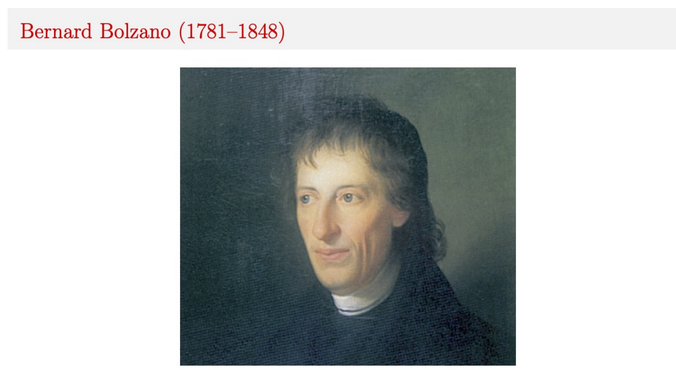
Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Rencontres à Prague

Nous partons à Prague, à la rencontre des deux fondateurs de la rigueur mathématique moderne, Bolzano et Cauchy. Mais voyons, que faisaient-ils là-bas ?

1 Bernard Bolzano (1781–1848)



Pour Bolzano, la question ne se pose pas. Il y était né, malgré ce que son nom d'origine italienne semble indiquer. À l'époque, le royaume de Bohème est sous la domination des Habsbourg d'Autriche. La jeunesse de Bolzano se déroule pendant la période révolutionnaire, puis napoléonienne.

2 François I^{er} d'Autriche (1768–1835)

Vous souvenez-vous de ces noms à jamais gravés dans le marbre de la gloire nationale ? Marengo, Austerlitz, Wagram, et tant d'autres ? Eh bien à chaque fois, le perdant, c'était lui. François premier, d'abord empereur du Saint-Empire romain germanique, puis empereur d'Autriche. Dix-huit ans d'humiliations accumulées, jusqu'à se voir contraint de donner sa propre fille, en mariage à Napoléon. Imaginez la masse de frustrations que ce pauvre homme a dû ruminer. Alors fatalement, les Lumières, les idées progressistes venues de France, la philosophie de Voltaire, François fait tout ce qu'il peut pour les bannir de son empire.

3 Univerzita Karlova, Prague

En 1804, Bolzano achève des études dans deux disciplines : les mathématiques, avec une thèse de géométrie, et aussi la théologie, car il se sent une vocation de prêtre. Cela tombe bien : il y a justement deux chaires disponibles à l'université Charles de Prague : une en mathématiques, l'autre en science de la religion. Ce n'était pas une bonne idée de nommer Bolzano sur la seconde : elle avait été créée spécialement pour combattre la propagation de la philosophie des Lumières parmi les étudiants, et dès sa conférence inaugurale, Bolzano proclame la « nécessité d'une foi qui avance sur des bases rationnelles. »

Univerzita Karlova, Prague

4 Bernard Bolzano (1781–1848)

Il y a pire : en tant que prêtre, il est aussi chargé de prononcer des discours édifiants les dimanches et jours fériés. Il refuse de suivre le manuel de religion écrit par l'aumonier de la cour, et tient des propos séditieux sur… la nécessité d'une société égalitaire, la séparation des pouvoirs religieux et politique, le droit des Tchèques à l'émancipation, l'éducation sexuelle de la jeunesse, etc. Tout le contraire de ce qu'on attendait de lui.

Le plus étonnant finalement est qu'il ait été maintenu à son poste aussi longtemps. Il ne sera révoqué qu'en 1819, avec interdiction de toute activité sur le territoire de l'empire, et interdiction de publier.

Bernard Bolzano (1781–1848)

5 Josef et Hanna Hoffman (Těchobuz)

Pendant 20 ans, il sera hébergé par un couple d'amis : Joseph et Hanna Hoffman, dans leur propriété au sud de Prague. Grâce à eux, il a pu se consacrer à l'écriture d'une œuvre immense, dont les mathématiques ne constituent qu'une petite partie, et qui ne sera publiée que plus d'un siècle après sa mort.

C'est pendant cette période qu'il écrit à un ami :

Josef et Hanna Hoffman (Těchobuz)

Bernard Bolzano (1781–1848)

6 Lettre à Přihonský (Těchobuz, 24 avril 1833)

« La nouvelle de la présence de Cauchy à Prague est très intéressante pour moi. C'est lui que j'estime le plus de tous les mathématiciens vivants et je me sens le plus étroitement lié à lui. À son esprit inventif, je suis reconnaissant de quelques démonstrations les plus importantes. Je vous prie de le saluer de ma part et de lui dire que je me rendrais tout de suite à Prague pour faire sa connaissance, si je pouvais espérer – d'après ce que vous m'avez dit de ses occupations – que je le rencontrerais fin septembre […]. »

Par une autre lettre, beaucoup plus tardive, on sait que plusieurs rencontres entre Bolzano et Cauchy ont eu lieu entre 1833 et 1835. Ni l'un ni l'autre n'ont rapporté quoi que ce soit de leurs discussions, et c'est bien dommage.

Lettre à Přihonský (Těchobuz, 24 avril 1833)

Bernard Bolzano (1781–1848)

La nouvelle de la présence de Cauchy à Prague est très intéressante pour moi. C'est lui que j'estime le plus de tous les mathématiciens vivants et je me sens le plus étroitement lié à lui. À son esprit inventif, je suis reconnaissant de quelques démonstrations les plus importantes. Je vous prie de le saluer de ma part et de lui dire que je me rendrais tout de suite à Prague pour faire sa connaissance, si je pouvais espérer – d'après ce que vous m'avez dit de ses occupations – que je le rencontrerais fin septembre […].

