0 Du vide dans les nombres

Quoi de plus simple en fait de nombre que celui qui pour nous est le premier de tous : zéro. Il a bien une histoire ce zéro qui nous paraît si élémentaire, non ? Oui, mais elle est extrêmement longue et compliquée. On ne sait pas tout, et je ne vais pas vous raconter tout ce qu'on sait.

Pourquoi l'histoire du zéro est-elle si compliquée ? Après tout, on a toujours utilisé des abaques. Qu'est-ce qui est si difficile dans le fait de noter par un signe le fait qu'une colonne dans un abaque soit vide ? Eh bien justement, c'est qu'il n'y a pas que cela.

histoires d'arithmétique

Du vide dans les nombres

invention du zéro

hist-math.fr

Bernard Ycart

1 quel zéro ?

J'ai marqué sur ce transparent six fonctions du zéro. Les dates sont très approximatives.

La notion de zéro la plus élémentaire est celle qui consiste à noter dans une numération de position ou une table numérique, le fait qu'une place reste vide. Alors que les Mésopotamiens ont développé une numération de position autour de 3000 avant Jésus-Christ, l'idée de noter par un symbole les places vides n'est arrivée que bien plus tard. Les Grecs l'ont probablement copiée des Babyloniens, encore plus tard.

Mais ni les uns ni les autres n'ont jamais utilisé le zéro multiplicateur en fin de nombre. Seuls les Mayas et les Indiens l'ont fait. Ce sont aussi eux qui ont osé parler d'ordre avant le premier : le zéro-ième en quelque sorte.

Une des difficultés consiste à concevoir l'existence du rien. De longues discussions philosophiques ont porté là-dessus chez les Grecs, mais même ceux qui ont conclu à l'existence du rien ne l'ont pas pour autant conçu comme un nombre.

Enfin l'arithmétique du nombre zéro est d'origine indienne. Que le résultat d'une opération mathématique soit nul, comme trois moins trois par exemple, est longtemps resté inconcevable. Il ne restait plus, une fois zéro perçu comme nombre, à comprendre comment agissaient les opérations usuelles sur ce nombre.

Nous allons parcourir ces différentes étapes, en commençant par la Mésopotamie.

quel zéro ?
différents rôles

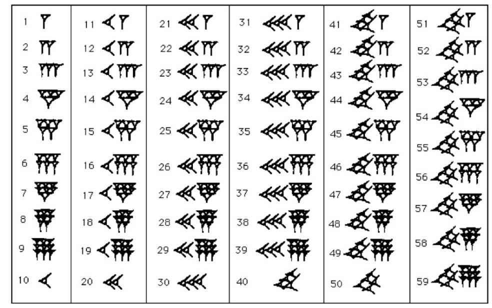
	Mésop.	Grecs	Mayas	Indiens
place vide	−200	100	−300	400
multiplicateur de base			−300	400
ordinal			−300	400
concept du vide	?	−500	?	−500
nombre nul				400
nombre algébrique				600

2 numération sexagésimale (ca. 3000 av. J.-C.)

La numération mésopotamienne est en base soixante. Un clou vertical est une unité. Un chevron ouvert à droite, une dizaine. Jusqu'à 60, l'écriture des chiffres est cumulative et décimale, comme vous le voyez : autant de chevrons que de dizaines et autant de clous que d'unités.

Mais le nombre 60 est noté à nouveau par un clou, de même que le nombre 1/60 et le nombre 60^2. D'où le nom de numération sexagésimale, pour la base 60.

numération sexagésimale (ca. 3000 av. J.-C.)



3 notation flottante

Pour manipuler les nombres en base 60, il valait mieux avoir une idée claire de l'ordre de grandeur de ce qu'on était en train de compter. Les ambigüités sont nombreuses : deux clous verticaux l'un à côté de l'autre peuvent désigner 2, ou 120, ou 2/60. Mais aussi 61, voire 3660 ou 3601.

Pour nous qui sommes habitués à la rigueur de la numération indienne, comprendre les opérations mésopotamiennes demande une certaine souplesse intellectuelle. Par exemple il faut s'habituer à lire que 40 et 20 font 1, ou bien que 20 fois 9 (180) égale 3, ou bien que l'inverse de 20 est 3, ou encore que 30 au carré vaut 15 (15 fois 60 ce qui est implicite).

Cela peut nous paraître curieux, mais les Mésopotamiens étaient tellement peu gênés par la notation flottante, qu'il ne leur est jamais venu à l'idée de distinguer 60 de 1 et de 3600.

notation flottante
numération sexagésimale

- $40 + 20 = 1$
- $20 \times 9 = 3$
- $1/20 = 3$
- $30^2 = 15$

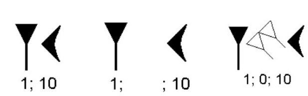
4 le « double zéro » de position

Par contre, ils ont fini par lever une autre source d'ambigüité, dans les places intermédiaires.

Regardez l'écriture de gauche. Elle se lit soixante dix. Il faut bien arriver à la distinguer de 3610, qui est sa voisine. Pour cela, on laissait un espace un peu plus grand entre le clou vertical qui représente 3600 et le 10. L'idée de combler cet espace par un signe n'est arrivée que vers le deuxième siècle avant Jésus-Christ. Ce signe était composé de deux petits clous obliques.

