0 La puissance du binôme

On va encore jouer à Pile ou Face ! Les probabilités à calculer sont des sommes de termes d'un binôme élevé à une puissance égale au nombre de lancers. Ça, c'est le principe de base ; on le connaît depuis au moins Pascal. Quand le nombre de lancers devient grand, ces sommes sont très difficiles à calculer directement. Il faut trouver une approximation. Dans l'Ars Conjectandi, Jacques Bernoulli donne une borne, assez imprécise, mais qui suffit à démontrer la loi des grands nombres.

Pour faire mieux, il fallait une véritable approximation. C'est ce qu'a trouvé Abraham de Moivre.

histoires de statistique

La puissance du binôme

le premier théorème central limite

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Abraham de Moivre (1667–1754)

Abraham de Moivre est un immigré français en Angleterre. On n'en saurait peut-être pas beaucoup plus sur lui, sans un coup de chance.

Abraham de Moivre (1667–1754)

2 Matthieu Maty (1718–1776)

Ce coup de chance s'appelle Matthieu Maty. C'est un autre immigré, dont la famille, d'origine française, est passée par la Hollande avant d'arriver en Angleterre. Il publie régulièrement en français ce qu'il appelle son Journal Britannique.

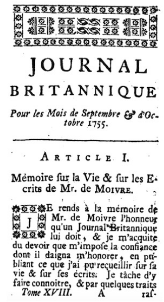
Matthieu Maty (1718–1776)

3 Journal Britannique (1755)

De Moivre est ami avec Maty, et après sa mort Maty publie dans son Journal Britannique un long Mémoire sur la vie et sur les écrits de Monsieur de Moivre.

« Je rends à la mémoire de Monsieur de Moivre l'honneur qu'un Journal Britannique lui doit, et je m'acquitte du devoir que m'impose la confiance dont il daigna m'honorer, en publiant ce que j'ai pu recueillir sur sa vie et sur ses écrits. »

Journal Britannique (1755)
Matthieu Maty (1718–1776)


JOURNAL
BRITANNIQUE
Pour les Mois de Septembre & d'Octobre 1755.

ARTICLE I.

Mémoire ſur la Vie & ſur les Ecrits de Mr. de MOIVRE.

JE rends à la mémoire de Mr. de Moivre l'honneur qu'un Journal Britannique lui doit, & je m'acquite du devoir que m'impoſe la confiance dont il daigna m'honorer, en publiant ce que j'ai pu recueillir ſur ſa vie & ſur ſes écrits. Je tâche d'y faire connoitre, & par quelques traits raſ-

Tome XVIII. A

4 Le zèle de religion moins vif dans cette ville

« Abraham de Moivre naquit à Vitry en Champagne le 26 Mai 1667. Son père y exerçait la chirurgie, et quoiqu'il ne fût pas riche, il ne négligeait rien pour l'éducation de sa famille.

Le zèle de religion, moins vif dans cette ville qu'il ne l'était ailleurs, n'empêchait pas les familles catholiques et protestantes de confier leurs enfants aux mêmes maîtres. »

Le zèle de religion moins vif dans cette ville
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Abraham de Moivre naquit à Vitri en Champagne le 26 Mai 1667. Son père y exerçoit la chirurgie, & quoiqu'il ne fût pas riche, il ne négligeoit rien pour l'éducation de sa famille.

[. . .]

Le zèle de religion moins vif dans cette ville qu'il ne l'étoit ailleurs n'empêchoit pas les familles catholiques & protestantes de confier leurs enfans aux mêmes maitres.

5 cette raison ne fut pas du gout du jeune écolier

« Mais ayant un jour demandé à ce maître la raison d'une opération sur les parties aliquotes, ce dernier lui répondit par un soufflet. Cette raison, qui ne fut du goût ni du jeune écolier ni de son père, engagea celui-ci, d'ailleurs mécontent du collège, d'envoyer son fils à l'Académie protestante de Sedan.

Son maitre moins touché d'arithmétique que de grec, et trouvant la table de son disciple continuellement remplie de calculs, ne pouvait s'empêcher de dire *qu'est ce que ce petit coquin veut faire de ces chiffres ?* »

Le jeune de Moivre est donc doué en mathématiques.

cette raison ne fut pas du gout du jeune écolier
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Mais ayant un jour demandé à ce maitre la raison d'une opération sur les parties aliquotes, ce dernier lui répondit par un souflet. Cette raison, qui ne fut du gout ni du jeune écolier ni de son père, engagea celui-ci, d'ailleurs mécontent du collège, d'envoyer son fils à l'Académie protestante de Sedan.

