Une histoire de mathématiques à écouter sur

hist-math.fr

0 Les nombres de Thābit

Vous croyez peut-être que les mathématiques sont en constant progrès, que partout et de tous temps, les théorèmes ont été trouvés en connaissant tous ceux qui ont précédé ? Eh bien pas vraiment. Nous allons voir deux exemples en arithmétique.

Le premier vient de très loin, de Pythagore lui-même. Nicomaque de Gérase, un lointain successeur de Pythagore, explique ce qu'est un nombre surabondant, déficient ou parfait.

histoires d'arithmétique

Les nombres de Thābit

découvertes et redécouvertes

hist-math.fr Bernard Ycart

1 Nombres surabondants, déficients et parfaits

Cela dépend de la somme de ses diviseurs propres. Si elle est supérieure au nombre, il est surabondant comme 12, si elle est inférieure il est déficient comme 8, si elle est égale il est parfait comme 6.

Comme d'habitude chez les pythagoriciens, un sens mystique est attaché à chaque notion.

Euclide, lui ne croît pas vraiment à la mystique des nombres, seulement aux résultats démontrés. Dans le livre neuf des Éléments, on trouve ce magnifique théorème.

Nombres surabondants, déficients et parfaits
Nicomaque de Gérase, Introduction à l'Arithmétique (ca 100)

Parmi les nombres pairs simples, certains sont surabondants, certains déficients ; certains sont entre les deux et on les appelle parfaits.

- surabondant : $1+2+3+4+6=16>12$
- déficient : $1+2+4=7<8$
- parfait : $1+2+3=6$

2 Nombres parfaits

« Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait. »

Proportionnels en raison double : Euclide parle des puissances de deux. La somme des puissances de deux successives jusqu'à 2 puissance n vaut $2^{n+1}-1$. Si cette somme est un nombre premier, alors le produit par 2^n est un nombre parfait. Regardez ce que ça donne pour les premières valeurs : pour n égale 1, 2, 4 et 6, on obtient les quatre nombres parfaits qui étaient connus des pythagoriciens.

Nombres parfaits
Euclide, Livre IX, proposition XXXVI

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.

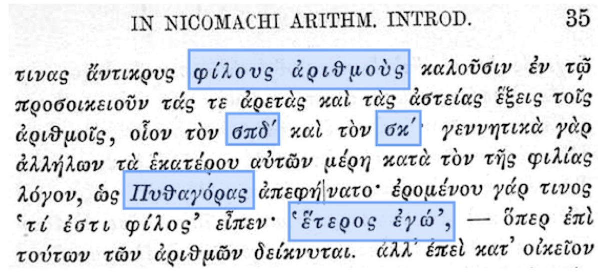
- $(1+2)\times 2=6$
- $(1+2+2^2)\times 2^2=28$
- $1+2+2^2+2^3=15$
- $(1+2+2^2+2^3+2^4)\times 2^4=496$
- $1+2+2^2+2^3+2^5=63$
- $(1+2+2^2+2^3+2^5+2^6)\times 2^6=8128$

3 Sur l'introduction arithmétique de Nicomaque

Ceci vient d'une édition de 1896 d'un manuscrit de Jamblique sur l'arithmétique de Nicomaque. Jamblique a aussi écrit une vie de Pythagore qui n'est pas très fiable, mais là les historiens s'accordent à le croire.

Il parle des « Philous arithmous », les nombres amicaux qui sont écrits deux lignes en-dessous : 284 et 220. Il explique qu'ils sont tels que les parties de chacun peuvent produire l'autre, d'après le mot sur l'amitié que Pythagore a révélé. Car lorsqu'on lui a demandé « qu'est-ce qu'un ami ? » il répondit « un autre moi-même », comme on le voit dans ces nombres.

Sur l'introduction arithmétique de Nicomaque
Jamblique (ca 250-330)


IN NICOMACHI ARITHM. INTROD. 35

τινας ἄντικρυς φίλους ἀριθμοὺς καλοῦσιν ἐν τῷ προσοικειοῦν τάς τε ἀρετὰς καὶ τὰς ἀστείας ἕξεις τοῖς ἀριθμοῖς, οἷον τὸν σπδ′ καὶ τὸν σκ′ · γεννητικὰ γὰρ ἀλλήλων τὰ ἑκατέρου αὐτῶν μέρη κατὰ τὸν τῆς φιλίας λόγον, ὡς Πυθαγόρας ἀπεφήνατο· ἐρομένου γάρ τινος ‘τί ἐστι φίλος’ εἶπεν· ‘ἕτερος ἐγώ’, — ὅπερ ἐπὶ τούτων τῶν ἀριθμῶν δείκνυται. ἀλλ' ἐπεὶ κατ' οἰκεῖον

4 Nombres amiables

De nos jours, on dit plutôt amiable. C'est une généralisation naturelle de la notion de nombre parfait. Deux nombres sont amiables si la somme des diviseurs propres de l'un est égale à l'autre.

