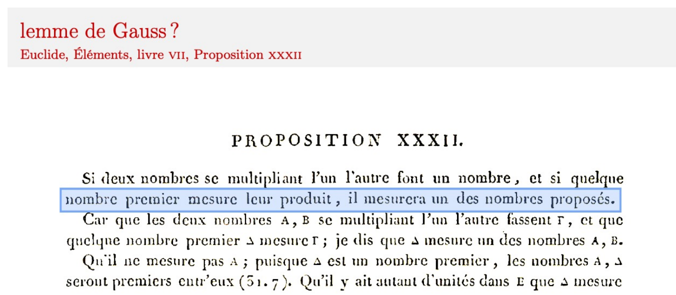
0 Les mosaïques de Thiele

Je vais vous dire : ça me chagrinerait un peu que tout ce que l'on retienne de Gauss en arithmétique, ce soit le lemme de Gauss.

1 lemme de Gauss ?



lemme de Gauss ?
Euclide, Éléments, livre VII, Proposition XXXII

PROPOSITION XXXII.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et si quelque nombre premier mesure leur produit, il mesurera un des nombres proposés.

Car que les deux nombres A, B se multipliant l'un l'autre fassent Γ, et que quelque nombre premier Δ mesure Γ ; je dis que Δ mesure un des nombres A, B.

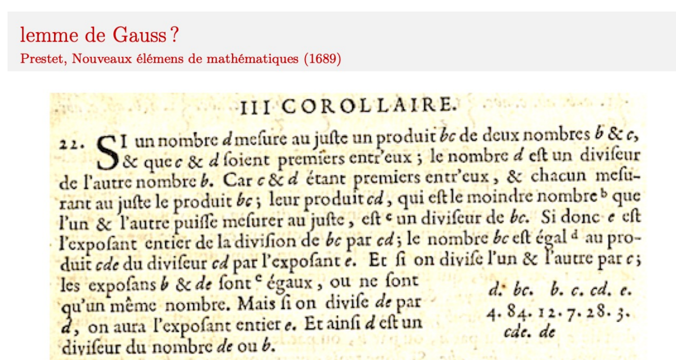
Qu'il ne mesure pas A ; puisque Δ est un nombre premier, les nombres A, Δ seront premiers entr'eux (31. 7). Qu'il y ait autant d'unités dans E que Δ mesure

D'abord parce qu'il n'est pas possible d'imaginer qu'un résultat aussi basique ait pu échapper à Euclide. Effectivement, voici la proposition 32 du livre sept.

« Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et si quelque nombre premier mesure leur produit, il mesurera l'un des deux nombres proposés. »

Oh oui, vous avez raison, ce n'est pas exactement le lemme de Gauss tel que vous le connaissez. Alors le voici.

2 lemme de Gauss ?



lemme de Gauss ?
Prestet, Nouveaux élémens de mathématiques (1689)

III COROLLAIRE.

22. Si un nombre *d* mesure au juste un produit *bc* de deux nombres *b* & *c*, & que *c* & *d* soient premiers entr'eux ; le nombre *d* est un diviseur de l'autre nombre *b*. Car *c* & *d* étant premiers entr'eux, & chacun mesurant au juste le produit *bc* ; leur produit *cd*, qui est le moindre nombre [b] que l'un & l'autre puisse mesurer au juste, est [c] un diviseur de *bc*. Si donc *e* est l'exposant entier de la division de *bc* par *cd* ; le nombre *bc* est égal [d] au produit *cde* du diviseur *cd* par l'exposant *e*. Et si on divise l'un & l'autre par *c* ; les exposans *b* & *de* sont [c] égaux, ou ne sont qu'un même nombre. Mais si on divise *de* par *d*, on aura l'exposant entier *e*. Et ainsi *d* est un diviseur du nombre *de* ou *b*.

d. bc. b. c. cd. e.
4. 84. 12. 7. 28. 3.
cde. de

« Si un nombre d mesure un produit bc de deux nombres b et c, et que c et d soient premiers entr'eux ; le nombre d est un diviseur de l'autre nombre b. » Ah là c'est bien le lemme de Gauss non ? Sauf que cet énoncé figure dans le livre du père Jean Prestet, les « Nouveaux éléments de Mathématiques », un bon siècle avant Gauss. Est-ce à dire que Gauss n'a jamais écrit le lemme de Gauss ? Non rassurez vous, il figure bien dans les Recherches Arithmétiques dudit.

