Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 L'aiguille de Buffon

Dans la plupart des manuels de probabilités, vous trouverez l'aiguille de Buffon et le paradoxe de Bertrand. C'est leur histoire que je vais vous raconter.

histoires de statistique

L'aiguille de Buffon

naissance des probabilités géométriques

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707–1788)

Buffon, le voici. Ce portrait date de 1753, soit vingt ans après ce dont nous allons parler.

Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707–1788)
François-Hubert Drouais (1753)

2 Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707–1788)

Cette gravure a été réalisée à partir du portrait précédent, mais je trouve qu'il a l'air plus jeune. Bref, Buffon est rentré à l'Académie royale des sciences à 27 ans ; 27 ans, ça peut vous paraître jeune pour devenir académicien, mais les temps ont changé.

Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707–1788)

3 Académie royale des sciences (1666–1793)

Dans ce tableau, j'ai mis quelques mathématiciens célèbres, et l'âge auquel ils sont rentrés à l'Académie. Vandermonde ou Monge, qui sont rentrés après 35 ans font figure d'ancêtres. La plupart sont rentrés avant 30 ans. Clairaut est devenu académicien à seulement 18 ans, et il lui a même fallu une dispense.

Quand un jeune homme ambitieux voulait devenir académicien, il lui suffisait d'envoyer un mémoire, souvent de mathématiques d'ailleurs. L'article était examiné par des académiciens, et si leur rapport était suffisamment élogieux, cela suffisait en général.

Pour Buffon, c'est Maupertuis et Clairaut qui ont écrit le rapport.

Académie royale des sciences (1666–1793)

quelques académiciens

	naissance	Académie	âge
Rolle	1652	1675	23
de l'Hôpital	1661	1693	32
Maupertuis	1698	1723	25
Buffon	1707	1734	27
Clairaut	1713	1731	18
Bézout	1730	1758	28
d'Alembert	1717	1741	24
Vandermonde	1735	1771	36
Condorcet	1743	1769	26
Monge	1746	1784	38
Laplace	1749	1773	24
Legendre	1752	1783	31

4 Rapport, 25 avril 1733

Il a été lu à l'Académie le 25 avril 1733.

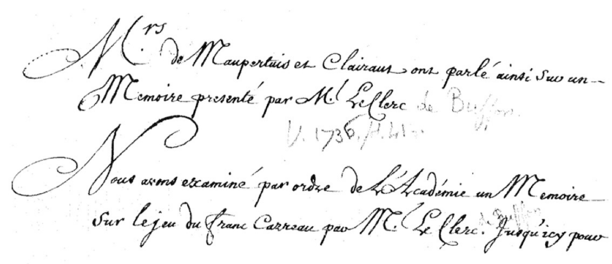
« Messieurs de Maupertuis et Clairaut ont parlé ainsi sur un mémoire présenté par M. Leclerc, et une surcharge à côté précise « de Buffon ».

Nous avons examiné par ordre de l'Académie un mémoire sur le jeu du Franc-Carreau présenté par Monsieur Leclerc. »

Qu'est-ce donc que ce jeu du Franc-Carreau ? Bien sûr on peut regarder dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, mais l'article sur le jeu du Franc-Carreau cite justement le mémoire de Buffon.

Rapport, 25 avril 1733

Maupertuis et Clairaut


Mrs de Maupertuis et Clairaut ont parlé ainsi sur un Memoire presenté par Mr Le Clerc de Buffon.
Nous avons examiné par ordre de l'Academie un Memoire sur le jeu du franc Carreau par Mr Le Clerc. Jusqu'icy pour

5 Article Carreau

« *Franc*-Carreau, sorte de jeu dont M. de Buffon a donné le calcul en 1733, avant que d'être de l'Académie des sciences. Voici l'extrait que l'on trouve de son mémoire sur ce sujet, dans le volume de l'Académie pour cette année-là.
Dans une chambre carrelée de *carreaux* égaux, et supposés réguliers, on jette en l'air un louis ou un écu, et on demande combien il y a à parier que la pièce ne tombera que sur un seul *carreau*, ou *franchement.* »

Très bien, mais ce jeu-là existait-il avant Buffon ? Je l'ai cherché dans des dictionnaires antérieurs à 1733.