Comme cas particulier, un nombre est parfait s'il est amiable avec lui-même, ce que je vous laisse méditer en mémoire de Pythagore.

Nombres amiables

$$
\begin{aligned}
284 &= 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 \\
220 &= 1+2+4+71+142
\end{aligned}
$$

5 Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Ce Thabit ibn Qurra est un des célèbres pensionnaires de la Maison de la Sagesse à Bagdad, au neuvième siècle de notre ère. Euh non, je ne suis pas plus sûr de la ressemblance que d'habitude.

Issu de la communauté des Sabéens, il parle grec, syriaque et arabe. La chance de sa vie, c'est la rencontre avec les frères Banu Musa, qui l'ont amené à Bagdad. Là, il produit une quantité impressionnante de traductions : Euclide, Archimède, Apollonius, Nicomaque de Gérase. Mais il ne se contente pas de traduire : il écrit aussi ses propres livres. La traduction de Nicomaque et Euclide l'a amené à réfléchir aux nombres amiables. Voici le début de son mémoire, intitulé : « Sur la détermination des nombres amiables ».

Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

6 Sur la détermination des nombres amiables

« Thabit ibn Qurra a dit : le récit est propagé et connu, parmi ceux qui étudient les livres des Grecs, de l'usage des nombres par Pythagore et les anciens philosophes de sa secte dans leur enseignement, de leur ferveur à leur égard et de la quête qu'ils en faisaient, exemples pour la plupart des notions qu'ils voulaient établir, notions de leur philosophie.

Les nombres qu'ils appelaient amiables sont deux nombres tels que, si on additionne les parties de chacun d'eux à part, la somme en est égale à l'autre nombre qui est associé de celui dont on a additionné les parties. »

Sur la détermination des nombres amiables
Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra a dit : le récit est propagé et connu, parmi ceux qui étudient les livres des Grecs, de l'usage des nombres par Pythagore et les anciens philosophes de sa secte dans leur enseignement, de leur ferveur à leur égard et de la quête qu'ils en faisaient, exemples pour la plupart des notions qu'ils voulaient établir, notions de leur philosophie.

[...] Les nombres qu'ils appelaient amiables sont deux nombres tels que, si on additionne les parties de chacun d'eux à part, la somme en est égale à l'autre nombre qui est associé de celui dont on a additionné les parties.

7 Sur la détermination des nombres amiables

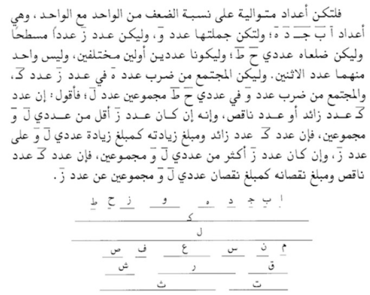
Après l'introduction, suit un développement dans le plus pur style euclidien, à base de lemmes dans le genre des livres 7 à 9 des Éléments. Par exemple le premier lemme dit : « Tout nombre plan dont les côtés sont deux nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre que ces deux-ci ». Traduisez : le produit de deux nombres premiers n'a pas d'autre diviseur propre que ces deux nombres. Comme chez Euclide, les nombres sont des longueurs, représentés par des traits, comme vous le voyez ici.

Il utilise non seulement le vocabulaire géométrique d'Euclide, mais aussi le style de démonstration, souvent par l'absurde.

Après neuf résultats préliminaires rigoureusement enchaînés, il en arrive à la Proposition 10, qui énonce son résultat principal. Le voici traduit en langage moderne.

Sur la détermination des nombres amiables

Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)


فلتكن أعداد متوالية على نسبة الضعف من الواحد مع الواحد، وهي أعداد ا ب جـ د ه؛ ولتكن جملتها عدد و، وليكن عدد ز عدداً مسطحاً وليكن ضلعاه عددي ح ط؛ وليكونا عددين أولين مختلفين، وليس واحد منهما عدد الاثنين. وليكن المجتمع من ضرب عدد ه في عدد ز عدد ک، والمجتمع من ضرب عدد و في عددي ح ط مجموعين عدد ل؛ فأقول: إن عدد ک عدد زائد أو عدد ناقص، وإنه إن كان عدد ز أقل من عددي ل و مجموعين، فإن عدد ک عدد زائد ومبلغ زيادته كمبلغ زيادة عددي ل و على عدد ز، وإن كان عدد ز أكثر من عددي ل و مجموعين، فإن عدد ک عدد ناقص ومبلغ نقصانه كمبلغ نقصان عددي ل و مجموعين عن عدد ز.