3 lemme de Gauss !

« Si aucun des deux nombres a et b n'est divisible par un nombre premier p, le produit ab ne le sera pas non plus. »

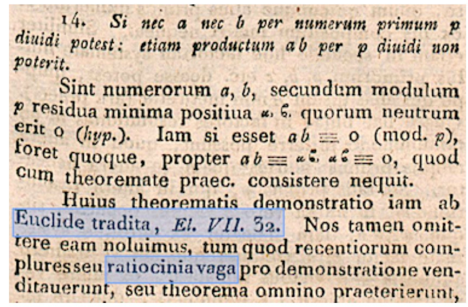
C'est la contraposée exacte de la Proposition d'Euclide. Gauss donne la démonstration, puis il ajoute :

« La démonstration de ce théorème a déjà été donnée par Euclide. Nous n'avons pas cependant voulu l'omettre, tant parce que plusieurs auteurs modernes ont présenté des raisonnements vagues au lieu de démonstration, ou bien ont négligé ce théorème ; que dans le but de faire mieux saisir, par ce cas très simple, l'esprit de la méthode que nous appliquerons par la suite à des points bien plus difficiles. »

Le ton est donné ! Gauss écrit avec une maîtrise, une hauteur de vue, une rigueur, toutes nouvelles pour l'époque. Il est d'autant plus impressionnant de penser à l'âge auquel il écrit cela.

lemme de Gauss !

Gauss, Disquisitiones Arithmeticae (1801)



14. *Si nec a nec b per numerum primum p diuidi potest: etiam productum ab per p diuidi non poterit.*

Sint numerorum a, b, secundum modulum p residua minima positiua α, β quorum neutrum erit 0 (*hyp.*). Iam si esset $ab \equiv 0$ (mod. p), foret quoque, propter $ab \equiv \alpha\beta$, $\alpha\beta \equiv 0$, quod cum theoremate praec. consistere nequit.

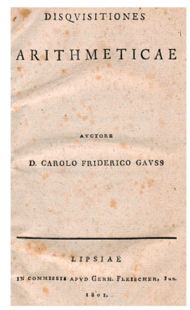
Huius theorematis demonstratio iam ab Euclide tradita, *El. VII.* 32. Nos tamen omittere eam noluimus, tum quod recentiorum complures seu ratiocinia vaga pro demonstratione venditauerunt, seu theorema omnino praeterierunt,

4 Disquisitiones Arithmeticae (1801)

C'est au début des Disquisitiones Arithméticae, ou Recherches Arithmétiques en français. C'est le livre fondateur de l'arithmétique moderne. Ce n'est pas que tout y soit entièrement nouveau : l'arithmétique remonte à Diophante. Mais non seulement Gauss y ajoute ses propres résultats, mais surtout il met de l'ordre, il prend de la hauteur.

Disquisitiones Arithmeticae (1801)

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



5 Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Le voici en 1803, deux ans après la publication de son chef-d'œuvre, qui est paru quand Gauss avait 24 ans. Et encore, le livre avait pris du retard : en fait Gauss l'avait écrit dès 1797, à 20 ans.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss en 1803

6 Duc de Brunswick (1735–1806)

Si Gauss a pu se consacrer entièrement à sa recherche en arithmétique, c'est en grande partie grâce à cet homme, le duc de Brunswick, qui lui a accordé une bourse exceptionnelle pour le dégager de tout souci matériel.

Le livre lui est dédicacé, ce qui est la moindre des choses. Voici ce que Gauss écrit.

« Par vos seules bontés, libre des soins étrangers, et maître de consacrer mon temps à l'étude, j'ai pu entreprendre les recherches dont cet ouvrage renferme une partie, et m'y livrer pendant plusieurs années. Lorsque j'ai désiré le mettre au jour, votre munificence a écarté tous les obstacles qui en retardaient la publication. »

Oui, on peut dire que les mathématiques doivent un fier service au duc de Brunswick. Mais vous raconter exactement en quoi sans être trop vague, ne va pas être facile. Il faut remonter un bon siècle et demi en arrière.