Les Mésopotamiens faisaient des erreurs de calcul, comme nous. La différence est que leurs erreurs de calcul ont été conservées pendant des siècles, grâce aux tablettes d'argile. Les spécialistes ont analysé les erreurs que l'on trouve sur les tablettes, et ont cherché à savoir lesquelles parmi ces erreurs pouvaient être dues à une confusion sur la puissance de 60, donc la place d'un chiffre. La réponse est : très peu. Les Mésopotamiens faisaient peu d'erreurs de confusion de place, et n'éprouvaient donc pas le besoin d'une notation spéciale pour les places vides. Elle n'apparaît que dans des tablettes qui comportent de très grands nombres, de l'ordre de 60 puissance cinq au moins.

le « double zéro » de position
époque Séleucide (331–140 av. J.-C.)



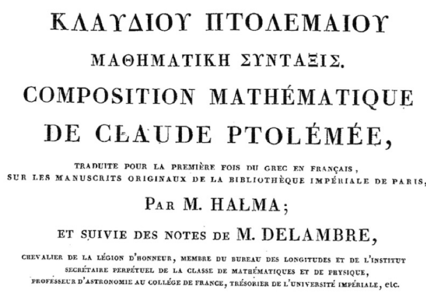
5 Composition Mathématique, Traduction Halma (1813)

Les Grecs n'avaient pas de numération de position. Ils utilisaient des lettres différentes pour 3, pour 30, et pour 300. Ils n'avaient donc aucun besoin du zéro de position.

Il apparaît pourtant, pour noter des places vides dans les tables astronomiques. L'exemple le plus célèbre est l'Almageste, de Ptolémée. En voici la traduction française classique, qui date de 1813.

Composition Mathématique, Traduction Halma (1813)

Claude Ptolémée (ca. 84–165)



ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΤΑΞΙΣ.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE

DE CLAUDE PTOLÉMÉE,

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS, SUR LES MANUSCRITS ORIGINAUX DE LA BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE DE PARIS,

PAR M. HALMA;

ET SUIVIE DES NOTES DE M. DELAMBRE,

CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, MEMBRE DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'INSTITUT SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE, PROFESSEUR D'ASTRONOMIE AU COLLÉGE DE FRANCE, TRÉSORIER DE L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE, etc.

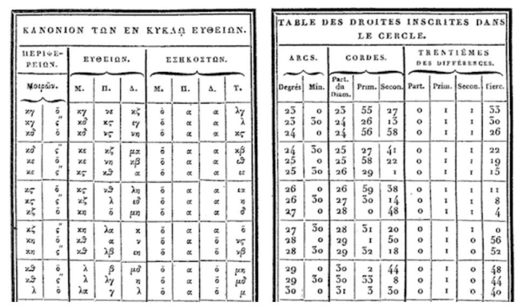
6 Table de cordes

Ceci est la table de cordes de Ptolémée, par demi-degré. L'édition de 1813 donne la traduction française en regard. Les quatre dernières colonnes contiennent des différences tabulaires. La première de ces quatre colonnes est vide. Dans la partie grecque, les zéros sont notés par la lettre omicron, surmontée d'une barre.

La barre sert à distinguer le omicron qui note zéro, du omicron qui se trouve aussi noter soixante-dix en grec. Cette notation rappelle aussi la forme manuscrite.

Table de cordes

Ptolémée, Composition Mathématique, traduction Halma (1813)



ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ.			
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
κγ	ō	κγ	νε	κζ	ō	α	α	λγ
κγ	ς″	κδ	κς	ιγ	ō	α	α	λ
κδ	ō	κδ	νς	νη	ō	α	α	κς
κδ	ς″	κε	κζ	μα	ō	α	α	κβ
κε	ō	κε	νη	κβ	ō	α	α	ιθ
κε	ς″	κς	κθ	α	ō	α	α	ιε
κς	ō	κς	νθ	λη	ō	α	α	ια
κς	ς″	κζ	λ	ιδ	ō	α	α	η
κζ	ō	κη	ō	μη	ō	α	α	δ
κζ	ς″	κη	λα	κ	ō	α	α	ō
κη	ō	κθ	α	ν	ō	α	ō	νς
κη	ς″	κθ	λβ	ιη	ō	α	ō	νβ
κθ	ō	λ	β	μδ	ō	α	ō	μη
κθ	ς″	λ	λγ	η	ō	α	ō	μδ
λ	ō	λα	γ	λ	ō	α	ō	μ

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés	Min.	Part. du Diam.	Prim.	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
23	0	23	55	27	0	1	1	33
23	30	24	26	13	0	1	1	30
24	0	24	56	58	0	1	1	26
24	30	25	27	41	0	1	1	22
25	0	25	58	22	0	1	1	19
25	30	26	29	1	0	1	1	15
26	0	26	59	38	0	1	1	11
26	30	27	30	14	0	1	1	8
27	0	28	0	48	0	1	1	4
27	30	28	31	20	0	1	1	0
28	0	29	1	50	0	1	0	56
28	30	29	32	18	0	1	0	52
29	0	30	2	44	0	1	0	48
29	30	30	33	8	0	1	0	44
30	0	31	3	30	0	1	0	40

