0 Hôtel de Hilbert

Difficile de parler de mathématiques en évitant l'infini. Encore plus s'il s'agit de l'histoire de l'analyse. Pourtant, comprendre le concept d'infini et expliquer tous ses paradoxes aura occupé les mathématiciens jusqu'au vingtième siècle. Écoutez plutôt David Hilbert. Nous sommes en 1925.

histoires d'analyse

Hôtel de Hilbert

paradoxes de l'infini

hist-math.fr Bernard Ycart

1 David Hilbert (1862–1943)

« L'élucidation définitive de la nature de l'infini dépasse largement les intérêts d'une discipline scientifique particulière, elle est devenue indispensable à l'honneur même de l'esprit humain.

Plus qu'aucune autre question, celle de l'infini a depuis toujours tourmenté la sensibilité des hommes ; plus qu'aucune autre idée, celle de l'infini a sollicité et fécondé leur intelligence ; plus qu'aucun autre concept, celui de l'infini requiert d'être élucidé. »

Le même Hilbert, pour illustrer les paradoxes de l'infini utilisait l'image suivante.

David Hilbert (1862–1943)

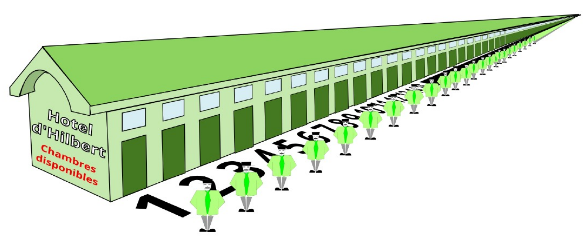
Über das Unendliche (1925)

2 Hôtel infini de Hilbert (janvier 1925)

« Supposons un hôtel ayant une infinité de chambres, numérotées $1, 2, 3, 4, 5$, etc., chacune occupée par un client. Tout ce que que le gérant doit faire pour loger un nouvel arrivant est de demander à chacun des anciens occupants, de changer pour la chambre du numéro suivant. Ainsi, la chambre numéro 1 devient libre pour le nouvel arrivant. On peut bien sûr faire de la place pour n'importe quel nombre de nouveaux arrivants de la même manière ; ainsi, dans un monde avec une infinité de maisons et d'occupants, il n'y aura pas de sans-abris. »

Hôtel infini de Hilbert (janvier 1925)

David Hilbert (1862–1943)



3 Hôtel infini de Hilbert (janvier 1925)

« Il est même possible de faire de la place pour une infinité de nouveaux arrivants. On pourrait, par exemple, demander à l'ancien ocupant de la chambre numéro n, de déménager vers la chambre numéro $2n$. De cette manière, une infinité de chambres aux numéros impairs seraient libérées pour de nouveaux clients. »

Ce qu'Hilbert exprime là, c'est un des paradoxes qui ont été les plus difficiles à comprendre dans l'histoire. Que le tout soit plus grand que la partie est gravé depuis toujours dans le marbre des mathématiques. C'est la cinquième notion commmune des éléments d'Euclide. Déclarer qu'il y a autant de chambres aux numéros pairs que de clients dans l'hôtel de Hilbert, était donc profondément choquant.

Oui mais en même temps le premier postulat d'Euclide, demande « que l'on puisse prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie ». Alors : est-ce que la droite prolongée dans les deux directions est plus grande que la demi-droite prolongée dans une seule ?

Hôtel infini de Hilbert (janvier 1925)

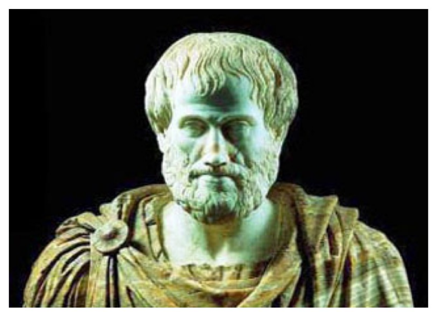
David Hilbert (1862–1943)

4 Aristote (384–322 av. J.-C.)

Comme les autres grands débats philosophiques, celui sur le zéro, ou celui sur le mouvement par exemple, la réflexion sur l'infini démarre chez Aristote.