[. . .]

Son maitre moins touché d'Arithmétique que de Grec, & trouvant la table de son disciple continuellement remplie de calculs, ne pouvoit s'empêcher de dire *qu'est ce que ce petit coquin veut faire de ces chiffres ?*

6 Le livre du Père Prestet

« Les progrès qu'il avait faits dans l'arithmétique avaient éclaté. On conseilla à son père de lui faire apprendre l'algèbre, et celui-ci se fia assez sur la capacité de son fils pour se contenter de lui mettre entre les mains le livre du père Prestet. Malheureusement le jeune homme trouva à la tête de ce traité un Discours préliminaire sur la nature de nos idées, et comme il ne savait ce que c'était qu'une idée, n'ayant pas eu le bonheur d'entendre M. Bayle, il referma le livre sans le lire. »

Mais ce n'est que partie remise.

Le livre du Père Prestet
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Les progrès qu'il avoit faits dans l'arithmétique avoient éclaté. On conseilla à son père de lui faire apprendre l'Algèbre, & celui-ci se fia assez sur la capacité de son fils pour se contenter de lui mettre entre les mains le livre du Père Prestet. Malheureusement le jeune homme trouva à la tête de ce traité un Discours préliminaire sur la nature de nos idées, & comme il ne savoit ce que c'étoit qu'une idée, n'ayant pas eu le bonheur d'entendre Mr. Bayle, il referma le livre sans le lire.

7 Le petit traité de Mr. Huygens

« Le fils, qui avait enfin appris ce que c'était qu'une idée, lut sans aide et avant que de quitter Saumur presque tout le livre de Prestet. Il ajouta même à cette lecture celle du petit traité de M. Huygens sur les jeux de hasard, et quoique bien éloigné de le comprendre tout entier, il ne laissa pas d'y prendre beaucoup de plaisir, et d'en tirer d'utiles ouvertures pour ce qu'il entreprit ensuite. »

Le petit traité de Mr. Huygens
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Le fils, qui avoit enfin appris ce que c'étoit qu'une idée, lut sans aide & avant que de quitter Saumur presque tout le livre de Prestet. Il ajouta même à cette lecture celle du petit traité de Mr. Huygens sur les jeux de hazard, & quoique bien éloigné de le comprendre tout entier, il ne laissa pas d'y prendre beaucoup de plaisir, & d'en tirer d'utiles ouvertures pour ce qu'il entreprit ensuite.

8 Le torrent qui jetta une multitude de Français

« Le torrent, qui jeta une multitude de Français dans les pays étrangers, porta sans doute M. de Moivre en Angleterre. Je n'ai du moins trouvé aucune autre raison de ce transport, et ne saurais en fixer la date. »

Ah bon ? Quel torrent ?

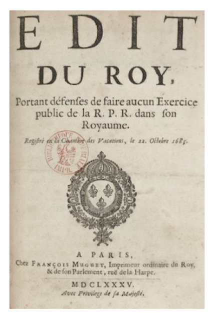
Le torrent qui jetta une multitude de François
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Le torrent, qui jetta une multitude de François dans les païs étrangers, porta sans doute Mr. de Moivre en Angleterre. Je n'ai du moins trouvé aucune autre raison de ce transport, & ne saurois en fixer la date.

9 Édit de Fontainebleau (1685)

L'édit de Fontainebleau, c'est-à-dire la révocation de l'édit de Nantes par Louis XIV en 1685.

Édit de Fontainebleau (1685)
Louis XIV (1638–1715)

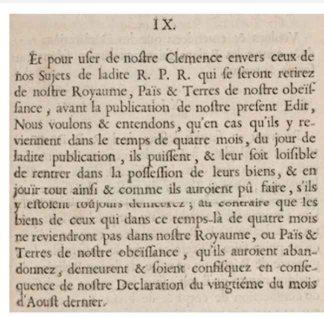

EDIT
DU ROY,
Portant défenses de faire aucun Exercice public de la R. P. R. dans son Royaume.
Registré en la Chambre des Vacations, le 22. Octobre 1685.
A PARIS,
Chez FRANÇOIS MUGUET, Imprimeur ordinaire du Roy, & de son Parlement, ruë de la Harpe.
MDCLXXXV.
Avec Privilege de sa Majesté.