7 zéro grec (II^{e} siècle)

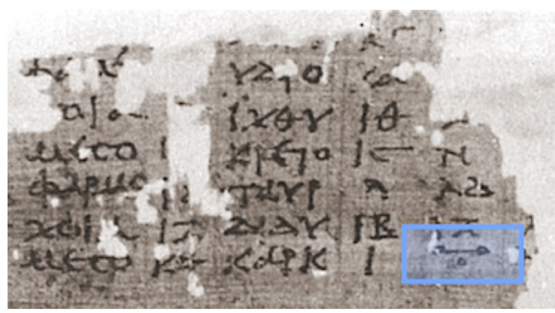
À l'origine, le zéro était noté par une barre terminée par deux petits ronds, surmontant un autre petit rond : c'est ce que vous voyez sur ce manuscrit, en bas à droite.

Mais attendez, si Ptolémée avait un signe pour une différence nulle, c'est bien qu'il concevait zéro comme un nombre, résultat de l'opération de différence entre deux nombres identiques ? Eh bien non pas forcément. On peut reconnaître que deux nombres sont égaux, et noter cela par un signe spécial, sans pour autant calculer la différence entre les deux.

Vous trouvez que c'est du pinaillage stérile ? L'existence du rien et du vide a pourtant été un enjeu majeur de la philosophie grecque.

zéro grec (II^{e} siècle)

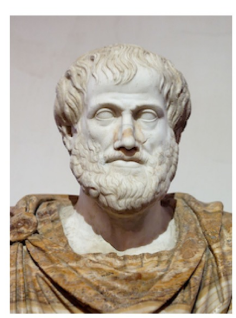
Papyrus de Lund, Inv. 35



8 Aristote (382–362 av. J.-C.)

D'un côté Aristote. Il s'étend longuement sur le sujet, discute les positions des uns et des autres, pour finalement conclure que le vide n'existe pas : « la nature a horreur du vide », vous le savez bien.

Aristote (382–362 av. J.-C.)



9 Pythagore (ca. 569–475 av. J.-C.)

Pythagore (ca. 569–475 av. J.-C.)

De l'autre Pythagore. On n'en a aucun écrit : même Aristote n'en parlait que par ouï-dire. Ecoutons donc Aristote : il consacre tout un chapitre de sa Physique à l'existence du vide.

10 le vide se trouve primitivement dans les nombres

« Les Pythagoriciens aussi soutenaient l'existence du vide ; et selon eux, c'est par l'action du souffle infini, que le vide entre dans le ciel qui a une sorte de respiration ; dans leurs théories, le vide est ce qui limite les natures, comme si le vide était une sorte de séparation des corps qui se suivent, et comme s'il était leur délimitation. À en croire les Pythagoriciens, le vide se trouve primitivement dans les nombres ; car c'est le vide qui détermine leur nature propre et abstraite. »

Mouais, un peu embrouillé tout ça. Bon un peu de respect, c'est Aristote qui parle. Pourquoi le vide ne peut-il pas être un nombre selon lui ?

le vide se trouve primitivement dans les nombres
Aristote, Physique, Livre IV, XI.9 (ca. 320 av. J.-C.)

Les Pythagoriciens aussi soutenaient l'existence du vide ; et selon eux, c'est par l'action du souffle infini, que le vide entre dans le ciel qui a une sorte de respiration ; dans leurs théories, le vide est ce qui limite les natures, comme si le vide était une sorte de séparation des corps qui se suivent, et comme s'il était leur délimitation. À en croire les Pythagoriciens, le vide se trouve primitivement dans les nombres ; car c'est le vide qui détermine leur nature propre et abstraite.

11 le rien n'a point de proportion possible

« Il n'y a pas de proportion qui puisse servir à comparer le vide avec le corps, et à savoir de combien le corps le surpasse, de même que le rien n'a point de proportion possible avec le nombre. En effet, si quatre surpasse trois de un ; s'il surpasse deux davantage,[. . .] il n'y a plus de proportion dans laquelle on puisse dire qu'il surpasse le rien ; »

Attendez, quatre égale zéro plus quatre, Aristote n'est pas d'accord ? Ben non. On a l'impression qu'il a peur d'avoir à considérer le rapport de quatre divisé par zéro.

Il revient sur la position des Pythagoriciens dans sa Métaphysique.

le rien n'a point de proportion possible
Aristote, Physique, Livre IV, XI.14 (ca. 320 av. J.-C.)