Il n'est pas évident de savoir ce qu'il veut dire vraiment, entre l'infini en puissance qui existerait et l'infini en acte qui n'existerait pas. Voici quelques exemples.

Aristote (384–322 av. J.-C.)



5 il faut bien qu'il y ait un corps infini

« Dans la pensée il n'y a pas de limitation possible, et en elle le nombre est infini, aussi bien que les grandeurs mathématiques, et l'espace qui est en dehors du ciel. Cet extérieur du ciel étant infini, il faut bien qu'il y ait un corps infini, ainsi que des mondes sans fin. »

Donc il existe des objets infinis ?

il faut bien qu'il y ait un corps infini

Aristote (384–322 av. J.-C.), Physique, Livre III, chapitre V

Dans la pensée il n'y a pas de limitation possible, et en elle le nombre est infini, aussi bien que les grandeurs mathématiques, et l'espace qui est en dehors du ciel. Cet extérieur du ciel étant infini, il faut bien qu'il y ait un corps infini, ainsi que des mondes sans fin.

6 l'infini est indivisible

l'infini est indivisible
Aristote (384–322 av. J.-C.), Physique, Livre III, chapitre VI

Ou l'infini est indivisible, ou il est divisible en d'autres infinis. Mais il ne se peut pas que la même chose soit plusieurs infinis. Cependant il faudrait que de même que l'air est une partie de l'air, de même il pût y avoir un infini d'infini, si l'on admet l'infini comme substance et principe. Donc l'infini est sans parties, et il est indivisible.

« Ou l'infini est indivisible, ou il est divisible en d'autres infinis. Mais il ne se peut pas que la même chose soit plusieurs infinis. Cependant il faudrait que de même que l'air est une partie de l'air, de même il pût y avoir un infini d'infini, si l'on admet l'infini comme substance et principe. Donc l'infini est sans parties, et il est indivisible. »

Ce qui me rassure, c'est que je n'ai pas été le seul à ne pas comprendre. Je ne vais pas recenser tous les penseurs, grecs d'abord, arabes et juifs ensuite, qui ont apporté leur pierre à l'édifice, chacun donnant son interprétation d'Aristote. De plus, je voudrais éviter d'entrer dans la philosophie de l'infini, et me restreindre à l'infini mathématique.

Force est de constater qu'il embarrasse les mathématiciens grecs, même les plus grands. On a l'impression qu'ils évitent de prononcer le mot, et qu'ils préfèrent se limiter à « plus grand que toute quantité finie ». Par exemple chez Euclide, le célèbre théorème qui affirme qu'il y a une infinité de nombres premiers, a l'énoncé suivant.

7 Éléments, Livre IX, Proposition 20

Éléments, Livre IX, Proposition 20
Euclide (ca 325–265 av. J.-C.)

PROPOSITION XX.

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute la quantité proposée des nombres premiers.

Soient A, B, Γ les nombres premiers que l'on aura proposés ; je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ.

« Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute la quantité proposée des nombres premiers. »

Dans le même ordre d'idées, Archimède utilise de façon répétée un postulat qui revient à dire que l'on peut dépasser n'importe quelle grandeur, en multipliant une grandeur donnée suffisamment de fois.

Voici un exemple d'énoncé utilisant ce postulat, dans le traité des spirales.

8 Des spirales

Des spirales
Archimède (287–212 av. J.-C.)

Des cercles étant donnés en quelque nombre que ce soit, il est possible de prendre un segment de droite supérieur à la somme des circonférences de ces cercles.

« Des cercles étant donnés en quelque nombre que ce soit, il est possible de prendre un segment de droite supérieur à la somme des circonférences de ces cercles. »

Pour résumer l'héritage grec, deux processus peuvent être continués indéfiniment. L'un est l'augmentation, comme par exemple le fait d'ajouter successivement des nombres ou des grandeurs. L'autre est la division, comme dans le paradoxe de dichotomie : un intervalle, dont on prend la moitié, puis la moitié de la moitié, etc. Que ces deux processus puissent être poursuivis indéfiniment, n'entraîne pas que l'infini soit une *quantité*.

9 il n'y a pas de changement pour l'illimité

Par contraste, la vision purement arithmétique de Bhaskaracharya, en Inde, semble plus décomplexée. Il trouve normal de dire que l'inverse de zéro est infini, et explique le concept par l'analogie religieuse.