8 Sur la détermination des nombres amiables

Si $p = 3 \times 2^n - 1$, $q = 3 \times 2^{n-1} - 1$ et $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ sont premiers, alors les nombres $pq2^n$ et $r2^n$ sont amiables.

Vient ensuite la conclusion : « Et si on considère toutes les parties de chacun d'eux qu'on additionne, la somme sera égale à la somme de ces deux nombres. Le livre d'Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra sur les nombres appelés amiables est achevé, et il comporte dix propositions. »

La fidélité au style dépouillé d'Euclide va jusqu'à fuir le moindre exemple. On a peine à imaginer que lui-même n'a pas testé son résultat pour produire les premiers couples de nombres amiables. D'autres savants arabes après lui les donneront, mais tout ce travail va rester ignoré des occidentaux pendant pratiquement un millénaire.

Sur la détermination des nombres amiables

Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra (ca. 826–901)

Si $p = 3 \times 2^n - 1$, $q = 3 \times 2^{n-1} - 1$ et $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ sont premiers, alors les nombres $pq2^n$ et $r2^n$ sont amiables.

Et si on considère toutes les parties de chacun d'eux qu'on additionne, la somme sera égale à la somme de ces deux nombres. Le livre d'Abū al Ḥasan Thābit ibn Qurra sur les nombres appelés amiables est achevé, et il comporte dix propositions.

9 Descartes contre Fermat

En Europe, la question démarre par un des multiples défis entre Descartes et Fermat. Leur dispute a surtout porté sur la méthode de Maximis et Minimis, c'est-à-dire l'optimisation. Les défis d'arithmétique étaient plutôt marginaux. La mode était de se poser des problèmes, dans des lettres à des intermédiaires, qui pouvaient témoigner de ce qu'ils avaient reçu.

Ces échanges nous paraissent souvent, un peu puérils. Par exemple, en septembre 1636, Fermat écrit à Roberval. Il évoque sa soi-disant « Méthode » qui lui a permis quantité d'avancées mathématiques phénoménales dans de nombreux domaines. C'est sa réponse au Discours de la Méthode de Descartes.

Descartes contre Fermat

René Descartes (1596–1650), Pierre de Fermat (1607–1665)

10 Lettre à Roberval (22 septembre 1636)

« C'est par ce moyen que j'ai trouvé des nombres infinis qui font la même chose que 220 et 284, c'est-à-dire que les parties du premier égalent le second et celle du second le premier. De quoi si vous voulez voir un exemple pour tâter la question, ces deux y satisfont :

Je m'assure que vous m'avouerez que cette question et celles de sa sorte sont très malaisées. »

Les lettres de Descartes sont dans le même ton. En voici une à Mersenne du 31 mars 1638. Elle répond à des questions de Roberval et d'Étienne Pascal, le père de Blaise, envoyées par l'intermédiaire de Mersenne.

Lettre à Roberval (22 septembre 1636)
Pierre de Fermat (1607–1665)

C'est par ce moyen que j'ai trouvé des nombres infinis qui font la même chose que 220 et 284, c'est-à-dire que les parties du premier égalent le second et celle du second le premier. De quoi si vous voulez voir un exemple pour tâter la question, ces deux y satisfont :

17296 et 18416

Je m'assure que vous m'avouerez que cette question et celles de sa sorte sont très malaisées.

11 Lettre à Mersenne (31 mars 1638)

« Je suis bien aise d'apprendre que Messieurs Pascal et Roberval n'ont point de si particulière liaison avec Monsieur de Fermat, que vos lettres l'avaient fait imaginer. »

Descartes se méfie. Il répond point par point aux questions posées, et en arrive à la suivante.

« Trouver une infinité de nombres, lesquels étant pris deux à deux, l'un est égal aux parties aliquotes de l'autre, et reciproquement l'autre est égal aux parties aliquotes du premier. À quoi je satisfais par cette règle : »

Et là Descartes donne la règle de contruction de Thabit ibn Qurra, qu'il a retrouvée comme Fermat, et il calcule les trois premières paires.

Puis, assez négligemment il conclut : « Je n'ai que faire d'ajouter la démonstration de ceci, car j'épargne le temps, et en matière de problèmes, c'est assez d'en donner le résultat. Ceux qui l'ont proposé peuvent examiner s'il est bien résolu ou non. Mais je serai bien aise, avant que de leur faire voir cette règle, que vous les priez de vous donner aussi la leur, afin que, si elle est meilleure, je la puisse apprendre. »

En plus, il se moque !