7 Les trois glorieuses (27–29 juillet 1830)

Paradoxalement, la présence de Cauchy à Prague était due, comme l'interdiction d'enseigner de Bolzano, à la politique réactionnaire du pouvoir autrichien, mais les motivations étaient en quelque sorte inverses. En juillet 1830, les trois glorieuses, célébrées par Delacroix, avaient renversé le roi Charles X. Cauchy avait refusé de prêter serment à son successeur Louis-Philippe, et s'était immédiatement exilé, comme son roi. Dans un premier temps, il avait été accueilli à bras ouverts à Turin par le roi de Piémont-Sardaigne Charles-Albert.

Pendant ce temps, l'empereur d'Autriche François premier, s'était fait un devoir de mettre à la disposition du roi en exil Charles X, le palais des rois de Bohème, à Prague. De là, Charles X avait fait appel à Cauchy pour enseigner les mathématiques à son petit-fils.

Les trois glorieuses (27–29 juillet 1830)

Delacroix, La liberté guidant le peuple (1830)

8 Assassinat du duc de Berry (13 février 1820)

C'est que le petit-fils en question n'était pas n'importe qui : l'enfant du miracle, rien de moins ! Son père, qui était l'héritier légitime du trône, avait été assassiné en 1820.

Assassinat du duc de Berry (13 février 1820)

Charles-Ferdinand d'Artois, duc de Berry (1778–1820)

9 Henri d'Artois, duc de Bordeaux (1820–1883)

Vous le voyez ici avec sa mère, qui l'avait mis au monde sept mois et demi après le décès de son père. Je ne vous raconte pas la suite de la carrière de cette dame, qui s'est montrée à la hauteur de bien d'autres exploits.

Henri d'Artois, duc de Bordeaux (1820–1883)

Marie Caroline de Bourbon-Siciles (1798–1870)

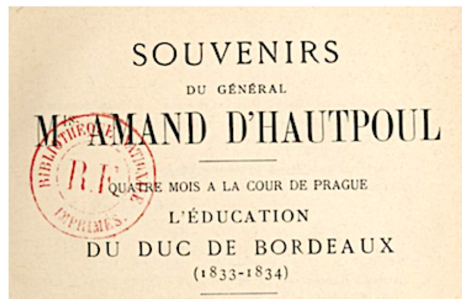
10 Henri d'Artois, duc de Bordeaux (1820–1883)

Henri d'Artois, duc de Bordeaux (1820–1883)

Quand Cauchy est appelé à Prague, le duc de Bordeaux est un gamin de treize ans, à qui l'on n'a guère donné comme éducation que la conscience de sa haute naissance et de l'importance de sa personne. Il est capricieux, arrogant, coléreux, bref, insupportable.

11 Quatre mois à la cour de Prague (1902)

Quatre mois à la cour de Prague (1902)
Général Marquis Amand d'Hautpoul (1780–1851)

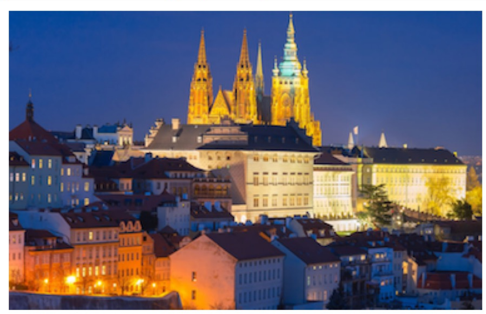

SOUVENIRS
DU GÉNÉRAL
Mis AMAND D'HAUTPOUL
QUATRE MOIS A LA COUR DE PRAGUE
L'ÉDUCATION
DU DUC DE BORDEAUX
(1833-1834)

Je voudrais tempérer l'impression que vont vous laisser les quelques souvenirs qui suivent. Je les ai tirés de ce livre, écrit par un des collègues de Cauchy. Lui n'est resté que quatre mois à la cour de Prague, et il en veut à Cauchy dont il pense qu'il est de ceux qui ont intrigué pour son renvoi.

On ne peut donc pas le considérer comme objectif, mais ce qu'il raconte a souvent le parfum de l'authentique. Oh après tout, pensez-en ce que vous voudrez. Le récit d'Hautpoul sera accompagné de quelques vues touristiques du château de Prague, où les faits se sont déroulés entre septembre 1833 et février 1834.

12 il ne possédait pas l'art d'enseigner

il ne possédait pas l'art d'enseigner
d'Hautpoul, Quatre mois à la cour de Prague (1833–1834)



« Parmi les personnages de mon intérieur, celui qui me gêna le plus dans mes principes d'éducation fut M. Cauchy. C'était un des savants distingués de l'époque, mais il ne possédait pas l'art d'enseigner, et j'avais déjà été en mesure d'en juger à l'époque où il était professeur à l'École polytechnique et où je m'étais trouvé membre du conseil de perfectionnement de cette école ; il rebutait souvent ses élèves par des démonstrations si savantes et si compliquées qu'ils ne pouvaient les comprendre ; et le célèbre Laplace, qui faisait aussi partie du conseil, nous dit un jour que lui-même avait de la peine à les suivre. »

13 il ne pouvait parvenir à les comprendre

il ne pouvait parvenir à les comprendre
d'Hautpoul, Quatre mois à la cour de Prague (1833–1834)