Duc de Brunswick (1735–1806)

Karl Wilhelm Ferdinand, Herzog von Braunschweig-Lüneburg

7 Pierre de Fermat (1607-1665)

De nombreux résultats d'arithmétique ont leur source dans la correspondance de Pierre de Fermat. Voici ce que l'on trouve dans une lettre à Frénicle du 18 octobre 1640.

Pierre de Fermat (1607-1665)

8 lettre à Frénicle (18 octobre 1640)

« Il me semble après cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuie les démonstrations de tout ce qui concerne les progressions géométriques, qui est tel :

Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances -1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est sous-multiple du nombre premier donné moins un. »

C'est l'origine de ce que nous appelons le « petit théorème de Fermat ». Il dit que si p est premier et a non nul, a puissance $p-1$ est congru à 1 modulo p. Oh ne vous imaginez pas que Fermat soit allé jusqu'à dire pourquoi.

lettre à Frénicle (18 octobre 1640)

Pierre de Fermat (1607-1665)

Il me semble après cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuie les démonstrations de tout ce qui concerne les progressions géométriques, qui est tel :

Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances -1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est sous-multiple du nombre premier donné -1.

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \text{ modulo } p\,.$$

9 lettre à Frénicle (18 octobre 1640)

lettre à Frénicle (18 octobre 1640)
Pierre de Fermat (1607-1665)

« Et cette proposition est généralement vraie en toutes progressions et en tous nombres premiers ; de quoi je vous enverrais la démonstration, si je n'appréhendais d'être trop long. »

Eh oui, c'est comme ça, c'est à la fois l'époque et le caractère de Fermat qui voulaient ça. Entre le manque de temps, la crainte d'être trop long et les marges trop petites, Fermat n'a pas justifié beaucoup de ses affirmations.

Et cette proposition est généralement vraie en toutes progressions et en tous nombres premiers ; de quoi je vous envoierois la démonstration, si je n'appréhendois d'être trop long.

10 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Tout de même, la plupart étaient justes et ont été démontrées par la suite. On a retrouvé une démonstration du petit théorème de Fermat dans les papiers non publiés de Leibniz. Il l'avait écrite vers 1693.

11 Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler (1707-1783)

Une grande partie des affirmations de Fermat ont été justifiées, un siècle plus tard, par Euler. Il a donné plusieurs démonstrations différentes du petit théorème de Fermat. Mais il n'a pas fait que cela. Il a consacré un grand nombre de mémoires à des résultats qui étendent, d'une façon ou d'une autre, le petit théorème de Fermat, c'est-à-dire en gros qui résolvent des équations de congruence. Le problème typique consiste à se demander à quoi peut être congrue une puissance d'un nombre, modulo un autre nombre. Le cas le plus simple est celui de la puissance 2, et on appelle cela un résidu quadratique.

12 résidus quadratiques

résidus quadratiques

a est un résidu quadratique modulo m si a est congru à un carré modulo m. Par exemple, modulo 13, un, quatre et neuf sont résidus quadratiques, bien sûr puisque ce sont déjà des carrés. En plus, 3 est congru à 16, 12 à 25, 10 à 36, et il n'y a pas d'autre résidu quadratique. C'est une propriété générale : quand le module est un nombre premier impair, si on met à part 0, la moitié des restes entre 1 et $p-1$ sont des résidus quadratiques, l'autre moitié n'en sont pas. Mais il y a plus fort : la loi de réciprocité quadratique.

a est un résidu quadratique modulo m s'il existe x tel que :

$$a \equiv x^2 \text{ modulo } m\,.$$

Modulo 13 :

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\,,\ 8\,,\ 9\,,\ 10\,,\ 11\,,\ 12\,.$$

13 loi de réciprocité quadratique

loi de réciprocité quadratique

Soient p et q deux nombres premiers impairs.