Lettre à Mersenne (31 mars 1638)
René Descartes (1596–1650)

Ie suis bien ayse d'apprendre que M$^{\text{rs}}$ Pascal et Roberval n'ont point de si particulière liaison avec M$^{\text{r}}$ de Fermat, que vos lettres l'avoient fait imaginer.

[...]

284 et 220 ; 18416 et 17296 ; 9437056 et 9363584 .

Ie n'ay que faire d'aiouster la demonstration de cecy, car i'espargne le tems, & en matiere de problesmes, c'est assez d'en donner le *facit*, puis ceux qui l'ont proposé peuuent examiner s'il est bien resolu ou non. Mais ie seray bien ayse, auant que de leur faire voir cete regle, que vous les priez de vous donner aussy la leur, affin que, si elle est meilleure, ie la puisse apprendre.

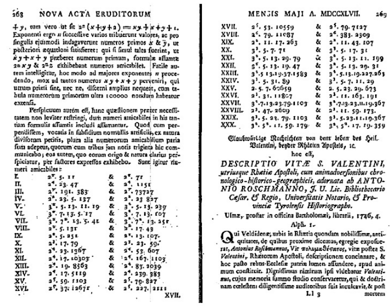
12 Leonhard Euler (1707–1783)

Quand Euler se mêle d'un problème, ça ne rigole plus. On trouve, dans son œuvre monumentale, trois mémoires sur les nombres amiables.

Leonhard Euler (1707–1783)

13 De numeris amicabilibus (1747)

De numeris amicabilibus (1747)
Leonhard Euler (1707–1783)



Dans le premier, que vous voyez ici, il donne 30 paires. Il en calculera en tout 62, sans dire comment il a fait. On suppose qu'il avait trouvé une généralisation du théorème de Thabit ibn Qurra.

En 1830 Legendre, dans la troisième édition de sa théorie des nombres, décrit la construction des nombres amiables. Puis il ajoute :

14 Théorie des nombres (1830)

« Les problèmes dont nous venons de nous occuper sont du nombre de ceux sur lesquels les géomètres s'exerçaient du temps de Fermat, c'est-à-dire vers le milieu du 17^{e} siècle. On en fait mention ici parce que la méthode de les résoudre n'est pas généralement connue. »

Théorie des nombres (1830)
Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

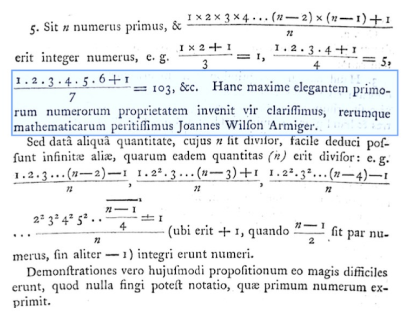
Les problèmes dont nous venons de nous occuper sont du nombre de ceux sur lesquels les géomètres s'exerçaient du temps de Fermat, c'est-à-dire vers le milieu du 17^{e} siècle. On en fait mention ici parce que la méthode de les résoudre n'est pas généralement connue.

Non elle n'était toujours pas généralement connue, et personne ne savait encore qu'elle datait de dix siècles. La première traduction en français du mémoire de Thabit ibn Qurra est parue en 1852.

Nous allons voir maintenant un autre exemple de résultat ignoré, le théorème de Wilson. La dénomination vient d'un livre de Edward Waring, les Méditations Algébriques.

15 Meditationes Algebraicæ (1770)

Meditationes Algebraicæ (1770)
Edward Waring (1736-1798)



5. Sit n numerus primus, & $\frac{1\times2\times3\times4\dots(n-2)\times(n-1)+1}{n}$ erit integer numerus, e. g. $\frac{1\times2+1}{3}=1$, $\frac{1.2.3.4+1}{4}=5$, $\frac{1.2.3.4.5.6+1}{7}=103$, &c. Hanc maxime elegantem primorum numerorum proprietatem invenit vir clariſſimus, rerumque mathematicarum peritiſſimus Joannes Wilſon Armiger.

Sed datâ aliquâ quantitate, cujus n ſit diviſor, facile deduci poſſunt infinitæ aliæ, quarum eadem quantitas (n) erit diviſor: e. g. $\frac{1.2.3\dots(n-2)-1}{n}$, $\frac{1.2^2.3\dots(n-3)+1}{n}$, $\frac{1.2^2.3^2\dots(n-4)-1}{n}$ $\dots\frac{2^2\,3^2\,4^2\,5^2\dots\overline{\frac{n-1}{4}}^{2}\pm1}{n}$ (ubi erit $+1$, quando $\frac{n-1}{2}$ ſit par numerus, ſin aliter -1) integri erunt numeri.