Article Carreau

Diderot, d'Alembert, Encyclopédie (1751)

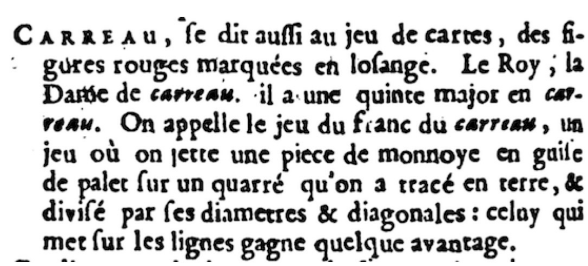
Franc-Carreau, sorte de jeu dont M. de Buffon a donné le calcul en 1733, avant que d'être de l'Académie des Sciences. Voici l'extrait que l'on trouve de son mémoire sur ce sujet, dans le volume de l'Académie pour cette année-là.
Dans une chambre carrelée de *carreaux* égaux, & supposés réguliers, on jette en l'air un louis ou un écu, & on demande combien il y a à parier que la pièce ne tombera que sur un seul *carreau*, ou *franchement.*

6 Franc du carreau

Dans le dictionnaire de Furetière de 1690, « On appelle le jeu du franc du carreau, un jeu où on jette une pièce de monnaie en guise de palet sur un carré qu'on a tracé en terre, et divisé par des diamètres et diagonales. Celui qui met sur les lignes gagne quelque avantage. »

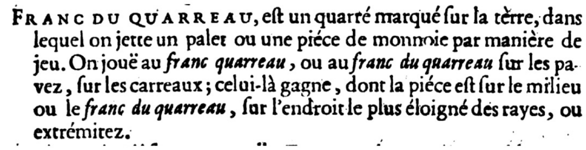
Franc du carreau

Dictionnaire de Furetière (1690)


CARREAU, ſe dit auſſi au jeu de cartes, des figures rouges marquées en loſange. Le Roy ; la Dame de *carreau*. il a une quinte major en *carreau*. On appelle le jeu du franc du *carreau*, un jeu où on jette une piece de monnoye en guiſe de palet ſur un quarré qu'on a tracé en terre, & diviſé par ſes diametres & diagonales : celuy qui met ſur les lignes gagne quelque avantage.

7 Franc quarreau

Franc quarreau
Dictionnaire de Trévoux (1732)


FRANC DU QUARREAU, est un quarré marqué sur la terre, dans lequel on jette un palet ou une piéce de monnoie par maniére de jeu. On jouë au *franc quarreau*, ou au *franc du quarreau* sur les pavez, sur les carreaux; celui-là gagne, dont la piéce est sur le milieu ou le *franc du quarreau*, sur l'endroit le plus éloigné des rayes, ou extrémitez.

Dans le dictionnaire de Trévoux en 1732, l'année avant le mémoire de Buffon, le « Franc du Carreau est un carré marqué sur la terre, dans lequel on jette un palet ou une pièce de monnaie par manière de jeu. On joue au franc carreau ou au franc du carreau sur les pavés, sur les carreaux. Celui-là gagne, dont la pièce est sur le milieu ou le franc du carreau, sur l'endroit le plus éloigné des raies ou extrémités. »

Il y a une contradiction sur qui gagne, mais globalement c'est bien le même jeu, et il semble qu'il ait plus été joué sur un dessin que sur un carrelage.

8 le franc du carreau (1587)

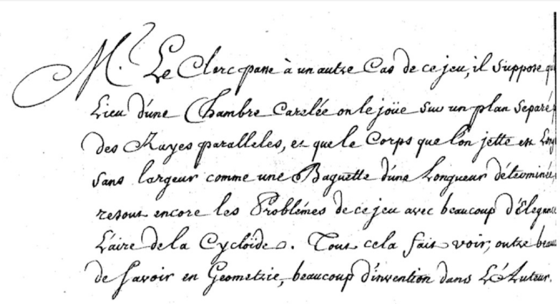
le franc du carreau (1587)
Guillaume Le Bé (1525–1598)

C'est ce qui est représenté sur cette gravure de 1587, ou il est précisé que c'est le jeu que les laquets ont toujours au cerveau pour y jouer en attendant leur maître.

Revenons au rapport de Maupertuis et Clairaut.

9 Rapport, 25 avril 1733

Rapport, 25 avril 1733
Maupertuis et Clairaut


M. Le Clerc passe à un autre Cas de ce jeu, il suppose q
Lieu d'une Chambre Carelée on le joüe sur un plan Separé
des Rayes paralleles, et que le Corps que l'on jette est lon
sans largeur comme une Baguette d'une Longueur détérminé
resout encore les Problémes de ce jeu avec beaucoup d'élégan
L'aire de la Cycloïde. Tout cela fait voir, outre beau
de savoir en Geometrie, beaucoup d'invention dans L'Auteur.