Il n'y a pas de proportion qui puisse servir à comparer le vide avec le corps, et à savoir de combien le corps le surpasse, de même que le rien n'a point de proportion possible avec le nombre. En effet, si quatre surpasse trois de un ; s'il surpasse deux davantage,[. . .] il n'y a plus de proportion dans laquelle on puisse dire qu'il surpasse le rien ;

12 les choses se composent de nombres

« Quant aux Pythagoriciens, comme ils avaient observé que beaucoup des propriétés des nombres se trouvent dans les corps sensibles, ils ont soutenu que les êtres sont des nombres, mais non pas des nombres séparés ; et ils ont avancé que les choses se composent de nombres. »

Bon résumons : pour Pythagore le vide existe, et tout est nombre. Donc le vide est nombre. Et quel nombre je vous prie ? On ne le saura jamais : c'est Aristote qui a gagné.

les choses se composent de nombres
Aristote, Métaphysique, III.2 (ca. 320 av. J.-C.)

Quant aux Pythagoriciens, comme ils avaient observé que beaucoup des propriétés des nombres se trouvent dans les corps sensibles, ils ont soutenu que les êtres sont des nombres, mais non pas des nombres séparés ; et ils ont avancé que les choses se composent de nombres.

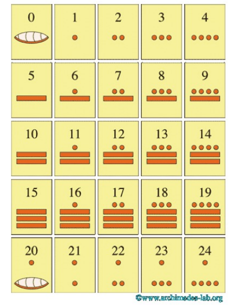
13 Nombres mayas

C'est à peu près au temps d'Aristote que les Mayas ont développé leur numération de position. Mais comme je vous raconte ça ailleurs, je ne vais pas insister.

Juste pour mémoire, les points sont des unités, les traits valent cinq. La numération est en base vingt. Le zéro est noté comme une sorte de fuseau, ou plutôt une coquille.

Donc la numération maya est extrêmement simple, du moins en apparence.

Nombres Mayas



14 les grands nombres mayas

La première fonction de la numération maya était le décompte du temps, en nombre de jours depuis le début de leur ère, le 11 août 3115 avant Jésus-Christ. Le temps se décomptait d'abord en jours, ensuite en vingtaines de jours, ensuite en années de 360 jours, soit 18 fois vingt jours.

Cela n'empêchait pas de la noter 1 suivi de deux zéros. Au-delà de l'année les puissances suivantes étaient bien en base vingt.

Une date typique, comme 1 million 101 mille 611 jours après la naissance du monde, s'écrit donc 7 bak'tun 13 k'atun 0 tun 0 uinal 11 k'in, soit 7 fois quatre cents ans, plus 13 fois vingt ans, plus 11 jours.

Que les Mayas aient inventé le zéro est certes remarquable mais leur invention est resté cantonnée à la péninsule du Yucatan, au Mexique. Alors que les Indiens, eux, ont fait école, c'est le moins qu'on puisse dire.

les grands nombres mayas
compte long des jours

k'in = 1 jour
winal = 20 jours
tun = $18 \times 20 = 360$
k'atun = 20 tun = 7200
bak'tun = 20^2 tun = 144 000
$\vdots$
alautun= 20^6 tun = 203 040 000 000

1 101 611 = 7 bak'tun 13 k'atun 0 tun 0 uinal 11 k'in

15 Les Vedas (1700–1100 av. J.-C.)

Pourquoi et quand ont-il inventé la numération de position ? On ne le sait pas vraiment. On trouve sur le web quantité de sites expliquant, textes à l'appui que les Indiens avaient tout inventé, des milliers d'années avant tout le monde, et que l'essentiel des mathématiques est déjà contenu dans les Vedas.

Les Vedas sont les plus vieux documents de la littérature sanscrite et les plus anciennes écritures de l'hindouisme. Il y a 4 Vedas : Rigveda, Yajurveda, Samaveda, Atharvaveda. Elles datent en gros du second millénaire avant notre ère. Entre 1100 et 1700 avant Jésus-Christ.

Les Vedas (1700–1100 av. J.-C.)
Rigveda, Yajurveda, Samaveda, Atharvaveda

16 Atharvaveda (ca. 1100 av. J.-C.)

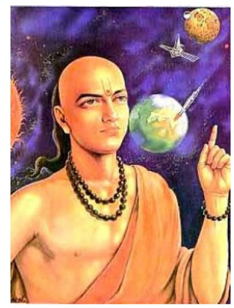
Atharvaveda (ca. 1100 av. J.-C.)
Veda des formules magiques

La notion du vide, appelée Ṣunya en sanscrit, se trouverait déjà expliquée dans les Vedas, en particulier dans l'Atharvaveda. C'est vrai qu'on y trouve Ṣunya, qui est un des mots qui désigneront le zéro, longtemps après les Vedas. Mais le zéro mathématique ne figure pas dans l'Atharvaveda.

Voici ce qu'en dit Kim Plofker, une des meilleures spécialistes de l'histoire des mathématiques indiennes. « À peu près tout ce qu'on peut dire, c'est que les textes védiques montrent une longue tradition de numération décimale, et une fascination profonde pour les concepts de quantités finies et infinies, et leur signification dans le cosmos. »

17 Āryabhata (476–550)

Āryabhaṭa (476–550)



On est donc obligé de se limiter aux mathématiciens et astronomes identifiés comme tels. Le premier d'entre eux est Aryabhata. Il écrit à l'âge de 23 ans, un livre dans lequel il montre une grande habitude de la manipulation des nombres. On y trouve en particulier le verset suivant.