« ce qui inspirait du dégoût au prince pour les leçons de mathématiques, c'est que souvent il ne pouvait parvenir à les comprendre. Assistant un jour à la démonstration d'une des propositions les plus simples de la géométrie, je voyais le prince s'agiter, s'impatienter de ne pouvoir la saisir, et j'avoue que moi-même, j'avais de la peine à suivre le professeur. »

14 il était trop savant pour en profiter

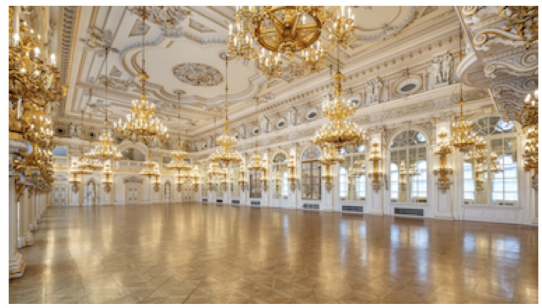
« Voulant éviter l'occasion d'un mouvement d'humeur que je voyais se préparer, j'interrompis M. Cauchy et, ayant l'air de causer avec lui sans m'occuper du prince, je lui dis que je me rappelais une autre démonstration que je croyais plus simple ; et m'approchant alors du tableau, je la lui donnai. Le prince s'était retiré ; mais en me voyant au tableau, il écouta, et, lorsque j'eus fini, il accourut vers nous : « Oh ! maintenant, je la comprends très bien, » me dit-il. Et, en effet, il la répéta. C'était une leçon indirecte que je donnais à M. Cauchy, mais il était trop savant pour en profiter. »

il était trop savant pour en profiter
d'Hautpoul, Quatre mois à la cour de Prague (1833–1834)

15 le prince tenant M. Cauchy par le collet

« Malgré les complaisances de M. Cauchy, ou plutôt à cause de ces complaisances, le jeune prince n'avait pas pour lui les égards qu'il lui devait comme professeur, et j'étais obligé de le défendre. Un jour, ayant entendu quelque bruit dans le cabinet d'étude, j'y entre et je vois le prince tenant M. Cauchy par le collet et le mettant à la porte ; et M. Cauchy se retirait en faisant des excuses et en demandant ce qu'il avait pu faire pour déplaire à Monseigneur. »

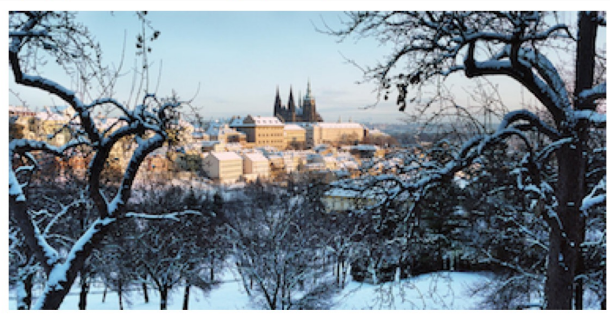
le prince tenant M. Cauchy par le collet
d'Hautpoul, Quatre mois à la cour de Prague (1833–1834)



16 une boule de neige au milieu de la figure

« Les combats de boules de neige furent longtemps une des récréations favorites du prince, car il ne craignait ni le froid, ni aucune intempérie de saison ; mais ce jeu donnait lieu quelquefois à de mauvais tours, surtout envers M. Cauchy. Un jour le jeune prince, en rentrant de la promenade, avait conservé une boule de neige qu'il vint lui appliquer au milieu de la figure. Ce qui me força à lui adresser des reproches que M. Cauchy cherchait toujours à atténuer. »

une boule de neige au milieu de la figure
d'Hautpoul, Quatre mois à la cour de Prague (1833–1834)



17 Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Il nous ferait presque de la peine. Écoutez-le, dans une lettre ouverte qu'il a publiée avant de se rendre à Prague.

« Ce n'est pas seulement aux royalistes, ni aux catholiques que je m'adresse ; ce n'est pas seulement à ceux qui ont refusé de servir un pouvoir nouveau, à ceux qui sont restés fidèles à la religion de leurs pères ; c'est encore à ceux-là même dont l'âme est agitée par des passions qu'ils ne croient pouvoir maîtriser ; à ceux qui, séduits par des théories mensongères, ne parlent que de république et se sont armés contre les rois ; Dieu et la vérité : telle sera ma devise. La vérité : tel doit être l'objet de nos désirs et de nos efforts ; la vérité est l'arche salutaire qui peut recueillir la société prête à disparaître dans l'abîme, la vérité seule peut encore sauver l'Europe et le monde des fureurs de l'anarchie. »

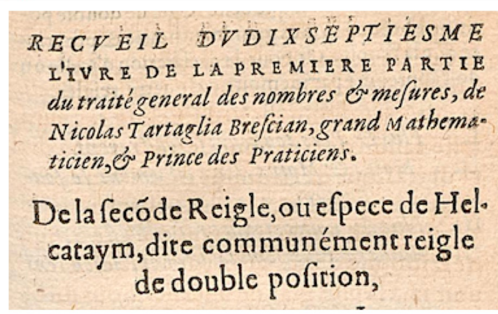
Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Il y a du Don Quichotte chez Cauchy, comme probablement chez Bolzano. Et même s'ils étaient de bords idéologiques opposés, l'amour intransigeant de la vérité leur était sans doute commun. C'est au nom de cet amour de la vérité qu'ils ont, chacun de leur côté, contribué à donner à l'analyse mathématique les bases que nous lui connaissons. Nous allons prendre l'exemple du théorème des valeurs intermédiaires, qui est particulièrement significatif du changement qu'ils ont introduit.