« M. Leclerc passe à un autre cas de ce jeu. Il suppose qu'au lieu d'une chambre carrelée on le joue sur un plan séparé par des raies parallèles et que le corps que l'on jette est long sans largeur, comme une baguette de longueur déterminée. »

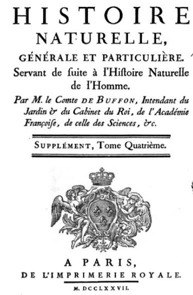
Et voilà : l'aiguille de Buffon, commence comme une baguette.

« M. Leclerc résout encore les problèmes de ce jeu avec beaucoup d'élégance par l'aire de la cycloïde. Tout cela fait voir, outre beaucoup de savoir en géométrie, beaucoup d'invention dans l'auteur. »

Comme il y avait beaucoup d'invention dans l'auteur, ça a suffit à Buffon pour rentrer à l'Académie. Il n'y a pas fait beaucoup de mathématiques. Il a surtout travaillé dans sa carrière sur sa monumentale Histoire Naturelle : pas moins de 36 volumes.

10 Supplément à l'Histoire Naturelle (1777)

Supplément à l'Histoire Naturelle (1777)
Buffon (1707–1788)


HISTOIRE
NATURELLE,
GÉNÉRALE ET PARTICULIÈRE.
Servant de ſuite à l'Hiſtoire Naturelle
de l'Homme.
Par M. le Comte DE BUFFON, *Intendant du Jardin & du Cabinet du Roi, de l'Académie Françoiſe, de celle des Sciences, &c.*

SUPPLÉMENT, Tome Quatrième.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCLXXVII.

Quarante ans plus tard, paraît ce Supplément à l'Histoire Naturelle. On y trouve un Essai d'Arithmétique Morale, où Buffon reprend ses travaux de jeunesse sur les probabilités.

11 Essai d'arithmétique morale (1777)

« . . . les jeux et les questions de conjecture ne roulent ordinairement que sur des rapports de quantités discrètes ; pour mettre donc la géométrie en possession de ses droits sur la science du hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent sur l'étendue et sur ses rapports, ou calculer le petit nombre de ceux de cette nature qui sont déjà trouvés ; le jeu du franc-carreau peut nous servir d'exemple : voici les conditions qui sont fort simples. »

Buffon donne la solution, qui avec une pièce ronde n'est pas très compliquée. Puis il passe à d'autres cas.

Essai d'arithmétique morale (1777)
Buffon (1707–1788)

. . . les jeux & les questions de conjecture ne roulent ordinairement que sur des rapports de quantités discrètes ; pour mettre donc la Géométrie en possession de ses droits sur la science du hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent sur l'étendue & sur ses rapports, ou calculer le petit nombre de ceux de cette nature qui sont déjà trouvés ; le jeu du franc-carreau peut nous servir d'exemple : voici les conditions qui sont fort simples.

12 si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde. . .

« Mais si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetait une pièce d'une autre figure, comme une pistole d'Espagne carrée, ou une aiguille, une baguette, etc., le problème demanderait un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours possible d'en donner la solution par des comparaisons d'espaces, comme nous allons le démontrer. »

Ah voici donc enfin la fameuse aiguille. Mais le mot « démontrer » n'est pas à prendre au sens actuel.

si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde. . .
Buffon, Essai d'arithmétique morale (1777)

Mais si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetoit une pièce d'une autre figure, comme une pistole d'Espagne carrée, ou une aiguille, une baguette, &c. le problème demanderoit un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours possible d'en donner la solution par des comparaisons d'espaces, comme nous allons le démontrer.

13 Je suppose que dans une chambre, dont le parquet. . .

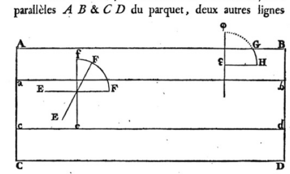
Certes il y a bien le résultat, il y a même une figure, et Buffon précise, toujours son point de vue d'expérimentaliste,

« On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête. »

Je suppose que dans une chambre, dont le parquet. . .
Buffon, Essai d'arithmétique morale (1777)

eſt ſimplement diviſé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croiſera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croiſera quelques-unes de ces parallèles ; on demande le ſort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu ſur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle ſans tête.*

Pour le trouver, je tire d'abord entre les deux joints parallèles *A B* & *C D* du parquet, deux autres lignes



14 Gabriel Cramer (1707–1788)

Buffon était-il au moins le premier à donner le résultat ? Non, même pas. Dans les années 1730, Buffon correspondait assez régulièrement avec un autre jeune homme, Gabriel Cramer. Ce Cramer est un Genevois, qui a inventé plusieurs choses en probabilités, utilisées par d'autres.