« Une quantité, divisée par zéro devient une fraction dont le dénominateur est zéro. On dit qu'une telle fraction est une quantité infinie. Il ne doit pas y avoir de changement pour lui, quand de grands nombres entrent ou sortent d'un nombre « qui a pour diviseur zéro », de même qu'il n'y a pas de changement pour l'illimité quand, au moment de la destruction ou à celui de la création, des multitudes d'êtres entrent ou sortent de Vishnu. »

il n'y a pas de changement pour l'illimité

Bhāskarāchārya, Bījagaṇita (1150)

Une quantité, divisée par zéro devient une fraction dont le dénominateur est zéro. On dit qu'une telle fraction est une quantité infinie. Il ne doit pas y avoir de changement pour lui, quand de grands nombres entrent ou sortent d'un nombre « qui a pour diviseur zéro », de même qu'il n'y a pas de changement pour l'illimité quand, au moment de la destruction ou à celui de la création, des multitudes d'êtres entrent ou sortent de Viṣṇu.

10 Robert Grosseteste (ca 1175–1253)

En Europe, le premier à avoir osé considérer des quantités infinies n'est pas quelqu'un dont on aurait attendu une telle transgression. Il s'appelle Robert Grosseteste. Contrairement à ce que son nom semble indiquer, il est anglais. D'un milieu modeste selon son propre aveu, il est devenu le premier chancelier de l'université d'Oxford. Il est le doyen d'une lignée prestigieuse de penseurs anglais du Moyen-Âge, il a même eu Roger Bacon comme disciple. Après sa carrière universitaire, il a été nommé évêque de Lincoln. Vous le voyez distribuant la bonne parole sur cette miniature.

En l'occurrence, cette bonne parole est un long poème écrit en anglo-normand, c'est-à-dire une sorte de vieux français. Vous voyez les premiers vers : « qui bien pense bien peut dire, sans bien penser ne peut suffire », etc. Le poème est intitulé « Le château d'amour ». Ah ! friands de légendes comme je vous sais, je vous sens tout émoustillés.

Robert Grosseteste (ca 1175–1253)

Château d'Amour (ca 1230)

11 Château d'Amour

Il existe une longue tradition du château comme allégorie. Le Château d'Amour, au temps de l'amour courtois, a longtemps symbolisé le siège que les preux chevaliers menaient pour conquérir l'amour de leurs dames. Lesquelles défendaient la place forte assiégée à coup de fleurs et de fruits, toujours allégoriques bien sûr. C'est ce qui est représenté sur ce magnifique bijou d'ivoire.

Euh, j'en vois deux qui ne sont pas loin de réussir, en haut.

Bon, on se calme. Ce n'est pas d'un évêque aussi pieux et savant que Robert Grosseteste que l'on peut attendre de telles gaudrioles. Non : son Château d'Amour à lui est le corps de la Vierge Marie, par lequel le Fils de Dieu est descendu sur Terre. Non mais ! qu'alliez-vous imaginer tout de suite !

Tout aussi sérieux est son traité de la lumière. En voici un extrait.

Château d'Amour

12 La somme de tous les nombres

« Il y a des infinis plus grands que d'autres et des infinis plus petits. En effet, la somme de tous les nombres, aussi bien pairs qu'impairs, est infinie et c'est une somme plus grande que celle de tous les nombres pairs qui est elle aussi néanmoins infinie. Car elle l'excède de la somme de tous les nombres impairs. »

Mettons : jusque là c'est cohérent. Mais voyez la suite.

La somme de tous les nombres
Robert Grosseteste (ca 1175–1253) De Luce

Il y a des infinis plus grands que d'autres et des infinis plus petits. En effet, la somme de tous les nombres, aussi bien pairs qu'impairs, est infinie et c'est une somme plus grande que celle de tous les nombres pairs qui est elle aussi néanmoins infinie. Car elle l'excède de la somme de tous les nombres impairs.