Demonſtrationes vero hujuſmodi propoſitionum eo magis difficiles erunt, quod nulla fingi poteſt notatio, quæ primum numerum exprimit.

Il énonce le théorème de Wilson, à savoir que si n est premier, factorielle $n-1$ plus un est divisible par n. Puis il ajoute : « Cette propriété extrêmement élégante des nombres premiers a été trouvée par le célèbre John Wilson, un homme très habile dans les choses mathématiques ».

16 John Wilson (1741–1793)

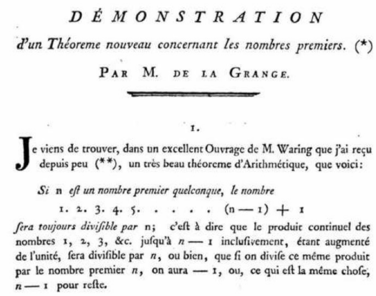
John Wilson (1741–1793)

Cet homme très habile, le voici. Ça aurait été dommage de se priver d'une aussi belle perruque.

Ni Waring ni Wilson n'avaient de démonstration du théorème. Le livre est diffusé, tombe dans les mains de Lagrange à l'Académie de Berlin, qui s'empresse d'écrire un mémoire.

17 théorème concernant les nombres premiers (1771)

théorème concernant les nombres premiers (1771)
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)



DÉMONSTRATION

d'un Théoreme nouveau concernant les nombres premiers. (*)

PAR M. DE LA GRANGE.

1.

Je viens de trouver, dans un excellent Ouvrage de M. Waring que j'ai reçu depuis peu (**), un très beau théoreme d'Arithmétique, que voici:

Si n *eſt un nombre premier quelconque, le nombre*

1. 2. 3. 4. 5. . . . . . (n — 1) + 1

ſera toujours diviſible par n; c'eſt à dire que le produit continuel des nombres 1, 2, 3, &c. juſqu'à *n* — 1 incluſivement, étant augmenté de l'unité, ſera diviſible par *n*, ou bien, que ſi on diviſe ce même produit par le nombre premier *n*, on aura — 1, ou, ce qui eſt la même choſe, *n* — 1 pour reſte.

« Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers.

Je viens de trouver, dans un excellent ouvrage de M. Waring que j'ai reçu depuis peu, un très beau théorème d'arithmétique, que voici. »

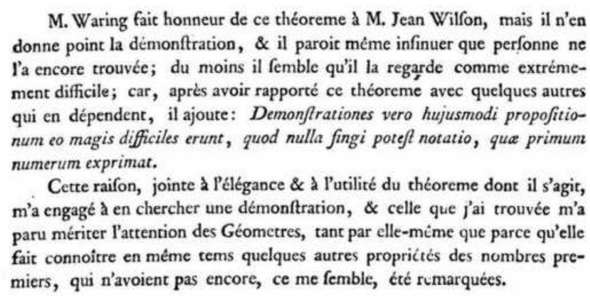
18 théorème concernant les nombres premiers (1771)

« Monsieur Waring fait l'honneur de ce théorème à M. Jean Wilson, mais il n'en donne point la démonstration, et il paraît même insinuer que personne ne l'a encore trouvée ; du moins il semble qu'il la regarde comme extrêmement difficile. »

Lagrange donne deux démonstrations, plusieurs généralisations, il fait le lien avec le petit théorème de Fermat. Il dit que la propriété étant caractéristique, elle fournit un test de primalité ; bref du travail solide : Lagrange quoi.

Il ignore que ce « théorème nouveau concernant les nombres premiers », est très précisément énoncé, dans des termes identiques, dans un des nombreux manuscrits non publiés de Leibniz. Il ignore surtout le travail de cet homme :

théorème concernant les nombres premiers (1771)
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)



M. Waring fait honneur de ce théoreme à M. Jean Wilſon, mais il n'en donne point la démonſtration, & il paroit même inſinuer que perſonne ne l'a encore trouvée; du moins il ſemble qu'il la regarde comme extrémement difficile; car, après avoir rapporté ce théoreme avec quelques autres qui en dépendent, il ajoute: *Demonſtrationes vero hujusmodi propoſitionum eo magis difficiles erunt, quod nulla ſingi poteſt notatio, quæ primum numerum exprimat.*

Cette raiſon, jointe à l'élégance & à l'utilité du théoreme dont il s'agit, m'a engagé à en chercher une démonſtration, & celle que j'ai trouvée m'a paru mériter l'attention des Géometres, tant par elle-même que parce qu'elle fait connoître en même tems quelques autres propriétés des nombres premiers, qui n'avoient pas encore, ce me ſemble, été remarquées.

