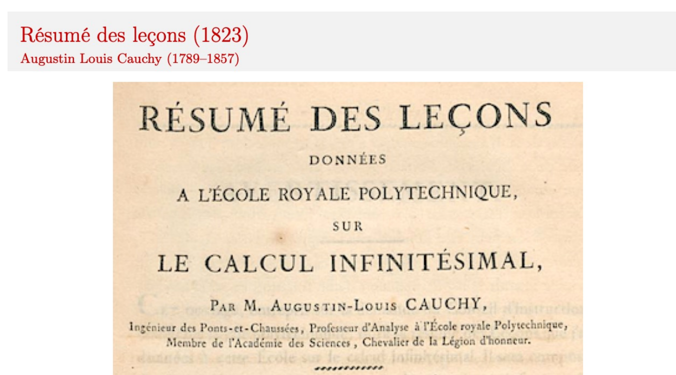
## 0 Le père de l'analyse moderne


Essayez : tapez « père de l'analyse moderne » sur Google ; c'est Karl Weierstrass qui sort le premier. Mais ce n'est pas cet homme, qui lui, est presque totalement inconnu : y aurait-il une erreur de personne ? quelqu'un aurait-il été dépouillé d'une gloire ?

## 1 Karl Weierstrass (1815–1897)


Karl Weierstrass, le voici vers la fin de sa vie. Vous lirez parfois que c'est à lui que nous devons les démonstrations avec les epsilons et les etas. D'une part c'est lui faire injure que de réduire son influence à ce détail formel. D'autre part, les démonstrations en epsilon et eta ont commencé à se répandre lentement à partir des années 1820, alors que Weierstrass était encore enfant.

## 2 Résumé des leçons (1823)




Les premiers à en faire un usage un peu systématique sont Bolzano et Cauchy. Pour les raisons que je vous ai déjà exposées, le travail de Bolzano n'a pas eu l'influence qu'il méritait. Le Cours d'analyse de Cauchy à l'École polytechnique, par contre, a été largement diffusé, et admiré.

Ceci est la suite du cours de 1821 : c'est le « Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal », paru deux ans plus tard.

On y trouve une sorte de variante du théorème des accroissements finis.

## 3 Désignons par $\delta$, $\varepsilon$, deux nombres très petits

« Si, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x_0$ et $X$, on désigne par $A$ la plus petite, et par $B$ la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ reçoit dans cet intervalle, le rapport aux différences finies $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ sera nécessairement compris entre $A$ et $B$. »

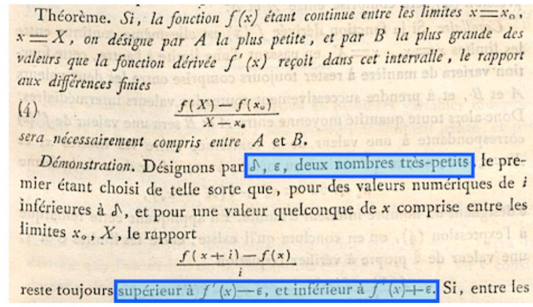
Maintenant, regardez le début de la démonstration : « désignons par $\delta$, $\varepsilon$, deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de $i$ inférieures à $\delta$, et pour une valeur quelconque de $x$ comprise entre les limites, le rapport reste toujours supérieur à $f'(x)-\varepsilon$ et inférieur à $f'(x)+\varepsilon$. »

Franchement, à part l'absence de valeurs absolues et la lettre $\delta$ au lieu de $\eta$, il n'y a pas grand chose à reprendre.

Non, Weierstrass n'a pas inventé les epsilons. Le bouleversement qu'il a suscité en analyse, est moins formel, et beaucoup plus profond que cela. Il n'a pas été le seul, et lui-même a relativement peu publié. Son influence, il l'a surtout exercée par l'intermédiaire de ses étudiants à Berlin, qui tour à tour ont écrit et diffusé les notes des cours qu'ils suivaient. C'est durant l'année universitaire 1859-60 que Weierstrass a commencé à enseigner les fondements de l'analyse.

Désignons par $\delta$, $\varepsilon$, deux nombres très petits

Cauchy, Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal(1823)



Théorème. *Si, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x=x_0$, $x=X$, on désigne par $A$ la plus petite, et par $B$ la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ reçoit dans cet intervalle, le rapport aux différences finies*

$$(4) \qquad \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$$

*sera nécessairement compris entre* $A$ et $B$.