18 Āryabhatīya (499)

Āryabhaṭīya (499)
Āryabhaṭa (476–550)

Ajoutez 5 à 100, multipliez par 8, ajoutez encore 62000, voilà pour un diamètre de deux myriades, la valeur approximative de la circonférence du cercle.

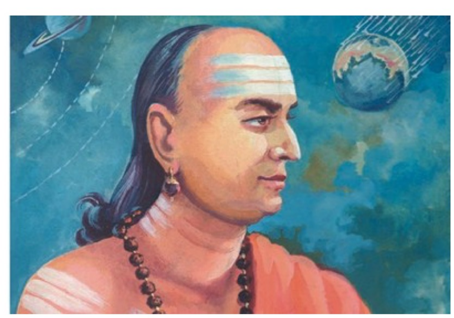
« Ajoutez 5 à 100, multipliez par 8, ajoutez encore 62000, voilà pour un diamètre de deux myriades, la valeur approximative de la circonférence du cercle. »

Faites le calcul : cela donne π égale 3,1416 ce qui est une approximation bien meilleure que celle d'Archimède.

Aryabhata manipule à maintes reprises dans son livre de très grands nombres, ce qui montre une grande habitude de la numération de position ; mais il ne discute pas explicitement la notion de zéro. Parce qu'il propose sa propre notation à base de lettres, notation qu'il semble bien être le seul à avoir utilisée.

19 Varāhamihira (ca. 505–585)

Varāhamihira (ca. 505–587)



Le suivant est Varahamihira, une génération plus tard.

20 Pañcasiddhāntikā

Voici le genre de verset qu'on trouve dans son livre d'astronomie, le Panca-siddhantika :

« Une période de cent quatre vingt mille années contient 66 mille 389 jours intercalaires et un million quarante cinq mille 95 jours d'élision. »

C'est vous dire qu'il n'a aucun problème à manipuler la numération de position et le zéro. Dans son texte, comme dans de nombreux textes indiens, chaque chiffre est désigné par plusieurs synonymes plus ou moins métaphoriques. Le zéro a huit noms différents que vous voyez recensés ici. Ceux qui apparaissent en bleu sont ceux qu'on retrouve le plus couramment : Kha, Bindu, et Ṣunya. À part Bindu et Ṣunya, les autres noms désignent le ciel, qui est vide pour les Indiens.

Le mot sanscrit Ṣunya, qui veut dire vide, a été traduit en arabe par Sifr. De Sifr ont dérivé d'une part chiffre, d'autre part zefiro au Moyen-Âge, qui est devenu zéro.

Pañcasiddhāntika

ambara
ākāśa
kha
gagana
bindu
viyat
vyoman
śūnya

21 Brahmagupta (ca. 598–665)

Les écrits d'Aryabhata, puis Varahamihira, indiquent que la numération de position, incluant le zéro, était déjà disponible, et bien comprise de leur temps, c'est-à-dire au sixième siècle. On ne sait toujours pas quand et où elle est apparue.

Le premier à avoir traité zéro comme un nombre, séparant les quantités positives des quantités négatives, c'est Brahmagupta, dans la première moitié du septième siècle.

Les mots qu'il utilise pour positif et négatif sont les mots sanscrits pour « fortune » et pour « dette ». Il a parfaitement compris les règles de multiplication.

Brahmagupta (ca. 598–665)

22 Brāhmasphutasiddhānta (628)

« Le produit d'un négatif et d'un positif est un négatif ; de deux négatifs, c'est un positif ; de deux positifs, c'est un positif. Le produit de zéro et d'un négatif, ou de zéro et d'un positif, ou de deux zéros, est zéro. »

Là où ça se gâte c'est pour les divisions.

« Un positif, divisé par un positif ou un négatif par un négatif, est un positif. Zéro, divisé par zéro, est nul. Un positif, divisé par un négatif, est un négatif. Un négatif, divisé par un positif, est un négatif. Un positif ou un négatif, divisés par zéro, c'est une fraction avec zéro pour dénominateur. De même, zéro divisé par un positif ou un négatif. »

Appeler le résultat d'une division par zéro « fraction dont le dénominateur est zéro », c'est bien reconnaître qu'il y a un problème. Il est plus surprenant qu'il se soit laissé arrêter quand zéro est en numérateur.

Brāhmasphuṭasiddhānta (628)
Brahmagupta (ca. 598–665)

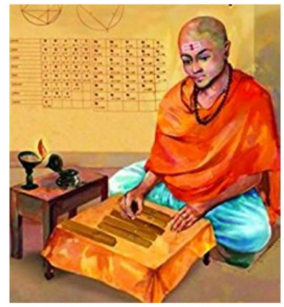
Le produit d'un négatif et d'un positif est un négatif ; de deux négatifs, c'est un positif ; de deux positifs, c'est un positif. Le produit de zéro et d'un négatif, ou de zéro et d'un positif, ou de deux zéros, est zéro.

[...]

Un positif, divisé par un positif, ou un négatif par un négatif, est un positif. Zéro, divisé par zéro, est nul. un positif, divisé par un négatif, est un négatif. un négatif, divisé par un positif, est un négatif. un positif ou un négatif, divisés par zéro, c'est une fraction avec zéro pour dénominateur. De même, zéro divisé par un positif ou un négatif.