18 Traité général des nombres et mesures (1613)

Dans plusieurs histoires d'algèbre, je vous parle de fausse position. Et dans une de ces histoires, je m'étends plus longuement sur la double fausse position. J'avais pris pour exemple cette traduction française du « traité général des nombres et mesures, de Nicolas Tartaglia, Brescian, grand mathématicien et prince des praticiens ». Vous voyez le nom donné à la méthode depuis Fibonacci : espèce de Helcataym, ce qui traduit bien son origine arabe.

Traité général des nombres et mesures (1613)
Nicolo Tartaglia, traduction Guillaume Gosselin



RECVEIL DV DIXSEPTIESME LIVRE DE LA PREMIERE PARTIE du traité general des nombres & mesures, de Nicolas Tartaglia Brescian, grand Mathematicien, & Prince des Praticiens.

De la secōde Reigle, ou espece de Helcataym, dite communément reigle de double position,

J'aurais pu choisir n'importe quel traité d'algèbre, n'importe quelle arithmétique commerciale, du treizième au seizième siècle : la double fausse position y aurait occupé une place importante : celle d'une technique à la fois puissante et difficile à maîtriser.

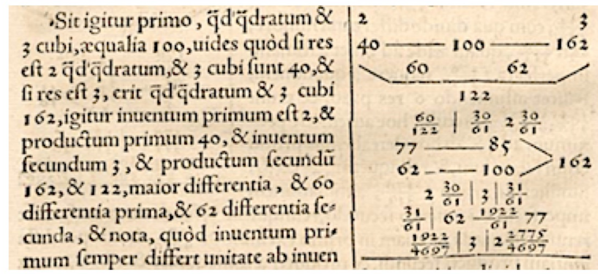
Je vous en rappelle le principe. Vous avez une équation à résoudre. Vous posez un premier nombre que vous savez faux, puis un second, également faux. La méthode consiste à donner comme résultat une moyenne des deux fausses positions, pondérée par les deux erreurs.

19 Caput XXX De regula Aurea

L'exemple suivant est extrait du livre majeur de Cardan, le grand rival de Tartaglia : Artis Magnae : les grands arts. C'est le livre où sont parues les solutions des équations du troisième et du quatrième degré. Le chapitre trente est consacré à une méthode de résolution numérique, que Cardan appelle la Règle d'Or.

Soit à résoudre l'équation un carré-carré et trois cubes égalent cent. Traduisez : $x^4 + 3x^3 = 100$. Essayez 2 dans le membre de gauche, vous trouvez 40, soit une erreur de 60 par défaut. Essayez 3, vous trouvez 162, soit une erreur de 62 par excès. Il est évident pour Cardan, comme d'ailleurs pour tous ses prédécesseurs, qu'il y a forcément une solution entre deux et trois. Le schéma de droite vous montre comment l'obtenir. Vous commencez par l'étape traditionnelle de fausse position : la moyenne de 2 et 3 pondérée par 62 et 60 donne 2 plus 31 sur 61. Vous reportez dans l'équation, et vous trouvez un peu moins de 87 : encore trop bas. Là, Cardan explique comment itérer le procédé, pour trouver une approximation de plus en plus précise de la solution.

Caput XXX De regula Aurea
Cardan, Artis Magnae (1545)


Sit igitur primo, q̄d'q̄dratum & 3 cubi, æqualia 100, uides quòd si res est 2 q̄d'q̄dratum, & 3 cubi sunt 40, & si res est 3, erit q̄d'q̄dratum & 3 cubi 162, igitur inuentum primum est 2, & productum primum 40, & inuentum secundum 3, & productum secundū 162, & 122, maior differentia, & 60 differentia prima, & 62 differentia secunda, & nota, quòd inuentum primum semper differt unitate ab inuen

Ni l'algorithme d'approximation, ni le principe des valeurs intermédiaires, ne sont véritablement des nouveautés du temps de Cardan. Le même genre de raisonnement était familier aux mathématiciens arabes, plusieurs siècles auparavant. Mais personne ne songeait à justifier ce qui était perçu comme intuitivement évident. Regardez comment Euler énonce cette évidence dans son Introduction à l'Analyse des Infiniment petits, en 1748.

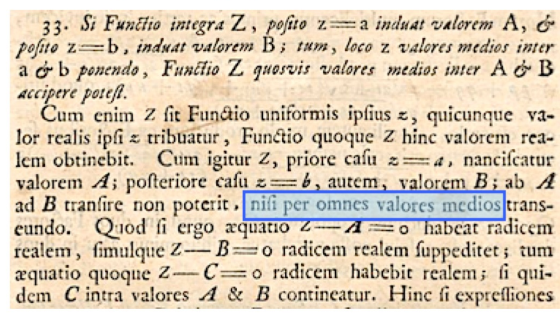
20 nisi per omnes valores medios transeundo

« Si une fonction entière grand Z, en faisant $z = a$, prend la valeur A, et en faisant $z = b$, prend la valeur B ; en mettant à la place de z des valeurs moyennes entre a et b, la fonction Z peut prendre toutes les valeurs moyennes qu'on voudra, entre grand A et grand B. »

Ceci est l'énoncé, en italiques. Pour Euler, une fonction entière est un polynôme, éventuellement infini. La justification au-dessous n'en est pas vraiment une : ce n'est qu'une paraphrase. Euler y dit que « la fonction ne peut aller de grand A à B si ce n'est en passant par toutes les valeurs intermédiaires ».