*Démonstration.* Désignons par $\delta$, $\varepsilon$, deux nombres très-petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de $i$ inférieures à $\delta$, et pour une valeur quelconque de $x$ comprise entre les limites $x_0$, $X$, le rapport

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

reste toujours supérieur à $f'(x)-\varepsilon$, et inférieur à $f'(x)+\varepsilon$. Si, entre les

## 4 Heine et Schwarz

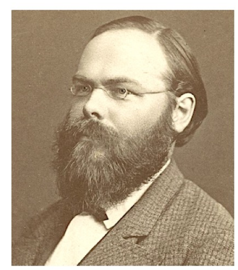
L'influence de Weierstrass s'est étendue sur au moins deux générations de mathématiciens allemands. Vous voyez ici Eduard Heine, et Hermann Schwarz, né 22 ans plus tard.

Heine est celui à qui nous devons la diffusion du concept de continuité uniforme, et nous appelons toujours théorème de Heine le résultat qui dit qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue. Il est possible d'ailleurs que le concept de continuité uniforme provienne du professeur de Weierstrass, qui s'appelait Gudermann.

Vous connaissez Hermann Schwarz à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui s'appelle inégalité de Schwarz tout court, partout ailleurs dans le monde. Il illustre bien la diffusion des idées de Weierstrass en Europe.

Heine et Schwarz

Eduard Heine (1821–1881), Hermann Schwarz (1843–1921)



## 5 Ulisse Dini (1845–1918)

Ulisse Dini (1845–1918)

Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (1878)

Pendant l'été 1870, Schwarz avait prêté à l'italien Ulisse Dini ses notes manuscrites du cours d'analyse de Weierstrass. Dini les avait étudiées, et dès l'année suivante, il s'était mis à enseigner la nouvelle analyse.

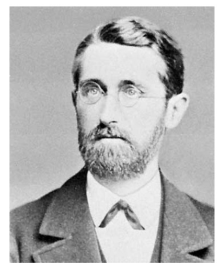
## 6 Fondamenti per la teorica delle funzioni (1878)

Fondamenti per la teorica delle funzioni (1878)
Ulisse Dini (1845–1918)


Cela a donné ce livre, qui influencera les mathématiciens italiens sur plusieurs générations. De là viennent les théorèmes de Dini qui donnent des conditions sous lesquelles une convergence simple devient uniforme.

## 7 Dedekind et Cantor

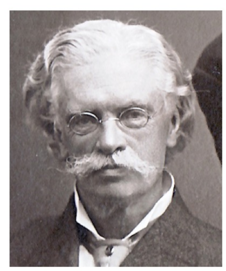
Dedekind et Cantor
Richard Dedekind (1831–1916), Georg Cantor (1845–1918)




Parmi ceux que Weierstrass a influencés, je vous reparle ailleurs de Dedekind et Cantor. Ce sont eux qui ont parachevé le programme de refondation du maître, en définissant les nombres réels de manière rigoureuse.

## 8 Mittag-Leffler et Kovalevskaïa

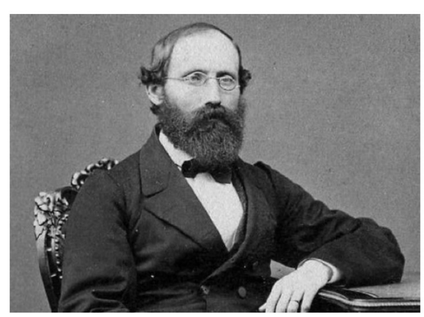
Mittag-Leffler et Kovalevskaïa
Gösta Mittag-Leffler (1846–1927), Sofia Kovalevskaïa (1850–1891)




Je vous parle également ailleurs de Gösta Mittag-Leffler et Sofia Kovalevskaïa. Le premier est suédois, la seconde est russe. Tous les deux ont gardé un attachement profond pour le maître de Berlin.

## 9 Bernhard Riemann (1826–1866)

Bernhard Riemann (1826–1866)



Bernhard Riemann n'a pas été l'élève de Weierstrass, mais plutôt de Dirichlet. Vous le savez, le mouvement de rigueur du dix-neuvième siècle n'a pas commencé avec les cours de Weierstrass. Riemann et Dirichlet sont des noms que je vous ai déjà cités, en particulier à propos des séries de Fourier.

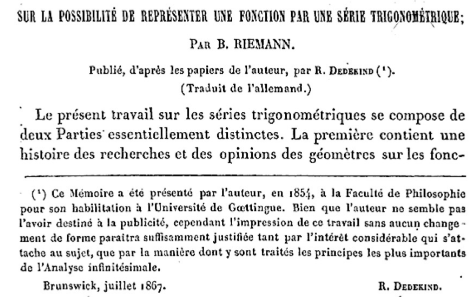
## 10 Sur la possibilité de représenter (1854)

Je vous ai parlé de cet article, publié par Dedekind après la mort de Riemann. « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique ». En note de bas de page, Dedekind écrit :

« L'impression de ce travail sans changement de forme paraîtra suffisamment justifiée, tant par l'intérêt considérable qui s'attache au sujet, que par la manière dont y sont traités les principes les plus importants de l'analyse infinitésimale. »

Et comment ! Non seulement Riemann définit son intégrale, mais il en pousse jusqu'au bout la logique.