10 Édit de Fontainebleau (1685)

Il y est question de ces sujets de ladite « R.P.R. » (Religion Prétendument Réformée) qui se sont retirés de notre royaume.

Louis XIV entend « user de sa clémence » en leur donnant quatre mois pour revenir. S'ils ne rentrent pas, tous leurs biens seront confisqués. En clair c'est un ultimatum. Beaucoup de protestants français quittent le royaume, dont Abraham de Moivre, qui se retrouve à Londres.

Édit de Fontainebleau (1685)
Louis XIV (1638–1715)


IX.

Et pour user de nostre Clemence envers ceux de nos Sujets de ladite R. P. R. qui se seront retirez de nostre Royaume, Païs & Terres de nostre obeïssance, avant la publication de nostre present Edit, Nous voulons & entendons, qu'en cas qu'ils y reviennent dans le temps de quatre mois, du jour de ladite publication, ils puissent, & leur soit loisible de rentrer dans la possession de leurs biens, & en joüir tout ainsi & comme ils auroient pû faire, s'ils y estoient toûjours demeurez ; au contraire que les biens de ceux qui dans ce temps-là de quatre mois ne reviendront pas dans nostre Royaume, ou Païs & Terres de nostre obeïssance, qu'ils auroient abandonnez, demeurent & soient confisquez en consequence de nostre Declaration du vingtiéme du mois d'Aoust dernier.

11 une anecdote que je tiens de lui-même

« Mais qu'il y fut vers la fin de 1686, c'est ce que prouve une anecdote que je tiens de lui-même. Ayant eu occasion d'aller rendre ses devoirs à Mylord Devonshire, patron distingué des lettres et des mathématiciens, il vit sortir de l'hôtel un homme qu'il ne connaissait point. Cet homme c'était Newton, qui venait de laisser dans l'antichambre le livre des *Principes.* »

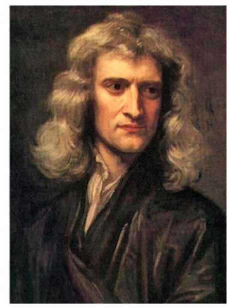
une anecdote que je tiens de lui-même
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Mais qu'il y fut vers la fin de 1686, c'est ce que prouve une anecdote que je tiens de lui-même. Ayant eu occasion d'aller rendre ses devoirs à Mylord Devonshire, patron distingué des lettres & des mathématiciens, il vit sortir de l'hôtel un homme qu'il ne connoissoit point. Cet homme c'étoit Newton, qui venoit de laisser dans l'antichambre le livre des *Principes*.

12 Isaac Newton (1643–1727)

Essayez d'imaginer la scène : vous vous êtes récemment installé en Angleterre. Vous rendez visite à quelqu'un. Vous croisez un inconnu. Cet inconnu c'est Newton, et le livre qu'il vient de laisser,. . .

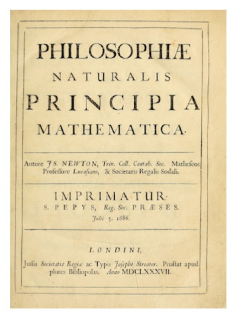
Isaac Newton (1643–1727)



13 Philosophia naturalis principia mathematica

C'est les Principia : les Principes mathématiques de la philosophie naturelle, peut-être le livre le plus marquant de toute l'histoire des sciences.

Philosophia naturalis principia mathematica
Isaac Newton (1643–1727)



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

14 il n'y entendait rien du tout

« M. de Moivre, qu'on fit entrer au même endroit, se permit d'ouvrir le livre en attendant le comte. Les figures lui firent croire qu'il le lirait sans peine, et il ne fut pas médiocrement piqué de voir qu'il n'y entendait rien du tout, et que les études de sa jeunesse, qu'il avait regardées comme les dernières bornes de la science, le mettaient simplement à l'entrée d'une nouvelle carrière. »

il n'y entendoit rien du tout
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Mr de Moivre, qu'on fit entrer au même endroit, se permit d'ouvrir le livre en attendant le Comte. Les figures lui firent croire qu'il le liroit sans peine, & il ne fut pas médiocrement piqué de voir qu'il n'y entendoit rien du tout, & que les études de sa jeunesse, qu'il avoit regardées comme les dernières bornes de la science, le mettoient simplement à l'entrée d'une nouvelle carrière.