- Si p ou q est congru à 1 modulo 4, alors
  p est résidu quadratique de q si et seulement si q est résidu quadratique de p.
- Si p et q sont congrus à 3 modulo 4, alors
  p est résidu quadratique de q si et seulement si q n'est pas résidu quadratique de p.

Cette loi, Euler va la découvrir par tâtonnement et induction, mais sans pour autant l'énoncer très clairement.

Soient p et q deux nombres premiers impairs.

- Si p ou q est congru à 1 modulo 4, alors
  p est résidu quadratique de q si et seulement si q est résidu quadratique de p.
- Si p et q sont congrus à 3 modulo 4, alors
  p est résidu quadratique de q si et seulement si q n'est pas résidu quadratique de p.

14 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

À la suite d'Euler, Lagrange reprend le problème, donne une forme générale de l'énoncé, et cherche à le démontrer, mais il n'y arrive pas.

15 Adrien-Marie Legendre (1752-1813)

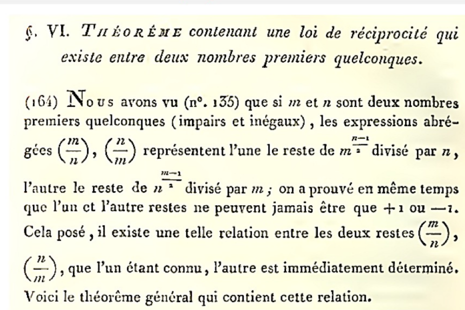
Adrien-Marie Legendre (1752-1813)

Vient ensuite Legendre. Cette caricature est la seule image authentique qu'on ait de lui. De sorte qu'il aura toujours l'air furax pour la postérité. En même temps, il avait quelques raisons de l'être, en particulier contre Gauss.

16 loi de réciprocité quadratique

loi de réciprocité quadratique

Legendre, Essai sur la théorie des nombres (1798)



§. VI. *Théorème contenant une loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques.*

(164) Nous avons vu (n°. 135) que si m et n sont deux nombres premiers quelconques (impairs et inégaux), les expressions abrégées $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$ représentent l'une le reste de $m^{\frac{n-1}{2}}$ divisé par n, l'autre le reste de $n^{\frac{m-1}{2}}$ divisé par m; on a prouvé en même temps que l'un et l'autre restes ne peuvent jamais être que $+1$ ou -1. Cela posé, il existe une telle relation entre les deux restes $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$, que l'un étant connu, l'autre est immédiatement déterminé. Voici le théorème général qui contient cette relation.

Ce que vous voyez ici est extrait de son Essai sur la Théorie des Nombres, qui date de 1798. Il introduit cette notation « m sur n entre parenthèses », qui comme il l'écrit est le reste modulo n de m à la puissance $(n-1)/2$. Il vaut toujours plus ou moins un. Il se trouve que cette quantité détecte si m est résidu quadratique modulo n.

17 loi de réciprocité quadratique

C'est un moyen commode et élégant d'écrire la loi de réciprocité quadratique. D'ailleurs la notation « m sur n entre parenthèses » est toujours utilisée sous le nom de « symbole de Legendre ».

Eh oui, Legendre sait écrire la loi sous forme condensée, mais il n'en a pas de démonstration. Celle qu'il donne suppose vrai un lemme qu'il considère comme évident, mais qui est loin de l'être.

Gauss, lui, a une vraie démonstration, et même plusieurs. Voici son énoncé.

loi de réciprocité quadratique

Legendre, Essai sur la théorie des nombres (1798)

Quels que soient les nombres premiers m *et* n, *s'ils ne sont pas tous deux de la forme* $4x-1$, *on aura toujours* $\left(\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)$, *et s'ils sont tous deux de la forme* $4x-1$, *on aura* $\left(\frac{n}{m}\right)=-\left(\frac{m}{n}\right)$. *Ces deux cas généraux sont compris dans la formule*

$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{m}{n}\right).$$

18 loi de réciprocité quadratique

Il est écrit en italiques en haut ; et une fois énoncé le théorème, Gauss ajoute :

« Comme presque tout ce qu'on peut dire sur les résidus quadratiques est une suite de ce théorème, la dénomination de *théorème fondamental* dont nous nous servirons dorénavant, ne sera pas déplacée. »

Non seulement Gauss énonce et démontre correctement un théorème sur lequel Euler et Lagrange s'étaient cassé les dents, mais il en a bien perçu toute l'importance. Il l'appellera aussi le « théorème d'or ».