Sur la possibilité de représenter (1854)
Bernhard Riemann (1826–1866), Richard Dedekind (1831–1916)



SUR LA POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER UNE FONCTION PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR B. RIEMANN.

Publié, d'après les papiers de l'auteur, par R. DEDEKIND (1).

(Traduit de l'allemand.)

Le présent travail sur les séries trigonométriques se compose de deux Parties essentiellement distinctes. La première contient une histoire des recherches et des opinions des géomètres sur les fonc-

(1) Ce Mémoire a été présenté par l'auteur, en 1854, à la Faculté de Philosophie pour son habilitation à l'Université de Gœttingue. Bien que l'auteur ne semble pas l'avoir destiné à la publicité, cependant l'impression de ce travail sans aucun changement de forme paraîtra suffisamment justifiée tant par l'intérêt considérable qui s'attache au sujet, que par la manière dont y sont traités les principes les plus importants de l'Analyse infinitésimale.

Brunswick, juillet 1867. R. DEDEKIND.

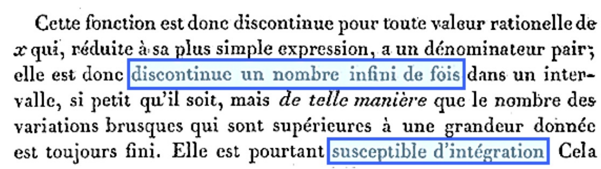
## 11 discontinue un nombre infini de fois

Il construit une fonction, définie comme somme d'une série, qui est « discontinue pour toute valeur rationnelle de $x$ qui, réduite à sa plus simple expression, a un dénominateur pair ; elle est donc discontinue un nombre infini de fois dans un intervalle, si petit qu'il soit, mais de telle manière que le nombre des variations brusques qui sont supérieures à une grandeur donnée est toujours fini. Elle est pourtant susceptible d'intégration. »

Ce qui pour nous n'est qu'un banal contre-exemple, était une véritable révolution à l'époque. Rendez-vous compte : si une fonction est intégrable sur un intervalle, sa primitive est une fonction continue de la variable. La primitive de la fonction de Riemann est donc continue, mais pourtant elle n'est ni dérivable, ni monotone sur aucun sous-intervalle.

Souvenez-vous qu'au dix-huitième siècle, une fonction était une expression algébrique, qui était forcément, non seulement dérivable, mais développable en série entière. Personne ne songeait à démontrer ce qui était une évidence intuitive pour tout le monde : une courbe tracée au crayon admet une tangente en tout point ; ou encore, un mobile qui se déplace, a bien une vitesse à chaque instant.

discontinue un nombre infini de fois
Riemann, Sur la possibilité de représenter (1854)



Cette fonction est donc discontinue pour toute valeur rationnelle de $x$ qui, réduite à sa plus simple expression, a un dénominateur pair; elle est donc discontinue un nombre infini de fois dans un intervalle, si petit qu'il soit, mais *de telle manière* que le nombre des variations brusques qui sont supérieures à une grandeur donnée est toujours fini. Elle est pourtant susceptible d'intégration. Cela

## 12 André-Marie Ampère (1775–1836)

André-Marie Ampère aura eu au moins le mérite en 1806, de tenter une démonstration. Cela se passe avant l'entrée en scène de Cauchy, et après la disparition d'Euler et d'Alembert. Les mathématiques sont dominées par Lagrange. Celui-ci prône une vision algébrique de l'analyse. Une fonction est la somme d'une série entière, et sa dérivée est le coefficient du premier terme de la série.

Le travail d'Ampère se situe dans la droite ligne des enseignements de Lagrange.

André-Marie Ampère (1775–1836)
Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées (1806)

# 13 Recherches sur quelques points (1806)

L'article est intitulé « Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque. »

Comme vous le voyez dans cet extrait de l'introduction, « il résultera nécessairement de cette démonstration que le taux d'accroissement d'une fonction se réduit quand l'accroissement de la variable est nul, à une fonction de $x$. Cette fonction, qui dépend évidemment de $f(x)$, et que M. Lagrange a nommée en conséquence sa fonction dérivée, est, comme on sait, de la plus grande importance dans les mathématiques ; nous la représenterons, comme cet illustre mathématicien, par $f'(x)$, et notre premier but sera d'en démontrer l'existence. »

Oui bon, Ampère est jeune en 1806. D'ailleurs il sera plus connu comme physicien que comme mathématicien. Sur ce coup, il n'a pas fait des étincelles, d'accord, mais on le lui pardonne. Les vrais mathématiciens ne pouvaient pas dire de telles bêtises !