13 La somme de toutes les moitiés de ces doubles

« La somme de tous les nombres doublés depuis l'unité sans discontinuer est ainsi infinie. Et semblablement, la somme de toutes les moitiés de ces doubles est infinie, desquelles moitiés cependant la somme doit être nécessairement la moitié de la somme de leurs doubles. »

Ah mais attendez un peu : les nombres doublés, ce sont bien les nombres pairs non ? Et leurs moitiés, ce sont bien les entiers, non ? Alors comment la somme des nombres pairs qui est plus petite que celle des entiers puisqu'il y manque les impairs, se retrouve-t-elle tout à coup égale au double de cette même somme de tous les entiers ?

C'est facile de persifler après huit siècles. Qu'un penseur de l'envergure de Grosseteste ait pu tomber dans une contradiction aussi flagrante est simplement significatif de la difficulté qu'il y avait à penser une quantité infinie.

Voici comment, quatre siècles plus tard, un paradoxe analogue était compris par Galilée.

La somme de toutes les moitiés de ces doubles
Robert Grosseteste (ca 1175–1253) De Luce

La somme de tous les nombres doublés depuis l'unité sans discontinuer est ainsi infinie. Et semblablement, la somme de toutes les moitiés de ces doubles est infinie, desquelles moitiés cependant la somme doit être nécessairement la moitié de la somme de leurs doubles.

14 i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri

« Il faudra donc dire qu'il y a autant de nombres carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y en a autant que de racines, et que les racines représentent tous les nombres ; et pourtant nous disions au début qu'il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés. »

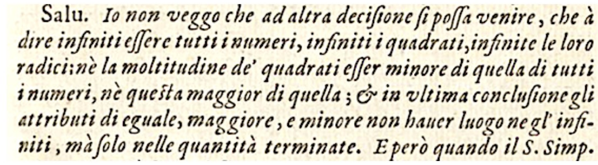
i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri
Galilée, Discorsi intorno à due nuoue scienze (1638)

numero alcuno che non ſia radice di qualche quadrato: E ſtante queſto conuerrà dire, che i numeri quadrati ſiano quanti tutti i numeri, poiche tanti ſono quante le lor radici, e radici ſon tutti i numeri; e pur da principio dicemmo tutti i numeri eſſer aſſai più, che tutti i quadrati, eſſendo la maggior parte non quadrati; e pur tut-

15 infiniti essere tutti i numeri

infiniti essere tutti i numeri
Galilée, Discorsi intorno à due nuoue scienze (1638)

« À mes yeux la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, et que le nombre de leurs racines pareillement ; que le total des nombres carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là, et, finalement, que les attributs « égal », « plus grand » et « plus petit » n'ont pas lieu à l'infini, mais seulement dans les quantités finies. »


Salu. Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che à dire infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici; nè la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, nè questa maggior di quella; & in vltima conclusione gli attributi di eguale, maggiore, e minore non hauer luogo ne gl' infiniti, mà solo nelle quantità terminate. E però quando il S. Simp.

16 John Locke (1632–1707)

John Locke (1632–1707)
An essay concerning human understanding (1690)

C'est la position qui a dominé jusqu'au dix-neuvième siècle. On peut augmenter, diviser indéfiniment, mais on ne peut pas compter avec des quantités infinies. La voici résumée par Locke dans son « Essai sur l'entendement humain ».

« Aussi claire que soit cette idée de l'infinité des nombres, il n'est pourtant rien de plus évident que l'absurdité de l'idée véritable d'un nombre infini. » Plus loin, il précise :

17 the positive idea of an actual infinite number

the positive idea of an actual infinite number
Locke, An essay concerning human understanding (1690)

« Il serait, je pense, difficile de trouver quelqu'un d'assez absurde pour dire qu'il a l'idée positive d'un nombre réellement infini, cette infinité ne consistant que dans le pouvoir d'ajouter n'importe quelle combinaison d'unités à n'importe quel nombre ; et cela aussi longtemps et autant que l'on veut. »

Though it be hard, I think, to find anyone so absurd as to say he has the positive idea of an actual infinite number; – the infinity whereof lies only in a power still of adding any combination of units to any former number, and that as long and as much as one will.

18 Bernard Bolzano (1781–1848)

Bernard Bolzano (1781–1848)

Dans ce domaine comme dans bien d'autres, la première avancée significative va venir de Bolzano.