19 Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

Al-Haytham. La notorité des savants arabes peut s'évaluer selon qu'ils apparaissent ou non dans les textes latins, sous un nom déformé. Thabit ibn Qurra est devenu Thébit, al-Haytham est devenu Alhazen. Il est aussi connu comme physicien, par ses travaux sur l'optique.

Il a écrit un petit mémoire, intitulé « Sur la solution d'un problème numérique ». Il commence par énoncer le problème.

20 Sur la solution d'un problème numérique

Sur la solution d'un problème numérique
Ibn al-Haytham (ca 965–1040)

« Trouver un nombre tel que si on le divise par deux il en reste un. Pareil par trois, par quatre, par cinq, par six ; et si on le divise par sept, il n'en reste rien. »

Trouver un nombre tel que si on le divise par deux il en reste un ; si on le divise par trois, il en reste un ; si on le divise par quatre, il en reste un ; si on le divise par cinq, il en reste un ; si on le divise par six, il en reste un ; si on le divise par sept, il n'en reste rien.

21 Méthode canonique

« Le problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'il admet de nombreuses solutions. Il y a deux méthodes pour les trouver. L'une d'elles est la méthode canonique : nous multiplions tous les nombres qui divisent le nombre cherché l'un par l'autre, nous ajoutons un au produit ; ceci est le nombre cherché. »

Donc factorielle six plus un répond à la question.

Méthode canonique
al-Haytham, Sur la solution d'un problème numérique (ca 1000)

Le problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'il admet de nombreuses solutions. Il y a deux méthodes pour les trouver. L'une d'elles est la méthode canonique : nous multiplions tous les nombres qui divisent le nombre cherché l'un par l'autre, nous ajoutons un au produit ; ceci est le nombre cherché.

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 721 .$$

22 une autre méthode

« Nous pouvons trouver le nombre cherché par une autre méthode, qui est la méthode par laquelle nous montrons que ce problème a plusieurs, et même une infinité de solutions. »

Al-Haytham explique qu'il faut commencer par chercher un multiple de 60, qui est le PPCM des entiers de 2 à 6. Parmi les multiples de 60, le premier qui convient est 300.

« Et si trois cents est divisible par ces nombres sans reste, alors si nous divisons trois cent un par chacun de ces nombres, il reste un, et trois cent un a un septième, donc il est divisible par 7 et il ne reste rien. Donc 301 est le nombre cherché. »

Il explique ensuite comment trouver les autres solutions.

Bien. Donc al-Haytham a compris que factorielle 6 plus un est divisible par 7. C'est ce qu'il appelle la méthode canonique ; pour nous c'est le théorème de Wilson. Il a aussi compris que la question pouvait être vue comme un problème de restes chinois, pour trouver l'ensemble des solutions.

Mais jusque-là, il n'a traité que le cas particulier $n = 7$, ça ne fait pas un théorème. Peut-être, mais pour lui le cas particulier $n = 7$ n'est qu'un artifice pédagogique. Il est bien conscient de la généralité des résultats, et il l'exprime clairement.

une autre méthode
al-Haytham, Sur la solution d'un problème numérique (ca 1000)

Nous pouvons trouver le nombre cherché par une autre méthode, qui est la méthode par laquelle nous montrons que ce problème a plusieurs, et même une infinité de solutions.

[. . .] Et si trois cents est divisible par ces nombres sans reste, alors si nous divisons trois cent un par chacun de ces nombres, il reste un, et trois cent un a un septième, donc il est divisible par 7 et il ne reste rien. Donc 301 est le nombre cherché.

23 pour tout nombre premier

« Ceci étant posé, nous disons que cette propriété est nécessaire pour tout nombre premier, c'est-à-dire que pour tout nombre premier – qui est un nombre qui n'est multiple que de l'unité –, si on multiplie les nombres qui le précèdent les uns par les autres selon la manière que nous avons introduite, et si on ajoute un au produit, alors si on divise la somme par chacun des nombres qui précèdent le nombre premier, il en reste un, et si on la divise par le nombre premier, il n'en reste rien. »

Il vient bien d'énoncer le théorème de Wilson. Il en avait probablement la démonstration, car il avait conscience du théorème de Bézout, mais on ne l'a pas retrouvée. Voici la conclusion du mémoire :

pour tout nombre premier
al-Haytham, Sur la solution d'un problème numérique (ca 1000)

Ceci étant posé, nous disons que cette propriété est nécessaire pour tout nombre premier, c'est-à-dire que pour tout nombre premier – qui est un nombre qui n'est multiple que de l'unité –, si on multiplie les nombres qui le précèdent les uns par les autres selon la manière que nous avons introduite, et si on ajoute un au produit, alors si on divise la somme par chacun des nombres qui précèdent le nombre premier, il en reste un, et si on la divise par le nombre premier, il n'en reste rien.