Recherches sur quelques points (1806)

André-Marie Ampère (1775–1836)

dans laquelle l'expression précédente devient $\frac{0}{0}$; il résultera nécessairement de cette démonstration, que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

se réduit, quand $i = 0$, à une fonction de $x$. Cette fonction, qui dépend évidemment de $f(x)$, et que M. *Lagrange* a nommée en conséquence sa fonction dérivée, est, comme on sait, de la plus grande importance dans les mathématiques, et sur-tout dans leur application à la géométrie et à la mécanique ; nous la représenterons, comme cet illustre mathématicien, par $f'(x)$, et notre premier but sera d'en démontrer l'existence

# 14 Joseph Bertrand (1822–1900)

Détrompez-vous. Quand il écrit son Traité de calcul différentiel et de calcul intégral en 1864, Bertrand a 42 ans. Il peut se présenter comme membre de l'Institut, professeur à l'École polytechnique et au collège de France. Il a enseigné le calcul différentiel non seulement à l'École polytechnique, mais aussi à l'École normale supérieure. Or, voici ce qu'on lit dans les toutes premières pages de son traité.

Joseph Bertrand (1822–1900)

Traité de calcul différentiel et de calcul intégral (1864)

# 15 Cette limite est une nouvelle fonction de $x$

« Quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, le rapport $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ a, d'après ce qui précède, une limite finie lorsque $h$ tend vers zéro. Cette limite est une nouvelle fonction de $x$ que l'on nomme la dérivée de la fonction $\varphi$. »

Et voilà, CQFD.

Cette limite est une nouvelle fonction de $x$

Bertrand, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral (1864)

3. Quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, le rapport $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ a, d'après ce qui précède, une limite finie lorsque $h$ tend vers zéro; cette limite est une nouvelle fonction de $x$ que l'on nomme la *dérivée de la fonction* $\varphi$; on la représente souvent en marquant d'un accent le signe de cette fonction.

$\varphi'(x)$ est la dérivée de $\varphi(x)$.

# 16 Gaston Darboux (1842–1917)

Gaston Darboux (1842–1917)
Mémoire sur les fonctions discontinues (1875)

Celui qui a le plus contribué à diffuser la nouvelle analyse en France, s'appelle Gaston Darboux. Il fallait un certain courage, au milieu du traumatisme provoqué par la défaite de 1870 contre la Prusse, pour tenter de convaincre les mathématiciens français que l'avenir de l'analyse s'écrivait à Berlin.

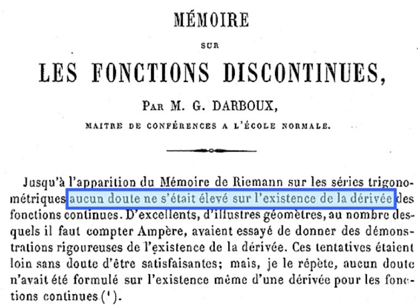
Son article de 1875, « Mémoire sur les fonctions discontinues », sera crucial. Écoutez les premières phrases.

# 17 Mémoire sur les fonctions discontinues (1875)

« Jusqu'à l'apparition du mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques aucun doute ne s'était élevé sur l'existence de la dérivée des fonctions continues. D'excellents, d'illustres géomètres, au nombre desquels il faut compter Ampère, avaient essayé de donner des démonstrations rigoureuses de l'existence de la dérivée. Ces tentatives étaient sans doute loin d'être satisfaisantes ; mais, je le répète, aucun doute n'avait été formulé sur l'existence même d'une dérivée pour les fonctions continues. »

Un peu plus loin il dit : « dans le travail qu'on va lire, je reprends, en donnant tous les développements nécessaires, la définition de l'intégrale définie d'après Riemann, et je montre comment cette définition doit conduire à une infinité de fonctions continues n'ayant pas de dérivée. »

Mémoire sur les fonctions discontinues (1875)
Gaston Darboux (1842–1917)



MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS DISCONTINUES,

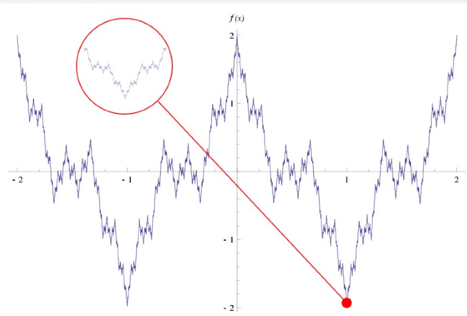
PAR M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Jusqu'à l'apparition du Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques aucun doute ne s'était élevé sur l'existence de la dérivée des fonctions continues. D'excellents, d'illustres géomètres, au nombre desquels il faut compter Ampère, avaient essayé de donner des démonstrations rigoureuses de l'existence de la dérivée. Ces tentatives étaient loin sans doute d'être satisfaisantes; mais, je le répète, aucun doute n'avait été formulé sur l'existence même d'une dérivée pour les fonctions continues (¹).