23 Mahāvīrāchārya

Mahāvīrāchārya
IXe siècle



Mahaviracharya vient deux bons siècles après Brahmagupta. Cela ne l'empêche pas de tomber dans les mêmes pièges.

24 divisé par zéro

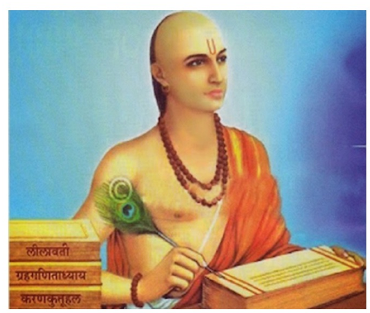
divisé par zéro
Mahāvīra, Gaṇita-sāra-saṅgraha, ca. 850

Un nombre multiplié par zéro est zéro, et ce nombre reste inchangé quand il est divisé par, combiné avec, ou diminué par zéro ; et dans l'opération d'addition, le zéro devient ce à quoi il est ajouté.

« Un nombre multiplié par zéro est zéro, et ce nombre reste inchangé quand il est divisé par, combiné avec, ou diminué par zéro ; et dans l'opération d'addition, le zéro devient ce à quoi il est ajouté. »

25 Bhāskarāchārya (1114–1185)

Bhāskarāchārya (1114–1185)



Le premier à véritablement progresser sur le sujet, est Bhascaracharya, au douzième siècle. Il consacre un chapitre de la Lilavati aux règles d'opérations du zéro.

26 Śūnyaparikarmāni

« Un nombre divisé par zéro sera « celui qui a pour diviseur zéro » ; multiplié par zéro, c'est zéro et « celui qui a pour multiplicateur zéro » doit être présent à l'esprit, s'il y a une prescription de reste : zéro ayant été produit en tant que multiplicateur, si, à nouveau, zéro est diviseur, alors un nombre doit être considéré comme inchangé, de la même manière exactement que diminué et augmenté de zéro. »

Śūnyaparikarmāni
Bhāskara, Līlāvatī (1150)

Un nombre divisé par zéro sera « celui qui a pour diviseur zéro » ; multiplié par zéro, c'est zéro et « celui qui a pour multiplicateur zéro » doit être présent à l'esprit, s'il y a une prescription de reste : zéro ayant été produit en tant que multiplicateur, si, à nouveau, zéro est diviseur, alors un nombre doit être considéré comme inchangé, de la même manière exactement que diminué et augmenté de zéro.

Bhaskara a compris les scrupules de Brahmagupta, et lui aussi parle de « celui qui a pour diviseur zéro », ce qui ne fait que déplacer le problème. Par contre, il affirme que diviser, puis multiplier par zéro laisse un nombre inchangé, comme si zéro sur zéro était égal à un.

Il revient sur le sujet dans son livre d'algèbre, le Bijaganita.

27 une telle fraction est une quantité infinie

« Dans l'addition de zéro, ou sa soustraction, la quantité, positive ou négative, reste inchangée. Mais soustraite de zéro, elle est renversée.

Jusque-là, ça va.

Dans la multiplication et le reste des opérations de zéro, le produit est zéro ; ainsi est une multiplication par zéro ; mais une quantité, divisée par zéro devient une fraction dont le dénominateur est zéro. On dit qu'une telle fraction est une quantité infinie. »

Ah là, il y a bien un progrès. Bhaskara ne distingue pas « plus l'infini » et « moins l'infini », mais il a compris ce qui se passe. L'argument donné par les commentateurs, est que diminuer le diviseur augmente le quotient. Comme analogie concrète, un commentateur donne l'ombre du gnomon qui devient infiniment longue au coucher et au lever du soleil, quelle que soit la longueur de l'aiguille.

Bhaskara, lui, se contente de l'analogie religieuse.

une telle fraction est une quantité infinie
Bhāskara, Bījagaṇita (1150)

Dans l'addition de zéro, ou sa soustraction, la quantité, positive ou négative, reste inchangée. Mais soustraite de zéro, elle est renversée.

[...]

Dans la multiplication et le reste des opérations de zéro, le produit est zéro ; ainsi est une multiplication par zéro ; mais une quantité, divisée par zéro devient une fraction dont le dénominateur est zéro. On dit qu'une telle fraction est une quantité infinie.

28 il n'y a pas de changement pour l'illimité

« Il ne doit pas y avoir de changement pour lui, quand de grands nombres entrent ou sortent d'un nombre « qui a pour diviseur zéro », de même qu'il n'y a pas de changement pour l'illimité quand, au moment de la destruction ou à celui de la création, des multitudes d'êtres entrent ou sortent de Vishnu. »

Au temps de Bhaskara, cela faisait sans doute six bons siècles que la numération de position, incluant le zéro, était passée dans les mœurs, probablement sans que les utilisateurs habituels ne se posent de question métaphysique sur la division par zéro.

Il en reste très peu de traces archéologiques.