Voici ce que Cramer écrit à Stirling en Angleterre, le 22 février 1732, donc un an avant le mémoire de Buffon.

Gabriel Cramer (1707–1788)

15 Lettre de Cramer à Stirling (22 février 1732)

« Voici un problème qui m'a occupé ces jours passés, et qui sera peut-être du goût de M. de Moivre. Vous ne savez peut-être pas ce que nous appelons en français le jeu du franc-carreau. C'est un problème à résoudre et qui n'a point de difficulté : trouver la probabilité de gagner ou de perdre, les carreaux et l'écu étant donnés. Mais si au lieu de jeter en l'air un écu qui est rond, on jetait une pièce carrée, le problème m'a paru assez difficile, soit qu'il le soit naturellement, soit que la voie par laquelle je l'ai résolu ne soit pas la meilleure. »

Donc Cramer a résolu un problème sans doute aussi général que celui de Buffon, un an avant Buffon. Mais il n'a pas envoyé de mémoire à l'Académie.

Lettre de Cramer à Stirling (22 février 1732)
Gabriel Cramer (1704–1752)

Voici un problème qui m'a occupé ces jours passés, et qui sera peut-être du goût de Mr de Moivre. Vous ne savez peut-être pas ce que nous appelons en français le jeu du franc-carreau. [. . .] C'est un problème à résoudre et qui n'a point de difficulté : trouver la probabilité de gagner ou de perdre, les carreaux et l'écu étant donnés. Mais si au lieu de jeter en l'air un écu qui est rond, on jetait une pièce carrée, le problème m'a paru assez difficile, soit qu'il le soit naturellement, soit que la voie par laquelle je l'ai résolu ne soit pas la meilleure.

16 Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Le grand nom des probabilités après Buffon est Laplace. Dans la Théorie Analytique des Probabilités, Laplace anticipe les méthodes de Monte Carlo.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)
Théorie Analytique des Probabilités (1812)

17 rectifier les courbes ou quarrer leurs surfaces

« Enfin on pourrait faire usage du calcul des probabilités, pour rectifier les courbes ou quarrer leurs surfaces. Sans doute, les géomètres n'emploieront pas ce moyen ; mais comme il me donne lieu de parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard, je vais l'exposer en peu de mots.
Imaginons un plan divisé par des lignes parallèles, équidistantes de la quantité a ; concevons de plus un cylindre très-étroit dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou moindre que a. On demande la probabilité qu'en le projetant, il rencontrera une des divisions du plan. »

L'aiguille de Buffon est devenue un cylindre très étroit, et Buffon a disparu. Ensuite, Laplace rajoute une autre série de lignes.

rectifier les courbes ou quarrer leurs surfaces
Laplace, Théorie Analytique des Probabilités (1812)

Enfin on pourrait faire usage du calcul des probabilités, pour rectifier les courbes ou quarrer leurs surfaces. Sans doute, les géomètres n'emploieront pas ce moyen ; mais comme il me donne lieu de parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard, je vais l'exposer en peu de mots.
Imaginons un plan divisé par des lignes parallèles, équidistantes de la quantité a ; concevons de plus un cylindre très-étroit dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou moindre que a. On demande la probabilité qu'en le projetant, il rencontrera une des divisions du plan.

18 une suite de rectangles

« Concevons maintenant le plan précédent divisé encore par des lignes perpendiculaires aux précédentes, et équidistantes d'une quantité b égale ou plus grande que la longueur $2r$ du cylindre. Toutes ces lignes formeront avec les premières, une suite de rectangles dont b sera la longueur et a la hauteur. »

Et Laplace résout le même problème.

une suite de rectangles
Laplace, Théorie Analytique des Probabilités (1812)

Concevons maintenant le plan précédent divisé encore par des lignes perpendiculaires aux précédentes, et équidistantes d'une quantité b égale ou plus grande que la longueur $2r$ du cylindre. Toutes ces lignes formeront avec les premières, une suite de rectangles dont b sera la longueur et a la hauteur.

19 le nombre total des combinaisons possibles

Remarquez comment les choses sont écrites.