Dès son premier article en 1804, Bernard Bolzano avait explicitement formulé son programme de réforme des fondements des mathématiques, et énoncé une règle de conduite : « L'évidence d'aucune hypothèse, ne me forcera à négliger le devoir de rechercher sa démonstration, jusqu'à ce que je voie clairement que aucune démonstration ne peut être requise, et pourquoi elle ne peut être requise. »

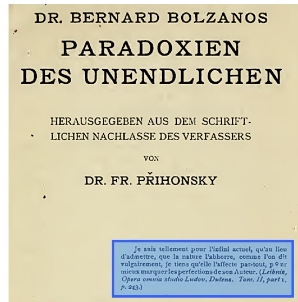
19 Paradoxien des Unendlichen (1851)

Son livre « Les paradoxes de l'infini », n'a été publié que trois ans après sa mort.

Sur la page de titre, dans l'encadré bleu, on lit une citation de Leibniz, en français dans le texte : « Je suis tellement pour l'infini réel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. »

Non seulement Bolzano, en accord avec Leibniz, admet que les quantités infinies existent, mais il est capable, pour la première fois, de caractériser l'infini.

Paradoxien des Unendlichen (1851)
Bernard Bolzano (1781–1848)



DR. BERNARD BOLZANOS
PARADOXIEN DES UNENDLICHEN
HERAUSGEGEBEN AUS DEM SCHRIFTLICHEN NACHLASSE DES VERFASSERS
VON
DR. FR. PŘIHONSKY

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. (*Leibniz, Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom. II, part 1, p. 243.*)

20 coupler chaque membre du premier ensemble...

« Quand deux ensembles sont infinis, il peut se faire qu'il soit possible de coupler chaque membre du premier ensemble avec un membre du second, de telle façon que, tous les membres de chaque ensemble apparaissent dans l'un des couples, et aucun d'eux n'apparaît dans deux couples ou plus. Tandis qu'en même temps l'un des deux ensembles contient l'autre strictement. »

Cette observation cache un tour de force remarquable. Elle est énoncée longtemps avant la théorie des ensembles, et la notion de bijection est encore à venir. Pourtant les définitions de Bolzano sont soigneusement explicitées, et parfaitement rigoureuses. En termes modernes, il explique que deux ensembles infinis peuvent être strictement inclus l'un dans l'autre, tout en étant en bijection. C'est l'observation de Galilée sur les nombres et leurs carrés. Mais au lieu de conclure à une impossibilité comme Galilée, Bolzano va plus loin. Il observe que ceci ne peut pas se produire entre deux ensembles finis : l'existence d'une bijection entre deux ensembles finis implique qu'ils ont le même cardinal, ils ne peuvent donc pas être strictement inclus l'un dans l'autre. Bolzano a donc trouvé une propriété caractérisant l'infini, mais il ne va pas jusqu'à en faire une définition.

La vérité historique m'oblige à vous dire que la suite est un tantinet moins brillante.

coupler chaque membre du premier ensemble...
Bolzano, Paradoxien des Unendlichen (1851)

Quand deux ensembles sont infinis, il peut se faire qu'il soit possible de coupler chaque membre du premier ensemble avec un membre du second, de telle façon que, tous les membres de chaque ensemble apparaissent dans l'un des couples, et aucun d'eux n'apparaît dans deux couples ou plus. Tandis qu'en même temps l'un des deux ensembles contient l'autre strictement.

21 ein Paar gleichfalls unendlichen Größen

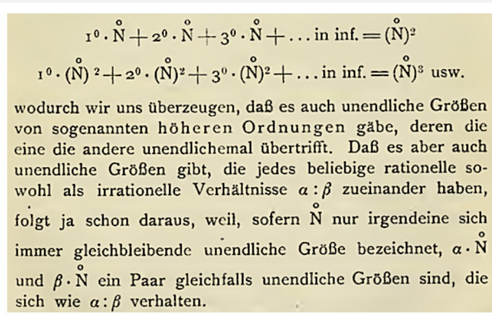
Bolzano définit grand N avec un zéro au-dessus comme un puissance zéro, plus deux puissance zéro plus et cetera. Donc le nombre total de tous les entiers. Vous le voyez, il s'autorise ensuite à multiplier les deux membres par la même quantité infinie, et même à recommencer.