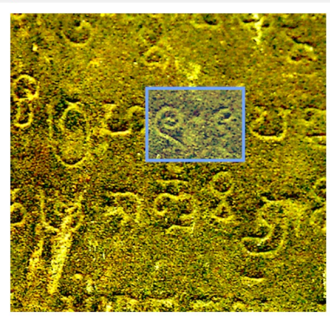
il n'y a pas de changement pour l'illimité
Bhāskara, Bījagaṇita (1150)

Il ne doit pas y avoir de changement pour lui, quand de grands nombres entrent ou sortent d'un nombre « qui a pour diviseur zéro », de même qu'il n'y a pas de changement pour l'illimité quand, au moment de la destruction ou à celui de la création, des multitudes d'êtres entrent ou sortent de Viṣṇu.

29 Inscription Khmère (ca. 683)

La plus ancienne n'est pas indienne mais cambodgienne. Ce qui est écrit dans l'encadré bleu est une date : 605, qui correspond à l'année 683 de notre ère. Le zéro est représenté par un point.

Inscription Khmère (ca. 683)
temple de Sambor, Cambodge

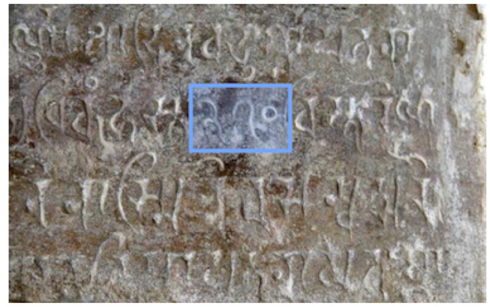


30 Rama rock (ca. 876)

La première inscription indienne semble être celle-ci. Dans l'encadré vous voyez le nombre 270, écrit presque nous l'écririons de nos jours.

L'inscription dit : « On a planté un jardin de 187 par 270 hastas, qui devrait produire suffisamment de fleurs pour fournir 50 guirlandes par jour au temple local. »

Rama rock (ca. 876)
temple de Vishnu, Gwalior

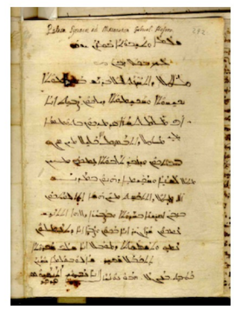


31 Sévère Sebôkht (ca. 575–665)

Les chiffres indiens ont commencé à être connus bien avant le neuvième siècle, et même avant que les Arabes ne commencent à les utiliser. On en a une preuve grâce à Sévère Sebôkht. C'était un évêque syrien. Il écrivait en syriaque. C'est une écriture magnifique, mais on est bien obligé de faire confiance aux spécialistes pour traduire.

Sebôkht écrivait après l'Hégire, qui date de 622. Il se considérait comme opprimé par les Grecs, et voyait probablement les Arabes comme des libérateurs. De notre point de vue, c'est une excellente référence sur ce qui était connu avant l'explosion de la science arabe, au huitième et neuvième siècles.

Sévère Sebôkht (ca. 575–665)



32 la science des Hindous

« Je ne parle pas de la science des Hindous [. . .] et de leurs inventions subtiles dans cette science de l'astronomie, qui sont plus ingénieuses que celles des Grecs et des Babyloniens, et de la méthode diserte de leurs calculs et de comput qui surpasse la parole, je veux dire celui qui est fait avec neuf signes ; s'ils avaient connu ces signes, ceux qui croient être arrivés seuls à la limite de la science, parce qu'ils parlent grec, ils seraient peut-être convaincus, bien qu'un peu tard, qu'il y en a aussi d'autres qui savent quelque chose. »

la science des Hindous
Sévère Sebôkht (ca. 575–665)

Je ne parle pas de la science des Hindous [. . .] et de leurs inventions subtiles dans cette science de l'astronomie, qui sont plus ingénieuses que celles des Grecs et des Babyloniens, et de la méthode diserte de leurs calculs et de comput qui surpasse la parole, je veux dire celui qui est fait avec neuf signes ; s'ils avaient connu ces signes, ceux qui croient être arrivés seuls à la limite de la science, parce qu'ils parlent grec, ils seraient peut-être convaincus, bien qu'un peu tard, qu'il y en a aussi d'autres qui savent quelque chose.

33 Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (ca. 780–850)

L'autre témoignage qui nous est parvenu est bien sûr celui d'al-Khwarizmi. C'est son livre sur les nombres indiens qui a fait connaître la numération indienne en occident, par sa traduction latine : le titre latin est « Algoritmi de numero indorum », « Al-Khwarizmi à propos des nombres indiens », et c'est de ce titre latin que vient le mot algorithme.

Voici comment al-Khwarizmi décrit l'usage du zéro. Les « Ils » auxquels il se réfère sont les Indiens.