Maintenant pour vous expliquer pourquoi Legendre a quelques raisons d'être aussi furieux, voici comment Gauss le cite.

loi de réciprocité quadratique

Gauss, Disquisitiones Arithmeticae (1801)

Si p est numerus primus formae 4n + 1, erit + p, si vero p formae 4n + 3, erit − p residuum vel non-residuum cuiusuis numeri primi qui positiue acceptus ipsius p est residuum vel non-residuum.

Quia omnia fere quae de residuis quadraticis dici possunt, huic theoremati innituntur, denominatio *theorematis fundamentalis*, qua in sequentibus vtemur, haud absona erit.

19 très ingénieuse mais...

« Ce célèbre auteur en a donné la démonstration, et comme elle est très ingénieuse, nous en parlerons plus amplement dans la section suivante. Comme il y suppose plusieurs choses sans démonstration, dont jusqu'à présent une partie n'a été démontrée par personne, et dont l'autre partie ne peut selon nous, l'être que par le théorème fondamental, il nous semble que la route qu'il a prise ne peut pas lui faire éviter la difficulté, et notre démonstration peut être regardée comme la première. »

Voilà, c'est dit. Gauss n'est pas du genre à tourner autour du pot. Il avait bien conscience de l'importance et de la nouveauté de son livre. Il ne s'attendait peut-être pas à l'influence qu'il a eue sur ses successeurs. En Allemagne, les premiers héritiers de Gauss sont Jacobi et Lejeune-Dirichlet.

très ingénieuse mais...

Gauss, Disquisitiones Arithmeticae (1801)

Ce célèbre auteur en a donné la démonstration, et comme elle est très ingénieuse, nous en parlerons plus amplement dans la section suivante. Comme il y suppose plusieurs choses sans démonstration, dont jusqu'à présent une partie n'a été démontrée par personne, et dont l'autre partie ne peut selon nous, l'être que par le théorème fondamental, il nous semble que la route qu'il a prise ne peut pas lui faire éviter la difficulté, et notre démonstration peut être regardée comme la première.

20 Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Jacobi a fourni de nouvelles démonstrations de la loi de réciprocité quadratique, et l'a étendue aux puissances supérieures. Il est aussi l'auteur d'une généralisation du symbole de Legendre, qu'on appelle « symbole de Jacobi ».

21 Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859)

Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859)

Lejeune-Dirichlet ne sonne pas comme un nom allemand typique, parce que sa famille était d'origine belge. Pendant toute sa carrière, il a gardé son exemplaire des Disquisitiones Arithmeticae à portée de main sur sa table. Il est sans doute celui qui a le plus approfondi ce que Gauss avait écrit.

En 1849, une grande fête a été organisée à Göttingen en l'honneur de Gauss, pour le cinquantenaire de sa thèse. À cette occasion, le manuscrit original des Disquisitiones a été exposé. Gauss, qui était d'excellente humeur, en a pris une page pour allumer sa pipe. Dirichlet s'est précipité pour sauver la relique. Il l'a conservée précieusement jusqu'à la fin de sa vie.

22 Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

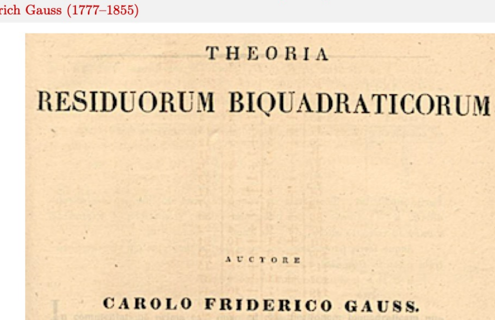
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
Gauss en 1828

Les Disquisitiones Arithmeticae auraient sans doute suffi pour donner à Gauss une place de choix dans l'histoire de l'arithmétique. Mais il ne s'est pas arrêté là.