# 18 Fonction de Weierstrass (1872)

Fonction de Weierstrass (1872)
Karl Weierstrass (1815–1897)




Weierstrass lui-même, et d'autres après lui, dont Schwarz, avaient déjà construit des fonctions continues sur un intervalle, dont ils démontraient qu'elles n'admettaient de dérivée en aucun point de l'intervalle.

Le plus étonnant est qu'ils n'étaient pas les premiers, et il s'en fallait de beaucoup.

# 19 Bernard Bolzano (1781–1848)

Je vous raconte ailleurs les déboires de Bolzano à Prague. Nous avons déjà rencontré deux de ses travaux, un sur le théorème binomial, et un sur le théorème des valeurs intermédiaires. Ce qu'on a longtemps ignoré, c'est qu'il avait écrit en 1833 un livre sur la théorie des fonctions, qui est resté à l'état de manuscrit prendant pratiquement un siècle.

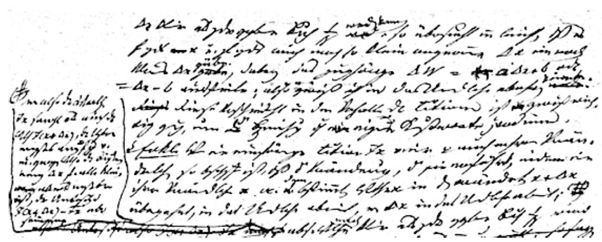
Bernard Bolzano (1781–1848)
Functionenlehre (1833–1930)

# 20 Functionenlehre (1833–1930)

Ce manuscrit de Bolzano, dont vous voyez ici un extrait, contenait certaines des notions, et quelques résultats qui formeraient trente ans plus tard la base de l'enseignement de Weierstrass ; en particulier les notions de borne supérieure et inférieure, et bien sûr, ce que l'on appellera par la suite le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite dans un intervalle fermé borné, on peut extraire une sous-suite qui converge.

Il contenait aussi le premier exemple de fonction continue, dérivable nulle part. Voici l'énoncé.

Functionenlehre (1833–1930)
Bernard Bolzano (1781–1848)



# 21 $Fx$ fasse seulement l'une de deux choses

« Théorème : Il est possible qu'une fonction $Fx$ suive la loi de continuité de $x = a$ jusqu'à $x = b$ inclus, bien que ni en $a$, ni en $b$, ni en aucune valeur $x$ comprise entre $a$ et $b$, on puisse trouver un $\omega$ assez petit pour qu'on puisse dire que entre $a$ et $a + \omega$, ou entre $b$ et $b - \omega$ ou entre $x$ et $x \pm \omega$, $Fx$ fasse seulement l'une de deux choses : elle croît toujours ou décroît toujours. »

Traduisez : il est possible de construire une fonction qui ne soit ni croissante, ni décroissante, et ce sur aucun intervalle.

$Fx$ fasse seulement l'une de deux choses
Bolzano, Functionenlehre (1781–1848)

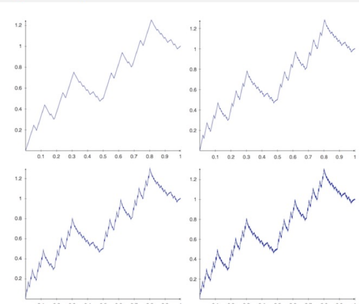
Théorème : Il est possible qu'une fonction $Fx$ suive la loi de continuité de $x = a$ jusqu'à $x = b$ inclus, bien que ni en $a$, ni en $b$, ni en aucune valeur $x$ comprise entre $a$ et $b$, on puisse trouver un $\omega$ assez petit pour qu'on puisse dire que entre $a$ et $a+\omega$, ou entre $b$ et $b - \omega$ ou entre $x$ et $x \pm \omega$, $Fx$ fasse seulement l'une de deux choses : elle croît toujours ou décroît toujours.

# 22 Fonction de Bolzano

Voici la fonction de Bolzano. Lui n'en donnait pas de représentation, il se contentait de décrire la construction itérative, qui en fait le premier exemple de fractale à homothétie interne.