« Le nombre total des combinaisons est $8(a+b)r - 8r^2$. Le nombre total des combinaisons possibles est égal à $2\pi ab$. La probabilité est donc le rapport des deux. »

Laplace raisonne en nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles, alors qu'il s'agit de quantités continues, et ça ne le dérange pas plus que ça.

le nombre total des combinaisons possibles
Laplace, Théorie Analytique des Probabilités (1812)

pour cette intégrale. En lui ajoutant $\frac{\pi^2 r^2}{2}$, on aura le nombre des combinaisons relatives au quarré ; et en quadruplant ce nombre, et le réunissant aux nombres précédens des combinaisons relatives à la rencontre du contour du grand rectangle, par le cylindre ; on aura, pour le nombre total des combinaisons,

$$8.(a+b).r - 8r^2.$$

Mais le nombre total des combinaisons possibles, est évidemment égal à 2π multiplié par la surface ab du grand rectangle ; la probabilité de la rencontre des divisions du plan par le cylindre, est donc

$$\frac{4.(a+b).r - 4r^2}{ab.\pi}.$$

20 Note sur le problème de l'aiguille. . . (1860)

Les choses en restent à peu près là jusqu'à cet article de 1860. L'auteur est Joseph-Émile Barbier. Il a 21 ans et est encore élève de l'École normale.

L'histoire de Barbier est assez triste. C'était un élève extrêmement brillant, qui impressionnait tout le monde, d'abord au lycée, ensuite à l'École normale. Sortant de l'École normale, il a eu un poste de professeur dans un lycée de Nice. Barbier s'est révélé incapable de se mettre au niveau de compréhension de ses élèves. On lui a alors trouvé un poste d'astronome à l'observatoire à Paris, et là non plus, il n'a pas pu interagir correctement avec ses collègues.

Quelques années plus tard Bertrand, qui avait été son professeur à l'École normale, a retrouvé sa trace dans un asile. Il a tenté de le réintéresser aux mathématiques, mais Barbier a fini ses jours à l'âge de 50 ans sans être sorti de l'asile.

Note sur le problème de l'aiguille. . . (1860)
Joseph-Émile Barbier (1839–1889)

NOTE

SUR

LE PROBLÈME DE L'AIGUILLE ET LE JEU DU JOINT COUVERT ;

PAR M. E. BARBIER,

Élève de l'École Normale.

§ I. — *Généralisation du problème de l'aiguille. — Disques de différentes formes.*

1. Le problème devenu classique sous le nom de *Problème de l'Aiguille*, a été indiqué pour la première fois par Laplace.

Voici comment il est exposé dans la *Théorie analytique des Probabilités* : « On pourrait faire usage du calcul des probabilités, pour

21 un fil flexible

Dans cet article de 1860, Barbier propose plusieurs généralisations.

« Théorème 1 : Un plan contient par mètre carré un fil flexible de longueur L mètres, affectant une forme variable, on y jette au hasard un fil flexible de longueur l mètres, la moyenne du nombre des points d'intersection oscille indéfiniment, quel que soit le nombre des épreuves, autour de $2Ll/\pi$. »

Le « oscille indéfiniment », c'est la loi des grands nombres. Barbier veut parler de l'« espérance » du nombre de points d'intersection. L'idée clé est que, tandis que la probabilité qu'il y ait intersection dépend de la forme, l'espérance du nombre de points d'intersection, elle, n'en dépend pas. Cette idée clé, Barbier dit qu'il la doit à Bertrand.

un fil flexible

Barbier, Note sur le problème de l'aiguille… (1860)

2. Théorème I. — *Un plan contient par mètre carré un fil flexible de longueur L mètres, affectant une forme variable, on y jette au hasard un fil flexible de longueur l mètres, la moyenne du nombre des points d'intersection oscille indéfiniment, quel que soit le nombre des épreuves, autour de* $\frac{2Ll}{\pi}$.

Nous dirons toujours, dans ce qui va suivre, *moyenne* au lieu de *limite de moyenne*, ou de *nombre autour duquel la moyenne oscille indéfiniment*. Avant de donner quelques énoncés de théorèmes de moyennes, il est utile de fixer le sens de deux expressions.

1°. Une direction quelconque dans un plan est celle du rayon d'un cercle situé dans ce plan, qui prend indifféremment toutes les orientations possibles.

2°. Une direction quelconque dans l'espace est celle du rayon mené à un point de la surface d'une sphère, qui prend indifféremment toutes les positions possibles sur cette surface [*].

La moyenne des projections d'une ligne plane l sur une direction quelconque du plan est $\frac{2l}{\pi}$, comme pour le cercle.

22 une étoffe qui peut n'être pas développable

Sur le même principe, Barbier passe à la dimension supérieure.