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (ca. 780–850)

34 Algoritmi de numero indorum

Algoritmi de numero indorum

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (ca. 780–850)

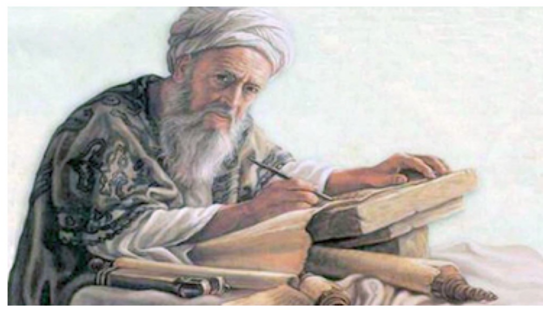
Pour ne pas confondre dix et un, ils ont eu besoin de différencier le signe qui signifie dix et celui qui signifie un. Ils ont donc placé un espace en face de lui et ils y ont mis un petit cercle, comme la lettre o. De sorte que par ce moyen, ils savent que la place des unités est vide, et qu'il n'y a aucun nombre dedans, excepté le petit cercle dont nous avons dit qu'il l'occupait.

« Pour ne pas confondre dix et un, ils ont eu besoin de différencier le signe qui signifie dix et celui qui signifie un. Ils ont donc placé un espace en face de lui et ils y ont mis un petit cercle, comme la lettre o. De sorte que par ce moyen, ils savent que la place des unités est vide, et qu'il n'y a aucun nombre dedans, excepté le petit cercle dont nous avons dit qu'il l'occupait. »

Remarquez que al-Khwarizmi, comme Sebôkht, considère qu'il y a neuf symboles numériques chez les Indiens, plus un symbole qui joue le rôle d'espace et de multiplicateur par 10. Pour eux, zéro n'est pas un chiffre comme les neuf autres.

35 Abu I-Rayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni (973–1048)

Abū Rayḥan Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī (973–1048)



On a un autre témoignage arabe sur la transmission des chiffres indiens, celui d'al-Biruni, qui a passé 13 ans en Inde entre 1017 et 1030.

36 les formes les plus abouties des signes Hindous

les formes les plus abouties des signes Hindous

al-Bīrūnī, Kitab al-Hind (ca. 1035)

Comme dans différentes parties de l'Inde, les lettres ont des formes différentes, c'est le cas aussi des signes numériques, qu'on appelle *anka*. Les signes numériques que *nous* utilisons dérivent des formes les plus abouties des signes Hindous.

« Comme dans différentes parties de l'Inde, les lettres ont des formes différentes, c'est le cas aussi des signes numériques, qu'on appelle *anka*. Les signes numériques que *nous* utilisons dérivent des formes les plus abouties des signes Hindous. »

Aucun auteur arabe n'a jamais prétendu autre chose que la vérité : les chiffres que nous appelons arabes viennent d'Inde. Personne n'a eu l'idée de le nier, au moins jusqu'au dix-neuvième siècle. Écoutez donc Laplace :

37 C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode

C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode

P.-S. Laplace, Exposition du système du Monde 2e édition (1798)

C'est de l'Inde, que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres, avec dix chiffres. L'idée de n'employer pour cet objet, qu'un nombre limité de caractères, en leur donnant à-la-fois, une valeur absolue, et une valeur de position, n'a point échappé au génie d'Archimède ; mais il ne l'a pas réduite à ce degré de simplicité, qui met notre système d'arithmétique, au premier rang des inventions utiles.

« C'est de l'Inde, que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres, avec dix chiffres. L'idée de n'employer pour cet objet, qu'un nombre limité de caractères, en leur donnant à la fois, une valeur absolue, et une valeur de position, n'a point échappé au génie d'Archimède ; mais il ne l'a pas réduite à ce degré de simplicité, qui met notre système d'arithmétique, au premier rang des inventions utiles. »

Alors pourquoi, au dix-neuvième siècle s'est-on mis à essayer de démontrer le contraire ? Pourquoi les « négationnistes des chiffres indiens » ont-ils sévi jusqu'au vingtième siècle, et pour certains encore maintenant ?

C'est une histoire plutôt triste, que je vous raconterai un autre jour. Pas maintenant, il se fait tard. Allez, avant de se coucher, un petit exercice de calcul ? Il est signé Mahaviracharya, au neuvième siècle.

« Ô toi qui a vu l'autre rive du profond et excellent océan de la pratique des opérations arithmétiques, place dans l'ordre 1,1,0,1,1,0,1,1. Si ce nombre est multiplié par 91, il en résulte un collier qui est digne d'un prince. »

Vous avez trouvé 1,0,0,2,0,0,2,0,0,1, soit plus d'un milliard de perles. Ça vous fait pas rêver ça ?

références

- B. Datta (1931) Early litterary evidence of the use of the zero in India, *Amer. Math. Monthly*, 38(10), 566–573
- R. Kaplan (1999) *The nothing that is : a natural history of zero*, Oxford : Oxford University Press
- C. Morice-Singh (1997) Histoire de la numération et de l'arithmétique indiennes des origines au douzième siècle, *in L'océan Indien au carrefour des Mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes, D. Tournès éd.*, Saint-Denis de la Réunion : IUFM, pp. 179–209
- D. Schlimm, K. Skosnik (2010) Symbols for nothing : different symbolic roles of zero and their gradual emergence in Mesopotamia, *Proc. of the 2010 meeting of the Canadian society for history and philosophy of mathematics*, Montréal, 257–266
- H. Selin (2000) *Mathematics across cultures*, New York : Springer