Le premier à se poser le problème d'une démonstration est Lagrange.

nisi per omnes valores medios transeundo
Euler, Introductio in Analysin Infinitorum (1748)


33. *Si Functio integra Z, posito z = a induat valorem A, & posito z = b, induat valorem B; tum, loco z valores medios inter a & b ponendo, Functio Z quosvis valores medios inter A & B accipere potest.*

Cum enim Z sit Functio uniformis ipsius z, quicunque valor realis ipsi z tribuatur, Functio quoque Z hinc valorem realem obtinebit. Cum igitur Z, priore casu z = a, nanciscatur valorem A; posteriore casu z = b, autem, valorem B; ab A ad B transire non poterit, nisi per omnes valores medios transeundo. Quod si ergo æquatio Z − A = 0 habeat radicem realem, simulque Z − B = 0 radicem realem suppeditet; tum æquatio quoque Z − C = 0 radicem habebit realem; si quidem C intra valores A & B contineatur. Hinc si expressiones

21 Ce théorème est connu depuis longtemps

Voici le tout premier théorème de son mémoire de 1769 sur la résolution numérique des équations.

« Si l'on a une équation quelconque, et que l'on trouve deux nombres tels, qu'étant substitués successivement à la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent deux résultats de signe contraire, l'équation aura nécessairement au moins une racine réelle dont la valeur sera entre ces deux nombres.

Ce théorème est connu depuis longtemps, et l'on a coutume de le démontrer par la théorie des lignes courbes (c'est-à-dire en disant qu'une courbe qui va d'un côté à l'autre d'une droite doit couper la droite). Mais on peut aussi le démontrer directement par la théorie des équations. » Vous voyez l'idée : en décomposant le polynôme en facteurs de degré 1, il faudra bien que un des facteurs au moins, soit de signe différent sur les deux valeurs considérés. Donc les deux valeurs sont de chaque côté d'une des racines. Euh… oui, et qu'est-ce qu'on fait s'il y a des racines complexes ? Et comment démontre-t-on que la décomposition en facteurs existe ?

Lagrange doit bien se rendre compte que son argument est insuffisant, parce que dans sa Leçon à l'École normale du 6 germinal an III, il se fait plus précis.

Ce théorème est connu depuis longtemps

Lagrange, Sur la résolution numérique des équations (1769)

1. *Théoreme I.* Si l'on a une équation quelconque, & que l'on trouve deux nombres tels, qu'étant ſubſtitués ſucceſſivement à la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent deux réſultats de ſigne contraire, l'équation aura néceſſairement au moins une racine réelle dont la valeur ſera entre ces deux nombres.

Ce théoreme eſt connu depuis longtems, & l'on a coûtume de le démontrer par la théorie des lignes courbes; mais on peut auſſi le démontrer directement par la théorie des équations, en cette ſorte. Soit x l'inconnue de l'équation, & α, β, γ etc. ſes racines, l'équation ſe réduira, comme l'on fait, à cette forme

$$(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\cdots = 0.$$

22 la courbe aura un cours continu et simple

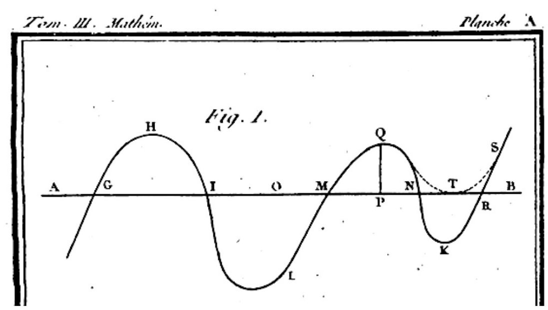
Il reprend l'argument de la courbe représentative, qu'il accompagne de la figure que vous voyez. Il dit :

« Comme rien ne limite les valeurs de x, elles pourront être supposées infiniment grandes, tant positives que négatives ; d'où il s'ensuit que la courbe aura un cours continu et simple, et qu'elle pourra s'étendre à l'infini de côté et d'autre de l'origine O ; Il s'ensuit aussi de là que la courbe ne pourra passer d'un côté de l'axe à l'autre sans le couper. »

À ce stade, on peut se demander ce qu'est exactement un « cours continu et simple ». Mais Lagrange a un autre argument en réserve, dans lequel il précise sa notion intuitive de continuité.

la courbe aura un cours continu et simple

Lagrange, Leçons à l'École normale (26 mars 1795)



23 par degrés insensibles

Comme il ne traite que d'équations polynômiales, il transforme $f(x) = 0$ en $P(x) = Q(x)$ où P et Q sont deux polynômes à coefficients positifs, donc fonctions croissantes de x.

« Il est clair, dit-il, que ces quantités augmentent continuellement à mesure que x augmente, et qu'en faisant augmenter x par tous les degrés insensibles, elles augmenteront aussi par degrés insensibles ; mais de manière que P augmentera plus que Q, puisque de plus petite qu'elle était, elle devient la plus grande. Donc il y aura nécessairement un terme entre les deux valeurs A et B, où P égalera Q. »

Lagrange a bien perçu l'importance de la continuité, qu'il traduit par ses « degrés insensibles ». Mais comme il n'est pas sûr d'avoir été compris, il ajoute un argument d'une autre nature :

par degrés insensibles

Lagrange, Leçons à l'École normale (26 mars 1795)

tives de x, il est clair que ces quantités augmentent continuellement à mesure que x augmente, et qu'en faisant augmenter x par tous les dégrés insensibles, depuis A jusqu'à B, elles augmenteront aussi par degés insensibles; mais de manière que P augmentera plus que Q, puisque de plus petite qu'elle était, elle devient la plus grande. Donc il y aura nécessairement un terme entre les deux valeurs A et B, ou P égalera Q;