« Supposons un espace indéfini, divisé par la pensée en cubes de 1 mètre de côté, et chacun de ces mètres cubes contenant s mètres carrés d'étoffe. Un fil de longueur l, passé au hasard dans cet espace, traverse moyennement l'étoffe en $sl/2$ points.

Ce théorème donne à peu près la moyenne du nombre de feuilles traversées par une flèche très fine qui parcourt une distance connue à travers un feuillage. »

Dans l'application suivante, « un bassin qui renferme un acide peut altérer une étoffe. Le liquide distille par un certain nombre de trous. Combien de points d'une surface connue de cette étoffe ont été altérés par des gouttes d'acide ? »

Les résultats sont un peu multipliés à plaisir, mais Barbier semble parfaitement conscient qu'il y a là un résultat général sur les intersections de sous-variétés aléatoires dans des espaces de dimension quelconque. On est assez loin du problème initial de l'aiguille.

une étoffe qui peut n'être pas développable

Barbier, Note sur le problème de l'aiguille… (1860)

3. Théorème II. — *Supposons un espace indéfini, divisé par la pensée en cubes de 1 mètre de côté, et chacun de ces mètres cubes contenant s mètres carrés d'une étoffe (qui peut n'être pas développable sur un plan); un fil de longueur l, passé au hasard dans cet espace, traverse moyennement l'étoffe en* $\frac{Sl}{2}$ *points.*

Ce théorème donne à peu près la moyenne du nombre de feuilles traversées par une flèche très-fine qui parcourt une distance connue à travers un feuillage.

Théorème III. — *Chaque mètre cube d'un espace indéfini est traversé par un fil de L mètres de longueur; une étoffe de s mètres carrés est traversée moyennement en* $\frac{Ls}{2}$ *points par le fil.*

Ce théorème résout à peu près cette question : Un bassin renferme un acide qui peut altérer une étoffe; le liquide distille par un certain nombre de trous. Combien de points d'une surface connue de cette étoffe ont été altérés par des gouttes d'acide ?

Théorème IV. — *Supposons enfin que chaque mètre cube de l'espace renferme S mètres carrés de surfaces, la longueur moyenne de la courbe d'intersection de ces surfaces, par une surface de s mètres carrés, est* $\frac{3\pi Ss}{2}$.

23 Joseph Bertrand (1822–1900)

Celui qui a donné à Barbier l'idée de remplacer les probabilités par des espérances, c'est lui : Joseph Bertrand. Son manuel de Calcul des probabilités date de 1889, presque trente ans après l'article de Barbier. Il y décrit le problème de l'aiguille, pour insister sur la différence entre probabilité et espérance.

Joseph Bertrand (1822–1900)

Calcul des probabilités (1889)

24 L'espérance mathématique de Pierre

« Problème 46. — *On trace sur un plan indéfini des lignes parallèles équidistantes. Une aiguille est lancée au hasard sur le plan. Pierre recevra 1 franc par rencontre de l'aiguille avec une des parallèles. Quelle est l'espérance mathématique de Pierre ?*

L'espérance mathématique de Pierre est proportionnelle à la longueur de l'aiguille et indépendante de sa forme, droite ou courbe. Il n'en est pas de même de la probabilité de la rencontre, et ce problème, comme le précédent, montre la différence entre le calcul de la probabilité et celui de l'espérance mathématique. »

On peut donc changer la forme de l'aiguille, sans changer l'espérance du nombre d'intersections.

L'espérance mathématique de Pierre
Bertrand, Calcul des probabilités (1889)

Problème XLVI. — *On trace sur un plan indéfini des lignes parallèles équidistantes. Une aiguille est lancée au hasard sur le plan. Pierre recevra* 1^{fr} *par rencontre de l'aiguille avec une des parallèles. Quelle est l'espérance mathématique de Pierre ?*

L'espérance mathématique de Pierre est proportionnelle à la longueur de l'aiguille et indépendante de sa forme, droite ou courbe. Il n'en est pas de même de la probabilité de la rencontre, et ce problème, comme le précédent, montre la différence entre le calcul de la probabilité et celui de l'espérance mathématique.

25 Probabilité et espérance

« Une aiguille est droite ; on la courbe ; la probabilité de la rencontre est changée : l'aiguille ne pouvait, si elle est plus petite que la distance des deux parallèles, procurer deux rencontres à la fois ; elle le peut quand, sans changer sa longueur, on l'a pliée en courbe. On peut même être certain, si la courbe est fermée, qu'une première rencontre en rend une seconde nécessaire.
Les conditions du problème sont donc changées. L'espérance mathématique de celui qui doit recevoir 1 franc par rencontre reste la même. »

Si l'aiguille est une courbe fermée convexe, il ne peut y avoir que deux intersections ou zéro. Donc la probabilité qu'il y ait intersection se déduit de l'espérance. Pourquoi donc est-ce que l'espérance ne change pas ? La démonstration est assez piquante.