24 tous les problèmes de ce genre

« Ce que nous venons de mentionner englobe les réponses à tous les problèmes de ce genre, et que Dieu nous assiste. La réponse au problème numérique est achevée. Louange à Dieu Seigneur du Monde ; Béni soit Son Prophète Mohammed, l'Élu, et tous les siens. »

Effectivement, il n'y avait pas grand chose à rajouter. À condition de bien lire chaque mot de son texte.

tous les problèmes de ce genre
al-Haytham, Sur la solution d'un problème numérique (ca 1000)

Ce que nous venons de mentionner englobe les réponses à tous les problèmes de ce genre, et que Dieu nous assiste. La réponse au problème numérique est achevée. Louange à Dieu Seigneur du Monde ; Béni soit Son Prophète Mohammed, l'Élu, et tous les siens.

25 Leonardo Pisano (ca 1170–1250)

Apparemment, ça n'a pas été le cas de Fibonacci. Il est un des très rares savants européens de son temps à comprendre l'arabe. Il a probablement lu le traité d'al-Haytham ou un commentaire, car il inclut exactement le même problème dans son Liber Abaci.

Leonardo Pisano (ca 1170–1250)
Fibonacci

26 Trouver un nombre qui est un multiple de 7

« Il existe un nombre qui divisé par 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, a toujours pour reste 1, et est véritablement divisible par 7. On cherche ce nombre. »

Là, Fibonacci explique la méthode consistant à fouiller parmi les multiples de 60 pour exhiber la solution 301. Il explique ensuite que comme 420 est divisible par tous les nombres de 2 à 7, on peut l'ajouter à 301 autant de fois qu'on veut pour obtenir d'autres solutions.

Comme à son habitude, il donne en suivant d'autres applications.

Trouver un nombre qui est un multiple de 7
Leonardo Pisano, Liber Abaci (1202)

Il existe un nombre qui divisé par 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, a toujours pour reste 1, et est véritablement divisible par 7. On cherche ce nombre.

27 De eodem

« Par cette méthode nous pouvons trouver un autre nombre qui divisé par n'importe quel nombre de deux à dix a toujours pour reste 1, et est divisible par 11 ; ce nombre est 25201. Aussi, si le nombre que vous voyez est divisé par n'importe quel nombre entre 2 et 23, tu trouveras que le reste est 1, et qu'il est divisible par 23 ; on trouve ce nombre par la méthode ci-dessus. »

Évidemment, il a choisi 7, 11 et 23 qui sont des nombres premiers, mais il n'exprime nulle part la condition. Il ne remarque pas non plus que parmi les solutions, il y a toujours factorielle $n-1$ plus un.

Voyons ce qu'en dit Bachet de Méziriac.

De eodem
Leonardo Pisano, Liber Abaci (1202)

Par cette méthode nous pouvons trouver un autre nombre qui divisé par n'importe quel nombre de deux à dix a toujours pour reste 1, et est divisible par 11 ; ce nombre est 25201. Aussi, si 698377681 est divisé par n'importe quel nombre entre 2 et 23, tu trouveras que le reste est 1, et qu'il est divisible par 23 ; on trouve ce nombre par la méthode ci-dessus.

28 Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)

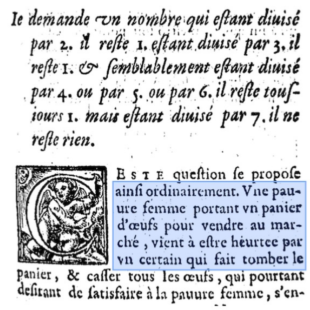
Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)

Sous couvert de « Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres », la deuxième édition de son livre contient des résultats d'arithmétique poussés, en particulier le théorème de Bézout ; et aussi quelques applications, dont exactement la même que Fibonacci.