15 il en déchirait les feuilles

« Il n'eut rien de plus pressé que d'acheter ce livre, et comme la nécessité d'enseigner les mathématiques et la navigation dans une ville comme Londres, l'obligeait à de grandes courses, et lui laissait peu de liberté, il en déchirait les feuilles, et les portait dans sa poche pour les étudier dans les intervalles de ses leçons.
Les progrès, qu'il fit dans la science de l'infini, égalèrent par leur promptitude ceux qu'il avait fait dans les mathématiques élémentaires. Il commença à être connu, c'est-à-dire ami de M. Halley en 1692, et peu de temps ensuite il le fut de Newton lui-même. »

il en déchiroit les feuilles
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Il n'eut rien de plus pressé que d'acheter ce livre, & comme la nécessité d'enseigner les mathématiques & la navigation dans une ville comme Londres, l'obligeoit à de grandes courses, & lui laissoit peu de liberté, il en déchiroit les feuilles, & les portoit dans sa poche pour les étudier dans les intervales de ses leçons.
Les progrès, qu'il fit dans la science de l'Infini, égalèrent par leur promptitude ceux qu'il avoit fait dans les mathématiques élémentaires. Il commença à être connu, c'est-à-dire ami de Mr. Halley en 1692, & peu de tems ensuite il le fut de Newton même.

De Moivre a toujours reconnu ce qu'il devait à Newton. Voici ce qu'on lit dans la préface de sa Doctrine of Chances, à propos de ces polynômes qu'il utilise à longueur de pages dans ses calculs sur les jeux de hasard.

16 The Doctrine of Chances (préface)

« De cette nature est le théorème donné par Sir Isaac Newton dans le cinquième lemme du troisième livre de ses Principia, pour dessiner une courbe qui passe par un nombre donné de points. »

C'est ce que nous appelons le polynôme d'interpolation de Lagrange, et qui est bien de Newton.

« Le théorème sus-mentionné étant très utile pour sommer un nombre quelconque de termes dont les dernières différences sont égales, j'ai montré à de nombreux endroits de ce livre comment l'appliquer à ces cas. »

Il fait référence à l'application de la méthode des différences divisées.

« J'espère que l'on ne prendra pas mal que je l'aie attribué à son véritable auteur, bien qu'il soit possible que d'autres aient trouvé quelque chose de semblable par leur propre sagacité. »

Newton, qui était plutôt renfermé, rend bien à de Moivre son amitié.

The Doctrine of Chances (préface)
Abraham de Moivre (1667–1754)

Of this nature is the Theorem given by Sir *Isaac Newton*, in the fifth *Lemma* of the third Book of his *Principles*, for drawing a curve through any given number of points [...]
The abovementionned theorem being very useful in summing up any number of terms whose last differences are equal [...] I have shewn in many places of this book how it might be applicable to these cases. I hope it will not be taken amiss that I have ascribed the invention of it to its proper author, tho' 'tis possible some persons may have found something like it by their own sagacity.

17 il avait la complaisance de l'attendre

il avait la complaisance de l'attendre
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

« Cet auteur accorda pendant trente ans à M. de Moivre toute sa confiance ; il avait la complaisance de le chercher et de l'attendre dans un café, où le mathématicien français se rendait dès qu'il avait fini ses leçons, et d'où M. Newton le menait chez lui pour y passer la soirée dans des tête-à-tête philosophiques. »

Cet Auteur accorda pendant trente ans à Mr. de Moivre toute sa confiance ; il avoit la complaisance de le chercher & de l'attendre dans un caffé, où le Mathématicien François se rendoit dès qu'il avoit fini ses leçons, & d'où Mr. Newton le menoit chez lui pour y passer la soirée dans des tête à têtes philosophiques.

Dites, ça vous ferait pas plaisir que Newton vous attende au café pour vous ramener chez lui ?

18 l'ennui que lui causait la sottise

« Il jugeait avec quelque sévérité les hommes, et quelquefois un coup d'œil le décidait. Il ne déguisait point assez l'ennui que lui causait la sottise, et l'aversion qu'il avait du manège et de la fausseté.

