
- A. Imhausen (2016) *Mathematics in ancient Egypt, a conceptual History*, Princeton : University Press
- A. Keller (2006) *Expounding the mathematical seed, vol. 1 : the translation*, Basel : Birkhäuser
- D. J. Melville (2004) Poles and walls in Mesopotamia and Egypt, *Historia Mathematica*, 31, 148–162
- J. Sesiano (2014) *Liber Mahameleth*, New York, Springer