Il se déclare alors convaincu qu'il existe des quantités infinies d'« ordre supérieur », dont l'une excède l'autre de beaucoup.

Il va même plus loin. En bas de l'image, il affirme que pour n'importe quel rapport, rationnel ou irrationnel, α sur β, si N_0 note n'importe quelle quantité infinie, alors αN_0 et βN_0 sont une paire de quantités, également infinies, qui sont dans le rapport prescrit α sur β.

Il y a comme qui dirait une ou deux évidences qui auraient mérité démonstration, non ? Mais bon, vu les conditions d'isolement dans lesquelles il a travaillé, on lui pardonne...

ein Paar gleichfalls unendlichen Größen
Bolzano, Paradoxien des Unendlichen (1851)



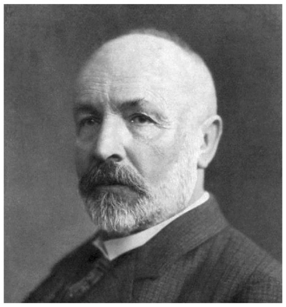
$$1^0 \cdot \mathring{N} + 2^0 \cdot \mathring{N} + 3^0 \cdot \mathring{N} + \ldots \text{ in inf.} = (\mathring{N})^2$$

$$1^0 \cdot (\mathring{N})^2 + 2^0 \cdot (\mathring{N})^2 + 3^0 \cdot (\mathring{N})^2 + \ldots \text{ in inf.} = (\mathring{N})^3 \text{ usw.}$$

wodurch wir uns überzeugen, daß es auch unendliche Größen von sogenannten höheren Ordnungen gäbe, deren die eine die andere unendlichemal übertrifft. Daß es aber auch unendliche Größen gibt, die jedes beliebige rationelle sowohl als irrationelle Verhältnisse $\alpha : \beta$ zueinander haben, folgt ja schon daraus, weil, sofern $\mathring{N}$ nur irgendeine sich immer gleichbleibende unendliche Größe bezeichnet, $\alpha \cdot \mathring{N}$ und $\beta \cdot \mathring{N}$ ein Paar gleichfalls unendliche Größen sind, die sich wie $\alpha : \beta$ verhalten.

22 Georg Cantor (1845–1918)

Georg Cantor (1845–1918)



Georg Cantor, lui, a lu attentivement Bolzano. Il en parle comme d'un « mathématicien fort subtil », et il qualifie ses « Paradoxes de l'infini » d'« ouvrage excellent et substantiel ».

Lui même va aller beaucoup plus loin, et développer la théorie des ensembles infinis, telle que nous la connaissons actuellement.

23 Fondements d'une théorie générale des ensembles (1883)

Fondements d'une théorie générale des ensembles (1883)
Georg Cantor (1845–1918)

Je ne me dissimule pas, que par cette entreprise, je me mets en contradiction, dans une certaine mesure, avec les idées généralement répandues sur l'infini mathématique et avec les opinions qu'on a souvent défendues sur l'essence de la grandeur numérique.

« Je ne me dissimule pas, que par cette entreprise, je me mets en contradiction, dans une certaine mesure, avec les idées généralement répandues sur l'infini mathématique et avec les opinions qu'on a souvent défendues sur l'essence de la grandeur numérique. »

Sa définition première est celle de la puissance d'un ensemble : « À tout système bien défini, dit-il, convient une puissance déterminée, et deux systèmes ont la même puissance, quand on peut établir entre eux, d'élément à élément, une correspondance réciproque à sens unique. »

En termes modernes, deux ensembles ont la même puissance s'ils sont en bijection. Cette définition toute simple contient en elle-même un certain nombre de paradoxes.

24 Puissance du dénombrable

Puissance du dénombrable
Georg Cantor (1845–1918)

- entiers
- entiers pairs, carrés d'entiers
- nombres décimaux, rationnels
- nombres algébriques
- points constructibles
- ...

La première puissance est celle du dénombrable. Les entiers, les entiers pairs, les carrés d'entiers, ont tous la puissance du dénombrable. Cantor démontre que les nombres rationnels, et même les nombres algébriques sont également dénombrables.