Son théorème d'or, il a cherché à l'étendre et à le généraliser, pendant plusieurs décennies. Le voici en 1828, l'année où paraît un premier mémoire, intitulé « Théorie des Résidus Biquadratiques » : il s'agit de refaire pour la puissance 4, ce qui existe pour la puissance 2. Quatre ans plus tard paraît le second mémoire sur le même sujet.

23 Theoria residuorum biquadraticorum (1832)

Theoria residuorum biquadraticorum (1832)
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



THEORIA

RESIDUORUM BIQUADRATICORUM

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

Ce que contient ce texte va changer l'arithmétique. Voici ce que dit Gauss.

24 Theoria residuorum biquadraticorum (1832)

« Ayant déjà commencé à réfléchir au sujet en 1805, nous arrivâmes bientôt à la conviction que la véritable source d'une théorie générale devait se trouver dans une extension du champ de l'arithmétique.

Plus précisément, tandis que l'arithmétique supérieure traitait jusque-là seulement de nombres entiers, les théorèmes relevant des résidus biquadratiques ne resplendiraient dans leur suprême simplicité et leur beauté naturelle, que quand le champ de l'arithmétique serait étendu aux quantités *imaginaires.* »

Quand on y pense, c'est assez naturel au fond : résoudre l'équation $x^2 = 1$ donne deux racines, $+1$ et -1. Tandis que l'équation $x^4 = 1$ a en plus les deux racines imaginaires $+\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$. Il a fallu Gauss pour le voir, et en faire une vraie théorie.

Theoria residuorum biquadraticorum (1832)

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Ayant déjà commencé à réfléchir au sujet en 1805, nous arrivâmes bientôt à la conviction que la véritable source d'une théorie générale devait se trouver dans une extension du champ de l'arithmétique.

[. . .] Plus précisément, tandis que l'arithmétique supérieure traitait jusque-là seulement de nombres entiers, les théorèmes relevant des résidus biquadratiques ne resplendiraient dans leur suprême simplicité et leur beauté naturelle, que quand le champ de l'arithmétique serait étendu aux quantités *imaginaires.*

25 entiers de Gauss

Ce que l'on appelle désormais « les entiers de Gauss » sont les nombres complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs. Les notions de l'arithmétique classique s'étendent sans difficulté aux entiers de Gauss, en particulier les congruences et la primalité.

Une particularité est que un même entier peut être premier dans l'arithmétique classique, et ne plus l'être en arithmétique complexe. Par exemple 5 se factorise en $2 + \mathrm{i}$ fois $2 - \mathrm{i}$.

Vous voyez ici les conditions sous lesquelles un entier de Gauss est premier.

entiers de Gauss

$$a + bi\ , \quad a, b \in \mathbb{Z}\ .$$

$a + bi$ est premier si :

1. $ab \neq 0$, $a^2 + b^2$ est un entier premier,
2. $b = 0$, a est un entier premier congru à 3 modulo 4,
3. $a = 0$, b est un entier premier congru à 3 modulo 4.

26 Thorvald Thiele (1838–1910)

Thorvald Thiele est un Danois qui a eu plusieurs cordes à son arc. Il a été joueur d'échecs, astronome, il a fondé une compagnie d'assurances. En mathématiques, il est surtout connu comme statisticien.

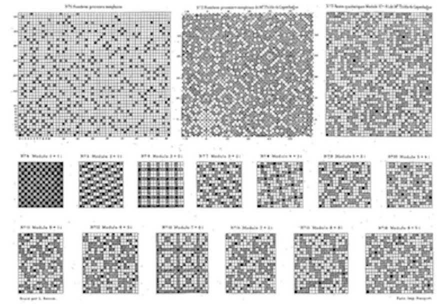
Thorvald Thiele (1838–1910)

27 mosaïques de Thiele (1873)

En 1873, il a eu l'idée de représenter certaines propriétés des entiers de Gauss dans le plan.