Je vous prouve que je suis chrétien, dit-il un jour à un homme qui reprochait aux mathématiciens de n'avoir point de religion, *en vous pardonnant la sottise que vous venez d'avancer.*

Sans le besoin de donner des leçons il eût sans doute été plus loin encore. On tâcha de le tirer de la dépendance, en lui procurant une chaire de professeur de Cambridge. Mais il était étranger, et pour tout dire il n'avait pas assez su captiver la faveur des grands, pour obtenir qu'on oubliât sa naissance et qu'on pesât son mérite. »

L'explication de Maty semble plausible. Il est vrai que de Moivre n'a jamais obtenu la position sociale qu'il méritait, sans pour autant vivre dans la misère.

l'ennui que lui causait la sottise
Maty, Mémoire sur M. de Moivre (1755)

Il jugeait avec quelque sévérité les hommes, & quelquefois un coup d'œil le décidoit. Il ne déguisoit point assez l'ennui que lui causoit la sottise, & l'aversion qu'il avoit du manège & de la fausseté.

[...]

Je vous prouve que je suis Chrétien, dit-il un jour à un homme qui reprochoit aux Mathématiciens de n'avoir point de Religion, *en vous pardonnant la sottise que vous venez d'avancer.*

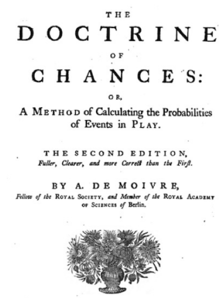
[...]

Sans le besoin de donner des leçons il eût sans doute été plus loin encore. On tâcha de le tirer de la dépendance, en lui procurant une Chaire de Professeur de Cambridge. Mais il étoit étranger, & pour tout dire il n'avait pas assez su captiver la faveur des Grands, pour obtenir qu'on oubliât sa naissance & qu'on pesât son mérite.

19 The Doctrine of Chances

L'ouvrage principal de de Moivre est sa Doctrine of Chances. Il y a eu trois éditions, en 1718, 1738, 1756. C'est l'édition de 1738 que nous allons citer.

The Doctrine of Chances (1738)
Abraham de Moivre (1667–1754)



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

THE SECOND EDITION,
Fuller, Clearer, and more Correct than the First.

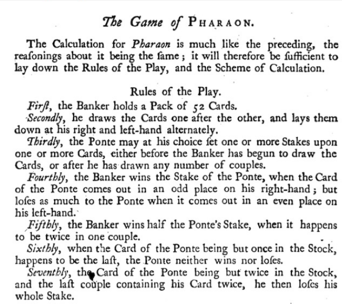
BY A. DE MOIVRE,
Fellow of the ROYAL SOCIETY, *and Member of the* ROYAL ACADEMY OF SCIENCES *of* Berlin.

20 Le jeu du Pharaon

Elle commence comme la première édition, par une description des jeux de l'époque, et des calculs de probabilités dans ces jeux-là.

Le Pharaon est un des jeux les plus en vogue. De Moivre commence par expliquer les règles qui sont assez simple. Le banquier pose deux cartes devant lui, à sa gauche et à sa droite. Les pontes qui sont les joueurs en face du banquier, parient sur l'apparition d'une carte en particulier, ou bien sur le côté où se trouve la carte la plus élevée.

Le jeu du Pharaon
de Moivre, Doctrine of Chances (1738)



The Game of PHARAON.

The Calculation for *Pharaon* is much like the preceding, the reaſonings about it being the ſame; it will therefore be ſufficient to lay down the Rules of the Play, and the Scheme of Calculation.

Rules of the Play.

Firſt, the Banker holds a Pack of 52 Cards.

Secondly, he draws the Cards one after the other, and lays them down at his right and left-hand alternately.

Thirdly, the Ponte may at his choice ſet one or more Stakes upon one or more Cards, either before the Banker has begun to draw the Cards, or after he has drawn any number of couples.

Fourthly, the Banker wins the Stake of the Ponte, when the Card of the Ponte comes out in an odd place on his right-hand; but loſes as much to the Ponte when it comes out in an even place on his left-hand.

Fifthly, the Banker wins half the Ponte's Stake, when it happens to be twice in one couple.

Sixthly, when the Card of the Ponte being but once in the Stock, happens to be the laſt, the Ponte neither wins nor loſes.

Seventhly, the Card of the Ponte being but twice in the Stock, and the laſt couple containing his Card twice, he then loſes his whole Stake.

21 Le jeu du Pharaon

Le jeu du Pharaon

Voici la représentation d'une partie de Pharaon à l'époque. Les enjeux pouvaient être assez important. Des fortunes ont été perdues au Pharaon. Le jeu a fait l'objet d'interdictions successives, qui n'ont jamais été respectées.

Voici ce qu'en dit Buffon dans son essai d'arithmétique morale en 1777.