Je ne voudrais surtout pas donner l'impression que l'apport de Weierstrass s'est limité aux fonctions nulle part dérivables. Plus important, me paraît être le rôle donné à la notion de convergence uniforme. Nous allons passer en revue quatre énoncés successifs de l'article de Darboux, liés à l'uniformité. Aucun n'est dû à Darboux, et il ne le prétend pas. Mais sa rédaction est particulièrement claire. Vous y reconnaîtrez aisément votre cours d'analyse.

Fonction de Bolzano
Bolzano, Functionenlehre (1781–1848)



## 23 Théorème de Heine

Une fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue. C'est le théorème de Heine, même si on n'est pas sûr qu'il soit de lui.

Théorème de Heine

Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues (1875)

Théorème III. — *Étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $(a, b)$, on peut assigner, pour chaque valeur de $\sigma$, aussi petite qu'on le veut, une quantité $\delta$ telle, que si l'on subdivise l'intervalle $(a, b)$ en intervalles tous plus petits que $\delta$, les oscillations de la fonction dans ces intervalles soient toutes plus petites que $\sigma$.*

## 24 Continuité de la somme d'une série

Voici la continuité de la somme d'une série de fonctions continues. C'est la version correcte de ce fameux théorème faux, énoncé par Cauchy dans son cours d'analyse de 1821.

Continuité de la somme d'une série

Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues (1875)

Théorème IV. — *Si une série*

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots$$

*est uniformément convergente dans un intervalle donné $(a, b)$ et, si ses termes sont des fonctions continues de $x$, elle représente dans cet intervalle une fonction continue de $x$.*

## 25 Intégrale de la somme d'une série

Dans la foulée, l'intégrale de la somme d'une série uniformément convergente est la somme des intégrales.

Intégrale de la somme d'une série

Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues (1875)

Théorème V. — *Si tous les termes d'une série sont des fonctions continues ou discontinues susceptibles d'intégration, et si la série est uniformément convergente dans un intervalle donné $(a, b)$, la fonction que représente la série, et qui n'est pas nécessairement continue, sera susceptible d'intégration. Son intégrale sera la somme des intégrales de tous ses termes.*

## 26 Dérivabilité de la somme d'une série

Et la dérivée de la somme est la somme de la série des dérivées, si cette dernière converge uniformément.

Fort bien. Je pense vous avoir convaincu que l'analyse moderne est née à Berlin dans les années 1860–1880, qu'elle a été développée par Weierstrass et ses élèves, qui l'ont ensuite diffusée dans le reste de l'Europe.

Ou pas.

Dérivabilité de la somme d'une série

Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues (1875)

Théorème VI. — *Étant donnée une série $f(x)$ dont tous les termes sont des fonctions continues ayant des dérivées, si la série des dérivées est uniformément convergente dans un intervalle donné et si ses termes sont susceptibles d'intégration, elle représentera la dérivée de la série $f(x)$.*

# 27 Charles Cellérier (1818–1889)

Car cet homme reste une énigme. Il s'appelle Charles Cellérier, et il est hors des radars de l'histoire officielle des mathématiques. Il n'a pas de page dédiée, ni sur Wikipedia, ni sur Mactutor. Il est né à Genève, où il a passé la plus grande partie de sa vie, mis à part des études à Paris vers la fin des années 1830. Plus tard, il est nommé à l'université de Genève, où il enseigne différentes matières, de la géométrie descriptive à l'astronomie en passant par la mécanique. Son éclectisme se retrouve dans ses travaux de recherche. Après avoir publié quelques articles de mathématiques en France vers 1843, il a surtout écrit des articles de physique.

Dans les souvenirs d'un de ses élèves, voici quelques lignes le concernant.

Charles Cellérier (1818–1889)

# 28 Dépouillé d'une gloire

« Son extrême modestie lui a valu d'être dépouillé d'une gloire dont se para un mathématicien de Paris, professeur en Sorbonne. Ce professeur venait de déclarer en chaire qu'on ne savait pas intégrer les fonctions elliptiques. Raoul Pictet, qui se trouvait parmi les assistants, s'approcha de lui après la leçon et lui communiqua le procédé, qu'il tenait de Charles Cellérier, pour intégrer les équations différentielles elliptiques. La démonstration parut dans la nouvelle édition de son cours que le professeur français se hâta de faire paraître, mais le nom de Cellérier n'y figura pas. »

J'ai cherché à recouper cette histoire. En plus de la référence aux équations différentielles elliptiques qui est tout sauf claire, je ne la trouve pas vraiment crédible. Non pas qu'elle soit invraisemblable, on a vu pire. Le spécialiste des fonctions elliptiques, qui les a enseignées non pas en Sorbonne mais au collège de France, est Liouville. Il est aussi celui qui a fait connaître les travaux de Galois grâce à son journal. En 1843, deux articles de Cellérier ont été publiés dans le journal de Liouville. Et puis il y a cette communication à l'Académie des sciences, qui a valu à Cellérier un rapport flatteur écrit par Cauchy et cosigné par Liouville, rien de moins.