Voici les illustrations d'époque. Regardez la vignette en haut à droite. Elle représente des congruences modulo 17 plus 8i.

mosaïques de Thiele (1873)
Thorvald Thiele (1838–1910)



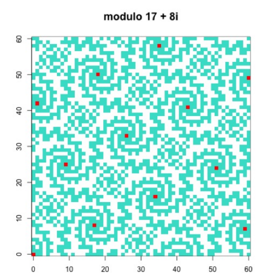
28 mosaïques de Thiele

Thiele faisait ses images à la main. Soren Buhl a eu la bonne idée de coder un programme R distribué librement, avec lequel je me suis bien amusé.

De quoi s'agit-il donc ? Chaque entier de Gauss correspond à un carré dans le plan. Ce carré est coloré en rouge si l'entier est congru au module (le résidu est zéro). Le carré est coloré en bleu si l'entier est un résidu quadratique du module, le carré est blanc sinon.

Comme attendu, le motif se répète périodiquement dans le plan.

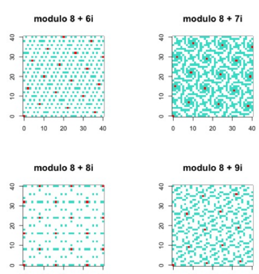
mosaïques de Thiele
S. Buhl, mosaïques de Thiele en R



29 module premier ou non

Il se trouve que les modules premiers donnent des résultats beaucoup plus spectaculaires que les autres. Sur les quatre images que vous voyez, seul $8 + 7i$ est un nombre premier.

module premier ou non
S. Buhl, mosaïques de Thiele en R

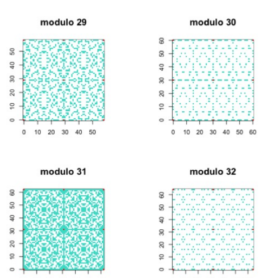


30 module premier ou non

C'est vrai aussi si le module est réel. Sur ces images, la fenêtre de représentation couvre deux périodes dans chaque direction, horizontale et verticale.

En haut à gauche, le module 29 est certes premier au sens classique, mais il ne l'est pas en complexe : 29 c'est $5 + 2i$ fois $5 - 2i$. Par contre 31 en-dessous est bien premier au sens complexe.

module premier ou non
S. Buhl, mosaïques de Thiele en R

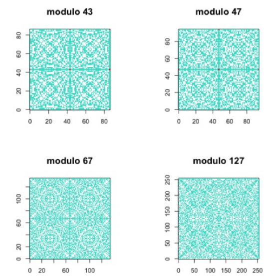


31 module entier naturel premier

Voici quelques autres modules réels premiers. Sympa comme carrelage, vous ne trouvez pas ?

module entier naturel premier

S. Buhl, mosaïques de Thiele en R

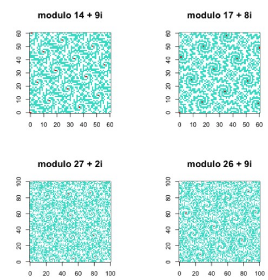


32 spirales

Avec des modules complexes premiers, on obtient souvent de magnifiques spirales.

spirales

S. Buhl, mosaïques de Thiele en R

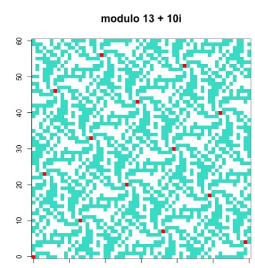


33 module $13 + 10i$

Regardez ce que donne $13 + 10i$: plutôt élégant non ?

module $13 + 10i$

S. Buhl, mosaïques de Thiele en R



34 références

Je parie qu'il reste encore des représentations graphiques d'entiers de Gauss qui n'ont pas été explorées. Ça vous dirait d'essayer ?

références

- R. Cuculière (1980) *Histoire d'un théorème d'arithmétique : la loi de réciprocité quadratique*, IREM Paris-Nord
- A. M. Décaillot (2002) Géométrie des tissus, mosaïques, échiquiers, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 8, 145-206
- L. E. Dickson (1919) *History of the theory of numbers, vol.* I, Washington : Carnegie Institution
- G. W. Dunnington (2004) *Carl Friedrich Gauss, titan of science*, Mathematical Association of America
- C. Genest, S. Lauritzen (2016) Les mosaïques de Thiele, *Accromath*, 11, 24-2