22 Le jeu du Pharaon

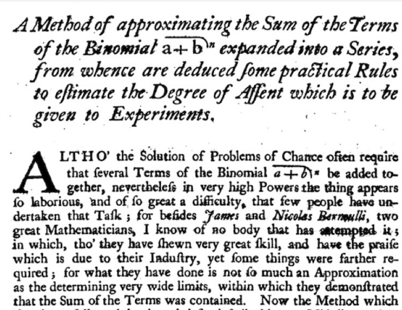
Le jeu du Pharaon
Buffon, essai d'arithmétique morale (1777)

Je ne parlerai point de ces jeux inventés par l'artifice & supputés par l'avarice, où le hasard perd une partie de ses droits, où la fortune ne peut jamais balancer, parce qu'elle est invinciblement entraînée & toujours contrainte à pencher d'un côté, je veux dire tous ces jeux où les hasards inégalement répartis, offrent un gain aussi assuré que mal-honnête à l'un, & ne laissent à l'autre qu'une perte sûre & honteuse, comme au *Pharaon*, où le banquier n'est qu'un fripon avoué, & le ponte une dupe, dont on est convenu de ne se pas moquer.

« Je ne parlerai point de ces jeux inventés par l'artifice et supputés par l'avarice, où le hasard perd une partie de ses droits, où la fortune ne peut jamais balancer, parce qu'elle est invinciblement entraînée et toujours contrainte à pencher d'un côté, je veux dire tous ces jeux où les hasards inégalement répartis, offrent un gain aussi assuré que malhonnête à l'un, et ne laissent à l'autre qu'une perte sure et honteuse, comme au *Pharaon*, où le banquier n'est qu'un fripon avoué, et le ponte une dupe, dont on est convenu de ne se pas moquer. »

23 Théorème Central Limite

Théorème Central Limite
de Moivre, Doctrine of Chances (1738)



A Method of approximating the Sum of the Terms of the Binomial $\overline{a+b}\rceil^n$ expanded into a Series, from whence are deduced ſome practical Rules to eſtimate the Degree of Aſſent which is to be given to Experiments.

ALTHO' the Solution of Problems of Chance often require that ſeveral Terms of the Binomial $\overline{a+b}\rceil^n$ be added together, nevertheleſs in very high Powers the thing appears ſo laborious, and of ſo great a difficulty, that few people have undertaken that Taſk ; for beſides *James* and *Nicolas Bernoulli*, two great Mathematicians, I know of no body that has attempted it ; in which, tho' they have ſhewn very great ſkill, and have the praiſe which is due to their Induſtry, yet ſome things were farther required ; for what they have done is not ſo much an Approximation as the determining very wide limits, within which they demonſtrated that the Sum of the Terms was contained. Now the Method which

La plus grande partie de la Doctrine of Chances de de Moivre est consacrée aux différents jeux de hasard.

C'est seulement vers la fin qu'apparaît ceci : « une méthode pour approcher la somme des termes du binôme $(a + b)^n$ développé en une série, d'où on déduit quelques règles pratiques pour estimer le degré d'assentiment que l'on doit donner aux expériences. »

De Moivre commence par expliquer que la solution des problèmes de probabilités passe souvent par calculer des sommes de termes du binome $(a+b)^n$. Néanmoins, pour des puissances très élevées le calcul est si laborieux et difficile, que peu s'y sont attaqués. En fait à part Jacques et Nicolas Bernoulli, deux grands mathématiciens dit-il, de Moivre ne connaît personne qui l'a tenté. De plus ce qu'ils ont fait donne des limites très larges, plutôt qu'une véritable approximation.

Or cette approximation, de Moivre l'a trouvée. Comment a-t-il fait ?

24 L'argument clé

Il commence par se ramener au cas le plus simple, un plus un à la puissance n. Disons que n est pair, de Moivre a réussi à montrer que le terme médian, celui en n sur 2, est proche de 2 sur B racine de n, où B est le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1 moins 1 douzième, plus un sur 360, etc.

C'est déjà assez explicite, mais de Moivre va plus loin.