25 Puissance du continu

La seconde puissance est celle du continu, celle des intervalles réels. Sont en bijection avec l'intervalle $[0, 1]$ non seulement $\mathbb{R}$ et les points de l'espace quelle que soit sa dimension, mais également l'ensemble des suites, celui des fonctions continues, et même intégrables.

Puissance du continu
Georg Cantor (1845–1918)

- réels dans [0,1]
- points dans l'espace de dimension n
- suites de réels
- fonctions continues
- fonctions intégrables
- …

Cantor réussit à montrer que la puissance du continu n'est pas celle du dénombrable. Il y a donc beaucoup plus de nombres dans un intervalle qu'il n'y a de nombres algébriques. Il y a donc aussi beaucoup plus de nombres transcendants. Ce résultat est d'autant plus surprenant que les premiers exemples de nombres transcendants sont apparus récemment. Cantor découvre ceci entre la démonstration de la transcendance de e par Hermite en 1873, et celle de π par Lindemann en 1882.

Cantor est persuadé qu'entre la puissance du dénombrable et celle du continu, il n'y en a pas d'autres. Il proposera plusieurs démonstrations, toutes insuffisantes. Hilbert fera de ce résultat un de ses « Problèmes futurs des mathématiques » en 1900. La question ne sera tranchée que bien plus tard : l'hypothèse du continu n'est pas un théorème, pas plus d'ailleurs que son contraire. On démontre, euh… qu'elle n'est pas démontrable ! Encore un paradoxe.

Revenons à Hilbert, et à sa conférence sur l'infini de 1925.

26 Du paradis que Cantor a créé pour nous

« Il existe une manière parfaitement satisfaisante d'échapper aux paradoxes, sans trahir les intérêts de notre science ; Les points de vue qui doivent nous permettre de découvrir ce moyen, et les désirs qui nous guideront dans cette recherche, sont les suivants :

1) Nous nous proposons, partout où il y a seulement le moindre espoir d'en tirer quelque chose, de rechercher soigneusement les méthodes fécondes de définition et de raisonnement, de les soigner, de les étayer, et de les rendre utilisables. Du paradis que Cantor a créé pour nous, personne ne doit pouvoir nous chasser.

2) Il est nécessaire de donner partout à la déduction ce même caractère de certitude qu'elle présente dans l'arithmétique ordinaire, où personne n'a de doute et où les contradictions et les paradoxes ne peuvent apparaître que grâce à notre inattention. »

Du paradis que Cantor a créé pour nous
Hilbert, Über das Unendliche (1925)

Il existe une manière parfaitement satisfaisante d'échapper aux paradoxes, sans trahir les intérêts de notre science ; Les points de vue qui doivent nous permettre de découvrir ce moyen, et les désirs qui nous guideront dans cette recherche, sont les suivants :

1) Nous nous proposons, partout où il y a seulement le moindre espoir d'en tirer quelque chose, de rechercher soigneusement les méthodes fécondes de définition et de raisonnement, de les soigner, de les étayer, et de les rendre utilisables. Du paradis que Cantor a créé pour nous, personne ne doit pouvoir nous chasser.

2) Il est nécessaire de donner partout à la déduction ce même caractère de certitude qu'elle présente dans l'arithmétique ordinaire, où personne n'a de doute et où les contradictions et les paradoxes ne peuvent apparaître que grâce à notre inattention.

27 références

Attendez, il est sûr là ? Les paradoxes n'apparaissent que quand on ne fait pas attention ? Finalement, Aristote, Grosseteste, Galilée, et tous les autres n'étaient que de grands étourdis ? Vous ne trouvez pas ça paradoxal vous ?

références

- L.-É Blanchet (1976) L'infini dans les pensées juive et arabe, *Laval théologique et philosophique*, 32(1), 11–21
- J. W. Dauben (1990) *Georg Cantor, his mathematics and philosophy of the infinite*, Princeton : University Press
- G. Jorland (2016) Le *De Luce* de Robert Grosseteste : présentation et traduction, *Revue de métaphysique et de morale*, 89(1), 119–130
- E. Maor (1991) *To infinity and beyond*, Princeton : University Press
- I. Stewart (1991) *Infinity ; a very short introduction*, Oxford : University Press
- L. Sweeney (1960) L'infini quantitatif chez Aristote, *Revue philosophique de Louvain*, 58(60), 505–528