24 doivent nécessairement se rencontrer

« comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même droite, et qui partant à la fois de deux points différents, arrivent en même temps à deux autres points, mais de manière que celui qui était d'abord en arrière, se trouve ensuite plus avancé que l'autre, doivent nécessairement se rencontrer dans leur chemin. »

doivent nécessairement se rencontrer
Lagrange, Leçons à l'École normale (26 mars 1795)

comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même droite, et qui partant à-la-fois de deux points différens, arrivent en même-tems à deux autres points, mais de manière que celui qui était d'abord en arrière, se trouve ensuite plus avancé que l'autre, doivent nécessairement se rencontrer dans leur chemin. Cette valeur de x, qui rendra P égal à Q, sera donc une des racines de l'équation, et tombera nécessairement entre les deux valeurs A et B.

Vous partez derrière, vous arrivez devant, donc vous avez dû doubler. Euh… à moins de sauter par-dessus : Lagrange ne parle plus de continuité. Pourtant, son argument des deux mobiles devait convaincre, parce qu'il l'utilise à de nombreuses reprises. Son « Traité de la résolution numérique des équations de tous les degrés » connaîtra plusieurs éditions successives, qui toutes reprennent mot pour mot, les deux mobiles qu'on suppose parcourir une même droite. Et il n'y a pas que ce traité. Les deux manuels d'algèbre à succès du début du dix-neuvième siècle sont ceux de Clairaut et Lacroix. Plusieurs éditions de chacun des deux, reprennent l'argument des deux mobiles de Lagrange.

Pourtant, on a la preuve que cet argument ne devait pas satisfaire tout le monde à l'époque.

25 Mémoire sur les principes fondamentaux (1813)

Cette preuve figure dans ce « Mémoire sur les principes fondamentaux de la théorie générale des équations », par M. Daniel Encontre, professeur doyen de la faculté des sciences de Montpellier.

Mémoire sur les principes fondamentaux (1813)
Daniel Encontre (1762–1818)

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Mémoire sur les principes fondamentaux de la théorie générale des équations ;

Par M. D. Encontre, professeur doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier.

1. La théorie générale des équations repose, toute entière, sur deux théorèmes dont la démonstration me paraît n'avoir pas encore été donnée d'une manière qui puisse être mise à la portée des commençans. Le premier de ces théorèmes est que, dans une équation à une seule inconnue x, si deux nombres a, b, successivement substitués à x, donnent des résultats de signes contraires, il y a nécessairement une racine réelle, comprise entre a et b. Le second est qu'une équation quelconque à une seule inconnue x, étant

« La théorie générale des équations repose, toute entière, sur deux théorèmes dont la démonstration me paraît n'avoir pas encore été donnée d'une manière qui puisse être mise à la portée des commençants. Le premier de ces théorèmes est que, dans une équation à une seule inconnue x, si deux nombres a et b, successivement substitués à x, donnent des résultats de signes contraires, il y a nécessairement une racine réelle, comprise entre a et b. » Le second théorème est le théorème fondamental de l'algèbre.

Sur le théorème des valeurs intermédiaires, l'auteur prend toutes les précautions possibles pour ne pas donner l'impression qu'il critique l'immense Lagrange. Il commence par citer mot pour mot ses démonstrations, puis il ajoute :

26 ils se font mille difficultés

« Cette démonstration me paraît très rigoureuse, et celle qu'on trouvera ci-après n'en est qu'une sorte de commentaire ; mais l'expérience m'a prouvé que les jeunes gens ont beaucoup de peine à la saisir telle qu'elle vient d'être présentée ; qu'ils se font mille difficultés sur la comparaison de deux fonctions à deux mobiles, et qu'ils se plaignent surtout, avec quelque apparence de raison, de ce que la considération des quantités infiniment petites, qui leur est interdite dans une partie des mathématiques, est permise et devient même, en quelque sorte, nécessaire dans celle-ci. »

Voyez-vous, je suis persuadé que l'enseignement de masse des mathématiques, n'est pas étranger au mouvement de rigueur du début du dix-neuvième siècle. Cela ne peut pas être la seule cause : ni Abel ni Bolzano n'ont jamais enseigné. Mais tout de même, ce qu'exprime l'auteur de cet article, c'est qu'il a été amené à préciser sa démonstration, parce qu'il a été confronté aux questions de ses élèves.

ils se font mille difficultés

Encontre, Mémoire sur les principes fondamentaux (1813)

4. Cette démonstration me parait très-rigoureuse, et celle qu'on trouvera ci-après n'en est qu'une sorte de commentaire ; mais l'expérience m'a prouvé que les jeunes-gens ont beaucoup de peine à la saisir telle qu'elle vient d'être présentée ; qu'ils se font mille difficultés sur la comparaison de deux fonctions à deux mobiles (*), et qu'ils se plaignent sur-tout, avec quelque apparence de raison, de ce que la considération des quantités infiniment petites, qui leur est interdite, dans une partie des mathématiques, quoiqu'elle pût leur épargner bien des calculs, est permise et devient même, en quelque sorte, nécessaire dans celle-ci.

27 Daniel Encontre (1762–1818)

L'auteur, le voici. Au moment de l'article, il enseigne les mathématiques à Montpellier, à la fois à la faculté des sciences et au lycée, dans ce que nous appellerions une classe préparatoire. Il a aussi enseigné les lettres classiques, le latin, le grec, et surtout la théologie. Sans les Annales de Gergonne, un journal destiné aux enseignants, édité d'abord à Nîmes, ensuite à Montpellier, Encontre n'aurait sans doute jamais publié sa démonstration.