Dépouillé d'une gloire
J.-É. David, Notes au crayon : souvenirs d'un arpenteur genevois (2004)

Son extrême modestie lui a valu d'être dépouillé d'une gloire dont se para un mathématicien de Paris, professeur en Sorbonne. Ce professeur venait de déclarer en chaire qu'on ne savait pas intégrer les fonctions elliptiques. Raoul Pictet, qui se trouvait parmi les assistants, s'approcha de lui après la leçon et lui communiqua le procédé, qu'il tenait de Charles Cellérier, pour intégrer les équations différentielles elliptiques. La démonstration parut dans la nouvelle édition de son cours que le professeur français se hâta de faire paraître, mais le nom de Cellérier n'y figura pas.

# 29 Rapport sur une note de M. Cellérier

« Rapport sur une note de M. Cellérier relative à la théorie des imaginaires.

Le théorème que l'auteur établit dans cette note pouvant être fort utile dans les recherches d'analyse et de calcul intégral, nous avons pensé qu'il serait convenable d'en donner ici une idée en peu de mots. »

Le théorème en question dit en termes modernes qu'une fonction holomorphe qui s'annule sur les réels, est nulle partout. Bien sûr dites-vous, puisque les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés. Certes, mais Cauchy ne le savait pas encore.

Ce ne sont pas les exploits de Cellérier à l'Académie des sciences qui nous intéressent, mais un petit article de 19 pages publié dans le Bulletin des Sciences Mathématiques, l'année suivant la mort de Cellérier.

Rapport sur une note de M. Cellérier
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Joseph Liouville (1809–1882)

244.

Analyse mathématique. — *Rapport sur une Note de M. Cellérier relative à la théorie des imaginaires.*

C. R., T. XVIII, p. 168 (29 janvier 1844).

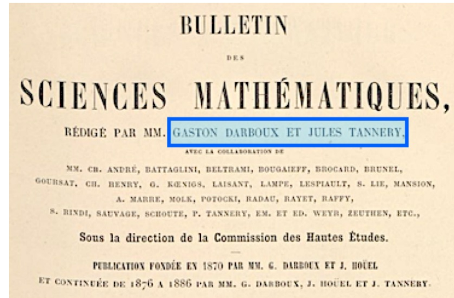
L'Académie nous a chargés, M. Liouville et moi, de lui rendre compte d'une Note de M. Cellérier, relative à la théorie des imaginaires. Le théorème que l'auteur établit dans cette Note pouvant être fort utile dans les recherches d'Analyse et de Calcul intégral, nous avons pensé qu'il serait convenable d'en donner ici une idée en peu de mots.

# 30 Bulletin des Sciences Mathématiques (1890)

Il est intitulé : « Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. » En 1890, les deux rédacteurs du bulletin sont Gaston Darboux et Jules Tannery. Tous les deux sont parfaitement au courant des apports de l'école de Weierstrass, et ils ont fait ce qu'ils ont pu pour les diffuser en France. Nous l'avons vu pour l'article de Darboux en 1875. Dix ans plus tard, Jules Tannery avait publié un manuel de théorie des fonctions, basé sur ses propres cours à l'École normale.

C'est probablement l'un des deux qui a rédigé la longue note de bas de page qui présente l'article. En voici le début.

Bulletin des Sciences Mathématiques (1890)
C. Cellérier, Note sur les principes fondamentaux de l'analyse

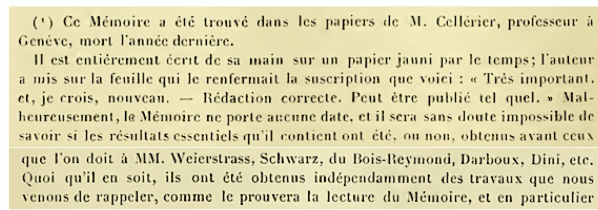

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,
RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,
Sous la direction de la Commission des Hautes Études.
PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

# 31 un papier jauni par le temps

« Ce mémoire a été trouvé dans les papiers de M. Cellérier, professeur à Genève, mort l'année dernière. Il est entièrement écrit de sa main, sur un papier jauni par le temps ; l'auteur a mis sur la feuille qui le renfermait la suscription que voici : « Très important, et, je crois, nouveau. – Rédaction correcte. Peut être publié tel quel. » Malheureusement le mémoire ne porte aucune date, et il sera sans doute impossible de savoir si les résultats essentiels qu'il contient ont été, ou non, obtenus avant ceux que l'on doit à Messieurs Weierstrass, Schwarz, etc. Quoi qu'il en soit, ils ont été obtenus indépendamment des travaux que nous venons de rappeler, comme le prouvera la lecture du mémoire. »