L'argument clé

de Moivre, Doctrine of Chances (1738)

noted by n, the ratio which the middle Term has to the Sum of all the Terms, that is, to 2^n, may be expreſſed by the Fraction $\frac{2A \times \overline{n-1}|^n}{n^n \times \sqrt{n-1}}$, wherein A repreſents the number of which the Hyperbolic Logarithm is $\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$, &c. but becauſe the Quantity $\frac{\overline{n-1}|^n}{n^n}$ or $\overline{1-\frac{1}{n}}|^n$ is very nearly given when n is a high Power, which is not difficult to prove, it follows that, in an infinite Power, that Quantity will be abſolutely given, and repreſent the number of which the Hyperbolic Logarithm is -1; from whence it follows, that if B denotes the Number of which the Hyperbolic Logarithm is $-1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$, &c. the Expreſſion above-written will become $\frac{2B}{\sqrt{n-1}}$ or barely $\frac{2B}{\sqrt{n}}$, and that therefore if we change the Signs of that Series, and now ſuppoſe that B repreſents the Number of which the Hyperbolic Logarithm is $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680}$, &c. that Expreſſion will be changed into $\frac{2}{B\sqrt{n}}$.

25 La valeur de B

« Quand je démarrai cette recherche, je m'étais contenté de déterminer en gros la valeur de B. J'avais renoncé à procéder plus avant, quand mon digne et savant ami, M. James Stirling, trouva que la quantité B était en fait la racine carrée de la circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité. (Racine de deux π donc).

Bien qu'il ne soit pas nécessaire de savoir quelle relation le nombre B peut avoir avec la circonférence du cercle, cependant, j'observe avec plaisir que cette découverte, en plus d'avoir évité du tracas, a jeté une élégance singulière sur la solution. »

Vous me connaissez, je ne suis pas le genre à pousser à la consommation. Mais là quand même, il s'agit du théorème central limite, donc je trouve que ça vaut le coup de comprendre ce qui se passe. Vous non ? pas de problème, sautez le slide.

La valeur de B

de Moivre, Doctrine of Chances (1738)

When I first began that inquiry, I contented myself to determine at large the value of B, [...] I desisted from proceeding farther, till my worthy and learned Friend, Mr. *James Stirling*, [...] found that the Quantity B did denote the Square-root of the Circumference of a Circle whose Radius is Unity.

[...]

But altho' it be not necessary to know what relation the number B may have to the Circumference of the Circle, [...] yet I own with pleasure that this discovery, besides that it has saved trouble, has spread a singular Elegancy on the Solution.

26 my worthy and learned Friend

Vous êtes toujours là ? Bon. Vous connaissez la formule du worthy and learned friend Mister James Stirling.

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,.$$

Le terme médian dans le développement du binôme est n choisir n sur 2. On le divise par la somme 2 puissance n, on remplace les factorielles par leur équivalent dans la formule de Stirling, on simplifie, et on trouve bien ce que dit de Moivre : 2 sur racine de $2\pi n$.

Ok c'est le pas principal, mais le travail n'est pas fini. Il faut encore vérifier que les termes pas trop loin du terme médian ont des équivalents assez proches. Puis il faut sommer les équivalents, sans trop se poser de question d'uniformité sur le passage à la limite. Et on arrive enfin au résultat souhaité. Ce résultat permet des calculs explicites, et de Moivre donne des exemples.

my worthy and learned Friend

de Moivre, Doctrine of chances (1738)

Formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,.$$

Ratio of the middle term to the sum :

$$\begin{aligned} \binom{n}{n/2} 2^{-n} &= \frac{n!}{((n/2)!)^2}\, 2^{-n} \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{n/2}{\mathrm{e}}\right)^n 2\pi n/2}\, 2^{-n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \end{aligned}$$

27 Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation
de Moivre, Doctrine of chances (1738)

« La probabilité qu'un événement qui a les mêmes chances de se produire ou non, n'arrive pas plus souvent que $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n}$, ni plus rarement que $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ sera [...] 0.682688. »

And therefore, [...] the Probability that an Event which has an equal number of Chances to happen or fail, shall neither appear more frequently than $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$, nor more rarely than $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ will be [...] 0.682688.

28 Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation
de Moivre, Doctrine of chances (1738)

Ah bon ? Ça donne envie de vérifier non ? Pas de problème, voici ce que donne R. Pour la loi normale de moyenne nulle écart-type un demi, la probabilité de l'intervalle $-1/2$, $1/2$ est 0.6826895. Le calcul de de Moivre est exact à 10 moins 6 près. Pas mal non ?