Pourtant, c'est à ma connaissance, la première vraie démonstration du théorème des valeurs intermédiaires pour des équations polynomiales.

Daniel Encontre (1762–1818)

28 qui peut être prise aussi petite qu'on voudra

Le lemme clé est le suivant : il revient à démontrer la continuité d'une fonction polynôme. Évidemment, Encontre n'a pas dégagé la notion de continuité sous forme générale, ce que feront Bolzano et Cauchy après lui. Mais tout de même, l'énoncé et la justification sont parfaitement corrects.

Si le polynôme vaut k au point a, il montre qu'il existe β tel que la valeur en $a+\beta$ soit comprise entre k et $k+h$, « h étant une quantité positive donnée, qui peut être prise aussi petite qu'on voudra ».

qui peut être prise aussi petite qu'on voudra

Encontre, Mémoire sur les principes fondamentaux (1813)

16. *PROBLÈME.* On a un polynôme $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+..+T$, dont tous les termes sont positifs ; et l'on sait qu'un nombre a, substitué à x, dans ce polynôme a donné un résultat k. On demande un nombre β tel que, si l'on substitue $a+\beta$ pour x, dans ce même polynôme, le nouveau résultat soit plus grand que k et moindre que $k+h$, h étant une quantité positive donnée, et qui peut être prise aussi petite qu'on voudra ?

29 On peut donc trouver une racine réelle et positive

Malheureusement, un détail manque encore : Encontre a bien démontré que pour tout h il existe une valeur de x qui rend la différence $P - Q$ plus petite que h, et il conclut : « On peut *donc* trouver une racine réelle et positive de l'équation proposée, et cette racine est entre a et b. »

La justification du « donc » encadré en bleu manque, mais il est difficile de lui en tenir rigueur : Cauchy et même Bolzano admettront aussi après lui comme évidente cette propriété des réels : la complétude.

On peut donc trouver une racine réelle et positive

Encontre, Mémoire sur les principes fondamentaux (1813)

réciproquement. Mais nous venons de prouver que, dans cette hypothèse, on peut toujours trouver, entre a et b, un nombre qui rende la différence, entre P et Q, moindre que toute quantité donnée ; on peut $\boxed{\text{donc}}$ toujours trouver une racine réelle et positive de l'équation proposée, et cette racine est entre a et b.

30 Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes (1817)

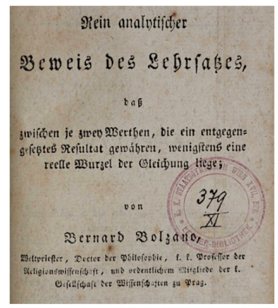
L'article de Bolzano est paru quatre ans après celui d'Encontre.

« Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés, se trouve au moins une racine réelle de l'équation. » En 1817, Bolzano peut encore se présenter comme « Prêtre séculier, Docteur de Philosophie, Professeur royal et impérial de science de la religion et membre titulaire de la société royale des sciences à Prague. »

Il commence par une critique radicale des démonstrations précédentes.

Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes (1817)

Bernard Bolzano (1781–1848)



Rein analytischer

Beweis des Lehrsatzes,

daß

zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege;

von

Bernard Bolzano,

Weltpriester, Doctor der Philosophie, k. k. Professor der Religionswissenschaft, und ordentlichem Mitgliede der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.

31 une faute intolérable contre la *bonne méthode*

« Dans la méthode de démonstration *la plus courante*, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : *à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives* (ou inversement), *doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées.* Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la *justesse* ni contre l'*évidence* de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la *bonne méthode* [...]. »

une faute intolérable contre la *bonne méthode*

Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes (1817)

Dans la méthode de démonstration *la plus courante*, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : *à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives* (ou inversement), *doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées.* Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la *justesse* ni contre l'*évidence* de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la *bonne méthode* [...].

32 Les concepts du *temps* et du *mouvement*

« Il faut rejeter de même la démonstration que certains ont établie à partir du concept de *continuité* d'une fonction en y faisant intervenir les concepts du *temps* et du *mouvement*. [...] Les concepts de *temps* et de *mouvement* (et celui-ci encore plus) sont tout aussi étrangers aux mathématiques générales que le concept d'*espace*, cela ne peut être mis en doute par personne. »

Les concepts du *temps* et du *mouvement*

Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes (1817)

Il faut rejeter de même la démonstration que certains ont établie à partir du concept de *continuité* d'une fonction en y faisant intervenir les concepts du *temps* et du *mouvement*. [...] Les concepts de *temps* et de *mouvement* (et celui-ci encore plus) sont tout aussi étrangers aux mathématiques générales que le concept d'*espace*, cela ne peut être mis en doute par personne.

33 des exemples en place des *démonstrations*

« Comme on peut le voir en même temps, nous sommes loin de tenir les *exemples* et les *applications* pour des choses qui nuiraient à la perfection d'un exposé scientifique. Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des *démonstrations* ; on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles. »

Logiquement, un des premiers pas de Bolzano consiste à donner une définition rigoureuse de la continuité.

des exemples en place des *démonstrations*
Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes (1817)

Comme on peut le voir en même temps, nous sommes loin de tenir les *exemples* et les *applications* pour des choses qui nuiraient à la perfection d'un exposé scientifique. Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des *démonstrations* ; on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles.