Et un peu plus loin :

un papier jauni par le temps
C. Cellérier, Note sur les principes fondamentaux de l'analyse (1890)

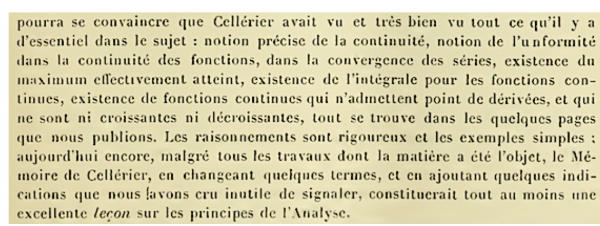

(¹) Ce Mémoire a été trouvé dans les papiers de M. Cellérier, professeur à Genève, mort l'année dernière.
Il est entièrement écrit de sa main sur un papier jauni par le temps ; l'auteur a mis sur la feuille qui le renfermait la suscription que voici : « Très important, et, je crois, nouveau. — Rédaction correcte. Peut être publié tel quel. » Malheureusement, le Mémoire ne porte aucune date, et il sera sans doute impossible de savoir si les résultats essentiels qu'il contient ont été, ou non, obtenus avant ceux que l'on doit à MM. Weierstrass, Schwarz, du Bois-Reymond, Darboux, Dini, etc. Quoi qu'il en soit, ils ont été obtenus indépendamment des travaux que nous venons de rappeler, comme le prouvera la lecture du Mémoire, et en particulier

# 32 tout ce qu'il y a d'essentiel dans le sujet

« Cellérier avait vu et très bien vu tout ce qu'il y a d'essentiel dans le sujet : notion précise de la continuité, notion de l'uniformité dans la continuité des fonctions, dans la convergence des séries, existence du maximum effectivement atteint, existence de l'intégrale pour les fonctions continues, existence de fonctions continues qui n'admettent pas de dérivées, et qui ne sont ni croissantes ni décroissantes. Tout se trouve dans les quelques pages que nous publions. Les raisonnements sont rigoureux et les exemples simples ; aujourd'hui encore, malgré tous les travaux dont la matière a fait l'objet, le mémoire de Cellérier, en changeant quelques termes, et en ajoutant quelques indications que nous avons cru inutile de signaler, constituerait tout au moins une excellente leçon sur les principes de l'analyse. »

Cent trente ans plus tard, je confirme, et je pense que vous serez d'accord quand vous aurez lu ce petit bijou de concision, de rigueur et de clarté, qui est disponible sur ce site.

tout ce qu'il y a d'essentiel dans le sujet
C. Cellérier, Note sur les principes fondamentaux de l'analyse (1890)


pourra se convaincre que Cellérier avait vu et très bien vu tout ce qu'il y a d'essentiel dans le sujet : notion précise de la continuité, notion de l'uniformité dans la continuité des fonctions, dans la convergence des séries, existence du maximum effectivement atteint, existence de l'intégrale pour les fonctions continues, existence de fonctions continues qui n'admettent point de dérivées, et qui ne sont ni croissantes ni décroissantes, tout se trouve dans les quelques pages que nous publions. Les raisonnements sont rigoureux et les exemples simples : aujourd'hui encore, malgré tous les travaux dont la matière a été l'objet, le Mémoire de Cellérier, en changeant quelques termes, et en ajoutant quelques indications que nous avons cru inutile de signaler, constituerait tout au moins une excellente *leçon* sur les principes de l'Analyse.

# 33 références

Ça y est ? Vous l'avez lu ? impressionnant n'est-ce pas ? Je lance un appel. S'il y a parmi vous un Helvète dont la fibre patriotique est suffisamment développée pour se plonger dans les archives de la famille Cellérier et de l'université de Genève, j'aimerais savoir si Cellérier est le premier inventeur de l'analyse moderne, ou bien s'il l'a réinventée indépendamment de Weierstrass. Dans les deux cas, chapeau bas !

références


- Ch. Cellérier (1890) Note sur les principes fondamentaux de l'analyse, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2(14), 142–160
- J.-É. David (2004) *Notes au crayon : souvenirs d'un arpenteur genevois*, Lausanne : Éditions d'en bas
- P. Dugac (1973) Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences*, 10(1/2), 41–176
- M. Jarnicki, P. Pflug (2016) *Continuous nowhere differentiable functions*, New York : Springer
- S. Russ (2004) *The mathematical works of Bernard Bolzano*, Oxford : University Press