And therefore, [...] the Probability that an Event which has an equal number of Chances to happen or fail, shall neither appear more frequently than $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$, nor more rarely than $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ will be [...] 0.682688.

```
> pnorm(1/2,0,1/2)-pnorm(-1/2,0,1/2)
[1] 0.6826895
```

29 Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation
de Moivre, Doctrine of chances (1738)

« De la même manière, on trouvera que la probabilité que cet événement ne survienne pas plus de $\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{n}$, ni moins de $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{n}$ sera 0.99874. »

And in the same way of reasoning, it will be found that the Probability of the Event's neither appearing oftner $\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\sqrt{n}$, nor more rarely than $\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\sqrt{n}$ will be 0.99874.

30 Intervalle de fluctuation

Intervalle de fluctuation
de Moivre, Doctrine of chances (1738)

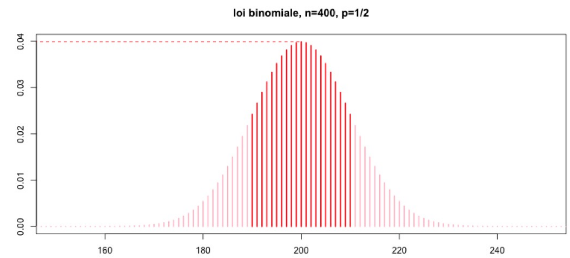
Que dit R ? 0.9973. Ah c'est moins bon, 10 moins 3 de précision.

And in the same way of reasoning, it will be found that the Probability of the Event's neither appearing oftner $\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\sqrt{n}$, nor more rarely than $\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\sqrt{n}$ will be 0.99874.

```
> pnorm(3/2,0,1/2)-pnorm(-3/2,0,1/2)
[1] 0.9973002
```

31 approximation de la binomiale

approximation de la binomiale
de Moivre, Doctrine of chances (1738)



En termes modernes, ce qu'a fait de Moivre consiste à calculer des intervalles de fluctuation approchés pour la loi binomiale avec n assez grand.

Disons que vous jouez 400 fois à pile ou face. Donc n égale 400, $n/2$ égale 200 et $1/2\sqrt{n}$ égale 10. De Moivre dit : vos chances d'avoir entre 190 et 210 Pile sont d'environ 0.68, vos chances d'avoir moins de 170 ou plus de 230 Pile sont inférieures à un pour cent.

32 Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Le grand nom de la théorie des probabilités, reste Laplace. Ce que fait Laplace est plus général, et il en déduit plus d'applications. Mais Laplace arrive soixante ans après de Moivre. Il reconnaît l'antériorité de de Moivre.

33 Essai Philosophique sur les Probabilités (1814)

Essai Philosophique sur les Probabilités (1814)
Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Moivre a repris dans son ouvrage, le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats donnés par un grand nombre d'observations. Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événemens qui doivent arriver, approchera sans cesse de celui de leurs possibilités respectives ; il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports, sera contenue dans des limites données.

« Moivre a repris dans son ouvrage, le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats donnés par un grand nombre d'observations. Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événements qui doivent arriver, approchera sans cesse de celui de leurs possibilités respectives ; il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports, sera contenue dans des limites données. »

34 Essai Philosophique sur les Probabilités (1814)

Essai Philosophique sur les Probabilités (1814)
Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Pour l'obtenir par une approximation convergente, Moivre fait usage d'un beau théorème de Stirling, [. . .] théorème remarquable, surtout en ce qu'il introduit la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression qui semble devoir être étrangère à cette transcendante. Aussi Moivre fut-il singulièrement frappé de ce résultat, l'un des plus curieux et des plus utiles de l'analyse des suites.

« Pour l'obtenir par une approximation convergente, Moivre fait usage d'un beau théorème de Stirling, [. . .] théorème remarquable, surtout en ce qu'il introduit la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression qui semble devoir être étrangère à cette transcendante. Aussi Moivre fut-il singulièrement frappé de ce résultat, l'un des plus curieux et des plus utiles de l'analyse des suites. »

35 références

Non, je ne vous propose pas une partie de Pile ou Face pour vous détendre parce que je vous l'ai déjà faite ailleurs celle-là.

Une petite partie de Pharaon ça vous dirait ?

références

- D. R. Bellhouse, C. Genest (2007) Maty's biography of Abraham de Moivre, translated, annotated and augmented, *Statistical Science* 22(1), 109–136
- A. de Moivre (1738) *The doctrine of chances*, second edition, London : Woodfall
- P. S. Laplace (1814) *Essai philosophique sur les probabilités*, Paris : Courcier
- M. Maty (1755) *Journal Britannique, tome dix-huitième*, La Haye : Scheurleer, 1–50