34 dans une explication correcte

« Dans une *explication correcte*, on entend par l'expression : *une fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour toutes valeurs de x situées à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines bornes*, rien d'autre que ceci : si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x+\omega)-f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit que l'on voudra. »

Bolzano a également dégagé la notion de suite de Cauchy.

dans une explication correcte
Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes (1817)

Dans une *explication correcte*, on entend par l'expression : *une fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour toutes valeurs de x situées à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines bornes*, rien d'autre que ceci : si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x+\omega)-f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit que l'on voudra.

35 une certaine *grandeur constante*, et *une seule*

« *Théorème* – Si dans une série de grandeurs :

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots, F_n(x), \ldots, F_{n+r}(x)$$

la différence entre son n^{e} terme $F_n(x)$ et tout terme ultérieur $F_{n+r}(x)$ aussi éloigné soit-il du n^{e}, reste plus petite que toute grandeur donnée, si l'on a pris n suffisamment grand : alors il existe toujours une certaine *grandeur constante*, et *une seule*, dont s'approchent toujours d'avantage les termes de cette série et dont ils peuvent s'approcher d'aussi près que l'on voudra, lorsqu'on prolonge la série suffisamment loin. »

Dans cet énoncé, Bolzano affirme qu'une suite de Cauchy possède une limite unique, mais il n'en donne pas de démonstration convainquante. C'est encore trop tôt. Mais puisqu'il est question de Cauchy : a-t-il démontré lui aussi le théorème des valeurs intermédiaires ?

une certaine *grandeur constante*, et *une seule*
Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes (1817)

Théorème – Si dans une série de grandeurs :

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots, F_n(x), \ldots, F_{n+r}(x)$$

la différence entre son n^{e} terme $F_n(x)$ et tout terme ultérieur $F_{n+r}(x)$ aussi éloigné soit-il du n^{e}, reste plus petite que toute grandeur donnée, si l'on a pris n suffisamment grand : alors il existe toujours une certaine *grandeur constante*, et *une seule*, dont s'approchent toujours d'avantage les termes de cette série et dont ils peuvent s'approcher d'aussi près que l'on voudra, lorsqu'on prolonge la série suffisamment loin.

36 Sur la Résolution numérique des Équations

Oui, et il l'a fait de manière particulièrement élégante. Cette démonstration figure vers la fin de son Cours d'analyse de l'École polytechnique, dans la note trois, « Sur la résolution numérique des équations. »

Sur la Résolution numérique des Équations

Cauchy, Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique (1821)

NOTE III.

Sur la Résolution numérique des Équations.

RÉSOUDRE *numériquement* une ou plusieurs équations, c'est trouver les valeurs en nombres des inconnues qu'elles renferment ; ce qui exige évidemment que les constantes comprises dans les équations dont il s'agit soient elles-mêmes réduites en nombres. Nous nous occuperons seulement ici des équations qui renferment une inconnue, et nous commencerons par établir à leur égard les théorèmes suivans.

37 l'une est positive, l'autre négative

Cauchy part de deux valeurs, x_0 et grand X, à distance h, dont les images sont de signes opposés. Il subdivise l'intervalle $[x_0, X]$ en petit m sous-intervalles. Il observe alors que parmi ces sous-intervalles, l'un d'eux au moins a la même propriété que l'intervalle de départ, c'est-à-dire que les images de ses bornes sont de signes opposés. Il itère ensuite la construction : il obtient ainsi deux suites, une croissante, l'autre décroissante, dont les distances terme à terme tendent vers zéro.

Il en conclut que ces deux suites ont une limite commune (modulo la complétude des réels qui n'est toujours pas explicitée). Que l'image de cette limite commune soit nulle découle alors de la continuité de la fonction.

l'une est positive, l'autre négative

Cauchy, Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique (1821)

DÉMONSTRATION. Soit x_0 la plus petite des deux quantités x_0, X. Faisons

$$X - x_0 = h\,;$$

et désignons par m un nombre entier quelconque supérieur à l'unité. Comme des deux quantités $f(x_0)$, $f(X)$, l'une est positive, l'autre négative, si l'on forme la suite

$$f(x_0),\ f\left(x_0+\frac{h}{m}\right),\ f\left(x_0+2\frac{h}{m}\right), \ldots f\left(X-\frac{h}{m}\right), f(X),$$

38 références

Il me semble qu'une démonstration aussi lumineuse, même le duc de Bordeaux aurait pu la comprendre. Euh… à condition que quelqu'un d'autre que Cauchy la lui explique peut-être ?

En même temps, on se demande bien quelle utilité le duc de Bordeaux aurait pu avoir du théorème des valeurs intermédiaires.

Mais peu importe. Je vais vous dire, je suis soulagé : j'ai réussi à terminer une histoire sur le duc de Bordeaux, sans citer une seule fois Pierre Desproges. Je suis fier de moi !

références

- B. Belhoste (1985) *Cauchy, un mathématicien légitimiste au XIX^e siècle*, Paris : Belin
- H. Benis-Sinaceur (1973) Cauchy et Bolzano, *Revue d'histoire des sciences*, 26(2), 97–112
- M. Guillemot (1990) Bolzano et la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, *in E. Barbin ed. La démonstration mathématique dans l'histoire*, Villeurbanne : IREM de Lyon, 99–114
- V. Jarník ed. (1981) *Bolzano and the foundations of mathematical analysis*, Praha : Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists
- K. Rychlík (1962) Sur les contacts personnels de Cauchy et de Bolzano, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 15(2), 163–164
- J. Sebestik (1964) Bernard Bolzano et son mémoire sur le théorème fondamental de l'analyse, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 17(2), 129–164