Probabilité et espérance
Joseph Bertrand, Calcul des probabilités (1889)

Une aiguille est droite ; on la courbe ; la probabilité de la rencontre est changée : l'aiguille ne pouvait, si elle est plus petite que la distance des deux parallèles, procurer deux rencontres à la fois ; elle le peut quand, sans changer sa longueur, on l'a pliée en courbe. On peut même être certain, si la courbe est fermée, qu'une première rencontre en rend une seconde nécessaire.
Les conditions du problème sont donc changées. L'espérance mathématique de celui qui doit recevoir 1^{fr} par rencontre reste la même.

26 Une espérance indépendante des autres éléments

« Chaque élément de l'aiguille donne, en effet, une espérance indépendante des autres éléments qui lui sont attachés. Celui qui doit recevoir 1 franc par rencontre (c'est la même chose que 1 franc s'il y a rencontre, quand une seule rencontre est possible) peut vendre à des acheteurs différents les droits résultant pour lui de chaque élément de l'aiguille, et la valeur de ces droits reste la même, que l'aiguille soit droite ou courbe. »

Fin de la démonstration. Comprenez que les espérances sont additives, et que les sommes d'éléments sont des intégrales.

Bertrand précise généreusement que « L'ingénieuse substitution d'un cercle à une aiguille rectiligne est due à M. Émile Barbier ».

Souvenez-vous de Laplace, qui raisonnait en nombre de cas favorables, sans se préoccuper du fait que les nombres n'étaient pas des entiers. Bertrand fait la distinction et explique pourquoi.

Une espérance indépendante des autres éléments
Joseph Bertrand, Calcul des probabilités (1889)

Chaque élément de l'aiguille donne, en effet, une espérance indépendante des autres éléments qui lui sont attachés. Celui qui doit recevoir 1^{fr} par rencontre (c'est la même chose que 1^{fr} s'il y a rencontre, quand une seule rencontre est possible) peut vendre à des acheteurs différents les droits résultant pour lui de chaque élément de l'aiguille, et la valeur de ces droits reste la même, soit que l'aiguille soit droite ou courbe.

[…]

L'ingénieuse substitution d'un cercle à une aiguille rectiligne est due à M. Émile Barbier.

27 Le paradoxe de Bertrand

« L'infini n'est pas un nombre ; on ne doit pas, sans explication, l'introduire dans les raisonnements. La précision illusoire des mots pourrait faire naître des contradictions. Choisir *au hasard*, entre un nombre infini de cas possibles, n'est pas une indication suffisante. »

Et Bertrand donne en exemple le paradoxe qui porte son nom.

« On trace *au hasard* une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit ? »

Il donne trois réponses différentes et observe :

« Entre ces trois réponses, quelle est la véritable ? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée. »

Bertrand poursuit par d'autres paradoxes du même type, mais qui sont devenus moins célèbres.

Le paradoxe de Bertrand
Joseph Bertrand, Calcul des probabilités (1889)

L'infini n'est pas un nombre ; on ne doit pas, sans explication, l'introduire dans les raisonnements. La précision illusoire des mots pourrait faire naître des contradictions. Choisir *au hasard*, entre un nombre infini de cas possibles, n'est pas une indication suffisante.

[...]

On trace *au hasard* une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit ?

[...]

Entre ces trois réponses, quelle est la véritable ? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.

28 Autres paradoxes de Bertrand

« On choit au hasard un plan dans l'espace ; quelle est la probabilité pour qu'il fasse avec l'horizon un angle plus petit que $\frac{\pi}{4}$?

Cette question, comme la précédente, est mal posée et les deux réponses contradictoires en sont la preuve. »

« On fixe au hasard deux points sur la surface d'une sphère ; quelle est la probabilité pour que leur distance soit inférieure à 10 minutes d'angle ? »

Et dans ce cas il y a une vraie application :

« Les probabilités relatives à la distribution des étoiles, en les supposant semées *au hasard* sur la sphère céleste, sont impossibles à assigner si la question n'est pas précisée davantage. »

Autres paradoxes de Bertrand
Joseph Bertrand, Calcul des probabilités (1889)

On choit au hasard un plan dans l'espace ; quelle est la probabilité pour qu'il fasse avec l'horizon un angle plus petit que $\frac{\pi}{4}$?