29 Vne pauure femme portant un panier d'œufs

« Cette question se pose ainsi ordinairement. Une pauvre femme portant un panier d'œufs, vient à être heurtée par quelqu'un qui fait tomber le panier, et casser tous les œufs. Pourtant, désirant satisfaire la pauvre femme, il s'enquiert du nombre de ses œufs. Elle répond qu'elle ne le sait pas certainement, mais qu'elle se souvient bien que les comptant deux à deux il en restait 1. Et semblablement, les comptant trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, ou six à six, il restait toujours 1. Et les comptant sept à sept il ne restait rien. »

Vne pauure femme portant un panier d'œufs
Bachet de Méziriac, problèmes plaisans et délectables (1624)


Ie demande vn nombre qui eſtant diuisé par 2. il reſte 1. eſtant diuisé par 3. il reſte 1. & ſemblablement eſtant diuisé par 4. ou par 5. ou par 6. il reſte touſiours 1. mais eſtant diuisé par 7. il ne reſte rien.

CESTE queſtion ſe propoſe ainſi ordinairement. Vne pauure femme portant vn panier d'œufs pour vendre au marché, vient à eſtre heurtee par vn certain qui fait tomber le panier, & caſſer tous les œufs, qui pourtant deſirant de ſatisfaire à la pauure femme, s'en-

Cette pauvre femme, que l'on vient de bousculer, si violemment que ses quelques centaines d'œufs sont tous cassés, et qu'elle ne se souvient plus de leur nombre, a tout de même gardé une virtuosité arithmétique qui m'impressionne.

30 auãt que passer outre

auãt que passer outre
Bachet de Méziriac, problèmes plaisans et délectables (1624)

Comme Fibonacci, Bachet donne la solution 301. Il dit en passant :

« Mais avant de continuer, il faut remarquer qu'afin que la question soit possible, il est nécessaire que chacun des nombres 2.3.4.5.6 soit premier au nombre 7. »

Mais auãt que passer outre, il faut remarquer qu'à fin que la questiõ soit possible, il est necessaire que chascun des nombres 2.3.4.5.6 soit premier au nõbre 7.

Puis il ajoute :

31 infinis nombres qui la soudront

« Pour conclusion prends garde que cette question n'a pas qu'une seule solution, car on peut trouver une infinité de nombres qui la résoudront, ce qui se fait ainsi.

En ayant trouvé un comme 301, prends le plus petit nombre multiple de 7 et 60. qui est le produit de leur multiplication, à savoir 420. Ajoute ce nombre à 301. Tu auras 721 qui fait le même effet que 301. Et si tu ajoutes à nouveau 420 à 721 tu en auras encore un autre, et ainsi plusieurs autres sans fin. »

Bien sûr Bachet ne traite toujours que le cas particulier $n = 7$. Mais vu le style de rédaction, et le soin qu'il prend à justifier ses résultats, on peut lui accorder qu'il a conscience de sa généralité. Au fond, il réécrit le mémoire d'al-Haytham, sans le théorème de Wilson, et avec six siècles de plus.

infinis nombres qui la soudront

Bachet de Méziriac, problèmes plaisans et délectables (1624)

Pour conclusion prens garde que ceste question n'a pas vne seule solution, car on peut trouver infinis nombres qui la soudront, ce qui se fait ainsi. En ayant treuué vn comme 301, prens le moindre nombre mesuré par 7. & 60. qui est le produit de leur multiplication, à sçauoir 420. & adioute ce nombre à 301. tu auras 721. qui fait le mesme effet que 301. & si tu adioutes derechef 420. à 721. tu en auras encor vn autre, & ainsi plusieurs autres sans fin.

32 références

Le 13 février 1258, les troupes mongoles ont pris la ville de Bagdad. S'en est suivie une semaine de massacres, de pillages et de destructions. La grande bibliothèque de Bagdad fut entièrement mise à sac. Certains témoins ont rapporté que les eaux du Tigre étaient noircies par l'encre de tous les livres qui y avaient été jetés.

On ne saura jamais combien de théorèmes se sont dilués dans le Tigre.

Comment ? Ben non, c'est pas drôle. J'y peux rien moi !

références

- S. Brentjes, J. P. Hogendijk (1989) Notes on Thābit ibn Qurra and his rule for amicable numbers, *Historia Mathematica*, 16, 373–378
- R. Rashed (1984) *Entre arithmétique et algèbre : recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris : Les Belles Lettres
- R. Rashed (1993) *Les mathématiques infinitésimales du* IX^e^ *au* XI^e^ *siècle volume* II *: ibn al-Haytham*, London : Al-Furqān Islamic Heritage Foundation
- R. Rashed ed. (2009) *Thābit ibn Qurra : Science and philosophy in ninth-century Baghdad*, Berlin : de Gruyter
- G. Williams, R. Webster (2010) Friends in High places, *Mathematical Spectrum*, 42(2) 54–58