[...]

Cette question, comme la précédente, est mal posée et les deux réponses contradictoires en sont la preuve.

[...]

On fixe au hasard deux points sur la surface d'une sphère ; quelle est la probabilité pour que leur distance soit inférieure à $10'$?

[...]

Les probabilités relatives à la distribution des étoiles, en les supposant semées *au hasard* sur la sphère céleste, sont impossibles à assigner si la question n'est pas précisée davantage.

29 Henri Poincaré (1854–1912)

Les probabilités ne sont pas le domaine de prédilection de Poincaré. Il n'y est venu que par la physique statistique. Il a quand même enseigné un cours de probabilité. Les notes de ce cours ont été publiées en 1896.

Henri Poincaré (1854–1912)

30 deux axes fixes

Elles ont été reprises en 1912, l'année de la mort de Poincaré. On y retrouve le problème de l'aiguille, mais il est posé de manière plus générale. C'est une courbe tracée dans un repère du plan. On déplace le repère et la courbe qui lui est attachée.

deux axes fixes

Poincaré, Calcul des probabilités (1912)

72. Problème de l'aiguille. — Sur une feuille de papier, sont tracées un certain nombre de droites parallèles et équidistantes ; leur distance commune est d, et l'on jette au hasard sur la feuille une aiguille également de longueur d.

Quelle est la probabilité pour que cette aiguille rencontre l'une des droites ?

La question peut se poser d'une manière plus générale.

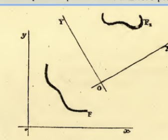


Fig. 8.

Soient deux axes fixes ox, oy, et une figure fixe F invariablement liée à ces axes.

Soient d'autre part deux axes mobiles OX, OY, et une

31 l'une des hypothèses de J. Bertrand

En suivant, il traite le paradoxe de Bertrand, à la lumière de sa solution au problème de l'aiguille. Et là, en raisonnant sur une droite fixe et une circonférence mobile, il trouve une solution, un demi, qui est l'une des solutions de Bertrand. Il sait bien que ce n'est pas la seule.

Revenons à Buffon et à son Essai d'arithmétique morale de 1777. Il tire les leçons de son jeu du Franc-Carreau.

l'une des hypothèses de J. Bertrand

Poincaré, Calcul des probabilités (1912)

75. Revenons sur le paradoxe de J. Bertrand relatif à la probabilité pour qu'une corde d'une circonférence soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit.

Traçons une circonférence C′, concentrique à la première C et dont le rayon soit la moitié du sien. Plaçons au hasard une droite dans le plan. Si nous adoptons la convention faite tout à l'heure au sujet de l'aiguille, la probabilité dépendra-t-elle d'une nouvelle et troisième hypothèse, ou bien de l'une des deux précédemment examinées ?

Je puis supposer la droite fixe et les circonférences mobiles. La probabilité pour que l'une des circonférences coupe la droite est proportionnelle à sa longueur ; la probabilité pour que C′ rencontre la droite est donc le rapport des longueurs des deux circonférences, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. On retombe ainsi sur l'une des hypothèses de J. Bertrand.

32 Essai d'arithmétique morale (1777)

« L'analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer et fixer les rapports du hasard ; la géométrie paraissait peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant, si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnaître que cet avantage de l'analyse sur la géométrie est tout à fait accidentel, et que le hasard selon qu'il est modifié et conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi bien que de celui de l'analyse. »

Essai d'arithmétique morale (1777)

Buffon (1707–1788)

L'Analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer & fixer les rapports du hasard ; la Géométrie paraissoit peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant, si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnoître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie est tout à fait accidentel, & que le hasard selon qu'il est modifié & conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi bien que de celui de l'analyse.

33 références

Je ne suis pas sûr de bien comprendre : si on utilise l'analyse pour faire des probabilités c'est juste par hasard, ou bien par chance ?

références

- J. Bertrand (1889) *Calcul des probabilités* Paris : Gauthier-Villars
- O. Courcelle (2013) Chronologie de la vie de Clairaut (1713–1769) `http://www.clairaut.com`
- A. Kalousová (2009) Solutions of Buffon's problems in the 19th century *WDS'09 Proceedings of contributed papers, Part I*, 198–203
- L. Mazliak (2012) Poincaré et le hasard, *Séminaire Poincaré* XVI, 135–171
- H. Poincaré (1912) *Calcul des probabilités* Paris : Gauthier-Villars
- J. Roger (1989) *Buffon : un philosophe au Jardin du Roi*, Paris : Fayard